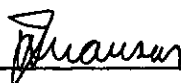


OBTENÇÃO DE MATRIZ DE RIGIDEZ UTILIZANDO O MÉTODO  
DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

FERNANDO AMORIM DE PAULA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA  
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO  
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:



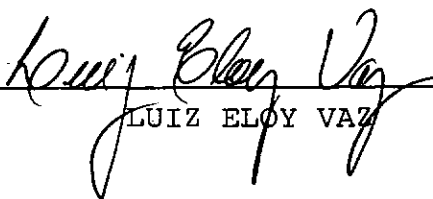
---

WEBE JOÃO MANSUR  
(Presidente)



---

NELSON FRANCISCO FAVILLA EBECKEN



---

LUIZ ELOY VAZ

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 1986

PAULA, FERNANDO AMORIM DE

Obtenção de matriz de rigidez utilizando o Método dos Elementos de Contorno (Rio de Janeiro) 1986.

*ix*, 134 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1986)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Elementos de Contorno I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

*A Denise e Patricia  
minha esposa e filha*

## AGRADECIMENTOS

Ao professor José Cláudio de Faria Telles pela orientação dos trabalhos.

Ao professor Webe João Mansur pelo apoio e sugestões na conclusão da pesquisa.

Ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais pela oportunidade.

Aos colegas e professores do Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ pelo saudável convívio.

À minha esposa e filha pelo apoio e paciência.

À Sueli pelo trabalho de datilografia.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE  
MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

## OBTENÇÃO DE MATRIZ DE RIGIDEZ UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

FERNANDO AMORIM DE PAULA

Abril de 1986

Orientador: José Cláudio de Faria Telles

Programa: Engenharia Civil

O objetivo do presente trabalho é a obtenção da matriz de rigidez para um corpo, utilizando a formulação direta do Método dos Elementos de Contorno (MEC), em uma forma apropriada para a combinação com o Método dos Elementos Finitos (MEF). A simetria é a principal característica que esta matriz deve apresentar, tornando possível a utilização das técnicas computacionais desenvolvidas para o MEF.

A matriz de rigidez obtida com o MEC não apresenta a propriedade de simetria inerente, e são analisadas as perturbações que a simetrização simples da matriz (considerar a sua parte simétrica) introduz na solução de um problema.

Na primeira parte do trabalho é analisado o problema de potencial bi-dimensional, com o estudo comparativo de resultados obtidos com as "matrizes de rigidez" simetrizadas de diversas formulações.

Este estudo então é desenvolvido para a elasticidade bi-dimensional, sendo analisado com maiores detalhes o problema da descontinuidade de forças de superfície em pontos do contorno. Esta descontinuidade é considerada com a introdução de ' condições de canto ' adicionais, ou com o conceito do Método de Galerkin, que utiliza as funções de ponderação decompostas em duas componentes nestes pontos.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UF RJ AS PARTIAL  
FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF  
MASTER OF SCIENCE (M.Sc.)

DEVELOPMENT OF STIFFNESS MATRIX WITH THE BOUNDARY  
ELEMENT METHOD

FERNANDO AMORIM DE PAULA

April, 1986

Chairman: José Cláudio de Faria Telles  
Department: Civil Engineering

This work is concerned with the development of a stiffness matrix for a body, using a direct Boundary Element Method Approach (BEM), in a suitable way to couple into a global Finite Element Method formulation (FEM). The main property of this matrix must be the symmetry, to allow the use of FEM computational techniques.

The stiffness matrix developed with BEM does not exhibit the inherent symmetry property, and the perturbations of the solutions are examined when the simple symmetrisation (by considering the symmetric part of the matrix) is adopted.

In the first part of this work the 2-Dimensional Potential problem is examined, and results obtained from the symmetric "stiffness matrix" of some formulations are compared.

Then this research is developed for 2-Dimensional Elastostatics, and the surface discontinuous tractions at nodal points are examined in depth. These discontinuities are considered with the introduction of extra 'corner conditions', or with the Galerkin Method concept, that uses weighting functions at these nodal points divided into two components.

## ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO .....	01
I.1 - Introdução Geral .....	01
I.2 - Revisão Bibliográfica .....	03
I.3 - Descrição do Corpo da Tese .....	06
 CAPÍTULO II - DESCRIÇÃO DO PROBLEMA E MÉTODOS DE CÁLCULO	 09
II.1 - Problemas de Potencial .....	09
II.2 - Problemas de Elasticidade .....	11
II.3 - O Método dos Elementos de Contorno ..	15
II.3.1 - O Método dos Elementos de Con- torno para o Problema de Po- tencial .....	16
II.3.2 - O Método dos Elementos de Con- torno para o Problema de Elas- ticidade .....	24
II.4 - O Método dos Elementos Finitos .....	32
II.5 - Obtenção da Matriz de Rigidez Utilizan- do o Método dos Elementos de Contorno.	36
II.5.1 - Um Procedimento Alternativo .	39
 CAPÍTULO III - APLICAÇÕES PARA PROBLEMAS DE POTENCIAL ...	 44
III.1 - Introdução .....	44
III.2 - Método da Colocação .....	45
III.3 - Método de Galerkin .....	49
III.4 - Procedimento Alternativo .....	55

III.5 - Aplicações Numéricas .....	57
III.5.1 - Distribuição de Temperatu <u>ras</u> num Domínio Quadrado.	57
III.5.2 - Distribuição de Temperatu <u>ras</u> num Domínio Semi-Cir- cular .....	63

## CAPITULO IV - APLICAÇÕES PARA PROBLEMAS DE ELASTICIDADE . 67

IV.1 - Introdução .....	67
IV.2 - Método da Colocação .....	71
IV.2.1 - Obtenção da Matriz de Rigi- dez .....	80
IV.3 - Método de Galerkin .....	88
IV.3.1 - Obtenção da Matriz de Rigi- dez .....	101
IV.4 - Aplicações Numéricas .....	102
IV.4.1 - Chapa Retangular Tractionada	103
IV.4.2 - Viga em Balanço com Carga na Extremidade .....	106
IV.4.3 - Viga em Balanço com Carga U- niformemente Distribuída ..	108
IV.4.4 - Tubo Cilíndrico de Parede Es- pessa com Pressão Interna .	112
IV.4.5 - Viga Longa com Carga Unifor- mente Distribuída .....	115

## CAPÍTULO V - CONCLUSÕES .....

V.1 - Considerações Iniciais .....	121
V.2 - Conclusões Gerais .....	122

V.3 - Sugestões .....	126
APÊNDICE 1 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DE GAUSS .....	128
APÊNDICE 2 - MUDANÇA DE VARIÁVEIS PARA INTEGRAIS SINGULARES .....	129
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	132

## CAPITULO I

### INTRODUÇÃO

#### I.1 - INTRODUÇÃO GERAL

A grande importância atual dos métodos numéricos para a solução de problemas governados por equações diferenciais, cuja solução analítica só é conhecida para casos muito particulares, leva à procura de procedimentos que possibilitem uma melhora na eficiência computacional, precisão, barateamento, etc. Um dos caminhos para se cumprir com este objetivo é a combinação de diferentes métodos numéricos. Esta combinação tem como finalidade principal utilizar o método numérico mais apropriado para cada região do corpo em estudo, de forma a se obter resultados mais precisos com a redução no número de operações e o mínimo de gastos operacionais.

Com esta finalidade, será desenvolvida neste trabalho uma formulação que permita a combinação do Método dos Elementos Finitos com o Método dos Elementos de Contorno.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é o método numérico mais difundido em todos os ramos da engenharia, sendo portanto o método que possui maior número de pacotes computacionais aplicativos, conseqüentemente as melhores técnicas computacionais desenvolvidas. É um método que tem um largo campo de aplicação, com convergência e eficiência comprovadas, mas que em certos casos apresenta um comportamento pior do que o apresentado pelo Mé

tudo dos Elementos de Contorno. Pode-se citar 2 exemplos típicos onde isto ocorre, que seriam as regiões de concentração de tensões e as regiões infinitas.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é um método numérico mais moderno, mas que tem experimentado um grande avanço nos últimos anos. Isto se deve a vários fatores, entre eles a sua melhor adaptação para determinados problemas específicos como citado acima, e outro muito importante que é o reduzido volume de dados necessários para definição de uma determinada região em comparação com o MEF. Isto se deve principalmente ao fato do MEC reduzir em uma unidade a dimensão do problema, uma vez que a discretização é feita apenas no contorno.

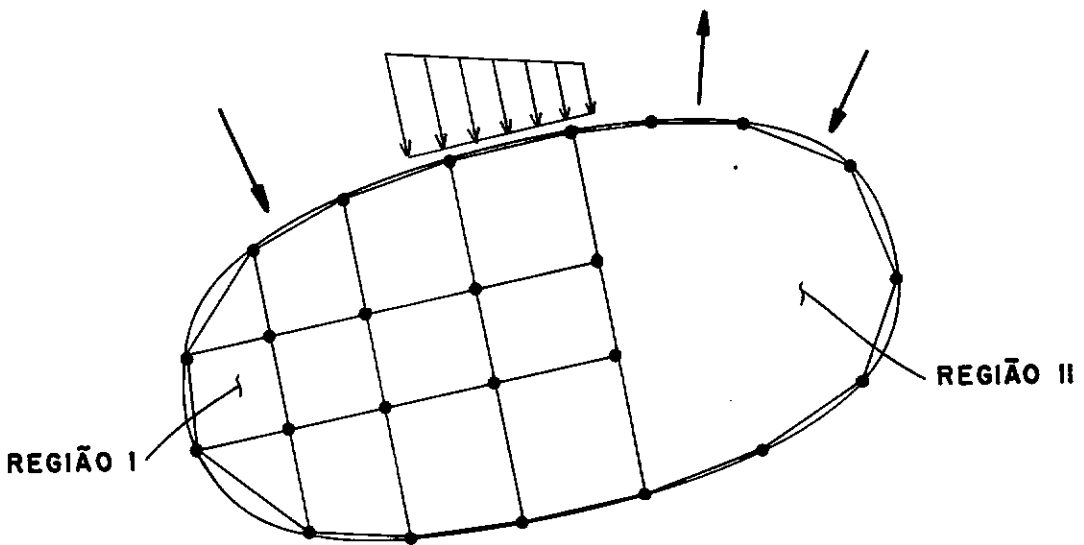


Fig. I.1 - Região I - Elementos finitos

Região II - Elementos de Contorno

Para efetuar a combinação dos 2 métodos, uma matriz de rigidez é desenvolvida a partir da equação obtida com o MEC para

a região de elementos de contorno, equivalente à matriz de rigidez obtida com o MEF. Desta forma, o tratamento dado a esta matriz de rigidez é idêntico ao dado às matrizes de rigidez de cada elemento finito, e o problema se resolve com as técnicas computacionais desenvolvidas para o MEF. A região discretizada com elementos de contorno é tratada, portanto, como um "super elemento finito".

## I.2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Muitos estudos foram desenvolvidos com a finalidade de obter a matriz de rigidez a partir do MEC na forma mais apropriada para a combinação com o MEF. A matriz obtida a partir da formulação direta do MEC não tem simetria, o que direciona a pesquisa de forma a obter uma aproximação que torne esta matriz simétrica, minimizando os erros oriundos desta simetrização. A própria formulação do MEC não garante o equilíbrio das forças de superfície, e vários procedimentos foram analisados impondo também esta restrição.

Nos trabalhos de ZIENKIEWICZ, KELLY e BETTESS [ 5 ], [ 6 ] a matriz de rigidez é obtida utilizando a minimização da expressão da energia interna do sistema. Com isto, chega-se a uma matriz simétrica, mas que não atende ao equilíbrio de forças de superfície. Utilizando este mesmo procedimento, G.BEER [15] desenvolve uma matriz de rigidez relacionando apenas os nós pertencentes à interface das regiões discretizadas com o MEC e com o MEF, obtendo desta forma uma matriz de dimensões menores e conseqüentemente com menor gasto computacional.

Uma matriz de rigidez é obtida por BREBBIA [1] BREBBIA e WALKER [3], BREBBIA, TELLES e WROBEL [2] partindo da formulação direta da equação que governa o problema na região de elementos de contorno. A matriz obtida não é simétrica, mas a solução é a mesma obtida com a equação direta do MEC, uma vez que nenhuma aproximação é introduzida, e apenas operações matriciais são efetuadas. Para obter a simetria da matriz é definida uma função 'erro' nos termos que não pertençam à diagonal e a minimização do quadrado desta função fornece uma nova matriz, correspondente à parte simétrica da matriz original. Esta nova matriz é idêntica à matriz obtida nas referências [5] e [6], utilizando a expressão da energia interna.

Uma abordagem diferente é proposta por MUSTOE e VOLAIT [4] em que se garante o equilíbrio do sistema impondo a restrição da soma das forças de superfície se anular. Esta equação de restrição é somada ao sistema de equações gerado pela equação do MEC, e a matriz de rigidez é obtida como nas demais formulações.

Um estudo crítico feito por TULLBERG e BOLTEUS [8] compara os resultados obtidos com as formulações descritas acima. Algumas variações são introduzidas para se garantir a simetria da matriz e também a condição de equilíbrio. Os melhores resultados são conseguidos quando a condição de equilíbrio das forças de superfície é imposta, como na formulação proposta por MUSTOE e VOLAIT [4], mas o número de exemplos apresentados não é suficiente para uma conclusão satisfatória.

Um dos principais problemas para se obter a matriz de

rigidez é encontrado quando existe descontinuidade geométrica na superfície (cantos), onde as forças de superfície são descontínuas. Torna-se necessária a introdução de equações adicionais para incluir os efeitos da descontinuidade e garantir a unicidade da solução. Estas equações extras nas descontinuidades, originalmente sugeridas por CHAUDONNERET [7], são bem analisadas por GEORGIOU [9], que as considera como condições de contorno impostas adicionais, introduzindo-as na forma de uma série de 'matrizes de transformação'.

Outra forma de se considerar as forças de superfície descontínuas é a utilização do Método de Galerkin para a obtenção do sistema de equações. Esta formulação é indicada por MUSTOE e VOLAIT [4], mas não é apresentado nenhum exemplo comparativo, e também por HARTMANN e outros [16], que analisam a solução de placas utilizando a teoria de Kirchhoff.

BREBBIA, TELLES e WROBEL [2] também propõem uma solução alternativa, na qual a equação integral do contorno é substituída na expressão da energia interna do sistema. A matriz de rigidez equivalente é então obtida com a minimização da expressão da energia, obtendo uma matriz simétrica. Esta solução envolve uma integração dupla. Também neste caso não é apresentado nenhum exemplo comparativo.

### I.3 - DESCRIÇÃO DO CORPO DA TESE

Com a finalidade de fazer um estudo comparativo de algumas formulações propostas, este trabalho é dividido em duas partes. Primeiro é feito um estudo na teoria de potencial bi-dimensional para a resolução de problemas governados pela equação de Laplace. Na segunda parte, este estudo é desenvolvido para o campo da elasticidade bi-dimensional.

Para o problema de potencial, são analisadas três formulações, utilizando elementos constantes:

- i) Utilizando o sistema de equações gerado pela equação integral do MEC, com o ponto fonte localizado nos pontos nodais (Método da Colocação).
- ii) Gerando o sistema de equações através do Método de Galerkin.
- iii) Utilizando o Procedimento Alternativo proposto por BREBBIA, TELLES e WROBEL [2].

Uma vez que o elemento constante tem o nó localizado no seu ponto médio, não é necessário um estudo criterioso dos problemas de descontinuidade da derivada do potencial no contorno.

Para o problema de elasticidade, já com os resultados comparativos obtidos no estudo do problema de potencial, são analisadas apenas duas formulações, utilizando elementos lineares.

- i) Utilizando o Método da Colocação.
- ii) Utilizando o Método de Galerkin.

Com o elemento linear, a descontinuidade de forças de superfície é considerada introduzindo as equações adicionais sugeridas por CHAUDONNERET [7], quando é utilizado o Método da Colocação. Para o Método de Galerkin esta descontinuidade é considerada de uma forma mais natural, e não é necessário nenhuma equação extra.

A seguir são descritos os assuntos abordados em cada capítulo.

No Capítulo II são definidas as equações que governam o problema de potencial e de elasticidade bi-dimensionais. O Método dos Elementos de Contorno e o Método dos Elementos Finitos são definidos de forma sucinta. A equação do MEC é apresentada na forma de Equação de Resíduos Ponderados, que pode ser resolvida utilizando uma aproximação do tipo Ponto de Colocação ou uma aproximação tipo Galerkin. São demonstradas as relações entre os dois métodos, e as operações necessárias para se obter a matriz de rigidez equivalente partindo da formulação do MEC. Neste capítulo também é introduzida a notação utilizada em todo o trabalho.

No Capítulo III é feito o estudo para o problema de potencial bi-dimensional governado pela Equação de Laplace, que é o caso mais simples do estudo da teoria de campo. As três formu

lações a utilizar são apresentadas, dando-se ênfase às integrais singulares que surgem na aplicação do Método de Galerkin. As aplicações são feitas para dois exemplos utilizando as três formulações, e os resultados são comparados.

No Capítulo IV é abordado o problema de elasticidade bi-dimensional. Utiliza-se a solução fundamental de Kelvin, já definida no capítulo II, correspondente à solução para uma carga unitária aplicada em um ponto de um meio infinito. As formulações utilizando o Método do Ponto de Colocação e o Método de Galerkin são apresentadas, assim como as equações adicionais para problemas de descontinuidade de forças de superfície. O Método de Galerkin é definido de uma forma geral, e demonstrada a forma natural de consideração das descontinuidades. É feita a aplicação para vários problemas numéricos, e os resultados são comparados.

No Capítulo V são apresentadas as conclusões gerais, baseadas nos resultados obtidos com as aplicações para os problemas de potencial e de elasticidade. Também são apresentadas sugestões para novos estudos e continuidade do trabalho apresentado.

## CAPÍTULO II

### DESCRIÇÃO DO PROBLEMA E MÉTODOS DE CÁLCULO

#### II.1 - PROBLEMAS DE POTENCIAL

Um dos problemas para o qual serão estudadas as formulações propostas neste trabalho é o de potencial bi-dimensional, governado pela equação de Laplace. Vários fenômenos físicos podem ser representados por esta equação, que é a mais simples do estudo da teoria de campo. Estes fenômenos devem estar relacionados com a idéia de potencial e sua variação, ou seja, devem envolver "redes de fluxo" compostas por linhas equipotenciais e linhas de fluxo. Para regime isótropo e independente do tempo as linhas equipotenciais e de fluxo são ortogonais entre si. Como exemplos típicos de potencial podemos citar a transferência de calor em um corpo, escoamento de fluídos em meios porosos e torção numa barra.

Considerando então  $u$  uma função que representa um potencial em um domínio  $\Omega$ , deve ser satisfeita a equação que governa o problema (equação de Laplace):

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{em } \Omega \quad ; \quad \left( \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.1})$$

As condições de contorno que serão consideradas são as seguintes:

i) condições de contorno essenciais

$$u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (\text{II.2})$$

ii) condições de contorno naturais

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{em } \Gamma_2, \quad (\text{II.3})$$

sendo  $n$  a coordenada na direção do vetor unitário  $\underline{n}$ , normal ao contorno, apontando para fora do domínio (ver figura II.1), e  $\bar{q}$  o fluxo nesta direção.

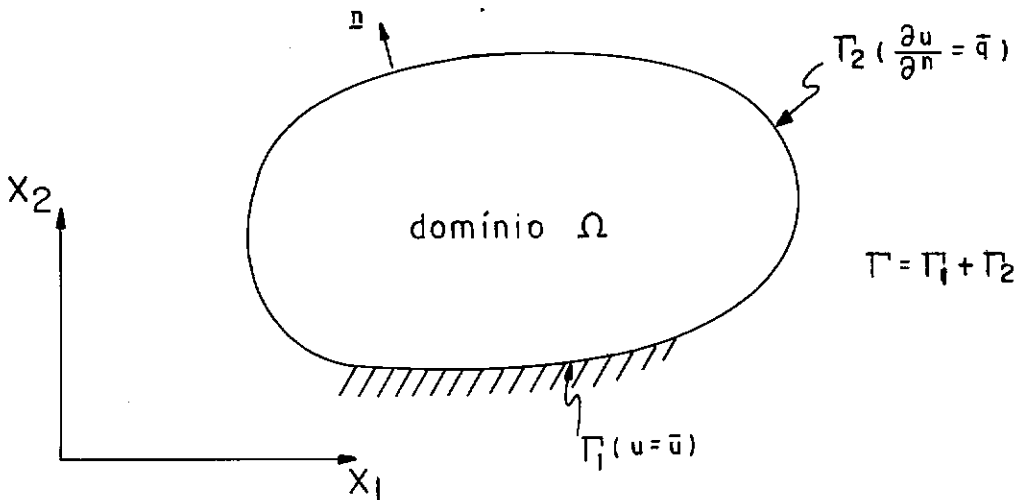


Fig. II.1 - Definições do problema de potencial

Em alguns casos de geometria simples e com determinadas condições de contorno, a solução do problema pode ser calculada de forma analítica (fornecendo o valor do potencial em qualquer ponto do domínio). Para problemas mais complexos torna-se necessário a utilização de métodos numéricos, que fornecem uma solução aproximada correspondente à equação diferencial e con-

dições de contorno. Entre os diversos métodos numéricos que poderiam ser aplicados para a obtenção de soluções aproximadas, serão analisados apenas o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

## II.2 - PROBLEMAS DE ELASTICIDADE

São considerados apenas problemas bi-dimensionais no regime elástico linear. Com estas hipóteses as relações tensão-deformação apresentam comportamento linear e as mudanças da configuração inicial da estrutura são desprezíveis.

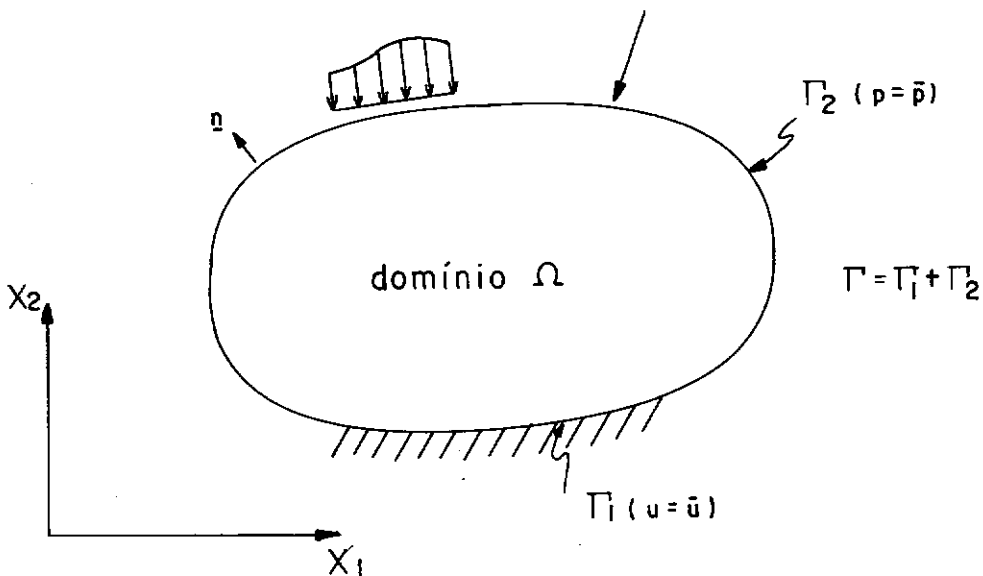


Fig. II.2 - Definições do problema de elasticidade

O estado de tensão em um ponto do domínio é definido pelo tensor de tensões (Figura II.3).

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

, onde  $\sigma_{21} = \sigma_{12}$ .

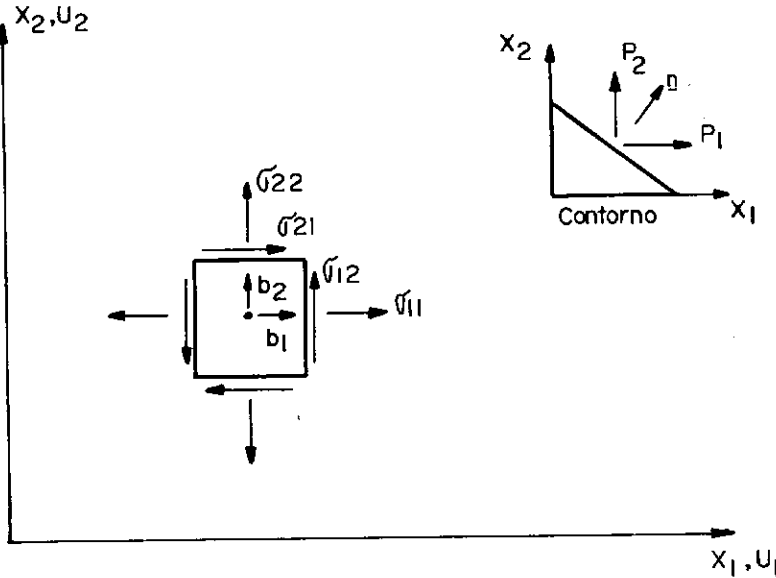


Fig. II.3 - Tensões e forças de superfície

A equação de equilíbrio estático no domínio  $\Omega$  do corpo, escrita utilizando a notação indicial é:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + b_j = 0 \quad , \quad i=1,2 \quad , \quad j=1,2 \quad (II.4)$$

onde  $b_j$  são as componentes das forças de volume.

Indicando as derivadas no plano por vírgulas tem-se:

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0 \quad (II.5)$$

A condição de equilíbrio no contorno  $\Gamma$  do corpo fornece a relação entre a força de superfície  $\underline{p}$  e as tensões (ver figura II.3):

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad , \quad (\text{II.6})$$

onde  $n_j$  é o cosseno diretor do vetor unitário normal  $\underline{n}$ , apontando para fora do domínio, com relação ao eixo  $X_j$ .

As condições de contorno podem ser:

i) condições de contorno essenciais.

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \quad (\text{II.7})$$

ii) condições de contorno naturais.

$$p_i = \bar{p}_i \quad \text{em} \quad \Gamma_2 \quad (\text{II.8})$$

O estado de deformação em um ponto é definido pelo tensor de deformações específicas

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad \text{onde} \quad \epsilon_{12} = \epsilon_{21} .$$

Definindo  $\underline{u}$  como o vetor que representa o campo de deslocamentos, e considerando pequenos deslocamentos (onde  $u_{i,j}^2$  é desprezível se comparado com o valor  $u_{i,j}$ ), tem-se a seguinte

relação entre as deformações específicas e os deslocamentos:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{II.9})$$

Para o material elástico, isotrópico, e considerando Estado Plano de Deformações, a lei de Hooke fornece a relação entre as tensões e as deformações específicas:

$$\sigma_{ij} = 2 G \varepsilon_{ij} + \frac{2 G \nu}{1-2 \nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{II.10})$$

sendo  $G$  o módulo de elasticidade transversal,  $\nu$  o coeficiente de Poisson e  $\delta_{ij}$  o delta de Kronecker, que tem a seguinte definição:

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{se } i=j$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{se } i \neq j$$

Substituindo a equação (II.9) na equação (II.10) obtêm-se a expressão das tensões em função das derivadas dos deslocamentos, que substituída nas equações de equilíbrio (II.5) e (II.6) fornece as conhecidas equações de equilíbrio de Navier:

$$G u_{j,kk} + \frac{G}{1-2 \nu} u_{k,kj} + b_j = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (\text{II.11})$$

e

$$\frac{2 G \nu}{1-2 \nu} u_{k,k} n_i + G (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j = p_i \quad \text{em } \Gamma \quad (\text{II.12})$$

As equações (II.11) e (II.12) definem o problema de elasticidade, relacionando todos os campos de deformações, tensões e deslocamentos.

Uma solução analítica que satisfaça estas equações para um contorno qualquer é de difícil obtenção. Como mencionado anteriormente para o problema de potencial, as equações acima serão analisadas utilizando-se o Método dos Elementos de Contorno e o Método dos Elementos Finitos.

As equações anteriores foram definidas para o Estado Plano de Deformações. Para serem aplicadas em um problema de Estado Plano de Tensões (que seria outra aplicação da elasticidade bi-dimensional), basta substituir  $\nu$  por  $\bar{\nu}$ , onde

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1 + \nu} \quad (\text{II.13})$$

Uma vez definidos os campos de aplicações, será feita uma análise dos métodos numéricos que serão utilizados para a obtenção das soluções aproximadas para o problema.

### II.3 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

No Método dos Elementos de Contorno são estabelecidas funções aproximadas que satisfaçam as equações que governam o problema em seu domínio, mas que aproximam as condições de contorno. Desta forma, como será visto detalhadamente a seguir, obtém-se uma equação integral relacionando apenas os valores no contorno, reduzindo em uma unidade a dimensão do problema.

Para estabelecer as equações do MEC, serão analisados separadamente o problema de potencial e o problema de elasticidade.

### II.3.1 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA O PROBLEMA DE POTENCIAL

A formulação do Método dos Elementos de Contorno será deduzida a partir do Método dos Resíduos Ponderados. Considerando então o problema definido na figura (II.1) e pelas equações (II.1), (II.2) e (II.3), o Método dos Resíduos Ponderados fornece a seguinte relação [1]:

$$\int_{\Omega} [\nabla^2 u(x) - u^*] d\Omega(x) = \int_{\Gamma_2} [q(x) - \bar{q}(x)] u^* d\Gamma(x) - \int_{\Gamma_1} [u(x) - \bar{u}(x)] q^* d\Gamma(x) \quad (II.14)$$

onde  $q(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial n}$  e  $q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$ .

A função  $u^*$  é a função de ponderação, e deve ter a primeira derivada contínua. Para os problemas de contorno é utilizada como função de ponderação uma solução particular que satisfaça as equações que governam o problema. Esta solução, conhecida como "solução fundamental", corresponde à solução para uma fonte concentrada unitária atuando em um ponto ' $\xi$ ', sendo portan

to a solução da seguinte equação:

$$\nabla^2 u^*(\xi, x) + \Delta(\xi, x) = 0 \quad (\text{II.15})$$

onde  $\Delta(\xi, x)$  é a função delta de Dirac, que tem as seguintes propriedades:

$$\Delta(\xi, x) = 0 \quad \text{se } \xi \neq x$$

$$\Delta(\xi, x) \rightarrow \infty \quad \text{se } \xi = x$$

$$\int_{\Omega} g(x) \Delta(\xi, x) d\Omega(x) = g(\xi), \quad \xi \in \Omega$$

Para o caso bi-dimensional isotrópico, a solução para a equação (II.15) é a seguinte:

$$u^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{r} \right) \quad (\text{II.16})$$

onde 'x' é um ponto qualquer do domínio (chamado 'ponto campo'), 'ξ' é o ponto de aplicação da fonte unitária (chamado 'ponto fonte') e 'r' é a distância entre ξ e x.

Uma vez definida a solução fundamental, integra-se por partes duas vezes o lado esquerdo da equação (II.14) e após simplificações obtém-se a seguinte expressão [1]:

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \left[ -\nabla^2 u^*(\xi, \mathbf{x}) \right] d\Omega(\mathbf{x}) = - \int_{\Gamma_2} \bar{q}(\mathbf{x}) u^*(\xi, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) -$$

$$\int_{\Gamma_1} q(\mathbf{x}) u^*(\xi, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_2} u(\mathbf{x}) q^*(\xi, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_1} \bar{u}(\mathbf{x}) q^*(\xi, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x})$$

(II.17)

Considerando  $q(\mathbf{x}) = \bar{q}(\mathbf{x})$  em  $\Gamma_2$ ,  $u(\mathbf{x}) = \bar{u}(\mathbf{x})$  em  $\Gamma_1$  e  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , a equação (II.17) pode ser escrita na seguinte forma mais compacta:

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \left[ -\nabla^2 u^*(\xi, \mathbf{x}) \right] d\Omega(\mathbf{x}) = - \int_{\Gamma} q(\mathbf{x}) u^*(\xi, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) +$$

$$+ \int_{\Gamma} u(\mathbf{x}) q^*(\xi, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x})$$

(II.18)

Com a equação (II.15) e utilizando a propriedade da função delta de Dirac, tem-se que:

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \left[ -\nabla^2 u^*(\xi, \mathbf{x}) \right] d\Omega(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \left[ -\Delta(\xi, \mathbf{x}) \right] d\Omega(\mathbf{x}) = - u(\xi)$$

(II.19)

A equação (II.18) fica então na forma:

$$u(\xi) + \int_{\Gamma} u(x)q^*(\xi, x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} q(x)u^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (\text{II.20})$$

A equação (II.20) fornece o valor da função potencial  $u$  em qualquer ponto  $\xi$  do domínio, em função dos valores no contorno. Para que esta equação também forneça o valor da função  $u$  em um ponto  $\xi$  do contorno, pode-se utilizar a seguinte alternativa [1]. Inicialmente o domínio é aumentado de um semi-círculo de raio  $\varepsilon$  com centro no ponto  $\xi$ , passando portanto a conter este ponto. Com o ponto  $\xi$  no domínio, a equação (II.20) não apresenta singularidades, podendo então ser escrita para o contorno resultante, ficando os domínios de integração em função do raio  $\varepsilon$ . O cálculo dos limites das integrais quando  $\varepsilon$  tende a zero fornece a expressão desejada:

$$C(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(x)q^*(\xi, x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} q(x)u^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (\text{II.21})$$

As integrais na equação (II.21) passam a existir no sentido do valor principal de Cauchy se o ponto  $\xi$  pertencer ao contorno. O valor de  $C(\xi)$  depende da posição do ponto  $\xi$ . Para pontos do domínio tem-se  $C(\xi) = 1$ , o que reproduz a equação (II.20), e para pontos externos  $C(\xi) = 0$ . Para pontos em um contorno suave, ou seja, que não pertençam a um ponto de descontinuidade geométrica, tem-se  $C(\xi) = 1/2$ . Para outros casos, a sua contribuição pode ser obtida através da condição decorrente da utilização das equações para o problema no qual o potencial é constante, como

será visto com detalhes no capítulo III, o que evita o cálculo explícito do seu valor.

A equação (II.21) pode ser aplicada para qualquer ponto do contorno. Com a finalidade de obter uma solução numérica para o problema, o contorno  $\Gamma$  é dividido em uma série de segmentos (elementos), sobre os quais são interpolados os valores do potencial  $u$  e da sua derivada  $q$ , em função dos valores nos pontos nodais funcionais. A geometria do elemento é interpolada em função dos valores nos pontos nodais geométricos (ver figura II.4). Para o elemento linear estes pontos nodais coincidem. Deve-se observar que a equação (II.21) relaciona apenas valores no contorno.

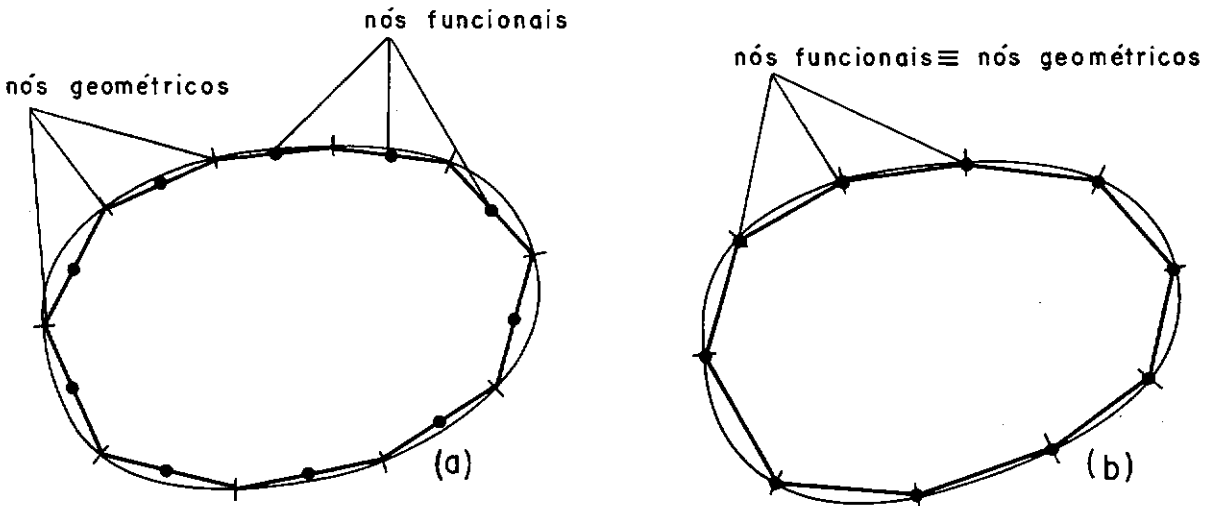


Fig. II.4(a) Elementos constantes

(b) Elementos Lineares

Os valores de  $u$  e  $q$  em cada ponto de um elemento  $t$  são dados pelas seguintes expressões:

$$u^t(x) = \sum_k N^k(\eta) u^{tk} \quad (\text{II.22})$$

$$q^t(x) = \sum_k N^k(\eta) q^{tk} \quad (\text{II.23})$$

onde a função de interpolação  $N^k(\eta)$  é definida pelas coordenadas intrínsecas  $\eta, \eta \in [-1, 1]$ , e  $u^{tk}$  e  $q^{tk}$  são os valores de  $u$  e  $q$  no  $k$ -ésimo ponto nodal do elemento  $t$ .

As coordenadas cartesianas  $x_i^t$  ao longo de um elemento  $\Gamma_t$  são expressas em termos das funções de interpolação  $N^k(\eta)$  e das coordenadas dos extremos dos elementos  $x_i^{tk}$ .

$$x_i^t = \sum_k N^k(\eta) x_i^{tk} \quad (\text{II.24})$$

Notar que o número de nós necessários para definir  $u^t(x)$  ou  $q^t(x)$  e  $x_i^t$  podem ser diferentes em geral.

O valor de  $u(\xi)$  pode também ser interpolado em função dos valores nos pontos nodais do elemento no qual encontra-se o ponto  $\xi$ . Utilizando a coordenada intrínseca  $\eta'$ ,  $\eta' \in [-1, 1]$ , e sendo  $u^{nk}$  o valor de  $u$  no  $k$ -ésimo ponto nodal do elemento correspondente, tem-se

$$u(\xi) = \sum_k N^k(\eta') u^{nk} \quad (\text{II.25})$$

Supondo então que o contorno tenha sido dividido em  $m$  elementos  $\Gamma_t$ , pode-se escrever a equação (II.21) na seguinte forma, válida para qualquer ponto do contorno:

$$\sum_k c(\eta') N^k(\eta') u^{nk} + \sum_{t=1}^m \sum_k \left[ \int_{\Gamma_t} q^*(\xi, x) N^k(\eta) d\Gamma(x) \right] u^{tk} =$$

$$\sum_{t=1}^m \sum_k \left[ \int_{\Gamma_t} u^*(\xi, x) N^k(\eta) d\Gamma(x) \right] q^{tk} \quad (\text{II.26})$$

Tendo em vista que as funções de interpolação são expressas em termos de uma coordenada adimensional  $\eta$ , deve-se escrever  $d\Gamma(x)$  em relação a esse sistema de coordenadas intrínsecas:

$$d\Gamma = |\tilde{J}| d\eta \quad (\text{II.27})$$

onde o Jacobiano da transformação é dado por:

$$|\tilde{J}| = \sqrt{\left( \frac{dx_1}{d\eta} \right)^2 + \left( \frac{dx_2}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{II.28})$$

Substituindo a expressão (II.27) na equação (II.26) obtem-se:

$$\sum_k C(\eta^k) N^k(\eta^k) u^{nk} + \sum_{t=1}^m \sum_k \left[ \int_{-1}^1 q^*(\xi, x) N^k(\eta) |\underline{J}| d\eta \right] u^{tk} =$$

$$\sum_{t=1}^m \sum_k \left[ \int_{-1}^1 u^*(\xi, x) N^k(\eta) |\underline{J}| d\eta \right] q^{tk} \quad (\text{II.29})$$

Para obter um sistema de equações lineares, o Método dos Resíduos Ponderados é aplicado na equação (II.29), o que fornece a seguinte expressão:

$$\int_{\Gamma} W^{\ell}(\xi) \left[ \sum_k C(\eta^k) N^k(\eta^k) u^{nk} \right] d\Gamma(\xi) +$$

$$+ \sum_{t=1}^m \sum_k \left\{ \int_{\Gamma} W^{\ell}(\xi) \left[ \int_{-1}^1 q^*(\xi, x) N^k(\eta) |\underline{J}| d\eta \right] d\Gamma(\xi) \right\} u^{tk} =$$

$$\sum_{t=1}^m \sum_k \left\{ \int_{\Gamma} W^{\ell}(\xi) \left[ \int_{-1}^1 u^*(\xi, x) N^k(\eta) |\underline{J}| d\eta \right] d\Gamma(\xi) \right\} q^{tk} \quad (\text{II.30})$$

$$\ell=1, \dots, S$$

onde as funções  $W^{\ell}(\xi)$  pertencem a um conjunto de funções de ponderação independentes. O número  $S$  de funções é definido de modo a ser obtida solução única para o problema, após serem definidas as condições de contorno [4].

A escolha conveniente das funções de ponderação  $w^l(\xi)$  pode fornecer uma aproximação tipo Ponto de Colocação ou uma aproximação tipo Galerkin para a equação (II.30). Estas duas aproximações serão analisadas em detalhes nos capítulos III e IV.

Substituindo as funções de ponderação na equação (II.30), um sistema de equações lineares é obtido, o qual pode ser colocado na seguinte forma matricial:

$$\underset{\sim}{H} \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{G} \underset{\sim}{Q} \quad (\text{II.31})$$

onde os elementos das matrizes  $\underset{\sim}{H}$  e  $\underset{\sim}{G}$  correspondem às integrais ao longo dos elementos de contorno indicadas na equação (II.30), e os vetores  $\underset{\sim}{U}$  e  $\underset{\sim}{Q}$  contêm os valores do potencial e da derivada do potencial em todos os pontos nodais. Como em cada ponto nodal é conhecido o valor do potencial 'u' ou da sua derivada (fluxo) 'q', a resolução do sistema definido por (II.31) fornecerá o valor das incógnitas nodais. Com todos os valores nos pontos nodais do contorno conhecidos, o valor do potencial em qualquer ponto do domínio é obtido utilizando a equação (II.20).

### II.3.2 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA O PROBLEMA DE ELASTICIDADE

Para o problema da elasticidade, o procedimento para definição das equações básicas do MEC é o mesmo utilizado para o potencial. Considerando então o problema definido na figura (II.2), onde um corpo está em estado de equilíbrio sob a ação de cargas e deslocamentos prescritos, o Método dos Resíduos Ponde-

rados fornece [1]:

$$\int_{\Omega} [\sigma_{ij,i}(x) + b_j(x)] u_j^* d\Omega(x) = \int_{\Gamma_2} [p_j(x) - \bar{p}_j(x)] u_j^* d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_1} [\bar{u}_j(x) - u_j(x)] p_j^* d\Gamma(x) \quad (II.32)$$

onde  $p_j^* = \sigma_{jk}^* n_k$  são as forças de superfície correspondentes à solução fundamental  $u_j^*$ .

Integrando por partes o lado esquerdo da equação (II.32) duas vezes, a seguinte expressão é encontrada [1]:

$$\int_{\Omega} b_j(x) u_j^* d\Omega(x) + \int_{\Omega} \sigma_{ij,i}^* u_j(x) d\Omega(x) = - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_j(x) u_j^* d\Gamma(x) - \int_{\Gamma_1} p_j(x) u_j^* d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_j(x) p_j^* d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_2} u_j(x) p_j^* d\Gamma(x) \quad (II.33)$$

Como solução fundamental será considerada a solução no meio elástico isotrópico infinito para uma carga unitária aplicada em um ponto ' $\xi$ ', em uma direção ' $k$ '. Isto corresponde à solução da equação de equilíbrio

$$\sigma_{kij,i}^* + \delta_{jk} \Delta(\xi, x) = 0 \quad (II.34)$$

onde  $\Delta(\xi, \mathbf{x})$  é a função delta de Dirac e  $\delta_{jk}$  é o delta de Kronecker. Substituindo na segunda integral da equação (II.33),

$$\int_{\Omega} \sigma_{kij,i}^* u_j(\mathbf{x}) d\Omega = - \int_{\Omega} \delta_{jk} \Delta(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Omega = - \int_{\Omega} \Delta(\xi, \mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) d\Omega = - u_k(\xi) \quad (\text{II.35})$$

Considerando então  $p_j = \bar{p}_j$  em  $\Gamma_2$ ,  $u_j = \bar{u}_j$  em  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , e substituindo a expressão (II.35) em (II.33), na qual é introduzido o índice 'k' para considerar a direção da carga unitária, obtém-se:

$$u_k(\xi) + \int_{\Gamma} u_j(\mathbf{x}) p_{kj}^*(\xi, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} p_j(\mathbf{x}) u_{kj}^*(\xi, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} b_j(\mathbf{x}) u_{kj}^*(\xi, \mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) \quad (\text{II.36})$$

A solução fundamental (equação (II.34)), conforme descrito anteriormente, corresponde à solução de Kelvin para o espaço infinito, que fornece a seguinte solução para o problema de Estado Plano de Deformações:

$$u_{kj}^*(\xi, \mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{kj} + r_{,k} r_{,j} \right] \quad (\text{II.37})$$

$$P_{kj}^*(\xi, x) = - \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ \left\{ (1-2\nu)\delta_{kj} + 2 \frac{r_{,k} r_{,j}}{r} \right\} \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,k} n_j - r_{,j} n_k) \right] \quad (\text{II.38})$$

onde  $n_j$  são os cossenos diretores do vetor unitário  $\tilde{n}$  normal à superfície, apontando para fora do domínio,  $\delta_{kj}$  é o delta de Kronecker, ' $r$ ' é a distância do ponto em consideração ' $x$ ' (ponto campo) ao ponto de aplicação da carga ' $\xi$ ' (ponto fonte),  $G$  o módulo de elasticidade transversal e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

Sendo as cargas unitárias aplicadas em cada direção independentes, os valores de  $u_{kj}^*(\xi, x)$  e  $p_{kj}^*(\xi, x)$  representam o deslocamento e força de superfície na direção ' $j$ ' no ponto ' $x$ ', correspondentes a uma força unitária atuando na direção ' $k$ ' do ponto ' $\xi$ ', conforme mostrado na figura (II.5) para  $k=1$ .

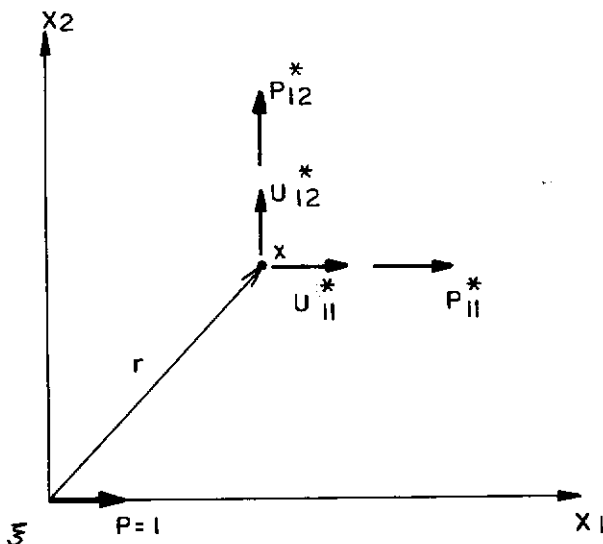


Fig. II.5 - Deslocamentos e forças de superfície (solução fundamental)

Considerando as forças de volume  $b_j$  nulas por simplicidade (não introduzem nenhuma incógnita adicional no problema), e trocando o índice 'k' por 'i', a equação (II.36) é escrita na forma:

$$u_i(\xi) + \int_{\Gamma} u_j(x) p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} p_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (\text{II.39})$$

A equação (II.36) ou (II.39) é conhecida como "Identidade de Somigliana" para deslocamentos, e pode ser obtida (ver TELLES [12]) também por reciprocidade com uma solução singular da equação de Navier que satisfaz:

$$G u_{ij, kk}^* + \frac{G}{1-2\nu} u_{ik, kj}^* + \delta_{ij} \Delta(\xi, x) = 0, \quad (\text{II.40})$$

solução esta que corresponde à solução fundamental definida na equação (II.34).

A equação (II.39) fornece o valor do deslocamento  $u$  em qualquer ponto do domínio. Analogamente ao que foi descrito para a equação (II.21) no problema de potencial, deve-se colocar a equação (II.39) na forma abaixo, para que também represente o deslocamento em pontos do contorno:

$$C_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Gamma} u_j(x) p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} p_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (\text{II.41})$$

onde, sendo  $\delta_{ij}$  o delta de Kronecker, tem-se:

$$C_{ij}(\xi) = \delta_{ij} \quad \text{para} \quad \xi \in \Omega$$

$$C_{ij}(\xi) = \frac{\delta_{ij}}{2} \quad \text{para} \quad \xi \text{ em contorno suave.}$$

Se o ponto  $\xi$  não pertencer a um contorno suave, o cálculo do valor de  $C_{ij}(\xi)$  torna-se mais trabalhoso, mas pode ser evitado utilizando um deslocamento de corpo rígido, o que substitui o cálculo explícito do seu valor.

Para obter-se uma solução numérica do problema utilizando a equação (II.41) que relaciona apenas valores no contorno, o mesmo é dividido em uma série de segmentos, sobre os quais são interpolados os valores dos deslocamentos  $u$  e das forças de superfície  $p$ , em função dos valores nos pontos nodais de cada elemento. Diz-se então que a estrutura está "discretizada" (ver figura II.4).

Sendo  $N^k(\eta)$  as funções de interpolação e  $u_j^{tk}$  e  $p_j^{tk}$  os valores de  $u_j$  e  $p_j$  no  $k$ -ésimo ponto nodal do elemento  $t$ , define-se que:

$$u_j(x) = \sum_k N^k(\eta) u_j^{tk} \quad (\text{II.42})$$

$$p_j(x) = \sum_k N^k(\eta) p_j^{tk}$$

Colocando  $u_j(\xi)$  também em função dos valores dos deslocamentos nos pontos nodais do elemento correspondente  $(u_j^{nk})$  obtêm-se:

$$u_j(\xi) = \sum_k N^k(\eta') u_j^{nk} \quad (\text{II.43})$$

Supondo então o contorno discretizado em  $m$  elementos  $\Gamma_t$ , e utilizando a transformação de  $d\Gamma(x)$  para a coordenada adimensional  $\eta$  indicada na equação (II.27), a equação (II.41) assume a seguinte forma para qualquer ponto do contorno:

$$\sum_k C_{ij}(\eta') N^k(\eta') u_j^{nk} + \sum_{t=1}^m \sum_k \left[ \int_{-1}^1 p_{ij}^*(\xi, x) N^k(\eta) |\tilde{J}| d\eta \right] u_j^{tk} = \sum_{t=1}^m \sum_k \left[ \int_{-1}^1 u_{ij}^*(\xi, x) N^k(\eta) |\tilde{J}| d\eta \right] p_j^{tk} \quad (\text{II.44})$$

Aplicando o Método dos Resíduos Ponderados para a obtenção de um sistema linear de equações:

$$\int_{\Gamma} W^{\ell}(\xi) \left[ \sum_k C_{ij}(\eta') N^k(\eta') u_j^{nk} \right] d\Gamma(\xi) + \sum_{t=1}^m \sum_k \left\{ \int_{\Gamma} W^{\ell}(\xi) \left[ \int_{-1}^1 p_{ij}^*(\xi, x) N^k(\eta) |\tilde{J}| d\eta \right] d\Gamma(\xi) \right\} u_j^{tk} = \sum_{t=1}^m \sum_k \left\{ \int_{\Gamma} W^{\ell}(\xi) \left[ \int_{-1}^1 u_{ij}^*(\xi, x) N^k(\eta) |\tilde{J}| d\eta \right] d\Gamma(\xi) \right\} p_j^{tk}, \quad \ell=1, \dots, S \quad (\text{II.45})$$

As mesmas observações feitas para as funções de ponderação  $W^{\ell}(\xi)$  na equação (II.30) se aplicam também neste caso. Substituindo portanto as funções de ponderação adequadas, obtém-se um sistema de equações lineares representado na forma matricial:

$$\tilde{H} \tilde{U} = \tilde{G} \tilde{P} \quad (\text{II.46})$$

As matrizes  $\tilde{H}$  e  $\tilde{G}$  são matrizes quadradas de ordem  $NN$ , sendo  $NN$  o número de graus de liberdade do sistema (igual a duas vezes o número de nós ao longo do contorno). Os elementos destas matrizes correspondem às integrais ao longo dos elementos de contorno indicadas na equação (II.45). Os vetores  $\tilde{U}$  e  $\tilde{P}$  contêm os valores nodais dos deslocamentos e forças de superfície.

Uma vez definidas as condições de contorno, a solução do sistema fornecerá os valores incógnitos e, conseqüentemente, o valor do deslocamento em qualquer ponto do domínio pode ser determinado utilizando a Identidade de Somigliana (equação (II.39)). Derivando a Identidade de Somigliana com relação às coordenadas do ponto fonte ' $\xi$ ', obtém-se as deformações específicas com a expressão (II.9), que substituída na lei de Hooke, expressão (II.10), fornecerá as tensões no ponto ' $\xi$ '. Estas expressões para as tensões já estão deduzidas e podem ser encontradas nas referências [1], [2], [9], [12].

## II.4 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos pode ser deduzido também a partir do Método dos Resíduos Ponderados. Como a finalidade deste trabalho é encontrar a matriz de rigidez utilizando o MEC numa forma compatível com a formulação do MEF, é feita apenas uma dedução sucinta deste método (modelo de deslocamento), de forma a facilitar a visualização da compatibilidade. Uma análise mais criteriosa pode ser vista nas referências ZIENKIEWICZ [6] e BREBBIA E CONNOR [13].

Integrando por partes a equação (II.14) para o problema de potencial, obtém-se a expressão:

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u^*}{\partial x_i} \right) d\Omega(x) &= - \int_{\Gamma_2} \bar{q}(x) u^* d\Gamma(x) - \int_{\Gamma_1} q(x) u^* d\Gamma(x) - \\
 &- \int_{\Gamma_1} \left[ u(x) - \bar{u}(x) \right] q^* d\Gamma(x) \quad (II.47)
 \end{aligned}$$

Substituindo  $u^*$  pela variação (ou incremento virtual)  $\delta u$  do potencial, o que fornece  $\delta u \equiv 0$  em  $\Gamma_1$ , e considerando que a função aproximada satisfaz as condições de contorno essenciais ( $u(x) = \bar{u}(x)$  em  $\Gamma_1$ ) obtém-se:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \delta u}{\partial x_i} \right) d\Omega(x) = \int_{\Gamma_2} \bar{q}(x) \delta u d\Gamma(x) \quad (II.48)$$

Dividindo o domínio em uma série de 'elementos finitos', e assumindo que a variação de  $u$  e  $\delta u$  em cada elemento é aproximada pelos valores nos pontos nodais e uma série de funções de interpolação, pode-se escrever, utilizando notação matricial:

$$u(x) = \underset{\sim}{\phi} \underset{\sim}{u}^n$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial \underset{\sim}{\phi}}{\partial x_i} \underset{\sim}{u}^n = \underset{\sim}{\phi}_{x_i} \underset{\sim}{u}^n$$

(II.49)

$$\delta u = \underset{\sim}{\phi} \delta \underset{\sim}{u}^n$$

$$\frac{\partial \delta u}{\partial x_i} = \frac{\partial \underset{\sim}{\phi}}{\partial x_i} \delta \underset{\sim}{u}^n = \underset{\sim}{\phi}_{x_i} \delta \underset{\sim}{u}^n$$

As forças de superfície no contorno, também dividido em segmentos, são dadas por:

$$\bar{q}(x) = \underset{\sim}{\psi} \underset{\sim}{q}^n \quad (II.50)$$

Substituindo na equação (II.48), na forma matricial, obtem-se:

$$\delta \underset{\sim}{u}^{n,T} \sum_e \left[ \int_{\Omega_e} \underset{\sim}{\phi}_{x_i}^T \underset{\sim}{\phi}_{x_i} d\Omega(x) \right] \underset{\sim}{u}_e^n = \delta \underset{\sim}{u}^{n,T} \sum_{e'} \left[ \int_{\Gamma_{e'}} \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{\psi} d\Gamma \right] \underset{\sim}{q}_{e'}^n$$

(II.51)

Como  $\delta \underset{\sim}{u}^{n,T}$  pode ser qualquer, encontra-se a seguinte relação:

$$\sum_e \left[ \int_{\Omega_e} \tilde{\phi}_{x_i}^T \tilde{\phi}_{x_i} d\Omega(x) \right] \tilde{u}_e^n = \sum_e \left[ \int_{\Gamma_e} \tilde{\phi}^T \tilde{\psi} d\Gamma \right] \tilde{q}_e^n, \quad (\text{II.52})$$

ou

$$\tilde{K} \tilde{U} = \tilde{M} \tilde{Q} \quad (\text{II.53})$$

onde os vetores  $\tilde{U}$  e  $\tilde{Q}$  contêm os valores do potencial e da derivada do potencial nos pontos nodais, a matriz  $\tilde{K}$  é uma matriz global obtida com a distribuição das contribuições de  $\left( \int_{\Omega_e} \tilde{\phi}_{x_i}^T \tilde{\phi}_{x_i} d\Omega \right)$  de todos os elementos do domínio, e  $\tilde{M}$  uma matriz obtida com a distribuição das contribuições de  $\left( \int_{\Gamma_e} \tilde{\phi}^T \tilde{\psi} d\Gamma \right)$  de todos os elementos do contorno.

Da mesma forma pode-se escrever para o problema de elasticidade, integrando por partes a equação (II.32) e com força de volume nula:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega(x) &= - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_j(x) u_j^* d\Gamma(x) - \int_{\Gamma_1} p_j(x) u_j^* d\Gamma(x) + \\ &+ \int_{\Gamma_1} [\bar{u}_j(x) - u_j(x)] p_j^* d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

Substituindo  $u^*$  pelo deslocamento virtual  $\delta u$ , e sendo as condições de contorno essenciais satisfeitas, isto é,  $\tilde{u}(x) = \bar{u}(x)$  e  $\delta u \equiv 0$  em  $\Gamma_1$ :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_2} \bar{p}_j(\mathbf{x}) \delta u_j d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (\text{II.55})$$

ou em forma matricial:

$$\int_{\Omega} \delta \tilde{\varepsilon}^T \tilde{\sigma} d\Omega(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_2} \delta \tilde{u}^T \tilde{\bar{p}} d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (\text{II.56})$$

Discretizando o domínio, a variação de  $u$  e  $\delta u$  é escrita em função dos valores nos pontos nodais e funções de interpolação em cada elemento:

$$\tilde{u} = \tilde{\phi} \tilde{u}^n \quad (\text{II.57})$$

$$\delta \tilde{u} = \tilde{\phi} \delta \tilde{u}^n$$

Diferenciando os deslocamentos, chega-se às deformações (equação (II.9)):

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{B} \tilde{u}^n \quad (\text{II.58})$$

$$\delta \tilde{\varepsilon} = \tilde{B} \delta \tilde{u}^n$$

as quais fornecem as tensões utilizando a lei de Hooke (equação (II.10)):

$$\tilde{\sigma} = \tilde{D} \tilde{\varepsilon} = \tilde{D} \tilde{B} \tilde{u}^n \quad (\text{II.59})$$

Com as forças de superfície também interpoladas, (equação (II.50)), obtém-se:

$$\delta \tilde{u}^{n,T} \sum_e \left[ \int_{\Omega_e} \tilde{B}^T \tilde{D} \tilde{B} d\Omega(x) \right] \tilde{u}_e^n = \delta \tilde{u}^{n,T} \sum_{e'} \left[ \int_{\Gamma_{e'}} \tilde{\Phi}^T \tilde{\psi} d\Gamma(x) \right] \tilde{p}_{e'}^n \quad (II.60)$$

ou

$$\tilde{K} \tilde{U} = \tilde{M} \tilde{P} \quad (II.61)$$

onde os vetores  $\tilde{U}$  e  $\tilde{P}$  contêm os valores dos deslocamentos e forças de superfície nos pontos nodais, a matriz  $\tilde{K}$  (matriz de rigidez) é obtida com a distribuição das contribuições de  $\left( \int_{\Omega_e} \tilde{B}^T \tilde{D} \tilde{B} d\Omega \right)$  de todos os elementos em uma matriz global, e  $\tilde{M}$  uma matriz obtida com a distribuição das contribuições de  $\left( \int_{\Gamma_{e'}} \tilde{\Phi}^T \tilde{\psi} d\Gamma \right)$  de todos os elementos de contorno.

## II.5 - OBTENÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Nos parágrafos anteriores foi demonstrado que as formulações do MEC e do MEF podem ser definidas a partir do Método dos Resíduos Ponderados. Esta base comum facilita a visualização da relação entre os dois métodos e a forma de combiná-los, o que é mostrado a seguir.

O MEC fornece (equação (II.31) ou equação (II.46)):

$$\tilde{H} \tilde{U} = \tilde{G} \tilde{P} \quad (\text{II.62})$$

e o MEF fornece (equação (II.53) ou equação (II.61)):

$$\tilde{K} \tilde{U} = \tilde{M} \tilde{P} \quad (\text{II.63})$$

Com a finalidade de obter a matriz de rigidez no caso de Elasticidade (ou uma matriz equivalente para Potencial) utilizando o MEC, a equação (II.62) será transformada de forma a isolar do lado direito da igualdade o vetor de forças nodais equivalentes  $\tilde{F} = \tilde{M} \tilde{P}$ , como obtido com o MEF, onde a matriz  $\tilde{M}$  depende das funções de interpolação utilizadas para os deslocamentos e forças de superfície (ou potenciais e fluxos):

$$\tilde{M} = \sum_{e'} \int_{\Gamma e'} \tilde{\phi}^T \tilde{\psi} \, d\Gamma \quad (\text{II.64})$$

Multiplicando portanto a equação (II.62) pela inversa de  $\tilde{G}$ :

$$\tilde{G}^{-1} \tilde{H} \tilde{U} = \tilde{P} \quad (\text{II.65})$$

e pré-multiplicando pela matriz  $\tilde{M}$  obtém-se:

$$\tilde{M} \tilde{G}^{-1} \tilde{H} \tilde{U} = \tilde{M} \tilde{P} \quad (\text{II.66})$$

Definindo então uma matriz:

$$\tilde{K}^u = \tilde{M} \tilde{G}^{-1} \tilde{H} \quad (\text{II.67})$$

a equação (II.66) fica na forma:

$$\tilde{K}^u \tilde{U} = \tilde{M} \tilde{P} \quad (\text{II.68})$$

equivalente à expressão (II.63) do MEF. A matriz  $\tilde{K}^u$  corresponde então a uma matriz de rigidez, que entretanto não resultou simétrica utilizando esta formulação descrita. Esta falta de simetria, que alguns autores (BREBBIA [1]) justificam como devido a aproximações envolvidas, é bem demonstrada pelo GEORGIU [9], que conclui que a razão numérica para isto é que o processo de integração para a formação da equação inicial não é um processo simétrico. Entretanto foi encontrado que o grau de assimetria não é acentuado, e que se a matriz for simetrizada na forma:

$$\tilde{K}^S = \frac{1}{2} ( \tilde{K}^u + \tilde{K}^{u,T} ) \quad (\text{II.69})$$

os resultados obtidos com esta nova matriz simétrica  $\tilde{K}^S$  ainda são muito bons.

Esta forma de simetrização (considerar a parte simétrica da matriz  $\tilde{K}^u$ ) pode ser justificada definindo um 'erro' nos termos fora da diagonal da matriz  $\tilde{K}^u$ . Sendo  $k_{ij}^S$  um coeficiente qualquer a determinar, o erro pode ser escrito em função dos termos  $k_{ij}^u$  e  $k_{ji}^u$  na forma

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \left( k_{ij}^S - k_{ij}^u \right) + \left( k_{ij}^S - k_{ji}^u \right) \right] \quad (\text{II.70})$$

O quadrado da função erro  $\theta_{ij}$  pode ser minimizado com relação a  $k_{ij}^s$ ,

$$\frac{\partial (\theta_{ij})^2}{\partial k_{ij}^s} = 2 k_{ij}^s - k_{ij}^u - k_{ji}^u = 0 \quad (\text{II.71})$$

que fornece:

$$k_{ij}^s = \frac{1}{2} \left( k_{ij}^u + k_{ji}^u \right) \quad (\text{II.72})$$

Esta mesma expressão (II.69) pode ser obtida para a matriz de rigidez, partindo da expressão da energia total de um sistema. Porém esta matriz é obtida utilizando considerações de simetria dos princípios da energia, os quais não se aplicam exatamente para operadores integrais. Logo, a simetria da matriz  $\tilde{K}^u$  não pode ser justificada com esta abordagem (BREBBIA e outros [2]).

### II.5.1 - UM PROCEDIMENTO ALTERNATIVO

Uma abordagem alternativa, indicada na referência [2], pode ser utilizada partindo da expressão da energia total. Esta abordagem será descrita abaixo para o problema de potencial; para o problema de elasticidade o procedimento é semelhante.

A expressão da energia total para um problema de potencial pode ser escrita como [2]:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} q_i \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Gamma_2} \bar{q} u d\Gamma \quad (\text{II.73})$$

sendo  $q_i$  o fluxo na direção do eixo coordenado  $x_i$  nos pontos do domínio  $\Omega$ . O primeiro termo de (II.73) corresponde à energia interna e o segundo à perda de energia devido às fontes externas.

Considerando que a função 'u' satisfaz a equação de Laplace, a integral de domínio é convertida em uma integral de contorno utilizando a integração por partes:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} q u d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{q} u d\Gamma \quad (\text{II.74})$$

que deve ser entendida como

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} q(\xi) u(\xi) d\Gamma(\xi) - \int_{\Gamma_2} \bar{q}(\xi) u(\xi) d\Gamma(\xi) \quad (\text{II.75})$$

Com o contorno discretizado, os valores de u e q podem ser definidos por:

$$u(x) = \tilde{\Phi}^T(x) \underline{U} \quad (\text{II.76})$$

$$q(x) = \tilde{\Phi}^T(x) \underline{Q}$$

onde o vetor  $\tilde{\Phi}$  contém as funções de interpolação e os vetores  $\underline{U}$  e  $\underline{Q}$  os valores do potencial e da derivada do potencial nos pontos nodais.

A equação (II.21), repetida para facilitar:

$$C(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(x)q^*(\xi, x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} q(x)u^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (II.77)$$

pode ser escrita na forma:

$$C(\xi)u(\xi) + \tilde{h}^T(\xi) \underline{U} = \tilde{g}^T(\xi) \underline{Q} \quad (II.78)$$

onde

$$\tilde{h}^T(\xi) = \sum_e \int_{\Gamma_e} q^*(\xi, x) \tilde{\phi}^T(x) d\Gamma(x) \quad (II.79)$$

$$\tilde{g}^T(\xi) = \sum_e \int_{\Gamma_e} u^*(\xi, x) \tilde{\phi}^T(x) d\Gamma(x)$$

Substituindo a equação (II.78) na expressão da energia total, equação (II.75), obtém-se:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{1}{C(\xi)} \left[ \tilde{g}^T(\xi) \underline{Q} - \tilde{h}^T(\xi) \underline{U} \right] \tilde{\phi}^T(\xi) \underline{Q} d\Gamma(\xi) -$$

$$- \int_{\Gamma} \frac{1}{C(\xi)} \left[ \tilde{g}^T(\xi) \underline{Q} - \tilde{h}^T(\xi) \underline{U} \right] \tilde{\phi}^T(\xi) \bar{Q} d\Gamma(\xi) \quad (II.80)$$

onde  $\bar{Q}$  contém os valores nodais prescritos da derivada do potencial.

Da equação (II.31), obtêm-se:

$$\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{G}}^{-1} \underline{\underline{H}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{U}} \quad (\text{II.81})$$

que substituindo na equação (II.80) fornece:

$$\pi = \frac{1}{2} \underline{\underline{U}}^T \left[ \begin{array}{cc} \underline{\underline{C}}^T & \underline{\underline{B1}} \\ \underline{\underline{C}} & - \underline{\underline{C}}^T \underline{\underline{B2}} \end{array} \right] \underline{\underline{U}} - \underline{\underline{U}}^T \left[ \begin{array}{c} \underline{\underline{C}}^T \underline{\underline{B1}}^T - \underline{\underline{B2}}^T \end{array} \right] \underline{\underline{Q}} \quad (\text{II.82})$$

sendo

$$\underline{\underline{B1}} = \int_{\Gamma} \frac{1}{\underline{\underline{C}}(\xi)} \underline{\underline{\phi}}(\xi) \underline{\underline{g}}^T(\xi) d\Gamma(\xi) \quad (\text{II.83})$$

$$\underline{\underline{B2}} = \int_{\Gamma} \frac{1}{\underline{\underline{C}}(\xi)} \underline{\underline{\phi}}(\xi) \underline{\underline{h}}^T(\xi) d\Gamma(\xi)$$

Calculando a primeira variação do funcional  $\pi$ , equação (II.82), o equilíbrio é obtido com a condição:

$$\delta\pi = \frac{\partial\pi}{\partial\underline{\underline{U}}} \delta\underline{\underline{U}} = 0 \quad (\text{II.84})$$

que fornece o sistema de equações lineares:

$$\underline{\underline{K}}^a \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{F}} \quad (\text{II.85})$$

onde

$$\tilde{K}^a = \tilde{C}^T \tilde{B}_1 \tilde{C} - \frac{1}{2} ( \tilde{C}^T \tilde{B}_2 - \tilde{B}_2^T \tilde{C} ) \quad (\text{II.86})$$

$$\tilde{F} = ( \tilde{C}^T \tilde{B}_1^T - \tilde{B}_2^T ) \tilde{Q} \quad (\text{II.87})$$

A "matriz de rigidez"  $\tilde{K}^a$  obtida com esta formulação é uma matriz simétrica (observar que a matriz  $\tilde{B}_1$  é simétrica), mas também neste caso foram utilizadas considerações de simetria dos princípios de energia que não se aplicam a operadores integrais (como na formulação anterior). Cabe ressaltar que a obtenção das matrizes  $\tilde{B}_1$  e  $\tilde{B}_2$  envolve uma integração dupla, o que inevitavelmente levará a um grande acréscimo do tempo computacional.

## CAPÍTULO III

## APLICAÇÕES PARA PROBLEMAS DE POTENCIAL

## III.1 INTRODUÇÃO

Para as aplicações em problemas de potencial bi-dimensional foi utilizado o elemento constante. Neste caso o contorno é discretizado em  $m$  elementos, e os valores de  $u$  e  $q$  são considerados constantes em cada elemento e iguais aos valores no nó localizado no seu ponto médio. As funções de interpolação portanto são iguais à unidade ( $N(\eta) = 1$ ).

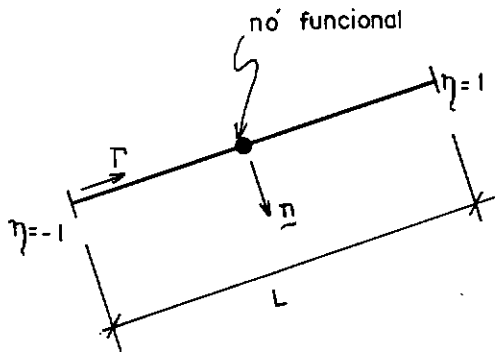


Fig. III.1 - Elemento Constante

Para o elemento de configuração retilínea, sendo  $L$  o comprimento do elemento, o valor do Jacobiano é dado por:

$$|\tilde{J}| = \frac{L}{2} \quad (\text{III.1})$$

A equação (II.30) então assume a seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} W^{\ell}(\xi) \left[ C(n') u^n \right] d\Gamma(\xi) + \sum_{t=1}^m \left\{ \int_{\Gamma} W^{\ell}(\xi) \left[ \int_{-1}^1 \frac{L_t}{2} q^*(\xi, x) d\eta \right] d\Gamma(\xi) \right\} u^t =$$

$$\sum_{t=1}^m \left\{ \int_{\Gamma} W^{\ell}(\xi) \left[ \int_{-1}^1 \frac{L_t}{2} u^*(\xi, x) d\eta \right] d\Gamma(\xi) \right\} q^t \quad \ell=1, \dots, S \quad (\text{III.2})$$

O número  $S$  de funções de ponderação é igual ao número de graus de liberdade (no caso igual ao número de nós  $m$ ).

A seguir serão analisadas as formulações que são utilizadas para as aplicações em problemas de potencial bi-dimensional.

### III.2 MÉTODO DA COLOCAÇÃO

Para utilizar o Método da Colocação são utilizadas como funções de ponderação as seguintes funções delta de Dirac:

$$W^{\ell}(\xi) = \Delta(\xi^{\ell}, \xi) \quad , \quad \ell=1, \dots, m \quad (\text{III.3})$$

onde  $\xi^{\ell}$  são pontos selecionados no contorno coincidentes com os pontos nodais. Substituindo estas funções na equação (III.2) e utilizando a propriedade da função delta de Dirac obtém-se:

$$C(\xi^{\ell}) u^{\ell} + \sum_{t=1}^m \left[ \int_{-1}^1 \frac{L_t}{2} q^*(\xi^{\ell}, x) d\eta \right] u^t = \sum_{t=1}^m \left[ \int_{-1}^1 \frac{L_t}{2} u^*(\xi^{\ell}, x) d\eta \right] q^t$$

$$\ell=1, \dots, m \quad (\text{III.4})$$

que correspondem à equação direta do MEC (II.21) aplicada com a fonte unitária localizada em cada ponto nodal. Neste caso, como os pontos nodais estão localizados nos pontos médios dos elementos, o valor de  $C(\xi^\ell)$  será sempre igual a  $\frac{1}{2}$ . Portanto, para cada ponto fonte  $\ell$ , a equação (III.4) pode ser colocada na forma:

$$\frac{1}{2} u^\ell + \sum_{t=1}^m \hat{h}_{\ell t} u^t = \sum_{t=1}^m g_{\ell t} q^t \quad (\text{III.5})$$

onde

$$\hat{h}_{\ell t} = \int_{-1}^1 \frac{L_t}{2} q^*(\xi^\ell, x) d\eta \quad (\text{III.6})$$

$$g_{\ell t} = \int_{-1}^1 \frac{L_t}{2} u^*(\xi^\ell, x) d\eta \quad (\text{III.7})$$

Variando  $\ell$  de 1 a  $m$  obtêm-se o sistema de equações lineares:

$$\tilde{H} \tilde{U} = \tilde{G} \tilde{Q} \quad (\text{III.8})$$

onde os elementos da matriz  $\tilde{H}$  serão os seguintes:

$$h_{ij} = \hat{h}_{ij} \quad \text{se } i \neq j$$

$$h_{ij} = \hat{h}_{ij} + \frac{1}{2} \quad \text{se } i=j$$
(III.9)

As integrais indicadas em (III.6) e (III.7) podem ser resolvidas analiticamente no caso de elementos constantes. Como para elementos de ordem superior estas integrais são mais trabalhosas, elas são calculadas numericamente utilizando pontos de integração de Gauss (ver apêndice 1) para uma maior generalidade, exceto para os elementos que contêm o ponto singular. Neste caso é utilizada a solução analítica para o cálculo de  $g_{ii}$ :

$$g_{ii} = \int_{-1}^1 \frac{L_i}{2} \left[ \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{r} \right) \right] d\eta = \frac{L_i}{2\pi} \left( \ln \frac{2}{L_i} + 1 \right) \quad (\text{III.10})$$

e para obter o valor de  $h_{ii}$  é aplicado um potencial unitário constante em todo o contorno do problema, o que fornece um fluxo igual a zero em todos os pontos nodais. Chamando  $\tilde{I}$  este campo de potencial constante

$$\tilde{I} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right\} \quad (\text{III.11})$$

tem-se que (para regiões finitas):

$$\tilde{H} \tilde{I} = \tilde{0} \quad (\text{III.12})$$

e

$$\sum_{j=1}^m h_{ij} = 0. \quad (i=1, \dots, m)$$

Logo, obtém-se para o valor de  $h_{ii}$  (domínios finitos):

$$h_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m h_{ij} \quad (i=1, \dots, m) \quad (\text{III.13})$$

Utilizando este procedimento para o cálculo de  $h_{ii}$  evita-se o cálculo da integral (III.6), e também o cálculo explícito do valor de  $C(\eta')$ .

Para o elemento constante, a matriz  $\tilde{M}$  (equação (II.64)) é uma matriz diagonal, cujos elementos são iguais aos comprimentos dos elementos de contorno correspondentes,

$$m_{ii} = L_i \quad (\text{III.14})$$

e a "matriz de rigidez" e o vetor independente são então obtidos com as expressões:

$$\tilde{K}^u = \tilde{M} \tilde{G}^{-1} \tilde{H} \quad (\text{III.15})$$

e

$$\tilde{F} = \tilde{M} \tilde{P} \quad (\text{III.16})$$

A "matriz de rigidez" simétrica, como definido na seção (II.5), é obtida na forma:

$$\tilde{K}^s = \frac{1}{2} ( \tilde{K}^u + \tilde{K}^{u,T} ) \quad (\text{III.17})$$

### III.3 MÉTODO DE GALERKIN

No Método de Galerkin são utilizadas como funções de ponderação as mesmas funções de interpolação de cada elemento [ 4 ],

$$W^{\ell} = N^{\ell}(\eta') \quad , \quad \ell=1, \dots, m \quad (\text{III.18})$$

onde a coordenada adimensional  $\eta'$ ,  $\eta' \in [-1, 1]$ , define a posição do ponto fonte  $\xi$  dentro do elemento  $\ell$ . Se o ponto fonte não pertencer ao elemento em questão, a função  $N^{\ell}(\eta')$  se anula.

Substituindo as funções de ponderação na equação (III.2) (observar que as funções de interpolação são iguais à unidade) obtêm-se:

$$\int_{\Gamma_{\ell}} C(\eta') d\Gamma(\xi) u^{\ell} + \sum_{t=1}^m \left\{ \int_{\Gamma_{\ell}} \int_{-1}^1 \frac{L_t}{2} q^*(\xi, x) d\eta d\Gamma(\xi) \right\} u^t =$$

$$\sum_{t=1}^m \left\{ \int_{\Gamma_{\ell}} \int_{-1}^1 \frac{L_t}{2} u^*(\xi, x) d\eta d\Gamma(\xi) \right\} q^t \quad , \quad \ell=1, \dots, m \quad (\text{III.19})$$

Escrevendo  $d\Gamma(\xi)$  em relação ao sistema de coordenadas adimensionais  $\eta'$  e substituindo o valor de  $C(\eta')$ , a equação (III.19) assume a forma:

$$\frac{L_{\ell}}{2} u^{\ell} + \sum_{t=1}^m \hat{h}_{\ell t} u^t = \sum_{t=1}^m g_{\ell t} q^t \quad (\text{III.20})$$

onde

$$\hat{h}_{\ell t} = \frac{L_{\ell} L_t}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q^*(\xi, x) d\eta d\eta' \quad (\text{III.21})$$

$$g_{\ell t} = \frac{L_{\ell} L_t}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u^*(\xi, x) d\eta d\eta' \quad (\text{III.22})$$

Variando  $\ell$  de 1 a  $m$  obtêm-se o sistema de equações lineares:

$$\underset{\sim}{H} \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{G} \underset{\sim}{Q} \quad (\text{III.23})$$

onde os elementos da matriz  $\underset{\sim}{H}$  serão os seguintes:

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \hat{h}_{ij} & \text{se } i \neq j \\ h_{ij} &= \hat{h}_{ij} + \frac{L_i}{2} & \text{se } i = j \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Os elementos das matrizes  $\underset{\sim}{H}$  e  $\underset{\sim}{G}$ , fornecidos pelas integrais (III.21) e (III.22), envolvem uma integração dupla. Como neste caso existe singularidade também quando as integrais são efetuadas em elementos adjacentes, torna-se necessário o cálculo analítico, para o caso geral, da integral em relação a coordenada  $\eta$  (equivale a fixar o ponto  $\xi$  e integrar com relação ao ponto  $x$ ).

Considerando então o caso geral apresentado na figura

(III.2), e utilizando a solução fundamental:

$$u^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (\text{III.25})$$

os elementos  $\hat{h}_{ij}$  e  $g_{ij}$  serão obtidos com as integrais:

$$\hat{h}_{ij} = \frac{L_i}{2} \int_{-1}^1 I1(\eta') d\eta' \quad (\text{III.26})$$

$$g_{ij} = \frac{L_j}{2} \int_{-1}^1 I2(\eta') d\eta' \quad (\text{III.27})$$

onde

$$I1(\eta') = \frac{L_j}{2} \int_{-1}^1 \left\{ -\frac{1}{2\pi r^2} \left[ (x_1(x) - x_1(\xi)) n_1^j + (x_2(x) - x_2(\xi)) n_2^j \right] \right\} d\eta \quad (\text{III.28})$$

$$I2(\eta') = \frac{L_j}{2} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \right\} d\eta \quad (\text{III.29})$$

sendo  $n_k^j$  os cossenos diretores do vetor unitário  $\tilde{n}^j$ , normal à superfície no elemento  $j$ .

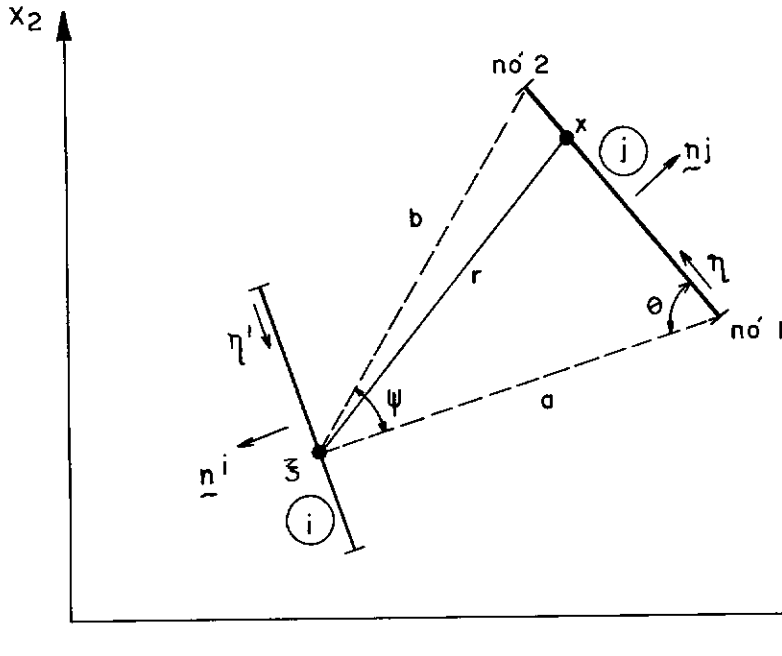


Fig. III.2 - Caso Geral para Integração Analítica

A solução das integrais (III.28) e (III.29) fornece:

$$I1(\eta') = - \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[ n_1^j n_2^i - n_2^j n_1^i \right] (\ln b - \ln a) - \left[ n_1^j n_1^i + n_2^j n_2^i \right] \psi \right\} \quad (III.30)$$

$$I2(\eta') = - \frac{1}{2\pi} \left\{ a \cos\theta (\ln a - \ln b) + a\psi \sin\theta + L_j (\ln b - 1) \right\} \quad (III.31)$$

Com as expressões de \$I1(\eta')\$ e \$I2(\eta')\$ definidas, as integrais (III.26) e (III.27) são calculadas numericamente, exceto para os seguintes casos:

a) Ponto fonte e ponto campo no mesmo elemento ( $i=j$ )

Neste caso é feito para  $g_{ii}$  o cálculo analítico,

$$g_{ii} = - \frac{L_i^2}{2\pi} (\ln L_i - 1,5) \quad (\text{III.32})$$

e o valor de  $h_{ii}$  é obtido aplicando um potencial constante, como definido para a obtenção da equação (III.13).

b) Elemento  $i$  adjacente ao nó 1 do elemento  $j$ .

Neste caso, quando o ponto  $\xi$  tende ao nó 2 do elemento  $i$ , o valor de 'a' tende a zero (ver figura(III.3)), e os termos de  $I_1(\eta')$  e  $I_2(\eta')$  que dependem de  $\ln a$  são integrados analiticamente, sendo os demais integrados numericamente.

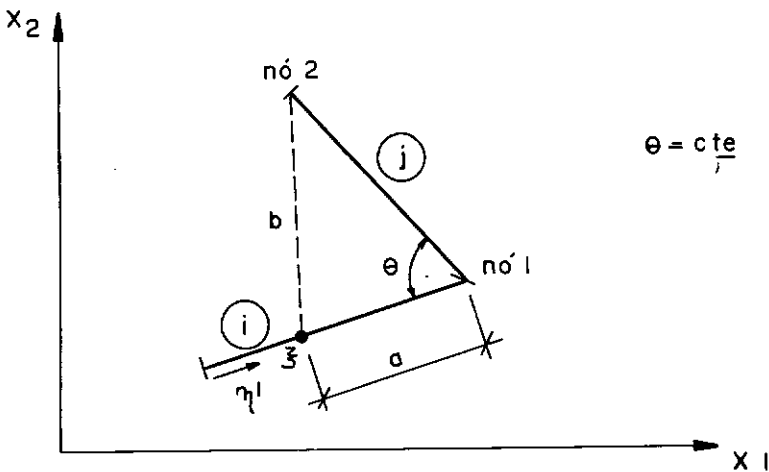


Fig. III.3 - Elemento Adjacente ao nó 1

Para o cálculo de  $\hat{h}_{ij}$  tem-se o seguinte termo analítico:

co:

$$\int_{-1}^1 \ln a \, d\eta' = 2(\ln L_i - 1) \quad (\text{III.33})$$

e para o cálculo de  $g_{ij}$ :

$$\int_{-1}^1 a \cos\theta \ln a \, d\eta' = L_i \cos\theta (\ln L_i - 0,5) \quad (\text{III.34})$$

c) Elemento  $i$  adjacente ao nó 2 do elemento  $j$ .

Para este caso a singularidade será nos termos que dependem de  $\ln b$  (ver figura(III.4)).

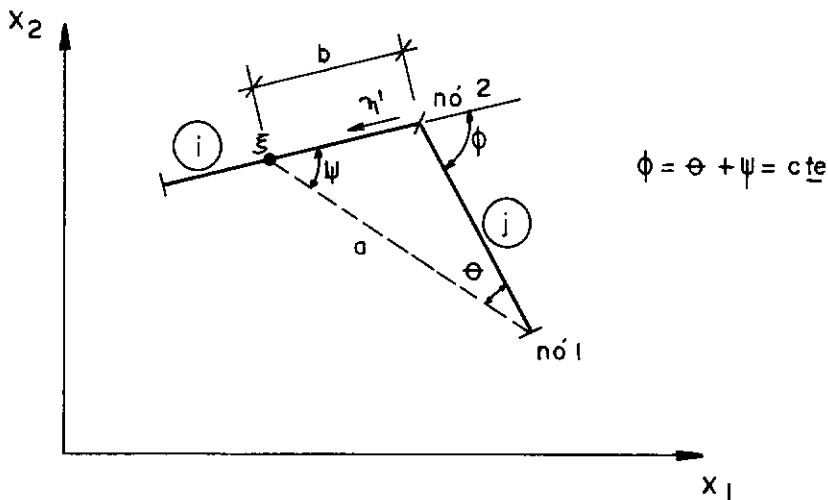


Fig. III.4 - Elemento Adjacente ao nó 2

O termo analítico para o cálculo de  $\hat{h}_{ij}$  será:

$$\int_{-1}^1 \ln b \, d\eta' = 2(\ln L_i - 1) \quad (\text{III.35})$$

e para o cálculo de  $g_{ij}$ :

$$\int_{-1}^1 \left[ -a \cos\theta \ln b + L_j \ln b \right] d\eta' = -L_i \cos\theta (\ln L_i - 0,5) \quad (\text{III.36})$$

Para a obtenção da "matriz de rigidez", o procedimento utilizado é o mesmo descrito na seção (III.2) (equação(III.15) e (III.17)).

### III.4 PROCEDIMENTO ALTERNATIVO

Para aplicar o Procedimento Alternativo descrito na seção II.5.1, serão utilizadas, na obtenção da "matriz de rigidez" e do vetor independente, matrizes já definidas para o Método da Colocação e para o Método de Galerkin.

Portanto, a matriz

$$\underline{C} = \underline{G}^{-1} \underline{H} \quad (\text{III.37})$$

será obtida utilizando as matrizes  $\underline{G}$  e  $\underline{H}$  definidas para o Método da Colocação (equação (III.8)).

Substituindo o valor  $C(\eta') = 1/2$  (contorno suave) nas expressões das matrizes  $\underline{B1}$  e  $\underline{B2}$  (equações (II.81)) obtêm-se:

$$\underline{B1} = 2 \left\{ \int_{\Gamma} \underline{\phi}(\xi) \left[ \int_{\Gamma} u^*(\xi, \mathbf{x}) \underline{\phi}^T(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\xi) \right\} \quad (\text{III.38})$$

$$\tilde{B}_2 = 2 \left\{ \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{\phi}(\xi) \left[ \int_{\tilde{\Gamma}} q^*(\xi, x) \tilde{\phi}^T(x) d\Gamma(x) \right] d\Gamma(\xi) \right\} \quad (\text{III.39})$$

que correspondem a:

$$\tilde{B}_1 = 2 \tilde{G} \quad (\text{III.40})$$

$$\tilde{B}_2 = 2 \hat{H} \quad (\text{III.41})$$

sendo os elementos das matrizes  $\hat{H}$  e  $\tilde{G}$  definidos pelas expressões (III.21) e (III.22) utilizadas no Método de Galerkin.

Observar que os valores dos elementos da diagonal de  $\hat{H}$  são obtidos apenas com a integração dupla ao longo do elemento de contorno correspondente, que fornece:

$$h_{ii} = \frac{L_i^2}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial u^*(\xi, x)}{\partial n} \right] d\eta d\eta' = \frac{L_i^2}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial u^*(\xi, x)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} \right] d\eta d\eta' = 0 \quad (\text{III.42})$$

uma vez que  $\tilde{r}$  e  $\tilde{n}$  são perpendiculares para o elemento constante.

A "matriz de rigidez" (simétrica) é então obtida com a expressão:

$$\tilde{K}^a = \tilde{C}^T \tilde{B}_1 \tilde{C} - \frac{1}{2} ( \tilde{C}^T \tilde{B}_2 - \tilde{B}_2^T \tilde{C} ) \quad (\text{III.43})$$

e o vetor independente:

$$\tilde{F} = (\tilde{C}^T \tilde{B}_1^T - \tilde{B}_2^T) \tilde{Q} \quad (\text{III.44})$$

### III.5 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Serão estudados a seguir dois exemplos de distribuição de temperaturas em regime permanente, atendendo conseqüentemente à equação [14]:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (\text{III.45})$$

Os resultados para a temperatura (potencial) serão analisados com maiores detalhes, pois são obtidos diretamente utilizando a matriz de rigidez. Para os valores incógnitos do fluxo de temperatura (derivada do potencial) no contorno, será utilizada a relação:

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{G}^{-1} & \tilde{H} \end{bmatrix} \tilde{U} \quad (\text{III.46})$$

Também serão analisados resultados para a temperatura obtidos em alguns pontos internos, que dependem dos valores de  $\tilde{U}$  e  $\tilde{Q}$  no contorno.

#### III.5.1 - DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS NUM DOMÍNIO QUADRADO

Como primeiro exemplo utilizou-se uma distribuição de temperaturas num domínio quadrado, cuja solução exata é dada na figura (III.5).

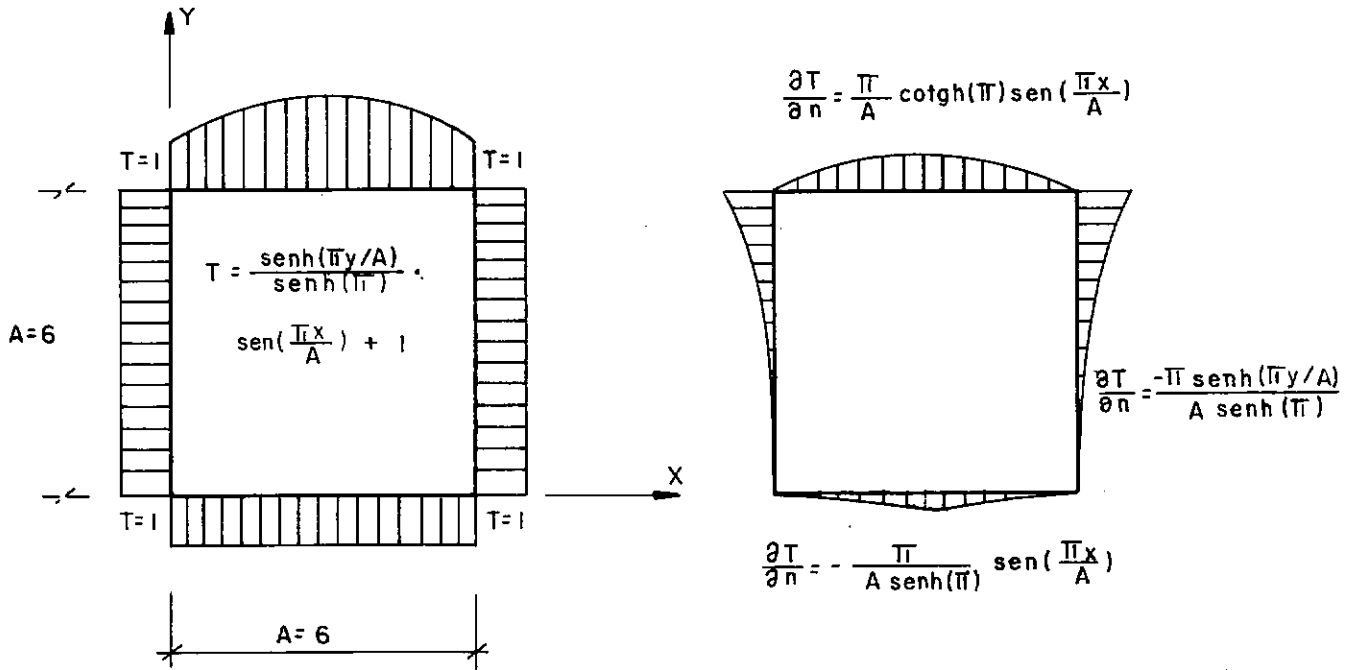


Fig. III.5 - Distribuição de Temperaturas

Foram utilizadas duas discretizações para o contorno (doze e vinte e quatro elementos do mesmo comprimento) e também cinco pontos internos igualmente espaçados ao longo da diagonal do quadrado (figura (III.6)). Uma condição de contorno mista foi imposta, prescrevendo o valor do potencial nos lados AB e CD e da derivada do potencial nos lados BC e AD.

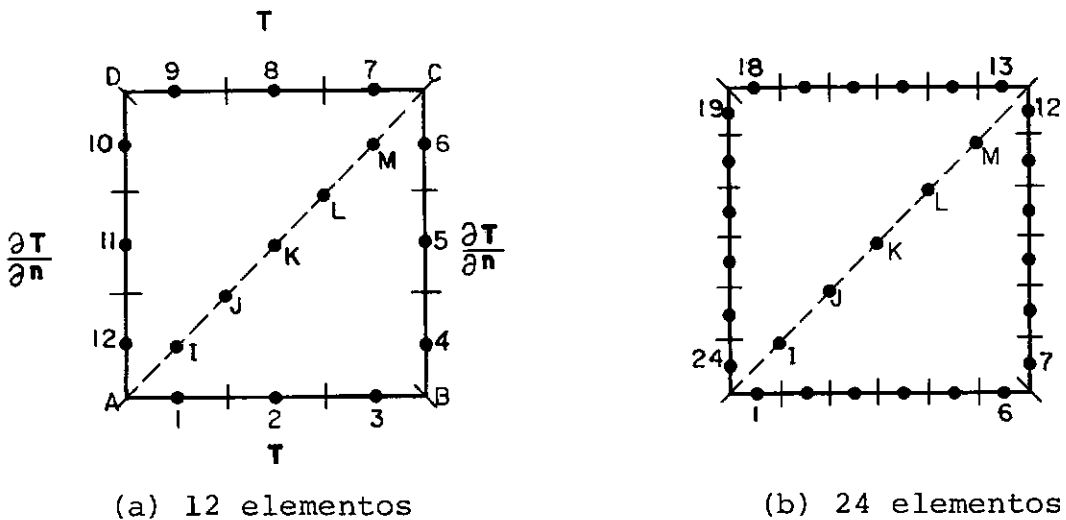


Fig. III.6 - Discretizações do Contorno

Em primeiro lugar foram analisados os resultados utilizando a "matriz de rigidez" sem simetria, obtida com a equação (III.15), do Método da Colocação e do Método de Galerkin. As tabelas (III.1) e (III.2) apresentam os valores encontrados para pontos do contorno e pontos internos.

TABELA III.1 - TEMPERATURAS EM PONTOS DO CONTORNO

(MATRIZ SEM SIMETRIA)

	NÓ	SOLUÇÃO EXATA	MÉTODO DA COLOCAÇÃO	MÉTODO DE GALERKIN
DISCRETIZAÇÃO (a)	4	1,0	0,9958	0,9962
	5	1,0	1,0056	1,0081
	6	1,0	1,0759	1,1041
DISCRETIZAÇÃO (b)	7	1,0	0,9980	0,9981
	8	1,0	0,9978	0,9980
	9	1,0	0,9977	0,9979
	10	1,0	0,9986	0,9988
	11	1,0	1,0031	1,0030
	12	1,0	1,0319	1,0420

TABELA III.2 - TEMPERATURAS EM PONTOS INTERNOS  
(MATRIZ SEM SIMETRIA)

N <sup>o</sup>	SOLUÇÃO EXATA	MÉTODO DA COLOCAÇÃO		MÉTODO DE GALERKIN	
		DISCRETIZAÇÃO (a)	DISCRETIZAÇÃO (b)	DISCRETIZAÇÃO (a)	DISCRETIZAÇÃO (b)
I	1,0237	1,0231	1,0227	1,0241	1,0230
J	1,0937	1,0958	1,0928	1,0995	1,0935
K	1,1993	1,2015	1,1982	1,2080	1,1996
L	1,2999	1,3024	1,2989	1,3116	1,3009
M	1,2952	1,3182	1,2978	1,3264	1,2997

As duas formulações apresentaram bons resultados com relação à solução exata, sendo que o Método da Colocação apresentou comportamento ligeiramente superior.

Em seguida foram utilizadas as matrizes simetrizadas com a expressão (III.17) e também a matriz do Procedimento Alternativo (expressão (III.43)), que também é simétrica. Os resultados são apresentados nas tabelas (III.3) e (III.4).

TABELA III.3 - TEMPERATURAS EM PONTOS DO CONTORNO

(MATRIZ SIMETRIZADA)

	Nº	SOLUÇÃO EXATA	MÉTODO DA COLOCAÇÃO	MÉTODO DE GALERKIN	PROCEDIMENTO ALTERNATIVO
DISCRETIZAÇÃO (a)	4	1,0	1,0010	1,0002	1,0001
	5	1,0	1,0011	1,0021	0,9956
	6	1,0	1,0647	1,0917	1,0519
DISCRETIZAÇÃO (b)	7	1,0	1,0006	1,0002	1,0011
	8	1,0	0,9957	0,9953	0,9946
	9	1,0	0,9963	0,9961	0,9954
	10	1,0	0,9967	0,9966	0,9959
	11	1,0	0,9981	0,9979	0,9986
	12	1,0	1,0240	1,0335	1,0264

TABELA III.4 - TEMPERATURAS EM PONTOS INTERNOS

(MATRIZ SIMETRIZADA)

Nº	SOLUÇÃO EXATA	MÉTODO DA COLOCAÇÃO		MÉTODO DE GALERKIN		PROCEDIMENTO ALTERNATIVO	
		DISCR. (a)	DISCR. (b)	DISCR. (a)	DISCR. (b)	DISCR. (a)	DISCR. (b)
I	1,0237	1,0160	1,0153	1,0132	1,0136	1,0028	1,0170
J	1,0937	1,0888	1,0860	1,0892	1,0849	1,0760	1,0875
K	1,1993	1,1953	1,1922	1,1987	1,1919	1,1830	1,1936
L	1,2999	1,2971	1,2936	1,3035	1,2941	1,2854	1,2949
M	1,2952	1,3134	1,2932	1,3193	1,2940	1,3019	1,2944

Observar que o procedimento utilizado para simetrizar as matrizes afetou muito pouco os resultados finais, demonstrando que as matrizes originais já apresentam características de quase simetria. Quanto ao Procedimento Alternativo, observa-se um comportamento dos resultados semelhante aos obtidos com os outros dois métodos, embora demande um gasto computacional bem superior.

### III.5.2 - DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS NUM DOMÍNIO SEMI-CIRCULAR

Para segundo exemplo utilizou-se um domínio semi-circular, com as condições de contorno indicadas na figura (III.7). A solução analítica é indicada na figura (III.8).

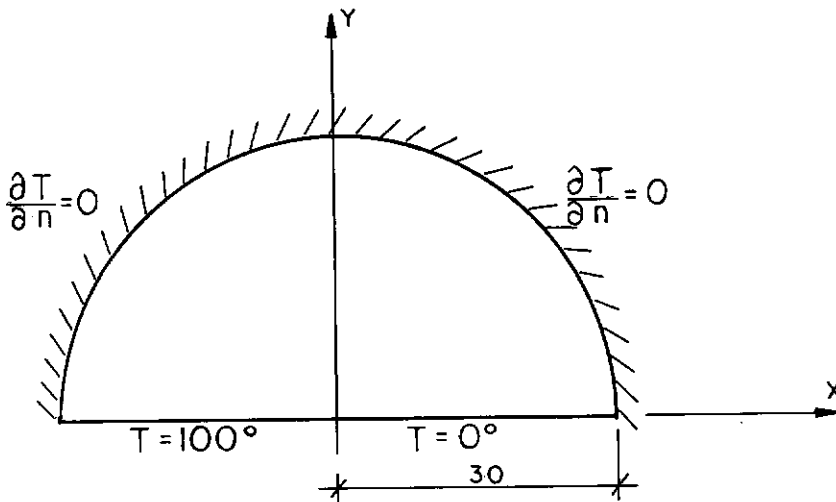


Fig. III.7 - DOMÍNIO E CONDIÇÕES DE CONTORNO

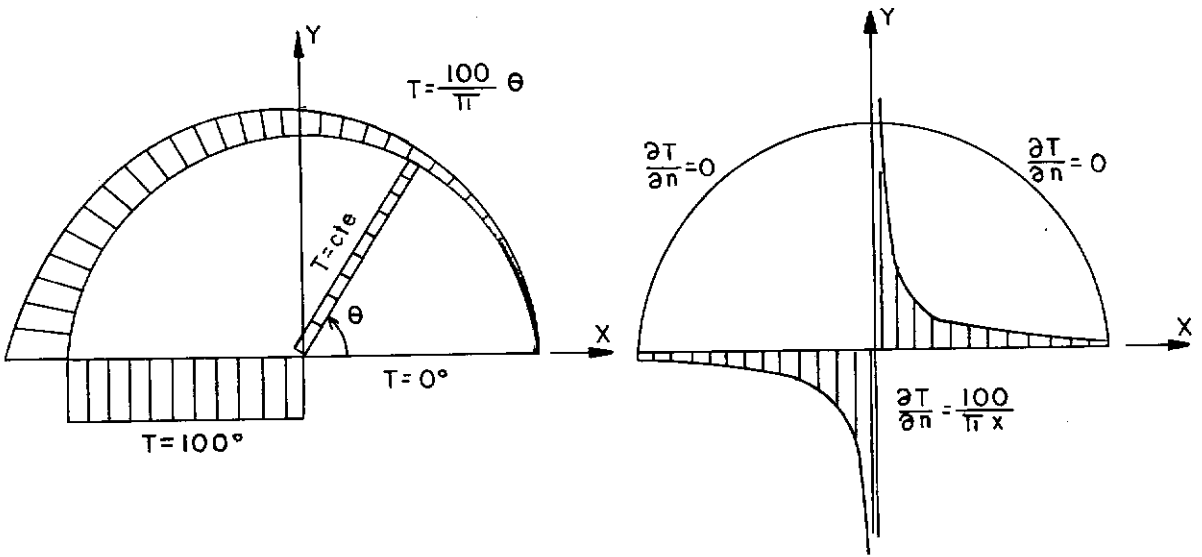


Fig. III.8 - Solução Analítica

O contorno foi discretizado em vinte e seis elementos, sendo que próximo ao ponto de coordenadas  $(0,0)$ , onde existe uma descontinuidade de temperaturas, foi concentrado um maior número de elementos (figura (III.9)). Foram também calculadas as temperaturas em quatro pontos internos.

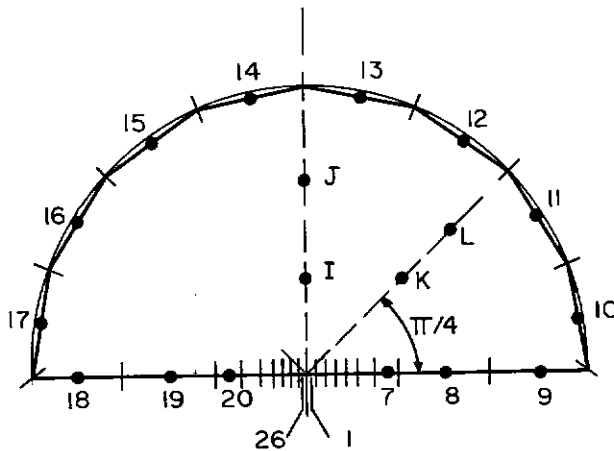


Fig. III.9 - Discretização do Contorno

Na tabela (III.5) estão listados os resultados obtidos para a temperatura no contorno circular (nós 10 a 17), utilizando matrizes simétricas, e nos quatro pontos internos I,J,K,L.

TABELA III.5 - RESULTADOS OBTIDOS PARA AS TEMPERATURAS

NÓ	SOLUÇÃO EXATA	MÉTODO DA COLOCAÇÃO	MÉTODO DE GALERKIN	PROCEDIMENTO ALTERNATIVO
10	6,25	6,0421	5,9506	6,5769
11	18,75	18,2957	18,1543	18,3346
12	31,25	31,0122	30,9345	31,0837
13	43,75	43,6578	43,6185	43,6727
14	56,25	56,2769	56,2726	56,2631
15	68,75	68,9023	68,9382	68,8374
16	81,25	81,5668	81,6694	81,5134
17	93,75	93,9572	94,0944	93,4368
I	50,00	49,9321	49,9617	49,9426
J	50,00	49,9227	49,9501	49,9339
K	25,00	24,8557	25,8421	24,7977
L	25,00	24,7532	24,7221	24,6862

Observa-se novamente um comportamento muito bom das três formulações, sendo que o Método da Colocação voltou a apresentar um comportamento um pouco melhor comparado com o Método de Galerkin. O Procedimento Alternativo em alguns pontos do con

torno apresenta resultados ligeiramente melhores do que o Método da Colocação, mas analisando de uma forma geral o problema ainda não se justifica a sua aplicação.

## CAPÍTULO IV

### APLICAÇÕES PARA PROBLEMAS DE ELASTICIDADE

#### IV.1 INTRODUÇÃO

Sendo o problema de elasticidade bi-dimensional mais específico, as formulações a serem utilizadas foram desenvolvidas utilizando o elemento linear, de forma a obter comportamento mais preciso para as soluções aproximadas. Com este elemento torna-se também mais consistente a combinação com o Método dos Elementos Finitos, uma vez que os nós da interface das regiões onde se aplica cada método são os mesmos (com as mesmas funções de interpolação), o que não acontece com o elemento constante. Entretanto o problema de descontinuidade de forças de superfície torna-se evidente (dois valores para a força de superfície no mesmo nó), e são necessárias certas condições adicionais para consideração destas descontinuidades.

Utilizando o elemento linear (figura (IV.1)), os deslocamentos  $\underline{u}$  e as forças de superfície  $\underline{p}$  (expressões (II.42)) em um ponto de um elemento  $t$  são obtidos com:

$$u_j(x) = N^1(\eta) u_j^{t_1} + N^2(\eta) u_j^{t_2} \quad (\text{IV.1})$$

$$p_j(x) = N^1(\eta) p_j^{t_1} + N^2(\eta) p_j^{t_2} \quad (\text{IV.2})$$

sendo as funções de interpolação dadas por:

$$N^1(\eta) = \frac{1}{2} (1-\eta) \quad (\text{IV.3})$$

$$N^2(\eta) = \frac{1}{2} (1+\eta) \quad (\text{IV.4})$$

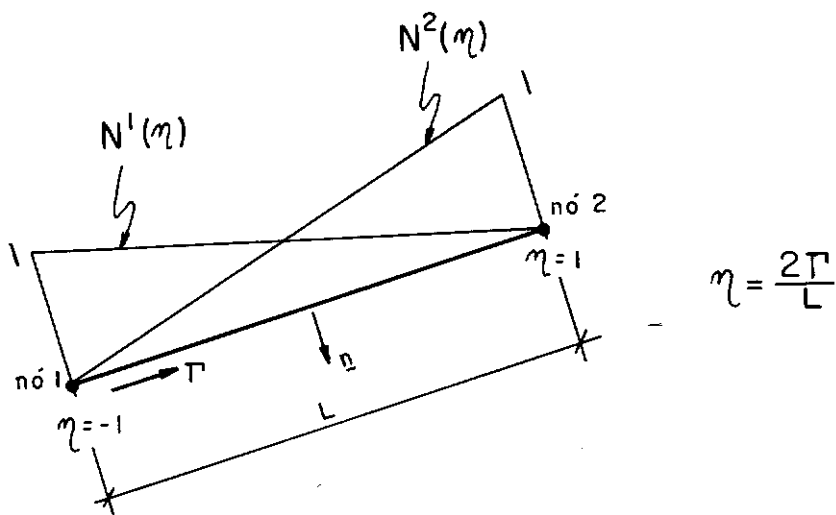


Fig. IV.1 - Elemento Linear

Neste ponto, para facilitar a representação das equações da elasticidade bi-dimensional, são definidas as matrizes necessárias para a utilização da notação matricial.

Definindo  $\tilde{u}^*$  e  $\tilde{p}^*$  como matrizes (2x2) com elementos  $u_{ij}^*$  e  $p_{ij}^*$  ( $i, j=1, 2$ ) tem-se que:

$$\tilde{u}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix}, \quad \tilde{p}^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

Os valores dos deslocamentos e forças de superfície em um ponto podem ser escritos como vetores:

$$\tilde{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad \tilde{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

Sendo os deslocamentos e forças de superfície nos pontos nodais de um elemento  $t$  definidos por:

$$\tilde{u}(t) = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \text{ n\~{o} 1} \\ \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \text{ n\~{o} 2} \end{Bmatrix}_t, \quad \tilde{p}(t) = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \text{ n\~{o} 1} \\ \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \text{ n\~{o} 2} \end{Bmatrix}_t \quad (\text{IV.7})$$

as expressões (IV.1) e (IV.2) podem ser escritas na forma:

$$\tilde{u} = \tilde{N}^T \tilde{u}(t) \quad (\text{IV.8})$$

$$\tilde{p} = \tilde{N}^T \tilde{p}(t) \quad (\text{IV.9})$$

onde

$$\tilde{N}^T = \begin{bmatrix} N^1 & 0 & N^2 & 0 \\ 0 & N^1 & 0 & N^2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.10})$$

A Identidade de Somigliana, equação (II.44), pode então ser colocada na forma matricial:

$$\begin{aligned} \underline{c}(\eta') \underline{N}^T(\eta') \underline{u}^{(n)} + \sum_{t=1}^m \left\{ \int_{-1}^1 \underline{p}^*(\xi, x) \underline{N}^T(\eta) |J| d\eta \right\} \underline{u}^{(t)} = \\ = \sum_{t=1}^m \left\{ \int_{-1}^1 \underline{u}^*(\xi, x) \underline{N}^T(\eta) |J| d\eta \right\} \underline{p}^{(t)} \end{aligned} \quad (IV.11)$$

onde

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Deve-se observar que a expressão (IV.11) representa duas equações, e a coordenada adimensional  $\eta'$  localiza o ponto fonte  $\xi$ .

Substituindo o valor do Jacobiano, equação (III.1), obtem-se para a equação dos resíduos ponderados, equação (II.45), a seguinte expressão, na qual as funções de ponderação também são colocadas em forma matricial:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \underline{w}^{\ell}(\xi) \left\{ \underline{c}(\eta') \underline{N}^T(\eta') \right\} d\Gamma(\xi) \underline{u}^{(n)} + \sum_{t=1}^m \left\{ \int_{\Gamma} \underline{w}^{\ell}(\xi) \left[ \int_{-1}^1 \frac{L_t}{2} \underline{p}^*(\xi, x) \underline{N}^T(\eta) d\eta \right] d\Gamma(\xi) \right\} \underline{u}^{(t)} = \\ \sum_{t=1}^m \left\{ \int_{\Gamma} \underline{w}^{\ell}(\xi) \left[ \int_{-1}^1 \frac{L_t}{2} \underline{u}^*(\xi, x) \underline{N}^T(\eta) d\eta \right] d\Gamma(\xi) \right\} \underline{p}^{(t)} \end{aligned} \quad (IV.12)$$

$\ell=1, \dots, s$

O número de funções de ponderação neste caso é igual ao dobro do número de nós (dois graus de liberdade por nó).

A seguir são analisadas as formulações utilizando o Método da Colocação e o Método de Galerkin.

## IV.2 MÉTODO DA COLOCAÇÃO

Para o Método da Colocação são utilizadas funções delta de Dirac como funções de ponderação

$$\tilde{w}^{\ell}(\xi) = \Delta(\xi^{\ell}, \xi) \quad , \quad \ell=1, \dots, m \quad (\text{IV.13})$$

sendo  $\xi^{\ell}$  pontos selecionados no contorno coincidentes com os pontos nodais, e as funções  $\tilde{w}^{\ell}(\xi)$  aplicadas nas duas direções dos eixos coordenados. Em notação matricial estas funções de ponderação podem ser colocadas na forma:

$$\tilde{w}^{\ell}(\xi) = \begin{bmatrix} \Delta(\xi^{\ell}, \xi) & 0 \\ 0 & \Delta(\xi^{\ell}, \xi) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.14})$$

que substituídas na equação (IV.12), e utilizando as propriedades das funções delta de Dirac fornecem:

$$\begin{aligned}
\tilde{C}(\xi^\ell) \tilde{u}(\xi^\ell) + \sum_{t=1}^m \left\{ \int_{-1}^1 \frac{L_t}{2} \tilde{p}^*(\xi^\ell, x) \tilde{N}^T(\eta) d\eta \right\} \tilde{u}^{(t)} = \\
= \sum_{t=1}^m \left\{ \int_{-1}^1 \frac{L_t}{2} \tilde{u}^*(\xi^\ell, x) \tilde{N}^T(\eta) d\eta \right\} \tilde{p}^{(t)}
\end{aligned}$$

$\ell=1, \dots, m$  (IV.15)

Isto corresponde à identidade de Somigliana (IV.11) escrita para cada ponto nodal.

Da aplicação da equação (IV.15) para os  $m$  pontos nodais obtém-se o sistema com  $2m$  equações lineares:

$$(\tilde{C} + \hat{\tilde{H}}) \tilde{U} = \tilde{G} \tilde{P} \quad (\text{IV.16})$$

onde os vetores  $\tilde{U}$  e  $\tilde{P}$  contêm todos os deslocamentos e forças de superfície dos pontos nodais, e os elementos das matrizes  $\hat{\tilde{H}}$  e  $\tilde{G}$  correspondem à soma, em cada nó, das contribuições obtidas nos elementos adjacentes das integrais indicadas na equação (IV.15). A matriz quase-diagonal  $\tilde{C}$  pode ser somada à matriz  $\hat{\tilde{H}}$ , fornecendo:

$$\tilde{H} \tilde{U} = \tilde{G} \tilde{P} \quad (\text{IV.17})$$

sendo os coeficientes da matriz  $\tilde{H}$  dados por:

$$h_{ij}^{\ell k} = \hat{h}_{ij}^{\ell k} \quad \text{se } \ell \neq k$$

(IV.18)

$$h_{ij}^{\ell k} = \hat{h}_{ij}^{\ell k} + C_{ij}^{\ell} \quad \text{se } \ell = k$$

onde  $h_{ij}^{\ell k}$ ,  $\hat{h}_{ij}^{\ell k}$  e  $C_{ij}^{\ell}$  são submatrizes de ordem 2, os índices 'i' e 'j' ( $i, j=1, 2$ ) indicam a posição do coeficiente dentro da submatriz, 'l' é o ponto fonte e 'k' os pontos nodais do contorno.

Utilizando a solução de Kelvin para problemas de elasticidade bi-dimensional, equações (II.37) e (II.38), as contribuições para os elementos das matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$  são obtidas utilizando integração numérica, exceto nos casos em que o ponto fonte coincidir com um dos nós extremos de um elemento de contorno.

Nestes casos é utilizada a integração analítica, evitando esquema sofisticado de integração numérica para consideração da singularidade.

As integrais indicadas em (IV.15) fornecerão portanto duas submatrizes  $\underline{h}$  e  $\underline{g}$  (correspondentes a  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$ ) para cada elemento, de dimensões (2x4), e que, quando  $\xi^{\ell} \notin \Gamma_t$ , podem ser calculadas na forma numérica (os índices foram subtraídos por simplicidade):

$$\underline{h} = \frac{L_t}{2} \int_{-1}^1 \left[ \underline{p}^{*N^1} \quad \underline{p}^{*N^2} \right] d\eta = \frac{L_t}{2} \sum_{k=1}^K \left[ ( \underline{p}^{*N^1} )_k W_k \quad ( \underline{p}^{*N^2} )_k W_k \right]$$

(IV.19)

$$\underline{g} = \frac{L_t}{2} \int_{-1}^1 \left[ \underline{u}^{*N^1} \quad \underline{u}^{*N^2} \right] d\eta = \frac{L_t}{2} \sum_{k=1}^K \left[ ( \underline{u}^{*N^1} )_k W_k \quad ( \underline{u}^{*N^2} )_k W_k \right]$$

onde  $K$  é o número de pontos de integração de Gauss e  $W_k$  é o fator peso associado a cada ponto (apêndice 1).

Nos casos em que existe singularidade ( $\xi^\ell \in \Gamma_t$ ) a solução analítica fornece o seguinte resultado para os elementos da submatriz  $\underline{g}$  [12]:

$$g_{ij}^{kn} = C_2 \left\{ C_1 L_t \left[ \delta_{kn} + \frac{1}{2} - \ln(L_t) \right] \delta_{ij} + \frac{\ell_i \ell_j}{L_t} \right\} \quad (\text{IV.20})$$

$$(i, j, k, n=1, 2)$$

onde os índices  $i$  e  $j$  indicam a posição do coeficiente na submatriz  $k$  de ordem 2, e  $n$  indica o nó singular. As constantes são dadas por:

$$C_1 = 3 - 4\nu$$

$$C_2 = 1 / [16\pi(1-\nu)G] \quad (\text{IV.21})$$

$$\ell_i = {}^2x_i - {}^1x_i \text{ (projeção de } L_t \text{ na direção do eixo } x_i)$$

$$G = \text{módulo de elasticidade transversal}$$

$$\nu = \text{coeficiente de Poisson}$$

Para o caso da submatriz  $h$  será adotada a solução indicada a seguir. Inicialmente a submatriz  $h$  de dimensões (2x4) é dividida em 2 submatrizes de ordem 2, correspondentes a cada nó do elemento. A submatriz (2x2) que corresponde ao nó singu-

lar não necessita ser calculada, porque a sua contribuição, que seria para a submatriz diagonal de  $\tilde{H}$  (juntamente com  $\tilde{C}$ ), será substituída pelo deslocamento de corpo rígido. Considerando portanto esta submatriz nula, obtém-se a seguinte expressão para os elementos da submatriz  $\tilde{h}$ :

$$h_{ij}^{kn} = (1-\delta_{kn}) \left[ (-1)^{n+i} (1-\delta_{ij}) \right] C_3 \quad (\text{IV.22})$$

onde os índices  $i, j, k, n$  tem a mesma interpretação dada para a equação (IV.20) e

$$C_3 = (1-2\nu) / \left[ 4\pi(1-\nu) \right] \quad (\text{IV.23})$$

Para obtenção das submatrizes diagonais de  $\tilde{H}$  é utilizado um deslocamento de corpo rígido, o que resulta em forças de superfície nulas. Aplicando-se então duas translações independentes, tais como  $u_i = \delta_{i1}$  e  $u_i = \delta_{i2}$ , obtém-se a seguinte relação (para regiões finitas):

$$\tilde{H}_{pq} \tilde{u}_q = 0 \quad (p, q=1, \dots, m) \quad (\text{IV.24})$$

na qual  $\tilde{H}_{pq}$  representa submatrizes (2x2) de  $\tilde{H}$  e  $\tilde{u}_q$  corresponde às duas translações:

$$\tilde{u}_q = \tilde{I} \quad (q=1, \dots, m) \quad (\text{IV.25})$$

sendo  $\tilde{I}$  a matriz Identidade de ordem 2.

A equação (IV.24) fornece então o valor da submatriz diagonal de  $\tilde{H}$  na forma:

$$\tilde{H}_{pp} = - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^m H_{pq} \quad , \quad (p=1, \dots, m) \quad (\text{IV.26})$$

e a montagem do sistema  $\tilde{H} \tilde{U} = \tilde{G} \tilde{P}$  fica completa.

Antes da obtenção da matriz de rigidez torna-se necessária uma análise da descontinuidade das forças de superfície, uma vez que, utilizando elementos lineares, sempre existirão nós localizados nos pontos de descontinuidade geométrica do contorno. Utilizando simplesmente a técnica descrita anteriormente, esta descontinuidade de forças de superfície é desconsiderada, não representando portanto de forma correta o problema. A matriz de rigidez obtida com a equação (II.67) apresenta resultados apenas razoáveis, que variam de acordo com o tipo de descontinuidade e também com a discretização. Se for utilizada uma discretização mais refinada em torno destes pontos, a influência da continuidade das forças de superfície fica aí localizada, obtendo-se melhores soluções em pontos mais distantes (Princípio de Saint-Venant). Entretanto este procedimento não é adequado para um problema de combinação com o MEF, pois tornaria necessário o refinamento da malha de elementos finitos, aumentando consideravelmente o número de pontos nodais. Cabe apenas ressaltar que, quando se força continuidade em todos os pontos nodais, os resultados obtidos com a matriz de rigidez simetrizada, equação (II.69), diferem pouco dos resultados obtidos com a matriz sem simetria.

Forças de superfície descontínuas podem ser consideradas utilizando o conceito de "nó duplo" [9], [11], [14]. Com este procedimento são geradas equações extras, as quais permitem a consideração de uma força de superfície adicional em cada nó onde existe descontinuidade. Pode-se então definir o vetor de forças de superfície em um nó com descontinuidade (nó duplo) na forma:

$$p^{i,m} = \begin{Bmatrix} p_1^{i,m} \\ p_2^{i,m} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.27})$$

onde  $p_k^{i,m}$  é a componente da força de superfície na direção 'k' ( $k=1,2$ ) no 'm'-ésimo elemento ( $m=j, j+1$ ) de um nó 'i' (figura (IV.2)).

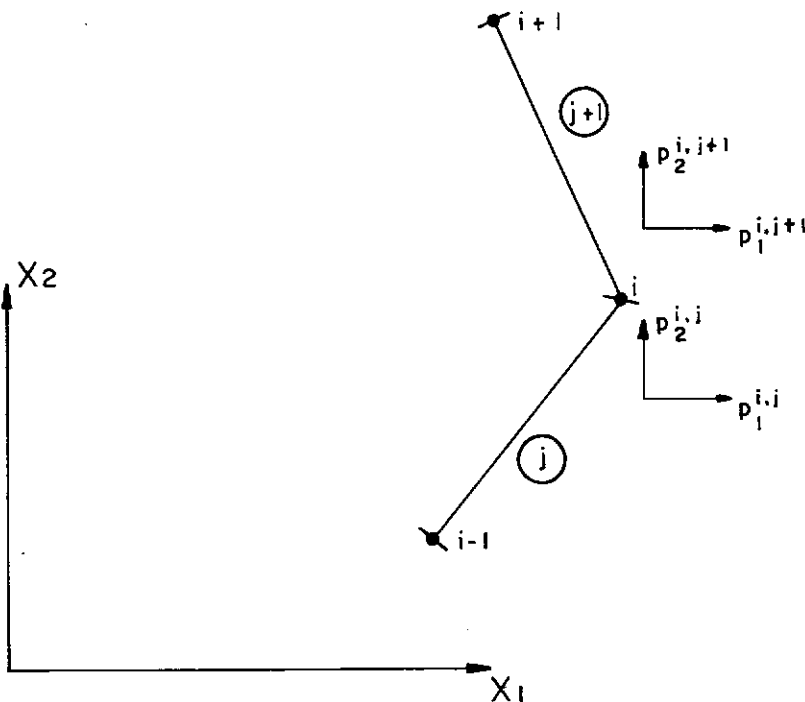


Fig. IV.2 - Forças de Superfície Descontínuas

A única restrição à utilização desta técnica ocorre quando é prescrito apenas o valor do deslocamento nestes nós. Neste caso dois conjuntos de colunas da matriz  $\underline{G}$ , correspondentes às duas forças de superfície incôgnitas ( $\underline{p}^{i,j}$  e  $\underline{p}^{i,j+1}$ ) em um nó duplo 'i', são transferidos para a matriz dos coeficientes  $\underline{A}$  ao ser montado o sistema de equações  $\underline{A} \underline{X} = \underline{B}$  para solução do problema. Os elementos destas colunas correspondentes ao nó 'i' são iguais, tornando também iguais duas linhas da matriz dos coeficientes  $\underline{A}$ , e conseqüentemente gerando um sistema singular. O mesmo problema não ocorre quando utiliza-se as colunas correspondentes de  $\underline{H}$ , porque a submatriz  $\underline{c}$  é sempre somada aos termos da diagonal, ficando portanto as linhas desiguais.

Observar que para obtenção da matriz de rigidez, equação (II.67), é sempre necessária a utilização da inversa da matriz  $\underline{G}$ . Logo, utilizando nós duplos, este problema de singularidade ocorre em todos os pontos onde houver descontinuidade geométrica no contorno.

Para evitar estas singularidades, torna-se necessária então a utilização de equações adicionais para garantir a unicidade da solução, as quais serão chamadas "condições de canto".

Neste trabalho foi considerada a alternativa sugerida por CHAUDONNERET [7], na forma desenvolvida por GEORGIU [9]. Para o caso bi-dimensional, utilizando esta alternativa, são geradas duas equações extras para cada nó duplo (ponto de descontinuidade). A primeira equação é baseada na simetria do tensor de tensões neste ponto e relaciona as forças de superfície com as

normais nos elementos adjacentes. A segunda equação é obtida a partir da invariância do traço do tensor de deformações, e relaciona as forças de superfície com as normais nos elementos adjacentes, e também com os deslocamentos no nó da descontinuidade e nos dois nós adjacentes.

Sendo  $X_k^m$  a projeção do 'm'-ésimo elemento ( $m=j, j+1$ ) no eixo de coordenadas  $X_k$ , dividido pelo comprimento do elemento  $L_m$ , as duas equações descritas podem ser colocadas na forma [9]:

$$\tilde{T}_1 p^{i,j} + \tilde{T}_2 p^{i,j+1} = \tilde{T}_3 u^{i-1} + \tilde{T}_4 u^{i+1} + \tilde{T}_5 u^i \quad (\text{IV.28})$$

onde

$$\tilde{T}_1 = \begin{bmatrix} -x_2^j & x_1^j \\ x_2^{j+1} & -x_1^{j+1} \end{bmatrix}; \quad \tilde{T}_2 = \begin{bmatrix} x_2^{j+1} & -x_1^{j+1} \\ -x_2^j & x_1^j \end{bmatrix}$$

$$\tilde{T}_3 = \frac{2G}{L_j} \begin{bmatrix} -x_1^j & -x_2^j \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{T}_4 = \frac{2G}{L_{j+1}} \begin{bmatrix} -x_1^{j+1} & -x_2^{j+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.29})$$

$$\tilde{T}_5 = 2G \begin{bmatrix} \left( \frac{x_1^j}{L_j} + \frac{x_1^{j+1}}{L_{j+1}} \right) & \left( \frac{x_2^j}{L_j} + \frac{x_2^{j+1}}{L_{j+1}} \right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Isolando o valor de  $\underline{p}^{i,j}$  obtêm-se:

$$\underline{p}^{i,j} = - \underline{\hat{T}}_2 \underline{p}^{i,j+1} + \underline{\hat{T}}_3 \underline{u}^{i-1} + \underline{\hat{T}}_4 \underline{u}^{i+1} + \underline{\hat{T}}_5 \underline{u}^i \quad (\text{IV.30})$$

sendo:

$$\underline{\hat{T}}_2 = \underline{T}_1^{-1} \underline{T}_2, \quad \underline{\hat{T}}_3 = \underline{T}_1^{-1} \underline{T}_3, \quad \underline{\hat{T}}_4 = \underline{T}_1^{-1} \underline{T}_4, \quad \underline{\hat{T}}_5 = \underline{T}_1^{-1} \underline{T}_5 \quad (\text{IV.31})$$

Quando o ângulo entre os dois elementos é igual a 0 ou  $\pi$ , a equação (IV.30) não é válida, pois a matriz  $\underline{T}_1$  torna-se singular. Esta situação já era esperada uma vez que, nestes casos, a força de superfície descontínua no nó 'i' introduz uma singularidade de tensões neste ponto, sendo o tensor de tensões portanto indefinido.

Com as restrições mencionadas, a equação (IV.30) pode então ser somada ao sistema de equações  $\underline{H} \underline{U} = \underline{G} \underline{P}$  (considerando nós duplos), garantindo desta forma solução única para o problema.

#### IV.2.1 - OBTENÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ

Para obter a matriz de rigidez, duas condições devem ser observadas. Em primeiro lugar esta matriz deve conter apenas duas equações correspondentes a cada ponto nodal, de forma a permitir a combinação com a malha de elementos finitos. Como segunda condição, o vetor de cargas nodais (vetor independente) deve ser formado considerando o efeito acumulativo de ambas as forças de superfície em um nó de descontinuidade.

Com a finalidade de atender a estas duas condições, e buscando manter a característica de quase-simetria da matriz de rigidez final, GEORGIU [9] propõe a inclusão das condições de canto (IV.30) como condições de contorno adicionais, impondo-as ao sistema de Elementos de Contorno na forma de "matrizes de transformação", em analogia a procedimento semelhante utilizado no Método dos Elementos Finitos. O procedimento utilizado é descrito a seguir:

Inicialmente são definidas as seguintes notações:

$\tilde{U}, \tilde{P}, \tilde{F}$  - vetores contendo os valores dos deslocamentos, forças de superfície e cargas nodais em todos os nós (considerando um conjunto de dois valores para cada nó simples, e dois conjuntos para cada nó duplo).

$\hat{U}, \hat{P}, \hat{F}$  - vetores contendo apenas um conjunto de dois valores para todos os nós (simples ou duplos). O vetor  $\hat{P}$  contém  $p^{i,j+1}$  no ponto 'i'.

NN - ordem do sistema total = (número total de nós) x (número de graus de liberdade por nó).

NI - ordem do sistema reduzido = (número de nós independentes) x (número de graus de liberdade por nó).

O vetor de forças de superfície pode ser então colocado na seguinte forma:

$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{R}_p \underset{\sim}{\hat{P}} + \underset{\sim}{R}_u \underset{\sim}{\hat{U}} \quad (\text{IV.32})$$

onde estão incluídas as condições de canto, equação (IV.30). As matrizes  $\underset{\sim}{R}_p$  e  $\underset{\sim}{R}_u$ , de dimensões (NN x NI), são representadas diagramaticamente para um nó duplo 'i' na figura (IV.3).

A condição de um conjunto único de deslocamentos para cada nó duplo deve ser escrita como:

$$\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{R}_d \underset{\sim}{\hat{U}} \quad (\text{IV.33})$$

e a condição do vetor de cargas nodais considerar o efeito das forças de superfície descontínuas deve ser escrita como:

$$\underset{\sim}{\hat{F}} = \underset{\sim}{R}_d^T \underset{\sim}{F} \quad (\text{IV.34})$$

As equações (IV.33) e (IV.34) são representadas diagramaticamente na figura (IV.4), onde a forma da matriz  $\underset{\sim}{R}_d$  pode ser vista mais claramente.

Voltando então ao sistema de equações (IV.17), obtido com a inclusão dos nós duplos,

$$\underset{\sim}{H} \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{G} \underset{\sim}{P} \quad (\text{IV.35})$$

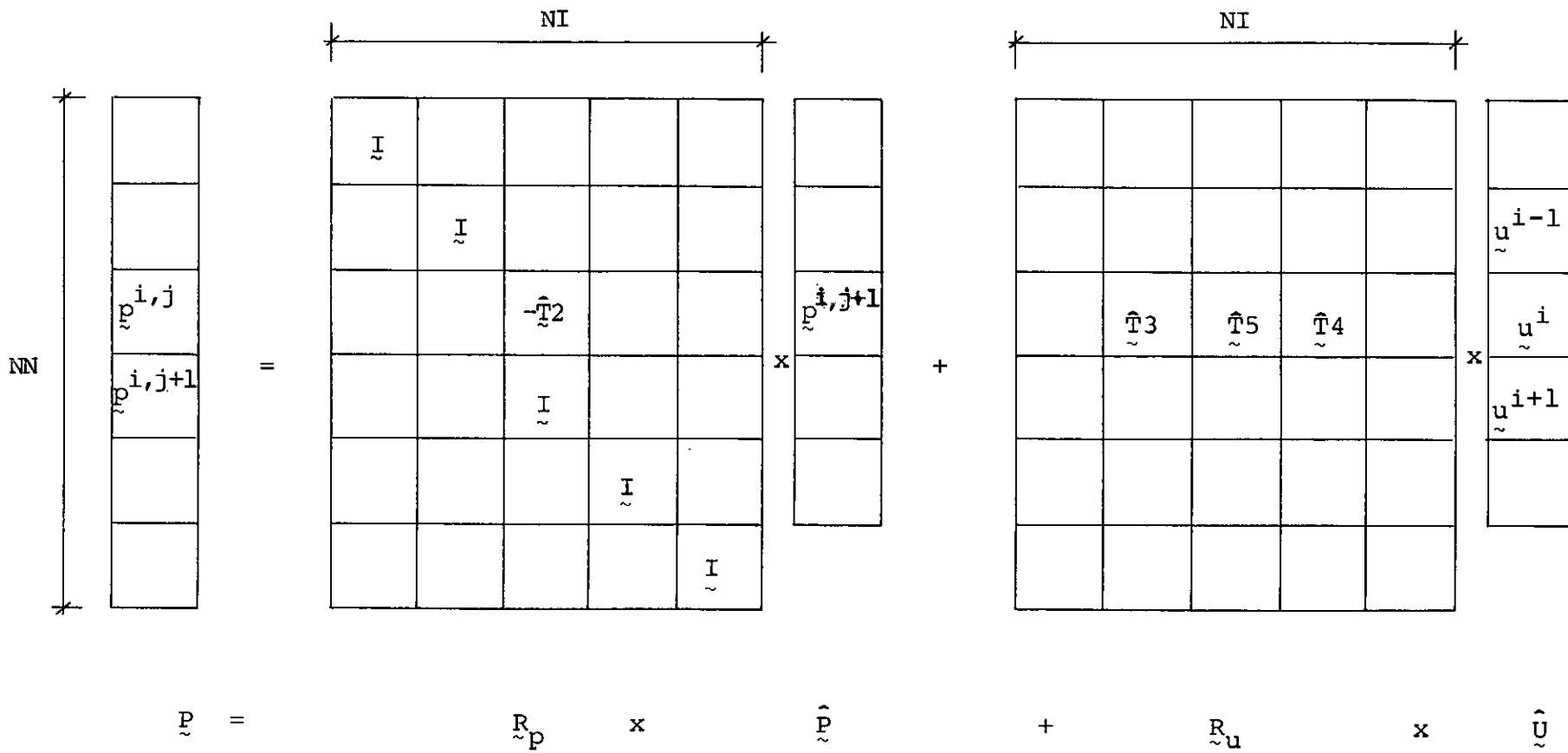


Fig. IV.3 - Representação diagramática da equação (IV.32)  
 I = matriz Identidade (2x2)  
 Submatrizes de  $\underset{\sim}{R}_p$  e  $\underset{\sim}{R}_u$  não indicadas são nulas

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline u^{i,j} \\ \hline u^{i,j+1} \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \tilde{I} & & & & \\ \hline & \tilde{I} & & & \\ \hline & & \tilde{I} & & \\ \hline & & \tilde{I} & & \\ \hline & & & \tilde{I} & \\ \hline & & & & \tilde{I} \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline u^i \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

$$\tilde{U} = \tilde{R}_d \times \hat{U}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \hat{f}^{i,j} \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \tilde{I} & & & & & \\ \hline & \tilde{I} & & & & \\ \hline & & \tilde{I} & \tilde{I} & & \\ \hline & & & & \tilde{I} & \\ \hline & & & & & \tilde{I} \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \hat{f}^{i,j} \\ \hline \hat{f}^{i,j+1} \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

$$\hat{F} = \tilde{R}_d^T \times F$$

Fig. IV.4 - Representação diagramática das equações (IV.33) e (IV.34)

$\tilde{I}$  = matriz identidade (2x2)  
 Submatriz de  $\tilde{R}_d$  não indicadas são nulas.

e substituindo o valor de  $\tilde{P}$  dado por (IV.32), o valor de  $\tilde{U}$  por (IV.33), e pré-multiplicando por  $\tilde{R}_d^T$  obtém-se:

$$(\tilde{R}_d^T \tilde{H} \tilde{R}_d - \tilde{R}_d^T \tilde{G} \tilde{R}_u) \hat{\tilde{U}} = (\tilde{R}_d^T \tilde{G} \tilde{R}_p) \hat{\tilde{P}} \quad (IV.36)$$

ou  $\hat{\tilde{K}} \hat{\tilde{U}} = \hat{\tilde{P}}$  (IV.37)

onde

$$\hat{\tilde{K}} = (\tilde{R}_d^T \tilde{G} \tilde{R}_p)^{-1} (\tilde{R}_d^T \tilde{H} \tilde{R}_d - \tilde{R}_d^T \tilde{G} \tilde{R}_u) \quad (IV.38)$$

O vetor de cargas nodais é obtido com a equação:

$$\tilde{F} = \tilde{M} \tilde{P} \quad (IV.39)$$

sendo

$$\tilde{M} = \sum_{t=1}^m \int_{\Gamma_t} \tilde{N} \tilde{N}^T d\Gamma \quad (IV.40)$$

Substituindo a matriz  $\tilde{N}$  do elemento linear, expressão (IV.10), a contribuição de cada elemento do contorno para a matriz  $\tilde{M}$  é:

$$\tilde{M}_t = \frac{L_t}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (IV.41)$$

Estas contribuições são então distribuídas na matriz global  $\tilde{M}$  na forma usual, somando-se os valores obtidos nos elementos concorrentes a um mesmo nó.

Substituindo em (IV.39) o valor de  $\tilde{P}$ , equação (IV.32), e pré-multiplicando por  $\tilde{R}_d^T$  obtém-se:

$$\tilde{R}_d^T \tilde{F} = (\tilde{R}_d^T \tilde{M} \tilde{R}_p) \hat{\tilde{P}} + (\tilde{R}_d^T \tilde{M} \tilde{R}_u) \hat{\tilde{U}} \quad (\text{IV.42})$$

ou

$$\hat{\tilde{F}} = \tilde{R}_1 \hat{\tilde{P}} + \tilde{R}_2 \hat{\tilde{U}} \quad (\text{IV.43})$$

onde

$$\tilde{R}_1 = \tilde{R}_d^T \tilde{M} \tilde{R}_p \quad (\text{IV.44})$$

$$\tilde{R}_2 = \tilde{R}_d^T \tilde{M} \tilde{R}_u$$

Pré-multiplicando a equação (IV.37) por  $\tilde{R}_1$

$$\tilde{R}_1 \hat{\tilde{K}} \hat{\tilde{U}} = \tilde{R}_1 \hat{\tilde{P}} \quad (\text{IV.45})$$

e substituindo em (IV.43) obtém-se:

$$\hat{\tilde{F}} = \tilde{R}_1 \hat{\tilde{K}} \hat{\tilde{U}} + \tilde{R}_2 \hat{\tilde{U}} \quad (\text{IV.46})$$

ou

$$\tilde{K}^u \tilde{U} = \tilde{F} \quad (\text{IV.47})$$

onde

$$\tilde{K}^u = \tilde{R}_1 \hat{K} + \tilde{R}_2 \quad (\text{IV.48})$$

e

$$\tilde{F} = \tilde{R}_d^T \tilde{M} \tilde{P} \quad (\text{IV.49})$$

A matriz  $\tilde{K}^u$  definida pela equação (IV.48) é a matriz de rigidez do sistema obtida com o Método dos Elementos de Contorno, via Método da Colocação. Utilizando esta matriz de rigidez, obtêm-se soluções de deslocamentos muito boas, comparáveis às soluções do MEC, conforme mostrado nas aplicações numéricas da seção (IV.4).

Entretanto a matriz de rigidez simetrizada na forma da seção (II.5):

$$\tilde{K}^s = \frac{1}{2} (\tilde{K}^u + \tilde{K}^{u,T}) \quad (\text{IV.50})$$

não apresenta um bom comportamento, e resultados bastante distorcidos são obtidos em algumas aplicações. Este comportamento evidencia um mau condicionamento com relação à simetria da matriz  $\tilde{K}^u$  devido à introdução das condições de canto, mesmo na forma descrita por GEORGIU [9].

### IV.3 MÉTODO DE GALERKIN

No Método de Galerkin são utilizadas as funções de interpolação como funções de ponderação na equação (IV.12), para a obtenção do sistema de equações. Uma das grandes vantagens da utilização deste método é a facilidade com que as forças de superfície descontínuas em um nó são consideradas.

Para o elemento linear são definidas a seguir as funções de ponderação apropriadas para a utilização do método. Nos nós localizados em um contorno suave, e sendo a força de superfície contínua, a função de ponderação a ser utilizada é mostrada na figura (IV.5).

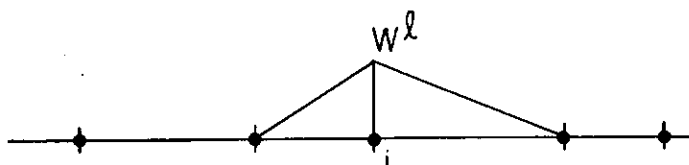


Fig. IV.5 - Força de superfície contínua em nó sobre um contorno suave

Se a força de superfície neste nó é descontínua, a função de ponderação deve ser dividida em duas componentes, como mostrado na figura (IV.6).



Fig. IV.6 - Força de superfície descontínua em nó sobre contorno suave

Da mesma forma, em um nó de canto, são utilizadas duas componentes para a função de ponderação, figura (IV.7).

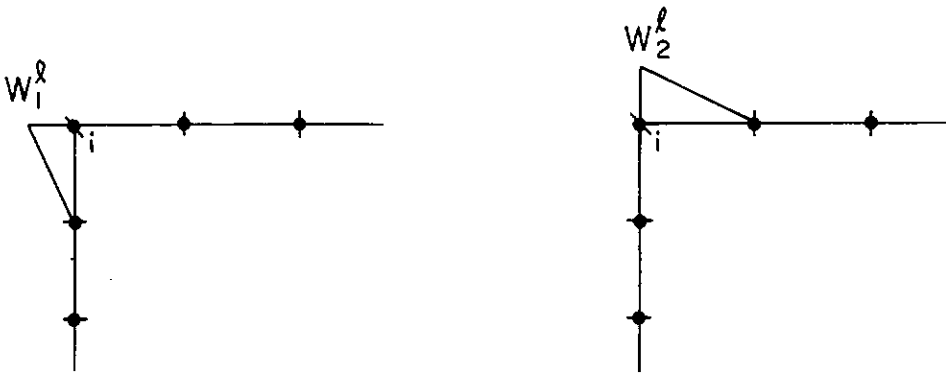


Fig. IV.7 - Força de superfície descontínua em nó de canto

Desta forma pode ser representada qualquer distribuição de forças de superfície no contorno. Observar que em todos os pontos em que divide-se a função de ponderação em duas componentes, é criado um conjunto adicional de equações ( e incógnitas ) para o nó correspondente, o que equivale à criação de um

não duplo. Só que, neste caso, as equações geradas não são iguais, pois correspondem a componentes diferentes da função de ponderação.

Para a implementação numérica utiliza-se o esquema seguinte.

Considera-se como função de ponderação a matriz  $\tilde{N}$  das funções de interpolação (IV.10) em cada elemento:

$$\tilde{W}^{\ell}(\xi) = \tilde{N}^{\ell}(\eta') = \begin{bmatrix} N^1(\eta') & 0 \\ 0 & N^1(\eta') \\ N^2(\eta') & 0 \\ 0 & N^2(\eta') \end{bmatrix} \quad (\text{IV.51})$$

Substituindo-a na equação (IV.12) obtêm-se:

$$\int_{\Gamma} \tilde{N}^{\ell}(\eta') \left\{ \tilde{C}(\eta') \tilde{N}^T(\eta') \right\} d\Gamma(\xi) \tilde{u}^{(\ell)} +$$

$$+ \sum_{t=1}^m \left\{ \int_{\Gamma} \tilde{N}^{\ell}(\eta') \left[ \int_{-1}^1 \frac{L_t}{2} \tilde{p}^*(\xi, x) \tilde{N}^T(\eta) d\eta \right] d\Gamma(\xi) \right\} \tilde{u}^{(t)} =$$

$$\sum_{t=1}^m \left\{ \int_{\Gamma} \tilde{N}^{\ell}(\eta') \left[ \int_{-1}^1 \frac{L_t}{2} \tilde{u}^*(\xi, x) \tilde{N}^T(\eta) d\eta \right] d\Gamma(\xi) \right\} \tilde{p}^{(t)}, \quad (\text{IV.52})$$

$\ell=1, \dots, m$

A expressão (IV.52) fornece quatro equações, as duas primeiras correspondentes ao nó inicial e as duas últimas ao nó final do elemento.

Se a força de superfície em um nó é considerada contínua, estas equações devem ser somadas às equações correspondentes obtidas com a integração no elemento adjacente (ver figura (IV.5)). Desta forma, efetuando-se a integração ao longo de todos os elementos de contorno ( $\ell=1, \dots, m$ ) e utilizando-se de uma montagem adequada, obtém-se um sistema de equações lineares na forma:

$$\tilde{H} \tilde{U} = \tilde{G} \tilde{P} \quad (\text{IV.53})$$

onde a matriz  $\tilde{H}$  corresponde à soma das integrais indicadas à esquerda na expressão (IV.52).

Os elementos das matrizes  $\tilde{H}$  e  $\tilde{G}$  são calculadas na forma descrita a seguir.

Inicialmente a expressão (IV.52) é colocada na forma:

$$\tilde{C}' \tilde{u}^{(\ell)} + \sum_{t=1}^m \hat{h}_{\ell t} \tilde{u}^{(t)} = \sum_{t=1}^m g_{\ell t} \tilde{p}^{(t)}, \quad \ell=1, \dots, m \quad (\text{IV.54})$$

onde as submatrizes  $\tilde{C}'$ ,  $\hat{h}_{\ell t}$  e  $g_{\ell t}$  são de dimensões (4x4).

Para obter a submatriz  $\tilde{C}'$ , é considerado contorno suave no domínio de integração (elemento linear). Substituindo en-

tão a matriz  $\tilde{C}$  dada por:

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.55})$$

e as funções de interpolação dadas pelas equações (IV.3) e (IV.4), obtêm-se:

$$\tilde{C}' = \frac{L_\ell}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.56})$$

Observar que a submatriz  $\tilde{C}'$  contribui para as submatrizes (2x2) da diagonal de  $\tilde{H}$  e também para as submatrizes vizinhas à diagonal. A contribuição para a diagonal será substituída pelo deslocamento de corpo rígido, na forma descrita na seção (IV.2).

Para o cálculo de  $\hat{h}_{\ell t}$  e  $g_{\ell t}$ , com a integral no mesmo elemento ( $\ell=t$ ), é utilizada a integração analítica, que fornece:

$$\hat{h}_{\ell t} = \frac{(1-2\nu) L_\ell}{8\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.57})$$

$$g_{ij}^{kn} = C2 \left\{ C1 \frac{L_\ell^2}{\ell} \left[ 2 \delta_{kn} + 5 - 4 \ln(L_\ell) \right] \delta_{ij} + 4 \ell_i \ell_j \right\} \quad (\text{IV.58})$$

$$(i, j, k, n = 1, 2)$$

onde os índices  $i$  e  $j$  indicam a posição do coeficiente na submatriz  $k$  de ordem 2, correspondente ao nó  $n$  do elemento. As constantes são dadas por:

$$C1 = 3 - 4\nu$$

$$C2 = 1 / \left[ 128\pi(1-\nu)G \right] \quad (\text{IV.59})$$

$$\ell_i = {}^2x_i - {}^1x_i \quad (\text{projeção de } L_\ell \text{ na direção do eixo } x_i)$$

Para o cálculo em elementos diferentes ( $\ell \neq t$ ), utiliza-se a integração analítica com relação à coordenada  $\eta$ , e a integração numérica com relação à coordenada do ponto  $\xi$ . A integração analítica é necessária para avaliar as singularidades quando os elementos são adjacentes.

Para facilitar a integração analítica, é efetuada uma rotação do sistema de eixos coordenados  $(X_1, X_2)$  para o sistema  $(\theta, \gamma)$ , de forma a obter o eixo  $\theta$  paralelo ao elemento de contorno analisado, como indicado na figura (IV.8).

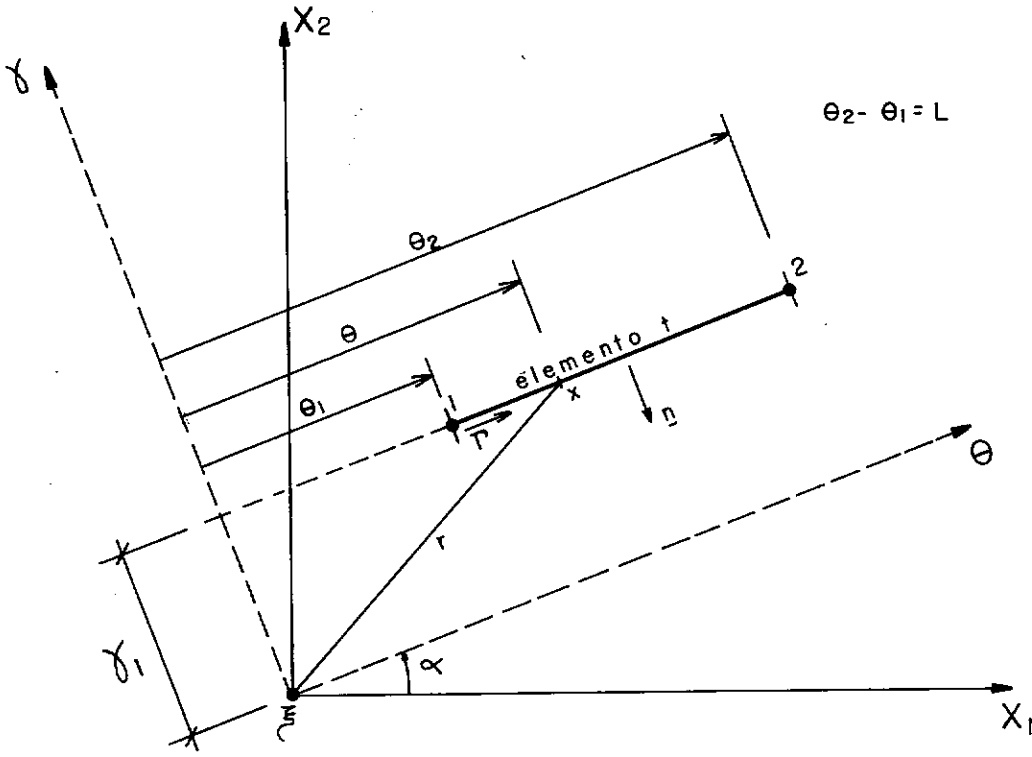


Fig. IV.8 - Rotação de Eixos

Com relação ao novo sistema de eixos coordenados, as funções de interpolação são escritas na forma:

$$N_1 = \frac{\theta_2 - \theta}{L} \quad , \quad N_2 = \frac{\theta - \theta_1}{L} \quad (\text{IV.60})$$

As submatrizes  $\hat{h}_{\ell t}$ , utilizando a coordenada  $\Gamma$ , podem ser escritas na forma:

$$\hat{h}_{\ell t} = \int_{\Gamma_\ell} \left[ N_1 \quad \underline{I} \quad N_2 \quad \underline{I} \right]^T \int_{\Gamma_t} \underline{p}^* \left[ N_1 \quad \underline{I} \quad N_2 \quad \underline{I} \right] d\Gamma(x) d\Gamma(\xi) \quad (\text{IV.61})$$

sendo as integrais internas, com relação às coordenadas do ponto  $x$ , dadas por:

$$\int_{\Gamma_t} p^* \left[ N1 \tilde{I} \quad N2 \tilde{I} \right] d\Gamma(x) = \left[ \tilde{h}^1 \quad \tilde{h}^2 \right] \quad (IV.62)$$

onde

$$h_{ij}^1 = \frac{1}{L_t} (\theta_2 I1_{ij} - I2_{ij}) \quad (IV.63)$$

$$h_{ij}^2 = \frac{1}{L_t} (I2_{ij} - \theta_1 I1_{ij})$$

e

$$I1_{ij} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} p_{ij}^*(\xi, x) d\theta \quad (IV.64)$$

$$I2_{ij} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} p_{ij}^*(\xi, x) \cdot \theta d\theta$$

Utilizando a solução fundamental de Kelvin, equações (II.37) e (II.38), as integrais (IV.64) são calculadas analiticamente, fornecendo as seguintes expressões para  $h_{ij}^1$  e  $h_{ij}^2$ :

$$\begin{aligned}
 h_{ij}^1 = & \frac{1}{2L_t} \left\{ \left[ -\theta_2 (2C_3+C_4) \delta_{ij} + C_4 \gamma_1 V_{1ij} - 2 C_3 \gamma_1 V_{3ij} \right] \times \left[ \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\theta_2}{\gamma_1} \right) - \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\theta_1}{\gamma_1} \right) \right] \right. \\
 & + \left[ -C_3 \theta_2 V_{3ij} + C_3 \gamma_1 \delta_{ij} + C_4 \gamma_1 V_{4ij} \right] \times \left[ \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \right] \\
 & - \left[ C_4 \theta_2 \gamma_1 V_{2ij} + C_4 \gamma_1^2 V_{1ij} \right] \times \left[ \frac{\theta_2}{r_2} - \frac{\theta_1}{r_1} \right] \\
 & \left. + \left[ -C_4 \theta_2 \gamma_1^2 V_{1ij} + C_4 \gamma_1^3 V_{2ij} \right] \times \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] + 2 C_3 L_t V_3 \right\}
 \end{aligned}$$

(IV.65)

$$\begin{aligned}
 h_{ij}^2 = & \frac{1}{2L_t} \left\{ \left[ -C_4 \gamma_1 V_{1ij} + 2 C_3 \gamma_1 V_{3ij} + \theta_1 (2 C_3+C_4) \delta_{ij} \right] \times \right. \\
 & \left. \times \left[ \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\theta_2}{\gamma_1} \right) - \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\theta_1}{\gamma_1} \right) \right] \right. \\
 & + \left[ -C_3 \gamma_1 \delta_{ij} - C_4 \gamma_1 V_{4ij} + C_3 \theta_1 V_{3ij} \right] \times \left[ \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \right] \\
 & + \left[ C_4 \gamma_1^2 V_{1ij} + C_4 \theta_1 \gamma_1 V_{2ij} \right] \times \left[ \frac{\theta_2}{r_2} - \frac{\theta_1}{r_1} \right] \\
 & \left. + \left[ -C_4 \gamma_1^3 V_{2ij} + C_4 \theta_1 \gamma_1^2 V_{1ij} \right] \times \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] - 2 C_3 L_t V_3 \right\}
 \end{aligned}$$

sendo os parâmetros indicados na figura (IV.8) e:

$$C3 = - (1-2\nu) / [4\pi(1-\nu)]$$

$$C4 = - 2 / [4\pi(1-\nu)]$$

$$r_1 = \theta_1^2 + \gamma_1^2$$

$$r_2 = \theta_2^2 + \gamma_1^2$$

$$\beta_i = \begin{cases} \cos \alpha & \text{se } i=1 \\ \sin \alpha & \text{se } i=2 \end{cases}$$

(IV.66)

$$n_i = \begin{cases} \sin \alpha & \text{se } i=1 \\ -\cos \alpha & \text{se } i=2 \end{cases}$$

$$V1_{ij} = - (n_i \beta_j + n_j \beta_i)$$

$$V2_{ij} = n_i n_j - \beta_i \beta_j$$

$$V3_{ij} = n_j \beta_i - n_i \beta_j$$

$$V4_{ij} = \beta_i \beta_j$$

Se o ponto  $\xi$  e o elemento  $t$  estiverem no mesmo alinhamento ( $\gamma_1=0$ ), as expressões a serem utilizadas são as seguintes:

$$h_{ij}^1 = \frac{-C3 V3_{ij}}{L_t} \left[ \theta_2 \ln \left| \frac{\theta_2}{\theta_1} \right| - L_t \right] \quad (IV.67)$$

$$h_{ij}^2 = \frac{-C3 V3_{ij}}{L_t} \left[ L_t - \theta_1 \ln \left| \frac{\theta_2}{\theta_1} \right| \right]$$

A submatriz  $\hat{h}_{\ell t}$  é então obtida utilizando a integração numérica, com pontos de integração de Gauss (apêndice 1), para avaliar a integral com relação à coordenada do ponto  $\xi$ :

$$\hat{h}_{\ell t} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_\ell} N_1 \tilde{h}^1 d\Gamma(\xi) & \int_{\Gamma_\ell} N_1 \tilde{h}^2 d\Gamma(\xi) \\ \int_{\Gamma_\ell} N_2 \tilde{h}^1 d\Gamma(\xi) & \int_{\Gamma_\ell} N_2 \tilde{h}^2 d\Gamma(\xi) \end{bmatrix} \quad (IV.68)$$

Um procedimento análogo é utilizado para obtenção de  $g_{\ell t}$ . A integração analítica fornece:

$$g_{ij}^1 = \frac{C5}{4L_t} \left\{ \left[ 4 \theta_2 \gamma_1 (C6 \delta_{ij} - V2_{ij}) - 4 \gamma_1^2 V1_{ij} \right] \times \left[ \text{tg}^{-1} \left( \frac{\theta_2}{\gamma_1} \right) - \text{tg}^{-1} \left( \frac{\theta_1}{\gamma_1} \right) \right] \right. \\ + \left[ (\theta_2^2 - \gamma_1^2) \ln(r_2) + (\gamma_1^2 + \theta_1^2 - 2 \theta_1 \theta_2) \ln(r_1) \right] C6 \times \delta_{ij} \\ + \left[ -2 \theta_2 \gamma_1 V1_{ij} + 2 \gamma_1^2 V2_{ij} \right] \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) + \left[ -\theta_2 (C6 \delta_{ij} + V4_{ij}) + \gamma_1 V1_{ij} \right] \times 4 L_t \\ \left. - \left[ C6 \delta_{ij} + 2 V4_{ij} \right] \left[ \theta_1^2 - \theta_2^2 \right] \right\} \quad (IV.69)$$

$$\begin{aligned}
 g_{ij}^2 = & \frac{C5}{4L_t} \left\{ \left[ 4 \gamma_1^2 V1_{ij} - 4 \theta_1 \gamma_1 (C6 \delta_{ij} - V2_{ij}) \right] \times \left[ \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\theta_2}{\gamma_1} \right) - \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\theta_1}{\gamma_1} \right) \right] \right. \\
 & + \left[ (\gamma_1^2 + \theta_2^2 - 2\theta_1\theta_2) \ln(r_2) + (\theta_1^2 - \gamma_1^2) \ln(r_1) \right] C6 \times \delta_{ij} \\
 & + \left[ -2 \gamma_1^2 V2_{ij} + 2\theta_1 \gamma_1 V1_{ij} \right] \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) + \left[ -\gamma_1 V1_{ij} + \theta_1 (C6 \delta_{ij} + V4_{ij}) \right] \times 4L_t \\
 & \left. + \left[ C6 \delta_{ij} + 2 V4_{ij} \right] \left[ \theta_1^2 - \theta_2^2 \right] \right\}
 \end{aligned}$$

sendo

$$C5 = - 1 / [ 8\pi (1-\nu) G ]$$

(IV.70)

$$C6 = 3 - 4\nu$$

e os demais valores definidos nas expressões (IV.66).

Se o ponto  $\xi$  e o elemento  $t$  estiverem no mesmo alinhamento ( $\gamma_1=0$ ), as expressões a serem utilizadas são as seguintes:

$$g_{ij}^1 = \frac{C5}{4L_t} \left\{ C6 \left[ 2 \theta_2^2 \ln|\theta_2| + (2 \theta_1^2 - 4 \theta_1 \theta_2) \ln|\theta_1| - 4 \theta_2 L_t + \theta_2^2 - \theta_1^2 \right] \delta_{ij} \right. \\ \left. - 2 V_{ij}^4 (2 \theta_2 L_t - \theta_2^2 + \theta_1^2) \right\}$$

(IV.71)

$$g_{ij}^2 = \frac{C5}{4L_t} \left\{ C6 \left[ (2 \theta_2^2 - 4 \theta_1 \theta_2) \ln|\theta_2| + 2 \theta_1^2 \ln|\theta_1| + 4 \theta_1 L_t - \theta_2^2 + \theta_1^2 \right] \delta_{ij} \right. \\ \left. - 2 V_{ij}^4 (-2 \theta_1 L_t + \theta_2^2 - \theta_1^2) \right\}$$

A matriz  $\underline{g}_{\ell t}$  é então obtida, utilizando integração numérica para a coordenada do ponto  $\xi$ , na forma:

$$\underline{g}_{\ell t} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_\ell} N_1 \underline{g}^1 d\Gamma(\xi) & \int_{\Gamma_\ell} N_1 \underline{g}^2 d\Gamma(\xi) \\ \int_{\Gamma_\ell} N_2 \underline{g}^1 d\Gamma(\xi) & \int_{\Gamma_\ell} N_2 \underline{g}^2 d\Gamma(\xi) \end{bmatrix} \quad (IV.72)$$

Quando os elementos são adjacentes, as expressões (IV.65) e (IV.69) apresentam singularidades quando o ponto  $\xi$  coincide com o nó extremo do elemento, tornando-se necessária a adoção de uma técnica de integração numérica capaz de avaliar corretamente as integrais singulares.

Com esta finalidade é efetuada uma mudança das variáveis adimensionais para uma nova variável adimensional através de uma relação quadrática, com os mesmos limites de integração, e impondo a condição do Jacobiano se anular no ponto da singularidade. Esta mudança de variáveis é indicada no apêndice 2.

#### IV.3.1 - OBTENÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ

Como descrito anteriormente para o Método da Colocação, seção (IV.2.1), a matriz de rigidez deve conter apenas duas equações correspondentes a cada ponto nodal, e o vetor de cargas nodais deve considerar as forças de superfície descontínuas.

Partindo da equação (IV.53), e sendo que a matriz  $\tilde{G}$  não apresenta singularidade, pode-se escrever a expressão:

$$\tilde{G}^{-1} \tilde{H} \tilde{U} = \tilde{P} \quad (\text{IV.73})$$

Pré-multiplicando pela matriz  $\tilde{M}$ , equação (IV.40), obtém-se:

$$\tilde{M} \tilde{G}^{-1} \tilde{H} \tilde{U} = \tilde{M} \tilde{P} = \tilde{F} \quad (\text{IV.74})$$

Substituindo então o valor de  $\tilde{U}$  pela equação (IV.33), e pré-multiplicando pela matriz  $\tilde{R}_d^T$ , a seguinte expressão é encontrada:

$$(\tilde{R}_d^T \tilde{M} \tilde{G}^{-1} \tilde{H} \tilde{R}_d) \hat{\tilde{U}} = \tilde{R}_d^T \tilde{F} \quad (\text{IV.75})$$

ou

$$\underset{\sim}{K}^u \underset{\sim}{\hat{U}} = \underset{\sim}{\hat{F}} \quad (\text{IV.76})$$

onde

$$\underset{\sim}{K}^u = \underset{\sim}{R}_d^T \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{G}^{-1} \underset{\sim}{H} \underset{\sim}{R}_d \quad (\text{IV.77})$$

e

$$\underset{\sim}{\hat{F}} = \underset{\sim}{R}_d^T \underset{\sim}{F} \quad (\text{IV.78})$$

A matriz de rigidez obtida com a expressão (IV.77) apresenta um grau de simetria bem superior ao obtido com a matriz do Método da Colocação, equação (IV.48), mas a simetria da matriz não é assegurada como citado no trabalho do GEORGIOU [9]. Entretanto os resultados obtidos com a matriz simetrizada na forma da equação (IV.50) são pouco afetados com esta forma de simetrização.

#### IV.4 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

São estudadas várias estruturas no regime da elasticidade bi-dimensional, considerando Estado Plano de Tensões (EPT) ou Estado Plano de Deformações (EPD). Em todos os problemas são analisados com maiores detalhes os resultados para deslocamentos, os quais são obtidos diretamente utilizando as matrizes de rigidez sem simetria  $\underset{\sim}{K}^u$  ou simétrica  $\underset{\sim}{K}^s$ . Uma vez determinados todos

os deslocamentos nodais, as forças de superfície nestes nós são obtidas com a relação:

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{G}^{-1} & \tilde{H} \end{bmatrix} \tilde{U} \quad (\text{IV.79})$$

Como mencionado anteriormente na seção (IV.2), a matriz de rigidez obtida com o Método da Colocação na forma descrita neste trabalho apresenta um mau condicionamento com relação à simetria, e portanto são comparadas apenas os resultados obtidos com a matriz de rigidez  $\tilde{K}^u$ .

Em todos os exemplos não foram indicadas as unidades tendo em vista a finalidade apenas comparativa dos métodos utilizados, não havendo portanto uma maior preocupação na obtenção de resultados práticos.

#### IV.4.1 - CHAPA RETANGULAR TRACIONADA

Para o problema mostrado na figura (IV.9) considera-se Estado Plano de Deformações, com  $G=1,0$  e  $\nu=0,2$ , cuja solução exata é um campo de deslocamentos com variação linear nas duas dimensões.

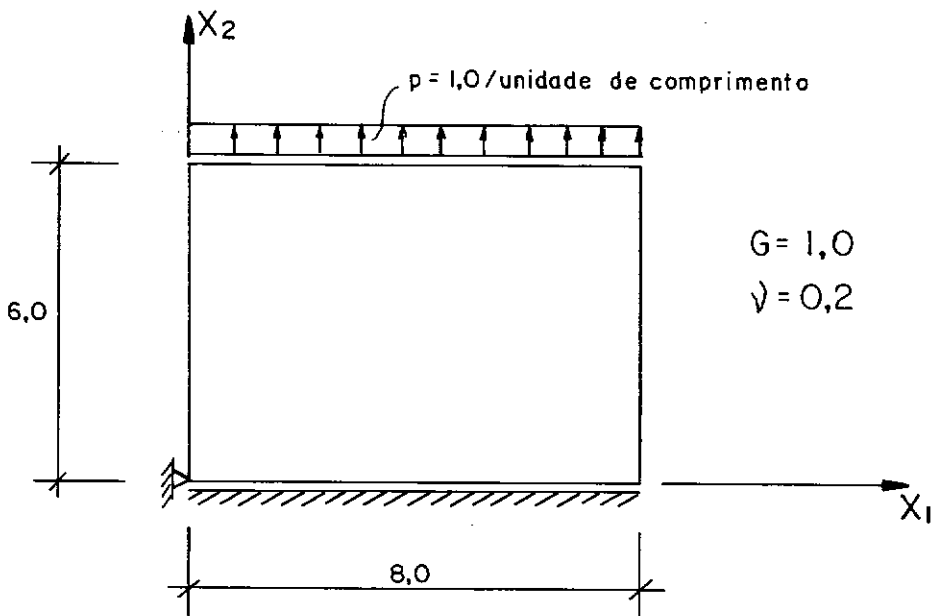
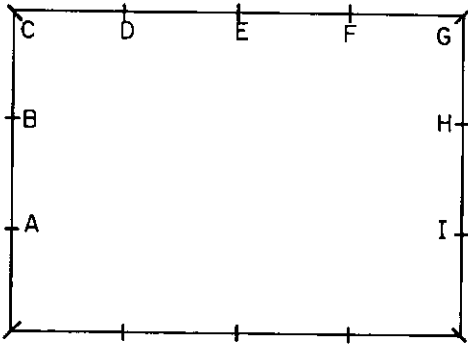


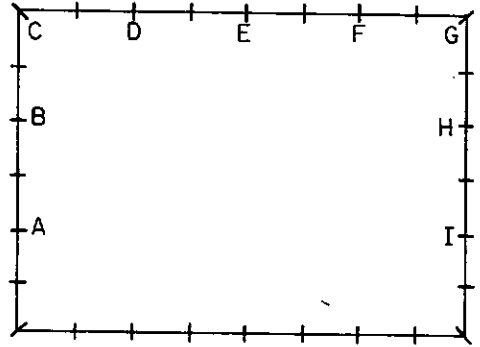
Fig. IV.9 - Definição da Chapa Retangular

Como estamos utilizando elementos lineares, as soluções obtidas com as matrizes  $\tilde{K}^u$  das duas formulações (Método da Colocação e Método de Galerkin) também são exatas.

Com a finalidade de analisar o efeito da simetrização da matriz de rigidez obtida com o Método de Galerkin, o contorno da chapa é discretizado em 14 e 28 elementos de mesmo comprimento, figura (IV.10), e os deslocamentos obtidos nos pontos A-I na direção do eixo  $X_2$  estão apresentados na tabela (IV.1). Observa-se um excelente comportamento da matriz de rigidez simetrizada, fornecendo praticamente a solução exata quando é utilizada a discretização mais refinada.



(a) 14 elementos



(b) 28 elementos

Fig. IV.10 - Discretizações do contorno da chapa retangular

PONTO	SOLUÇÃO EXATA	MATRIZ $\tilde{K}^S$ - GALERKIN	
		DISCRETIZAÇÃO (a)	DISCRETIZAÇÃO (b)
A	0,8	0,795	0,802
B	1,6	1,605	1,599
C	2,4	2,398	2,399
D	2,4	2,402	2,400
E	2,4	2,399	2,400
F	2,4	2,402	2,400
G	2,4	2,399	2,400
H	1,6	1,603	1,600
I	0,8	0,796	0,801

Tabela IV.1 - Deslocamentos na direção do eixo  $X_2$

IV.4.2 - VIGA EM BALANÇO COM CARGA NA EXTREMIDADE

Para considerar a carga na extremidade da viga em balanço, é aplicada uma distribuição de forças de cisalhamento no extremo, com variação parabólica, e com resultante total igual a 1 (figura (IV.11)).

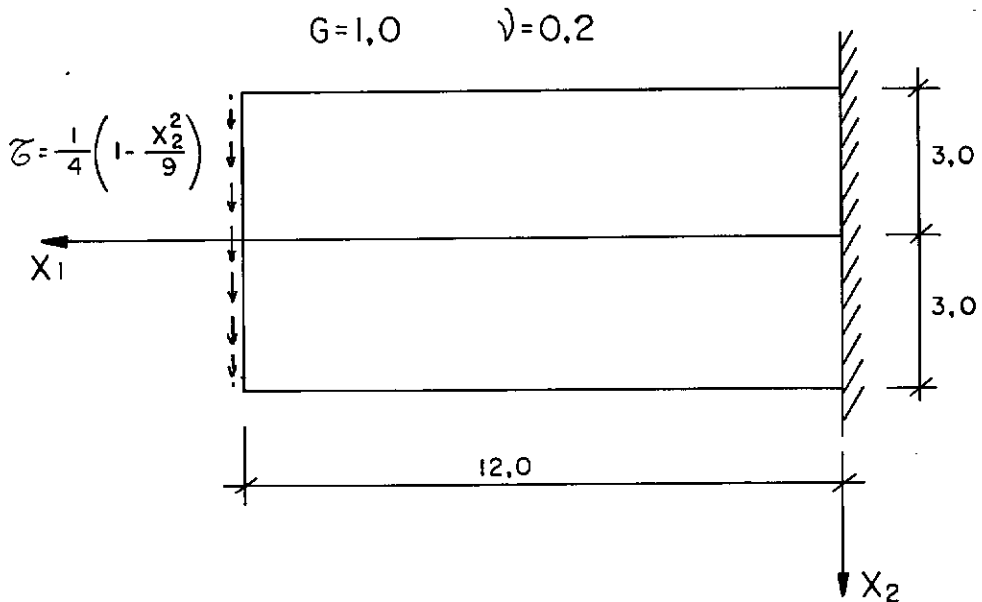
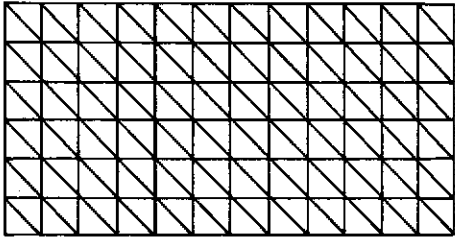
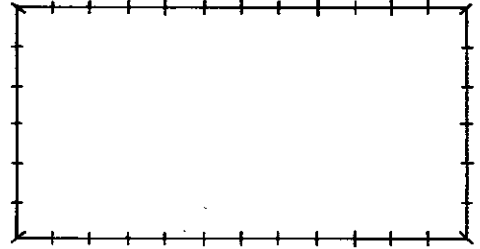


Fig. IV.11 - Definição da viga em balanço com carga na extremidade

É feita apenas uma discretização para o contorno, utilizando 36 elementos de mesmo comprimento, figura (IV.11a), e os resultados obtidos são comparados com a solução utilizando o MEF, com 144 elementos triangulares de deformação linear, cujos resultados estão apresentados no trabalho de GEORGIOU [9].



(a)



(b)

(a) elementos finitos

(b) elementos de contorno

Fig. IV.11a - Discretizações do contorno da viga em balanço com carga na extremidade

Os resultados de deslocamentos na direção do eixo  $X_2$  dos pontos ao longo do eixo  $X_1$  estão apresentados na tabela (IV.2). Nos resultados obtidos com a discretização em elementos de contorno, considerou-se os deslocamentos nos pontos sobre o eixo  $X_1$  iguais à média dos deslocamentos dos pontos correspondentes na face superior e inferior da viga.

A formulação utilizando o Método de Galerkin apresenta solução bem mais próxima da solução do MEF (que utiliza funções de interpolação quadráticas para os deslocamentos), principalmente nos pontos de maiores deslocamentos, e a matriz simetrizada praticamente não afeta os resultados.

COORD. $X_1$	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	MÉTODO DA COLOCAÇÃO $\tilde{K}^u$	MÉTODO DE GALERKIN	
			$\tilde{K}^u$	$\tilde{K}^s$
1,0	0,252	0,470	0,418	0,416
2,0	0,813	0,846	0,996	1,003
3,0	1,594	1,584	1,776	1,776
4,0	2,579	2,475	2,759	2,762
5,0	3,755	3,547	3,921	3,923
6,0	5,076	4,766	5,240	5,242
7,0	6,503	6,115	6,695	6,697
8,0	8,104	7,571	8,262	8,263
9,0	9,742	9,120	9,920	9,922
10,0	11,901	10,704	11,644	11,645
11,0	13,734	12,463	13,417	13,421
12,0	15,110	14,148	15,199	15,194

Tabela IV.2 - Deslocamentos na direção do eixo  $X_2$  de pontos sobre o eixo  $X_1$

#### IV.4.3 - VIGA EM BALANÇO COM CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

Considera-se neste exemplo a viga em balanço com uma carga uniformemente distribuída, figura (IV.12). Também neste caso, para efeito de comparações, são utilizados os resultados obtidos por GEORGIU [9], utilizando o MEF e uma malha de 54 elementos triangulares de deformação linear.

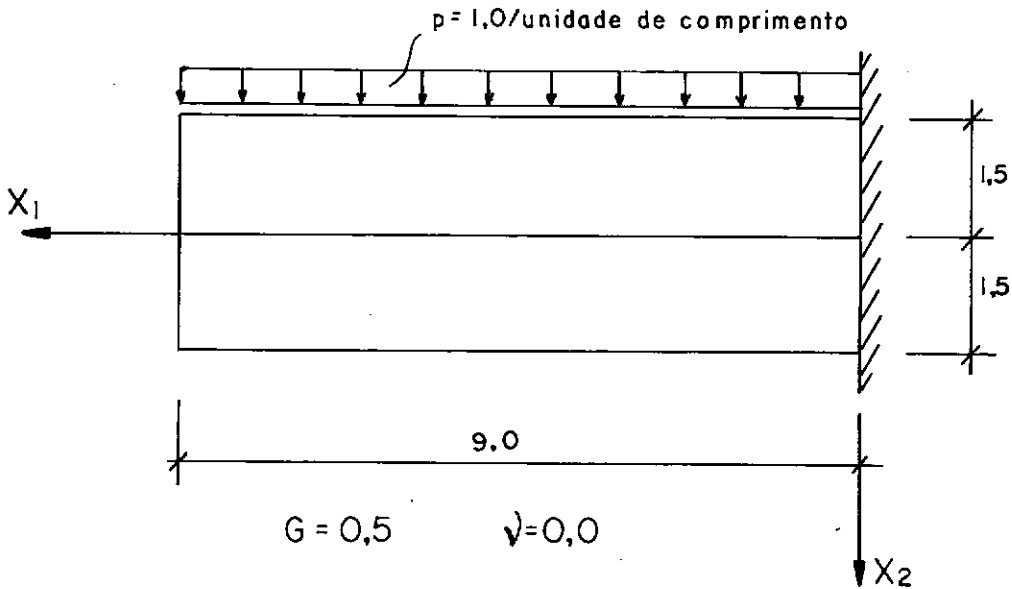
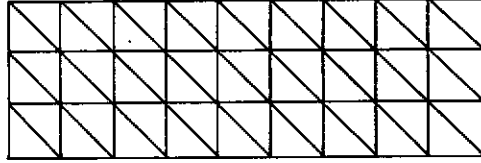
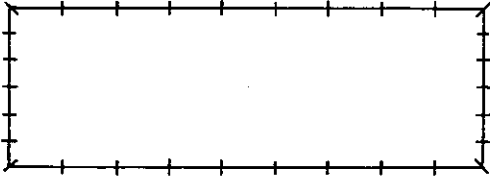


Fig. IV.12 - Definição da viga em balanço com carga uniformemente distribuída

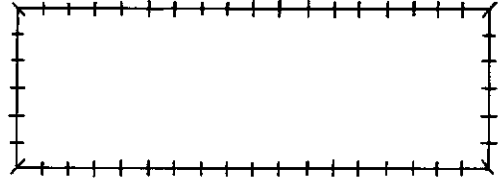
São utilizadas duas discretizações do contorno para analisar os resultados, a primeira com 30 elementos, e a segunda com 48 elementos de mesmo comprimento, conforme mostrado na figura (IV.13), onde também é indicada a malha de elementos finitos.



(a) malha de elementos finitos



(b) 30 elementos



(c) 48 elementos

Fig. IV.13 - Discretizações do contorno da viga em balanço com carga uniformemente distribuída

Nas tabelas (IV.3) e (IV.4) estão indicados os deslocamentos na direção do eixo  $X_2$  dos pontos sobre o eixo  $X_1$ . Os deslocamentos, utilizando o Método dos Elementos de Contorno, são obtidos da mesma forma do exemplo anterior, e observa-se novamente os bons resultados encontrados com a matriz simetrizada do Método de Galerkin.

COORD. X <sub>1</sub>	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	MÉTODO DA COLOCAÇÃO K <sup>u</sup> ~	MÉTODO DE GALERKIN	
			K <sup>u</sup> ~	K <sup>s</sup> ~
1,0	14,61	12,83	12,98	12,92
2,0	42,94	39,17	42,57	42,84
3,0	81,50	73,13	81,56	81,59
4,0	127,30	113,37	127,76	127,87
5,0	177,80	157,49	178,81	178,85
6,0	231,20	203,88	232,60	232,64
7,0	285,80	251,21	287,62	287,60
8,0	340,60	298,56	342,70	342,59
9,0	394,80	345,46	397,31	397,32

Tabela IV.3 - Deslocamentos na direção do eixo X<sub>2</sub> de pontos sobre o eixo X<sub>1</sub> (30 elementos)

COORD. X <sub>1</sub>	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	MÉTODO DA COLOCAÇÃO K <sup>u</sup> ~	MÉTODO DE GALERKIN	
			K <sup>u</sup> ~	K <sup>s</sup> ~
1,0	14,61	12,33	14,77	14,95
2,0	42,94	38,38	43,52	43,59
3,0	81,50	73,32	82,37	82,41
4,0	127,30	114,82	128,44	128,48
5,0	177,80	160,64	179,31	179,34
6,0	231,20	208,93	232,96	232,98
7,0	285,80	258,31	287,85	287,85
8,0	340,60	308,08	342,85	342,86
9,0	394,80	354,43	397,38	397,36

Tabela IV.4 - Deslocamentos na direção do eixo X<sub>2</sub> de pontos sobre o eixo X<sub>1</sub> (48 elementos)

IV.4.4 - TUBO CILÍNDRICO DE PAREDE ESPESSA COM PRESSÃO INTERNA

Utilizando a dupla simetria, pode-se discretizar apenas um quarto do domínio, impondo-se as condições de contorno apropriadas, figura (IV.14). A solução exata é dada por TIMOSHENKO [10].

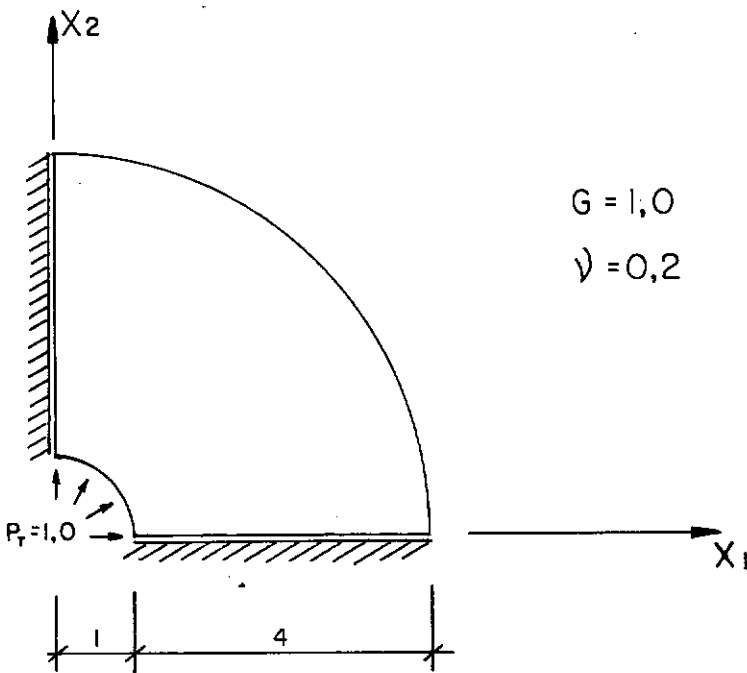


Fig. IV.14 - Definição do tubo cilíndrico de parede espessa com pressão interna

O contorno é discretizado em 32 elementos, sendo que próximo à face interna do tubo utiliza-se elementos de menor comprimento para representar de uma forma mais efetiva o campo de deslocamentos.

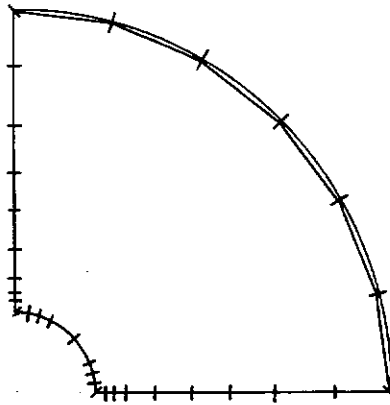


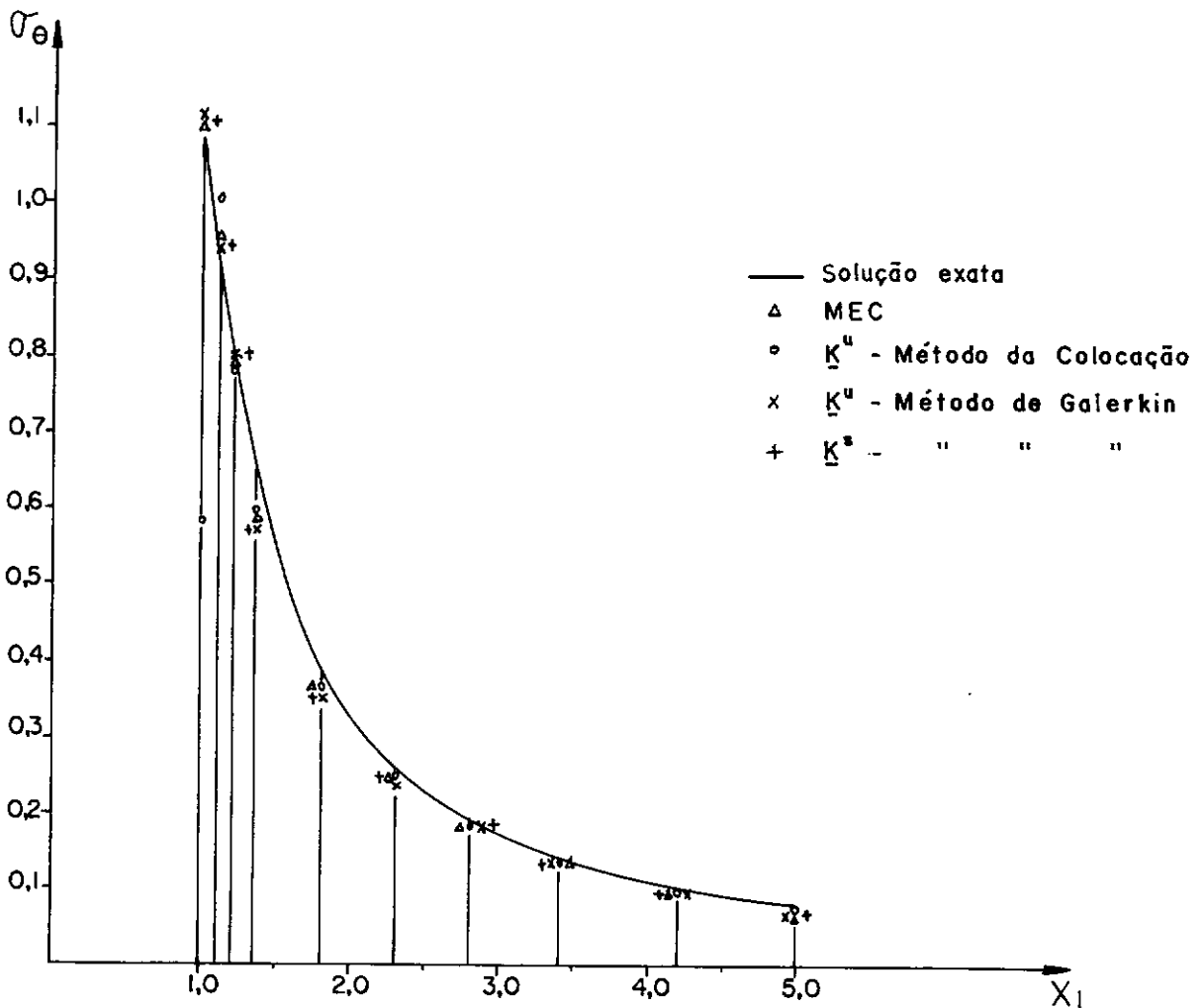
Fig. IV.15 - Discretização do contorno do tubo cilíndrico

Os deslocamentos radiais nos pontos ao longo do eixo  $X_1$  estão indicados na tabela (IV.5), onde observa-se um bom comportamento de todas as formulações. Entretanto, com a matriz de rigidez do Método da Colocação, ocorre grande perturbação nas tensões nos pontos próximos aos cantos, o que pode ser observado no gráfico (IV.1), onde está indicada a variação das tensões  $\sigma_\theta$ . Resolvendo o problema com o MEC sem gerar a matriz de rigidez (não introduzindo portanto as condições de canto), esta perturbação não ocorre.

TABELA IV.6 - DESLOCAMENTOS DOS PONTOS DO EIXO DA VIGA NA DIREÇÃO DO EIXO  $X_2$ 

COORD. $X_1$	SOLUÇÃO EXATA	MÉTODO DA COLOCAÇÃO		MÉTODO DE GALERKIN	
		MEC	$\tilde{K}^u$	$\tilde{K}^u$	$\tilde{K}^s$
1,00	0,5333	0,5289	0,5252	0,5280	0,5279
1,10	0,4872	0,4824	0,4826	0,4804	0,4809
1,20	0,4490	0,4443	0,4433	0,4441	0,4437
1,35	0,4027	0,3983	0,3977	0,3938	0,3938
1,80	0,3119	0,3083	0,3081	0,3048	0,3047
2,30	0,2552	0,2523	0,2523	0,2510	0,2510
2,80	0,2210	0,2186	0,2186	0,2178	0,2176
3,40	0,1957	0,1937	0,1938	0,1929	0,1931
4,20	0,1765	0,1750	0,1749	0,1740	0,1733
5,00	0,1667	0,1660	0,1665	0,1664	0,1662

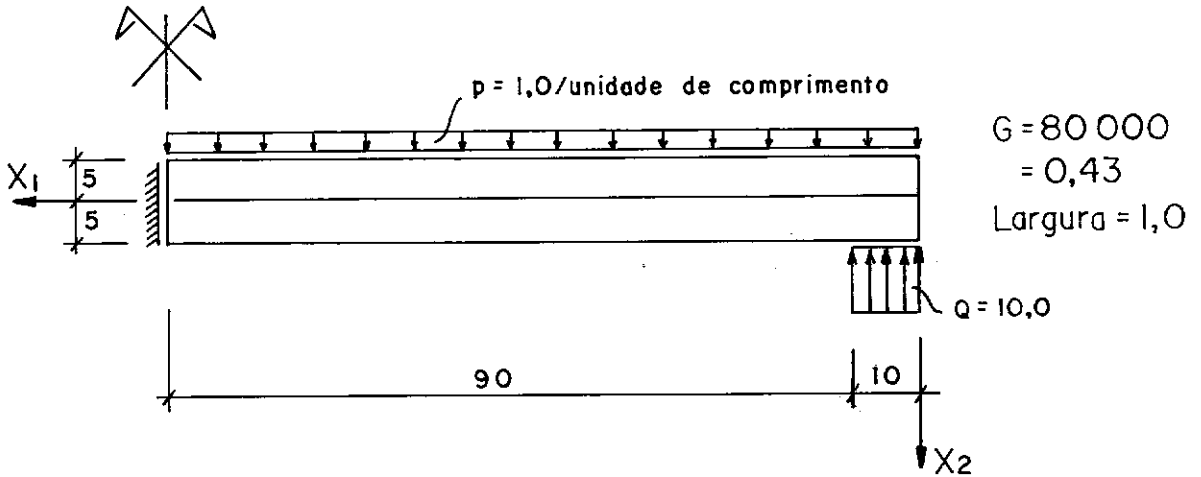
Tabela IV.5 - Deslocamentos radiais de pontos sobre o eixo  $X_1$

Gráfico IV.1 - Tensões  $\sigma_\theta$  nos pontos ao longo do eixo  $X_1$ IV.4.5 - VIGA LONGA COM CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

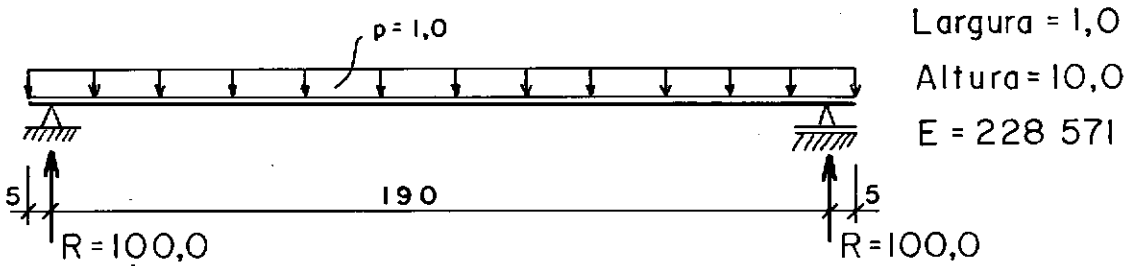
A viga longa é caracterizada por um vão livre bem superior à sua altura. Desta forma a teoria de vigas fornece bons resultados para deslocamentos ou tensões nas seções mais afastadas dos apoios.

Seja então a viga longa mostrada na figura (IV.16). Para resolver o problema é utilizada apenas a metade do domínio,

com as condições de contorno indicadas para considerar a simetria. A estrutura equivalente para a teoria de vigas, e para a qual são obtidos os valores comparativos, está indicada na figura (IV.16-b).



(a) parte simétrica para cálculo utilizando o MEC



(b) estrutura para cálculo utilizando a teoria de vigas

Fig. IV.16 - Definição da viga longa

O contorno é discretizado em 58 elementos, sendo que ao longo da altura da viga ( $X_1=0$  e  $X_1=100$ ) são utilizados elementos de menor comprimento, com a finalidade de analisar a variação da tensão nestas seções (figura (IV.17)).

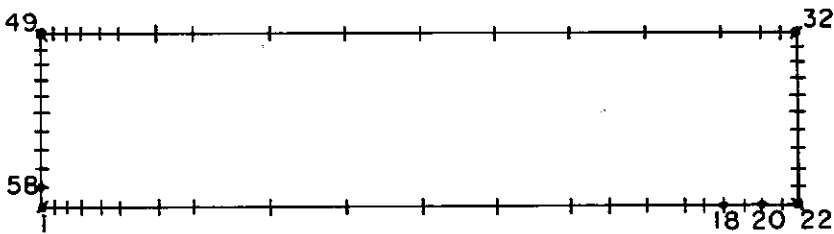


Fig. IV.17 - Discretização do contorno da viga longa

Para impedir o deslocamento de corpo rígido da estrutura mostrada na figura (IV.16 a), um deslocamento nulo é imposto no nó localizado no centro do apoio (nó 20, figura (IV.17)), na direção do eixo  $X_2$ .

Como as condições de canto utilizadas no Método da Colocação não se aplicam quando a descontinuidade de forças ocorre em um nó de um contorno reto (o ângulo entre os dois elementos adjacentes ao nó é igual a  $180^\circ$ ), utiliza-se uma distribuição de forças de superfície contínua na região do apoio. Considerando que a força total para garantir o equilíbrio da estrutura é igual a 100, a figura (IV.18) mostra a distribuição de forças de superfície adotada nos nós correspondentes ao apoio.

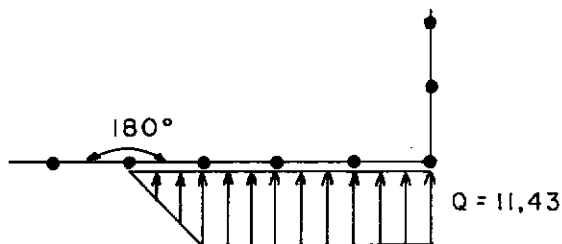


Fig. IV.18 - Distribuição de forças de superfície no apoio

Este problema não é muito adequado para a utilização do MEC com elementos lineares. Em primeiro lugar pelo contorno de uma forma muito alongada, o que leva a erros numéricos. Em segundo lugar pela variação do campo de deslocamentos (polinômios de quarta ordem), que não é bem representada pelo elemento linear.

Na tabela (IV.6) estão indicados os deslocamentos dos pontos sobre o eixo  $X_1$  na direção do eixo  $X_2$ . As soluções utilizando o Método da Colocação não apresentam bons resultados, comparados com a solução obtida com a teoria de viga. Entretanto a matriz de rigidez do Método de Galerkin, mesmo utilizando elementos lineares, fornece resultados muito bons, os quais praticamente não são afetados ao utilizar a matriz de rigidez simetrizada.

TABELA IV.6 - Deslocamentos dos pontos do eixo da viga na direção do eixo  $X_2$ 

COORD. $X_1$	TEORIA DE VIGA	MÉTODO DA COLOCAÇÃO		MÉTODO DE GALERKIN	
		MEC	$\tilde{K}^u$	$\tilde{K}^u$	$\tilde{K}^s$
10	0,0746	0,0507	0,0513	0,0765	0,0765
20	0,2215	0,1499	0,1514	0,2268	0,2271
30	0,3616	0,2445	0,2470	0,3702	0,3708
40	0,4910	0,3330	0,3365	0,5024	0,5034
50	0,6063	0,4140	0,4185	0,6199	0,6212
60	0,7045	0,4863	0,4919	0,7180	0,7215
70	0,7837	0,5484	0,5550	0,8003	0,8022
80	0,8410	0,5987	0,6063	0,8586	0,8605
85	0,8614	0,6183	0,6264	0,8784	0,8803
90	0,8761	0,6331	0,6416	0,8935	0,8954
95	0,8850	0,6424	0,6513	0,9021	0,9041
100	0,8879	0,6457	0,6557	0,9050	0,9070

Outro resultado em que se observa um comportamento bem melhor da solução utilizando a matriz de rigidez do Método de Galerkin é a variação das tensões normais na seção transversal média da viga. No gráfico (IV.2) estão indicados os valores obtidos com algumas formulações, sendo que a solução utilizando a matriz de rigidez do Método da Colocação, que utiliza as condições de canto, não está indicada pois apresenta resultados bastante distorcidos.

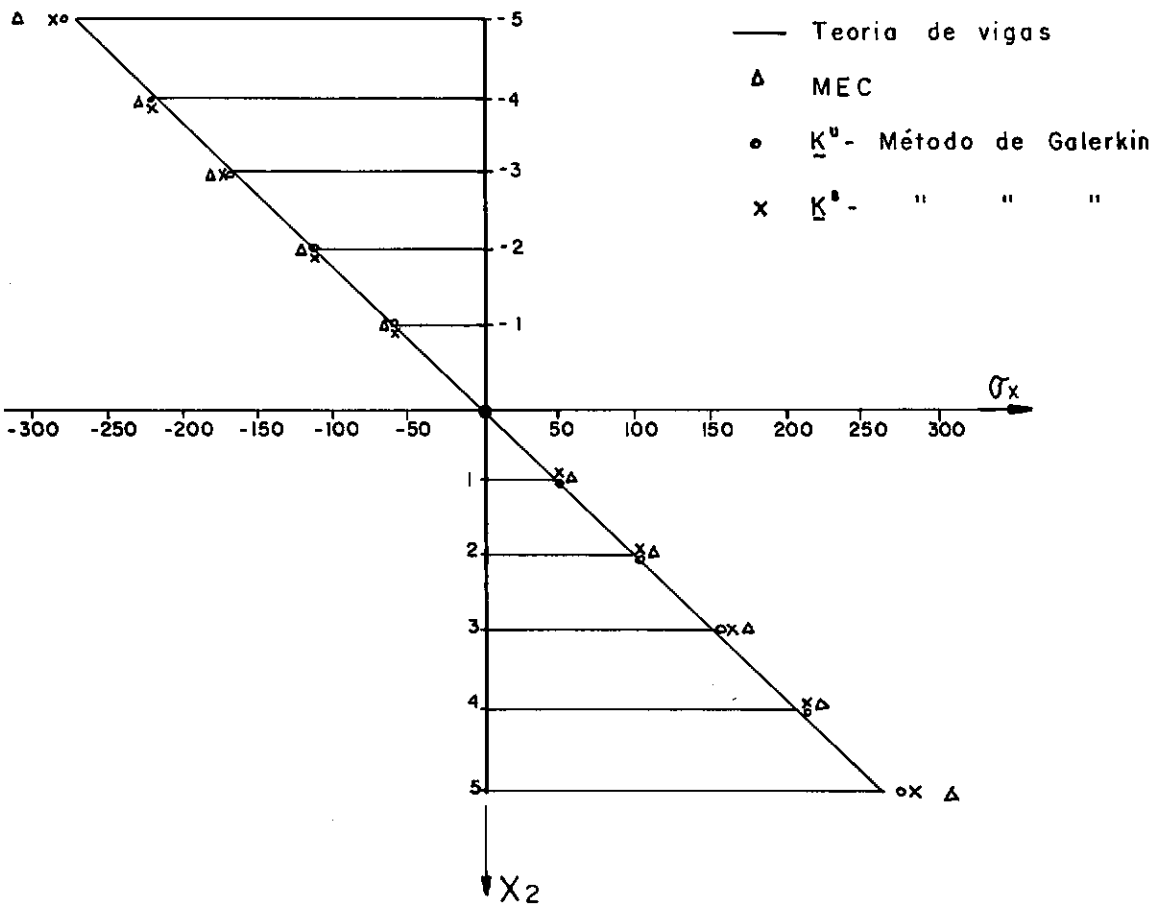


Gráfico IV.2 - Distribuição de tensões normais na seção média

## CAPÍTULO V

### CONCLUSÕES

#### V.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A finalidade básica deste trabalho foi a obtenção de uma matriz de rigidez, formulada com o Método dos Elementos de Contorno, numa forma apropriada para a combinação com o Método dos Elementos Finitos. Com esta intenção foi despendido um maior esforço na obtenção de uma matriz de rigidez simétrica, que é uma característica essencial do MEF, de forma a ser possível a introdução desta formulação em programas computacionais já desenvolvidos, considerando a região discretizada com elementos de contorno como um "super elemento finito".

Não houve uma maior preocupação em garantir o equilíbrio de forças do "super elemento finito", que é outra característica do MEF. O Método dos Elementos de Contorno não garante esta condição, e algumas formulações impõem ao sistema de equações a condição da integral das forças de superfície ao longo do contorno se anular. Entretanto, como os resultados obtidos com algumas formulações foram satisfatórios, esta condição extra não foi introduzida neste trabalho. Porém cabe observar que para malhas suficientemente refinadas o equilíbrio de forças é automaticamente verificado.

## V.2 CONCLUSÕES GERAIS

A primeira parte do trabalho trata de problema de potencial bi-dimensional, na qual foram analisados exemplos de distribuição de temperaturas em dois domínios diferentes. Como foi utilizado o elemento constante (cujo nó funcional está localizado no seu ponto médio) para discretização do problema, não houve necessidade de uma análise da descontinuidade do fluxo (derivada do potencial) no contorno. Foram utilizadas as formulações com o Método da Colocação, o Método de Galerkin e uma abordagem alternativa descrita no Capítulo II.

Utilizando a matriz de rigidez correspondente à parte simétrica da matriz obtida com o MEC, obteve-se excelentes resultados com as três formulações, diferindo muito pouco dos resultados obtidos com a matriz original sem simetria. É importante observar também que ao refinar a discretização em elementos de contorno, como no exemplo 1 do Capítulo III, a solução utilizando a matriz simétrica fica mais próxima da solução da matriz sem simetria, que se aproxima da solução exata. Este fato evidencia que a característica da matriz ser quase simétrica é melhorada quando se refina a discretização do contorno.

Pode-se concluir portanto, para o caso de potencial bi-dimensional com elementos constantes, que ao utilizar como matriz de rigidez a parte simétrica da matriz obtida com o MEC, não é introduzido um erro significativo na solução do problema, obtendo-se resultados equivalentes ao obtido diretamente com o MEC.

A análise dos resultados também conduz à conclusão de que não se justifica a utilização do Método de Galerkin quando o contorno é discretizado em elementos constantes. Os resultados obtidos com o Método da Colocação, que demanda um tempo computacional inferior, são ligeiramente superiores aos obtidos com o Método de Galerkin nos dois exemplos analisados.

Quanto a abordagem alternativa que também é utilizada, o número de exemplos é insuficiente para se concluir sobre a sua aplicabilidade. O fato de ser utilizado o elemento constante também dificulta esta análise, tendo em vista que mesmo o Método de Galerkin, para o qual eram esperadas as melhores soluções, não apresenta um bom desempenho. Nos exemplos analisados esta abordagem alternativa fornece soluções equivalentes aos outros dois métodos, mas demanda um tempo computacional superior.

A segunda parte do trabalho analisa com maiores detalhes a obtenção da matriz de rigidez para o caso da elasticidade bi-dimensional. Sendo esta análise mais específica, os resultados obtidos permitem uma melhor avaliação de cada método, e conseqüentemente conclusões mais objetivas.

Para o problema de elasticidade foram utilizadas apenas as matrizes obtidas com o Método da Colocação e com o Método de Galerkin. Estas formulações foram desenvolvidas para o elemento linear, já visando uma posterior combinação com o Método dos Elementos Finitos.

A grande dificuldade para a utilização do elemento li-

near acontece nos cantos de descontinuidade geométrica no contorno, onde existem forças de superfície descontínuas.

Para considerar o efeito da descontinuidade destas forças, quando é utilizado o Método da Colocação, são introduzidas 'condições de canto' adicionais, que entretanto apresentam duas grandes restrições:

- i) não representam a descontinuidade das forças de superfície em contornos retos (ângulo entre os elementos adjacentes igual a  $180^0$ ) e também em fraturas (ângulo igual a  $0^0$ ).
- ii) a introdução das condições de canto destrói a característica de quase simetria da matriz obtida com o MEC, mesmo na forma descrita na referência [ 9 ].

Os resultados para deslocamentos obtidos com a matriz de rigidez com as condições de canto, sem simetrização, foram muito bons em todos os exemplos apresentados no Capítulo IV, equivalentes aos resultados obtidos diretamente com o MEC. As condições de canto tiveram grande influência no cálculo das forças de superfície, sendo que alguns resultados ficaram completamente distorcidos. Esta distorção se deu em maior escala no exemplo da viga longa, seção (IV.4.5).

Utilizando o Método de Galerkin as 'condições de canto' não são necessárias. Com funções de ponderação iguais às funções de interpolação, e considerando estas funções de ponderação divididas em duas componentes nos nós de descontinuidade, o

Método de Galerkin pode representar qualquer distribuição de forças de superfície, não existindo as restrições indicadas no Método da Colocação.

O aspecto da simetria ainda é mais marcante. Os termos da matriz de rigidez obtida com o Método de Galerkin localizados em posições simétricas são praticamente iguais, e o fato de utilizar apenas a parte simétrica da matriz não afeta os resultados. Isto é comprovado em todas as aplicações apresentadas no Capítulo IV, sendo que o exemplo da viga longa, que não é apropriado para a utilização do MEC com elementos lineares, é a melhor demonstração do bom desempenho do método.

Com o Método de Galerkin é necessária uma integração dupla para gerar os elementos das matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$ , que são utilizadas para obtenção da matriz de rigidez. Isto implica em um acréscimo do tempo computacional, comparado com a utilização do Método da Colocação. Os programas utilizados neste trabalho têm a mesma estrutura, e uma comparação destes tempos pôde ser feita. Para uma estrutura com 12 nós, o tempo gasto pelo Método de Galerkin foi 3 vezes superior ao tempo gasto pelo Método da Colocação. Para a estrutura com 32 nós, o tempo foi igual ao dobro, e para a estrutura com 58 nós o tempo foi superior em apenas 50%. Para uma estrutura com um maior número de nós esta diferença será inferior, porque o tempo gasto para a montagem da matriz  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$  passa a ter uma menor influência no tempo total.

Cabe também salientar que os resultados obtidos em todos os exemplos com a matriz de rigidez do Método de Galerkin são

equivalentes aos resultados obtidos diretamente com o MEC com elementos quadráticos, quando é utilizado o mesmo número de pontos nodais no contorno.

Pode-se concluir portanto que a matriz de rigidez obtida com o Método de Galerkin é a mais apropriada para um problema de combinação com o MEF, podendo ser considerada apenas a sua parte simétrica para montagem da matriz de rigidez global da estrutura.

### V.3 SUGESTÕES

A análise da combinação de diversos métodos numéricos para solução de problemas da engenharia é muito importante, e muitas pesquisas podem ser efetuados nesta área. Com os resultados obtidos neste trabalho, a seguir são dados algumas sugestões para continuidade e ampliação do assunto aqui abordado.

Para utilizar a matriz de rigidez obtida com o Método da Colocação com elementos lineares ou de ordem superior, torna-se necessária uma análise mais criteriosa das 'condições de canto', e principalmente a sua influência na simetria da matriz. Uma alternativa seria a utilização de elementos do tipo não-conforme, em que os nós do canto são deslocados para o interior dos elementos adjacentes, não necessitando portanto de nenhuma condição extra. Outra forma seria manter o nó funcional no canto, e deslocar apenas a posição do ponto fonte para o interior dos elementos adjacentes, gerando duas linhas desiguais e evitando a singularidade da matriz  $G$ .

A matriz de rigidez obtida com o Método de Galerkin pode ser introduzida em um programa computacional geral utilizando o MEF, considerando a região de elementos de contorno como um "super elemento finito".

Como uma das grandes vantagens do MEC é a aplicação em regiões infinitas, a matriz de rigidez utilizando o Método de Galerkin pode ser desenvolvida utilizando a solução fundamental para o semi-plano ou semi-espaço. Desta forma, por exemplo, em um problema de interação solo-estrutura em que o solo seja representado por uma região de elementos de contorno, pode-se discretizar apenas a interface das duas regiões, reduzindo o gasto computacional.

## APENDICE 1

### INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DE GAUSS

A expressão utilizada para a integração numérica unidimensional de Gauss é a seguinte:

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n f(x_i) w_i ,$$

onde ' $x_i$ ' é a coordenada do  $i$ -ésimo ponto de integração, ' $w_i$ ' é o fator de peso associado, e ' $n$ ' é o número de pontos de integração. Estes valores estão listados na tabela abaixo. O erro associado é  $E_n = O(d^{2n} f/dx^{2n})$ :

$\pm x_i$	$w_i$
n=2	
0,57735 02691 89626	1,00000 00000 00000
n=4	
0,33998 10435 84856	0,65214 51548 62546
0,86113 63115 94053	0,34785 48451 37454
n=6	
0,23861 91860 83197	0,46791 39345 72691
0,66120 93864 66265	0,36076 15730 48139
0,93246 95142 03152	0,17132 44923 79170
n=8	
0,18343 46424 95650	0,36268 37833 78362
0,52553 24099 16329	0,31370 66458 77887
0,79666 64774 13627	0,22238 10344 53374
0,96028 98564 97536	0,10122 85362 90376

## APÊNDICE 2

## MUDANÇA DE VARIÁVEIS PARA INTEGRAIS SINGULARES

Para o cálculo das integrais do tipo:

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta \quad (\text{A2.1})$$

quando ocorre singularidade nos extremos do domínio de integração, é utilizada uma transformação quadrática envolvendo a coordenada intrínseca  $\eta$  e a coordenada  $\theta$  dos pontos de integração [17]. Esta transformação é dada na forma:

$$\eta(\theta) = a\theta^2 + b\theta + c \quad (\text{A2.2})$$

e de tal maneira que a derivada dessa expressão em relação a  $\theta$  seja igual a zero no ponto onde ocorre a singularidade, e sejam mantidos os mesmos valores para os limites de integração. Sendo  $\bar{\eta}$  o ponto da singularidade, estas condições são dadas por:

$$\frac{d\eta}{d\theta} = 0 \quad \text{em} \quad \bar{\eta} \quad (\text{A2.3})$$

$$\begin{cases} \theta=1 & \text{para} \quad \eta=1 \\ \theta=-1 & \text{para} \quad \eta=-1 \end{cases} \quad (\text{A2.4})$$

Com a equação (A2.2), obtêm-se os valores de  $\theta$  em função de  $\eta$ :

$$\theta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-\eta)}}{2a} \quad (\text{A2.5})$$

Da condição (A2.3) tem-se:

$$\frac{d\eta}{d\theta} = 2a\theta + b, \quad (\text{A2.6})$$

que no ponto singular  $\bar{\eta}$  fornece a expressão:

$$2a\bar{\theta} + b = 0 \quad (\text{A2.7})$$

Substituindo (A2.7) em (A2.5) obtém-se:

$$b^2 - 4a(c - \bar{\eta}) = 0 \quad (\text{A2.8})$$

Utilizando as condições dadas por (A2.4) na equação (A2.2), obtém-se os valores:

$$b=1 \quad (\text{A2.9})$$

$$a=-c$$

que substituídos em (A2.8) fornece a equação:

$$4a^2 + 4a\bar{\eta} + 1 = 0 \quad (\text{A2.10})$$

donde se obtém:

$$a = \frac{-\bar{\eta} \pm \sqrt{\bar{\eta}^2 - 1}}{2} \quad (\text{A2.11})$$

Como tem-se singularidade apenas nos extremos,  $\bar{\eta}=1$  ou  $\bar{\eta}=-1$ , a expressão (A2.11) assume a forma:

$$a = \frac{-\bar{\eta}}{2} \quad (\text{A2.12})$$

Substituindo as expressões (A2.9) e (A2.12) nas expressões (A2.2) e (A2.6), as transformações desejadas são obtidas:

$$\eta(\theta) = \frac{\bar{\eta}}{2} (1-\theta^2) + \theta \quad (\text{A2.13})$$

$$\frac{d\eta}{d\theta} = 1 - \bar{\eta} \theta$$

e a integral dada por (A2.1) pode ser calculada na forma:

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \int_{-1}^1 f \left[ \frac{\bar{\eta}}{2} (1-\theta^2) + \theta \right] (1-\bar{\eta}\theta) d\theta \quad (\text{A2.14})$$

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [ 1 ] BREBBIA, C.A. - *The Boundary Element Method for Engineers* - Pentech Press, London (1978).
  
- [ 2 ] BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L.C. - *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering* - Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1984).
  
- [ 3 ] BREBBIA, C.A.; WALKER, S. - *Boundary Element Techniques in Engineering* - Butterworths, London (1980).
  
- [ 4 ] MUSTOE, G.G.W.; VOLAIT, F.; ZIENKIEWICZ, O.C. - A Symmetric Direct Boundary Integral Equation Method for Two Dimensional Elastostatics - *Res Mechanica* 4, pp. 57-82 (1982).
  
- [ 5 ] ZIENKIEWICZ, O.C.; KELLY, D.W.; BETTESS, P. - The Coupling of the Finite Element Method and Boundary Solution Procedures - *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, pp. 355-375 (1977).
  
- [ 6 ] ZIENKIEWICZ, O.C. - *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, London (1971).
  
- [ 7 ] CHAUDONNERET, M. - On the Discontinuity of the Stress Vector in the Boundary Integral Equation Method for Elastic Analysis, - *Recent Advances in Boundary Element Methods*, Pentech Press, pp. 185-194 (1978).

- [ 8 ] TULLBERG, O.; BOLTEUS, L. - A Critical Study of Different Boundary Element Stiffness Matrices - *Proceedings of the Fourth Internacional Seminar*, Southampton, England (1982).
- [ 9 ] GEORGIU, P. - *The Coupling of the Direct Boundary Element Method with the Finite Element Displacement Technique in Elastostatics* - Thesis Ph.D., University of Southampton (1981).
- [ 10 ] TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J.N. - *Teoria da Elasticidade*, Guanabara Dois, 3<sup>a</sup> Edição (1980).
- [ 11 ] MOREIRA, M.S.S. - *Análise de Problemas de Elasticidade Bi-Dimensional com o Método dos Elementos de Contorno*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ (1983).
- [ 12 ] TELLES, J.C.F. - *The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems*, *Lecture Notes in Engineering*, Vol. 1, Springer-Verlag, Berlin (1983).
- [ 13 ] BREBBIA, C.A.; CONNOR, J.J. - *Fundamentals of Finite Element Techniques for Structural Engineers*, Butterworths (1973).
- [ 14 ] HALBRITTER, A.L.; TELLES, J.C.F.; MANSUR, W.J. - *Aplicações dos Elementos de Contorno a problemas de campo* - *Anais da Conferência sobre Análise, Projeto e Construção de Estruturas de Centrais Nucleares* - UFRGS, paper 39, pp. 707-724 (1978).

- [15] BEER, G. - Finite Element, Boundary Element and Coupled Analysis of Unbounded Problems in Elastostatics - *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, pp. 567-580 (1983).
- [16] HARTMANN, F.; KATZ, C.; PROTOPSALTIS, B. - Boundary Elements and Symmetry - *Ingenieur-Archiv* 55, pp.440-449 (1985).
- [17] KARAM, V.J. - Aplicação do Método dos Elementos de Contor no à Teoria de Reissner para Flexão de Placas, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ (1986).