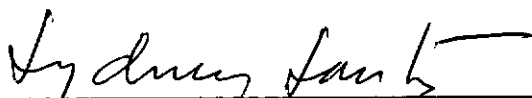


ANÁLISE DE TENSÕES EM NÓS SUJEITOS A BIMOMENTOS

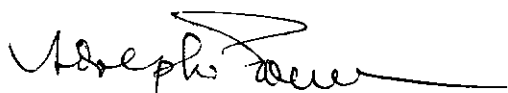
EDUARDO RIZZATTI

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

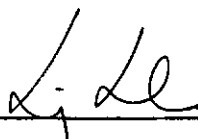
Aprovada por:



SYDNEY MARTINS GOMES DOS SANTOS
(Presidente)



ADOLPHO POLILLO



LUIZ LANDAU

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JULHO DE 1986

RIZZATTI, Eduardo

Análise de tensões em nós sujeitos a bimomentos
(Rio de Janeiro) 1986.

x, 125 p, p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1986).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro,
COPPE/UFRJ.

1. Hastes de Paredes Delgadas I. COPPE/UFRJ
II. Título (Série)

Aos meus pais

Walter e Neuza

MEUS SINCEROS AGRADECIMENTOS,

Ao Professor Sydney M. G. dos Santos, pelo incentivo e valiosa orientação.

Aos Professores do Programa de Engenharia Civil da COPPE, pelos ensinamentos.

Aos Professores do Departamento de Construção Civil da Universidade Federal de Santa Maria pelo incentivo.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul em especial à Prof.^a Maria Ines e Prof. Gross, pela atenção e colaboração dispensada.

À Walmor A.Rizzatti e Barbara Bach Rizzatti pelo apoio para a conclusão deste trabalho.

Aos colegas da COPPE, em especial a Emil de Souza Sanches, Fernando L.B. Ribeiro, Julian Quejada e Miguel A.C. Cisternas pela amizade e interesse demonstrado.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

ANÁLISE DE TENSÕES EM NÓS SUJEITOS A BIMOMENTOS

EDUARDO RIZZATTI

JULHO DE 1986

Orientador: SIDNEY MARTINS GOMES DOS SANTOS

Programa: Engenharia Civil

Esta tese consiste na análise de nós de hastes de paredes delgadas quando submetidas a bimomentos e à influência de enrijecedores.

Vários tipos de enrijecedores foram estudados, através de um programa de elementos finitos para cascas, o qual considera isoladamente os esforços de estado plano de tensões e flexão de placas.

Dois exemplos foram estudados. O primeiro - grelha - são testados três tipos de rigidezes adicionais. O segundo - pórtico plano - duas rigidezes adicionais são testadas.

Os resultados são descritos em tabelas e esboçados em gráficos que possibilitam conclusões sobre a análise realizada.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL
FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE
OF MASTER OF SCIENCE (M.Sc.)

ANALYSIS OF STRESSES IN JOINT SUBJECT TO
BIMOMENTS

EDUARDO RIZZATTI

JULY, 1986

Chairman: SIDNEY MARTINS GOMES DOS SANTOS

Department: Civil Engineering

This thesis consists in the analysis of joints of thin walled beams when submitted by bimoments and under the influence of additional stiffnesses.

Several types of additional stiffnesses were studied through the program of finite elements applied to shells; it considers disconnected efforts of plane state stress and bending of plates.

Two examples were analysed. The first one - grid - was examined by three types of additional stiffness. The second - plane frame - two additional stiffnesses are examined.

The results are presented in tables and graphs what enable conclusions about the analysis done.

NOTAÇÕES

- A - área da seção transversal
 A_p - área da seção transversal da placa adicional
 $a = \gamma = \sqrt{E I_w / G I_x}$
 b - largura da mesa do perfil
 ch - cosseno hiperbólico
 $ctgh$ - cotangente hiperbólica
 $D_w = Et^3/12(1-\nu^2)$ - rigidez a flexão da placa por unidade de comprimento
 E - módulo de elasticidade longitudinal
 $G = E/2(1+\mu)$ - módulo de elasticidade transversal
 h - distância entre os eixos das mesas
 $I_t = I_x$ - momento de inércia a torção
 I_y, I_z - momentos de inércia da seção transversal em relação aos eixos y e z respectivamente
 I_{yz} - produto de inércia em relação aos eixos y e z
 I_w - momento setorial de inércia
 I_{wy}, I_{wz} - produtos setoriais de inércia em relação aos eixos y e z respectivamente
 K - rigidez restringente de empenamento
 k - rigidez elástica de rotação da mesa
 L - comprimento da peça
 M_y, M_z - momentos fletores sobre os eixos y e z respectivamente
 N_x - esforço normal
 P - carga concentrada perpendicular à alma e livre na extremidade do nó
 Q - força cisalhante na placa adicional
 S_y, S_z - momentos estáticos em relação aos eixos y e z respectivamente.

S_{ω}	-	momento estático setorial
s	-	coordenada curvilínea
sh	-	seno hiperbólico
T	-	momento torsor total
T_v	-	momento torsor de Saint Venant
T_{ω}	-	momento torsor de empenamento
t	-	espessura da alma
t_1	-	espessura da mesa
th	-	tangente hiperbólica
u	-	deslocamento de empenamento
v, w	-	deslocamentos transversais
y, z	-	eixos principais de inércia
v_y	-	esforço constante paralelo ao eixo y
v_z	-	esforço constante paralelo ao eixo z
α	-	ângulo de nó
β	-	$\sqrt{2D_w/h \text{ } GI_f}$
θ_d	-	rotação da mesa sobre o eixo central
θ_1	-	rotação local interna de nó
θ_{ω}	-	rotação da mesa em seu próprio plano
ν	-	coeficiente de Poisson
γ	-	distorção
ϕ	-	rotação da seção sobre o centro de cisalhamento
ϕ'	-	rotação unitária de torção
ϵ	-	deformação longitudinal
ω	-	área setorial ou coordenada setorial
σ	-	tensão normal
τ	-	tensão tangencial
τ_v	-	tensão tangencial na torção devida a T_s
τ_{ω}	-	tensão tangencial na torção devida a T_{ω}

ÍNDICE

CAPÍTULO I	-	INTRODUÇÃO	01
		I.1 - Generalidades	01
CAPÍTULO II	-	FORMULAÇÃO DA TEORIA DO BIMOMENTO	06
		II.1 - Introdução	06
		II.2 - Características Setoriais	07
		II.2.1 - Área Setorial ou Coordena da Setorial	07
		II.2.2 - Momento Setorial Estático	
		II.2.3 - Produtos Setoriais de In- nêrcia	09
		II.2.4 - Momento Setorial de Inêr- cia	10
		II.2.5 - Localização da Origem Prin- cipal	12
		II.3 - Torção não-uniforme	14
		II.3.1 - Introdução	14
		II.3.2 - Estado de tensão nas Se- ções	17
		II.3.3 - Hipóteses Básicas	20
		II.3.4 - Estado de deformação da seção	20
		II.3.5 - Empenamento da seção	22
		II.3.6 - Tensão normal e bimomento	25
		II.3.7 - Estudo do bimomento	28
		II.3.7.1 - Conceito	28
		II.3.8 - Tensões cisalhantes	31

CAPÍTULO III - EMPENAMENTO E TORÇÃO EM NÓS DE SEÇÃO I ...	35
III.1 - Introdução	35
III.2 - Empenamento e torção de peças de seção I	39
III.2.1 - Empenamento	39
III.2.2 - Torção	44
III.3 - Torção e empenamento em nós	51
III.3.1 - Generalidades	51
III.3.2 - Classificação de nós ...	51
III.3.3 - Método de Análise de Nô. .	53
III.4 - Cálculo de tensões no interior de nós	56
CAPÍTULO IV - APLICAÇÕES	58
IV.1 - Grelha	58
IV.2 - Pórtico Plano	93
CAPÍTULO V - CONCLUSÕES	119
BIBLIOGRAFIA	124

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1 GENERALIDADES

O avanço tecnológico para que se obtenham estruturas mais econômicas sem com isso prejudicar a sua segurança, induziu que a teoria de hastes de paredes delgadas fosse profundamente investigada, tornando-se viável sua aplicação para engenheiros projetistas.

A particularidade fundamental destas hastes está na sua seção transversal. Uma das dimensões da seção transversal (espessura) é muito menor do que a altura (comprimento do contorno) e esta por sua vez muito menor do que o comprimento do eixo da barra.

O desenvolvimento geral da teoria de hastes de paredes delgadas pertence a V.S. Vlasov ^{|1|}, com as primeiras publicações ocorrendo em 1937.

Em seu livro, Vlasov desenvolveu a teoria do efeito do empenamento elástico em vigas de paredes delgadas, baseando seu método de análise nas propriedades setoriais de uma seção de cascas e vigas.

Sua teoria expõe a diferença de comportamento entre vigas de paredes espessas e paredes delgadas sob o mesmo carregamento e a razão porque as informações adequadas à análise das primeiras não são suficientes para a análise das segundas. Permite ainda, calcular as tensões e torções para as vigas de parede delgadas o que não era possível pela teoria clássica.

Vlasov ^[1] define hastes de paredes delgadas como aquelas em que:

$$\frac{t}{d} \leq \frac{1}{10} \quad \text{e} \quad \frac{d}{L} \leq \frac{1}{10}$$

onde

- t - espessura da parede
- d - dimensão característica da seção (altura ou largura)
- L - comprimento da peça.

As hastes de paredes delgadas não mais apresentam seções planas após a deformação fletente e, submetidas a torção, podem apresentar tensões longitudinais. Seu estudo é tão amplo, que a hipótese de Bernoulli e a clássica dedução que dela resulta na flexão, bem como a teoria das membranas cilíndricas, resultam como simples casos particulares.

Até o conhecimento desta teoria no ocidente, que ocorreu com a tradução para o inglês em 1964, a teoria de Saint - Venant era considerada suficiente para a torção, sendo aplicada tanto para a torção uniforme como para a não uniforme.

Paralelamente à difusão desta teoria, alguns trabalhos foram realizados no Brasil, podendo-se citar Santos ^{|2|}, que desenvolveu o teorema dos três bimomentos, Langendock ^{|3|}.

As barras constituídas de hastes de paredes delgadas mantêm as propriedades fundamentais da barra comum, sendo válidas as fórmulas obtidas para os casos de tração e flexão. Entretanto, em consequência das características geométricas, as de paredes delgadas têm propriedades que diferem consideravelmente na torção das barras da seção maciça; em alguns casos não se pode aplicar o princípio de Saint-Venant.

Na Fig.I.1 mostram-se duas barras, uma de hastes de paredes delgadas (Fig.I.1.a) e outra maciça (Fig.I.1.b), tracionadas por uma força P. Indica-se por hachurias a zona de influência onde as tensões se distribuem de forma não uniforme na seção transversal. Comparando-se estas figuras observa-se que a região de influência na haste de paredes delgadas é incomparavelmente maior.

O problema localiza-se na rigidez da união da alma com as mesas. Em hastes de paredes delgadas esta rigidez é muito pequena; nas seções maciças é muito grande. Portanto, a desuniformidade da distribuição de tensões em hastes de paredes delgadas abrange a uma região incomparavelmente maior do que em hastes de seção maciça. Quanto menor for a espessura da alma, maior será o efeito indicado.

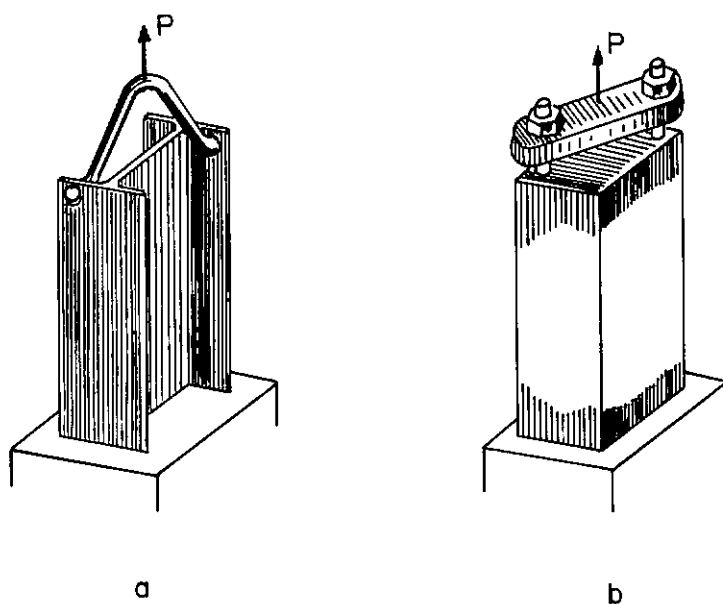


Figura I.1 - Distribuição não uniforme das tensões
em barras

Ao analisar quadros estruturais com nós rígidos, representa-se cada elemento pela sua linha média e referem-se todas as ações estruturais ao seu eixo longitudinal. Em se tratando de hastes de paredes delgadas, nem sempre a linha média e a espessura são capazes de representar com precisão o perfil, existindo regiões que não ficam bem definidas; por exemplo o encontro da mesa com a alma em perfis tipo duplo tê.

Tal procedimento ignora qualquer efeito de distribuição local de tensões junto ao nó, sendo que somente o equilíbrio global e condições de compatibilidade em cada nó são satisfeitas.

A realização deste trabalho deve-se ao fato de não se

conhecer a distribuição de tensões em nós. Os nós analisados são de perfis metálicos de tipo duplo tê para os quais calculam-se as tensões em seu interior, localizando-se os pontos críticos, através da colocação de enrijecedores procura-se diminuir as concentrações de tensões, possibilitando o uso de perfis menores.

O presente estudo limita-se a hastes de seção aberta.

CAPÍTULO II

FORMULAÇÃO DA TEORIA DO BIMOMENTO

II.1 GENERALIDADES

Para o estudo das particularidades das hastes de paredes delgadas torna-se necessário definir determinadas grandezas da geometria das massas, até então desconhecidas, obtidas a partir da seção transversal.

Admite-se que esta pode ser representada pela linha média s e pela espessura t .

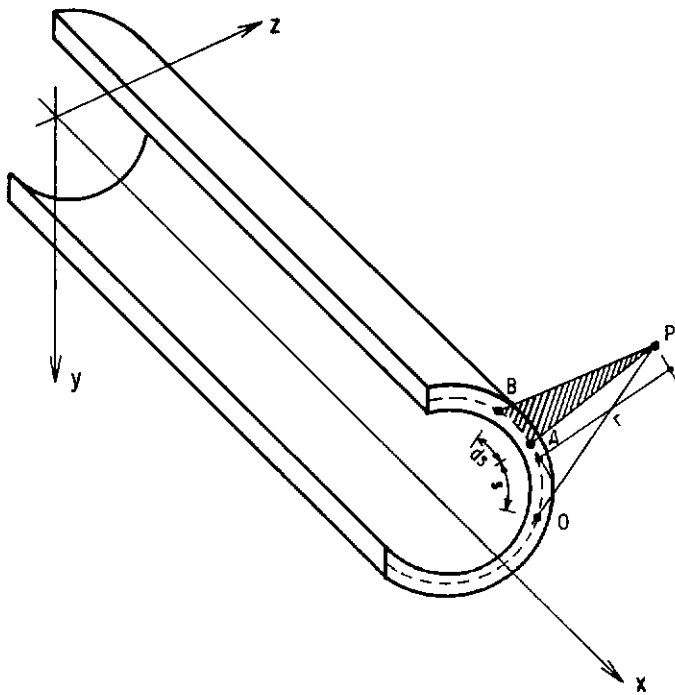


Figura II.1 - Determinação da área setorial de uma seção genérica

II.2 CARACTERÍSTICAS SETORIAIS

II.2.1 - Área Setorial ou Coordenada Setorial

Designa-se por área setorial (ω) ao dobro da área descrita pelo raio "PA" ao deslocar o ponto "A" pelo contorno da linha média desde a origem "0" até certo valor "s" do arco.

$$\omega = \int_0^s r \, ds \quad (\text{II.1})$$

onde,

r = distância do ponto a tangente à linha média no ponto "A".

ds = segmento elementar da linha média.

Para determinadas seções transversais é mais conveniente determinar o valor da área setorial por um processo aritmético.

Para isto, representa-se a linha média da seção transversal por meio de um sistema de pequenos segmentos retos, como mostra a Figura II.2.

Para um incremento, a coordenada setorial, torna-se:

$$\Delta\omega_n = \Delta S_n h_n$$

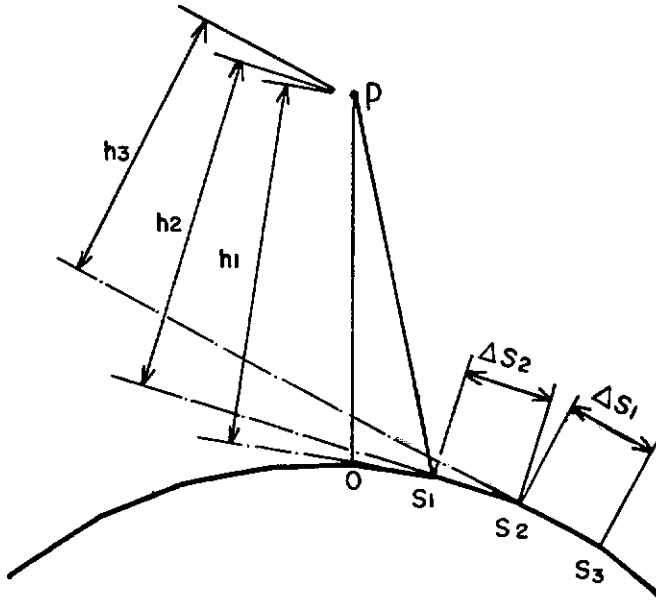


Figura II.2 - Determinação da área setorial por segmentos retos

No ponto S_n , a coordenada setorial é expressa pela soma desses incrementos. Escreve-se a fórmula geral como:

$$\omega_n = \sum_{i=1}^n \Delta \omega_i = \sum_{i=1}^n \Delta S_i h_i \quad (\text{II.2})$$

sendo,

ΔS_i = distância entre os pontos S_j e S_{j+1}

h_i = distância do polo à reta que passa pelos pontos "j" e "j+1".

Convenção de Sinal

Se o raio "PA" girar no sentido horário, ω será positivo, caso contrário, ω será negativo.

Dimensão de ω

Possui a dimensão de uma área.

$$[\omega] = L^2$$

II.2.2 - Momento Setorial Estático

$$S_{\omega} = \int_A \omega \, dA \quad (\text{II.3})$$

É análogo aos momentos de primeira ordem.

II.2.3 - Produtos Setoriais de Inércia

II.2.3.1 - Em relação ao eixo y

$$I_{\omega y} = \int_A z \, \omega \, dA \quad (\text{II.4})$$

II.2.3.2 - Em relação ao eixo z

$$I_{\omega z} = \int_A y \, \omega \, dA \quad (\text{II.5})$$

II.2.4 - Momento Setorial de Inércia

$$I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA \quad (II.6)$$

é análogo aos momentos de segunda ordem.

Para espessura constante ao longo da seção transversal ,
tem-se

$$A = \int_A dA = t \int_S dS \quad (II.7)$$

As relações acima são obtidas a partir de um polo "P" e de uma origem "O" arbitrárias. Trocando-se a posição deste polo e da origem, obteremos valores diferentes das propriedades setoriais para uma mesma seção transversal.

Vê-se a necessidade de se fixarem as posições do polo inicial e da origem de maneira a obter valores característicos para cada seção.

Na análise de hastes de paredes delgadas procura-se referenciar a seção transversal segundo os eixos principais. Para tal, três condições devem ser consideradas

$$\begin{aligned} S_Y &= \int_A z dA = 0 \\ S_Z &= \int_A y dA = 0 \end{aligned} \quad (II.8)$$

$$I_{zy} = \int_A z y \, dA = 0$$

As duas primeiras equações, determinam a posição do centro de gravidade e a terceira equação fornece a direção do sistema ortogonal principal.

De maneira análoga encontra-se a coordenada setorial principal. Neste sistema o pólo é chamado de pólo principal ou centro de cisalhamento e a origem de origem principal.

Novamente, três condições devem ser consideradas pelas equações (II.9).

$$I_{\omega y} = \int_A z \omega \, dA = 0$$

$$I_{\omega z} = \int_A y \omega \, dA = 0 \quad (\text{II.9})$$

$$S_{\omega} = \int_A \omega \, dA = 0$$

As duas primeiras equações determinam a localização do pólo principal, enquanto que a terceira equação define a posição da origem principal. A partir deste pólo e origem, determina-se a área setorial principal e o momento de inércia setorial principal.

II.2.5 - Localização da Origem Principal

O método utilizado para a localização da origem principal baseia-se no fato que mudando-se a posição da origem, sem mudar a posição do pólo, todos os valores da área setorial são alterados de uma mesma quantidade conforme Figura (II.3).

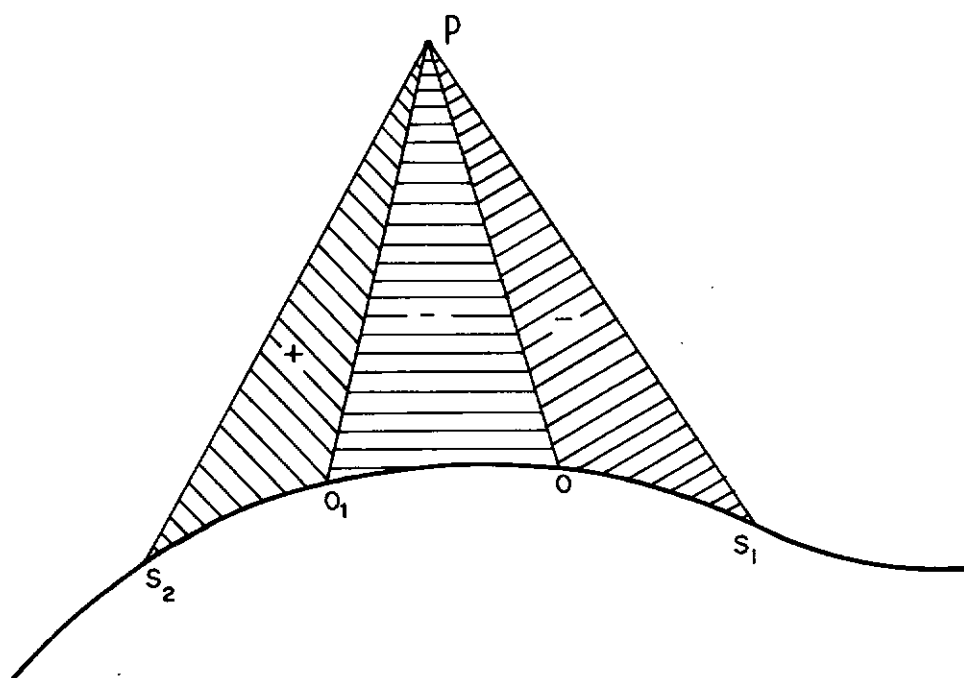


Figura II.3 - Alteração da área setorial a partir da mudança da origem

Admitindo-se que a origem está localizada no ponto O_1 , as áreas setoriais dos pontos S_1 e S_2 são por definição o dobro da área compreendida entre os pontos PO_1OS_1 e PO_1OS_2 respectivamente.

Mudando-se a posição da origem inicial para o ponto

0, as áreas setoriais dos pontos S_1 e S_2 passam a ser iguais ao dobro da área compreendida entre os pontos POS_1 e POO_1S_2 respectivamente.

Deste modo, escreve-se:

$$\omega_{POS_1} = \omega_{PO_1S_1} - \omega_{PO_1O}$$

e

$$\omega_{POS_2} = \omega_{PO_1S_2} - \omega_{PO_1O}$$

ou de maneira geral

$$\omega_{PBS} = \omega_{PAS} - \omega_{PAB} \quad (\text{II.10})$$

Assumindo-se que a origem principal está localizada no ponto 0, o momento estático segundo a equação (II.3), será:

$$\int_A \omega_{POS} dA = 0 \quad (\text{II.11})$$

Escolhendo-se como origem um ponto arbitrário da seção, O_1 e calculando-se a área setorial a partir desta origem o momento estático setorial será:

$$\int_A \omega_{PO_1S} dA \neq 0$$

Invocando-se a equação (II.10), que relaciona as áreas setoriais determinadas a partir de origens diferentes, e utilizando-se a equação (II.11), tem-se que:

$$\int_A \omega_{POS} dA = \int_A [\omega_{PO_1S} - \omega_{PO_1O}] dA = 0$$

Como o valor ω_{PO_1O} é uma constante, pode-se escrever:

$$\int_A \omega_{PO_1O} dA = \omega_{PO_1O} \int_A dA$$

logo

$$\omega_{PO_1O} = \frac{1}{A} \int \omega_{PO_1S} dA \quad (\text{II.12})$$

A equação (II.12) dá a posição da origem principal em função da área setorial calculada a partir de uma origem arbitrária.

II.3 TORÇÃO NÃO-UNIFORME

II.3.1 - Introdução

Caracteriza-se torção não-uniforme como sendo aquela que ocorre quando o empenamento é impedido em uma ou mais seções transversais.

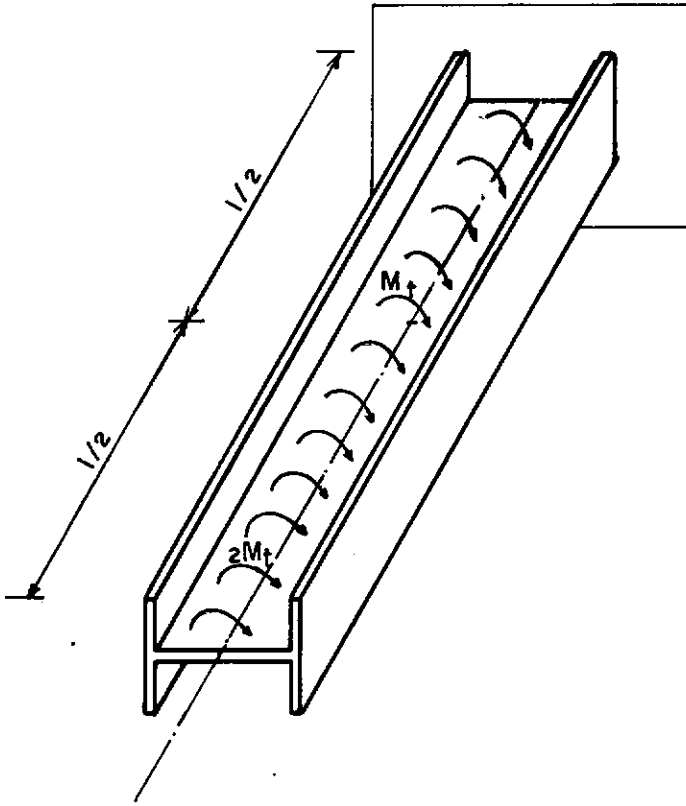


Figura II.4 - Viga engastada submetida a momento torsor variável

Esse impedimento tanto poderá provir de engastes que diretamente o causem (Figura II.4), quanto da variação quer da seção, quer do momento de torção a qual submetida a empenamentos diferentes dá lugar a interferências recíprocas.

Em peças solicitadas por forças longitudinais aplicadas em pontos não contidos em eixo de simetria da seção também ocorre torção não-uniforme, conforme mostrado na Figura (II.5).

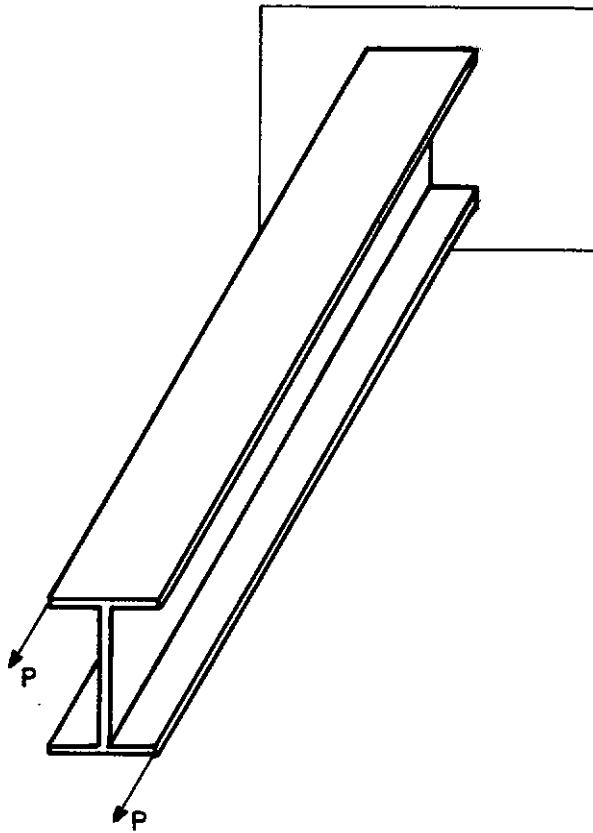


Figura II.5 - Viga solicitada em pontos fora do eixo de simetria

A restrição ao empenamento origina tensões que para hastes de paredes delgadas podem ser da mesma ordem de grandeza dos efeitos principais de torção.

O mesmo efeito pode ocorrer quando o torque aplicado varia ao longo da barra. Seções vizinhas tendem a girar ângulos diferentes e conseqüentemente sofrerão empenamentos diferentes. Torna-se necessária a presença de tensões normais para que a compatibilidade entre os deslocamentos seja satisfeita.

II.3.2 - Estado de Tensão nas Seções

Adicionalmente ao sistema usual x, y, z é estabelecido um outro sistema ortogonal de coordenadas curvilíneas x, s, n indicado na Figura (II.6). A coordenada s positiva é medida ao longo da linha média, no sentido anti-horário para um observador situado no lado positivo do eixo dos x e a coordenada n no sentido para fora, normal a s .

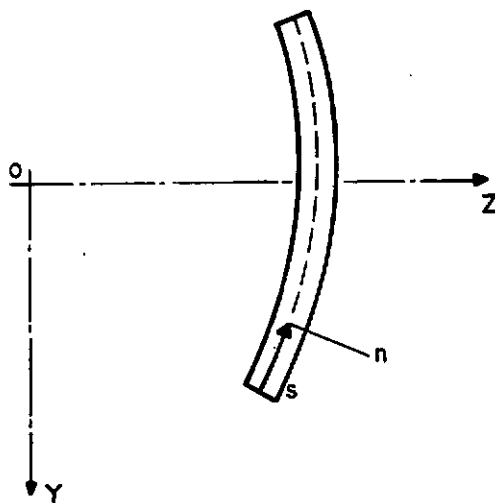


Figura II.6 - Sistema de coordenadas na seção transversal

Assume-se que as dimensões da seção são constantes ao longo do eixo longitudinal, tal que s e n independem de x .

A espessura t é considerada por definição, muito peque

na quando comparada com as demais dimensões, podendo-se assumir que sobre ela a tensão normal σ_x , distribui-se de maneira essencialmente uniforme (Figura II.7) e que as componentes de tensões normais à parede são nulas.

$$\sigma_n = \tau_{xn} = \tau_{sn} = 0$$

e por conseguinte

$$\epsilon_n = \gamma_{xn} = \gamma_{sn} = 0 \quad (\text{II.13})$$

Portanto, a única tensão cisalhante que deve ser calculada é τ_{xs} , e o seu surgimento é devido a dois efeitos de deformação distintos.

A torção uniforme que origina tensões cisalhantes que são lineares ao longo da espessura, sendo designadas por τ_v .

A torção não uniforme que em virtude da variação de σ_x ponto a ponto ao longo do eixo longitudinal, requer o surgimento de tensões tangenciais para equilibrá-la. Sendo σ_x constante ao longo da espessura, estas tensões cisalhantes também o serão e são designadas por τ_ω .

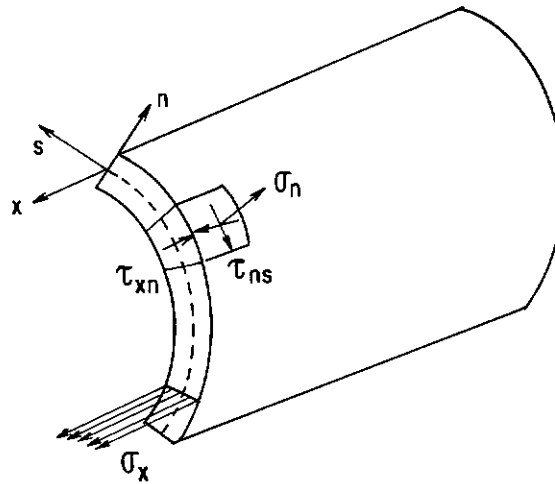


Figura II.7 - Tensões inexistentes e tensão uniforme σ_x

Portanto, a tensão cisalhante é expressa como

$$\tau = \tau_{xs} = \tau_v + \tau_\omega \quad (\text{II.14})$$

sendo

τ_v - tensão de Saint-Venant

τ_ω - tensão de empenamento.

O momento torsor que atua em qualquer seção pode ser decomposto na soma de duas parcelas: um momento T_v devido as tensões de Saint-Venant e um momento T_ω sendo chamado de torsor de empenamento por ser resultante das tensões oriundas da restrição ao empenamento.

$$T_t = T_v + T_\omega$$

II.3.3 - Hipóteses Básicas

A teoria de hastes de paredes delgadas foi desenvolvida baseando-se em duas hipóteses simplificadoras:

- Após a deformação da haste, a seção transversal projeta-se de maneira indeformada no seu próprio plano. O perfil pode sofrer uma translação e uma rotação em relação a posição inicial, porém a posição relativa de seus pontos permanecerá inalterada no plano yz.
- As distorções na superfície média da haste são consideradas nulas. Devido a grande flexibilidade das seções de hastes de paredes delgadas o efeito da deformação cisalhante (distorção) na deformação final é extremamente pequeno, podendo-se ignorá-lo.

II.3.4 - Estado de Deformação da Seção

Considerando que o perfil seja constituído de material homogêneo, isótropo e segue a lei de Hooke, através das equações da elasticidade, em acordo com as hipóteses formuladas, escreve-se:

$$\gamma_{xs} \approx 0 = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{II.15})$$

$$\epsilon_s = 0 = \frac{1}{E} (\sigma_s - \nu \sigma_x) \quad (\text{II.16})$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_s) \quad (\text{II.17})$$

onde

η = componente de deslocamento na direção s .

Logo, escreve-se:

$$\sigma_x = \bar{E} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{II.18})$$

sendo

$$\bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (\text{II.19})$$

Em geral, a deformação do perfil se dará quase exclusivamente pela deformação longitudinal ϵ_x , produzida pela flexão e torção não-uniforme. Não é necessário levar em conta a σ_s na presença de σ_x . Assim a equação (II.18) passa a ser:

$$\sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{II.20})$$

II.3.5 - O Empenamento da Seção

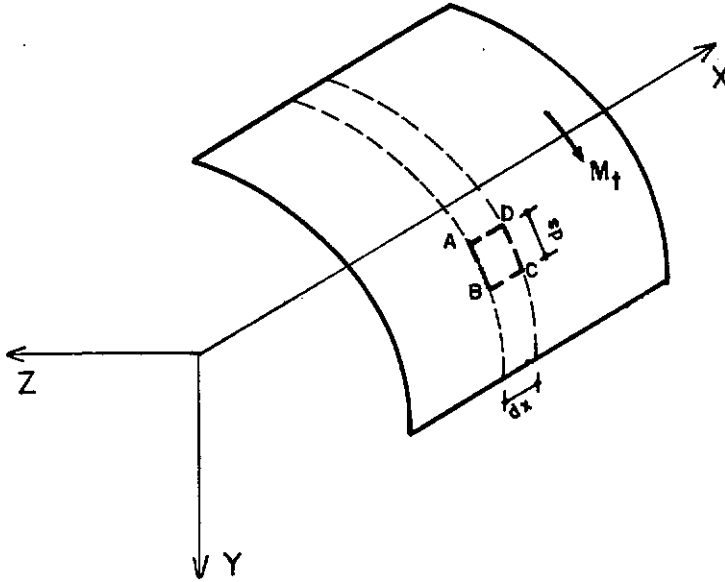


Figura II.9 - Elemento de haste submetida a momento torsor

O empenamento ocorre porque os pontos da seção transversal ao longo do eixo da seção transversal experimentam deslocamentos diferentes.

Supõe-se que durante a torção da barra as seções transversais giram em relação a um ponto fixo "0", chamado centro de torção.

Estuda-se o elemento $dsdx$, após a deformação.

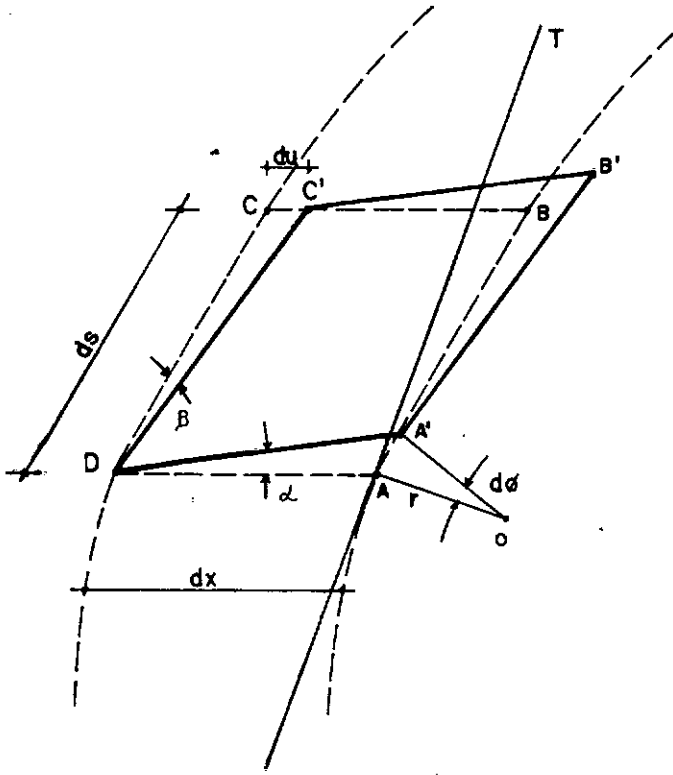


Figura II.10 - Empenamento do elemento $dsdx$

onde:

- y, z - eixos principais de inércia da seção
- x - eixo longitudinal da haste
- γ - ângulo de distorção da área elementar ABCD.
- α - ângulo de giro da aresta AD com a aresta A'D.
- β - ângulo de giro da aresta DC com a aresta DC'.
- T - tangente a seção transversal no ponto A.
- $d\phi$ - ângulo de giro da seção A em relação a seção infinitamente próxima A'.
- r - distância do centro de cisalhamento à tangente a linha do contorno no ponto A.

du - deslocamento linear na direção x

o - centro de cisalhamento

temos que:

$$\gamma = \alpha + \beta$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha = \frac{AA'}{dx}$$

mas

$$AA' = r \, d\phi$$

então

$$\alpha = r \frac{d\phi}{dx} = r\phi'$$

e

$$\beta = \frac{du}{ds}$$

logo

$$\gamma = r\phi' + \frac{du}{ds}$$

mas, por hipótese, a distorção na superfície média é desprezada,
então

$$0 = r\phi' + \frac{du}{ds}$$

$$du = -r\phi' ds$$

ou

$$u = - \int r\phi' ds = -\phi' \int r ds$$

mas por definição, a expressão $\int r ds = \omega$, é a coordenada setorial.

Logo

$$u = - \phi' \omega + u_0 \quad (\text{II.21})$$

onde

$$u_0 = \text{constante de integração}$$

Conclui-se pela equação (II.21), que o empenamento é proporcional ao momento torsor, através da rotação específica e à coordenada setorial (ω) que caracteriza a forma do empenamento, sendo o empenamento função de "s" e de "x".

II.3.6 - Tensão Normal e Bimomento

A tensão normal σ_x , em termos de deslocamento, dado pela equação (II.21), devido à restrição ao empenamento é dado por:

$$\sigma_x = - E \omega \phi'' \quad (\text{II.22})$$

Para o caso geral de sollicitação de uma haste os deslocamentos "u" são expressos como

$$u = u_0 - y \phi_z - z \phi_y - \omega \phi' \quad (\text{II.23})$$

com

$$\phi_z = \frac{dv}{dx} \quad \text{e} \quad \phi_y = \frac{dw}{dx}$$

logo

$$\sigma_x = -E \left[\frac{du_0}{dx} + \frac{d\phi_z}{dx} y + \frac{d\phi_y}{dx} z - \frac{d\phi'}{dx} \omega \right] \quad (\text{II.24})$$

sendo

u_0 - deslocamento uniforme de todos os pontos na direção x.

$y \phi_z$, $z \phi_y$ - deslocamento longitudinal devido a rotação da seção plana através dos ângulos ϕ_z e ϕ_y sobre os eixos z e y respectivamente.

Obtém-se as resultantes de tensões, multiplicando - se σ_x , por cada uma das coordenadas generalizadas principais e integrando-se sobre a área da seção transversal:

$$\begin{aligned} N_x &= \int_A \sigma_x \, dA \\ M_y &= \int_A \sigma_x \, z \, dA \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

$$\begin{aligned}
 M_z &= \int_A \sigma_x y \, dA \\
 B &= - \int_A \sigma_x \omega \, dA
 \end{aligned}
 \tag{II.26}$$

As três primeiras resultantes de tensões são conhecidas da teoria elementar de vigas (Fig. II.11) enquanto que a quarta resultante de tensão é definida como bimomento de flexo-torção.

Substituindo-se a equação (II.22) na equação (II.26) temos a expressão da tensão normal devido ao bimomento.

$$B = E \phi'' \int_A \omega \omega \, dA$$

$$B = E \phi'' I_\omega$$

$$E \phi'' = \frac{B}{I_\omega}$$

e

$$\sigma_x = \frac{B\omega}{I_\omega} \quad (*) \tag{II.27}$$

Da mesma forma introduzindo-se as equações (II.24) em (II.25) e (II.26), e considerando a parcela devido ao bimomento e a equação (II.20), chega-se a:

(*) Ver II.3.7

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{B\omega}{I_\omega} \quad (\text{II.28})$$

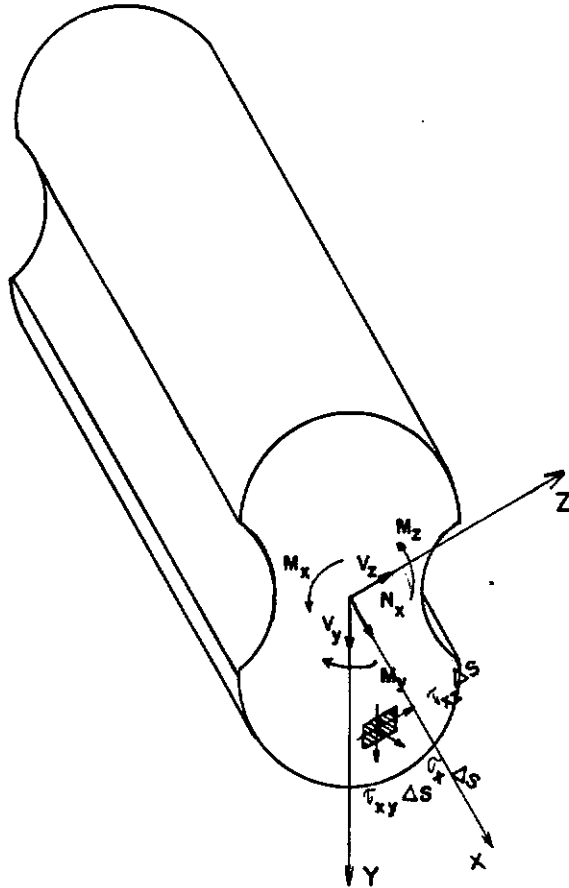


Figura II.11 - Resultante de tensão em uma peça

II.3.7 - Estudo do Bimomento

II.3.7.1 - Conceito

É um esforço fictício, que se diferencia dos demais fatores de força interiores conhecidos, força normal ou provenientes de momentos fletores ou momento de torção, por ser uma grandeza auto equilibrada que não se obtém da condição de equilíbrio da parte separada da barra.

Visualiza-se sua presença com o exemplo de uma viga en gastada em uma extremidade e submetida a um carregamento conforme ilustra a Figura II.12.

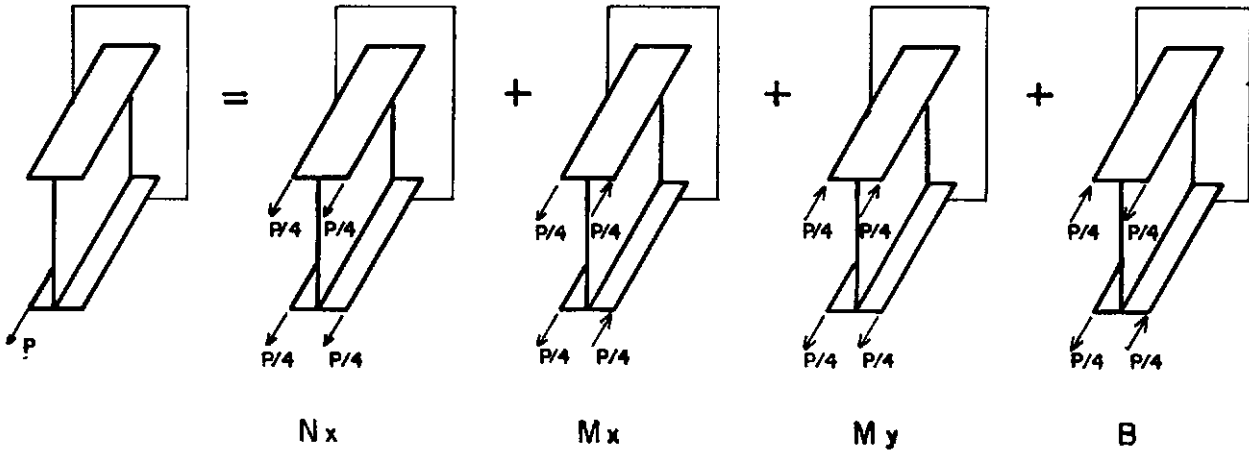


Figura II.12 - Decomposição de um carregamento longitudinal

Pelo princípio da superposição dos efeitos, podemos de compor o carregamento P em quatro outros carregamentos e tem-se: uma tração uniforme (N_x), momentos fletores (M_x e M_y) onde a ten são varia linearmente e o bimomento (B), caso em que se percebe que as seções deixam de ser planas.

Nas seções da viga em que atua o bimomento não surgem força normal, nem momentos fletores, como se vê na Figura II.12.

Define-se bimomento como sendo um par de momentos fletores de igual intensidade mas de sentido contrário, agindo em planos paralelos.

Seu valor numérico é dado pelo produto do momento em um dos planos pela distância entre eles (Figura II.13).

$$B = M \cdot d \quad (\text{II.29})$$

convenção de sinal.

Será considerado positivo, quando a direção de cada momento visto do plano do outro momento componente for horária, conforme Figura II.13.

dimensão

$$[B] = F^1 L^2$$

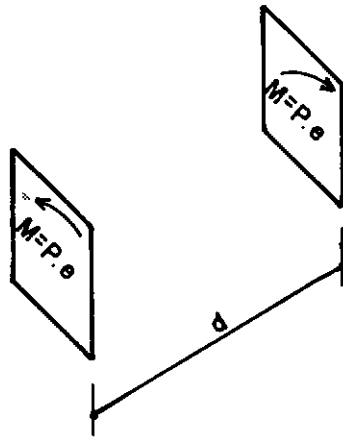


Figura II.13 - Bimomento positivo, causado por momentos fletores

Define-se ainda bimomento quando causado por uma força externa paralela ao eixo longitudinal da viga como o produto desta força e a coordenada setorial principal no ponto de aplicação desta força (Figura II.14).

$$B = P \omega (E) \quad (II.30)$$

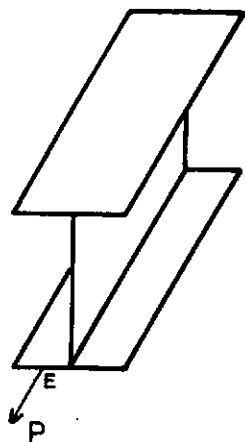


Figura II.14 - Bimomento causado pela força P

II.3.8 - Tensões Cisalhantes

Conforme a equação (II.13) a tensão cisalhante é expressada por:

$$\tau = \tau_v + \tau_\omega$$

As tensões cisalhantes oriundas da torção uniforme são dadas por

$$\tau_v = \frac{T_v}{I_t} t \quad (II.31)$$

onde

$$I_t = \frac{1}{3} \int_{\ell} t^3 ds \quad (\text{II.32})$$

Determina-se τ_{ω} através do equilíbrio de um elemento de viga.

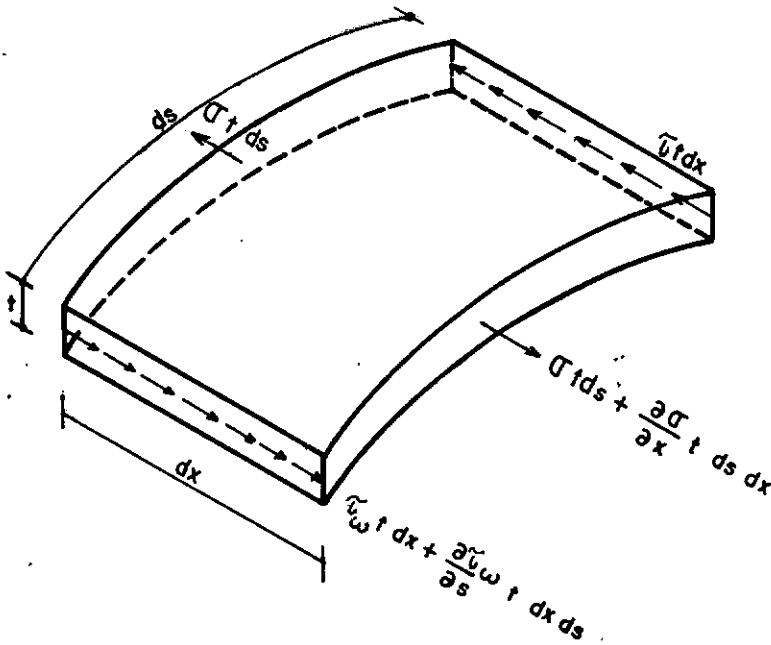


Figura II.15 - Equilíbrio de um elemento de viga
dxds

Pela Figura II.15 tem-se:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} t ds dx + \frac{\partial \tau_{\omega}}{\partial s} t dx ds = 0$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{\omega}}{\partial s} = 0$$

logo, integrando temos

$$\tau_{\omega} = - \int_0^s \frac{\partial \sigma}{\partial x} ds + c \quad (\text{II.33})$$

onde

c - constante de integração

Considerando, não existir força cisalhante externa agindo no lado livre da seção, tem-se

$$c = 0$$

Derivando-se a equação (II.28) em relação a x e introduzindo-a na equação (II.33), tem-se

$$\tau = - \int_0^s \left(\frac{V_y}{I_z} y + \frac{V_z}{I_y} z + \frac{dB}{dx} \frac{\omega}{I_{\omega}} \right) ds \quad (\text{II.34})$$

pois a derivada do momento fletor é a força cortante.

Introduzindo-se a expressão do elemento de área $dA = t ds$, temos:

$$\tau_{\omega} = - \int_0^s \left(\frac{V_y}{I_z} y + \frac{V_z}{I_y} z + \frac{dB}{dx} \frac{\omega}{I_{\omega}} \right) \frac{dA}{t}$$

Considerando-se que:

$$S_y = \int_0^s z dA \quad \text{e} \quad S_z = \int_0^s y dA \quad (\text{II.35})$$

são os momentos estáticos de área em relação aos eixos y e z res-

pectivamente e segundo ainda a equação (II.3) a equação (II.34) é escrita como:

$$\tau_{\omega} = - \frac{1}{t} \left[\frac{V_Y}{I_Z} S_Z + \frac{V_Z}{I_Y} S_Y + B' \frac{S_{\omega}}{I_{\omega}} \right] \quad (\text{II.36})$$

A tensão cisalhante total será:

$$\tau = \frac{M_V}{I_t} - \frac{1}{t} \left[\frac{V_Y}{I_Z} S_Z + \frac{V_Z}{I_Y} S_Y + B' \frac{S_{\omega}}{I_{\omega}} \right] \quad (\text{II.37})$$

CAPÍTULO III

EMPENAMENTO E TORÇÃO EM NÓS DE SEÇÃO I

III.1 INTRODUÇÃO

Para um nó de ângulo reto de um quadro estrutural, Figura III.1, o momento fletor sobre o menor eixo de uma haste deve estar em equilíbrio com o momento torsor na outra haste, enquanto que a rotação do eixo menor de um deve ser compatível com o ângulo de torção ϕ , do outro.

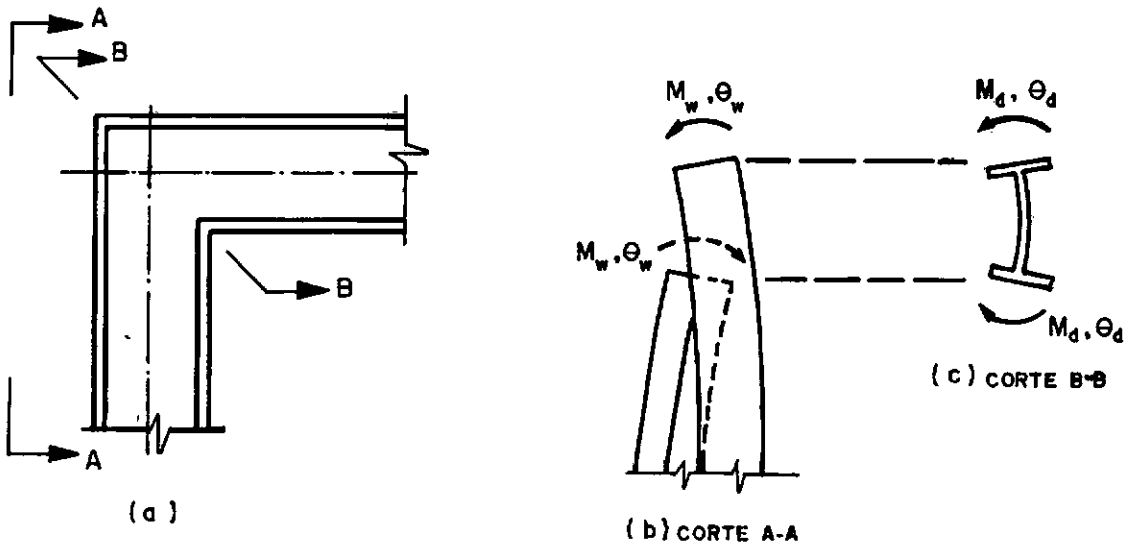


Figura III.1 - (a) - Nó de ângulo reto, sem rigidez adicional
 (b) - Empenamento da mesa corte AA
 (c) - Torção da seção corte BB.

Um elemento de seção I, Figura III.2, ao sofrer um giro ϕ , ele empena e cada uma de suas mesas giram θ_ω em seu próprio plano. Quando um elemento deste não empena, a compatibilidade exige que o outro elemento torça e suas mesas girem $\theta_\omega = \theta_d$. Por conseguinte, o empenamento de uma haste é impedido pela resistência à torção da outra haste, que assume a forma de momentos M_d , que por sua vez devem estar em equilíbrio com os momentos de empenamento, M_ω .

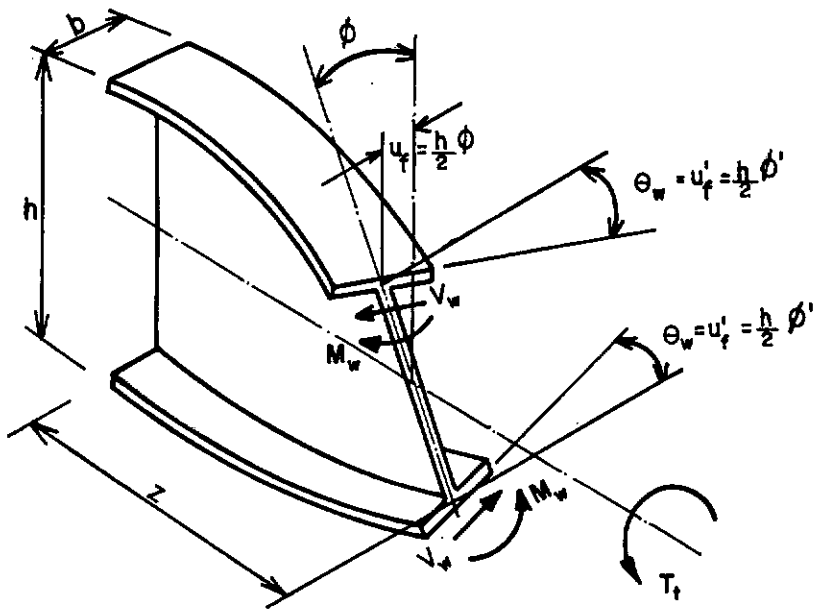


Figura III.2 - Empenamento de uma viga I

A torção é efetivamente restringida em nós rígidos, Figura III.3, sendo o empenamento uma consequência da torção interna, local do nó rígido, em que a rotação de empenamento, θ_ω , é assumida igual à metade da rotação local do nó θ_j , enquanto o em

penamento é restringido pelo momento torsor local do nó T_j , Figura III.3.c.

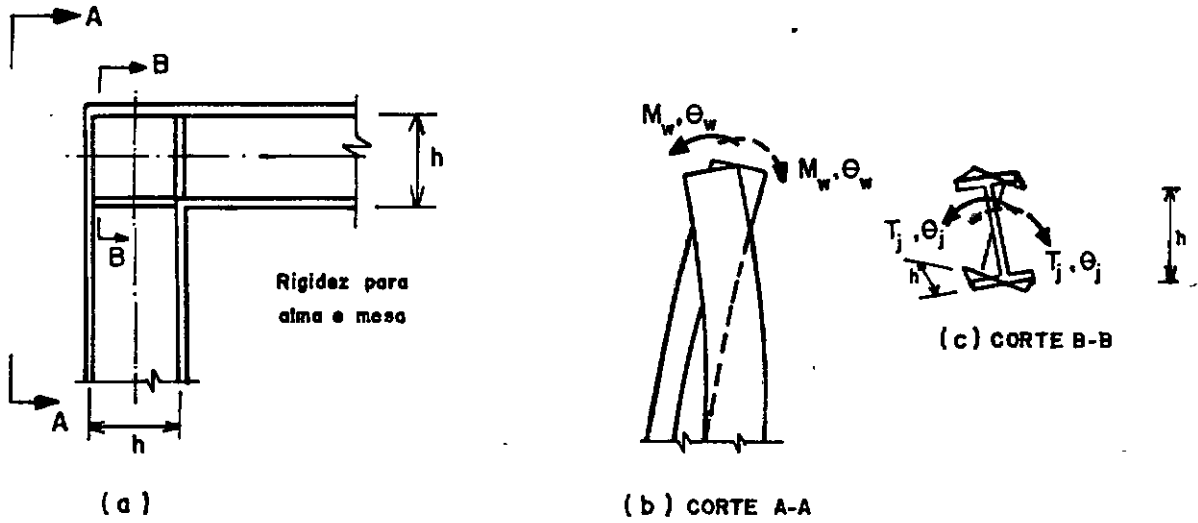


Figura III.3 - (a) nó rígido
(b) empenamento da mesa
(c) torção local

O significado dessas ações depende das contribuições relativas do momento torsor uniforme e do torsor de empenamento, visto que:

$$T_t = T_v + T_w \quad (\text{III.1})$$

e

$$T_v = G I_t \frac{d\phi}{dx} \quad (\text{III.2})$$

$$T_w = -EI_w \frac{d^3\phi}{dx^3} \quad (\text{III.3})$$

onde

GI_t = rigidez torsional da seção

EI_ω = rigidez de empenamento

Essas contribuições variam principalmente com a relação

$$\frac{L}{a} = \sqrt{\frac{GI_t L^2}{EI_\omega}} \quad (\text{III.4})$$

onde

L = comprimento do membro.

Para valores elevados da relação $\frac{L}{a}$, o torsor uniforme T_v , é dominante e a estrutura é dita com torção uniforme. Neste caso ignoram-se as ações de empenamento. Para valores pequenos desta relação, o torsor de empenamento, T_ω , é que passa a ser dominante e a estrutura sofre uma torção de empenamento importante. Entre estes dois extremos ambos os torsos, uniforme e de empenamento são significativos e a peça se encontra em torção mista.

O empenamento é importante em ambos os casos (torção de empenamento e torção mista) e conseqüentemente as ações de empenamento e torção em nós rígidos.

A resistência a torção de uma estrutura de seção I é devida principalmente à rigidez a torção das mesas e à rigidez a flexão da alma.

A resistência a torção de uma viga I pode ser marcadamente aumentada através da colocação de placas rígidas perpendiculares à alma ou de almas adicionais entre as extremidades das mesas do nó.

III.2 EMPENAMENTO E TORÇÃO DE PEÇAS DE SEÇÃO I

III.2.1 - Empenamento

Uma viga duplo tê, quando submetida a torção, Figura III.2, empena-se. Os deslocamentos de empenamento variam linearmente em cada face em sua largura. Invocando-se a equação (II.21) escreve-se:

$$u = - \omega \frac{d\phi}{dx}$$

o máximo valor de ω para a seção duplo tê é:

$$\omega_{\max} = \frac{h}{2} \frac{b}{2}$$

logo

$$u_{\max} = \frac{-hb}{4} \frac{d\phi}{dx} \quad (\text{III.5})$$

onde

h = distância entre os eixos das mesas

b = largura da mesa

A fibra central da mesa, distante $\frac{h}{2}$ do eixo x tornar-se-á inclinada em relação ao eixo x de ângulo θ . A linha média da mesa girará também com relação ao eixo Z , conforme Figura III.2.

$$\theta_{\omega} = \frac{h}{2} \frac{d\phi}{dx} \quad (\text{III.6})$$

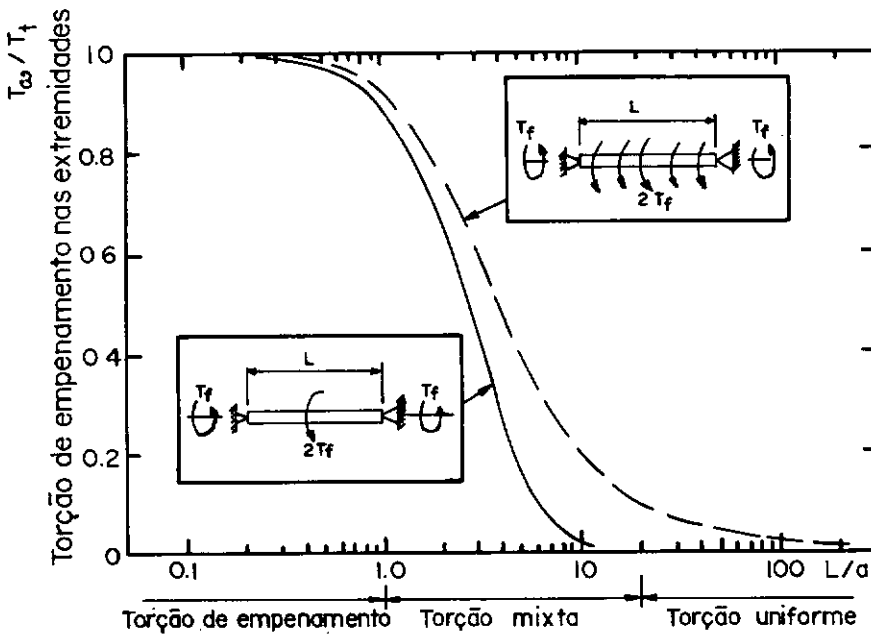


Figura III.4 - Comportamento do tipo de torção

Quando o ângulo de giro varia ao longo da viga na razão $\frac{d\phi}{dx}$, surge um momento fletor em cada mesa, em oposição a este giro, determinando um bimomento.

Admitindo que os deslocamentos são pequenos e que não há apreciável torção no plano da seção, o deslocamento lateral de cada mesa é

$$W = \phi \frac{h}{2} \quad (\text{III.7})$$

logo

$$M = E I_f \frac{d^2 W}{dx^2} \cong E I_f \frac{h}{2} \frac{d^2 \phi}{dx^2} \quad (\text{III.8})$$

Considerando-se que o momento de inércia de uma mesa é aproximadamente igual à metade do total da seção,

$$M = EI_y \frac{h}{4} \frac{d^2 \phi}{dx^2} \quad (\text{III.9})$$

onde

EI_y = menor rigidez axial a flexão

Estando as mesas da viga, na extremidade $x = L$, rigidamente ligadas a elementos que impeçam o empenamento, então esses elementos originam momentos fletores nas mesas nesta extremidade que são proporcionais à rotação de extremidade das mesas, $\theta_{\omega L}$,

$$M_{\omega L} = - K \theta_{\omega L} \quad (\text{III.10})$$

sendo

K = rigidez elástica rotacional de cada elemento restringente

Substituindo as equações (III.6) e (III.9) na equação (III.10):

$$\left(\frac{d^2 \phi}{dx^2} \right)_L = - K \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_L \quad (\text{III.11})$$

com
$$K = \frac{2 k}{h EI_Y} \quad (\text{III.12})$$

e

K = rigidez de restrição ao empenamento.

A equação (III.11) expressa a condição de restrição ao empenamento.

A eficiência da restrição ao empenamento depende de ambas as rigidezes restringentes KL e a importância relativa da torção de empenamento é medida pela relação $\frac{L}{a}$ (Equação III.4.e Figura III.4). Isto é demonstrado na Figura III.5 a qual mostra a variação da rotação de extremidade da mesa, $\theta_{\omega 1}$, com empenamento restringido e a rotação de extremidade máxima, $\theta_{\omega Lm\acute{a}x}$, que ocorre quando não há restrição ao empenamento ($K=0$).

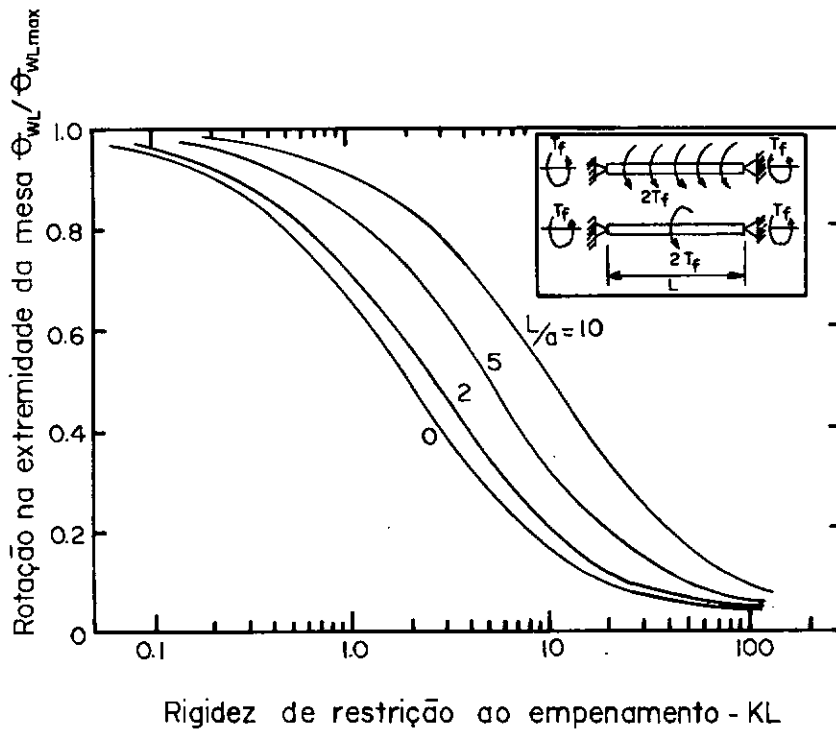
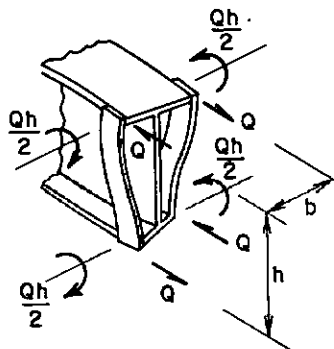
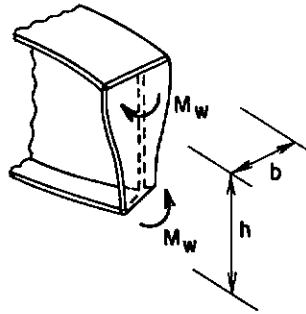


Figura III.5 - Eficiência da restrição ao empenamento

A resistência ao empenamento pode ser significativamente aumentada, fixando-se alma ou almas adicionais às mesas, conforme Figura III.6.



a) Chapa adicional



b) Alma adicional

Figura III.6 (a) - chapa rígida adicional

(b) - alma rígida adicional

III.2.2 - Torção

A dupla simetria da viga em duplo-tê mostrado na Figura III.7, está submetida a dois momentos iguais e opostos, M_d , atuando sobre o eixo longitudinal das mesas.

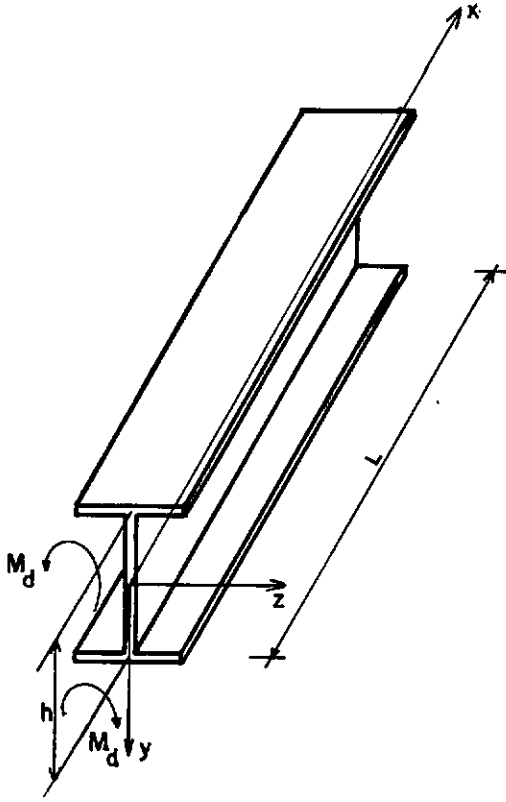


Figura III.7(a) - Viga I com momentos de torção

Esses momentos provocam um deslocamento w na alma, Figura III.7(b) e uma rotação das mesas

$$\theta = - \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=h/2} \quad (\text{III.13})$$

sobre o eixo central, tal que

$$(w)_{y=h/2} = 0 \quad (\text{III.14})$$

então, o momento torsor na mesa é

$$T_f = - G I_f \frac{d\theta}{dx} \quad (\text{III.15})$$

onde

GI_f = rigidez de torção da mesa

Na união da alma com as mesas surge um momento fletor por unidade de comprimento devido ao deslocamento u

$$\frac{dM}{dx} = - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right]_{y=h/2} \quad (\text{III.16})$$

sendo

D_u = rigidez a flexão da alma

ν = coeficiente de Poisson

Tomando-se um comprimento δ_x de uma das mesas da viga, Figura (III.7.c), e estabelecido o equilíbrio tem-se que a variação do momento torsor na mesa deve ser igual ao momento exercido pela alma.

$$G I_f \frac{d^2 \theta}{dx^2} + D_u \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right]_{y=h/2} = 0 \quad (\text{III.17})$$

Na extremidade carregada ($X=0$), o momento torsor na mesa é igual ao momento de torção aplicado

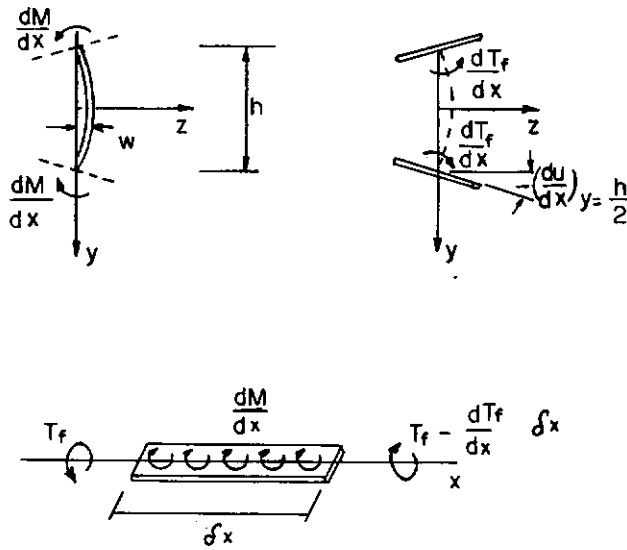


Figura III.7(b) - Torção da alma e rotação da mesa

(c) - Equilíbrio de um elemento de mesa

$$- G I_f \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_0 = M_d \quad (\text{III.18})$$

Se a extremidade oposta da viga, ($X=L$) é totalmente res-
tringida, então a rotação da mesa é zero.

$$(\theta)_L = 0 \quad (\text{III.19})$$

Admitindo que o deslocamento w da alma é

$$w = \frac{h\theta}{4} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right) \quad (\text{III.20})$$

que satisfaz às equações (III.13) e (III.14). Substituindo na equação (III.17),

$$G I_f \frac{d^2 \theta}{dx^2} + D_u \left(-\frac{2\theta}{h} \right) = 0 \quad (\text{III.21})$$

ou

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - B^2 \theta = 0 \quad (\text{III.21.a})$$

com

$$B^2 = \frac{2 D_u}{h G I_f} \quad (\text{III.22})$$

e tem como solução

$$\theta = C_1 \operatorname{ch} Bx + C_2 \operatorname{sh} Bx$$

a qual deve satisfazer às condições de contorno, equações (III.18) e (III.19), donde

$$\frac{d\theta}{dx} = C_1 B \operatorname{sh} Bx + C_2 B \operatorname{ch} Bx$$

$$-\frac{M_D}{G I_f} = C_1 B \operatorname{sh} 0 + B C_2 \operatorname{ch} 0$$

$$C_2 = \frac{-M_D}{B G I_f}$$

e substituindo em (III.19), temos

$$0 = C_1 \operatorname{ch} BL + C_2 \operatorname{sh} BL$$

$$0 = C_1 \operatorname{ch} BL + \left(\frac{-M_D}{BGI_f} \right) \operatorname{sh} BL$$

$$C_1 = \frac{M_D}{BGI_f} \operatorname{tgh} BL$$

donde

$$\theta = \frac{M_D}{BGI_f} (\operatorname{tg} h BL \operatorname{ch} Bx - \operatorname{sh} Bx) \quad (\text{III.23})$$

portanto, a rigidez a torção pode ser expressada como

$$\frac{M_D}{\theta_d} = G I_f B \operatorname{ctgh} BL \quad (\text{III.24})$$

Isto pode ser aproximado (com um erro menor que 10% quando $BL > 1,5$ aproximadamente) por:

$$\frac{M_d}{\theta_d} = \sqrt{\frac{2D_u G I_f}{h}} \quad (\text{III.25})$$

A resistência a torção pode ser significativamente au

mentada pela colocação de chapa ou chapas conforme Figura(III.6). As almas adicionais [Figura III.6(a)] geram forças em seus próprios planos que resistem aos momentos de torção M_d . Se as rigidezes a flexão dessas almas adicionais não são consideradas por serem pequenas comparadas com sua rigidez axial, então a resistência total a torção é:

$$- GI_f \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_0 + \frac{EA_p b^2}{h} (\theta)_0 = M_d \quad (III.26)$$

Sendo assim, a equação III.25 para a rigidez a torção torna-se:

$$\frac{M_d}{\theta_d} = \sqrt{\frac{2D_u G I_f}{h}} + \frac{EA_p b^2}{h} \quad (III.27)$$

Com almas rígidas tais como aquelas mostrada na Figura (III.6(b)), então a rigidez a flexão, EI_p , fornece momentos restringentes. A resistência total a torção neste caso é então

$$- GI_f \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_0 + \frac{2 EI_p}{h} (\theta)_0 = M_d \quad (III.28)$$

e a expressão da rigidez a torção torna-se

$$\frac{M_d}{\theta_d} = \sqrt{\frac{2 D_u G I_f}{h}} + \frac{2E I_p}{h} \quad (III.29)$$

O segundo termo do lado direito das Equações (III.27)e (III.29) são geralmente muito maior do que o primeiro termo e a

colocação de qualquer alma adicional é geralmente suficiente para impedir a torção.

III.3 TORÇÃO E EMPENAMENTO EM NÓS

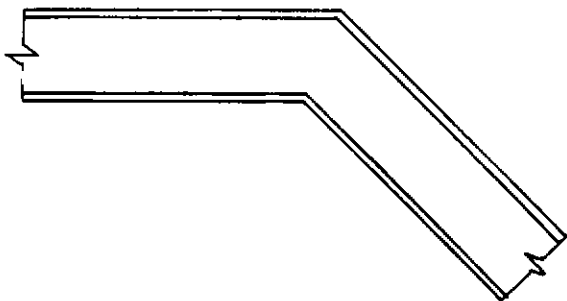
III.3.1 - Generalidades

O empenamento de uma peça de seção I, de um nó rígido numa estrutura é restringido pela outra peça e por qualquer rigidez proporcionada pelo nó. Para o caso particular de um nó com pouca rigidez, de ângulo reto, (Figura III.1) o empenamento é restringido pela resistência a torção da outra peça.

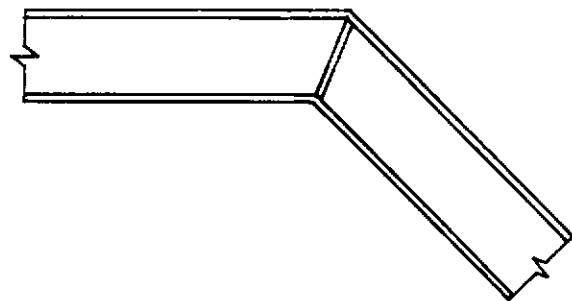
III.3.2 - Classificação de Nós

No presente trabalho os nós são classificados de acordo com suas rigidezes, (Figura III.8), ou seja:

- A - sem rigidez adicional
- B - um par de rigidez adicional
- C - dois pares de rigidez adicional
- D - três pares de rigidez adicional



(a)



(b)

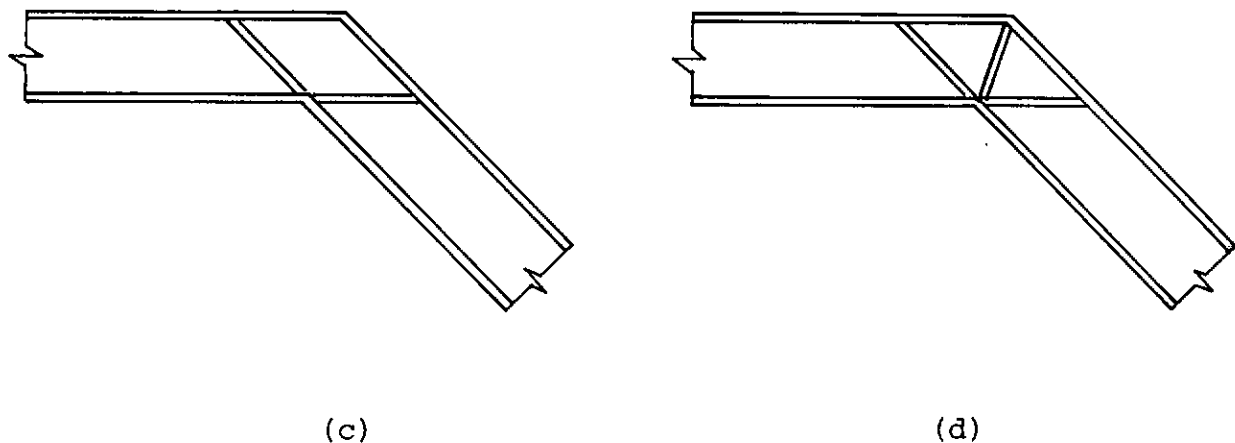


Figura III.9 - Combinação de rigidezes nodais. (a) Tipo A
(b) Tipo B, (c) Tipo C, (d) Tipo D

Seja o nó mostrado na Figura (III.10), que é composta de duas peças iguais, de seção I, AB e BC, rigidamente conectados em B. As características da seção são dadas na Figura (III.8). O comprimento das peças $AB = BC = L$ varia de $2,5 h$ a $8,5 h$ enquanto que o ângulo α varia de 60° a 150° . Em todos os casos as rigidezes adicionais são solidamente ligadas às mesas e à alma, sendo que a espessura e a largura de cada par de rigidez é igual à das mesas.

A extremidade A do nó é simplesmente apoiada, sendo livre ao empenamento mas impede a torção. O ponto médio B está apoiado. A carga aplicada em C, provoca momentos flettores na barra CB e um momento torsor na barra AB. A torção resultante em AB é restringida pela conexão com a barra BC e por qualquer rigidez nodal se houver.

largura mesa $b = 31,54 \text{ mm}$

espessura da mesa $t = 3,11 \text{ mm}$

distância entre eixos das mesas $h = 72,76 \text{ mm}$

espessura da alma $t = 2,13 \text{ mm}$

módulo elasticidade longitudinal $E = 64,750 \text{ MPa}$

módulo elasticidade transversal $G = 26,320 \text{ MPa}$

Figura III.9 - Propriedades da seção transversal

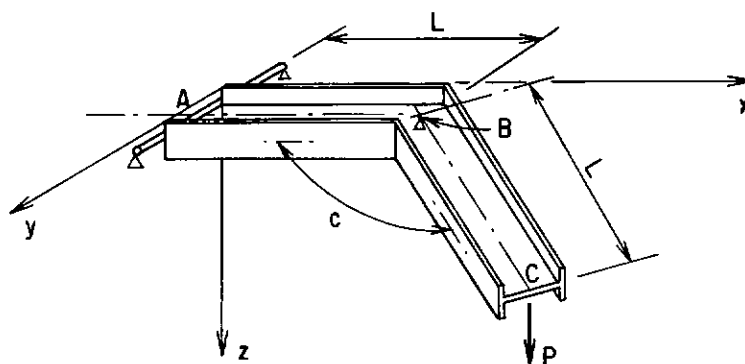


Figura III.10 - NÓ sob carga P.

III.3.3 - Método de Análise de NÓ

Um nó pode ser analisado teoricamente usando-se a convencional teoria de vigas para a flexão e torção de cada mesa e rigidez, em seu plano e o método dos elementos finitos para a flexão e torção transversal das almas ¹⁵.

A alma da peça para análise por elementos finitos é discretizada em elementos retangulares e triangulares não conformes, Figura (III.11).

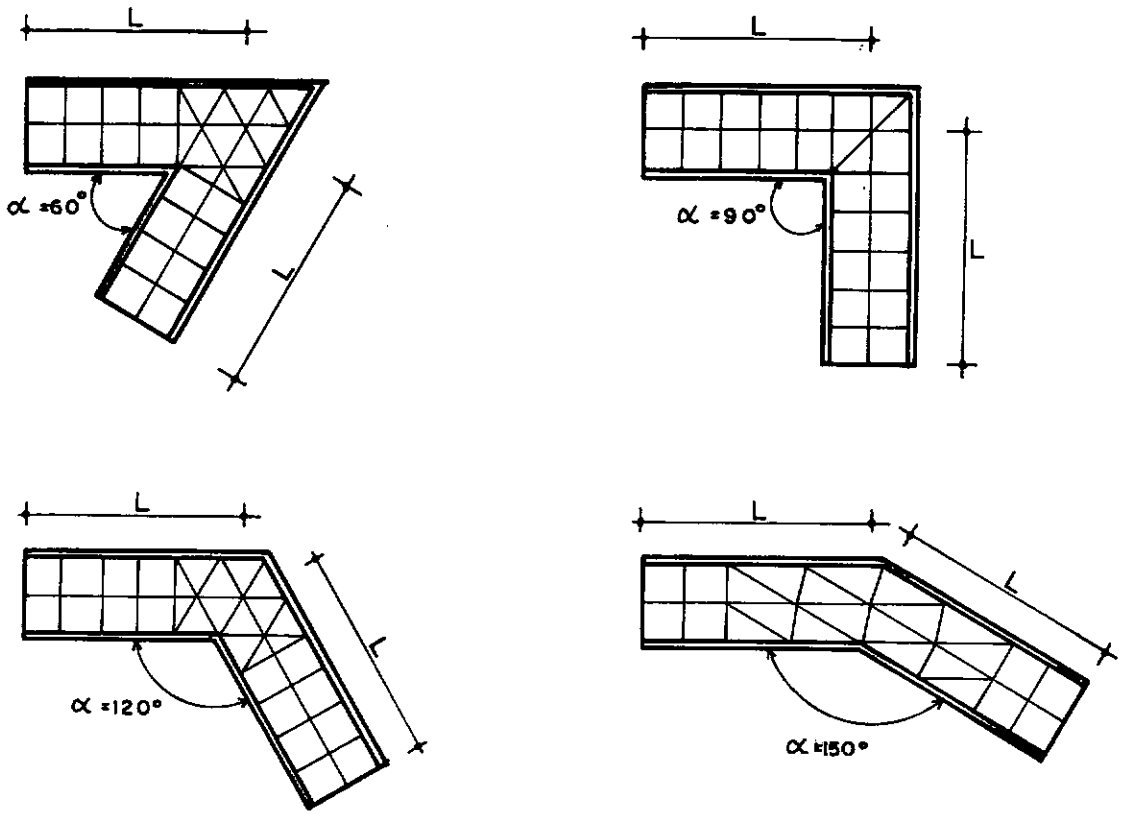


Figura III.11 - Divisão em elementos finitos de nós

O efeito da restrição ao empenamento na torção da peça AB, do nó mostrado na Figura (III.10), pode ser convenientemente expressada em termos da relação $\phi/\phi_{\text{máx}}$, da torção ϕ em B sobre AB e o correspondente valor máximo que ocorre quando não há empenamento restringido.

$$\phi_{\text{max}} = \frac{PL^2 \text{sen}^2\alpha}{GI} \quad (\text{III.30})$$

Valores aproximados de ϕ são obtidos da análise por elementos finitos avaliando em almas rotações nas proximidades de B. Os valores ϕ/ϕ_{max} assim obtidos estão indicados nas Figuras

(III.12) e (III.13), para vários comprimentos de hastes, ângulos nodais e tipos de nós ¹⁵.

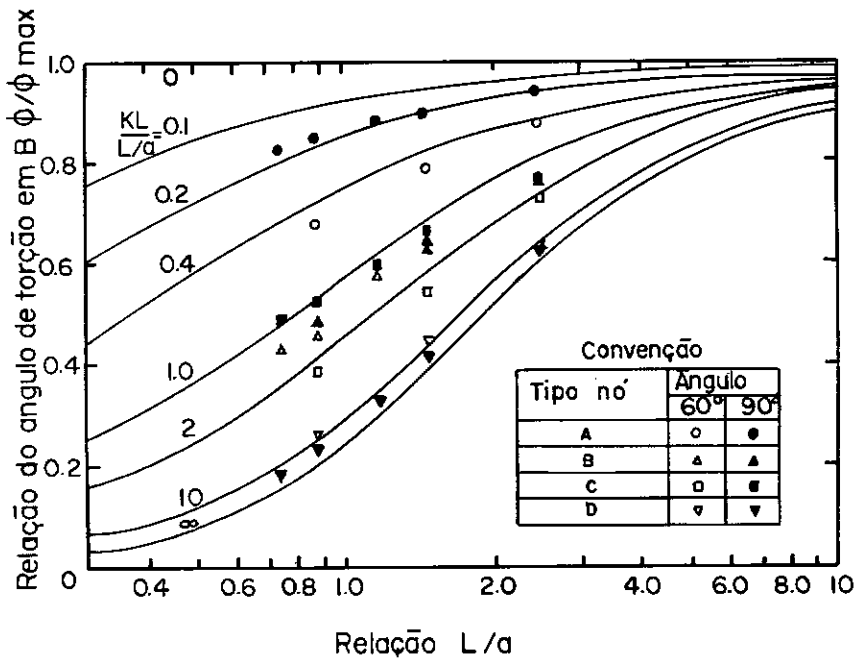


Figura III.12 - Restrição ao empenamento em nós.

Ângulo ($\alpha = 60^\circ, 90^\circ$)

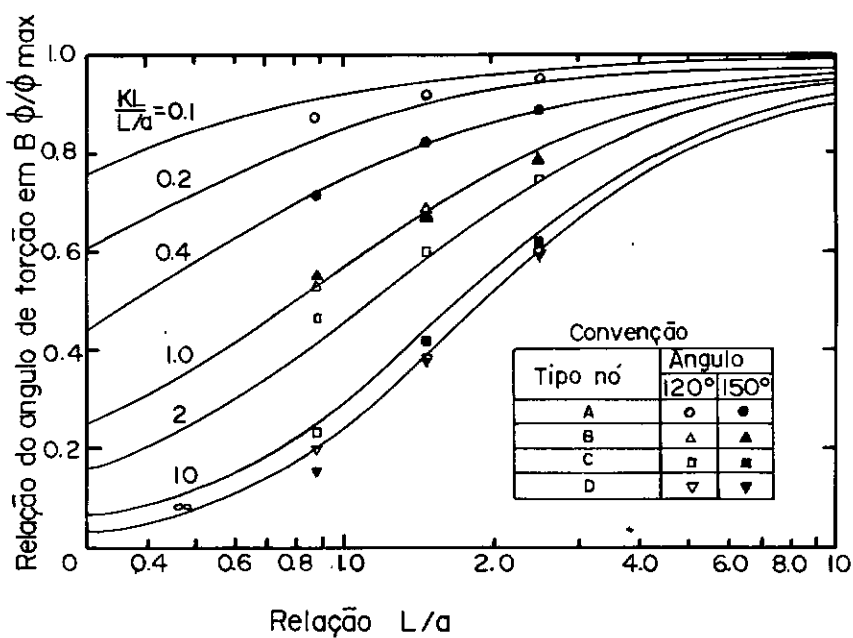


Figura III.13 - Restrição ao empenamento em nós

Ângulo ($\alpha = 120^\circ, 150^\circ$)

Os valores da rigidez de empenamento K , obtida das Figuras (III.12) e (III.13) são independentes do comprimento da peça, L . O valor de K para nós tipo B e tipo D também são praticamente, independentes do ângulo nodal α . Existe entretanto, algumas variações para nós tipo A e principalmente para nós tipo C, onde o aumento da eficiência da rigidez se dá com a diminuição do ângulo entre as hastes.

Fator mais importante no entanto, é a significativa variação de $KL/(L/a)$ com o tipo de nó, e comprova-se um aumento progressivo na restrição ao empenamento substituindo-se nós pouco rígidos (tipo A) por nós mais rígidos (tipo B, C e D).

Os valores de $KL/(L/a)$ para nós de pouca rigidez, são pequenos e isto sustenta a idéia de se ignorar a restrição ao empenamento em tais nós.

Para nós tipo D, os valores de $KL/(L/a)$ são aproximadamente 10 vezes maiores, não sendo exagerado assumirmos que o empenamento é restringido.

III.4 - Cálculo de tensões no interior de nós

As tensões no interior dos nós foram obtidas através de um programa de elementos finitos com refinamento automático desenvolvido por Ribeiro [16]. Utilizou-se um elemento hierárquico de casca poliédrica que considera o acoplamento dos efeitos de estado plano e de flexão. Para os efeitos de flexão, leva-se em conta a teoria de Mindlin.

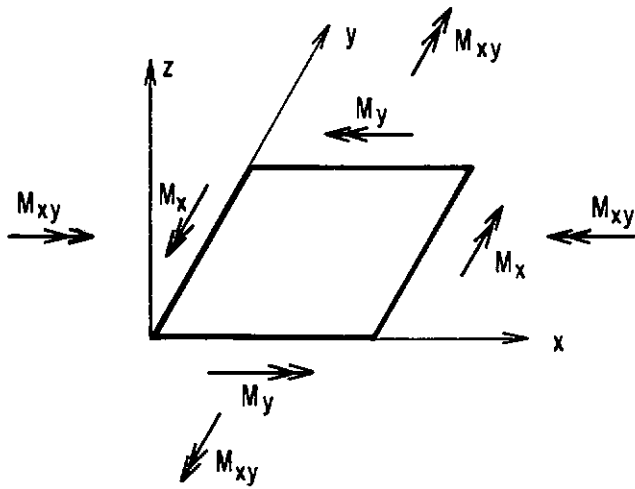


Figura III.14 - Momentos positivos atuantes no elemento.

CAPÍTULO IV

APLICAÇÕES

IV.1 O primeiro exemplo analisado consiste de uma grelha submetida ao carregamento indicado na Figura IV.1. O objetivo deste exemplo é a determinação de tensões no interior do nó, e seu comportamento quando são inseridas rigidezes adicionais de nó tipos B, C e D.

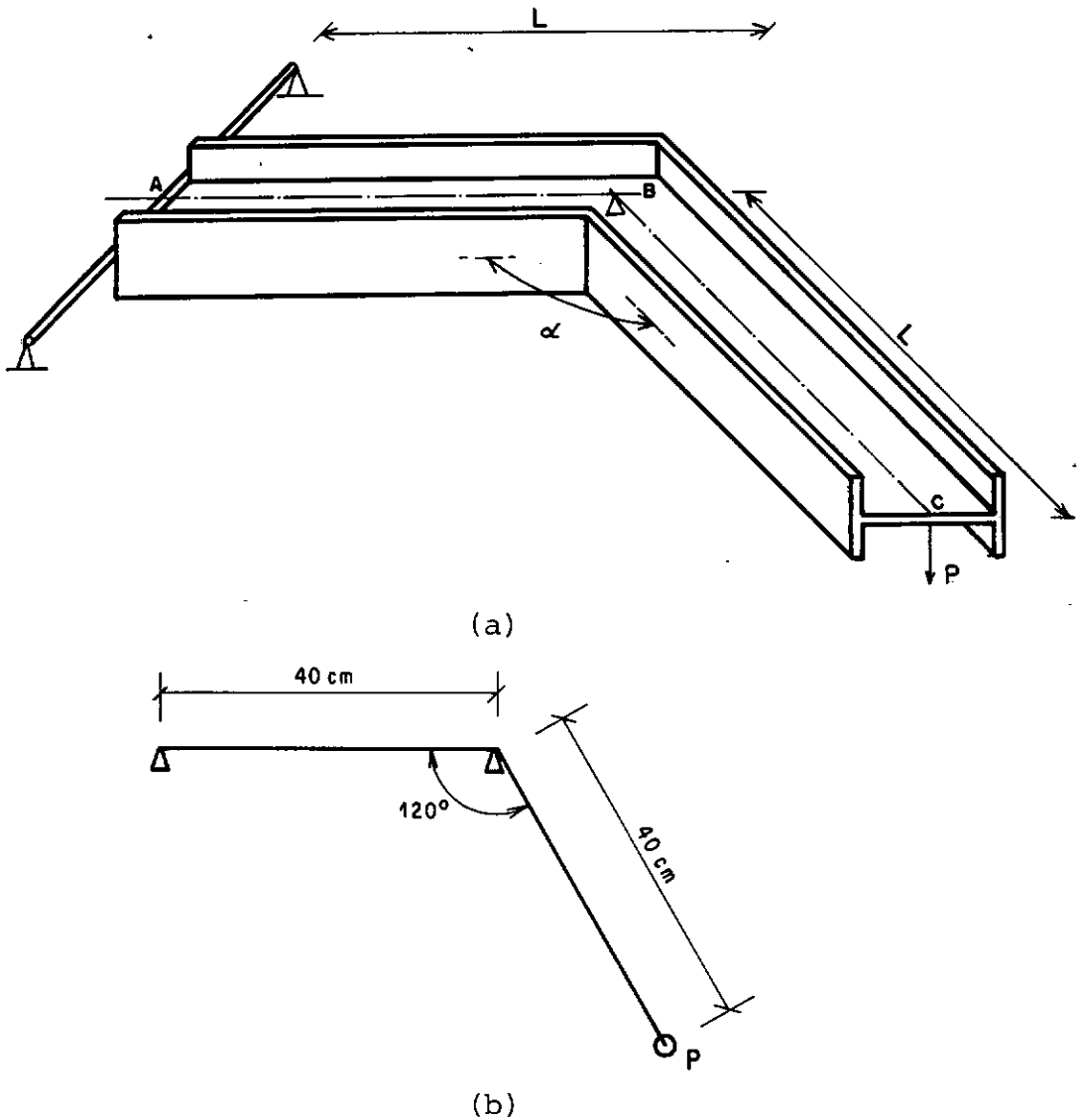


Figura IV.1 - Exemplo 1 - Grelha
 (a) - Estrutura em perspectiva
 (b) - Estrutura em planta

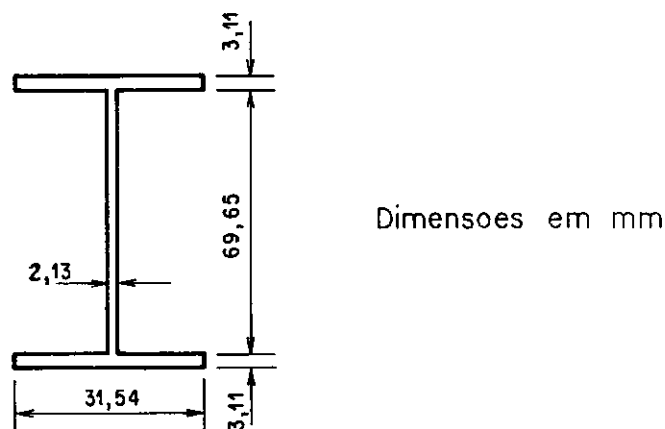


Figura IV.2 - Seção Transversal do Perfil

IV.1.1 - Estrutura sem Rigidez Adicional (Nó Tipo A)

As dimensões da seção transversal do perfil estão indicadas na Figura (IV.2). Os módulos de elasticidade longitudinal e transversal valem $E=641.000 \text{ Kgf/cm}^2$ e $G=260.569 \text{ Kgf/cm}^2$ respectivamente. As rigidezes adicionais são supostas rigidamente ligadas à estrutura original.

Para a análise a estrutura foi discretizada conforme a Figura IV.3.

As tensões resultantes formam as tabelas 1, 2, 3 e seus valores estão esboçados segundo os gráficos 1, 2, 3 e 4.

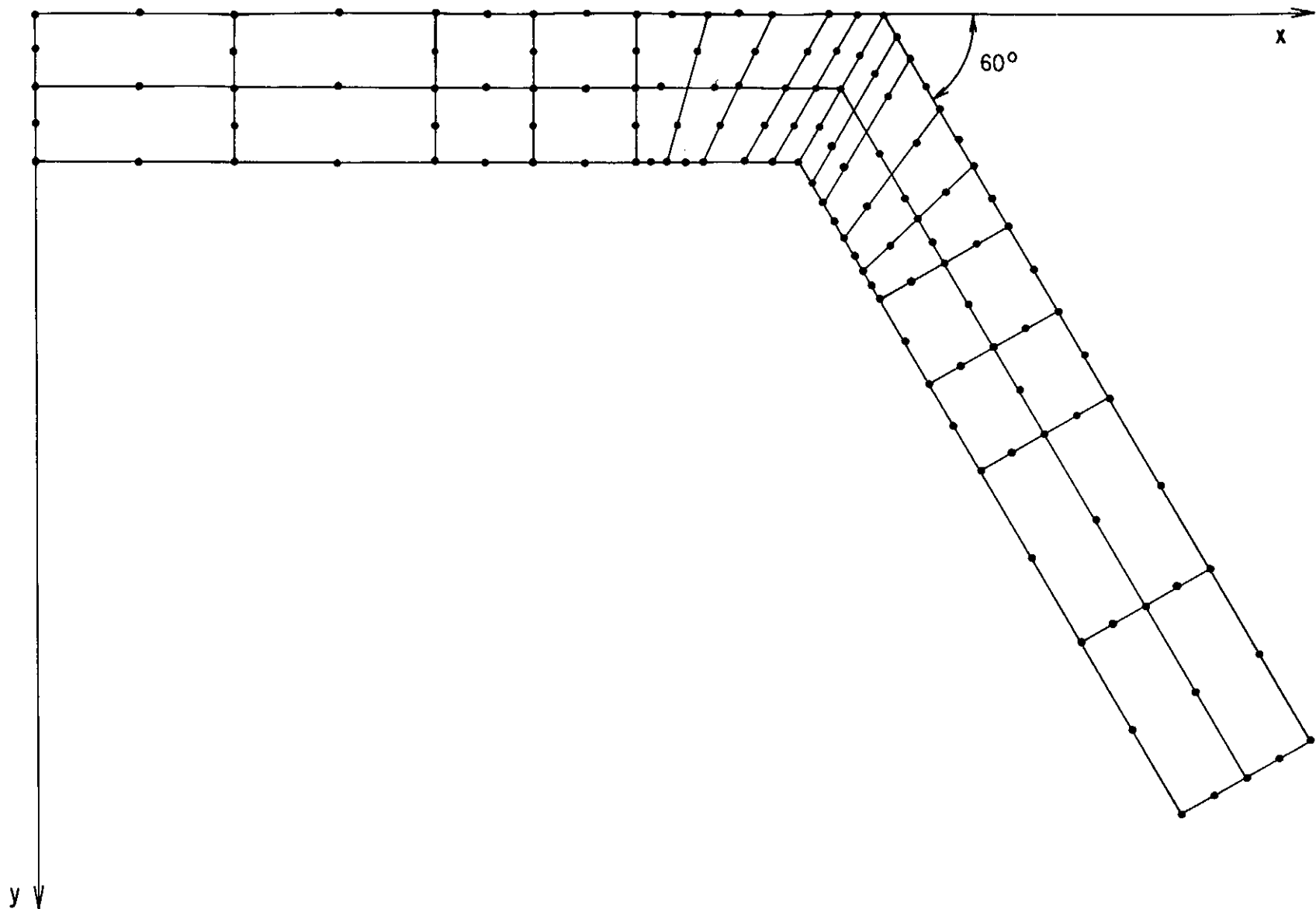


FIGURA IV-3a - DISCRETIZAÇÃO DA ALMA DA ESTRUTURA

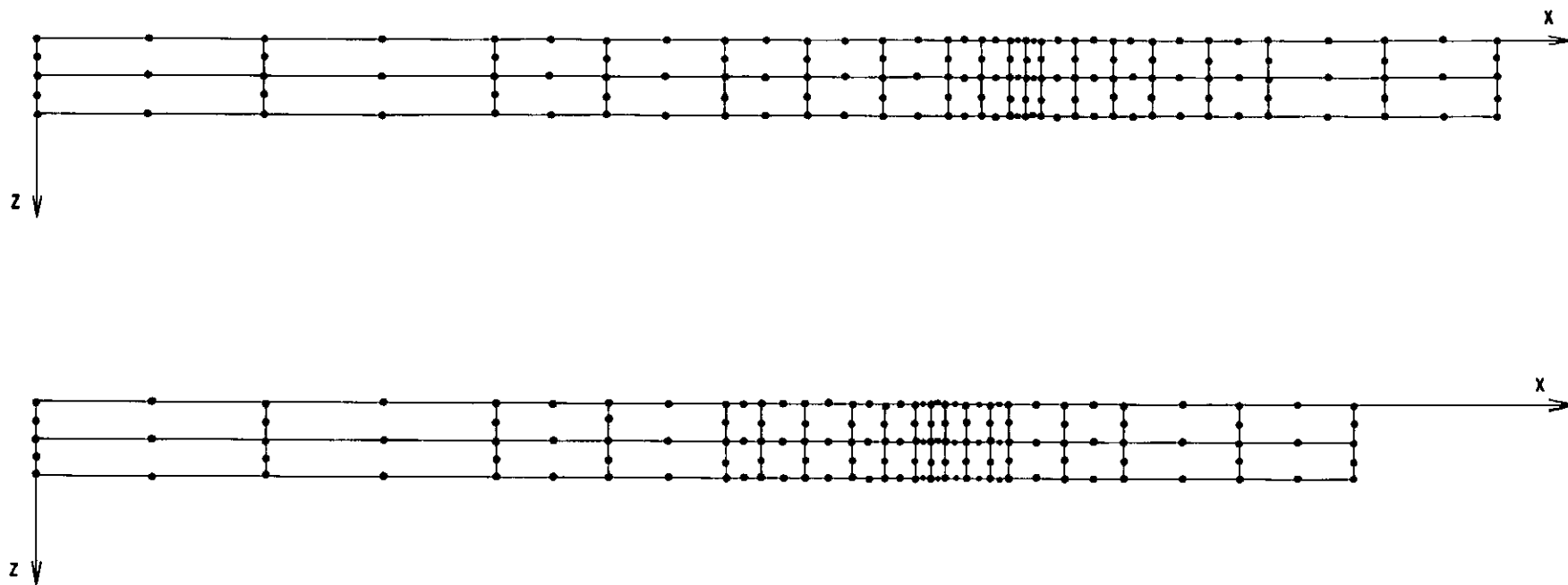


FIGURA IV-3b - DISCRETIZAÇÃO DAS MESAS DA ESTRUTURA

Tabela 1 - Tensões normais (σ_x) na mesa)

X	σ_x
8,87	- 9,9624
18,87	- 14,6198
24,44	- 19,8850
29,44	- 22,9877
33,19	- 24,2245
36,35	- 24,1557
39,27	- 27,0904
40,71	- 58,6137
41,96	- 224,0316
42,66	- 74,1337
43,28	- 32,0677
44,64	- 25,7336
46,31	- 26,4727
47,96	- 25,1974
50,37	- 21,8279
52,87	- 16,1113
57,59	- 8,8738

Tabela 2 - Tensões ao longo da alma.

X	σ_x	σ_y	τ_{xy}
5,00	0,5306	2,4354	81,2109
15,00	0,6939	2,0408	81,2653
22,50	0,4898	0,6667	79,7415
27,50	1,2653	4,2449	79,2517
31,03	2,1633	9,2109	77,2381
33,15	4,1497	14,9116	76,2041
35,35	4,6667	21,1973	75,8000
37,08	0,0136	26,2041	75,7551
38,33	2,2313	42,7891	77,9184
39,30	8,6803	- 86,2450	16,9796
39,89	- 0,3673	- 66,2857	12,4898
40,78	- 6,2041	- 53,7279	13,1701
41,89	- 4,3946	- 40,1361	10,9252
42,93	- 2,5986	- 30,7619	9,1973
44,68	- 2,8980	- 21,6327	7,0340
47,18	- 1,2381	- 11,8776	4,5306
50,93	- 1,2249	- 7,9048	2,9796
55,93	- 2,5034	- 11,9048	- 1,3741

Tabela 3 - Tensões ao longo da mesa

X	σ_x	σ_y	τ_{xy}
5,00	- 4,8250	- 13,4582	- 117,9568
15,00	1,4167	3,0831	- 120,4138
22,50	- 0,0622	- 0,5283	- 119,2205
27,50	- 0,0692	- 0,3208	- 120,5702
30,80	- 1,734	- 1,2533	- 122,2148
32,55	- 1,9657	- 2,0445	- 124,5976
34,45	- 3,6568	- 3,9797	- 128,7173
36,03	- 1,6195	- 0,5786	- 131,6571
37,28	15,2038	6,4863	- 130,0701
38,21	50,5496	11,8489	- 81,5994
38,84	27,6679	8,8547	- 44,0256
39,68	16,8848	5,1839	- 32,5316
40,65	15,3788	4,4378	- 27,8784
41,48	14,3899	2,8807	- 20,8268
43,10	11,1648	1,6676	- 15,4503
45,60	9,3253	1,0070	- 9,5058
49,35	6,0224	0,5845	- 4,2557
54,35	2,3383	0,0394	- 2,4966

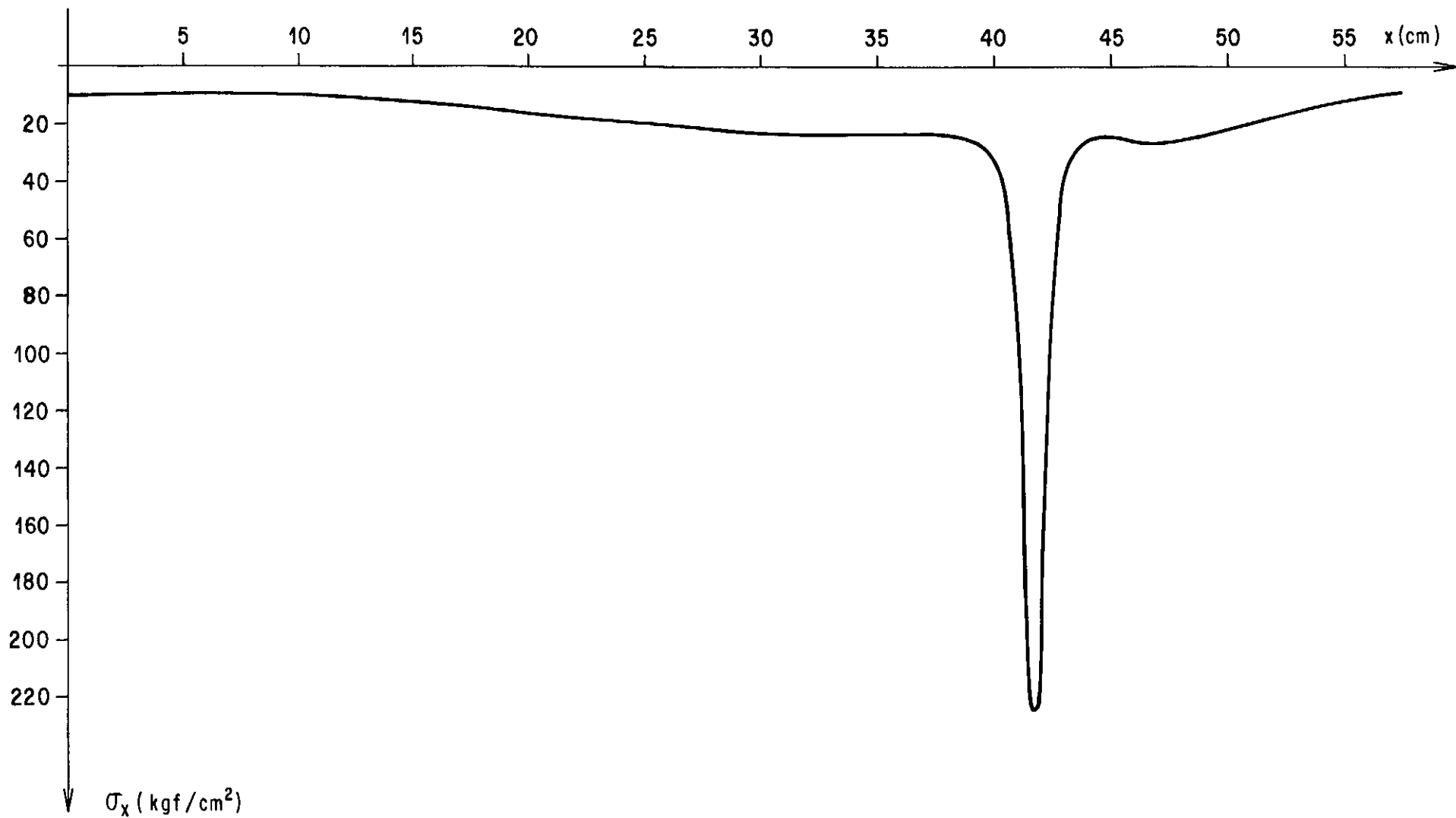


GRÁFICO 1 - NÓ TIPO A - TENSÕES NORMAIS (σ_x) AO LONGO DA MESA

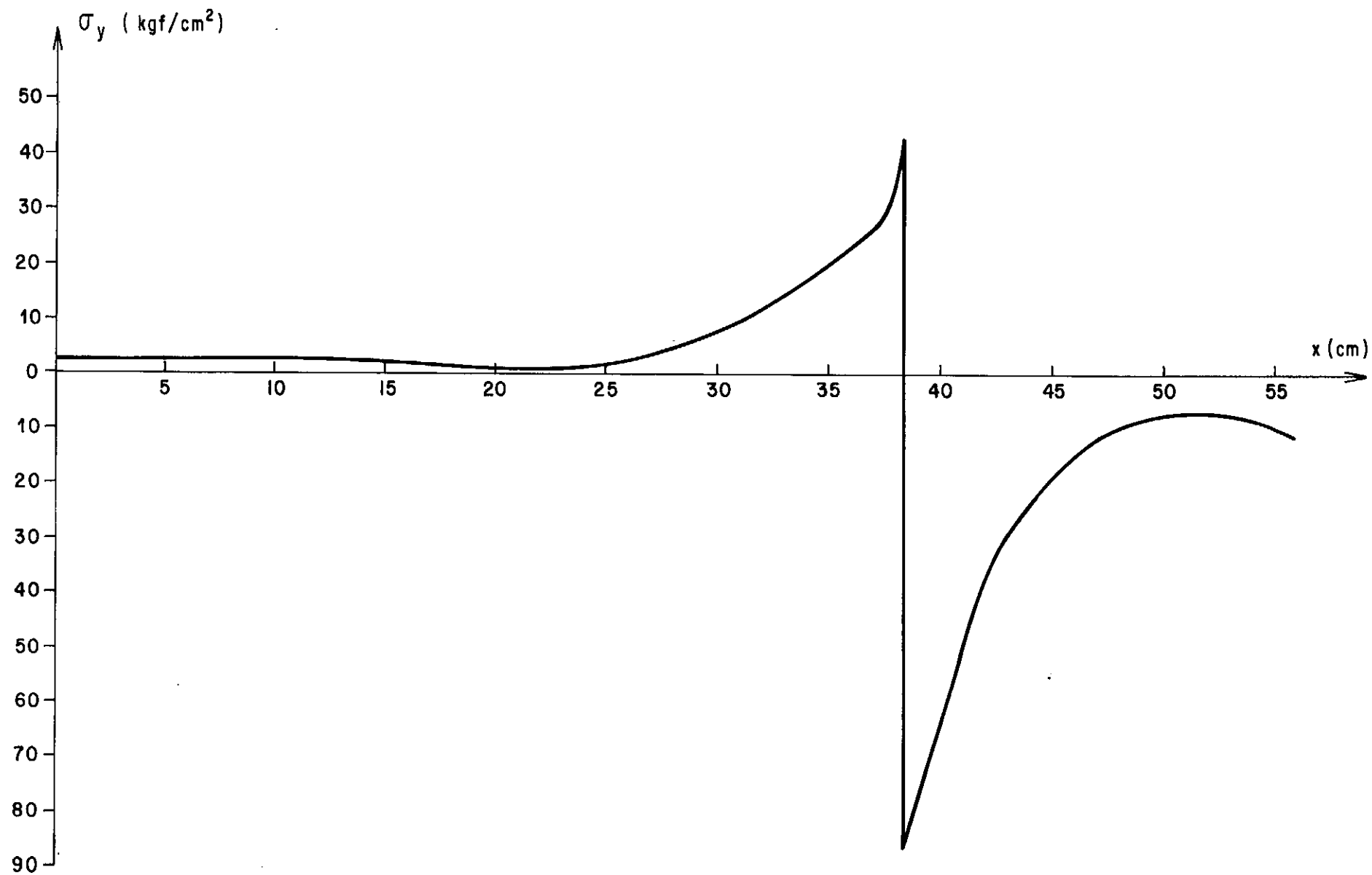


GRÁFICO 2 - NÓ TIPO A - TENSÕES NORMAIS (σ_y) AO LONGO DA ALMA

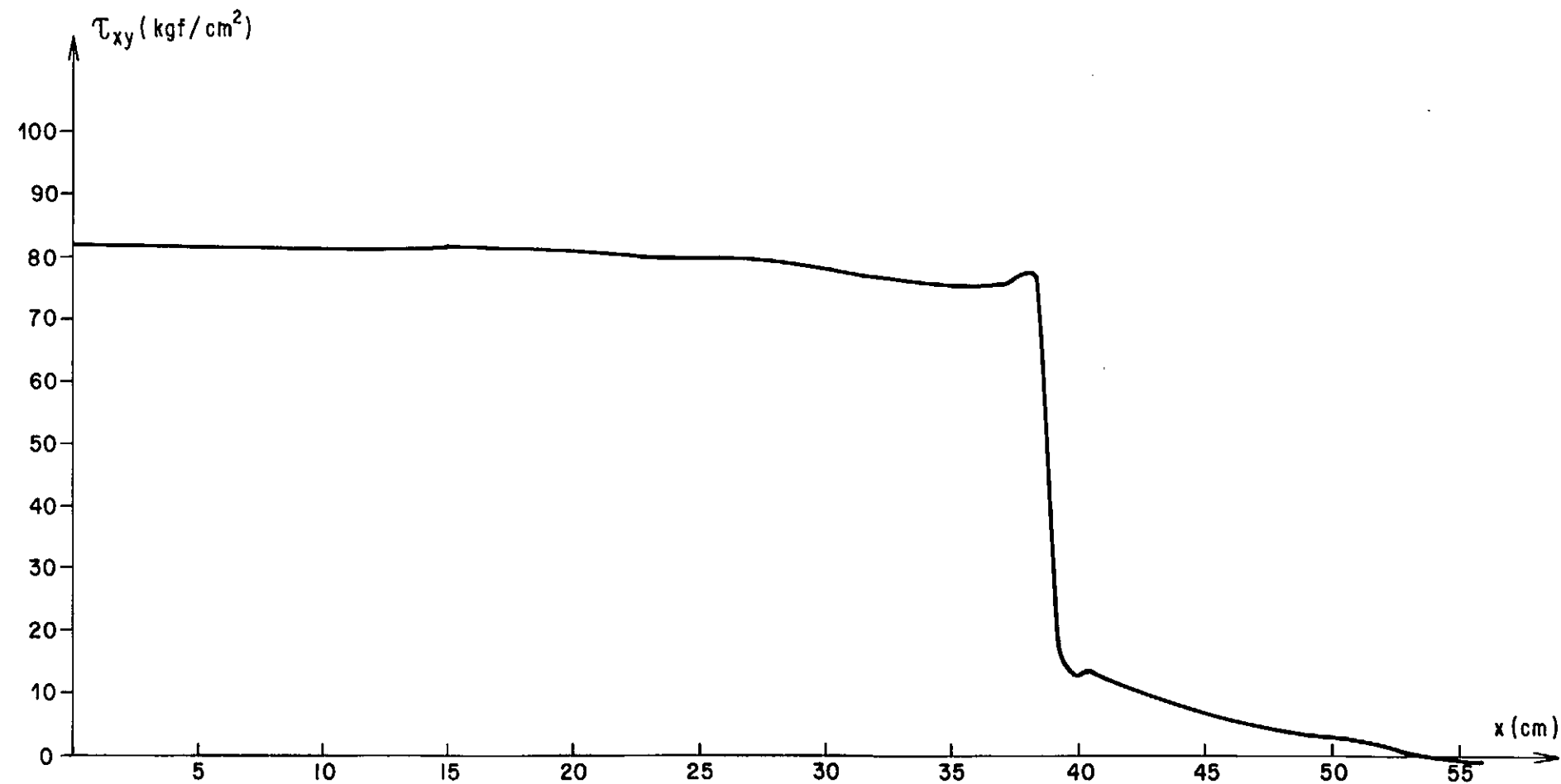


GRÁFICO 3 - NÓ TIPO A - TENSÕES CIZALHANTES (τ_{xy}) AO LONGO DA ALMA

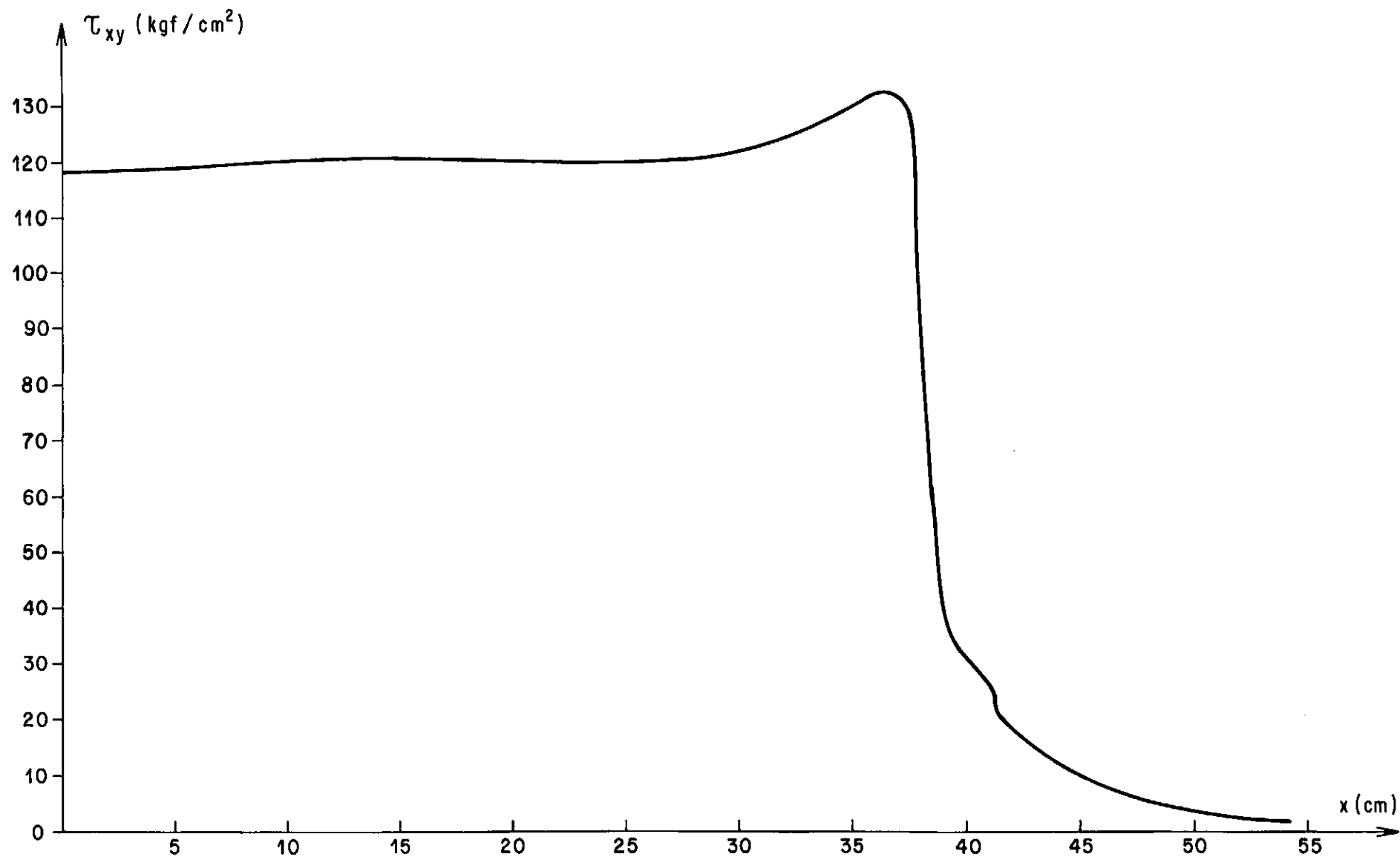


GRÁFICO 4 - NÓ TIPO A - TENSÕES CIZALHANTES (τ_{xy}) AO LONGO DA MESA

IV.1.2 - Um Par de Rigidez Adicional (Nó Tipo B)

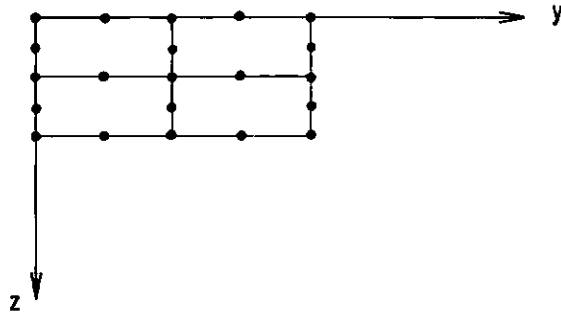


Figura IV.4 - Discretização da Rigidez Adicional
Tipo B

Seus resultados encontram-se nas tabelas 4, 5, 6 e nos gráficos 5, 6, 7 e 8.

Tabela 4 - Tensões normais (σ_x) ao longo da mesa

X	σ_x
8,87	- 20,7820
18,87	- 43,7669
24,44	- 57,6491
29,44	- 74,5444
33,19	- 85,2979
36,35	- 95,4745
39,27	- 106,8820
40,71	- 123,5385
41,96	- 198,9769
42,66	- 95,3506
43,28	- 95,8876
44,64	- 88,9194
46,31	- 76,9284
47,96	- 66,8629
50,37	- 53,8344
52,87	- 40,3489
57,59	- 21,9531

Tabela 5 - Tensões ao longo da alma

X	σ_x	σ_y	τ_{xy}
5,00	- 0,4082	- 0,6259	- 67,9592
15,00	- 0,1496	1,7143	- 65,7959
22,50	- 0,9932	0,3946	- 61,6190
27,50	0,2857	8,5578	- 58,8027
31,03	1,6463	18,0816	- 55,5782
33,15	4,6122	29,3197	- 53,6054
35,35	7,9728	40,9660	- 51,3469
37,08	7,2381	44,3129	- 49,1293
38,33	3,7415	52,5578	- 47,8912
39,30	0,4218	- 56,6531	- 36,5850
39,89	- 4,6259	- 45,6327	- 35,7551
40,78	- 7,2381	- 41,9456	- 32,6803
41,89	- 6,0680	- 34,3129	- 29,0748
42,93	- 3,9048	- 27,2789	- 26,8571
44,68	- 3,9320	- 19,4830	- 23,8776
47,18	- 2,0136	- 10,7483	- 19,8639
50,93	- 2,2177	- 9,5782	- 16,2041
55,93	- 5,2517	- 22,5442	- 11,0612

Tabela 6 - Tensões ao longo da mesa

X	σ_x	σ_y	τ_{xy}
5,00	- 7,1359	- 10,7496	- 96,7640
15,00	- 9,8169	2,8833	- 99,0313
22,50	- 17,8089	0,4570	- 93,4929
27,50	- 23,4377	0,1816	- 93,7000
30,80	- 29,8957	0,9832	- 94,1580
32,55	- 32,4965	- 1,9069	- 96,7013
34,45	- 36,3437	- 3,649	- 100,2608
36,03	- 33,7300	- 0,8534	- 101,7862
37,28	4,4184	9,7366	- 79,6018
38,21	- 38,8342	- 5,0537	- 58,2117
38,84	- 10,6878	4,0379	- 65,3173
39,68	- 8,2651	5,8725	- 58,1378
40,65	- 7,2753	5,0444	- 52,7143
41,48	- 6,5222	3,4917	- 45,6205
43,10	- 6,3170	2,2825	- 38,9403
45,60	- 4,0896	1,5387	- 31,1339
49,35	- 1,8933	0,7733	- 23,2316
54,35	0,6459	1,8231	- 11,2166

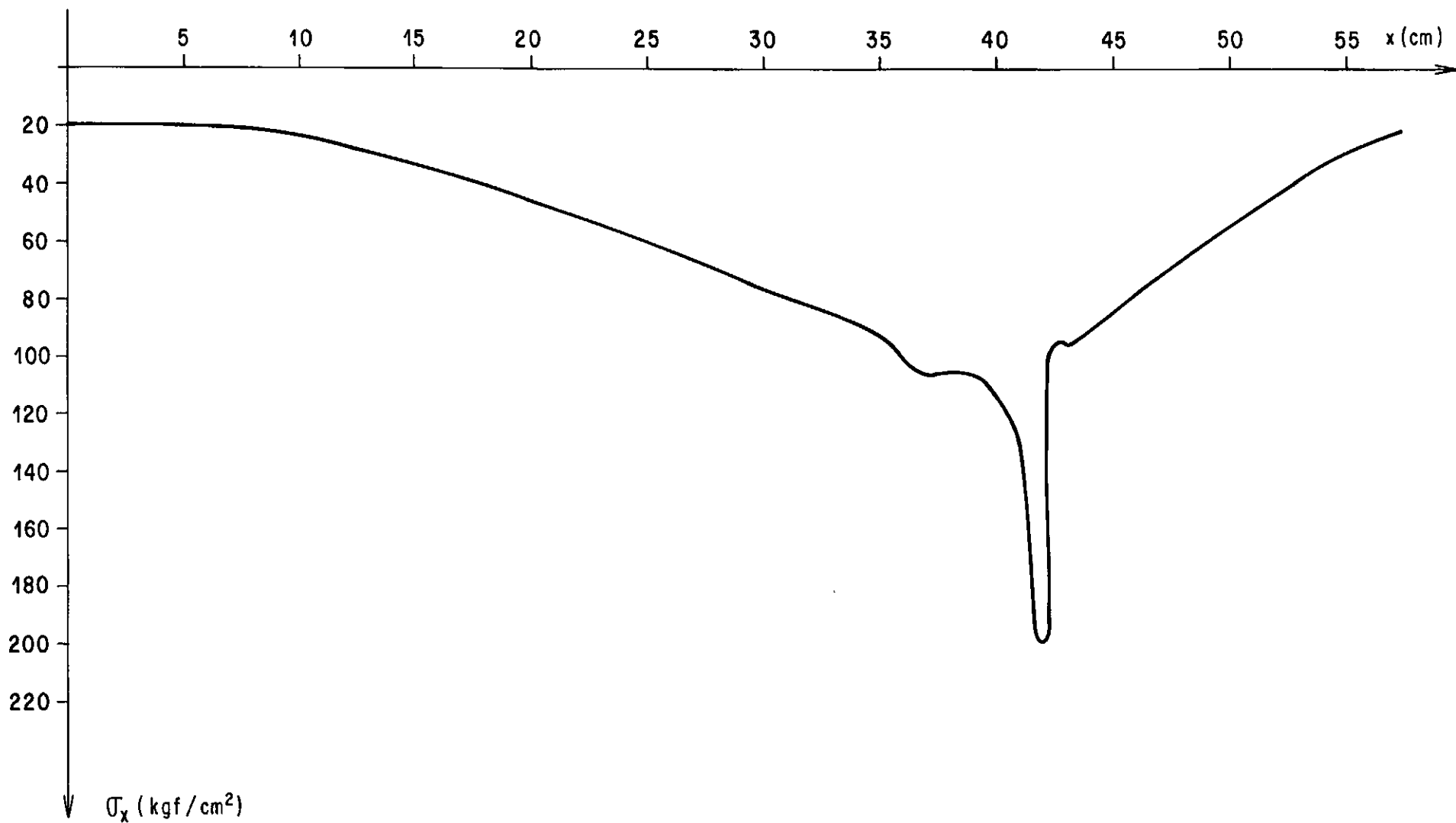


GRÁFICO 5 - NÓ TIPO B - TENSÕES NORMAIS (σ_x) AO LONGO DA MESA

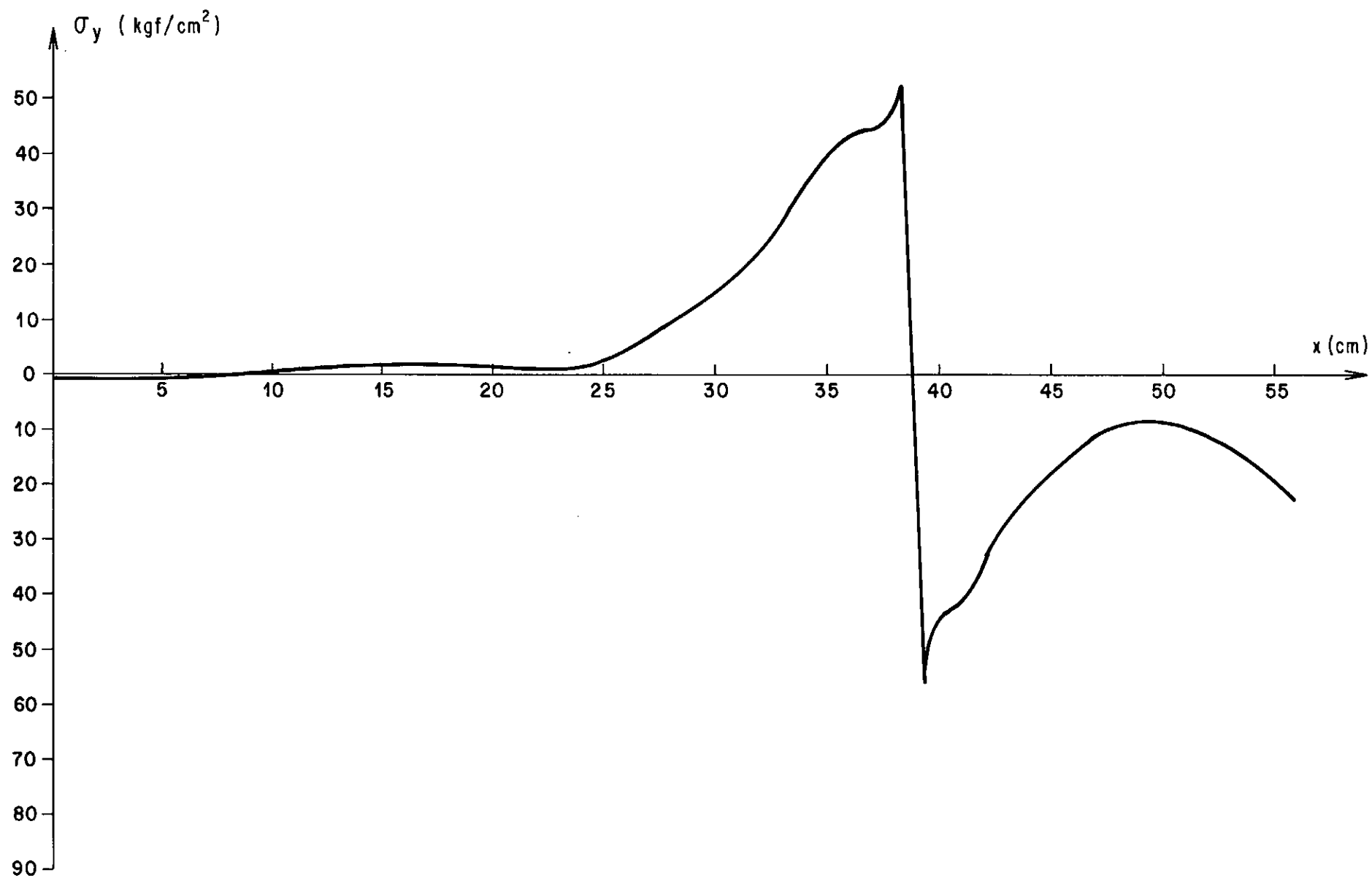


GRÁFICO 6 - NÓ TIPO B - TENSÕES NORMAIS (σ_y) AO LONGO DA ALMA

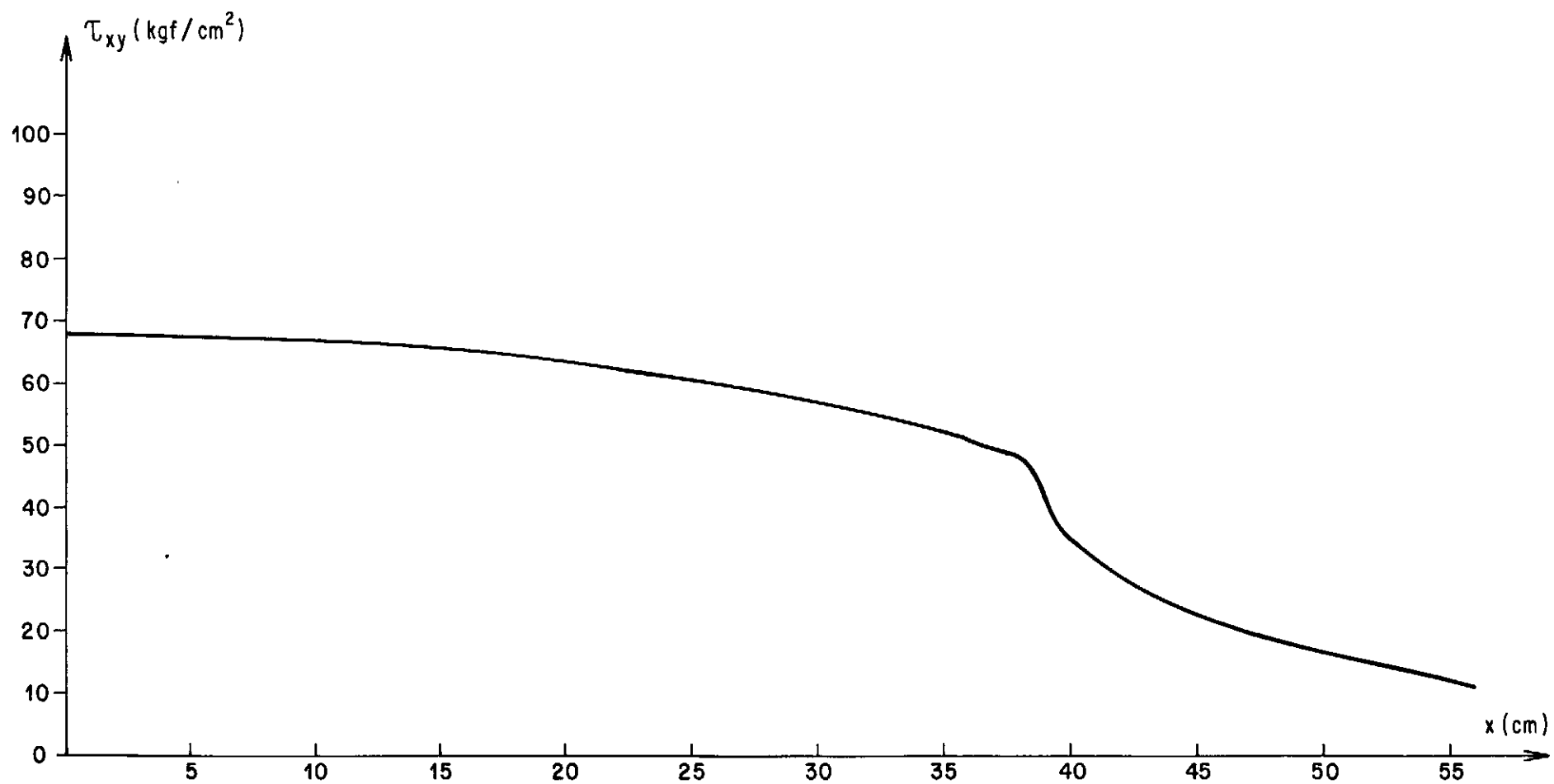


GRÁFICO 7 - NÓ TIPO B - TENSÕES CIZALHANTES (τ_{xy}) AO LONGO DA ALMA

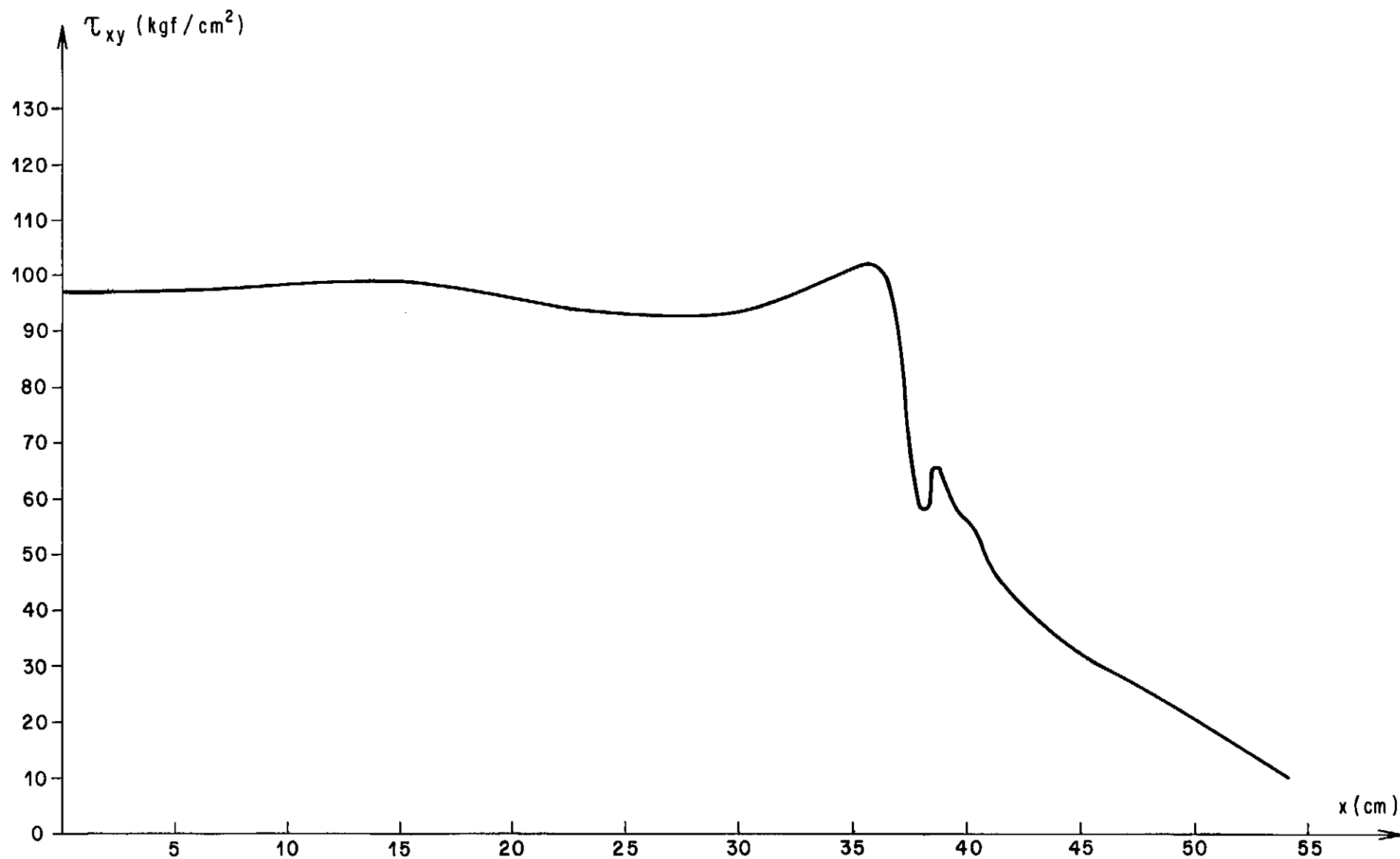


GRÁFICO 8 - NÓ TIPO B - TENSÕES CIZALHANTES (τ_{xy}) AO LONGO DA MESA

IV.1.3 - Dois Pares de Rigidez Adicional (Tipo C)

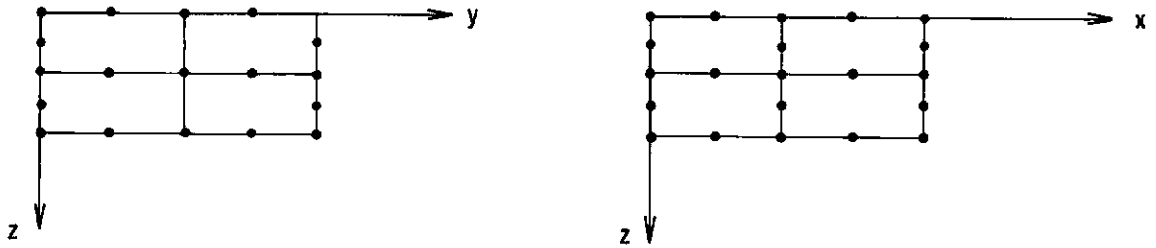


Figura IV.5 - Discretização da Rigidez Adicional
Tipo C

As tabelas 7, 8, 9 e os Gráficos 9, 10, 11 e 12 mostram o comportamento das tensões.

Tabela 7 - Tensões normais na mesa da estrutura

X	σ_x
8,87	- 9,0512
18,87	- 15,4745
24,44	- 18,6780
29,44	- 23,9000
33,19	- 24,7462
36,35	- 24,5448
39,27	- 27,3925
40,71	- 58,2725
41,96	- 223,6159
42,66	- 74,3273
43,28	- 31,9259
44,64	- 25,1845
46,31	- 25,6955
47,96	- 24,3993
50,37	- 20,9612
52,87	- 15,3565
57,59	- 8,4794

Tabela 8 - Tensões ao longo da alma

X	σ_x	σ_y	τ_{xy}
5,00	- 0,1088	- 0,2585	80,7211
15,00	1,0204	3,6327	80,7347
22,50	0,3946	0,6667	79,1293
27,50	1,8095	5,7823	78,6667
31,03	3,0476	13,2789	76,3810
33,15	6,0272	20,2721	75,0884
35,35	6,7891	25,5374	74,0408
37,08	1,8503	26,8980	74,6258
38,33	- 3,1429	39,1701	75,8503
39,30	10,3673	- 82,5442	14,7891
39,89	- 2,2585	- 67,8231	11,6327
40,78	- 8,1905	- 58,1497	11,6597
41,89	- 6,3673	- 45,2653	10,3810
42,93	- 3,4014	- 34,3401	8,9796
44,68	- 3,3605	- 23,5646	6,8299
47,18	- 1,4286	- 12,6122	4,2449
50,93	- 1,3469	- 8,1088	2,7075
55,93	- 2,5170	- 11,6327	- 1,9184

Tabela 9 - Tensões ao longo da mesa

X	σ_x	σ_y	τ_{xy}
5,00	- 4,5143	- 13,0628	- 114,6724
15,00	0,9807	2,6755	- 120,4053
22,50	- 0,8882	- 0,3005	- 117,6744
27,50	- 0,3677	- 0,5611	- 120,6209
30,80	- 2,8350	- 1,5220	- 122,7872
32,55	- 3,0085	- 2,5420	- 125,9312
34,45	- 4,3771	- 4,6162	- 130,4569
36,03	2,8172	- 1,1247	- 131,6434
37,28	51,5621	13,5293	- 103,7722
38,21	15,3260	0,9211	- 52,9704
38,84	23,4566	8,2197	- 43,8078
39,68	17,6931	5,8893	- 34,3141
40,65	16,4287	4,8758	- 29,1608
41,48	15,3437	3,2109	- 21,5373
43,10	11,7008	1,8309	- 15,6504
45,60	9,5626	1,0335	- 9,2447
49,35	6,2386	0,5880	- 3,8059
54,35	2,3806	- 0,0077	1,6708

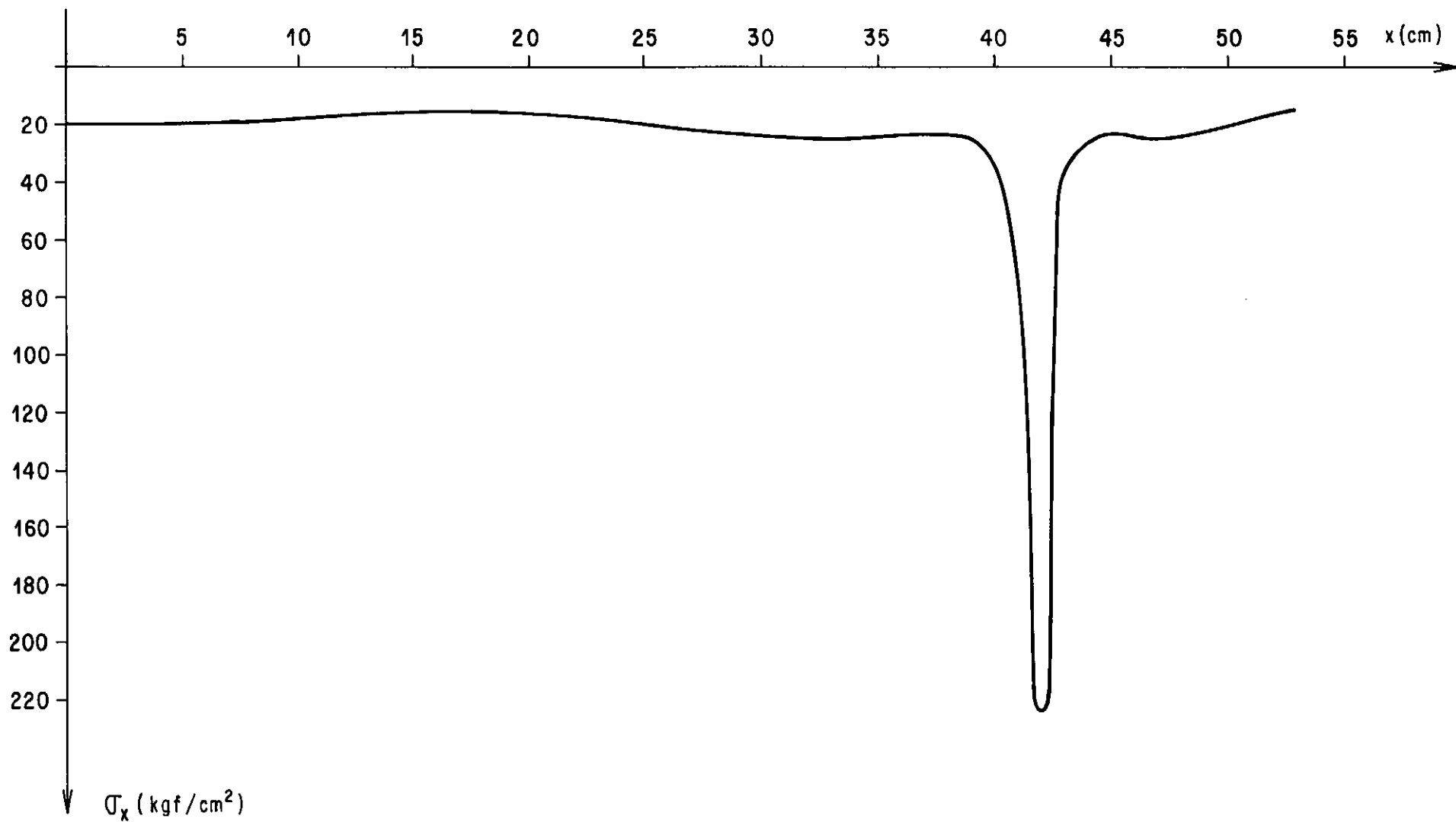


GRÁFICO 9 - NÓ TIPO C - TENSÕES NORMAIS (σ_x) AO LONGO DA MESA

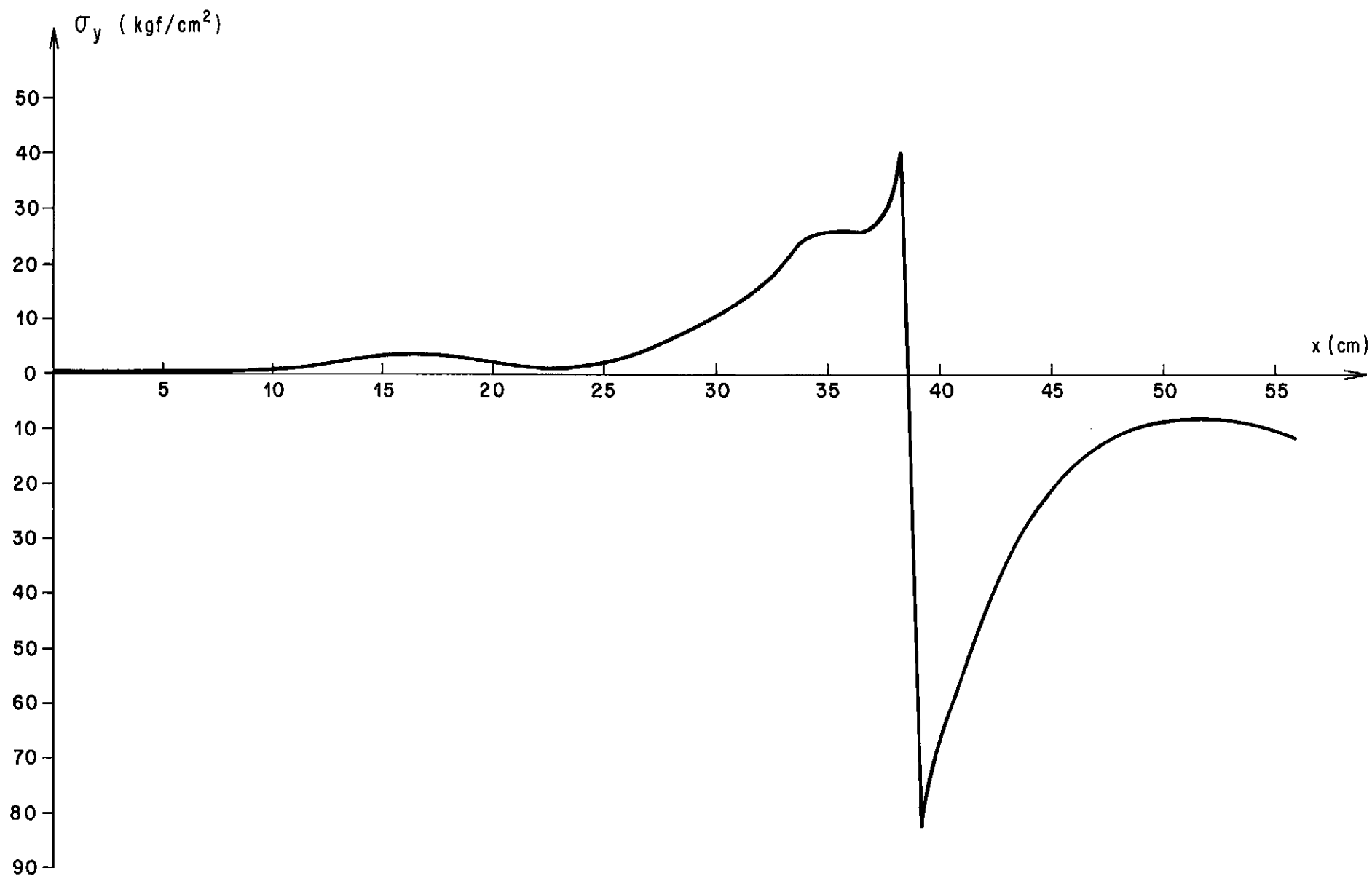


GRÁFICO 10 - NÓ TIPO C - TENSÕES NORMAIS (σ_y) AO LONGO DA ALMA

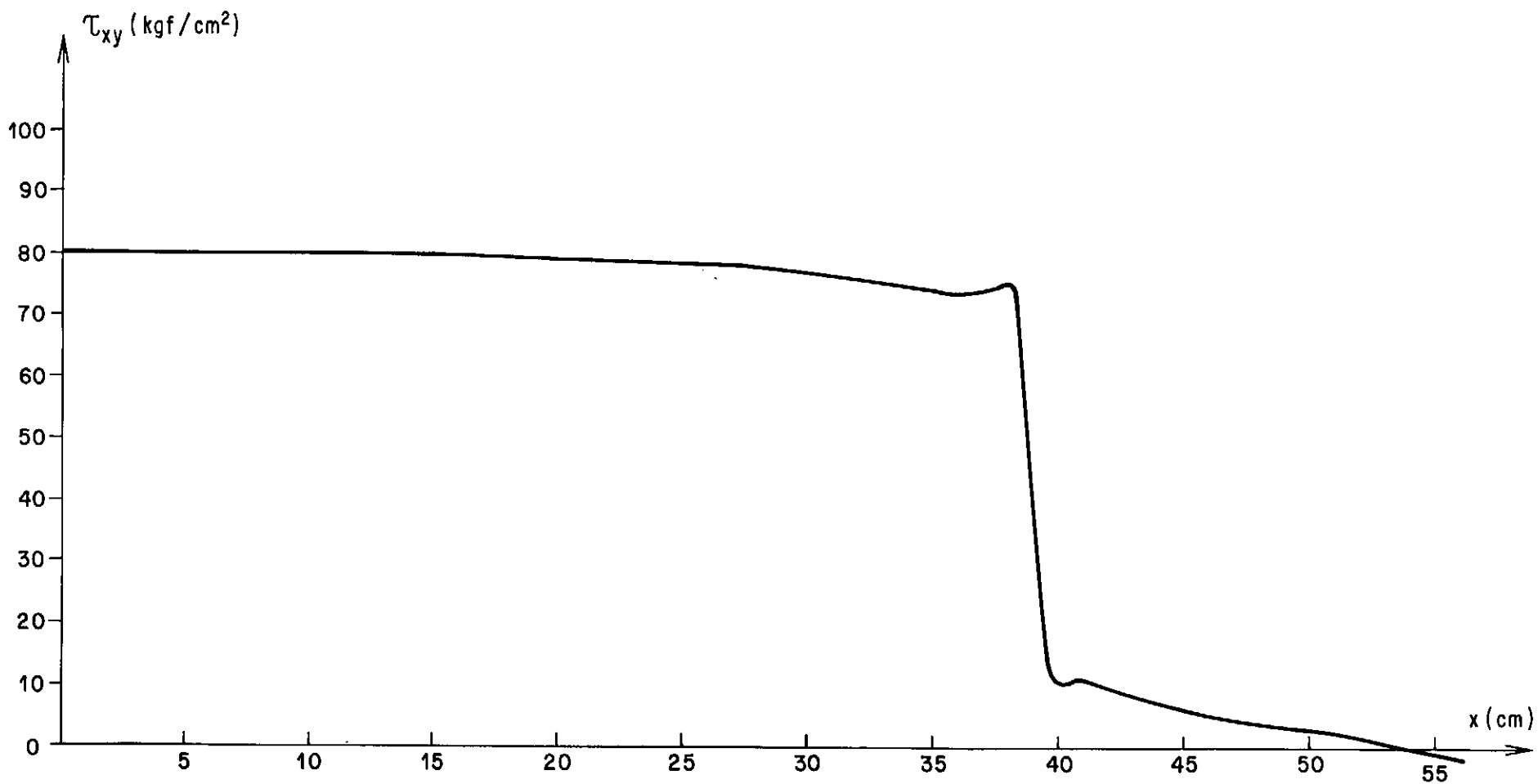


GRÁFICO 11 - NÓ TIPO C - TENSÕES CIZALHANTES (τ_{xy}) AO LONGO DA ALMA

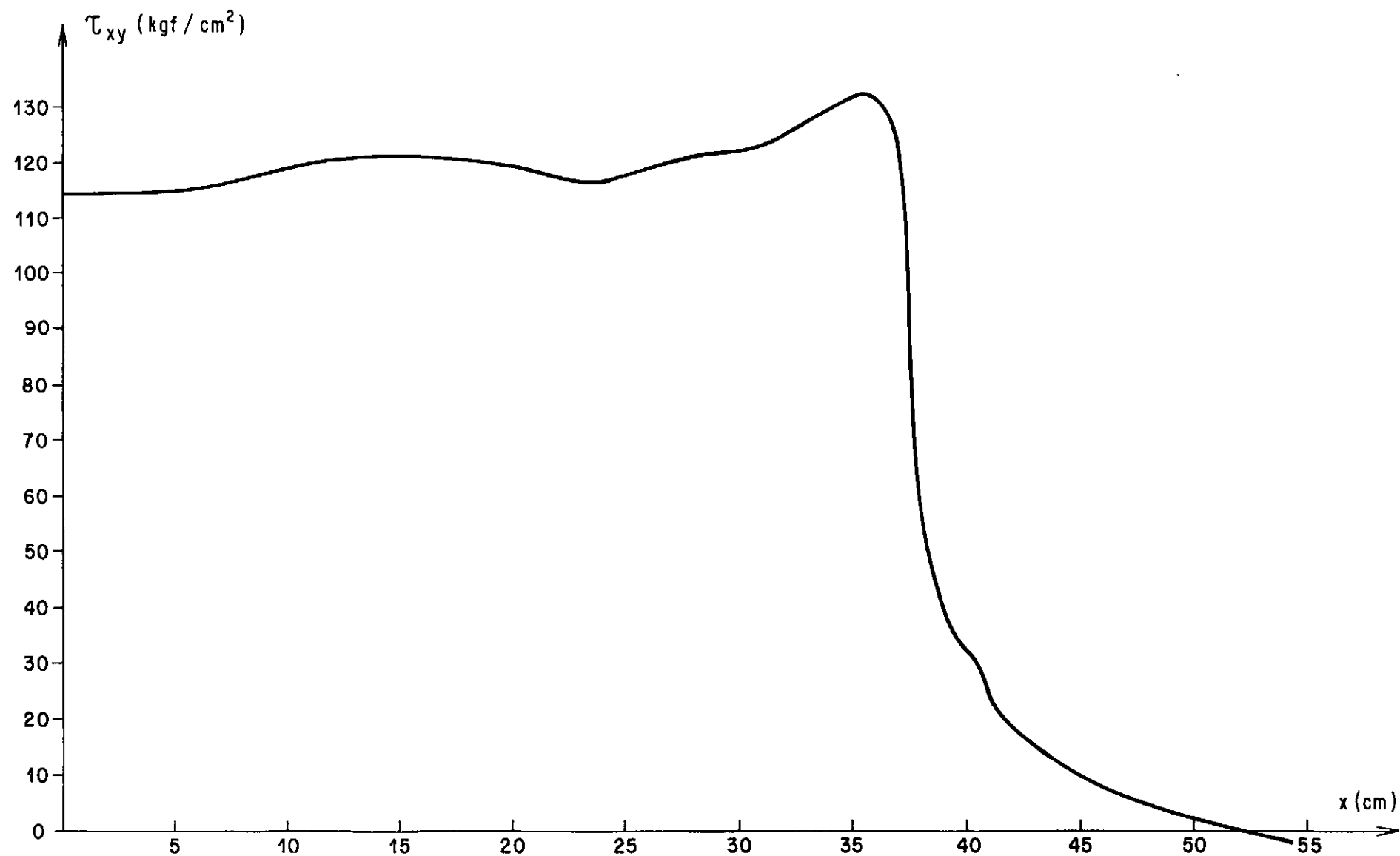


GRÁFICO 12 - NÓ TIPO C - TENSÕES CIZALHANTES (τ_{xy}) AO LONGO DA MESA

IV.1.4 - Estrutura com Três Pares de Rigidezes Adicionais
(Nó Tipo D)

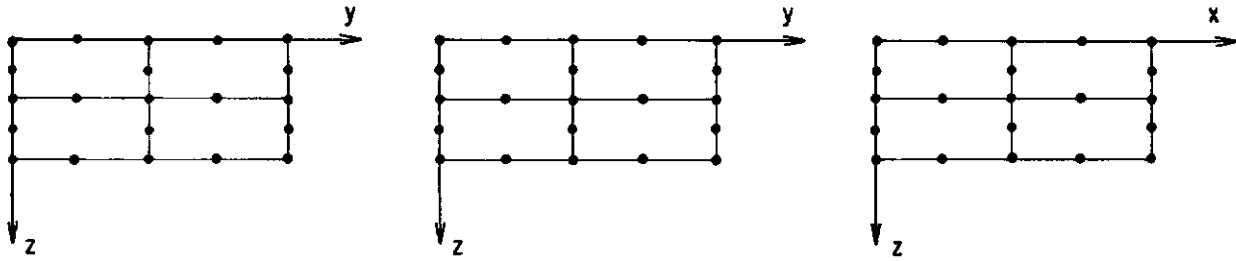


Figura IV.6 - Discretização da Rigidez Adicional Tipo D

As tensões são mostradas nas tabelas 10, 11, 12 e nos gráficos 13, 14, 15 e 16.

A superposição das tensões são mostradas nos gráficos do Apêndice A.

Tabela 10 - Tensões normais (σ_x) na mesa

X	σ_x
8,87	- 20,7519
18,87	- 43,6646
24,44	- 57,6139
29,44	- 74,3332
33,19	- 85,1141
36,35	- 95,2081
39,27	- 106,5492
40,71	- 122,9733
41,96	- 198,2226
42,66	- 95,2221
43,28	- 95,6651
44,64	- 87,4329
46,31	- 76,7041
47,96	- 66,6254
50,37	- 53,6053
52,87	- 40,1556
57,59	- 21,8458

Tabela 11 - Tensões na alma

X	σ_x	σ_y	τ_{xy}
5,00	- 0,3703	- 5,4222	65,7674
15,00	- 0,1587	1,7060	63,7043
22,50	- 1,058	0,2380	59,3136
27,50	0,4232	8,0936	57,2241
31,03	1,9441	18,6471	53,7327
33,15	4,9329	29,7692	51,7622
35,35	8,2523	40,8385	49,3156
37,08	7,2472	43,4702	47,2393
38,33	2,9888	50,7175	46,1681
39,30	0,7406	- 54,8568	35,3634
39,89	- 5,5142	- 44,5282	34,6095
40,78	- 7,3134	- 41,4997	31,2504
41,89	- 6,3744	- 34,4244	27,9971
42,93	- 3,9807	- 27,2829	25,9737
44,68	- 3,9013	- 19,3480	23,1039
47,18	- 1,9705	- 10,6064	19,1893
50,93	- 2,1557	- 9,3368	15,6450
55,93	- 5,0916	- 21,8211	10,6460

Tabela 12 - Tensões na mesa

X	σ_x	σ_y	τ_{xy}
5,00	- 7,1170	- 10,6960	- 96,3557
15,00	- 9,8213	2,8462	- 98,5995
22,50	- 18,0760	0,3941	- 93,2563
27,50	- 23,1992	0,2668	- 93,1004
30,80	- 30,1903	- 1,2309	- 94,1880
32,55	- 32,4901	- 1,9946	- 96,8296
34,45	- 36,3739	- 3,7837	- 100,4808
36,03	- 32,3726	- 0,2192	- 101,2531
37,28	12,1709	10,1896	- 74,1520
38,21	- 46,5346	- 7,2941	- 54,4958
38,84	- 9,9990	4,3316	- 64,5116
39,68	- 8,0657	6,1094	- 58,5200
40,65	- 7,0061	5,1593	- 52,9239
41,48	- 6,2671	3,5525	- 45,7348
43,10	- 6,1446	2,3064	- 38,9294
45,60	- 3,9616	1,5445	- 31,0296
49,35	- 1,8194	0,7731	- 23,0834
54,35	0,6605	1,8101	- 11,1102

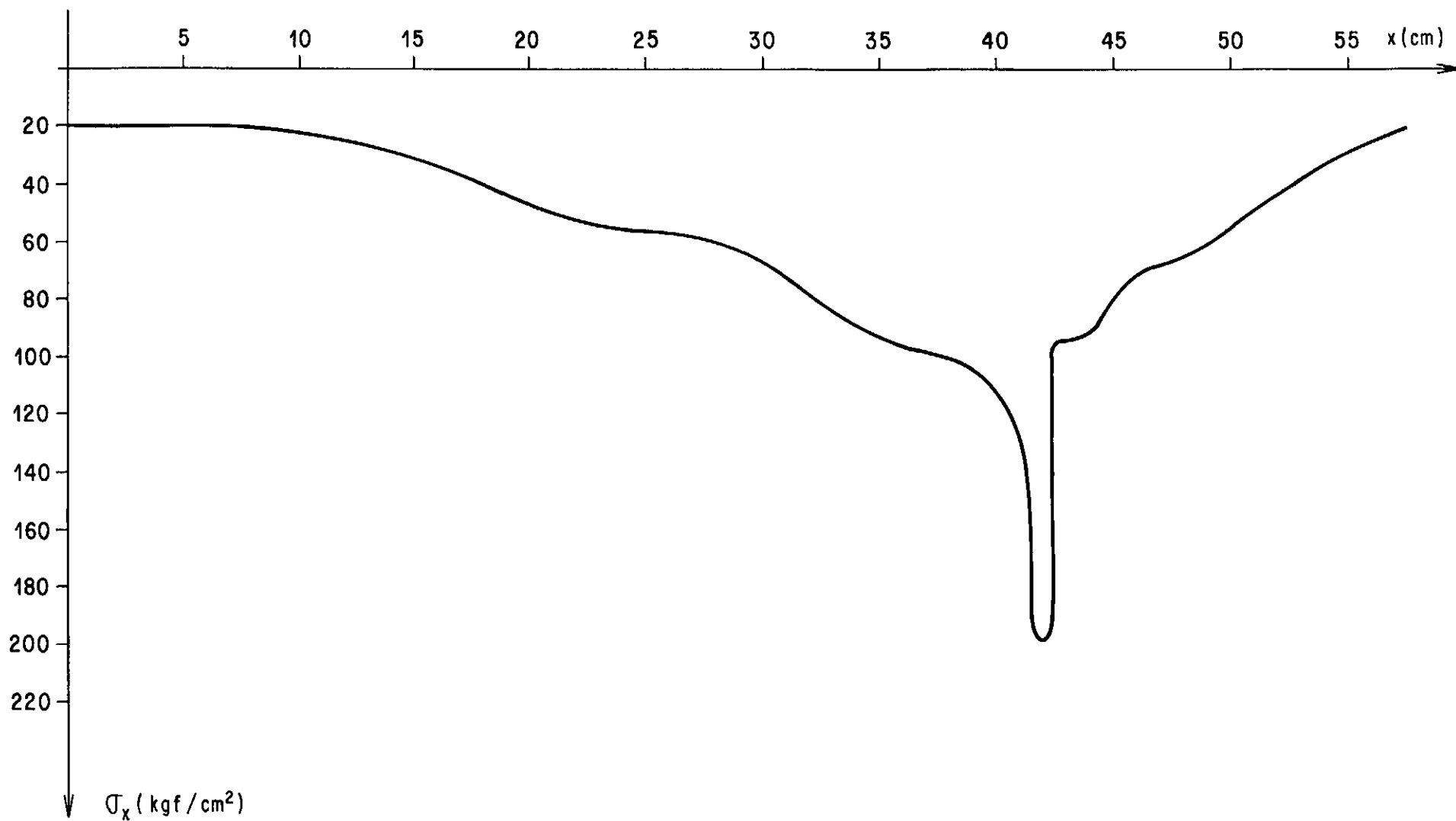


GRÁFICO 13 - NÓ TIPO D - TENSÕES NORMAIS (σ_x) AO LONGO DA MESA

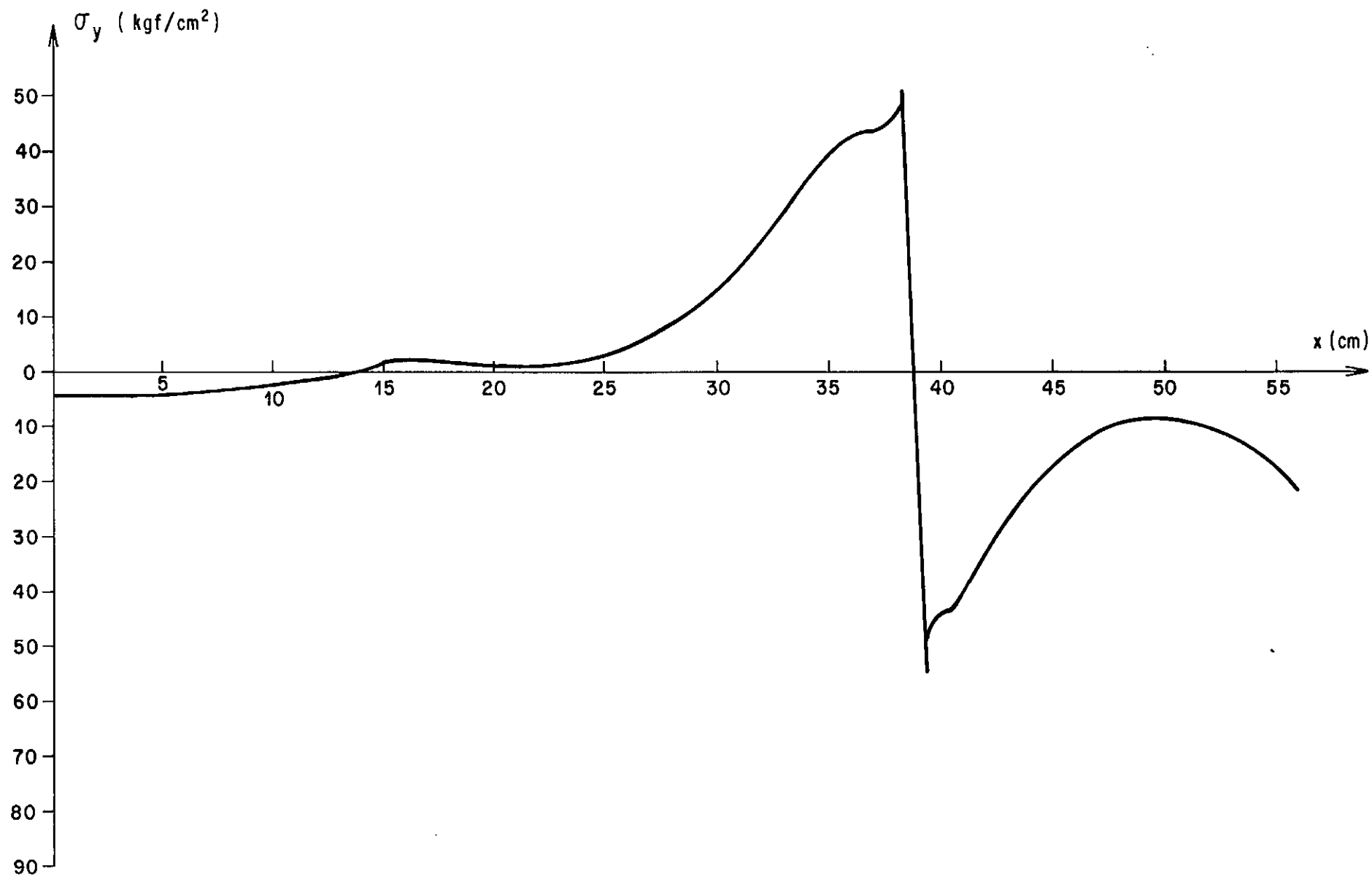


GRÁFICO 14 - NÓ TIPO D - TENSÕES NORMAIS (σ_y) AO LONGO DA ALMA

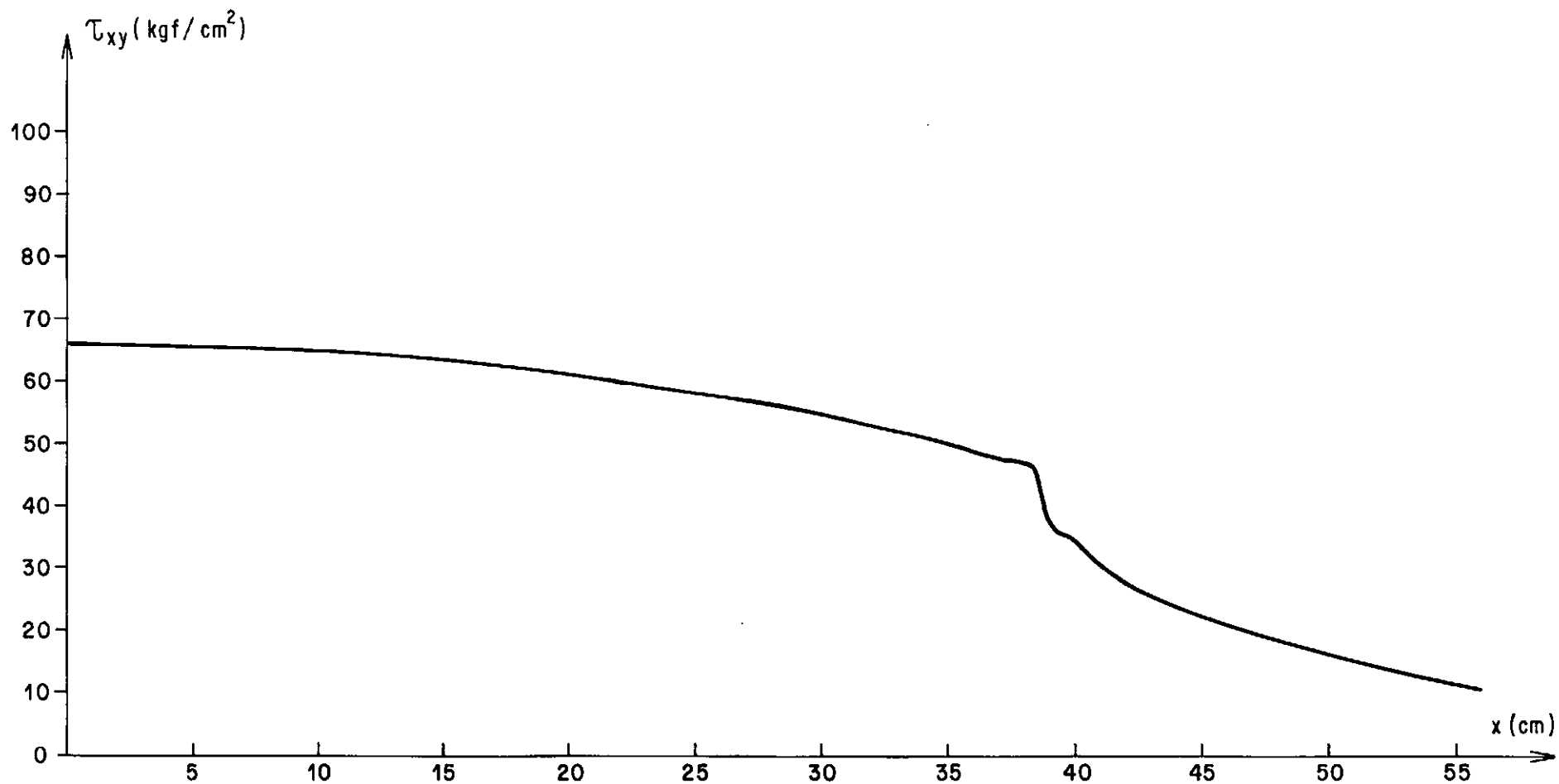


GRÁFICO 15 - NÓ TIPO D - TENSÕES CIZALHANTES (τ_{xy}) AO LONGO DA ALMA

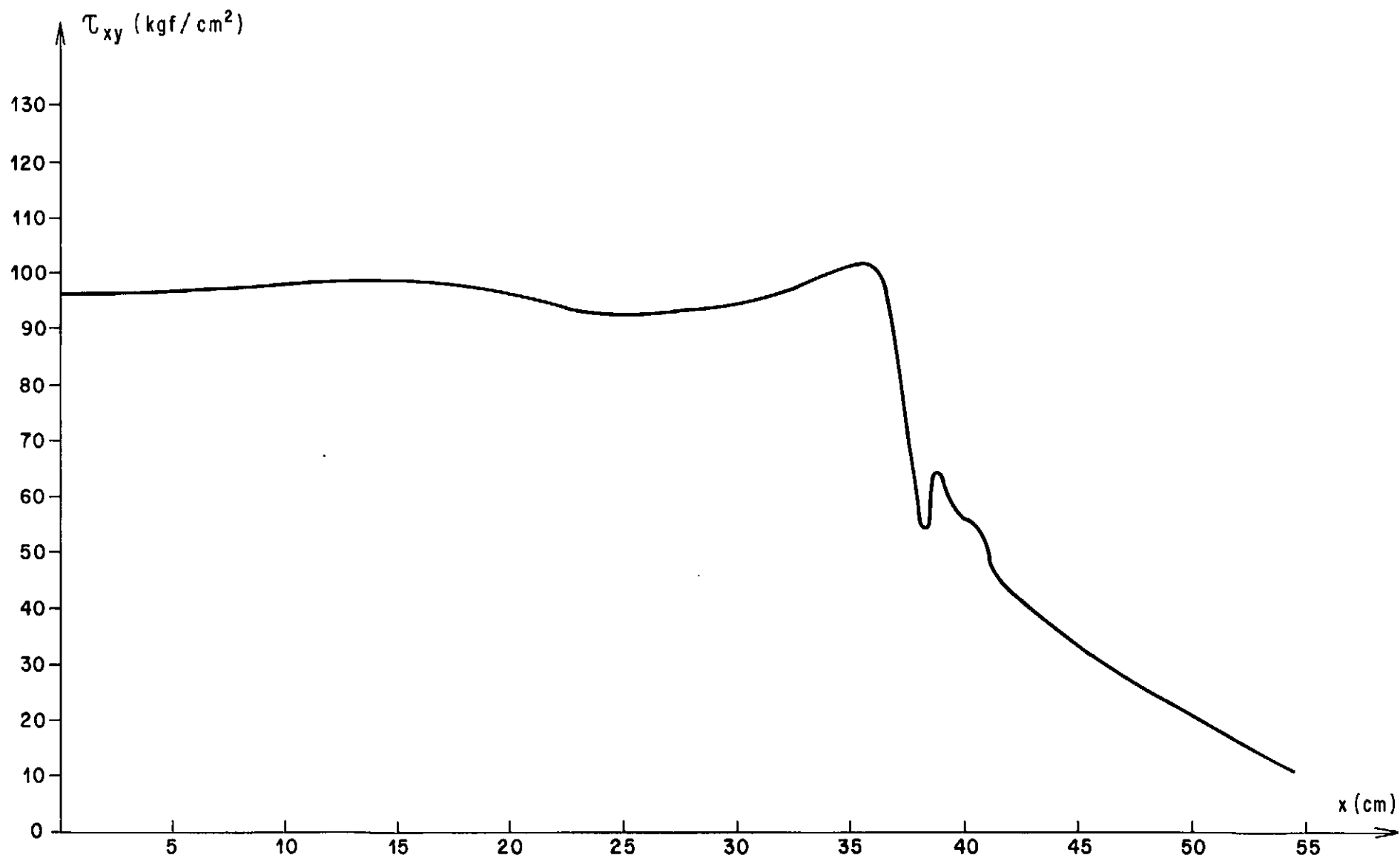
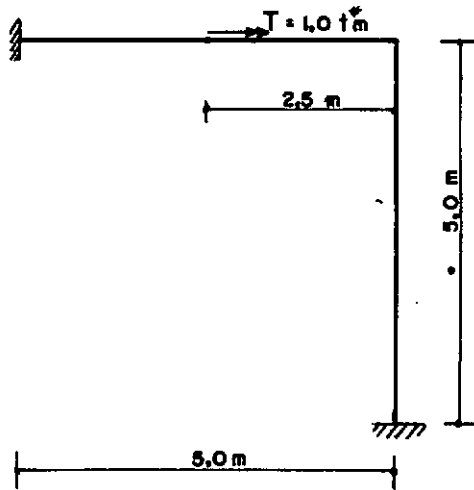


GRÁFICO 16 - NÓ TIPO D - TENSÕES CIZALHANTES (τ_{xy}) AO LONGO DA MESA

IV.2 O pórtico plano bi-engastado, analisado neste exemplo, está submetido a um momento torsor (figura IV.7). Inicialmente, calculam-se as tensões normais devido ao bimomento, através das tabelas do Kollbrunner ^[5]. A finalidade deste exemplo é a determinação das tensões atuantes no nó e seu comportamento com a colocação de placas rigidamente ligadas às mesas.



(a)

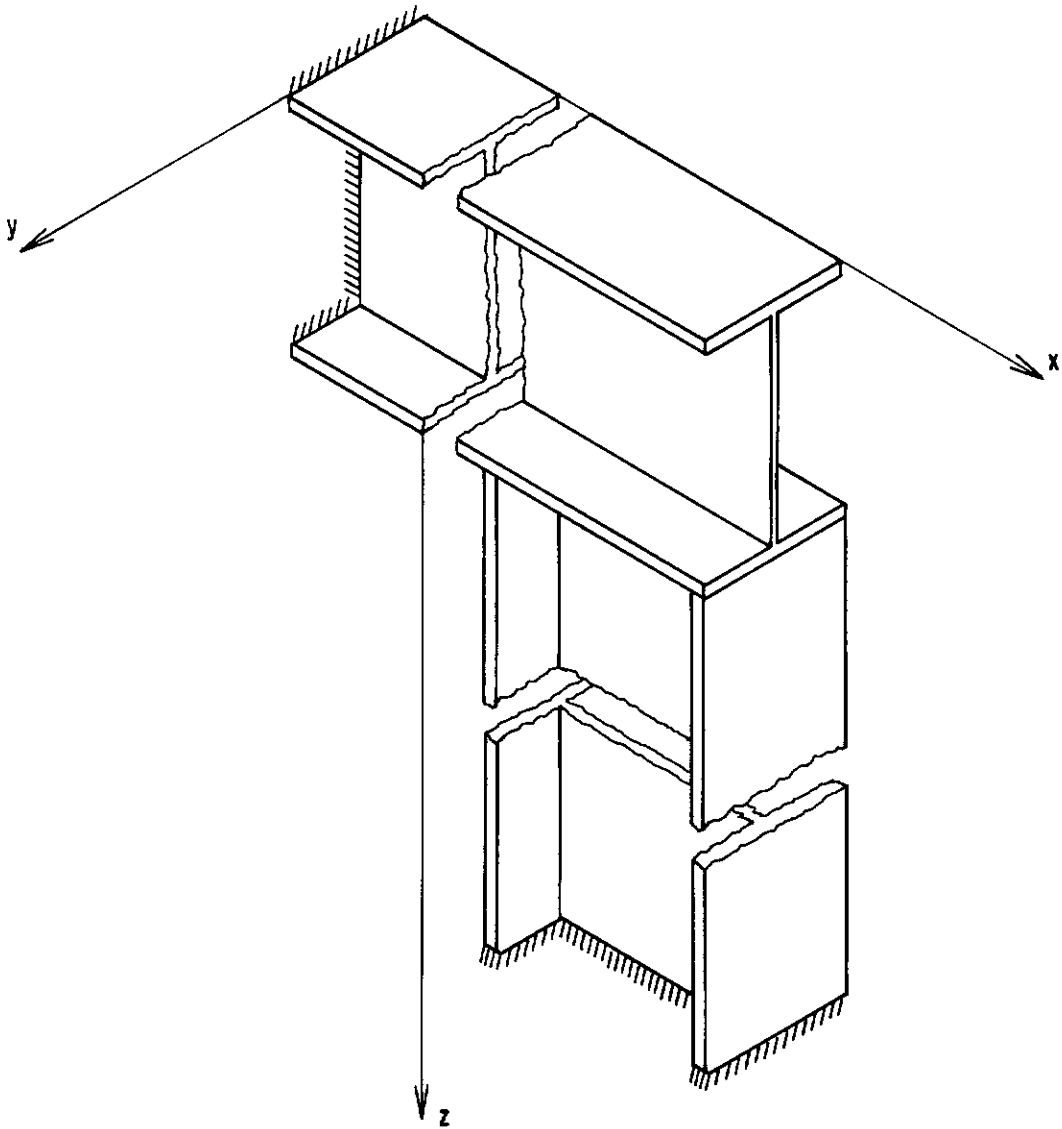


Figura IV.7 - (a) Exemplo 2 - Pórtico Plano: Dimensão e cargas que atuam na estrutura em planta
(b) Estrutura em perspectiva

O pórtico é constituído de um perfil I 18 x 6 fabricado pela Companhia Siderúrgica Nacional. As propriedades geométricas e as dimensões da seção transversal são dadas na Figura IV.8.

Os módulos de elasticidade longitudinal e transversal do material são, respectivamente, $E=2100.000 \text{ Kgf/cm}^2$ e $G=807690 \text{ Kgf/cm}^2$.

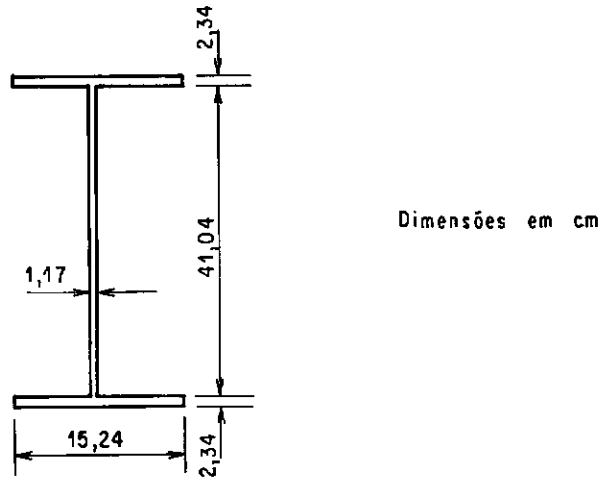


Figura IV.2 - Seção transversal do perfil

Determinação das propriedades geométricas

$$I_{\omega} = \frac{t b^3}{12} \times \frac{h^2}{2} = \frac{2,34 \times 15,24^3}{12} \times \frac{43,38^2}{2}$$

$$I_{\omega} = 649.439,369 \text{ cm}^6$$

$$I_t = \sum_n S_n t_n^3 = 2 \times 15,24 \times 2,34^3 + 41,04 \times 1,17^3$$

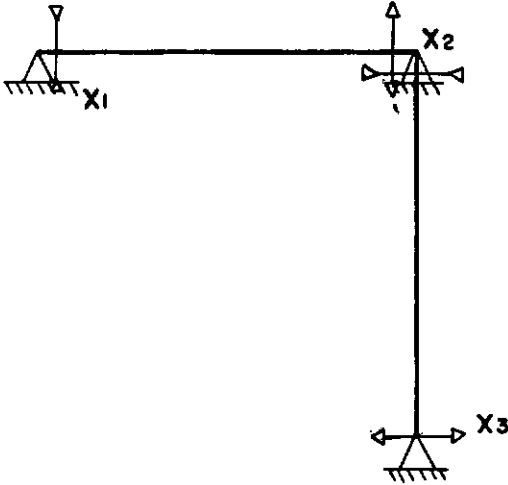
$$I_t = 456.268 \text{ cm}^4$$

$$\gamma^2 = \frac{G J_t}{E J_{\omega}} = \frac{8,4 \times 10^5 \times 456,268}{2,1 \times 10^6 \times 649.439,369} = 2,8102 \times 10^{-4} / \text{cm}^2$$

$$\gamma = 0,0167637314 / \text{cm} = 1,67637314 / \text{m}$$

- Resolução da estrutura pelo Método das Forças

1. Sistema Principal



2. Cálculo dos Coeficientes

- pela tabela 3 |⁵| nº 14

$$x' = \frac{1}{\gamma \ell} \left(\frac{1}{\text{th } \gamma \ell} - \frac{1}{\gamma \ell} \right) = \frac{1}{8,3818657} \left(\frac{1}{\text{th } 8,3818657} - \frac{1}{8,3818657} \right)$$

$$x' = 0,1050714418$$

$$\delta_{11} = 0,1050714418 \times 1 \times 1 \times 5$$

$$\delta_{11} = \delta_{33} = 0,5254$$

- pela tabela 3 |⁵| nº 15

$$x' = \frac{1}{\gamma \ell} \left(\frac{1}{\gamma \ell} - \frac{1}{\text{sh } \gamma \ell} \right) = \frac{1}{8,3818657} \left(\frac{1}{8,3818657} - \frac{1}{\text{sh } 8,3818657} \right)$$

$$x' = 0,0141790885$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0,0141790885 \times 1 \times 1 \times 5$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{32} = \delta_{23} = 0,071$$

$$\delta_{31} = \delta_{13} = 0$$

- pela tabela 3|⁵|nº 1

$$x' = \frac{1}{(\gamma \ell)^2} \left(\frac{\xi'}{\ell} - \frac{\text{sh } \gamma \xi'}{\text{sh } \gamma \ell} \right) = \frac{1}{(8,3818657)^2} \left(0,5 - \frac{\text{sh } 4,19093285}{\text{sh } 8,3818657} \right)$$

$$x' = 6,9015253 \times 10^{-3}$$

$$\delta_{10} = 6,9015253 \times 10^{-3} \times 1 \times 1 \times 5^2$$

$$\delta_{10} = \delta_{20} = 0,1725$$

$$\delta_{30} = 0$$

3. Equação de Compatibilidade

$$0,5254 X_1 + 0,071 X_2 + 0 X_3 = - 0,1725 \quad (1)$$

$$0,071 X_1 + 1,058 X_2 + 0,071 X_3 = - 0,1725 \quad (2)$$

$$0 X_1 + 0,071 X_2 + 0,5254 X_3 = 0 \quad (3)$$

4. Obtenção dos hiperestáticos

$$\text{de (3) : } X_3 = \frac{-0,071}{0,5254} X_2 \quad \therefore X_3 = + 0,0195$$

$$\text{de (1) : } X_1 = \frac{-0,1725 - 0,071 X_2}{0,5254} \quad \therefore X_1 = - 0,3089$$

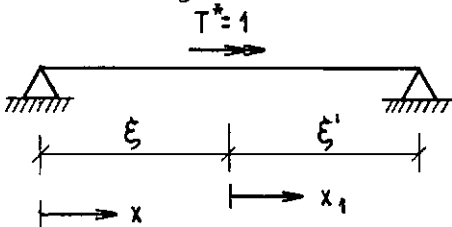
$$\text{de (2) : } X_2 = - 0,1447$$

5. Diagramas Finais

5.1 - Diagrama de Bimomento

$$B = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_3 X_3$$

1º Trecho: segundo a tabela 1, nº 2 |⁵| temos:



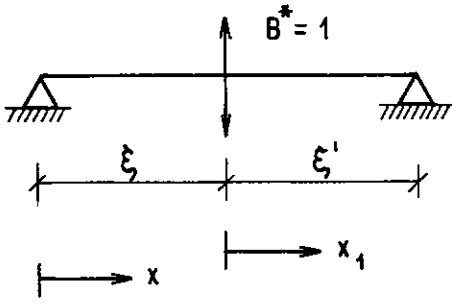
$$B_0 = \frac{1}{\gamma} \frac{\text{sh } \gamma \xi'}{\text{sh } \gamma \ell} \text{sh } \gamma x$$

$$B_0 = 9,0247 \times 10^{-3} \text{sh } 1,6764 x \quad \text{para } 0 \leq x \leq 2,5$$

$$B_0 = \frac{1}{\gamma} \frac{\text{sh } \gamma \xi'}{\gamma \ell} \text{sh } \gamma x - \frac{1}{\gamma} \text{sh } \gamma X_1$$

$$B_0 = 9,0247 \times 10^{-3} \text{sh } 1,674 X - 0,5965 \text{sh } 1,6764 X_1 \quad \text{para } 2,5 \leq x \leq 5$$

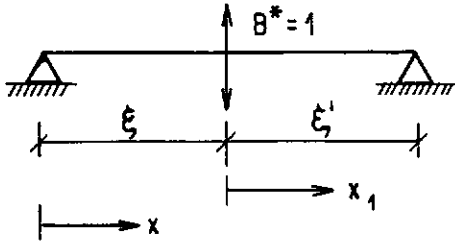
- segundo a tabela 1, nº 9 |⁵|



$$B_1 = - \frac{\text{ch } \gamma l}{\text{sh } \gamma l} \text{sh } \gamma x + \text{ch } \gamma x$$

$$B_1 = \text{ch } 1,6764 x - \text{sh } 1,6764 x$$

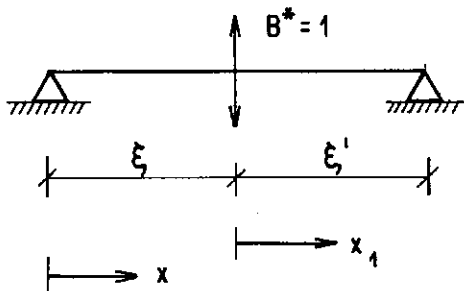
- segundo a tabela 1, nº 9 |⁵|



$$B_2 = \frac{\text{ch } \gamma \xi'}{\text{sh } \gamma l} \text{sh } Kx$$

$$B_2 = 4,5796 \times 10^{-4} \text{sh } 1,6764 x$$

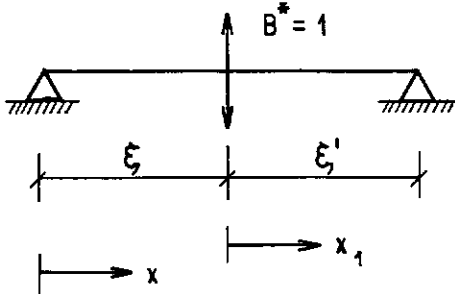
2º Trecho: segundo a tabela 1, nº 9 |⁵|



$$B_2 = \frac{-\text{ch } \gamma l}{\text{sh } \gamma l} \text{sh } \gamma x + \text{ch } \gamma x$$

$$B_2 = -\text{sh } 1,6764 x + \text{ch } 1,6764 x$$

segundo a tabela 1 nº 9 |⁵|



$$B_3 = \frac{\text{ch } \gamma \xi'}{\text{sh } \gamma \ell} \text{sh } K x$$

$$B_3 = 4,5796 \times 10^{-4} \text{sh } 1,6764 x$$

logo: 1º trecho

$$B = 0,3179 \text{sh } 1,6764 x - 0,3089 \text{ch } 1,6764 x \quad \text{para } 0 \leq x \leq 2,5$$

$$B = 0,3179 \text{sh } 1,6764 x - 0,3089 \text{ch } 1,6764 x - 0,5964 \text{sh } 1,6764 x_1 \\ \text{para } 2,5 \leq x \leq 5$$

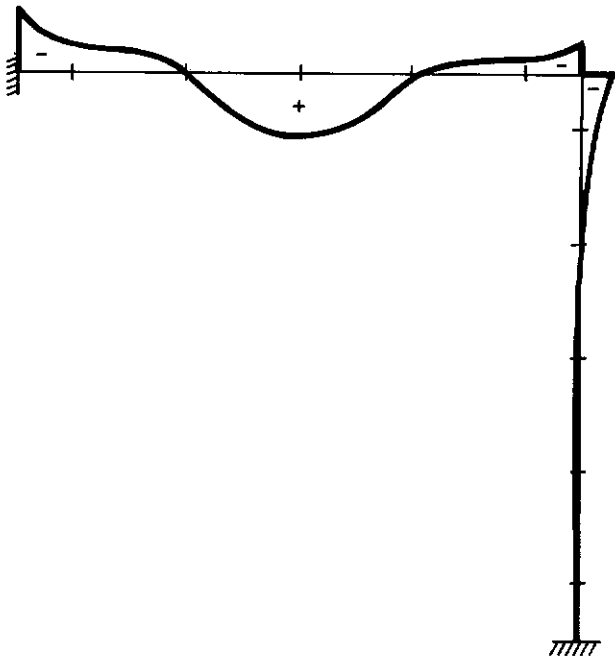
2º trecho

$$B = + 0,1447 (\text{sh } 1,6764 x - \text{ch } 1,6764 x)$$

Substituindo os valores de x e x_1 nas equações acima, forma-se a seguinte tabela.

SEÇÃO	x	x'	B (t*m ²)
1	0	-	- 0,3091
2	0,5	-	- 0,1257
3	1,5	-	0,0300
4	2,5	0	0,2911
5	3,5	1,0	0,0433
6	4,5	2,0	- 0,0545
7e	5,0	2,5	- 0,1446
7d	0	-	- 0,1446
8	0,5	-	- 0,0625
9	1,5	-	- 0,0117
10	2,5	-	- 0,0019
11	3,5	-	0,0016
12	4,5	-	0,0084
13	5,0	-	0,0195

Diagrama de Bimomentos

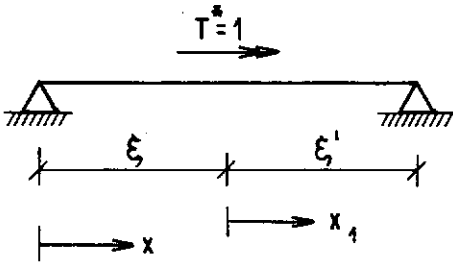


5.2 - Diagramas de Torção

5.2.1 - Diagrama de torção de Saint-Venant

$$T_V = T_{V_0} + T_{V_1} X_1 + T_{V_2} X_2 + T_{V_3} X_3$$

1º Trecho: pela tabela 1, nº 2 |⁵|, temos:



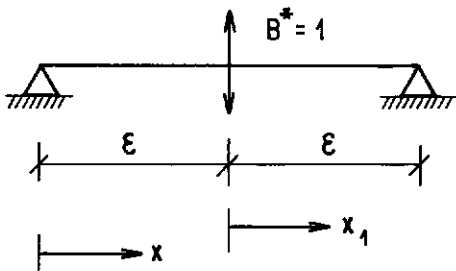
$$T_{V_0} = \frac{\xi'}{l} - \frac{\text{sh } \gamma \xi'}{\text{sh } \gamma l} \text{ch } \gamma x$$

$$T_{V_0} = 0,5 - 0,0151 \text{ ch } 1,6764 x \quad \text{para } 0 \leq x \leq 2,5$$

$$T_{V_0} = \frac{\xi'}{l} - \frac{\text{sh } \gamma \xi'}{\text{sh } \gamma l} \text{ch } \gamma x - 1 + \text{ch } \gamma x_1$$

$$T_{V_0} = -0,5 - 0,0151 \text{ ch } 1,6764 x + \text{ch } 1,6764 x_1 \quad \text{para } 2,5 \leq x \leq 5$$

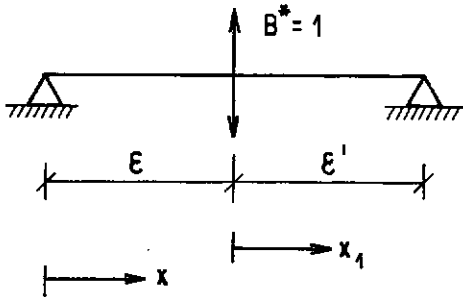
pela tabela 1, nº 9 |⁵|, temos:



$$T_{V_1} = \frac{1}{\ell} + \frac{\text{ch } \gamma \xi'}{\text{sh } \gamma \ell} \text{ch } \gamma x - \gamma \text{sh } \gamma x$$

$$T_{V_1} = -0,2 + 1,6764 (\text{ch } 1,6764 x - \text{sh } 1,6764 x)$$

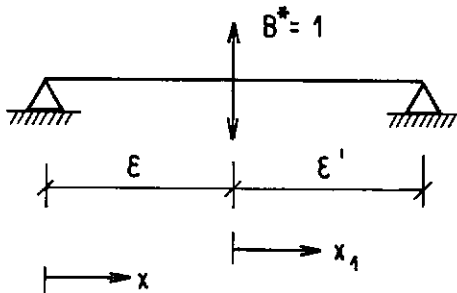
pela tabela 1, nº 9 |⁵|, temos:



$$T_{V_2} = \frac{1}{\ell} - \frac{\gamma \text{ch } \gamma \xi'}{\text{sh } \gamma \ell} \text{ch } \gamma x$$

$$T_{V_2} = 0,2 - 7,6772 \times 10^{-4} \text{ch } 1,6764 x$$

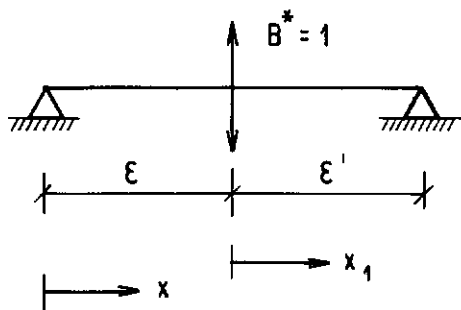
2º Trecho: pela tabela 1 nº 9 |⁵|, temos:



$$T_{V_2} = -\frac{1}{\ell} + \frac{\gamma \text{ch } \gamma \xi'}{\text{sh } \gamma \ell} \text{ch } \gamma x - \gamma \text{sh } \gamma x$$

$$T_{V_2} = -0,2 + 1,6764 (\text{ch } 1,6764 x - \text{sh } 1,674 x)$$

pela tabela 1 nº 9 |⁵|, temos:



$$T_{V_3} = \frac{1}{l} - \gamma \frac{\text{ch } \gamma \varepsilon'}{\text{sh } \gamma l} \text{ch } \gamma x$$

$$T_{V_3} = 0,2 - 7,6772 \times 10^{-4} \text{ch } 1,6764 x$$

logo

1º trecho

$$T_V = 0,5328 - 0,5328 \text{ch } 1,6764 x + 0,5178 \text{sh } 1,6764 x$$

para $0 \leq x \leq 2,5$

$$T_V = -0,4672 - 0,5328 \text{ch } 1,6764 x + \text{ch } 1,6764 x_1 +$$

$$0,5178 \text{sh } 1,6764 x$$

para $2,5 \leq x \leq 5$

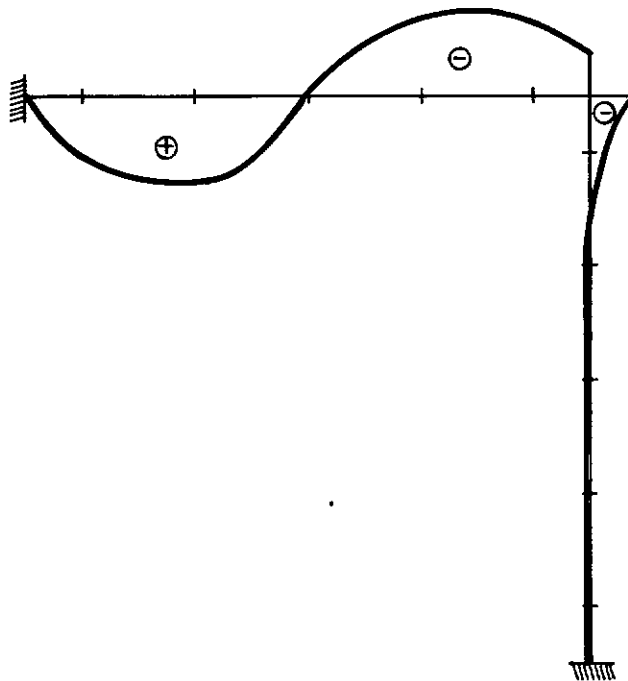
2º trecho

$$T_V = 0,0328 - 0,2426 \text{ch } 1,6764 x + 0,2426 \text{sh } 1,6764 x$$

Substituindo os valores de x e x_1 , formamos o seguinte quadro:

SEÇÃO	x	x'	T_v ($\tau \cdot m$)
1	0	-	- 0,0002
2	0,5	-	0,2882
3	1,5	-	0,3976
4e	2,5	-	0,0286
4d	2,5	0	0,0286
5	3,5	1,0	- 0,3549
6	4,5	2,0	- 0,3417
7e	5,0	2,5	- 0,2094
7d	0	-	- 0,2096
8	0,5	-	- 0,0721
9	1,5	-	0,0131
10	2,5	-	0,0287
11	3,5	-	0,0295
12	4,5	-	0,0186
13	5,0	-	0,0001

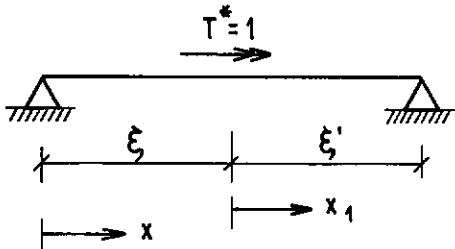
Diagrama de torção de Saint-Venant



5.2.2 - Diagrama de Torção de Empenamento

$$T_{\omega} = T_{\omega_0} + T_{\omega_1} X_1 + T_{\omega_2} X_2 + T_{\omega_3} X_3$$

1º trecho: tabela 1, nº 2 |⁵|



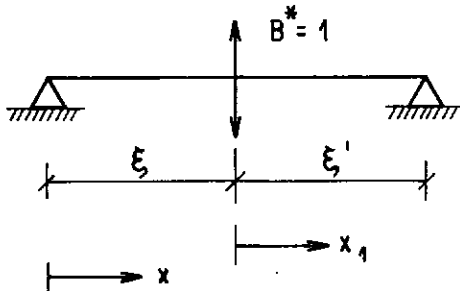
$$T_{\omega_0} = \frac{\text{sh } \gamma \xi'}{\text{sh } \gamma \ell} \text{ch } \gamma x$$

$$T_{\omega_0} = 0,0151 \text{ch } 1,6764 x \quad \text{para } 0 \leq x \leq 2,5$$

$$T_{\omega_0} = \frac{\text{sh } \gamma \xi}{\text{sh } \gamma \ell} \text{ch } \gamma x - \text{ch } \gamma x_1$$

$$T_{\omega_0} = 0,0151 \text{ch } 1,6764 x - \text{ch } 1,6764 x_1 \quad \text{para } 2,5 \leq x \leq 5$$

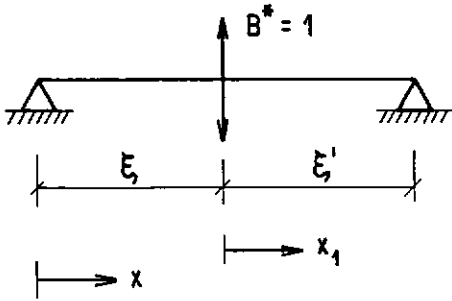
pela tabela 1, nº 9 |⁵|, temos:



$$T_{\omega_1} = -\gamma \frac{\text{ch } \gamma \ell}{\text{sh } \gamma \ell} \text{ch } \gamma x + \gamma \text{sh } \gamma x$$

$$T_{\omega_1} = 1,6764 (\text{sh } 1,6764 x - \text{ch } 1,6764 x)$$

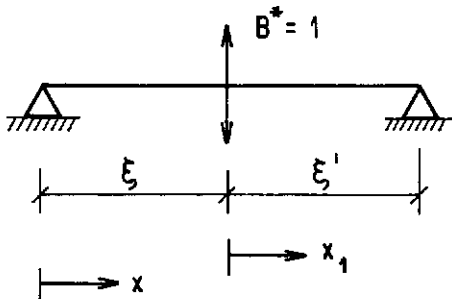
pela tabela 1, nº 9 |⁵|, temos:



$$T_{\omega_2} = \gamma \frac{\text{ch } \gamma \xi'}{\text{sh } \gamma \ell} \text{ch } \gamma x$$

$$T_{\omega_2} = 7,6772 \times 10^{-4} \text{ch } 1,6764 x$$

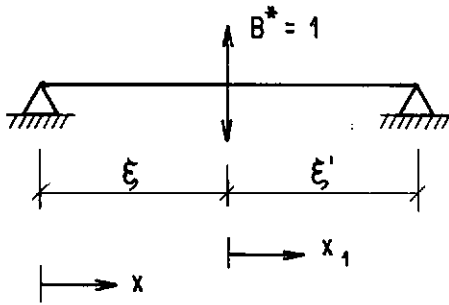
2º trecho: pela tabela 1, nº 9 |⁵|, temos:



$$T_{\omega_2} = -\gamma \frac{\text{ch } \gamma \ell}{\text{sh } \gamma \ell} \text{ch } \gamma x + \gamma \text{sh } \gamma x$$

$$T_{\omega_2} = 1,6764 (\text{sh } 1,6764 x - \text{ch } 1,6764 x)$$

pela tabela 1, nº 9 |⁵|, temos:



$$T_{\omega_3} = \gamma \frac{\text{ch } \gamma \xi'}{\text{sh } \gamma l} \text{ch } \gamma x$$

$$T_{\omega_3} = 7,6772 \times 10^{-4} \text{ch } 1,6764 x$$

logo

1º trecho

$$T_{\omega} = 0,5329 \text{ch } 1,6764 x - 0,5178 \text{sh } 1,6764 x$$

para $0 \leq x \leq 2,5$

$$T_{\omega} = 0,5329 \text{ch } 1,6764 x - 0,5178 \text{sh } 1,6764 x - \text{ch } 1,6764 x_1$$

para $2,5 \leq x \leq 5$

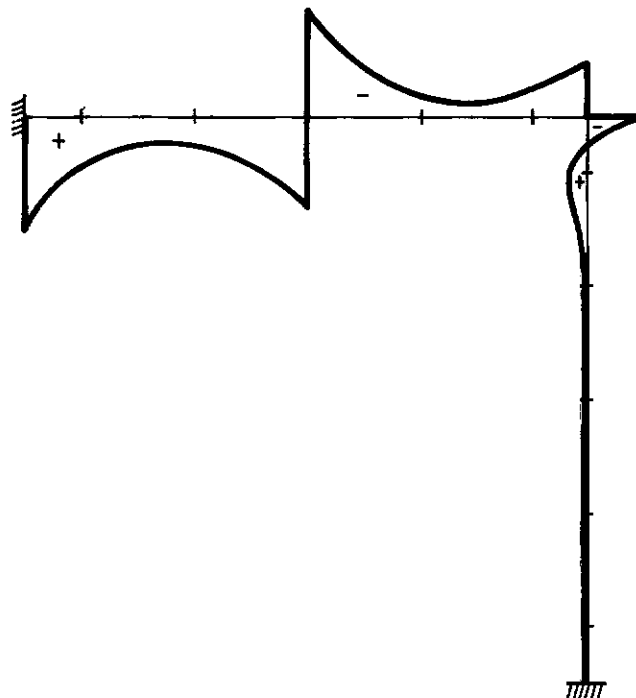
2º trecho:

$$T_{\omega} = +0,2426 (\text{ch } 1,6764 x - \text{sh } 1,6764 x)$$

Substituindo os valores de x e x_1 , temos:

SEÇÃO	x	x ₁	T _ω (t*m)
1	0	-	0,5330
2	0,5	-	0,2446
3	1,5	-	0,1353
4e	2,5	-	0,5041
4d	2,5	0	- 0,4959
5	3,5	1,0	- 0,1122
6	4,5	2,0	- 0,1253
7e	5,0	2,5	- 0,2573
7d	0	-	- 0,2426
8	0,5	-	0,1048
9	1,5	-	0,0196
10	2,5	-	0,0042
11	3,5	-	0,0034
12	4,5	-	0,0143
13	5	-	0,0327

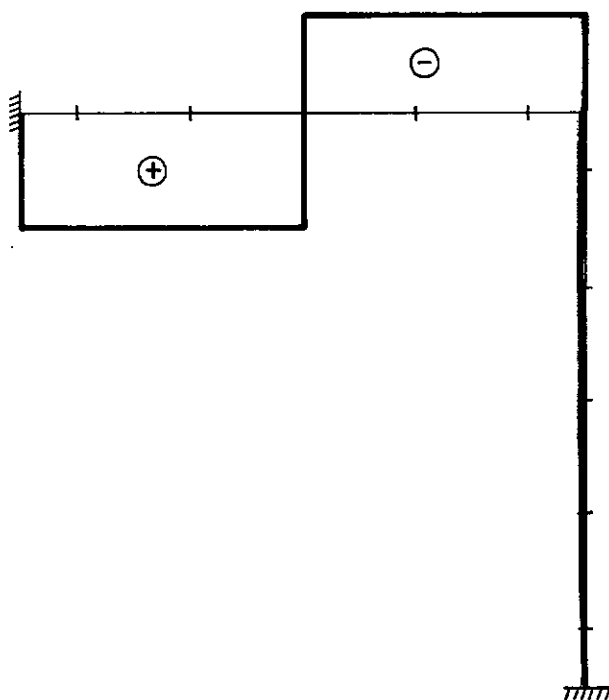
Diagrama de torção de empenamento



$$T = T_v + T_w$$

SEÇÃO	T_v	T_w	T_t
1	- 0,0002	0,5330	0,533
2	0,2882	0,2446	0,5328
3	0,3976	0,1353	0,5329
4e	0,0286	0,5041	0,5327
4d	0,0286	- 0,4959	- 0,4673
5	- 0,3549	- 0,1122	- 0,4671
6	- 0,3417	- 0,1253	- 0,4670
7e	- 0,2094	- 0,2573	- 0,4667
7d	- 0,2096	0,2426	0,0330
8	- 0,0721	0,1048	0,0327
9	0,0131	0,0196	0,0327
10	0,0287	0,0042	0,0329
11	0,0295	0,0034	0,0329
12	0,0186	0,0143	0,0329
13	0,0001	0,0327	0,0328

Diagrama de torção total.



Determinam-se as tensões normais em qualquer seção através da fórmula (II.21). Para uma seção a 50 cm do nó.

$$\sigma = \frac{55.555,56 \times 165,28}{649.439.369} = 14,14 \text{ Kg}^*/\text{cm}^2$$

IV.2.1 - A estrutura foi discretizada conforme a Figura IV.9.

As tensões resultantes encontram-se nas tabelas 13 e 14 e nos gráficos 17, 18 e 19.

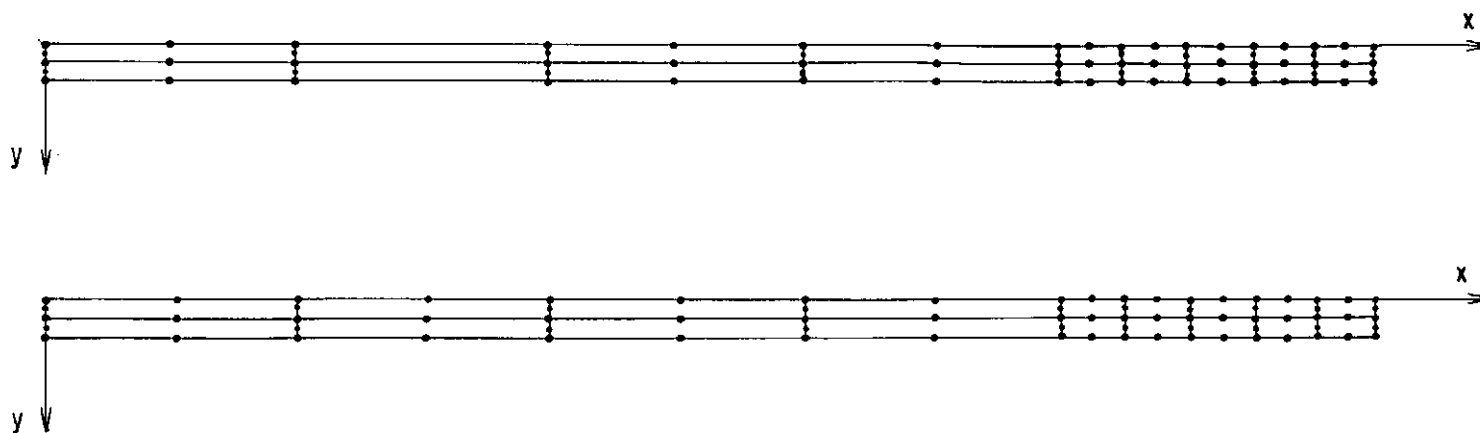


FIGURA IV-9a - DISCRETIZAÇÃO DAS MESAS DA VIGA

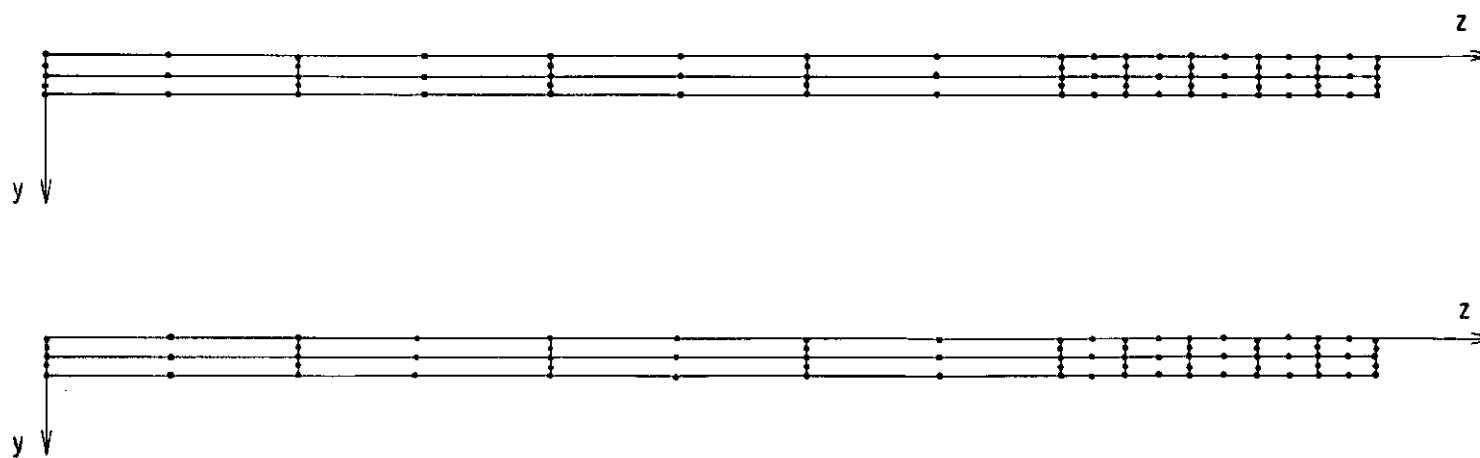


FIGURA IV-9b - DISCRETIZAÇÃO DAS MESAS DO PILAR

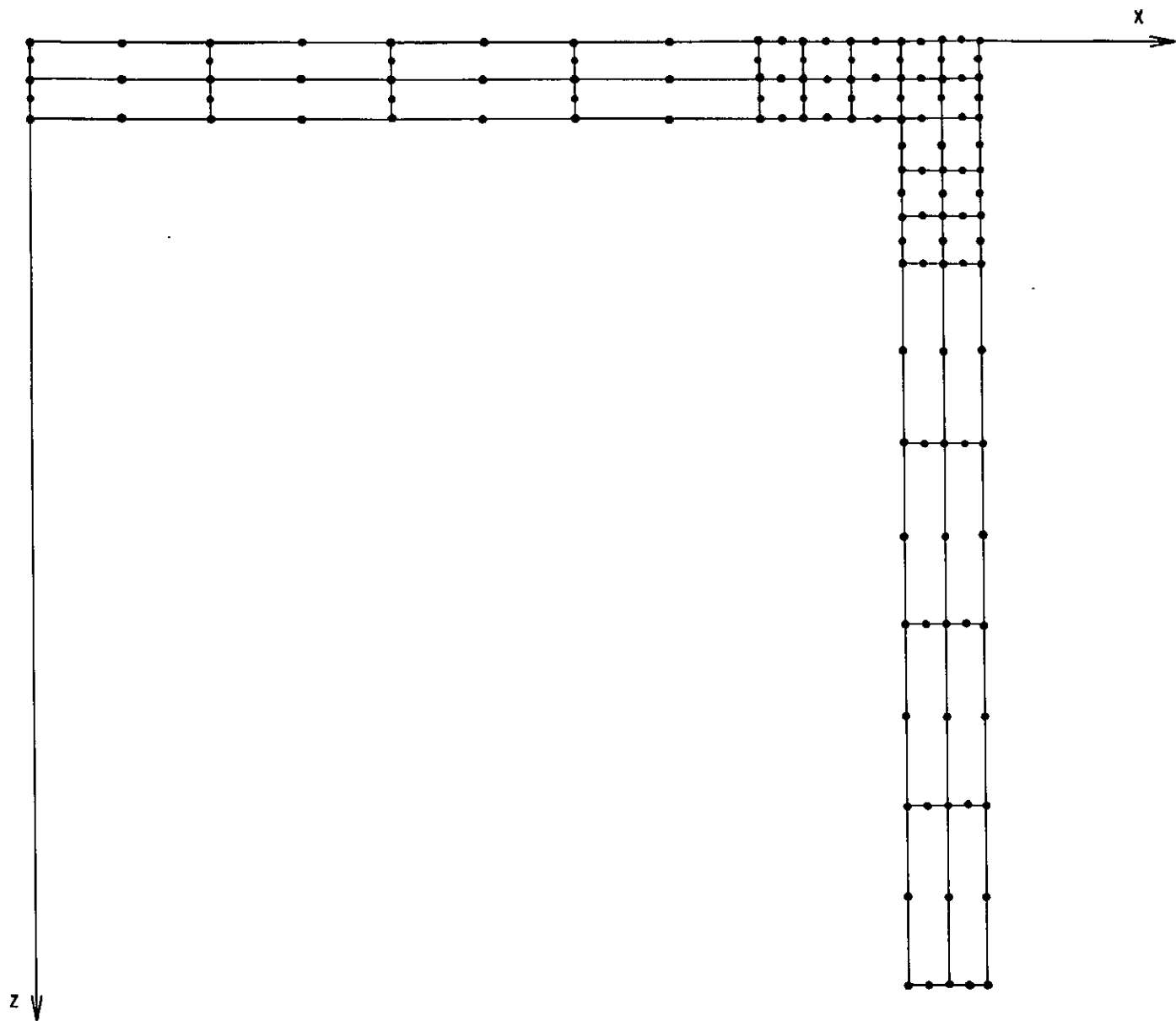


FIGURA IV-9c - DISCRETIZAÇÃO DA ALMA DA ESTRUTURA

Tabela 13 - Tensões nas mesas da viga

x (cm)	σ_x	σ_y	τ_{xy}
453,19	15,97	- 0,44	- 23,62
464,16	17,79	0,61	- 16,89
475,12	20,01	3,59	- 9,27
480,75	11,38	1,90	- 5,71
489,16	7,03	1,03	- 2,32
497,56	2,74	0,40	- 0,89
502,44	2,76	0,68	- 0,62
510,85	0,92	- 0,01	0,55
519,25	- 1,07	- 1,18	0,94

Tabela 14 - Tensões nas mesas do pilar

z (cm)	σ_x	σ_y	τ_{xy}
46,57	2,33	- 0,06	0,60
57,54	3,59	0,37	- 0,13
68,50	4,76	0,46	- 0,15
74,51	2,96	- 0,21	0,34
84,19	2,75	- 0,15	0,37
93,87	2,59	0,06	0,28

IV.2.2 - Duas rijezas adicionais são colocadas, conforme Figura IV.10.

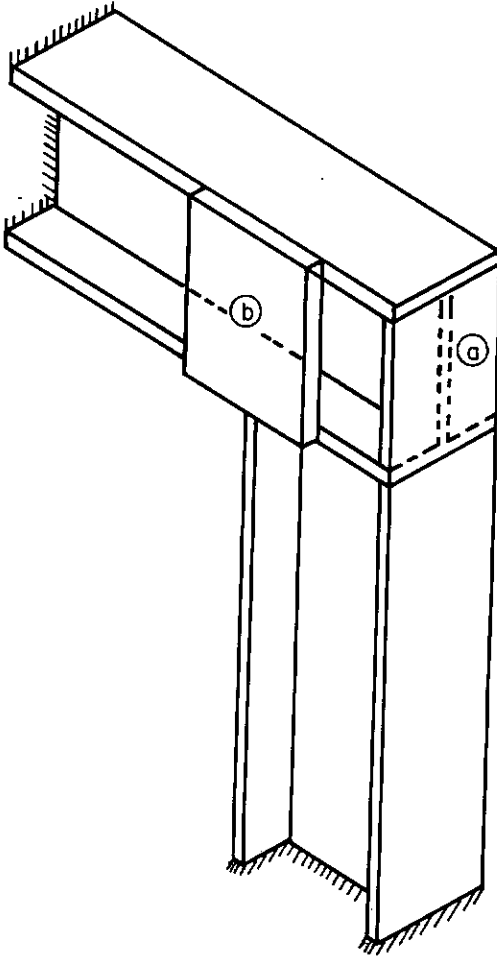


Figura IV.10 - Chapas rígidas adicionais

IV.2.2.1 - Rigidez adicional "a"

Com esta rigidez adicional, a estrutura comporta-se analogamente à estrutura original.

IV.2.2.2 - Rigidez adicional "b"

Os valores obtidos para as tensões estão nas tabelas 15 e 16 e nos gráficos 17, 18 e 19.

Tabela 15 - Tensões nas mesas de viga

x (cm)	σ_x	σ_y	τ_{xy}
453,19	16,75	- 0,75	0,20
464,16	9,36	1,75	2,70
475,12	- 0,28	- 3,20	0,13
480,75	3,08	- 5,45	- 0,48
489,16	- 0,43	- 6,26	0,76
497,56	- 3,80	- 7,66	0,59
502,44	- 2,97	- 6,23	- 0,11
510,85	- 0,46	- 1,63	- 0,73
519,25	1,78	1,56	- 0,78

Tabela 16 - Tensões nas mesas do pilar

z (cm)	σ_x	σ_y	τ_{xy}
46,57	- 0,60	0,27	0,28
57,54	- 1,28	- 0,19	1,16
68,50	- 1,84	- 0,27	- 0,10
74,51	- 1,02	0,07	- 0,38
84,19	- 1,00	0,01	- 0,34
93,87	- 0,98	- 0,02	- 0,28

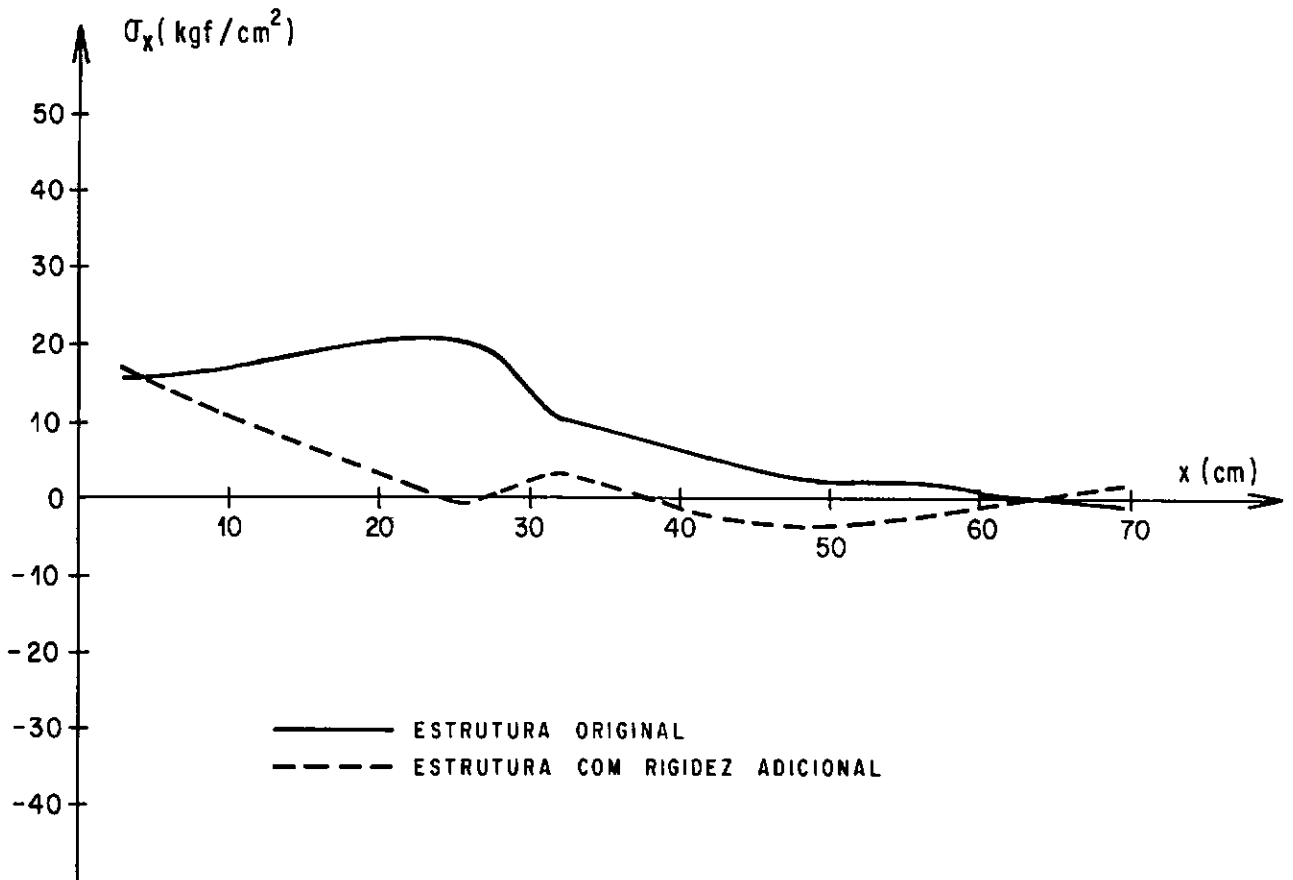


Gráfico 17 - Tensões normais (σ_x) na mesa da viga da estrutura

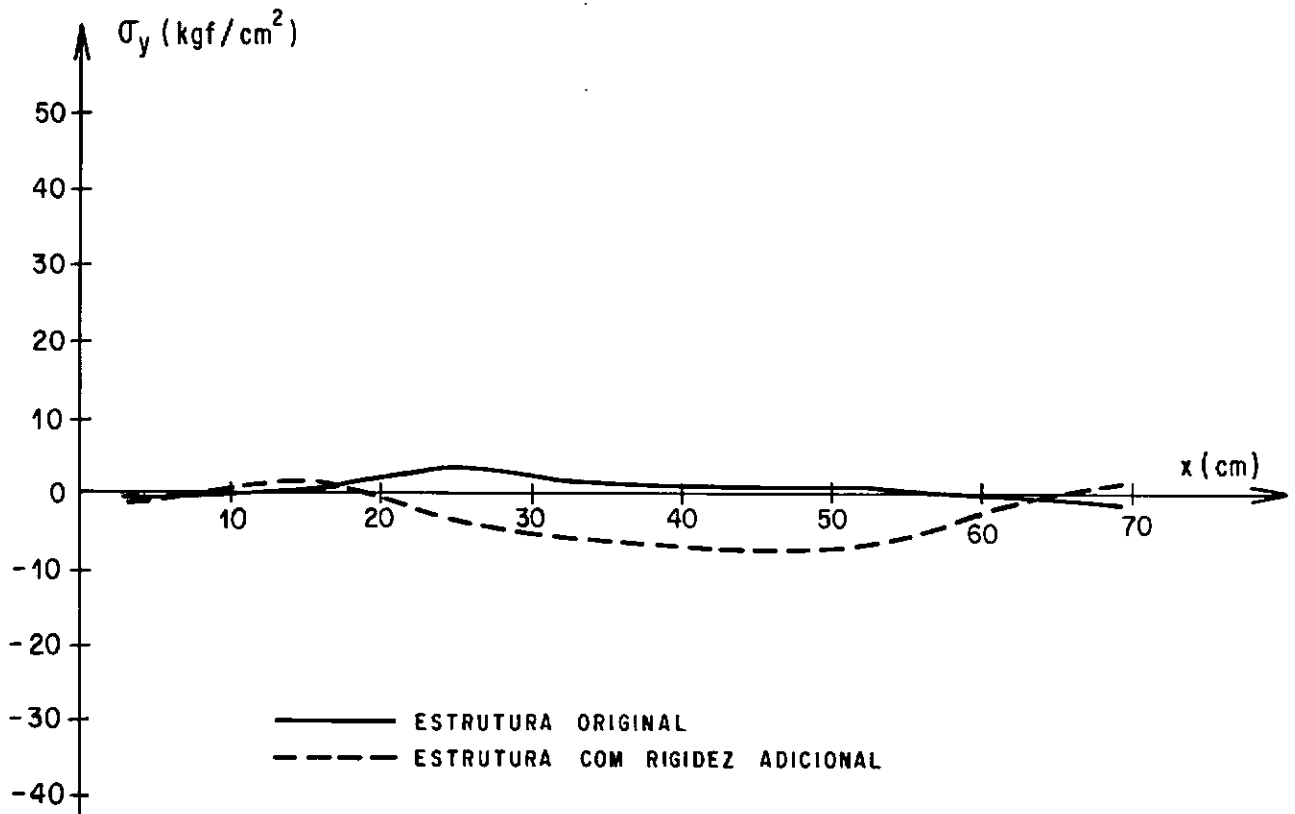


Gráfico 18 - Tensões normais (σ_y) na mesa da viga da estrutura

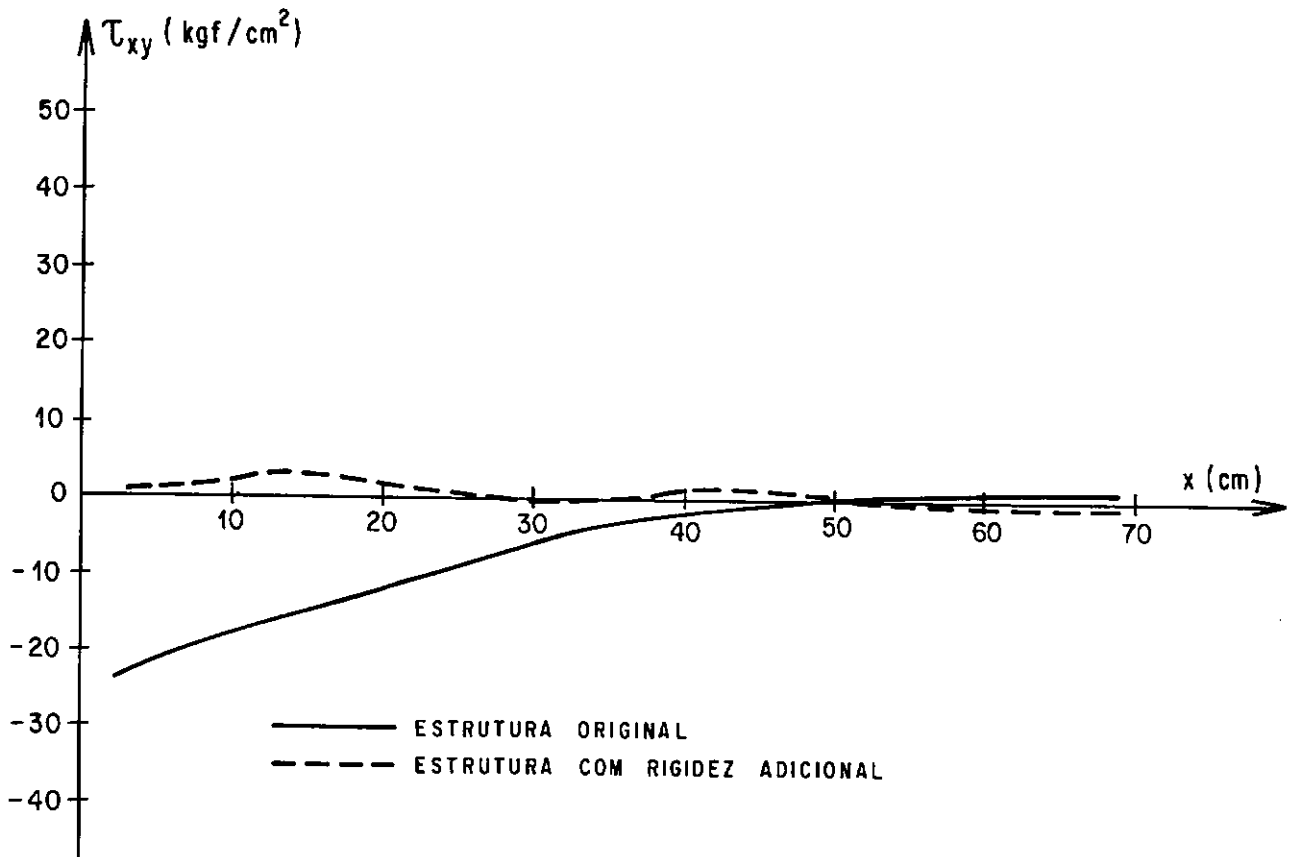


Gráfico 19 - Tensões cisalhantes (τ_{xy}) na mesa da viga da estrutura (nô)

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

No primeiro exemplo analisado, nota-se uma grande concentração de tensões nas proximidades do nó. As máximas estão localizadas em um intervalo muito pequeno. Para diminuir a grandeza do pico colocaram-se três tipos de rijezas adicionais, B, C e D.

- Com a colocação da rigidez tipo B, as tensões normais ao longo das mesas, onde assumem os maiores valores, decaem de 11,2%, proporcionando uma melhor distribuição. De maneira idêntica é o comportamento das demais tensões.
- Ao se introduzir a rigidez tipo C, verifica-se que as maiores tensões diminuem em apenas 0,2%; observa-se ainda que todas elas possuem o mesmo comportamento da estrutura original (tipo A).
- Para o terceiro tipo de enrijecedor (tipo D), observa-se que os valores máximos diminuem de 11,5%.

Conclui-se que para a estrutura analisada, os enrijecedores tipos B e D são eficientes. O tipo C não proporcionou nenhuma redução de tensões; a razão está na rigidez adicional introduzida, que não é majorada nos pontos em que as tensões são máximas.

Para o segundo tipo de nó analisado, exemplo dois, veri

ficou-se a influência de dois tipos de enrijecedores.

Com a colocação da chapa rígida "a", a distribuição das tensões não apresentou variação sensível.

Inserindo-se a chapa rígida "b" verifica-se que o pico das tensões diminui. Maior contribuição se obtém com relação às tensões cisalhantes, que são máximas na estrutura original onde passaram de $-23,62 \text{ Kg}^*/\text{cm}^2$ para $0,20 \text{ Kg}^*/\text{cm}^2$ (compressão-tração).

Com relação às tensões normais constata-se uma diminuição nos valores máximos e um acréscimo nos mínimos, ocasionando uma distribuição mais homogênea no interior do nó.

Conclui-se portanto que para o tipo de nó analisado, a chapa rígida "b" mostrou-se um eficiente enrijecedor, tornando-se a conselhável sua adoção quando se deseja melhorar o projeto.

De qualquer forma o trabalho realizado mostrou a viabilidade de se estudarem tensões em nós, com as particularidades das hastes escolhidas. Deve-se esta facilidade ao fato de se dispor de um programa de cascas possível de ser usado nesse estudo.

É importante acrescentar que tais resultados, tendo em vista possíveis singularidades, ocasionadas pelos ângulos reentrantes só venham a ser devidamente analisados por processos experimentais. Essa técnica pode ser por nós considerada num prosseguimento dos estudos.

Observa-se, concluindo, que o programa adotado não limita o número de nós da discretização. Se houvesse porém, uma eventual limitação, o encaminhamento adotado ainda seria viável bastaria determinar primeiramente os esforços por um cálculo aproximado, nas vizinhanças dos nós, e a partir desses valores seguir a metodologia adotada.

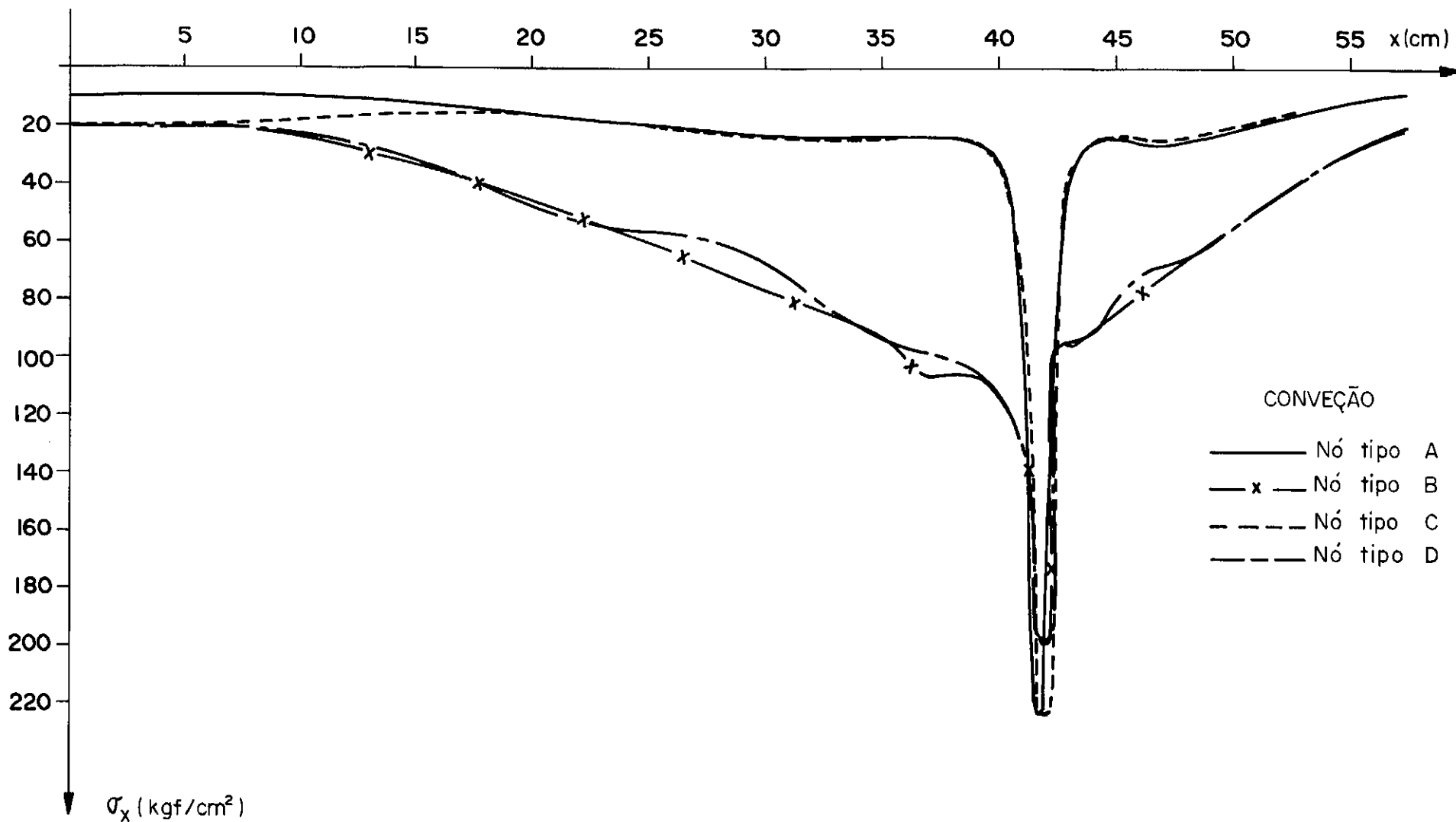


GRÁFICO 20 - SUPERPOSIÇÃO DAS TENSÕES NORMAIS (σ_x) AO LONGO DA MESA

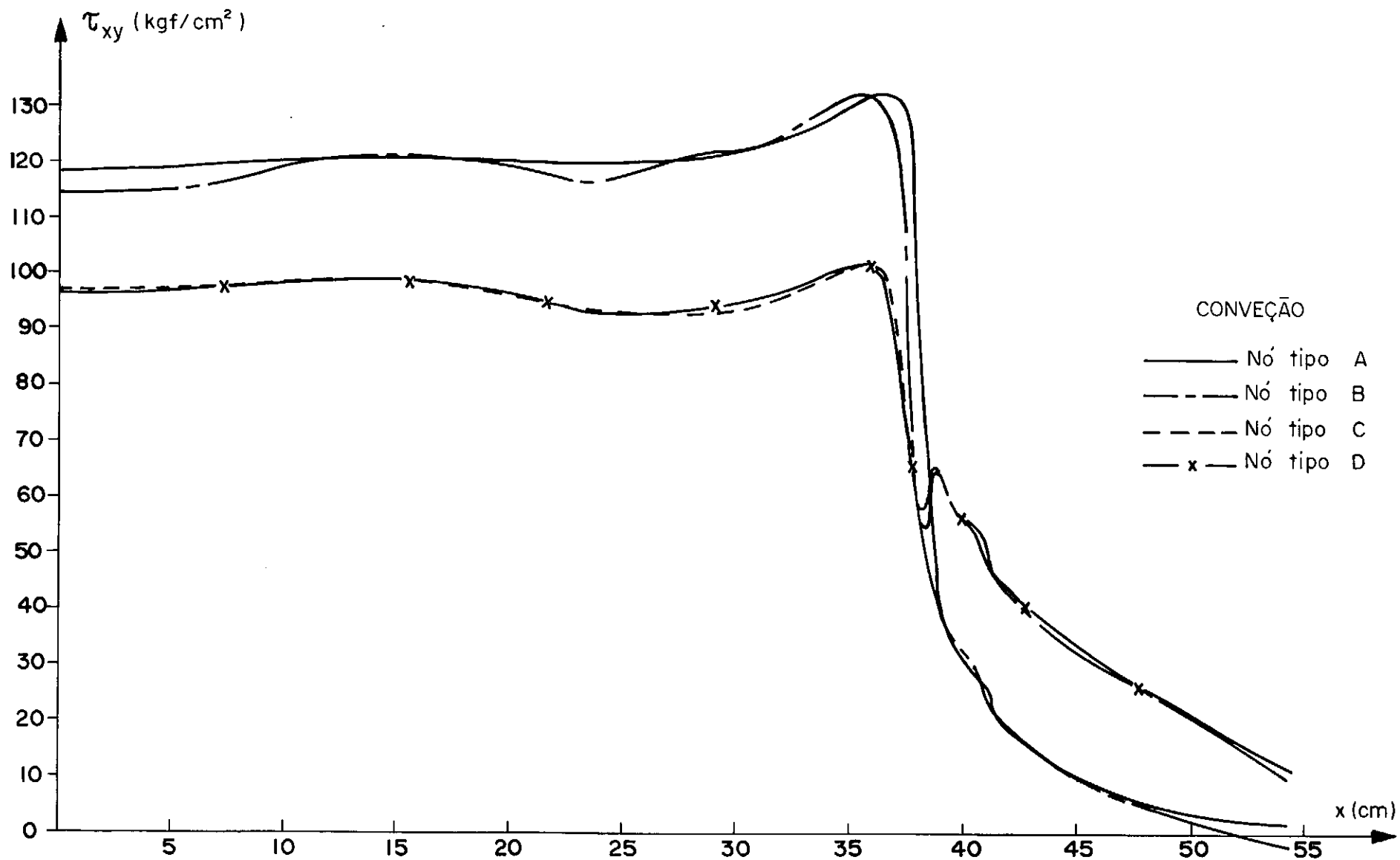


GRÁFICO 21 - SUPERPOSIÇÃO DAS TENSÕES CIZALHANTES (τ_{xy}) AO LONGO DA MESA

BIBLIOGRAFIA

1. VLASOV, V.Z. - Thin-Walled Elastic Beams-Israel Program for Scientific Translations, Jerusalém, 1961.
2. DOS SANTOS, S.M.G. - Estudo de Hastes de Paredes Delgadas com Seção Aberta-Escola Graduada de Ciências e Engenharia. PUC/RJ, Junho de 1967.
3. LANGENDONCK, T.V. - Resistência dos Materiais - Deformações II - Editora Edgard Blücher Ltda.
4. A Linguagem LORANE Linear para Análise Estrutural por Computadores - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, 1977.
5. KOLLBRUNNER, C.F.; HAJDIN, N. - Dünnwandige Stäbe mit Geradliniger Achse - Band I - Springer Verlag, 1972.
6. KOLLBRUNNER, C.F.; BASLER, L. - Torsion in Structures - Springer Verlag, 1969.
7. FEDOSIEV, I.V. - Resistência dos Materiais - Editorial Mir, 1980.
8. TIMOSHENKO, GERE - Theory of Elastic Stabilit - Mc Gran-Hill Book Company, Inc. 1961.

9. GALAMBOS, V. Theodore - Structural Members and Frames-
Prentice-Hall, Inc., 1968.
10. ZBTROHOWSKI-KOSCIA, K. - Thin-Walled Beams - From Theory
to Practice, Crosby Lockwood & Son Ltd., London,
1967.
11. CHILVER, A.H. - Thin Walled Structures - Chatto e
Windus Ltd, 1967.
12. GJELSVIK, A. - The Theory of Thin Walled Bars, Wiley-
Interscience Publication, 1981.
13. ODEN, J.T. - Mechanics of Elastic Structures - Macc Gran-
Hill, New York, 1967.
14. KUZHANOVIC-WILLEMS - Steel Design for Structural
Engineers. Prentice-Hall, Inc. 1977.
15. VACHAVAJITTIPHAN, P. and TRAHAIR, N.S., Varping and
Distortion at I. Section Joints, Journal of the
Structural Division, ASCE, Vol. 100, No. ST3, p.p.
546-564, March, 1974.
16. RIBEIRO, F.L.B. - Formulação Hierárquica do Método dos
Elementos Finitos: Refinamento Auto-Adaptativo Versão p
Aplicado a Problemas de Elasticidade - Tese M.Sc.,
COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1986.