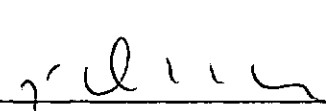


ANÁLISE DE PROBLEMAS NÃO LINEARES DE
TRANSFERÊNCIA DE CALOR PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTOURNO

JOSÉ PAULO SOARES DE AZEVEDO

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.).


Aprovada por:



PROF. JOSÉ CLAUDIO DE FARIA TELLES
(Presidente)



PROF. WEBE JOÃO MANSUR



PROF. ANDRÉS LUDOVICO HALBRITTER

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

NOVEMBRO DE 1985

AZEVEDO, JOSÉ PAULO SOARES DE

Análise de Problemas Não-Lineares de Transferência Calor pelo Método dos Elementos de Contorno (. Rio de Janeiro, 1985)

xviii, 249p.29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc. Engenharia Civil, 1985).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro

1. Elementos de Contorno
 2. Transferência de Calor
 3. Não Linearidades
- I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

A CECILIA

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que tornaram possível a realização deste trabalho. Em particular gostaria de agradecer:

Ao Luiz Wrobel pela orientação, críticas, estímulo e amizade demonstrada ao longo de toda a tese.

A ele e aos professores Telles e Webe pelo aprendizado teórico e prático do método dos elementos de contorno e pela oportunidade de participar do desenvolvimento do sistema de proteção catódica em estruturas off-shore (PROCAT) através do convênio COPPE/PETROBRÁS.

À minha amiga Lilian pelos nossos estudos de Cálculo, Física e Cálculo Numérico durante o básico da Escola de Engenharia da UFRJ; tais estudos se mostraram de grande valor na confecção deste trabalho.

Aos meus pais e irmãos pelo apoio constante.

À Angela e André pelo excelente trabalho gráfico.

À Sueli pelo excelente trabalho de datilografia apesar da grande quantidade de símbolos matemáticos.

Aos amigos do departamento de Análise de Tensões (TM5) da NUCLEN com quem tive oportunidade de trabalhar durante dois anos enquanto fazia a tese em tempo parcial e que sempre me incentivaram, principalmente David e Fernando.

Às bibliotecas do LCC-CNPq, do CT da COPPE/UFRJ, CENPES/PETROBRÁS, I.F.-UFRJ e CIN/CNEN pelo acesso a muitas informações aqui usadas; Às bibliotecárias, em geral, e à Solange (CT/COPPE) e Jane (CENPES/PETROBRÁS) pela sua excepcional boa vontade.

Ao apoio financeiro do Pronuclear (CNEN/CNPq); este apoio apesar de estar muito longo do que deveria ser, foi de valor inestimável para que conseguisse concluir a tese após me desligar da NUCLEN.

À minha esposa Cecília pela paciência e apoio demonstrados durante toda a tese.

JOSE PAULO SOARES DE AZEVEDO

v

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

ANÁLISE DE PROBLEMAS NÃO LINEARES DE
TRANSFERÊNCIA DE CALOR PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

JOSÉ PAULO SOARES DE AZEVEDO

NOVEMBRO DE 1985

ORIENTADOR: Luiz Carlos Wrobel

PROGRAMA: Engenharia Civil

RESUMO

O presente trabalho discute a solução numérica de problemas não lineares de condução de calor usando o método dos elementos de contorno. As não linearidades aqui consideradas se referem à variação da condutividade com a temperatura e às condições de contorno e de interface não lineares.

O método dos elementos de contorno é empregado juntamente com a transformada de Kirchoff. Esta introduz a integral da condutividade como uma nova variável fazendo com que a equação que governa o problema transformado seja linear e que condições de contorno de convecção passem a ser não lineares.

O método dos elementos de contorno consiste, basicamente, na transformação da equação diferencial do problema em uma equação integral relacionando apenas valores no contorno e na discretização numérica desta equação.

Para resolver o sistema não linear de equações algébricas resultante do processo de discretização apresentamos dois esquemas de iterações diretas e introduzimos um eficiente algoritmo de Newton-Raphson.

Resultados de aplicações são apresentados a fim de demonstrar a validade das técnicas propostas.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL
FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE (M.Sc.)

ANALYSIS OF NON-LINEAR HEAT TRANSFER
PROBLEMS BY THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

JOSÉ PAULO SOARES DE AZEVEDO

NOVEMBER/1985

CHAIRMAN: Luiz Carlos Wrobel
DEPARTMENT: Civil Engineering

ABSTRACT

The present work discusses the numerical solution of non-linear heat conduction problems by the boundary element method (B.E.M.); non linearities here considered refer to the temperature dependence of the conductivity and to the non-linear boundary and interface conditions.

The B.E.M. is employed together with the Kirchhoff transform. By introducing the integral of conductivity as a new variable, the equation governing the transformed problem becomes linear and the convection boundary conditions become non-linear.

The B.E.M. consists, basically, in recasting the differential equation of the problem into an integral equation relating only boundary values, and the numerical discretization of this equation.

To solve the system of equations resulting from the discretization process we present two direct iteration schemes and introduce one efficient Newton-Raphson algorithm.

Results of applications are given in order to prove the validity of the techniques here proposed.

SIMBOLOGIA

Todos os símbolos estão definidos quando aparecem no texto pela primeira vez. Os símbolos usados com maior frequência são listados abaixo.

Símbolos Latinos

- A - Região bidimensional
- [A] - Matriz do sistema reordenado
- A_{ij} - Termo genérico da matriz do sistema de equações algébricas obtido pela aplicação Método dos Elementos de Contorno (M.E.C.)
- \bar{b} - Vetor contendo a contribuição de fontes no domínio
- $\tilde{C}(s)$ - Fator de forma
- c_p - Calor específico a pressão constante
- E - Número de elementos de contorno
- \tilde{E} - Campo elétrico
- f - Função genérica
- \tilde{f} - Vetor de termos independentes
- $\tilde{f}(r)$ - Força central
- \tilde{F} - Força - Vetor de termos independentes no espaço transformado
- g - Aceleração da gravidade
- G - Constante gravitacional
- G_{ij} - Coeficiente de influência que multiplica v_j
- h - Coeficiente de convecção (ou de filme)
- H_{ij} - Coeficiente de influência que multiplica u_j
- $H(\xi; X)$ - Função Heaviside

- I - Índice de interface
 $[I]$ - Matriz identidade
 J_{ij} - Termo genérico da matriz jacobiana
 $[J]$ - Jacobiano
 K - Condutividade térmica
 $K(u)$ - Condutividade térmica variável com a temperatura
 l - Comprimento
 L - Curva
 m - Massa
 M - Momento de dipolo
 $[M]$ - Função de interpolação da geometria
 n - Direção normal
 $\tilde{n}(S)$ - Normal unitária exterior à superfície Γ no ponto S
 $[N]$ - Funções de interpolação de u e v
 N - Número de nós do contorno
 p - Ponto campo no interior do domínio Ω
 P - Ponto campo no contorno Γ
- Ponto genérico
 q - Densidade superficial de fluxo térmico
- Carga elétrica
 q_l - Fluxo numa direção " l "
 q''' - Geração de calor por unidade de volume e por unidade de tempo
 r - Coordenada radial
- Distância entre dois pontos
 R - Emitância radiante
 $[R]$ - Matriz com os coeficientes de influência que multiplicam termos conhecidos r
 s - Ponto fonte no interior do domínio Ω

- S - Ponto fonte no contorno Γ
- t - Variável temporal
- T - Transformação que mapeia u em U
- u - Temperatura (potencial em geral)
- \tilde{u} - Vetor com os valores nodais das temperaturas
- u^* - Solução fundamental
- U - Transformada de Kirchhoff
- \tilde{U} - Vetor contendo os valores de U em todos os nós do contorno
- v - Derivada normal de u
- \tilde{v} - Vetor com os valores nodais de v
- \tilde{V} - Vetor contendo os valores de V em todos os nós do contorno
- V - Derivada normal de U
- Região tridimensional
- Energia Potencial
- v^* - Derivada de u^* com relação à normal
- W - Trabalho
- x - Coordenada cartesiana x
- \tilde{x} - Vetor com as incógnitas no contorno
- $\tilde{x}^{(e)}$ - Coordenadas cartesianas de pontos de um elemento Γ_e
- \tilde{X} - Vetor de incógnitas no espaço transformado
- $\tilde{X}^{(m)}$ - Coordenadas nodais de um elemento de contorno
- y - Coordenada cartesiana y
- z - Coordenada cartesiana z

Símbolos Gregos

- α - Difusividade térmica de um material ($=K/\mu c$)
Fator de correção dos termos de interface no esquema de It.diretas
- β - Momento de dipolo por unidade de área
- γ - Peso específico
Momento de dipolo por unidade de comprimento
- Γ - Contorno de uma região Ω
- Γ_e - Elemento de contorno genérico
- Γ_I - Interface
- Γ_{ij} - Contorno externo ($i=j$) ou interface ($i \neq j$)
- δ_{ij} - Delta de Kronecker
- $\delta(\xi; X)$ - Delta de Dirac
- Δ - Indicativo de incremento finito
- Operador Laplaciano
- ϵ - Fator de emissividade
- Resíduo
- Permissividade elétrica
- Pertence a
- η - Coordenada intrínseca
- θ - Coordenada angular
- Ângulo entre o eixo de um dipolo e o vetor posição \vec{r}
- Ângulo (sólido)
- θ - Função de resíduos no espaço transformado
- κ - Número de pontos de integração
- λ - Densidade linear de fontes
- μ - Massa específica
- Densidade volumétrica de fontes

- ξ - Ponto fonte genérico
 - Coordenada intrínseca
- ρ - Densidade volumétrica de fontes
 - Raio genérico de um círculo ou esfera
- σ - Densidade superficial de fontes
 - Constante de Stefan - Boltzmann
- Σ - Somatório
- ϕ - Função de interpolação espacial de v (ou V)
 - Fluxo térmico
- ψ - Função de interpolação espacial de u (ou U)
 - Fluxo de um campo elétrico através de uma superfície
- $\vec{\Psi}$ - Vetor de resíduos
- ω_K - Fator de ponderação de Gauss associado à abscissa K
- Ω - Região sólida na qual ocorre a condução de calor

Unidades (S.I.)

- | | | | |
|--------------------|---|--------------|----------------------|
| $^{\circ}\text{C}$ | - | Grau Celsius | Temperatura |
| J | - | Joule | Trabalho, Energia |
| K | - | Kelvin | Temperatura Absoluta |
| m | - | metro | Comprimento |

Símbolos Especiais

- [] - Matriz
- ∂ - Diferencial parcial
- ∇^2 - Laplaciano

∇ - Vetor gradiente

Sub-índices

~ - Vetor coluna
 c - Relativo a convecção
 n - Relativo a termos não lineares
 o - Relativo a termos lineares
 q - Relativo a fluxo prescrito
 r - Relativo a radiação
 u - Relativo a temperatura prescrita

Super-índices

e - Valor (de u ou v) em um ponto genérico do elemento Γ_e
 n - valor nodal no elemento Γ_e
 T - Matriz transposta
 * - Relativo à solução fundamental
 (m) - Relativo à iteração m
 (°) - Relativo à solução de partida
 - - Valor prescrito
 -1 - Inversa

ÍNDICE

CAPÍTULO I	-	INTRODUÇÃO	01
CAPÍTULO II	-	FENÔMENOS FÍSICOS E MÉTODOS MATEMÁTICOS DE SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE/ POISSON	10
II.1	-	Introdução	10
II.2	-	Transferência de Energia Térmica (Calor)	11
2.2.1	-	Princípios Gerais	12
2.2.2	-	Condução	14
2.2.3	-	Convecção	17
2.2.4	-	Radiação	19
II.3	-	Equação Diferencial da Condução de Calor e Condições de Contorno	21
2.3.1	-	Equação Diferencial da Con- dução Térmica	22
2.3.2	-	Condições de Contorno	30
2.3.3	-	Condições Iniciais	31
II.4	-	Não Linearidades	31
2.4.1	-	Não linearidade do Operador	32
2.4.2	-	Não linearidades das Condi- ções de Contorno	41
II.5	-	Outros Fenômenos Físicos regidos pe- la Equação de Laplace/Poisson	44
II.6	-	Lei de Gravitação de Newton e Pote- ncial Gravitacional	46

2.6.1 - Lei de Gravitação Univer-	46
sal	
2.6.2 - Trabalho	48
2.6.3 - Energia Potencial	49
II.7 - Lei de Coulomb e Potencial Elêtro-	
tático	53
2.7.1 - Campo Elétrico	53
2.7.2 - Fluxo do Vetor Campo Elé-	
trico através de uma Super	
fície	56
2.7.3 - Teorema de Gauss	57
2.7.4 - Trabalho no Campo Eletros-	
tático e Potencial de uma	
Carga Concentrada	60
2.7.5 - Potencial de um Dipolo ...	64
II.8 - A Função Generalizada Delta de	
Dirac	66
II.9 - Elementos de Teoria do Potencial .	74
2.9.1 - Solução Fundamental	74
2.9.2 - Potencial Gerado por Várias	
Fontes Pontuais	78
2.9.3 - Potencial Gerado por Fon-	
tes Distribuídas	79
2.9.4 - Potencial Bidimensional e	
Potencial de Camada Dupla ...	80
2.9.5 - Propriedades da Função Po-	
tencial	84
II.10 - Métodos de Solução de Problemas de	
Condução de Calor	91

CAPÍTULO III - O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS LINEARES DE CONDUÇÃO DE CALOR	98
III.1 - Introdução	98
III.2 - Formulação Direta do Método dos Elementos de Contorno para a Equação de Laplace	101
3.2.1 - Transformação da Equação de Laplace em uma Equação Integral de Contorno usando a Segunda Identidade de Green	102
3.2.2 - Obtenção da Equação Integral de Contorno usando o Método dos Resíduos Ponderados	108
3.2.3 - Obtenção da Integral de Contorno sem o uso do Delta de Dirac	112
3.2.4 - Equação Integral de Contorno para Pontos Fonte no Contorno	118
3.2.5 - Potencial e Fluxo em Pontos Internos	121
III.3 - Formulação Direta do Método dos Elementos de Contorno para a Equação de Poisson	122
III.4 - Implementação Numérica	127
3.4.1 - Discretização do Contorno.	128
3.4.2 - Coeficientes de Influência	134
3.4.3 - Expressão Matricial do Método dos Elementos de Contorno	136

	3.4.4 - Cálculo dos coeficientes de influência para os elementos constantes bidimensionais	142
	3.4.5 - Introdução das Condições de Contorno	147
	3.4.6 - Cálculo da Temperatura e Fluxos em Pontos Internos	151
	III.5 - Sub-regiões	152
CAPÍTULO IV	- O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS NÃO LINEARES DE CONDUÇÃO DE CALOR	163
IV.1	- Introdução	163
IV.2	- Condução de Calor com Condutividade Dependente da Temperatura	164
IV.3	- Esquemas Iterativos	168
	4.3.1 - Iterações Diretas com Não Linearidades Transferidas para o Vetor de Termos Independentes	169
	4.3.2 - Iterações Diretas Considerando as Não Linearidades da Matriz e do Vetor de Termos Independentes	170
	a. Condutividade Constante.	170
	b. Condutividade dependente da temperatura	172
	4.3.3 - Algoritmo de Newton-Raphson	175
	a. Condutividade Constante.	175
	b. Condutividade dependente da temperatura	180
IV.4	- Sub-regiões com condutividade dependente da temperatura	185

4.4.1 - Solução por Iterações Di- retas	186
4.4.2 - Solução pelo Algoritmo de Newton-Raphson	189
CAPÍTULO V - APLICAÇÕES	192
V.1 - Introdução	192
V.2 - Simulação de casos de transferên- cia de calor unidimensional (Exem- plo nº 1)	194
V.3 - Campo térmico em uma placa quadra da sujeita a convecção e radiação (Exemplo nº 2)	203
V.4 - Condução de calor em uma parede com condutividade dependente da temperatura (Exemplo nº 3)	205
V.5 - Condução de calor em uma placa quadrada com condutividade variá- vel (Exemplo nº 4)	210
V.6 - Distribuição de temperaturas em um cilindro longo composto de duas camadas (Exemplo nº 5)	214
V.7 - Transferência de calor não linear em um cilindro composto (Exemplo nº 6)	220
CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES	236
BIBLIOGRAFIA	241

I. INTRODUÇÃO

III. O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS LINEARES DE
CONDUÇÃO DE CALOR

I. INTRODUÇÃO

Problemas não lineares de potencial são de interesse em muitos ramos da engenharia. Na análise do elemento combustível de reatores nucleares, por exemplo, é importante que se faça um estudo rigoroso da transferência de calor para a determinação das tensões térmicas induzidas.

Neste tipo de problema ocorrem não linearidades decorrentes tanto da variação do coeficiente de condutividade térmica com a temperatura quanto da transferência de calor por radiação que se processa entre a pastilha e o revestimento.

Vários métodos aproximados têm sido empregados na solução de problemas de condução de calor, na falta de soluções analíticas capazes de representar as mais variadas geometrias e condições de contorno que ocorrem na prática.

Em presença de não linearidades a classe de problemas que podem ser resolvidos analiticamente fica ainda mais restrita, sendo quase sempre necessário recorrer a soluções aproximadas.

Problemas de condutividade variável podem geralmente ser tratados por meio de um processo iterativo que consiste em primeiro escrever as equações admitindo que as propriedades térmicas são constantes e depois ajustá-las de modo que ao final do processo a dependência da temperatura seja satisfeita [4], [52].

Outro enfoque tenta remover as não linearidades associadas à dependência da condutividade com a temperatura através da aplicação da transformada de Kirchhoff que substitui a equação diferencial não linear por uma equação linear no espaço transformado [42]. Neste espaço, condições de contorno de temperatura prescrita (ou condições do tipo Dirichlet) e condições de fluxo prescrito (ou condições do tipo Neumann) continuam lineares, enquanto que condições de contorno convectivas (ou condições do tipo Robin) tornam-se não lineares.

Esta não linearidade geralmente não é forte, mas problemas de convergência podem surgir se a transferência de calor por radiação também estiver presente [6], [40].

Em regiões compostas de mais de um material, a transformada de Kirchhoff tem que ser aplicada a cada sub-região homogênea. Mesmo admitindo um contato perfeito nas interfaces das sub-regiões, surge uma nova não linearidade. Isto se deve ao fato de termos, para pontos da interface, diferentes expressões da transformada conforme consideremos o ponto pertencente a uma ou a outra sub-região.

Ao usarmos métodos de discretização do domínio, como diferenças finitas e elementos finitos, o segundo enfoque permite que, ao longo das iterações, atualizemos apenas termos do sistema correspondentes a interfaces e condições de contorno de convecção e radiação [18].

O presente trabalho utiliza o método dos elementos de contorno juntamente com o segundo enfoque. A transformada de

Kirchhoff lineariza a equação que governa o problema e permite que apliquemos diretamente o método.

Desta forma, reunimos as vantagens da transformada presentes em métodos de domínio com as facilidades de geração de malhas e pequenas dimensões dos sistemas de equações de elementos de contorno.

O método dos elementos de contorno consiste, basicamente, na transformação da equação diferencial que governa o problema em uma equação integral relacionando somente valores das variáveis no contorno. Este é, então, discretizado em elementos nos quais se admite uma certa lei de variação espacial para a temperatura e sua derivada normal ao contorno. A partir desta discretização, as integrais no contorno são aproximadas por integrações efetuadas em todos os elementos.

As integrais, geralmente obtidas numericamente, representam coeficientes de influência entre os diversos elementos e formam um sistema de equações que relaciona a temperatura e sua derivada normal em todos os elementos que aproximam o contorno. Em presença de condições de contorno lineares, o sistema pode ser resolvido diretamente pelo método de eliminação de Gauss [8] - [11], [23].

A consideração de problemas não lineares de potencial com elementos de contorno é bastante recente. Os primeiros artigos surgiram após os trabalhos de Wrobel e Brebbia [53] - [57], que apresentaram a solução por elementos de contorno de proble-

mas lineares de potencial em regime permanente e transiente.

Em 1979 Banerjee resolveu o problema com condutividade variável por um enfoque iterativo do primeiro tipo [6]. Este enfoque, por conter uma série de desvantagens associadas à necessidade de discretização do domínio, foi superado pelo uso da transformada de Kirchhoff.

Em 1980, Akkuratov e Mikhailov [2] e em 1981 Khader e Hanna [30] e Bialecki e Nowak [6] utilizaram a transformada de Kirchhoff [12], já há muito empregada no contexto de diferenças finitas [19] e elementos finitos [18], para transformar a equação original em uma equação de Laplace na nova variável, conseguindo transferir a não linearidade do operador diferencial para as condições de contorno de convecção e radiação.

O trabalho de Akkuratov e Mikhailov repete a dedução clássica da equação integral de contorno incluindo as parcelas relativas às condições de contorno não lineares. A equação integral não linear, assim obtida, é resolvida por iterações diretas mas os detalhes do esquema não são apresentados.

Khader e Hanna [30] utilizaram um esquema de iterações diretas que se mostrou convergente nos dois tipos de não-linearidade, enquanto que Bialecki e Nowak [6] tiveram problemas de convergência em presença de condições de contorno de radiação. Nestes casos recorreram ao esquema incremental descrito em [60], ligeiramente modificado para obterem convergência.

Posteriormente, Onishi e Kuroki [33], [34] consideraram o problema de potencial em regime transiente sujeito a radiação, descrevendo-a como uma convecção não linear. Neste caso, apenas no primeiro intervalo de tempo foi necessário iterar para obter a solução transiente.

Em problemas de condutividade variável em regime permanente, no entanto, ao usarem como incôgnita o produto $K(u) \cdot u$, introduziram integrações no domínio que poderiam ser evitadas com o uso da transformada de Kirchhoff.

Skerget e Brebbia [40] e Skerget e Alujevic [41] apresentaram a solução de problemas em regimes permanente e transiente de forma análoga ao que foi feito em regime estacionário em [6]; em presença de condições de contorno de radiação também tiveram problemas de convergência, tendo sido usado o método de Brown para resolver o sistema de equações não lineares.

Um esquema mais eficiente de solução do sistema não linear usando o método de Newton-Raphson foi apresentado por Azevedo e Wrobel [3], [59].

O método tem uma taxa de convergência superior ao método de iterações diretas e, quando aplicado a problemas com condutividade variável, juntamente com a transformada de Kirchhoff, fornece expressões análogas às obtidas no caso de condutividade constante.

No presente trabalho nos restringimos ao estudo de pro

blemas não lineares de transferência de calor em regime permanente; em problemas transientes a transformada de Kirchhoff também consegue linearizar a equação que rege o problema e permite o uso das soluções lineares de elementos de contorno descritas em [57]. A cada instante de tempo a não linearidade pode ser considerada de modo iterativo, como no caso estacionário. Uma vez atingida a convergência em um instante, avança-se para o próximo instante. O avanço no tempo continua até um determinado instante ou até que se alcance o regime estacionário [34], [41].

No capítulo II, são revistos os conceitos básicos de transferência de calor necessários ao estabelecimento das equações da condução de calor e dos tipos de condições de contorno que ocorrem freqüentemente na prática.

A partir da equação geral da condução de calor, deduzimos a equação de Laplace. Esta equação tem grande importância na física matemática, não só por descrever uma série de fenômenos estacionários, mas também por servir de base para solução de outras equações mais complicadas; o ramo da matemática destinado ao estudo das soluções de equação de Laplace é denominado teoria do potencial. A apresentação de alguns elementos da teoria do potencial nos permite introduzir certos termos usados no capítulo III ao formularmos o método dos elementos de contorno. Concluímos o segundo capítulo situando o método dos elementos de contorno entre os diversos métodos matemáticos de solução de problemas de valor de contorno.

A apresentação do método dos elementos de contorno para o problema linear é feita no capítulo III onde a sistemática

do método é apresentada para a equação de Laplace em contornos arbitrários e condições de contorno lineares. Uma vez obtidas as expressões de elementos de contorno para a equação de Laplace, examinamos as modificações necessárias à consideração da equação de Poisson.

Em muitos problemas práticos, a região a ser analisada é composta de mais de um material. Neste caso, aplica-se o método dos elementos de contorno a cada sub-região e impõe-se condições de compatibilidade de temperatura e fluxo nas interfaces das sub-regiões.

Detalhes de sub-regiões são incluídos no fim do terceiro capítulo e servem de base para a discussão da não linearidade que surge nas interfaces pela aplicação da transformada de Kirchhoff.

No capítulo IV estudamos o método dos elementos de contorno aplicado a problemas não lineares de transferência de calor.

Em problemas de condução de calor com condutividade constante e condições de contorno não lineares o método dos elementos de contorno pode ser aplicado diretamente e os coeficientes de influência são os mesmos obtidos no capítulo III; a introdução das expressões das condições de contorno não lineares transforma o sistema antes linear em um sistema de equações não lineares envolvendo as incógnitas no contorno.

Quando a condutividade varia com a temperatura a aplicação direta de resíduos ponderados ou da segunda identidade de Green introduz integrações no domínio. Outra estratégia, por nós adotada, consiste em usar a transformada de Kirchhoff para retirar a não linearidade do operador e com isto permitir a aplicação do método dos elementos de contorno como descrito no capítulo III. Os coeficientes de influência continuam os mesmos que os obtidos no caso de condutividade constante pois as funções de interpolação e a solução fundamental não mudam com a transformada.

Em regiões compostas de um único material as não linearidades do operador são transferidas para as condições de contorno de convecção e radiação e o problema se reduz à solução de um sistema de equações algébricas não lineares como no caso de condutividade constante. Caso não haja condições de convecção nem radiação o problema é linear no espaço transformado.

Em regiões compostas de mais de uma região homogênea a técnica de sub-regiões descrita no capítulo III pode ser aplicada diretamente se as condutividades das sub-regiões forem constantes; condições de contorno não lineares são tratadas de modo análogo ao que é feito para uma região composta de um material apenas. Quando a condutividade de alguma sub-região variar com a temperatura podemos aplicar a transformada de Kirchhoff para remover a não linearidade da sub-região neste caso surgem outras não linearidades nas condições de interface das sub-regiões que possuem K variável com a temperatura.

As não linearidades, que podem ser reduzidas às condições de contorno e de interface, são consideradas através da solução de um sistema de equações não lineares por meio de dois esquemas de iteração direta e pelo esquema de Newton-Raphson introduzido em elementos de contorno por Azevedo e Wrobel [3], [59].

No capítulo V incluímos exemplos que comprovam a precisão e eficiência computacional das soluções obtidas por meio do método dos elementos de contorno utilizando as técnicas aqui apresentadas; no capítulo VI, mostramos as conclusões e sugestões para futuros trabalhos.

II. FENÔMENOS FÍSICOS E MÉTODOS MATEMÁTICOS
DE SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE/POISSON

II. FENÔMENOS FÍSICOS E MÉTODOS MATEMÁTICOS DE SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE/POISSON

II.1 - INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar o problema físico da transferência de calor, sua formulação matemática e dar uma idéia dos principais métodos de solução das equações diferenciais que regem o fenômeno.

A apresentação dos princípios de transferência de calor se restringe essencialmente à compreensão do fenômeno, ao exame das não linearidades e à formulação matemática do problema. Esta última compreende a dedução da equação diferencial da condução térmica em um sólido e a apresentação das diversas condições de contorno, lineares e não lineares.

Um estudo mais detalhado da transferência de calor, que não se justifica no presente trabalho, pode ser visto em vários textos como, por exemplo, [12], [19], [24], [37] e [51].

As equações e condições de contorno obtidas no problema de condução em sólidos têm uma forma semelhante às obtidas para uma série de outros fenômenos físicos que ocorrem frequentemente na natureza. Isto, além de permitir diversas analogias formais, possibilita um tratamento matemático unificado desses fenômenos.

Dentre esses fenômenos físicos, destacamos a atração

gravitacional e a interação eletrostática. Por meio deles, introduzimos os conceitos de fontes (massas no caso gravitacional e cargas no caso eletrostático) e de potencial. Estes conceitos e suas generalizações conduzem à teoria matemática do potencial [29], [43], que merece uma seção pela sua importância na física e matemática do estudo do calor. Nesta seção, além da generalização do conceito de fontes e dipolos, incluimos o teorema de Gauss e as identidades de Green por serem fundamentais na obtenção das expressões de elementos de contorno.

Na última seção apreciamos os diferentes métodos de solução de problemas de valor de contorno. Nesta apreciação procuramos mostrar as dificuldades enfrentadas ao tentarmos resolver os problemas e como, em função dessas dificuldades e do desenvolvimento dos computadores digitais, surgiram novos métodos de solução, entre os quais está o método dos elementos de contorno.

II.2 - TRANSFERÊNCIA DE ENERGIA TÉRMICA (CALOR)

Em diversas áreas da engenharia é fundamental que possamos determinar campos térmicos. O conhecimento destes campos pode ser o objetivo final de uma análise como, por exemplo, no estudo de isolamento térmico de máquinas e prédios, ou apenas uma etapa intermediária como ocorre na análise de tensões térmicas que surgem em estruturas e componentes (admitindo-se que possamos desacoplar as duas análises).

Para que possamos resolver o problema térmico devemos nos basear nas leis físicas, obtidas experimentalmente, e a par-

tir delas deduzir as expressões matemáticas correspondentes. A apresentação das leis físicas, feita a seguir, contém uma parte geral e outras três específicas de cada uma das três formas de transferência de calor.

2.2.1 - Princípios Gerais

O calor é uma forma de energia associada à energia cinética dos átomos e das moléculas. Macroscopicamente ele se manifesta por sensações táteis e por meio de um potencial conhecido como temperatura.

No caso de fluidos (gases e líquidos) essa energia pode ser de translação, rotação e oscilação interna de cada molécula. Nos sólidos a energia é de oscilação de cada átomo ou molécula ao redor de uma posição de equilíbrio.

As moléculas de cada corpo ou de corpos diferentes estão sempre trocando energia. Os fluidos por choques, os sólidos por ressonância e ambos por ondas eletromagnéticas.

Em um corpo mantido a temperatura constante, a energia de cada molécula varia constantemente por trocas com moléculas vizinhas. O que é constante e determina a sua temperatura é a distribuição estatística da energia entre as partículas do corpo.

A transferência de calor se dá segundo duas leis fundamentais. Uma delas, a da conservação de energia, estabelece que a energia fornecida a um sistema é igual à energia armazenada no sistema mais a energia tirada do sistema. A outra define o ca-

lor como uma modalidade de energia que se transfere apenas em virtude de um gradiente negativo de temperatura, ou seja, que a transferência de calor ocorre sempre que no mesmo sistema existam diferenças de temperatura e se processa das regiões de temperatura mais elevada para as regiões de menor temperatura. Enquanto se processam as variações de temperatura costuma-se referir a um fluxo, transmissão ou transferência de calor.

O fenômeno é semelhante a outros fenômenos de transporte como a difusão, a percolação de água em solos e a eletrólise que ocorre em proteção catódica. Esta semelhança levou os primeiros pesquisadores a imaginar que o processo de transferência de calor fosse o de um fluxo de um fluido invisível e sem peso chamado calórico. O abandono dessa idéia foi parte do desenvolvimento da física nos dois últimos séculos.

Das experiências de Rumford e Joule é que surgiu a idéia de que o fluxo de calor é uma transferência de energia que ocorre exclusivamente em virtude de diferenças de temperatura. A palavra calor deveria ser usada apenas ao se referir a este tipo de transferência de energia e quando esta transferência se completar, significar a quantidade total de energia assim transferida.

De um ponto de vista macroscópico, a transferência de calor entre sistemas a temperaturas diferentes pode se dar por condução, convecção ou radiação. Neste contexto entendemos sistema como qualquer região do espaço e seu conteúdo, que pode ser isolada ou assim considerada para efeito de observação.

Na verdade nenhuma modalidade ocorre sozinha, mas muitas vezes o efeito de uma ou até duas delas pode ser desprezado em face da participação da(s) outra(s).

A seguir examinamos cada uma das modalidades separadamente, a fim de escrevermos as equações da condução e as expressões das condições de contorno.

2.2.2 - Condução

Na condução, o calor se transmite sem deslocamento apreciável das partículas. Esta é a forma predominante de transferência de calor em sólidos onde os átomos estão em posição de equilíbrio no retículo cristalino em torno do qual podem oscilar; estas vibrações são mais intensas para temperaturas mais elevadas e se transmitem por ressonância das regiões mais quentes para as regiões mais frias.

A transmissão por condução também ocorre nos líquidos e gases, mas é muito difícil não ser acompanhada por convecção pois o aquecimento ou resfriamento dos fluidos, em geral, provoca correntes convectivas.

Consideremos, no interior de uma massa sólida, uma superfície infinitesimal. Definimos o fluxo térmico através desta superfície como a quantidade de calor que atravessa a superfície por unidade de tempo, ou seja,

$$d\phi = \frac{dQ}{dt} \quad (2.1)$$

Observa-se, experimentalmente, que o calor se conduz entre pontos próximos proporcionalmente à diferença de temperatura entre eles e que para uma mesma diferença de temperatura, o fluxo é tanto maior quanto menor a espessura e quanto maior a área da superfície.

Estas observações experimentais podem ser sintetizadas na seguinte expressão:

$$d\phi = -KdS \frac{\partial u}{\partial n} \quad (2.2)$$

onde $d\phi$ é o fluxo através da superfície elementar dS , K é uma característica do meio conhecido como condutividade térmica e $\frac{\partial u}{\partial n}$ representa a variação infinitesimal da temperatura u na direção da normal n à superfície. O sinal menos considera o fato de que se ao percorrermos a direção positiva n a temperatura aumenta ($\frac{\partial u}{\partial n} > 0$) o fluxo de calor se dará no sentido contrário, que corresponde ao calor fluindo das regiões mais quentes para as mais frias.

Outra forma de escrever esta equação é conhecida como lei de Fourier

$$q = \frac{d\phi}{dS} = -K \frac{\partial u}{\partial n} \quad (2.3)$$

onde q é a densidade de fluxo térmico.

A grandeza física que caracteriza a condução de calor

é a condutividade térmica, aqui simbolizada por K. Para que um meio seja um bom condutor é necessário que o valor de condutividade seja suficientemente elevado para que uma diferença de temperatura não muito grande implique em um fluxo de calor considerável. No caso dos isolantes, o baixo valor de condutividade faz com que mesmo com grandes diferenças de temperatura, o fluxo de calor seja desprezível.

Mesmo nos sólidos, onde a forma predominante de transferência de calor é a condução, devido ao fato de neles o espaçamento interatômico ser menor que nos fluidos, a condutividade pode variar bastante. Ela é alta em metais e ligas e baixa nos materiais isolantes.

Dentre os vários fatores que influem no valor da condutividade de um material estão a temperatura, o peso específico aparente e a umidade.

Para os materiais de estrutura cristalina a condutividade diminui com a temperatura, ao contrário do que se passa com as substâncias amorfas e ligas em geral.

O aumento da porosidade dos materiais faz com que a condutividade diminua, em virtude do efeito isolante dos pequenos espaços de ar existentes. Tal efeito será tanto maior quanto menores as dimensões de cada poro, de modo a impedir a transferência de calor por radiação e convecção.

Quanto mais úmido estiver o material, maior será a con

ductividade, pois a água que passa a ocupar os poros conduz muito mais que o ar.

2.2.3 - Convecção

O termo convecção se aplica à transferência de calor de um lugar para outro pelo movimento macroscópico de partículas de fluidos (líquidos ou gases). As partículas do fluido em contato com uma superfície aquecida recebem calor desta e aumentam de volume. Isto cria uma diferença de densidade que faz com que as partículas mais quentes se desloquem para cima enquanto que as partículas mais frias das camadas superiores se deslocam para baixo. As correntes que assim se estabelecem recebem o nome de correntes de convecção.

Muitas vezes as correntes de convecção criadas pela diferença de densidade (convecção livre ou natural) são insuficientes para certos fins e nestes casos podemos aumentá-las por meio da ação de componentes mecânicos como bombas e ventiladores (convecção forçada).

A teoria matemática da convecção de calor é bastante complexa. Não há uma equação simples para a convecção como a que existe para a condução. Isto se deve ao fato de que o calor trocado por uma superfície aquecida em contato com um fluido depende de vários fatores como:

- se a superfície é plana ou curva
- se a superfície é horizontal ou vertical

- se o fluido em contato com a superfície é um gás ou um líquido
- da densidade, viscosidade, calor específico e condutividade térmica do fluido
- se o regime de escoamento é laminar ou turbulento
- se ocorre evaporação, condensação ou formação de películas.

No caso de convecção forçada encontramos, em geral, uma distribuição de temperatura normal à parede e à trajetória do escoamento do fluido. Como mostrado na figura 2.1, a uma certa distância da superfície aquecida, a temperatura do fluido u_b se mantém praticamente constante.

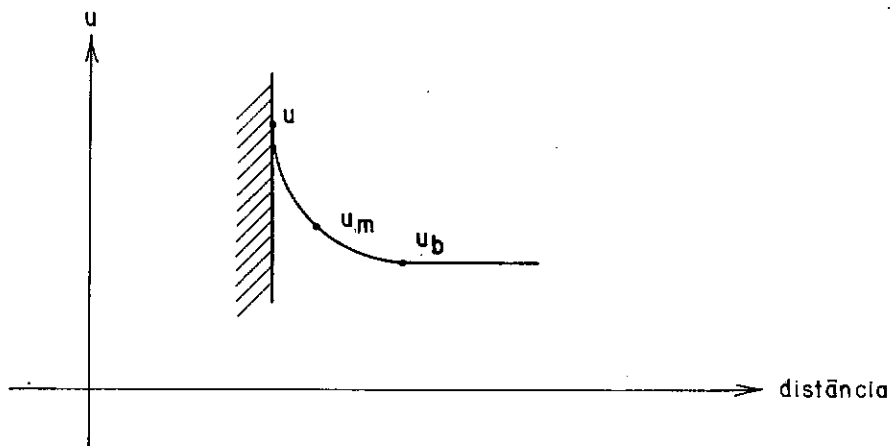


FIGURA 2.1 - Distribuição de temperaturas em um fluido em contato com uma superfície aquecida.

O procedimento adotado nos cálculos práticos consiste em se definir um coeficiente de convecção h . Este coeficiente é também conhecido como coeficiente de filme por depender da condução que se processa em uma camada estacionária bem fina (filme) do fluido em contato com a superfície aquecida.

Escolhendo a temperatura do fluido a uma certa distância da superfície (u_b) ou uma temperatura média do fluido (u_m) como representativa do fluido (u_c) e supondo que um fluxo térmico ϕ atravessa uma área S sobre a qual u e u_c podem ser admitidos constantes, ou tomando o limite $q_c = d\phi/dS$, podemos definir o coeficiente de filme como

$$h = \frac{q_c}{(u - u_c)} \quad (2.4)$$

O valor de h depende não apenas da temperatura, mas também das propriedades térmicas do fluido, da geometria do sistema e da característica dinâmica do tipo de escoamento. A determinação de coeficientes de filme é feita em parte por análise dimensional e em parte por uma série elaborada de experiências.

Uma quantidade enorme de pesquisas neste campo foi realizada nos últimos anos, resultando em tabelas e gráficos razoavelmente completos que fornecem aos físicos e engenheiros os coeficientes de convecção próprios a diversas configurações frequentes.

2.2.4 - Radiação

O termo radiação térmica se refere à emissão da energia térmica como ondas eletromagnéticas, sua propagação sem necessidade de meio material e sua recepção por um corpo onde elas são convertidas novamente em calor. As radiações térmicas são emitidas por todos os corpos a uma temperatura acima do zero ab-

soluto e são absorvidas por corpos opacos a determinados comprimentos de onda; as leis que regem esta forma de transmissão são completamente diferentes das leis da condução e convecção.

Não apenas a quantidade mas também a composição da energia emitida pelo corpo depende da temperatura. A cada temperatura a energia radiante emitida é uma mistura de ondas de comprimentos diferentes. As baixas temperaturas a taxa de radiação é pequena e a energia radiante consiste, principalmente, de comprimentos de onda relativamente longos. Quanto mais elevada a temperatura, maior é a frequência de radiação que ele emite com mais intensidade.

A qualidade e a quantidade de energia radiante emitida por um corpo dependem da área da superfície, do grau de polimento desta, da natureza da substância e da temperatura absoluta.

Medidas experimentais da taxa de emissão de energia radiante da superfície de um corpo foram feitas por Tyndall e Stefan. Em 1879, Stefan concluiu que a taxa de emissão cresce proporcionalmente à quarta potência da temperatura absoluta, podendo ser expressa pela relação:

$$R = \sigma \epsilon u^4 \quad (2.5)$$

onde R é a emitância radiante, i.e., a energia radiante que uma superfície emite por unidade de tempo e por unidade de área;

σ é a constante de Stefan-Boltzmann que vale $5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$; u é a temperatura, em Kelvin, da superfície e ϵ é uma grandeza, que varia de 0 a 1, chamada emissividade da superfície. Para uma mesma temperatura a emissividade depende da natureza da superfície sendo, geralmente, maior para superfícies ásperas.

Para uma superfície externa de um corpo, trocando energia por radiação com uma superfície à temperatura u_r , a taxa efetiva de transferência de energia radiante, por unidade de área, é dada por

$$R_{ef} = \sigma \epsilon (u^4 - u_r^4) \quad (2.6)$$

II.3 - EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA CONDUÇÃO DE CALOR E CONDIÇÕES DE CONTORNO

A seguir apresentamos uma forma intuitiva de se obter a equação da condução de calor. Outro modo de obtê-la é através do conceito da divergência, que aqui aparece como um passo intermediário. Um caso particular da equação de condução, conhecido como equação de Laplace, serve de ligação da teoria física de condução de calor com a teoria matemática do potencial.

Reunimos também as várias expressões das condições de contorno na forma em que serão usadas na formulação de elementos de contorno.

2.3.1 - Equação Diferencial da Condução Térmica

A condução de calor em um corpo pode ser caracterizada pela sua distribuição de temperatura. A temperatura u é função da posição do ponto P considerado e do instante de tempo t em que se faz a observação, ou seja,

$$u = f(P,t)$$

Se a temperatura varia, existem fluxos térmicos dirigidos dos lugares de maior temperatura para os de menor temperatura.

Nos casos em que a distribuição espacial de temperaturas não varia com o tempo, diz-se que a transferência de calor se processa em regime permanente ou estacionário. Caso contrário, diz-se que a transferência de calor se processa em regime transiente.

Consideremos um ponto $P(x,y,z)$ do domínio de um corpo sólido e construamos um paralelepípedo elementar de arestas dx , dy e dz tendo P como um de seus vértices como mostrado na figura 2.2.

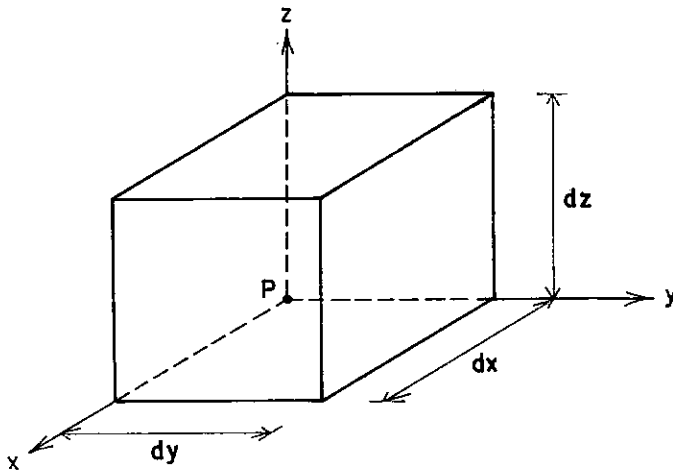


FIGURA 2.2 - Paralelepípedo elementar sujeito a condução de calor.

Na direção x , a quantidade de calor que entra por unidade de tempo no paralelepípedo elementar, pela face perpendicular ao eixo x que contém o ponto P , é

$$dQ_e = q_x \cdot (dy \cdot dz) \cdot dt \quad (2.7)$$

onde q_x é a densidade (superficial) de fluxo na face considerada.

A quantidade de calor que sai por unidade de tempo pela outra face perpendicular ao eixo x é

$$dQ_s = \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot (dy \cdot dz) \cdot dt \quad (2.8)$$

O balanço térmico, na direção x , nos fornece a quantidade de calor escapando do paralelepípedo por unidade de tempo nesta direção

$$dQ_x = dQ_s - dQ_e = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz dt \quad (2.9)$$

que também pode ser escrita como

$$dQ_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} d\Omega dt, \quad (2.10)$$

onde $d\Omega = dx dy dz$ é o volume elementar.

Fazendo o balanço térmico nas direções y e z obtemos

$$dQ_y = \frac{\partial q_y}{\partial y} d\Omega dt \quad (2.11)$$

$$dQ_z = \frac{\partial q_z}{\partial z} d\Omega dt \quad (2.12)$$

A quantidade total de calor que escapa do volume elementar $d\Omega$ é obtida pela soma das contribuições nas três direções:

$$dQ_d = \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) d\Omega dt \quad (2.13)$$

Podemos escrever a equação (2.13) de uma forma mais compacta e independente do sistema de coordenadas por intermédio do produto escalar

$$dQ = \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{q}} d\Omega dt \quad (2.14)$$

onde $\underline{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]$ é o operador vetorial nabla em coordenadas cartesianas; o produto escalar $\underline{\nabla} \cdot \underline{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$ é conhecido como divergência do campo $\underline{q} = (q_x, q_y, q_z)$ por corresponder a uma densidade volumétrica de fluxo saindo (divergindo) do volume elementar.

Usando a definição de fluxo dado em (2.1) na expressão (2.14) obtemos

$$d\phi = \frac{dQ}{dt} = \underline{\nabla} \cdot \underline{q} \, d\Omega \quad (2.15)$$

O fluxo total que sai do paralelepípedo elementar pode ser escrito como o somatório dos fluxos nas faces $\Sigma \underline{q} \cdot \underline{n} d\Gamma$.

Esta expressão, em forma integral, é conhecida como teorema da divergência ou teorema de Gauss.

$$\int_{\Omega} \underline{\nabla} \cdot \underline{q} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \underline{q} \cdot \underline{n} \, d\Gamma \quad (2.16)$$

Suponhamos que uma pequena quantidade de calor dQ seja transferida entre o sistema em estudo (paralelepípedo elementar) e sua vizinhança.

Se, durante o processo, o sistema sofre uma mudança de temperatura du , sem que haja mudança de estado, define-se o calor específico do sistema como

$$c = \frac{dQ}{m du} \quad (2.17)$$

onde $m = \mu d\Omega$ é a massa do paralelepípedo elementar

e μ é a massa específica do material.

Quanto maior o calor específico de uma substância, maior deve ser a quantidade de calor cedida a uma determinada massa para que tenhamos um mesmo aumento de temperatura.

Se a mudança da temperatura du ocorre durante um tempo dt , temos

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt \quad (2.18)$$

Isto nos permite escrever a seguinte expressão para a quantidade de calor armazenada no paralelepípedo elementar durante o intervalo de tempo dt :

$$dQ_a = \mu c \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega dt \quad (2.19)$$

O calor produzido no interior do paralelepípedo é dado por

$$dQ_p = q'''' d\Omega dt \quad (2.20)$$

onde q'''' é o calor gerado por unidade de volume e na unidade de tempo.

Pela lei de conservação da energia, temos que o calor que escapa do volume elementar é igual ao calor produzido menos o calor acumulado.

$$dQ_d = dQ_p - dQ_a \quad (2.21)$$

ou seja:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = q''' - \mu c \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.22)$$

Admitindo-se que as direções principais de condutividade coincidam com as direções dos eixos coordenados temos, pela lei de Fourier:

$$q_x = -K_x \frac{\partial u}{\partial x}; \quad q_y = -K_y \frac{\partial u}{\partial y}; \quad q_z = -K_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.23)$$

Substituindo estas expressões na equação (2.22) obtemos a equação diferencial de condução de calor em meios ortotrópicos, também conhecida como equação de difusão

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + q''' &= \\ &= \mu c \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Nos casos em que o meio é isotrópico mas a condutividade depende da temperatura, i.e., $K = K(u)$, a expressão (2.24)

pode ser escrita

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial u}{\partial z} \right) + q'''' = \\ = \mu c \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.25)$$

ou em forma compacta

$$\tilde{\nabla} \cdot (K \tilde{\nabla} u) + q'''' = \mu c \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.26)$$

Quando K e c podem ser admitidos constantes podemos escrever a equação da condução como

$$K \nabla^2 u + q'''' = \mu c \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.27)$$

ou

$$\nabla^2 u + \frac{q''''}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.28)$$

onde $\alpha = \frac{K}{\mu c}$ é a difusividade térmica do material e

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \text{em coordenadas cartesianas.}$$

A difusividade relaciona o calor transmitido por condução com o calor acumulado; quando K e c variam com a temperatura, α não possui significado físico próprio. Dois casos particulares da equação (2.28) extremamente importantes ocorrem quando

o regime é estacionário. O primeiro deles é a equação de Poisson obtida ao impormos a condição de estacionaridade ($\frac{\partial u}{\partial t} = 0$):

$$\nabla^2 u + \frac{q'''}{K} = 0 \quad (2.29)$$

Quando, além disso, temos uma densidade volumétrica de cargas nula obtemos a equação de Laplace

$$\nabla^2 u = 0 \quad (2.30)$$

O operador $\nabla^2 u = \nabla \cdot (\nabla u)$ ocorre freqüentemente na física e na teoria das equações diferenciais parciais e recebe o nome de Laplaciano por causa da equação de Laplace.

A equação de Laplace tem uma grande importância na física matemática e na engenharia não só por descrever uma série de fenômenos estacionários mas também por servir de ponto de partida para a solução de problemas mais complicados.

Uma prova da importância da equação de Laplace na matemática é a existência da teoria do potencial que se dedica ao estudo das soluções desta equação.

Uma vez obtida a equação que governa o problema de condução de calor em sólidos, devemos considerar as condições de contorno e as condições iniciais para que possamos definir completamente o problema da condução em sólidos.

2.3.2 - Condições de Contorno

As condições de contorno podem ser classificadas, matematicamente, em condições de Dirichlet, de Neumann e de Robin ou mistas.

Em problemas de transferência de calor a condição de Dirichlet corresponde a uma temperatura prescrita, a de Neumann a um fluxo prescrito e a condição de Robin corresponde a uma relação entre a temperatura e o fluxo, como ocorre na convecção e na radiação.

A seguir apresentamos as várias formas de condição de contorno presentes no problema de condução de calor em sólidos:

- (a) temperatura prescrita

$$u = \bar{u} \quad (2.31a)$$

- (b) fluxo prescrito

$$q = \bar{q} \quad (2.31b)$$

- (c) convecção

$$q = h(u - u_c) \quad (2.31c)$$

- (d) radiação

$$q = \sigma \epsilon (u^4 - u_r^4) \quad (2.31d)$$

A barra usada em \bar{u} e \bar{q} representa valores prescritos, distinguindo-os das variáveis u e q .

Na convecção, h é o coeficiente de filme e u_c a temperatura do fluido com o qual se troca calor por convecção.

Na radiação, σ é a constante de Stefan - Boltzmann ($5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$), ϵ é a emissividade da superfície e u_p a temperatura da outra superfície que troca calor por radiação.

2.3.3 - Condições Iniciais

Em problemas transientes, para que saibamos a distribuição de temperaturas em um tempo qualquer, é necessário que conheçamos o estado inicial do sistema ($t=0$) a partir do qual as temperaturas evoluem no tempo.

Este estado inicial é dado pelas temperaturas no interior do corpo no tempo $t=0$.

Como no presente trabalho estaremos tratando apenas de problemas de condução de calor em regime estacionário, as condições iniciais não entrarão na solução do problema.

II.4 - NÃO LINEARIDADES

Em muitas aplicações práticas, os problemas de condução de calor podem ser não lineares devido a propriedades dos materiais dependentes da temperatura, como a condutividade. Outra

não linearidade que ocorre freqüentemente em problemas de transferência de calor se deve a condições de contorno não lineares.

Não linearidades devidas a mudanças geométricas e mudanças de fase estão fora de nosso estudo.

Na apresentação das não linearidades consideramos primeiramente a não linearidade do operador diferencial e em seguida as não linearidades das condições de contorno.

2.4.1 - Não linearidade do Operador

A dependência da condutividade com a temperatura na equação (2.26) faz com que esta equação diferencial seja não linear.

Esta não linearidade pode ser removida pela aplicação da transformada de Kirchhoff [12].

A transformada pode ser escrita como

$$U = T(u) = \int_{u_0}^u K(u) du \quad (2.32)$$

Aplicando a regra da cadeia obtemos o divergente e a derivada com relação ao tempo da variável transformada:

$$\tilde{\nabla} U = K(u) \tilde{\nabla} u \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = K(u) \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.34)$$

que substituídos na equação (2.26) fornecem

$$\nabla^2 U + q'''' = \frac{\mu c}{K(u)} \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2.35)$$

que nada mais é que a equação da difusão na variável transformada, com a única diferença que a fonte distribuída no volume deixa de ser dividida pela condutividade.

No presente trabalho estamos interessados no regime permanente, o que simplifica a nossa equação transformada para

$$\nabla^2 U + q'''' = 0 \quad (2.36)$$

A transformação das condições de contorno é apresentado no capítulo IV, juntamente com a formulação de elementos de contorno para o problema não linear.

Para que possamos aplicar a transformada de Kirchhoff e sua inversa, devemos ter expressões da variação da condutividade com a temperatura. Em [40] Skerget e Brebbia propuseram três leis de variação da condutividade (exponencial, de potência e linear), juntamente com as expressões da transformada de Kirchhoff e sua inversa.. Um enfoque alternativo, aqui adotado, consiste em aproximar a curva da condutividade em função da temperatura por uma poligonal. Isto confere uma generalidade na representação das

curvas de condutividade e nos permite aplicar diretamente as expressões da transformada de Kirchhoff e sua inversa obtidas para o caso linear a cada trecho da poligonal. O grau de aproximação da curva vai depender apenas do número de segmentos utilizados; como para a maioria dos materiais usados em engenharia a curva $K \times u$ tem uma pequena curvatura o número de trechos da poligonal necessários em geral é bem pequeno.

Na figura 2.3 representamos a variação da condutividade de um material genérico com a temperatura por meio de uma poligonal.

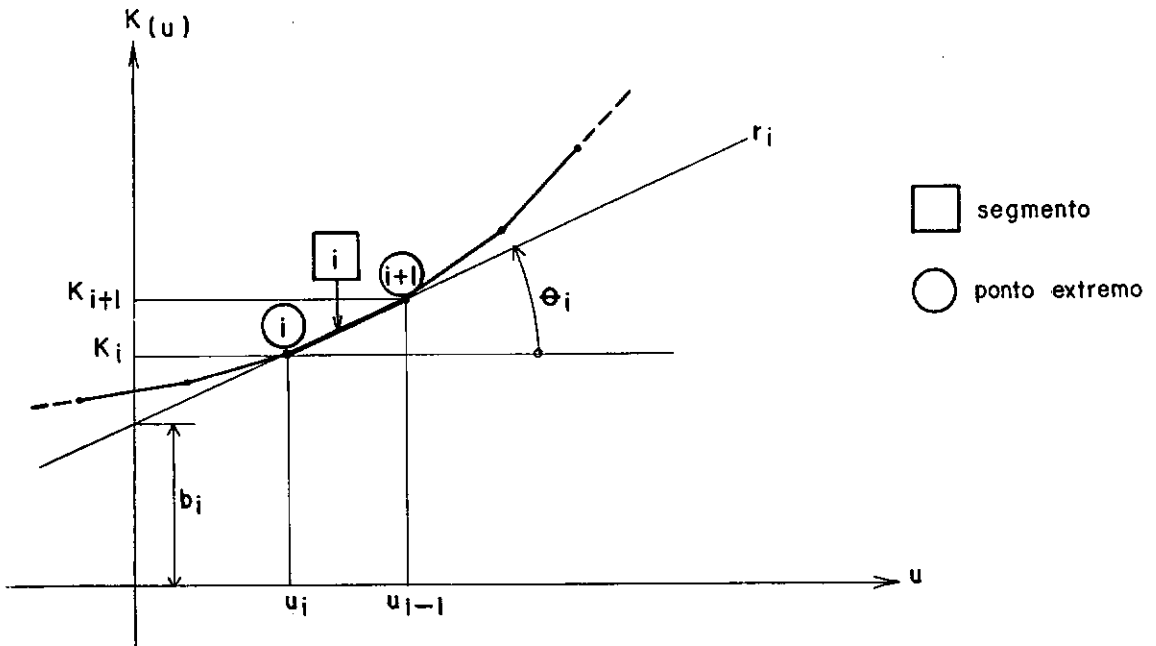


FIGURA 2.3 - Curva $K \times u$ (aproximação por poligonal).

Consideremos um segmento genérico i determinado pelos seus pontos extremos i e $i+1$. Para valores de u situados entre u_i e u_{i+1} (ver figura) a condutividade K pode ser obtida pela equação da reta r_i , suporte do segmento i :

$$K = a_i \cdot u + b_i \quad (2.37)$$

onde a_i é o coeficiente angular de r_i :

$$a_i = \operatorname{tg} \theta_i = \frac{K_{i+1} - K_i}{u_{i+1} - u_i} \quad (2.38)$$

e b_i é o valor da condutividade na interseção da reta r_i com o eixo K

$$b_i = K_i - a_i \cdot u_i \quad (2.39)$$

A expressão da transformada de Kirchhoff é obtida substituindo, na sua definição (2.32), a expressão de K :

$$U = T(u) = \int_0^u (a_i \cdot u + b_i) du = \frac{a_i}{2} u^2 + b_i u \quad (2.40)$$

A transformada, pelo significado geométrico de integral, corresponde à área sob a curva de condutividade entre u_0 e u quando u é maior que u_0 , e menos esta área caso u seja menor que u_0 . (Ver figura 2.4)

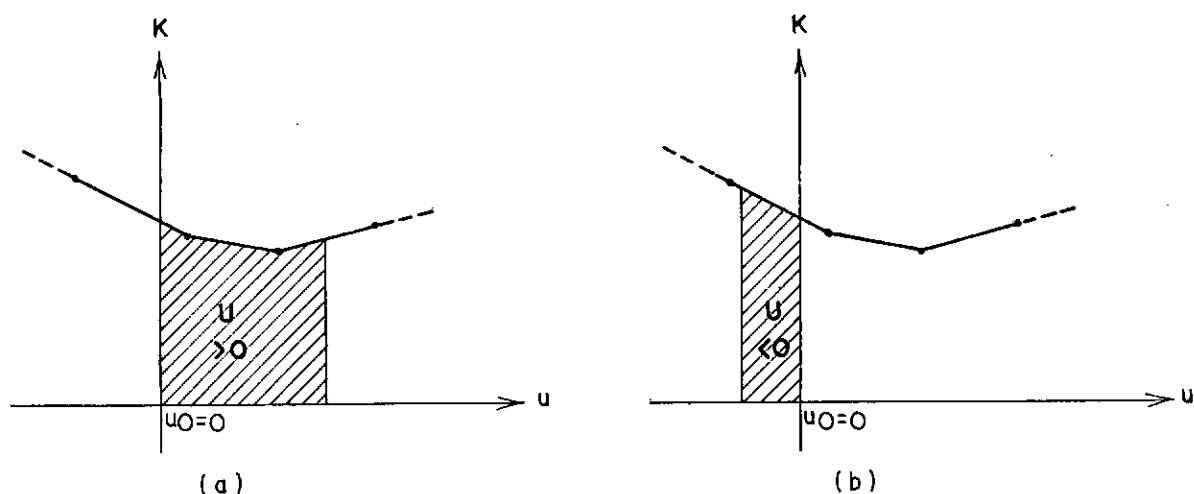


FIGURA 2.4 - Interpretação geométrica da transformada de Kirchhoff.

A temperatura de referência u_0 , aqui escolhida como igual a zero, é arbitrária e a ela corresponde um potencial constante somado a todos os pontos da região e do contorno do problema transformado. Uma vez fixada a temperatura de referência fica estabelecida uma relação de um para um entre temperaturas e suas transformadas de Kirchhoff, que permite que trabalhem no espaço transformado onde a equação diferencial é linear e retornemos ao espaço original após a solução no espaço transformado.

Computacionalmente, o cálculo da condutividade, da transformada de Kirchhoff e de sua inversa é feito a partir da definição de alguns vetores auxiliares contendo informações organizadas a nível de pontos extremos e de segmentos da poligonal que aproxima a curva $K \times u$. A numeração dos segmentos coincide com a numeração do primeiro ponto extremo de cada trecho, a fim de permitir um acesso rápido a informações dos segmentos quando estamos manipulando informações de seus pontos extremos e vice-versa.

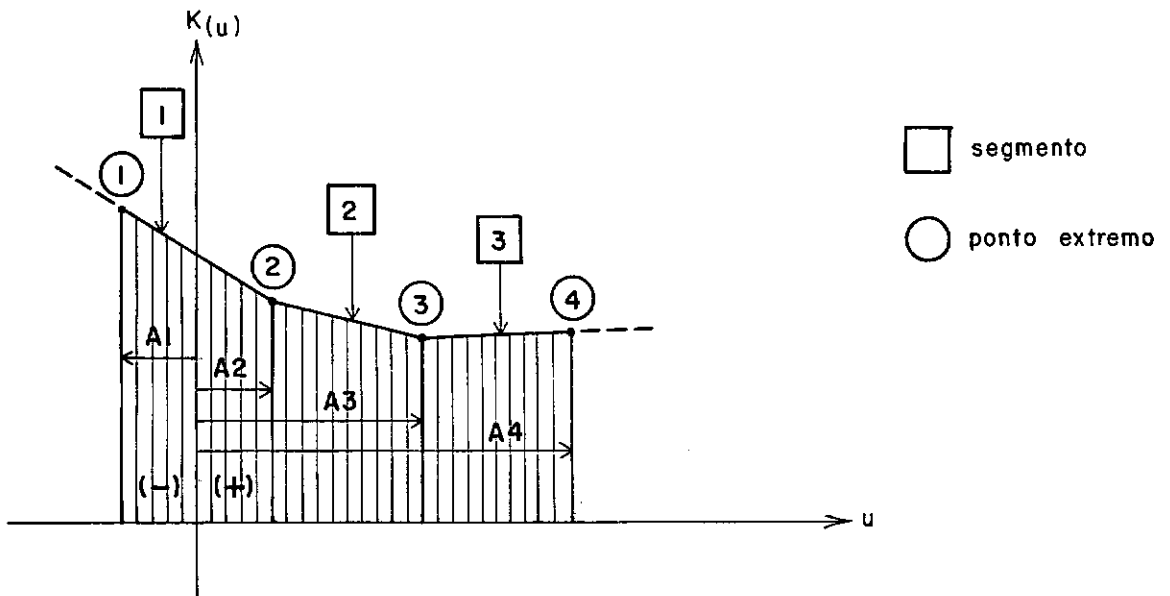


FIGURA 2.5 - Organização das informações sobre a curva $K \times U$.

Por ponto extremo guarda-se, além dos valores lidos de condutividade e temperatura, o valor da transformada de Kirchhoff obtida por meio da acumulação de áreas de trapézios a partir da origem (com sinal negativo se $u < 0$). Por segmento guarda-se o coeficiente angular da reta suporte.

Como para cada segmento ou trecho da poligonal temos uma expressão diferente para a condutividade, a transformada e sua inversa, criamos um apontador que, por comparações com os valores de potencial dos pontos extremos (ou da transformada no caso da inversa), localiza o trecho da curva correspondente ao valor de u (ou U). Nos casos em que u (ou U) coincide com o valor de um ponto extremo, os valores de κ e U (ou u) já estão calculados.

Ao usarmos um método numérico de solução da equação de condução com condutividade variável devemos efetuar os cálculos mencionados para vários pontos nodais. Como, em geral, dois pontos numerados consecutivamente são geometricamente próximos, o valor das suas temperaturas e transformadas de Kirchhoff não diferem muito. Isto nos permite usar um esquema eficiente de localização em que, partindo do último trecho pesquisado, onde conhecemos o valor de u (ou U), nos dirigimos para o trecho desejado (geralmente o mesmo ou seu vizinho).

Uma vez localizado o trecho i da poligonal correspondente ao valor de u , calculamos o valor de K a partir do valor da condutividade e temperatura no ponto i e do valor do coeficiente angular a_i :

$$K = K_i + a_i (u - u_i) \quad (2.41)$$

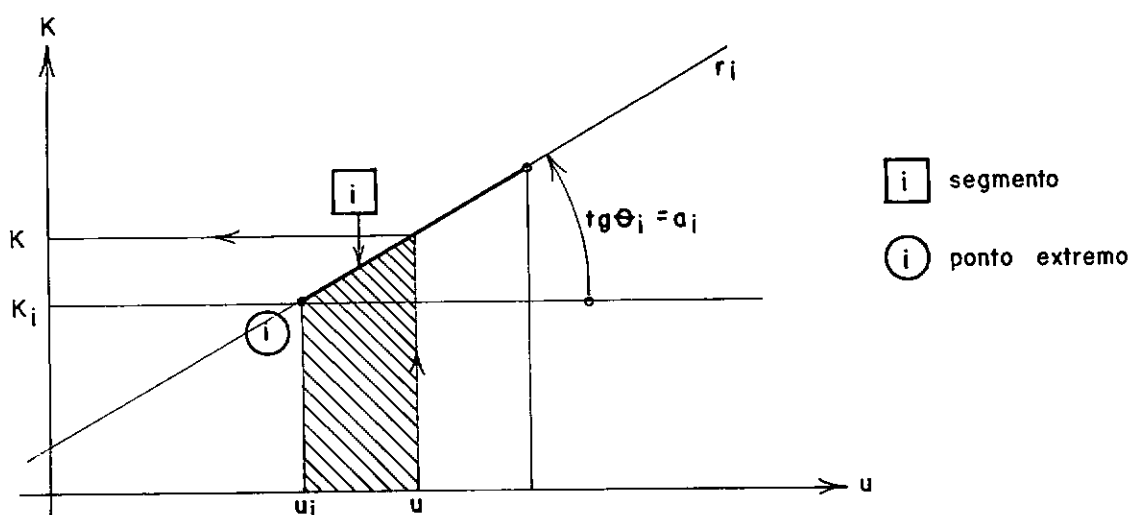


FIGURA 2.6 - Cálculo da condutividade e da transformada de Kirchhoff.

O cálculo da transformada de Kirchhoff é feito somando-se ao valor da transformada em i , a área hachurada na figura 2.6, usando o valor de K obtido acima

$$U = U_i + \frac{(K_i + K)}{2} (u - u_i) \quad (2.42)$$

No cálculo da transformada inversa temos U e queremos calcular u ; por um esquema de localização, análogo ao que foi usado para u , determinamos o trecho da poligonal correspondente ao valor de U .

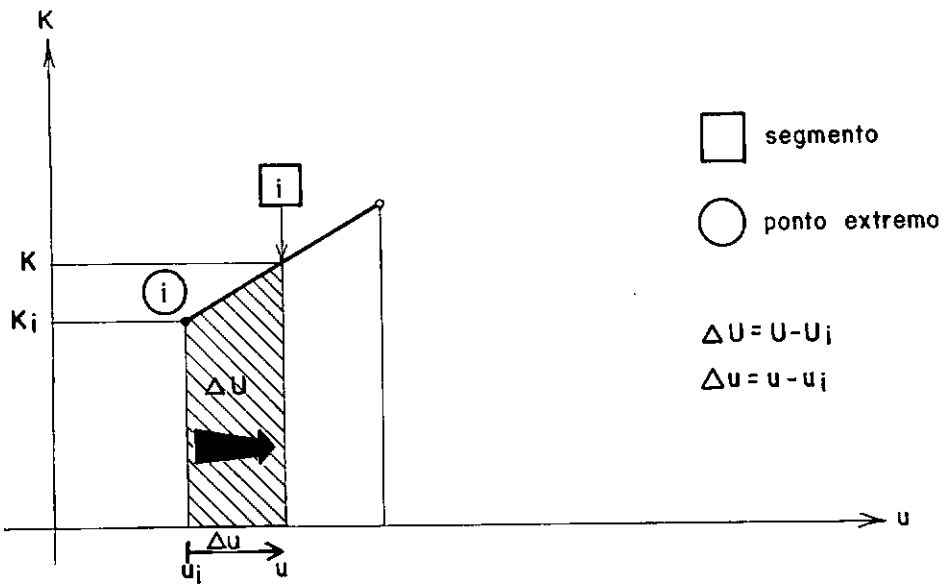


FIGURA 2.7 - Cálculo da transformada inversa.

Substituindo o valor da condutividade dado em (2.41) na expressão de transformada de Kirchhoff correspondente ao trecho i (2.42), temos:

$$2\Delta U = (2 K_i + a_i \cdot \Delta u) \cdot \Delta u \quad (2.43)$$

Esta é uma equação do segundo grau que possui duas raízes distintas:

$$\Delta u_1 = \frac{-K_i + \sqrt{K_i^2 + 2a_i \cdot \Delta U}}{a_i} \quad \text{e} \quad \Delta u_2 = \frac{-K_i - \sqrt{K_i^2 + 2a_i \cdot \Delta U}}{a_i} \quad (2.44)$$

Como no intervalo i tanto Δu quanto ΔU são positivos, (ver figura 2.7), apenas raízes positivas nos interessam. Quando o coeficiente angular a_i é negativo, as duas raízes são positivas mas apenas a menor delas está situada no intervalo i . Em todos os casos, a transformada inversa é obtida a partir de Δu_1 :

$$u = T^{-1}(U) = u_i + \Delta u_1 \quad (2.45)$$

Conforme mostrado na figura abaixo, a raiz Δu_2 conduz a valores de u fora do intervalo i , correspondentes a condutividades negativas, que carecem de significado físico.

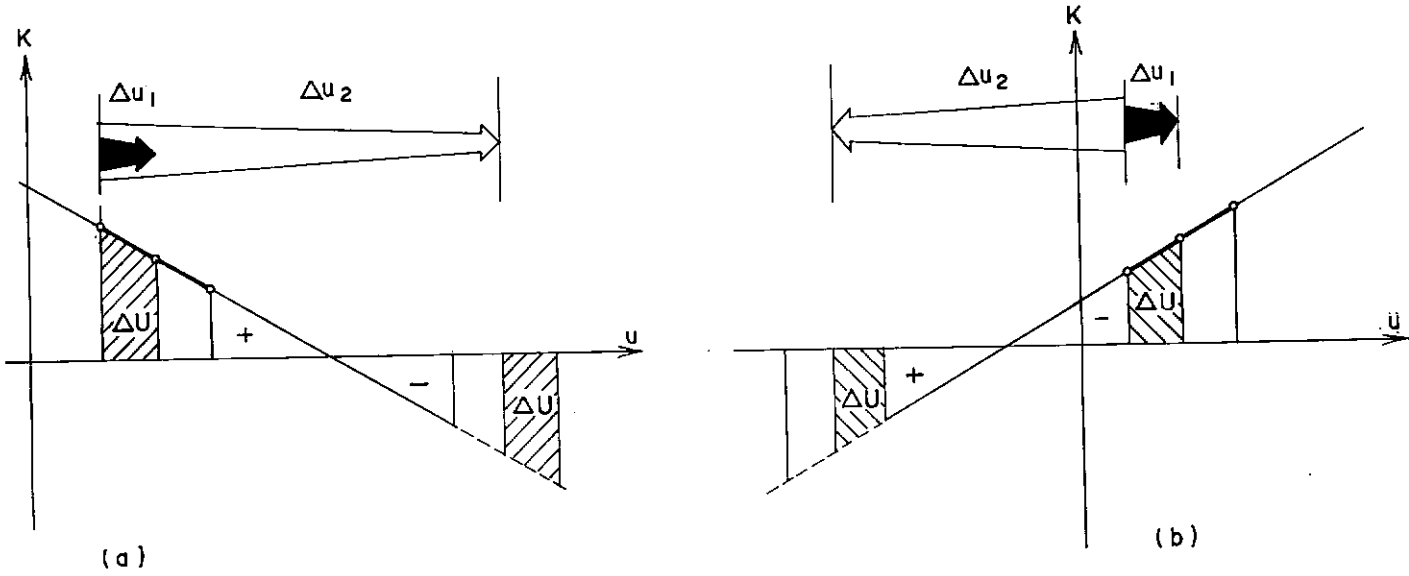


FIGURA 2.8 - Interpretação geométrica das raízes da equação (2.43):

- (a) declividade negativa
- (b) declividade positiva

Uma vez obtidas as expressões que nos permitem calcular a condutividade em função da temperatura, a transformada de Kirchhoff e sua inversa, consideraremos as não linearidades que ocorrem nas condições de contorno.

2.4.2 - Não Linearidades das Condições de Contorno

As condições de contorno de temperatura e de fluxo prescrito apresentados em 2.3.2 são sempre lineares por serem constantes; a condição de radiação é não linear, mesmo quando a emissividade é constante, devido à quarta potência da temperatura; a

condição de convecção é linear desde que o coeficiente de filme não varie com a temperatura.

Outra não linearidade surge nas condições de contorno de convecção e radiação quando os coeficientes h e ϵ variam com a temperatura.

Podemos fatorar a expressão da condição de radiação como

$$q_r = \sigma \epsilon (u^2 + u_r^2) (u + u_r) (u - u_r) \quad (2.46)$$

ou

$$q_r = h_r (u - u_r) \quad (2.47)$$

onde $h_r = \sigma \epsilon (u^2 + u_r^2)(u + u_r)$

A expressão (2.47) permite que consideremos, em esquemas de iteração direta, a radiação como uma convecção não linear na qual $h = h_r$ e $u_c = u_r$.

Vale a pena lembrar que o fenômeno da radiação é de uma natureza completamente diferente da convecção e que a substituição da expressão da radiação por uma convecção não linear é simplesmente um artifício algébrico.

Na figura abaixo apresentamos os gráficos com a varia-

ção dos fluxos com a temperatura.

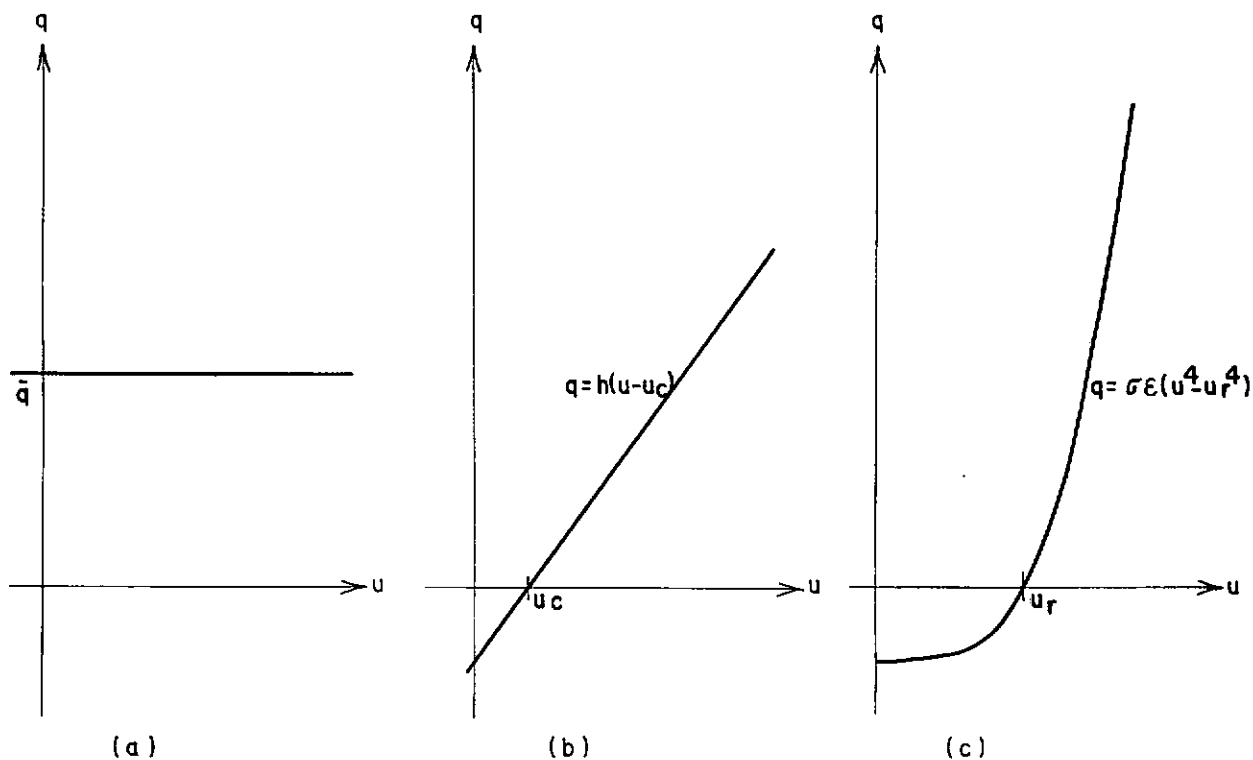


FIGURA 2.9 - Curvas de variação do fluxo com a temperatura:

- (a) fluxo prescrito
- (b) convecção linear
- (c) radiação

Da mesma forma que aproximamos curvas genéricas de variação da condutividade com a temperatura, podemos aproximar as curvas que dão a variação do fluxo com a temperatura por meio de poligonais. Este procedimento foi utilizado no contexto de proteção catódica de oleodutos e plataformas de exploração de petróleo para representar curvas de polarização [48], [49] e [58]. Nestes casos nos interessava o valor da densidade de corrente (correspondente a q) em função dos valores do potencial eletroquímico (correspondente a u) e o valor da inclinação da curva de polarização no mesmo ponto, para a solução pelo es-

quema de Newton-Raphson.

Em problemas de transferência de calor, em geral, as expressões do fluxo no contorno em função da temperatura são relativamente simples e, por isso, elas são usadas diretamente tanto nos esquemas de iteração direta quanto no de Newton - Raphson, como será mostrado no capítulo IV.

II.5 - OUTROS FENÔMENOS FÍSICOS REGIDOS PELA EQUAÇÃO DE LAPLACE/POISSON

O método de solução aqui desenvolvido para a solução de problemas de condução de calor em regime estacionário também pode ser aplicado a um grande número de outros fenômenos regidos pela mesma equação diferencial. A seguir apresentamos uma tabela que mostra alguns desses fenômenos, juntamente com as grandezas correspondentes.

Destes fenômenos a gravitação universal e a interação eletrostática ocupam um lugar de destaque por sua estreita ligação com o surgimento e desenvolvimento da teoria do potencial. Usando a lei da atração gravitacional introduzimos o conceito de potencial de uma fonte pontual em um meio infinito; o potencial do dipolo, inexistente no caso gravitacional, é obtido na eletrostática a partir do potencial de duas cargas elétricas de sinais contrários.

A partir destes dois conceitos fundamentais apresentamos alguns elementos da teoria do potencial, particularmente o

PROBLEMA FÍSICO	u	K	q'''
gravitação	potencial gravitacional	(constante gravitacional) ⁻¹	massa
interação eletrostática	potencial elétrico	permissividade	cargas elétricas (+ ou -)
condução elétrica em corrente contínua	voltagem	condutividade elétrica	fonte interna de corrente
percolação em meios porosos	carga piezométrica	permeabilidade	fonte (ou sumidouro)
movimento irrotacional de fluidos perfeitos	potencial de velocidade ou função de corrente	-	fonte (ou sumidouro)
magnetostática	potencial magnético	relutividade	densidade de corrente
torção de barras prismáticas	função de tensão	(módulo de elasticidade transversal) ⁻¹	ângulo de torção por unidade de comprimento
torção de barras prismáticas	função de empenamento	(módulo de elasticidade transversal)	-
lubrificação de Reynolds	pressão	(espessura do filme) ³ /viscosidade	fornecimento de lubrificante

Tabela 2.1 - Outros fenômenos físicos governados pela equação de Laplace/Poisson

teorema de Gauss e seus corolários.

II.6 - LEI DE GRAVITAÇÃO DE NEWTON E POTENCIAL GRAVITACIONAL

Apresentamos nesta seção a lei de gravitação de Newton e mostramos como a partir dela surge a idéia de potencial de uma massa pontual. Um tratamento mais completo pode ser encontrado em [29], [32], [43], [44].

2.6.1 - Lei de gravitação universal

A lei que define as forças de atração mútua entre corpos foi enunciada por Newton e é conhecida como lei de gravitação universal. Ela estabelece que entre dois corpos de massas m_1 e m_2 distantes r um do outro, atuam forças de atração mútua ou gravidade F_{12} e F_{21} ; pela terceira lei de Newton estas forças devem ter o mesmo módulo e sentidos contrários.

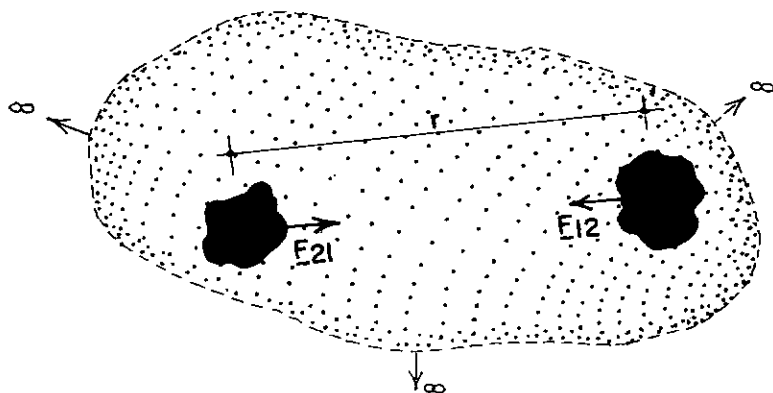


FIGURA 2.10 - Atração de duas massas.

Esta força de gravidade é proporcional ao produto das massas de ambos os corpos e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os mesmos:

$$\left| \underset{\sim 1,2}{F} \right| = \left| \underset{\sim 2,1}{F} \right| = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \quad (2.48)$$

onde G é uma constante dimensional, conhecida como constante gravitacional, cujo valor no SI (sistema internacional de unidades) é $6,65 \times 10^{-11} \text{m}^3/(\text{Kg} \cdot \text{s}^2)$.

A lei da gravidade expressa nesta forma só é válida quando as dimensões dos corpos são pequenas em comparação com as distâncias entre elas, i.e., quando os corpos podem ser considerados como pontos materiais.

A força de atração mútua entre dois corpos que não podem ser considerados pontuais, pode ser calculada admitindo-se que cada um deles é composto de partículas. Para cada partícula de um corpo, determina-se a resultante das forças de atração causadas pelas partículas do outro corpo. Somando-se este efeito em todas as partículas do primeiro corpo, temos a força que o segundo corpo causa no primeiro. Pelo princípio de ação e reação, a força que atua sobre o segundo corpo é a mesma com sinal contrário.

Quando os dois corpos são esféricos e de material homogêneo, a força gravitacional resultante está aplicada ao centro de cada esfera e o valor da força coincide com o valor que seria

obtido se as massas estivessem concentradas nos centros das esferas.

2.6.2 - Trabalho

Considere uma partícula de massa m sob ação de forças de resultante \vec{F} movendo-se ao longo de uma trajetória parametrizada pelo comprimento de arco s , como mostrado na figura abaixo.

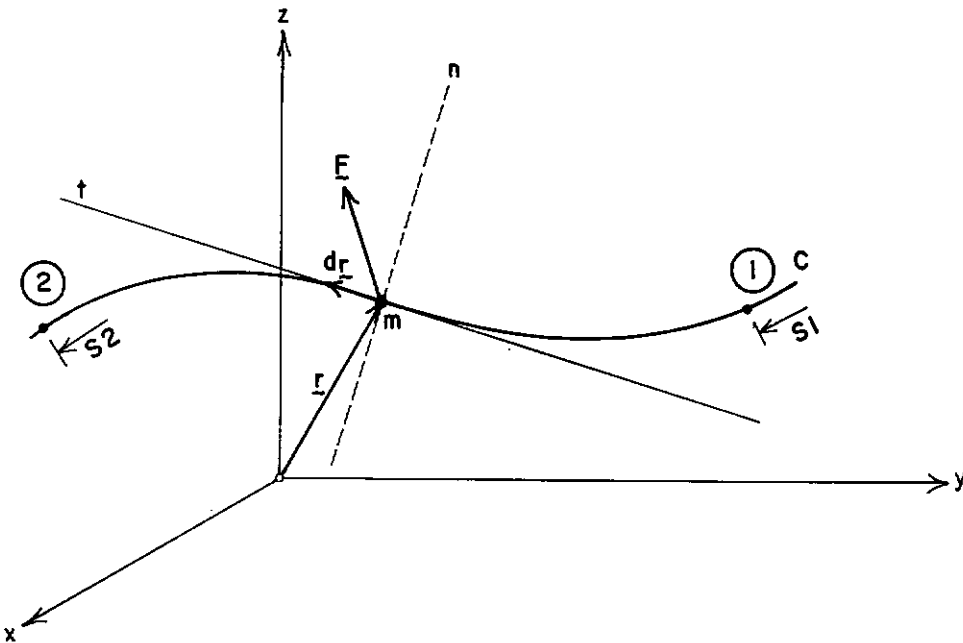


FIGURA 2.11 - Movimento de uma partícula de massa m .

A posição de m fica determinada pelo vetor posição \vec{r} , e seu deslocamento na trajetória, durante o tempo dt , pela variação $d\vec{r}$ do vetor posição.

O trabalho infinitesimal dW realizado por \vec{F} durante este deslocamento \vec{e} é definido pelo produto escalar

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.49)$$

que é um escalar igual ao produto da componente de \vec{F} tangente à trajetória (F_t) pelo comprimento de arco ds .

O trabalho realizado por \vec{F} durante o movimento da partícula ao longo da trajetória do ponto 1 ao ponto 2 é

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} F_t ds \quad (2.50)$$

2.6.3 - Energia Potencial

Podemos escrever a expressão do trabalho realizado sobre a partícula por uma força \vec{F} ao longo de uma curva C em termos de coordenadas cartesianas como $W = \int_C (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$

Esta integral de linha em geral depende da curva C percorrida ao irmos de um ponto 1 para um ponto 2.

Se, entretanto, $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ for uma diferencial exata $-dV$ de uma função escalar V então o trabalho

$$W = \int_1^2 -dV = -(V_2 - V_1) \quad (2.51)$$

independe do modo como o sistema passa de uma configuração para outra. Nestes casos o sistema está dotado de uma energia potencial. O sinal negativo é arbitrário, mas escolhido de modo a concordar com a designação usual do sinal da variação de energia potencial gravitacional.

Se tal potencial existe, uma variação diferencial em V pode ser escrita como

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \quad (2.52)$$

Como, por hipótese,

$$-dV = \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{d\mathbf{r}} = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad (2.53)$$

temos

$$F_x = - \frac{\partial V}{\partial x}; \quad F_y = - \frac{\partial V}{\partial y}; \quad F_z = - \frac{\partial V}{\partial z} \quad (2.54)$$

ou em forma vetorial

$$\underline{\mathbf{F}} = - \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) = - \underline{\nabla} V \quad (2.55)$$

onde $\underline{\nabla}$ é o operador nabla, já visto na dedução da equação da condução de calor.

A quantidade V é conhecida como função potencial e $\underline{\nabla} V$ como gradiente da função potencial.

Quando as componentes de uma força são obtidas de um potencial, o trabalho realizado por esta força, como vimos, depende apenas da diferença entre o potencial no ponto de saída e no ponto de chegada. Uma consequência disto é que se voltarmos ao ponto de partida, o trabalho realizado por esta força é nulo, sendo esta força dita conservativa. O exemplo mais comum de forças conservativas é o da gravitação de Newton apresentado em 2.6.1.

Como as forças de gravidade entre duas partículas dependem da posição relativa das partículas, cada sistema de partículas dispostas de uma determinada maneira está dotada de certa reserva de energia potencial gravitacional. Ao variarmos a disposição mútua das partículas, as forças de gravidade realizarão um determinado trabalho modificando, assim, a energia potencial do sistema.

A variação da energia potencial gravitacional é igual a menos o trabalho das forças gravitacionais ao variarmos a configuração do sistema.

Para duas partículas materiais de massa unitária a diferença de energia potencial entre dois pontos distantes r_1 e r_2 de uma origem comum,

$$V_2 - V_1 = - \int_{r_1}^{r_2} f(r) dr \quad (2.56)$$

será obtida substituindo a expressão da força gravitacional

$$f(r) = - \frac{G}{r^2} \quad (2.57)$$

em (2.56):

$$V_2 - V_1 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{G}{r^2} dr = - G \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (2.58)$$

Esta expressão nos permite calcular de modo único a diferença de potencial em dois estados em função da distância entre as partículas.

Para maior comodidade nos cálculos considera-se a energia potencial a uma distância infinita como nula. Então

$$V_1 = V(r_1) = - \frac{G}{r} \quad (2.59)$$

Com esta escolha a energia potencial de duas massas pontuais é sempre negativa e aumenta com a distância. Isto está de acordo com o fato de que entre as massas atuam forças de atração e, por isso, para separá-las é necessário realizar trabalho que fica acumulado sob a forma de energia potencial.

A energia potencial é máxima quando os corpos estão infinitamente distantes e mínima quando for mínima a distância entre eles.

II.7 - LEI DE COULOMB E POTENCIAL ELETROSTÁTICO

A propriedade da matéria responsável pela interação eletrostática é a carga elétrica. Na natureza há duas espécies de carga que denominamos de positiva e negativa. A interação se processa através de forças de repulsão quando as cargas são de mesma espécie e de atração no caso de cargas de espécies diferentes.

O comportamento de cargas elétricas em repouso é descrito pela lei de Coulomb. Esta lei, análoga à lei de atração de massas, estabelece que a força (de atração ou repulsão) entre cargas pontuais é proporcional às cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (2.60)$$

onde q_1 e q_2 são as cargas, ϵ é uma constante dimensional conhecida com permissividade do meio e r é a distância entre as cargas.

O fator 4π é introduzido na fórmula de Coulomb para que a primeira equação da teoria eletromagnética de Maxwell fique mais simples.

2.7.1 - Campo Elétrico

Se numa região do espaço uma carga elétrica em repouso sofre a ação de uma força, dizemos que nesta região existe um campo elétrico. Tal campo é provocado por outras cargas elétricas.

cas colocadas nas proximidades desta região do espaço.

Podemos associar a cada ponto P de um campo elétrico um vetor campo igual à força que agiria sobre uma carga positiva unitária colocada neste ponto.

Esta idéia, introduzida por Faraday, também pode ser usada para as forças gravitacionais e apresenta uma série de vantagens em relação à idéia original de forças de ação à distância [39], [50].

As propriedades de um campo em uma região podem ser visualizadas por linhas orientadas denominadas linhas de campo; em cada ponto da região o vetor campo é tangente à linha que passa por este ponto.

O número de linhas que atravessam uma certa superfície é proporcional ao valor do campo nesta superfície. Assim, quanto mais próximas as linhas de campo mais intenso o campo.

Pela lei de Coulomb e pela definição de campo, a intensidade de campo elétrico de uma carga pontual Q em um ponto P do espaço distante r será

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \quad (2.61)$$

As linhas de força desse campo tem o aspecto mostrado na figura abaixo.

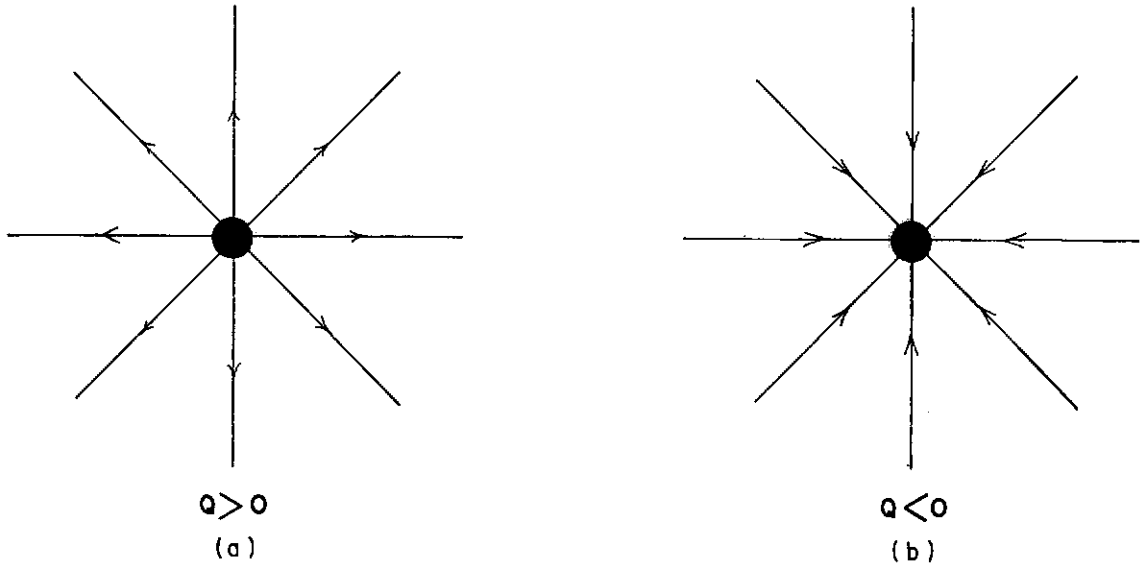


FIGURA 2.12 - Linhas de campo de uma carga pontual:
(a) positiva
(b) negativa

Podemos observar na figura 2.12 que, quanto mais próximos de uma carga estivermos, mais próximos estarão as linhas de campo e portanto mais intenso o campo. Este resultado, que também pode ser obtido da expressão (2.61), indica a singularidade que ocorre quando $r=0$, i.e., exatamente no ponto de aplicação da carga pontual.

Fisicamente isto não acontece porque a carga sempre se distribui em uma certa região. A consideração da carga concentrada é uma idealização válida para pontos afastados desta região, para os quais a distância a qualquer ponto da região onde está distribuída a carga é praticamente constante.

2.7.2 - Fluxo do vetor campo elétrico através de uma superfície

Considere uma superfície infinitesimal de área dS destacada de uma superfície S imersa em um campo elétrico.

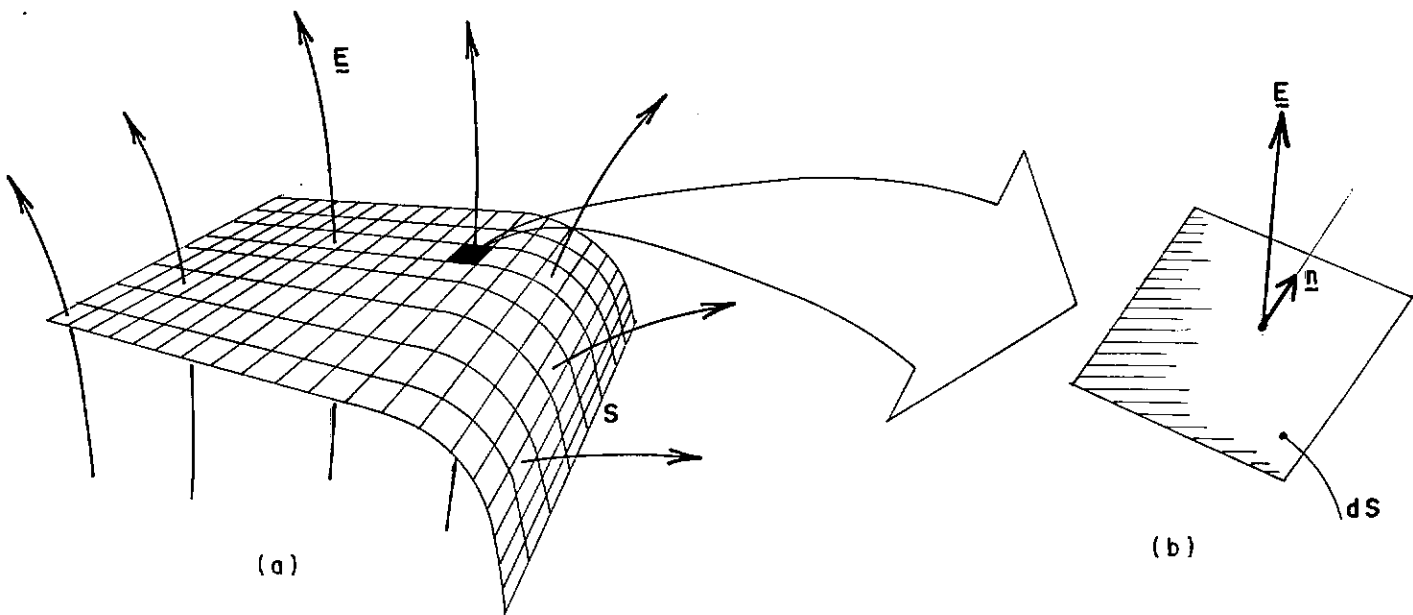


FIGURA 2.13 - Fluxo através de uma superfície:

(a) superfície finita

(b) elemento de superfície

O fluxo do campo \vec{E} através da superfície dS é definido de forma análoga ao que foi feito em transmissão de calor como

$$d\psi = \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS \quad (2.62)$$

O fluxo através de toda a superfície S é obtido pela soma dos fluxos elementares:

$$\psi = \int_S d\psi = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2.63)$$

2.7.3 - Teorema de Gauss

O teorema de Gauss estabelece que o fluxo total de um campo elétrico através de uma superfície fechada Γ é igual à soma das cargas no interior Ω da superfície, dividida pela permissividade do meio.

$$\psi = \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^n Q_i \quad (2.64)$$

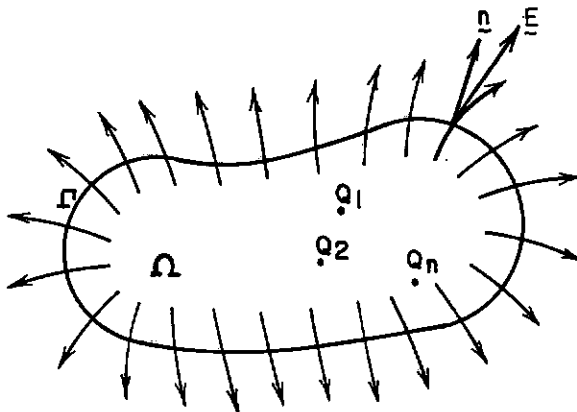


FIGURA 2.14 - Fluxo total através de uma superfície fechada Γ .

Para chegarmos a este resultado podemos partir da expressão do fluxo (2.63), na qual introduzimos a expressão do campo elétrico gerado por uma carga pontual Q_i .

Efetuada a integração em toda a superfície fechada Γ obtemos a expressão do fluxo total do campo elétrico nesta superfície:

$$\psi = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (2.65)$$

A integral em Γ representa o ângulo sólido no ponto de aplicação da carga em relação à superfície Γ . No caso de cargas situadas no interior de Γ o ângulo sólido vale 4π .

A substituição deste resultado na expressão do fluxo nos fornece

$$\psi = \frac{Q_i}{\epsilon} \quad (2.66)$$

Pelo princípio da superposição, o fluxo gerado por várias cargas em Ω será dada por

$$\psi = \frac{Q}{\epsilon} \quad (2.67)$$

onde Q é a soma das cargas no interior de Γ .

Se μ é a densidade volumétrica de cargas, a carga total contida no interior de Γ será

$$Q = \int_{\Omega} \mu \, d\Omega \quad (2.68)$$

Substituindo no teorema de Gauss a expressão (2.63) do fluxo para a superfície Γ e a expressão (2.68) da carga no interior da região Ω , obtemos:

$$\psi = \int_{\Gamma} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\mu}{\epsilon} \, d\Omega \quad (2.69)$$

Usando o teorema da divergência (também conhecido como teorema de Gauss) mencionado no estudo de calor, podemos escrever

$$\int_{\Omega} \vec{\mathbf{V}} \cdot \vec{\mathbf{E}} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \, d\Gamma \quad (2.70)$$

Substituindo a integral do lado direito pela expressão do fluxo obtida em (2.69), temos:

$$\int_{\Omega} \vec{\mathbf{V}} \cdot \vec{\mathbf{E}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\mu}{\epsilon} \, d\Omega \quad (2.71)$$

Como esta expressão é válida para qualquer volume elementar $d\Omega$ podemos escrever a expressão do teorema de Gauss na forma diferencial como

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.72)$$

O teorema de Gauss pode ser tomado como uma lei experimental, da qual a experiência de Faraday é uma evidência e a fórmula de Coulomb uma consequência. Tal procedimento, adotado por Maxwell ao escolher a lei de Gauss como a primeira equação do eletromagnetismo, é preferível pois, experimentalmente, nossa confiança na lei de Gauss é maior que na de Coulomb.

2.7.4 - Trabalho no campo eletrostático e potencial de uma carga concentrada

Consideremos o campo eletrostático gerado por uma carga pontual Q representado pelas linhas de campo mostradas na figura abaixo.

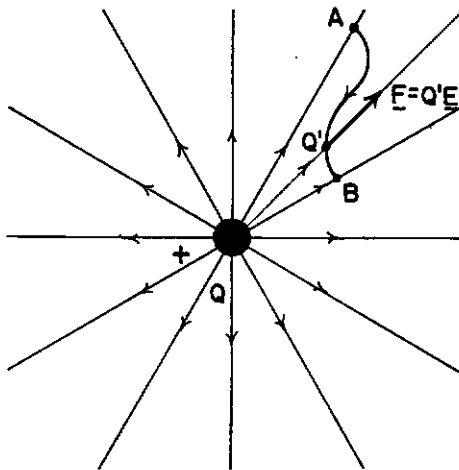


FIGURA 2.15 - Linhas de campo de uma carga pontual.

Imagine que se pretenda deslocar uma outra carga pontual Q' de um ponto A para um ponto B (ver figura 2.15). Será necessário realizar trabalho para consegui-lo, pois a força de campo vai se opor a este deslocamento.

Isto é análogo ao que acontece no campo gravitacional terrestre onde devemos realizar um trabalho contra a força de campo para suspendermos uma massa (ver figura 2.16).

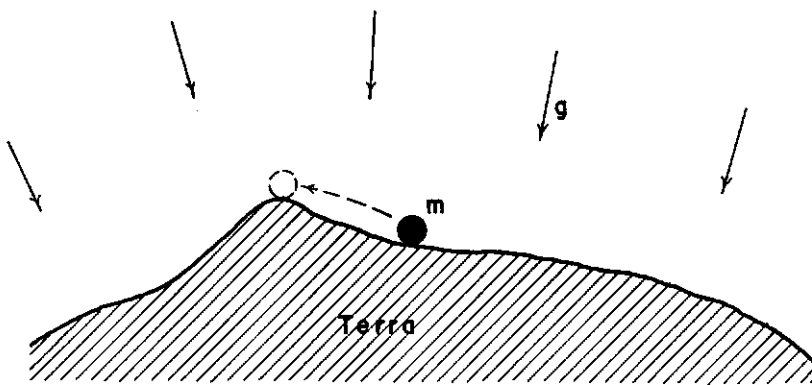


FIGURA 2.16 - Trabalho contra o campo gravitacional terrestre.

O trabalho mínimo necessário para deslocar a carga Q' de A para B deve ser igual, em módulo, ao trabalho resistente da força de campo no deslocamento de A até B.

O trabalho da força de campo eletrostático no deslocamento de A até B depende somente das posições destes dois pontos, sendo independente da trajetória particular percorrida entre os pontos.

Como vimos no caso de força gravitacional, este resultado é uma consequência da expressão da força e implica na existência de um potencial.

Considere agora que após levarmos a carga Q' de A até B, a tragamos de volta para A. No percurso de A até B a força de campo realiza um trabalho negativo pois se opõe ao deslocamento. Ao trazeremos a carga de volta para A a força de campo realiza o mesmo trabalho, em módulo, mas com sinal positivo já que a força de campo atua no sentido do deslocamento. Isto implica que o trabalho da força de campo em um caminho fechado seja nulo, o que caracteriza o campo como conservativo.

Dadas duas partículas carregadas Q_1 e Q_2 , separadas entre si de uma distância r , chama-se energia potencial do sistema a energia necessária para trazê-las do infinito (ou seja, de uma configuração onde elas não interagem) para a posição dada (no caso de duas cargas de sinal contrário é a energia necessária para separá-las, como acontece em campos gravitacionais com duas massas).

De acordo com a definição de energia potencial dada anteriormente, a energia potencial do sistema formado pelas cargas Q_1 e Q_2 de mesmo sinal, mostradas na figura a seguir, é dada pelo trabalho realizado contra a força de campo da carga Q_1 para trazer Q_2 do "infinito" até p.

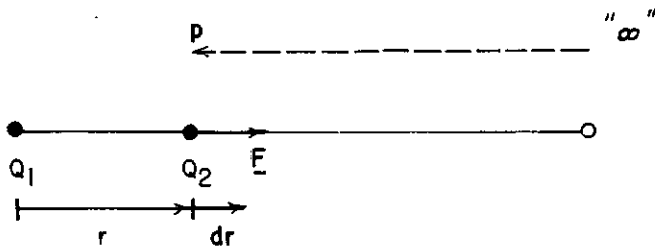


FIGURA 2.17 - Energia potencial de um sistema de duas cargas pontuais de mesmo sinal.

$$E_p = W_{\infty \rightarrow p} = - \int_{r=\infty}^r \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r} \quad (2.73)$$

Considere uma carga Q situada em um ponto s do espaço. Podemos definir o potencial em um ponto p como a energia potencial do sistema formado pela carga Q e uma carga unitária situada em p :

$$u(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r} \quad (2.74)$$

O potencial u , para um determinado meio, só depende da carga Q que gera o campo elétrico e da posição do ponto p em relação ao ponto s (i.e., da distância r).

Como, em geral, estamos interessados apenas em diferenças de potencial podemos tomar uma referência qualquer para medição do potencial. Isto corresponde à soma de um potencial constante a todos os pontos do campo, que desaparece ao efetuarmos diferenças de potencial.

Ao variarmos a posição do ponto p , o trabalho que seria realizado sobre uma carga unitária contra a força de campo é igual à variação do potencial. Se, durante toda a trajetória, este trabalho é nulo, esta trajetória é chamada de equipotencial.

Para uma carga concentrada no espaço, as superfícies equipotenciais são esferas centradas no ponto s de aplicação da carga. Este resultado pode ser obtido diretamente da expressão do potencial (2.74) ou observando que o trabalho das forças de campo, ao levarmos uma carga unitária de um ponto a outro de uma mesma esfera, é nulo pois as linhas de campo são radiais e, portanto, normais à trajetória.

2.7.5 - Potencial de um dipolo

Suponhamos que duas cargas Q e $-Q$ estejam localizadas a uma distância h uma da outra conforme mostrado na figura 2.18.

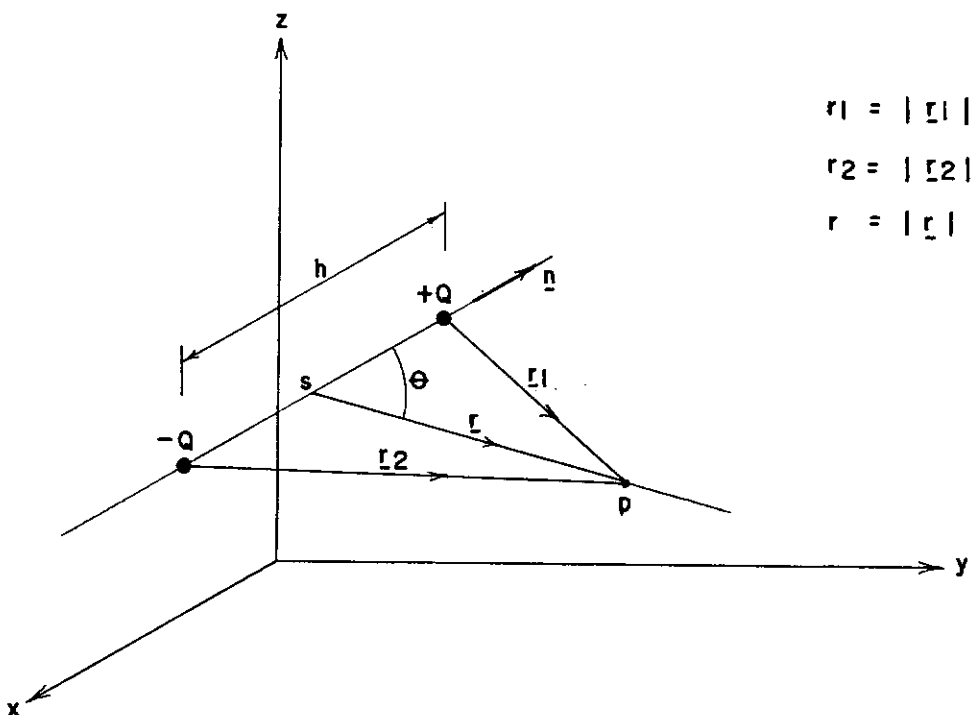


FIGURA 2.18 - Dipolo elétrico.

Pelo princípio da superposição, o potencial em um ponto p é a soma dos potenciais causados, separadamente, por Q e $-Q$:

$$u(p) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (2.75)$$

Se as duas cargas se aproximam do ponto s de tal maneira que a direção de $-Q$ para $+Q$ seja sempre a direção de \underline{n} , o potencial em p tende a zero. Se, durante o movimento, Q varia de tal maneira que

$$Q \cdot h = M = \text{constante}$$

O potencial, no limite, é dado por

$$u(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{M}{4\pi\epsilon} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1/r_1 - 1/r_2)}{h} \quad (2.76)$$

Como o limite acima é a definição de derivada direcional na direção \underline{n} , o potencial pode ser escrito como

$$u(p) = \frac{M}{4\pi\epsilon} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (2.77)$$

Usando a regra da cadeia

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial n} = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (2.78)$$

podemos escrever o potencial do dipolo como

$$u(p) = \frac{-M}{4\pi\epsilon r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (2.79)$$

ou

$$u(p) = \frac{-M}{4\pi\epsilon r^2} \cos\theta \quad (2.80)$$

onde

$M = Q \cdot h$ é o momento do dipolo,

\underline{n} é o eixo do dipolo e

θ é o ângulo entre o eixo do dipolo e o vetor posição \underline{r} .

II.8 - A FUNÇÃO GENERALIZADA DELTA DE DIRAC

No desenvolvimento do método dos elementos de contorno, há varias situações em que devemos manipular certos termos singulares. O delta de Dirac, inicialmente usado em mecânica quântica [17], [31], se mostra bastante adequado para a manipulação destes termos. Em uma dimensão o delta de DIRAC pode ser definido como

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(\xi; x) = 0 \quad , \quad \xi \neq x \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi; x) dx = 1 \end{array} \right. \quad (2.81)$$

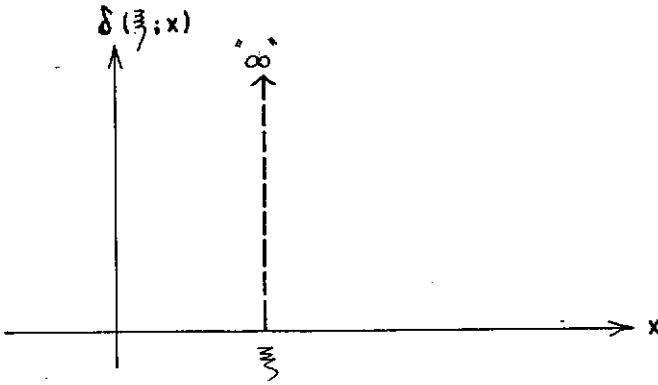


FIGURA 2.19 - Delta de Dirac .

Quando não for necessário mencionar os argumentos, abreviaremos o delta de Dirac para δ .

Outra forma de se definir o delta de Dirac é como a derivada de função Heaviside $H(\xi; x)$, dada por

$$H(\xi; x) = \begin{cases} 0, & x < \xi \\ 1, & x \geq \xi \end{cases} \quad (2.82)$$

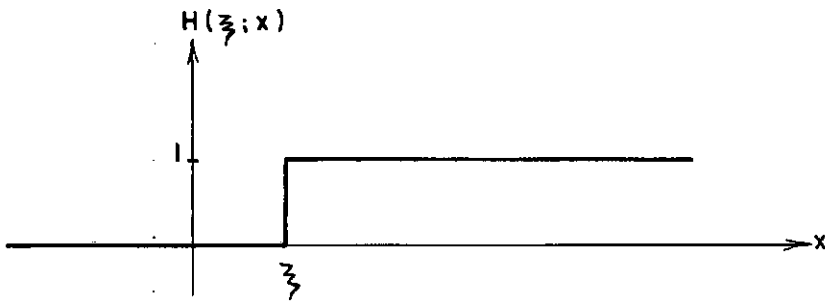


FIGURA 2.20 - Degrau unitário (Heaviside).

$$\delta(\xi; x) = \frac{d}{dx} H(\xi; x) \quad (2.83)$$

Podemos ter uma imagem do δ considerando uma função de variável real x que seja nula fora de um pequeno domínio de amplitude ϵ ao redor de $x=\xi$ e que, no interior, a área sob a curva seja igual a um. Não importa a forma exata da função no interior deste domínio desde que não sofra nele variações desnecessariamente bruscas (por exemplo, de forma que seja sempre de ordem ϵ^{-1}).

Passando ao limite quando $\epsilon \rightarrow 0$, esta função tenderá a se confundir com o δ . Esta é a mesma idéia de uma força concentrada na mecânica e de uma carga concentrada na eletricidade. Nestes casos, a força (ou a carga) se encontra distribuída em uma região muito pequena em relação às outras dimensões do problema. Como o efeito em pontos não muito próximos da distribuição é equivalente ao de uma força (ou carga) concentrada, esta é usada pelas simplificações que possibilita.

Segundo a definição matemática comum, uma função deve ter um valor definido para cada ponto de seu domínio. O delta de Dirac é algo mais geral que Dirac chamou de "função imprópria" e que foi formalizado rigorosamente com a teoria das distribuições de L. Schwarz.

Portanto, o δ não é uma quantidade que possa ser usada em análise matemática com tanta generalidade quanto as funções comuns e seu uso deve se restringir a certos tipos de expressões simples onde seja evidente que não haja inconseqüências lógicas.

A propriedade mais importante do $\delta(\xi; x)$ pode ser expressa como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(\xi; x) dx = f(\xi) \quad (2.84)$$

onde $f(x)$ é qualquer função contínua de x .

É fácil de entender o significado desta expressão a partir da imagem do δ que foi dada anteriormente. O integrando só pode depender de valores de $f(x)$ muito próximos de $x=\xi$ de forma que, sem erro apreciável, podemos substituir $f(x)$ pelo seu valor no ponto ξ , $f(\xi)$.

A mesma idéia se aplica a domínios bi e tridimensionais onde o pequeno domínio de amplitude ϵ passa a ser, respectivamente, um pequeno círculo e uma pequena esfera de raio ϵ .

Nestes casos (2.84) é generalizada para:

$$\int_{\Omega} f(x) \delta(\xi; x) d\Omega(x) = \int_{\Omega_\epsilon} f(x) \delta(\xi; x) d\Omega(x) = f(\xi) \quad (2.85)$$

onde ξ e x são pontos do domínio Ω .

O resultado de multiplicar uma função de x por $\delta(\xi; x)$ e integrar para todo x , equivale a tomarmos o valor da função em ξ . O intervalo de integração não precisa ser infinito; basta que inclua uma vizinhança do ponto crítico ξ onde a função generalizada δ não se anula.

Quando o ponto ξ pertence ao contorno do domínio de integração Ω , apenas uma parte $\overline{\Omega_\epsilon}$ da região Ω_ϵ em torno de ξ pertence a Ω .

Neste caso, a integral do produto do delta de Dirac por uma função contínua é igual ao valor da função no ponto ξ multiplicada pela razão entre as áreas (comprimento no caso unidimensional e volume no caso tridimensional) de $\overline{\Omega_\epsilon}$ e Ω_ϵ .

Assim,

- em uma dimensão

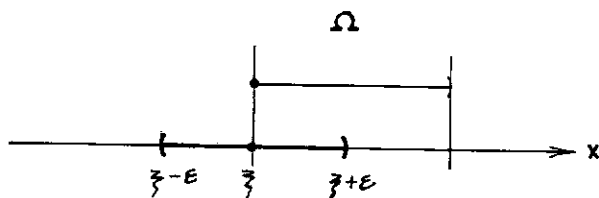


FIGURA 221 - Integral do delta de Dirac em parte do domínio unidimensional.

$$\int_{\Omega} f(x) \delta(\xi; x) d\Omega(x) = \int_{\xi}^{\xi+\epsilon} f(x) \delta(\xi; x) dx = \frac{1}{2} \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} f(x) \delta(\xi; x) dx = \frac{1}{2} f(\xi) \quad (2.86)$$

- em duas dimensões

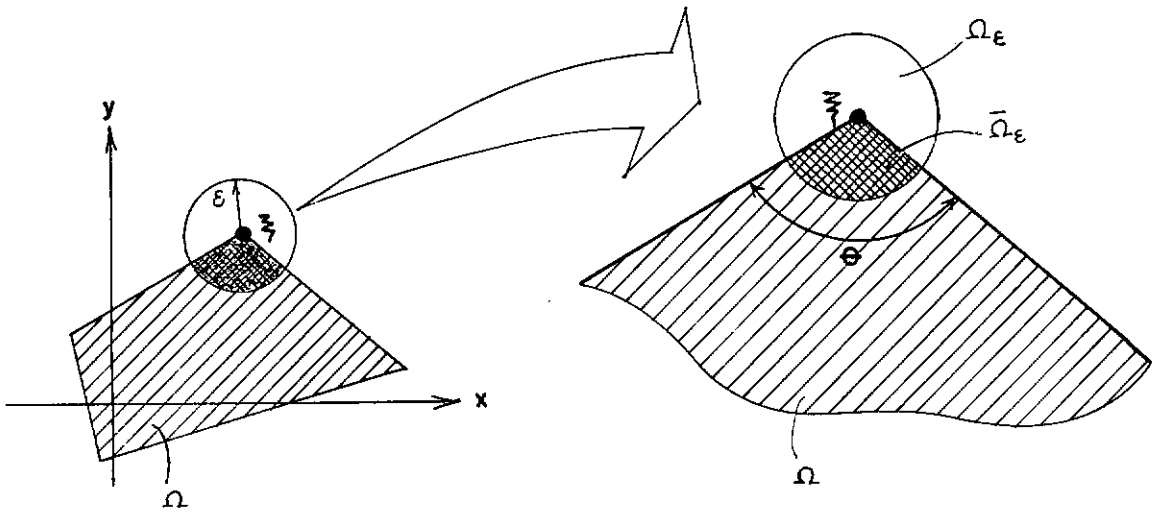


FIGURA 2.22 - Integral do delta de Dirac em parte do domínio bidimensional.

$$\int_{\Omega} f(x) \delta(\xi; x) d\Omega(x) = \int_{\overline{\Omega\epsilon}} f(x) \delta(\xi; x) d\Omega(x) = f(\xi) \cdot \frac{\theta}{2\pi} \quad (2.87)$$

Quando o contorno é suave em ξ , $\overline{\Omega\epsilon}$ é um semi-círculo ($\theta = \pi$), portanto:

$$\int_{\Omega} f(x) \delta(\xi; x) d\Omega(x) = \frac{f(\xi)}{2} \quad (2.88)$$

- em três dimensões

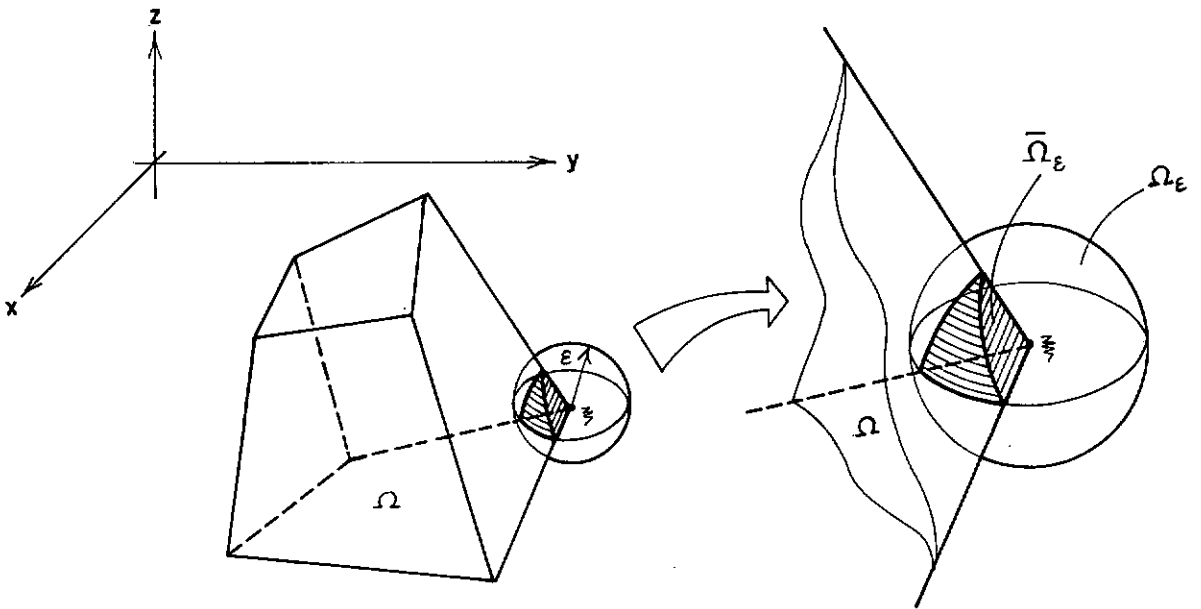


FIGURA 2.23 - Integral do delta de Dirac em parte do domínio tridimensional.

$$\int_{\Omega} f(x) \delta(\xi; x) d\Omega(x) = \int_{\overline{\Omega}_\varepsilon} f(x) \delta(\xi; x) d\Omega(x) = f(\xi) \cdot \frac{\theta}{4\pi} \quad (2.89)$$

onde θ é o ângulo sólido em ξ .

Quando o contorno $\bar{\epsilon}$ é suave em ξ , $\overline{\Omega\epsilon}$ é uma hemisfera ($\theta = 2\pi$) e também temos

$$\int_{\Omega} f(x) \delta(\xi; x) d\Omega(x) = \frac{f(\xi)}{2} \quad (2.90)$$

Ainda que uma função imprópria não tenha nenhum valor bem definido isoladamente, quando ela aparece como um fator em um integrando, a integral tem um valor bem definido. Em física, a função imprópria sempre aparece em expressões que finalmente são integradas.

Isto permite entender (2.84) e (2.85) como funcionais que a cada função $f(x)$ fazem corresponder o valor da função no ponto ξ .

Seria possível prescindir completamente das funções impróprias. Assim, o uso das funções impróprias não implica em nenhuma falta de rigor na teoria, mas uma notação cômoda que nos permite expressar de forma concisa certas relações. Tais relações, quando expressas sem usar funções impróprias, tornam-se bastante longas e podem obscurecer a idéia central.

II.9 - ELEMENTOS DE TEORIA DO POTENCIAL

Nesta seção, voltamos a examinar a equação de Laplace/Poisson obtida no estudo da condução de calor em regime estacionário. A teoria matemática que se ocupa do estudo das soluções desta equação recebe o nome de teoria do potencial por causa do significado físico associado a estas soluções.

2.9.1 - Solução Fundamental

Como vimos no estudo da gravitação e eletrostática, o potencial de uma fonte (massa ou carga) pontual em uma região infinita é inversamente proporcional à distância entre o ponto s onde se encontra a fonte (ponto fonte) e o ponto p do espaço (ponto campo) onde se deseja conhecer o potencial causado pela fonte. Por essa analogia formal com o potencial gravitacional chamamos este potencial de Newtoniano.

Este potencial é conhecido como solução fundamental (ou função de Green) quando a fonte é unitária e no estudo de calor representa a temperatura em um ponto p qualquer de uma região condutora infinita causada pela presença de uma fonte unitária de calor em um ponto s .

Matematicamente podemos definir o potencial como uma função pelo menos duas vezes diferenciável em relação às coordenadas de um ponto p que satisfaz a equação de Laplace

$$\nabla^2 u(s;p) = 0 \quad (2.91)$$

em qualquer ponto $p \neq s$.

A solução desta equação admitindo simetria esférica nos fornece a função de Green ou solução fundamental.

Escrevendo o Laplaciano em coordenadas esféricas e levando em conta a simetria, temos:

$$\nabla^2 u = \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0 \quad (2.92)$$

que é uma equação diferencial ordinária em r , cuja solução é

$$u = \frac{c_1}{r} + c_2 \quad (2.93)$$

A constante arbitrária c_2 representa apenas uma mudança na origem da medição do potencial (temperatura em problemas de calor) e desaparece ao derivarmos u para obtermos a expressão do fluxo.

A constante c_1 pode ser determinada pela condição de conservação da energia térmica. Pela lei de Fourier, a densidade de fluxo normal à superfície de uma esfera de raio ρ qualquer po de ser escrita como

$$q = -K \frac{\partial u}{\partial n} \quad (2.3)$$

Devido à simetria esférica, a densidade de fluxo é a mesma em todos os pontos da esfera e a normal exterior coincide

com a direção radial.

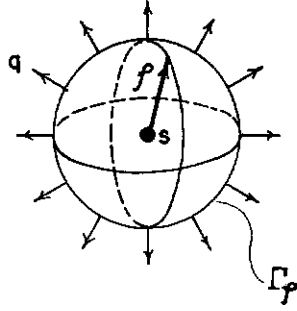


FIGURA 2.24 - Esfera de raio f em torno da fonte s .

Inserindo em (2.3) a expressão da solução fundamental (2.93) e substituindo a derivada normal pela derivada na direção radial, obtemos

$$q = -K \frac{\partial u}{\partial r} = -K \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{c_1}{r} + c_2 \right) = \frac{K}{r^2} c_1 \quad (2.94)$$

Pela conservação da energia, o fluxo total através da esfera deve ser igual à fonte unitária concentrada no ponto s .

$$1 = \int_{\Gamma_\rho} q \, d\Gamma = K \cdot c_1 \int_{\Gamma_\rho} \frac{1}{r^2} \, d\Gamma \quad (2.95)$$

Como na superfície esférica Γ_ρ o raio é constante e igual a ρ , podemos escrever

$$1 = \frac{K}{\rho^2} \cdot c_1 \cdot 4\pi\rho^2 \quad (2.96)$$

Ou seja,

$$c_1 = \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{4\pi} \quad (2.97)$$

Substituindo este valor na expressão (2.93), obtemos para a solução fundamental, a menos de um potencial constante somado a todos os pontos, a expressão

$$u = \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{4\pi r} \quad (2.98)$$

que é análoga à obtida para o potencial gravitacional e para o potencial eletrostático e, como dissemos anteriormente, proporcional a $1/r$.

Como vimos anteriormente, a equação que descreve a condução de calor em um meio homogêneo e isotrópico em regime permanente é a equação de Poisson

$$\nabla^2 u + \frac{q''''}{K} = 0 \quad (2.29)$$

onde q'''' é a distribuição volumétrica de fontes.

Até agora só tratamos de fontes pontuais. Estas fontes representam o limite de uma situação em que as fontes estão distribuídas em uma região de dimensões bem menores que as distâncias aos pontos onde desejamos saber o potencial. Uma forma conveniente de representar esta distribuição de fontes é através do delta de Dirac.

Assim, escrevemos a equação correspondente à solução

fundamental como a seguinte equação de Poisson

$$\nabla^2 u(s;p) + \frac{\delta(s;p)}{K} = 0 \quad (2.99)$$

2.9.2 - Potencial gerado por várias fontes pontuais

Como vimos anteriormente, o potencial gerado por uma fonte pontual unitária no espaço tridimensional é dado pela solução da equação de Poisson

$$u(s;p) = \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{4\pi r} \quad (2.100)$$

Como a equação de Poisson é linear, o potencial em um ponto campo p gerado por várias fontes pontuais Q_i é dado pela soma dos potenciais que seriam gerados se cada fonte atuasse sozinha:

$$u(s_1 \dots s_2; p) = \frac{1}{K} \sum \frac{Q_i}{4\pi r_i} \quad (2.101)$$

onde r_i é a distância do ponto s_i de aplicação da carga Q_i ao ponto campo p .

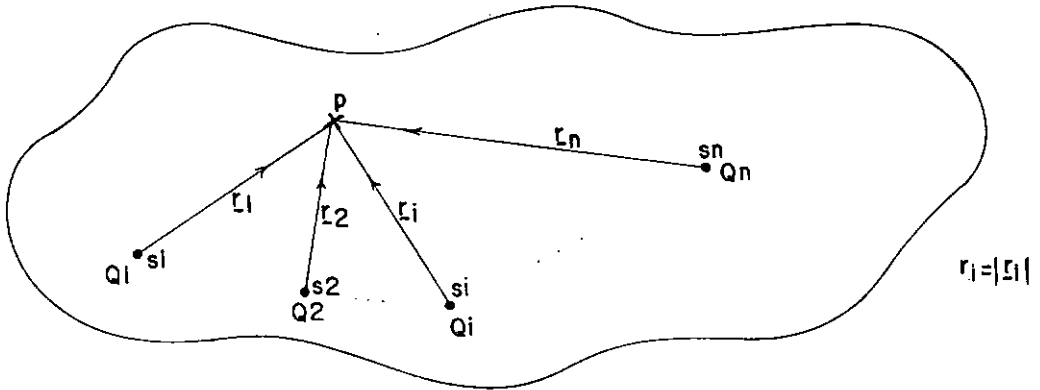


FIGURA 2.25 - Potencial gerado por várias fontes pontuais .

Um caso particular da expressão (2.101) é o potencial de um dipolo. Como foi mostrado em 2.7.5, este potencial é a derivada do potencial Newtoniano na direção do eixo do dipolo.

2.9.3 - Potencial gerado por fontes distribuídas

No caso geral de fontes distribuídas podemos aplicar as expressões do potencial obtidas para fontes concentradas em cada elemento infinitesimal e superpor seu efeito pela integração das contribuições elementares.

Se a fonte estiver distribuída em uma região V do espaço onde a densidade volumétrica de carga é $\mu(s)$, o potencial gerado por essa distribuição espacial em um ponto campo p fora de V é dado pela integral

$$u(s;p) = \frac{1}{K} \int_V \frac{1}{4\pi r(s)} \mu(s) dV(s) \quad (2.102)$$

Quando as fontes estão distribuídas em uma superfície A com densidade superficial $\sigma(s)$, o potencial gerado por essa distribuição em um ponto p fora de A é dado pela integral

$$u(s;p) = \frac{1}{K} \int_A \frac{1}{4\pi} \frac{\sigma(s)}{r(s)} dA(s) \quad (2.103)$$

Finalmente, quando as fontes estiverem distribuídas ao longo de uma linha L com uma densidade linear $\lambda(s)$, o potencial em um ponto campo p fora de L será dado por

$$u(s;p) = \frac{1}{K} \int_L \frac{1}{4\pi} \frac{\lambda(s)}{r(s)} dL(s) \quad (2.104)$$

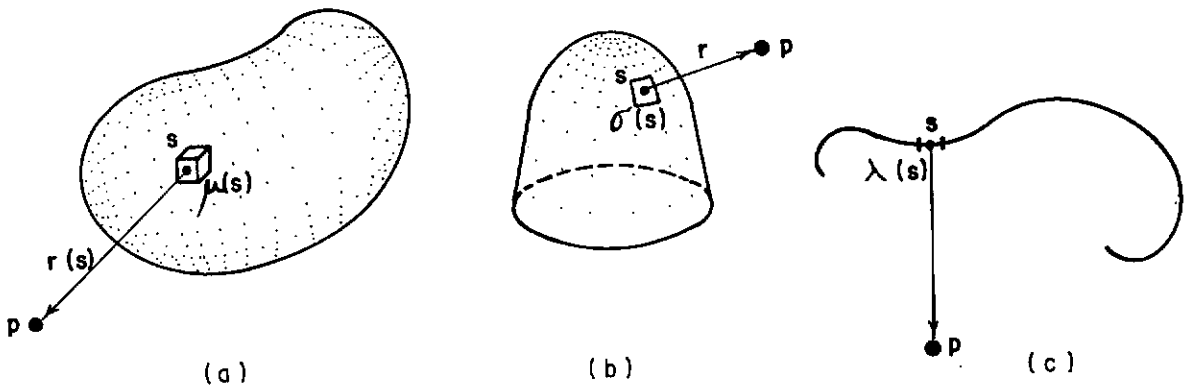


FIGURA 2.26 - Fontes distribuídas:
 (a) em um volume
 (b) em uma superfície
 (c) em uma curva

2.9.4 - Potencial Bidimensional e Potencial de Camada

Dupla

A expressão do potencial bidimensional é obtida a par-

tir do potencial Newtoniano gerado por fontes distribuídas uniformemente ao longo do segmento de reta $-l \leq z \leq l$, como mostrado na figura 2.27 [15]

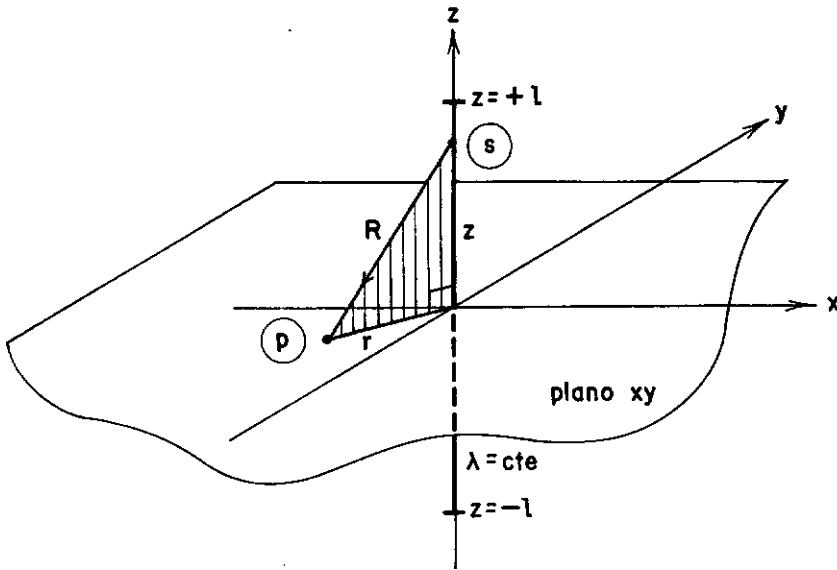


FIGURA 2.27 - Dedução do potencial bidimensional.

O potencial em pontos p do plano xy pode ser escrito substituindo na expressão (2.104) $dL(s)$ por dz , r por $R = \sqrt{r^2+z^2}$ e fazendo $\lambda = \text{constante}$.

$$u(s;p) = \frac{1}{K} \cdot \frac{\lambda}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}} + C \quad (2.105)$$

onde $r = \sqrt{x^2+y^2}$ é a distância do ponto p (situado no plano xy) à origem e C é uma constante arbitrária associada à escolha da origem de medição do potencial.

Como $\int \frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}} = \ln \frac{z + \sqrt{z^2+r^2}}{r}$ (2.106)

a expressão (2.105) do potencial, gerado pelo segmento de fontes, no plano xy pode ser escrita como

$$u(s;p) = \frac{1}{K} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \ln \left\{ \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + r^2}}{r} \right\} + C \quad (2.107)$$

Para obtermos o potencial, no plano xy, devido a uma linha de fontes, estendemos infinitamente o segmento nos dois sentidos e escolhemos para C o valor

$$C = - \frac{1}{K} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \ln (2\ell) \quad (2.108)$$

para mantermos finito o potencial no plano.

Substituindo em (2.107) a expressão de C dada por (2.108), obtemos:

$$u(s;p) = \frac{1}{K} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + r^2}}{2\ell} \right) - \ln r \right] \quad (2.109)$$

Tomando o limite quando ℓ cresce indefinidamente, obtemos:

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left[\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + r^2}}{2\ell} \right] = 1 \quad (2.110)$$

Com este resultado, a expressão do potencial bidimensional fica

$$u(s;p) = -\frac{1}{K} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \ln r \quad (2.111)$$

onde agora s representa um ponto fonte no plano xy e p o ponto campo também situado no plano xy a uma distância r .

O potencial bidimensional, por variar com o logaritmo da distância entre o ponto fonte e ponto campo, é algumas vezes chamado de potencial logarítmico.

Este potencial representa uma situação tridimensional que se repete indefinidamente em planos perpendiculares ao eixo z e, por isso, pode ser tratado em apenas um desses planos, digamos o plano xy .

Quando temos fontes distribuídas em uma superfície, chamamos o potencial gerado por essa distribuição de potencial de camada simples. No caso bidimensional a camada simples se reduz a uma curva.

Imaginemos que em vez de termos fontes distribuídas tenhamos dipolos distribuídos sobre uma superfície A (ou curva L no caso bidimensional), com momento de dipolo β por unidade de área (ou γ por unidade de comprimento) e suponhamos que, em cada ponto, o eixo do dipolo coincida com a normal.

Podemos escrever o potencial em um ponto campo fora da superfície A (ou curva L) como a integral das contribuições dos vários dipolos como

$$u(s;p) = \frac{1}{K} \int_A \frac{\beta(s)}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dA(s) \quad : 3-D \quad (2.112)$$

$$u(s;p) = \frac{-1}{K} \int_L \frac{\gamma(s)}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) dL(s) \quad : 2-D \quad (2.113)$$

onde, mais uma vez, r é a distância entre o ponto fonte e o ponto campo.

O nome potencial de camada dupla é dado porque a distribuição dos dipolos pode ser imaginada como duas superfícies (curvas, no caso bidimensional) com fontes distribuídas paralelas à superfície A (curva L) e separadas de uma distância h , que no limite tende a zero; uma com densidade superficial (linear) de fonte $\frac{\alpha(s)}{2h}$ (ou $\frac{\beta(s)}{2h}$ no caso bidimensional) e a outra com densidade $-\frac{\alpha(s)}{2h}$ (ou $\frac{\beta(s)}{2h}$), onde s é o ponto da superfície (curva) média correspondente aos pontos das superfícies (curvas) de fontes.

2.9.5 - Propriedades da função potencial

As principais propriedades da função potencial são conseqüências do teorema da divergência (ou teorema de Gauss) e seus dois corolários conhecidos como fórmulas de Green.

Teorema de Divergência

Seja Ω uma região do espaço limitada por uma superfície fechada Γ e \vec{F} um campo vetorial agindo nesta região. O teorema de divergência estabelece que

$$\int_{\Gamma} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \vec{\mathbf{V}} \cdot \vec{\mathbf{F}} \, d\Omega \quad (2.114)$$

onde $\vec{\mathbf{n}}$ é o vetor normal unitário em Γ orientado para fora de Ω (ver figura 2.28).

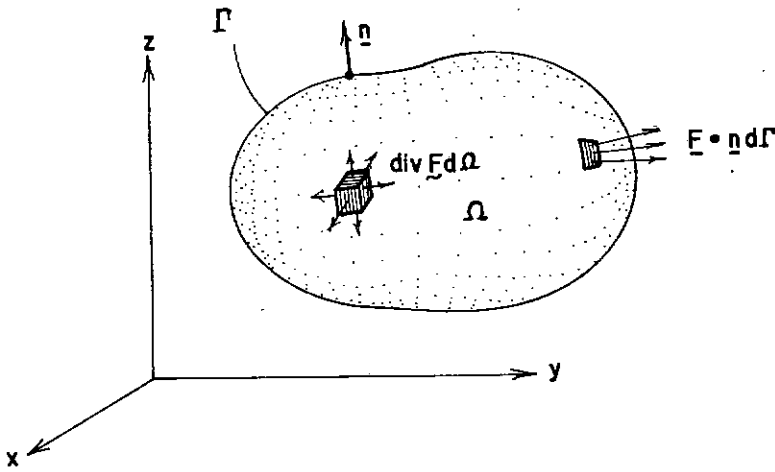


FIGURA 2.28 - Teorema da Divergência .

Se u é função potencial em um domínio V , então em qualquer superfície fechada Γ em V

$$\int_{\Gamma} \vec{\mathbf{V}}u \cdot \vec{\mathbf{n}} \, d\Gamma = 0 \quad (2.115)$$

Como o produto escalar do gradiente pelo vetor normal unitário é a derivada normal, podemos reescrever (2.115) como

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\Gamma = 0 \quad (2.116)$$

Fisicamente este resultado significa que, em regiões sujeitas a potenciais sem fontes internas, o fluxo total para fora da região é nulo.

Para chegarmos à expressão (2.115) basta substituímos no teorema da divergência $\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\nabla}u$ e levarmos em conta que u é potencial ($\nabla^2 u = 0$):

$$\int_{\Gamma} \tilde{\nabla}u \cdot \tilde{\mathbf{n}} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\nabla}u) \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla^2 u \, d\Omega = 0 \quad (2.117)$$

Uma consequência da expressão (2.116) é a propriedade da média enunciada a seguir.

Propriedade da média

Seja u uma função potencial em Ω e p um ponto de Ω . Se Γ_ρ é uma superfície esférica (circunferência de círculo, em duas dimensões) de raio ρ centrada em p e contida em Ω , então

$$u(p) = \frac{1}{4\pi \rho^2} \int_{\Gamma_\rho} u \, d\Gamma \quad (2.118)$$

A demonstração pode ser vista, por exemplo, na obra clássica de Kellogg [29].

Fórmulas de Green

Fazendo no teorema da divergência $\underline{\mathbf{F}} = \phi \underline{\nabla}\psi$, obtemos

$$\int_{\Gamma} \phi \underline{\nabla}\psi \cdot \underline{\mathbf{n}} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \underline{\nabla} \cdot (\phi \underline{\nabla}\psi) \, d\Omega \quad (2.119)$$

Aplicando a regra da cadeia, temos:

$$\underline{\nabla} \cdot (\phi \underline{\nabla}\psi) = \underline{\nabla}\phi \cdot \underline{\nabla}\psi + \phi \nabla^2\psi \quad (2.120)$$

Substituindo o lado direito de (2.120) em (2.119) e lembrando que $\underline{\nabla}\psi \cdot \underline{\mathbf{n}} = \frac{\partial\psi}{\partial n}$, obtemos a primeira fórmula de Green:

$$\int_{\Gamma} \phi \frac{\partial\psi}{\partial n} \, d\Gamma = \int_{\Omega} (\underline{\nabla}\phi \cdot \underline{\nabla}\psi) \, d\Omega + \int_{\Omega} \phi \nabla^2\psi \, d\Omega \quad (2.121)$$

Podemos reescrever a fórmula anterior para $\underline{\mathbf{F}} = \psi \underline{\nabla}\phi$, o que equivale a trocar na expressão acima ϕ com ψ :

$$\int_{\Gamma} \psi \frac{\partial\phi}{\partial n} \, d\Gamma = \int_{\Omega} (\underline{\nabla}\psi \cdot \underline{\nabla}\phi) \, d\Omega + \int_{\Omega} \psi \nabla^2\phi \, d\Omega \quad (2.122)$$

Subtraindo esta expressão da expressão (2.121), obtemos a segunda fórmula de Green:

$$\int_{\Gamma} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) d\Gamma = \int_{\Omega} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d\Omega \quad (2.123)$$

Tanto em (2.121) quanto em (2.122), as funções ϕ e ψ precisam ser deriváveis até pelo menos as ordens que aparecem nos integrandos.

Uma conseqüência da 2.^a fórmula de Green é que podemos representar uma função harmônica (i.e., função potencial) como a superposição do potencial de uma camada simples com o potencial de uma camada dupla.

Seja u uma função harmônica em uma região Ω e contínua em $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ e p um ponto genérico de Ω .

Podemos representar o potencial no ponto p como

$$u(p) = \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma} -u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) d\Gamma \quad (2.124)$$

A primeira integral representa o potencial de uma camada simples com densidade de fonte $\sigma = K \frac{\partial u}{\partial n}$ e a segunda o potencial de uma camada dupla com densidade de momento $\beta = -Ku$.

Aplicamos a 2.^a identidade de Green ao domínio Ω e contorno Γ originais, retirando uma esfera Ω_ϵ de raio ϵ centrada em s e contida em Ω , como mostrado na figura a seguir.

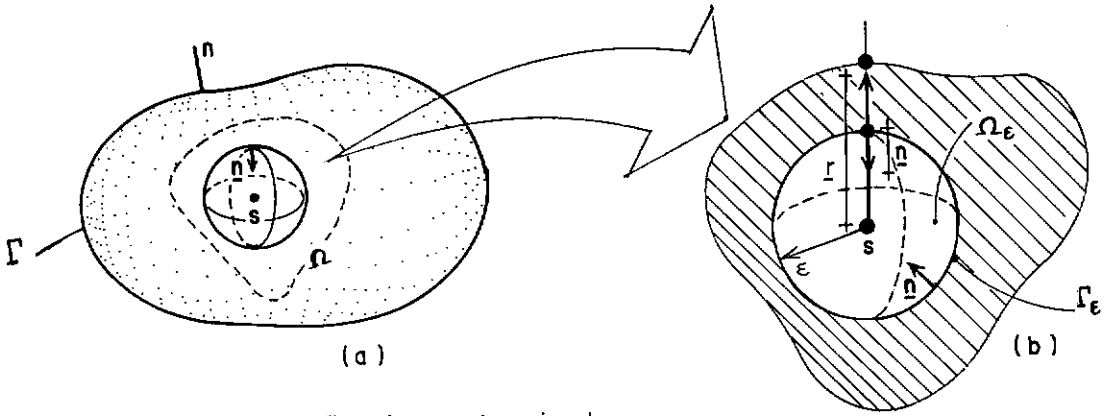


FIGURA 2.29 - Remoção do ponto singular :
 (a) vista geral
 (b) corte

$$\int_{\Gamma + \Gamma_\epsilon} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) d\Gamma = \int_{\Omega - \Omega_\epsilon} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d\Omega \quad (2.125)$$

Fazendo $\phi = \frac{1}{K} \frac{1}{4\pi r}$ (solução fundamental para uma fonte unitária em s) e $\psi = u$ (a função que se deseja representar), onde r é a distância de s aos pontos de $\bar{\Omega}$ e levando em conta que ϕ e ψ são harmônicas em $\Omega - \Omega_\epsilon$ ($\nabla^2 \phi = \nabla^2 \psi = 0$), temos

$$\int_{\Gamma} \left[\frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) \right] d\Gamma + \int_{\Gamma_\epsilon} \left[\frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) \right] d\Gamma = 0 \quad (2.126)$$

Como em toda a superfície Γ_ϵ mostrada na figura 2.29 a distância r do ponto s à superfície é igual a ϵ e a normal exterior ao domínio $\Omega - \Omega_\epsilon$ está orientada no sentido contrário do raio vetor \underline{r} que parte de s , então

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) \Bigg|_{r=\epsilon} = \frac{1}{4\pi \epsilon^2} \quad (2.127)$$

Além disso, como em Γ_ϵ , $r = \epsilon$ e u é harmônica, pela relação (2.116), temos:

$$\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = \frac{1}{4\pi \epsilon} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (2.128)$$

Substituindo (2.127) e (2.128) em (2.126):

$$\int_{\Gamma} \left[\frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) \right] d\Gamma = \frac{1}{4\pi \epsilon^2} \int_{\Gamma_\epsilon} u d\Gamma \quad (2.129)$$

Pela propriedade da média, a integral do lado direito é o potencial no centro da esfera Ω_ϵ :

$$u(p) = \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) d\Gamma \quad (2.130)$$

cómo queríamos demonstrar.

II.10 - MÉTODOS DE SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONDUÇÃO DE CALOR

A compreensão de um fenômeno físico resulta de um processo contínuo de observações, formulação de hipóteses e comprovação destas a nível teórico e experimental. Deste processo surgem as leis que sintetizam o comportamento físico dos sistemas.

O primeiro passo para a solução matemática de um problema físico está na formulação do modelo matemático. No caso da condução de calor isto pode ser feito pela expressão da conservação da energia térmica em um elemento infinitesimal que fornece as equações diferenciais válidas no domínio, como apresentado em II.3. Para que o problema fique totalmente determinado, devemos caracterizar a interação do contorno com o exterior pelas condições de contorno e, em problemas dependentes do tempo, conhecer as condições iniciais.

Matematicamente, os problemas de transferência de calor em regime permanente pertencem à classe dos chamados problemas de valor de contorno, enquanto que os problemas transientes à classe dos problemas de valor inicial.

Uma vez obtidas as equações matemáticas que regem um problema físico, exceto em casos muito simples, elas devem ser resolvidas por um método aproximado. Neste caso, o tipo de aproximação irá determinar a precisão dos resultados e o custo da análise.

O que entendemos por casos muito simples são problemas de geometria e condições de contorno que podem ser tratadas analiticamente, tais como paredes planas, tubos longos e esferas sujeitas a temperaturas e fluxos prescritos constantes por face [12], [24], [37], [51].

A solução analítica de problemas deste tipo tem grande importância em vários casos práticos como primeira aproximação da distribuição de temperaturas, além de servir de base para o desenvolvimento de métodos aproximados.

Com o desenvolvimento industrial, cresceu muito o número de casos práticos em que a geometria dos problemas se afastava consideravelmente das formas simples. Antes do aparecimento dos computadores digitais, os problemas de transferência de calor não tratáveis analiticamente eram geralmente aproximados por outros mais simples de solução analítica conhecida. Nos casos em que esta solução não era satisfatória recorria-se a modelos experimentais.

Um tipo de solução experimental, que se baseia na analogia das equações e condições de contorno que governam problemas fisicamente diferentes, é conhecido como solução analógica. Esta analogia formal permite que resolvamos um problema através da construção de um modelo análogo mais simples. Um exemplo famoso é a analogia da Membrana (bolha de sabão) usada por Prandtl para resolver problemas de torção de Saint-Venant em barras prismáticas [38].

Neste exemplo, os dois problemas são regidos pela equação de Poisson e as condições de contorno têm a mesma forma.

Além do aspecto quantitativo, a analogia da membrana fornece um meio de obtermos, sem necessidade de experimentos, uma série de informações sobre a solução como, por exemplo, regiões de maior temperatura e fluxos. Estas informações podem ser usadas em métodos numéricos aproximados, como elementos finitos e elementos de contorno, para uma melhor gradação dos elementos; em elementos de contorno como a solução pode ser obtida em qualquer ponto interno a partir da solução no contorno, essas informações fornecem um critério para a escolha dos pontos internos.

Uma alternativa atraente para a solução dos problemas de transferência de calor sem solução analítica é a solução numérica; esta ficou viável com o aumento das facilidades de cálculo numérico oferecidos pelas réguas de cálculo e primeiros computadores.

A técnica numérica inicialmente dominante foi o método das diferenças finitas, pela simplicidade da formulação. O método consiste, basicamente, na subdivisão do domínio em um reticulado e na aproximação do operador diferencial por um operador de diferenças [1], [12], [19], [24].

A aplicação deste operador a cada nó do reticulado e a incorporação das condições de contorno fornece um sistema de equações que, após ser resolvido, fornece as temperaturas nos pontos nodais. O método é pouco eficiente quando há partes do contorno

que não são paralelas a um dos eixos coordenados, pois exige um refinamento muito grande do reticulado para que representemos adequadamente o contorno e as condições de contorno.

Com o aparecimento de computadores mais rápidos tornou-se possível implementar técnicas numéricas mais versáteis, que permitem a obtenção de soluções mais precisas à custa de uma discretização numérica menor.

O método dos elementos finitos surgiu da extensão dos conceitos de análise de estruturas reticuladas a problemas da mecânica do contínuo e atualmente é o mais usado na solução de equações diferenciais parciais. Neste método, o domínio do problema é dividido em subdomínios de forma geométrica mais simples chamados elementos finitos.

O comportamento da solução em cada elemento é aproximado localmente por funções de interpolação, geralmente polinomiais. Estas funções ficam determinadas em termos de valores aproximados da incógnita em certos pontos nodais localizados no contorno e eventualmente no interior do elemento [5], [7], [16], [20], [60].

A solução numérica aproximada é obtida por meio de técnicas variacionais ou do tipo resíduos ponderados aplicadas ao sistema discreto que substitui o contínuo. As aproximações são da forma do contorno e da variação da temperatura dentro de cada elemento, mas não do operador diferencial como em diferenças finitas.

O método, em geral, é mais eficiente em termos computacionais que o método das diferenças finitas, principalmente em presença de contornos irregulares. Em problemas dependentes do tempo, é bastante comum o uso de elementos finitos para representar a geometria da região combinado com diferenças finitas para avançar no tempo.

Em problemas envolvendo meios infinitos ou semi-infinitos, o método dos elementos finitos não apresenta um bom desempenho já que é necessário estender a malha até uma distância considerável a fim de simular o domínio infinito. Isto levou os pesquisadores a desenvolver técnicas alternativas como o método dos elementos de contorno, que reúne a grande precisão do método das equações integrais [26], [28] com a facilidade de definição da geometria e condições de contorno de elementos finitos.

No método dos elementos de contorno, a equação diferencial do problema, que descreve o comportamento da incógnita no domínio, e as condições de contorno são transformadas em uma equação integral de contorno. A aproximação, que em elementos finitos era feita em todo o domínio, passa a ser feita apenas no contorno.

O uso de funções de interpolação do mesmo tipo que as usadas em elementos finitos permite o cálculo das integrais, em geral numericamente, e conduz a um sistema de equações de dimensões reduzidas correspondente à solução no contorno do corpo.

As principais características que justificam a popula-

ridade de elementos de contorno nos últimos anos são:

- sistema de equações de dimensões reduzidas
- simplicidade na preparação de dados para definir o problema, pois apenas o contorno tem que ser representado
- problemas envolvendo regiões infinitas ou semi-infinitas são modelados de maneira apropriada e bastante econômica
- não degradação dos resultados da derivada do potencial como ocorre nos métodos de domínio (diferenças finitas e elementos finitos)
- cálculo preciso de resultados no interior do domínio, realizado após a solução no contorno, apenas para pontos escolhidos
- boa precisão dos resultados em problemas que envolvem gradientes acentuados das incógnitas.

Uma forma de se ter uma melhor idéia dos diversos métodos numéricos aproximados e combiná-los aproveitando as vantagens de cada um deles é oferecida por resíduos ponderados. Esta técnica permite encarar técnicas variacionais, diferenças finitas, elementos finitos e elementos de contorno como casos especiais [11].

No próximo capítulo, apresentamos a formulação de elemento de contorno para problemas lineares de condução de calor. As expressões dos coeficientes de influência obtidas no caso linear são usadas na solução de problemas não lineares no capítulo IV. Estes coeficientes, por dependerem apenas da solução fundamental e das funções que interpolam a geometria e as funções u e v no contorno, não se alteram ao longo do processo iterativo.

O fato de não ser preciso recalculá-los, representa uma economia considerável de tempo de processador gasto em integrações numéricas.

Esta característica importante é explorada computacionalmente nos processos iterativos de solução (iterações diretas e Newton-Raphson), armazenando-se em memória auxiliar o sistema linear e os coeficientes de influência correspondentes aos elementos com não-linearidades; a cada iteração traz-se para a memória principal o sistema linear que é alterado em função da iteração anterior, sem que seja necessário recalcular os coeficientes de influência.

III. O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS LINEARES DE CONDUÇÃO DE CALOR

III.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentamos a técnica de elementos de contorno para o caso linear de condução de calor em regime permanente, tendo em vista o estudo de problemas não lineares no capítulo IV. Formulações para problemas transientes podem ser vistas em [57].

A técnica consiste, basicamente, na transformação da equação diferencial parcial do problema e suas condições de contorno em uma equação integral envolvendo apenas incógnitas no contorno, sua discretização e a solução do sistema de equações resultante [9], [11], [57].

O nome elementos de contorno se deve ao fato da geometria do problema ser aproximada no contorno por elementos, nos quais se admite uma certa lei de variação para as variáveis (no caso temperatura e sua derivada em relação à normal).

Como todas as aproximações numéricas são feitas no contorno, a dimensão do problema se reduz de um; isto implica em uma redução considerável da quantidade de dados necessária à definição do problema e do esforço computacional já que os sistemas de equações, apesar de serem cheios e não simétricos, são geralmente de dimensões muito menores que as encontradas em métodos de domínio.

Temperaturas e fluxos podem ser obtidos em qualquer ponto interno a partir da solução no contorno. Estes resultados apresentam, em geral, uma precisão muito boa pelo fato da expressão que relaciona os resultados em pontos internos com resultados no contorno ser exata.

O método se originou da aplicação de equações integrais para formular os problemas fundamentais de valor de contorno da teoria do potencial.

No início deste século, Fredholm [21] baseado em um processo de discretização conseguiu demonstrar rigorosamente a existência de soluções de problemas de valor de contorno na teoria do potencial. A utilização do processo de discretização na obtenção de soluções numéricas, no entanto, só foi possível com o advento de computadores digitais de segunda geração por volta de 1960. Tais computadores viabilizaram soluções numéricas de precisão tolerável através da implementação aritmética do processo de discretização [25], [45].

O método, originalmente desenvolvido para problemas de potencial escalar, pode ser estendido a problemas da mecânica dos sólidos com o uso de potenciais vetoriais [9], [11], [46]. Tais potenciais foram introduzidas em 1965 por Kupradze para problemas de valor de contorno da elasticidade linear e conduzem a formulações de equações integrais vetoriais análogas às equações integrais de Fredholm.

Nestas formulações, a fórmula de contorno de Somigliana é o análogo vetorial da fórmula de contorno de Green, onde o

deslocamento e a força de superfície correspondem, respectivamente, à temperatura e ao fluxo no contorno em problemas de condução de calor.

O método dos elementos de contorno pode ser formulado usando-se dois enfoques diferentes, chamados método indireto e método direto.

Como qualquer função harmônica pode ser representada por uma distribuição de potencial, podemos formular o problema da condução de calor usando potenciais de camada simples e/ou camada dupla gerados por distribuições contínuas de fontes sobre Γ . A satisfação das condições de contorno leva a equações integrais envolvendo como incógnitas as densidades de fonte.

Estas equações integrais podem ser resolvidas numericamente através da discretização do contorno em elementos nos quais se admite uma certa lei de variação da distribuição de fontes.

Este tipo de formulação é conhecido como formulação indireta por não fornecer diretamente como solução o potencial e sua derivada normal e apresenta a desvantagem conceitual da introdução de fontes, que normalmente não têm relação com a física do problema [57].

Quando os valores do potencial e da sua derivada normal sobre Γ fazem o papel de densidades de fontes que geram u em todo o domínio Ω , temos a formulação direta. Esta pode ser obti-

da pela 3ª identidade de Green ou por resíduos ponderados, como mostrado a seguir.

A formulação direta, além de fornecer diretamente como incôgnitas o potencial e sua derivada normal, permite que trabalhem com superfícies regulares de Kellogg [29], que admitem a existência de vértices e arestas; na formulação indireta são permitidas apenas superfícies de Liapunov ("suaves").

III.2 - FORMULAÇÃO DIRETA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA A EQUAÇÃO DE LAPLACE

Para facilitar a exposição, apresentamos nesta seção a formulação do método dos elementos de contorno para o problema de condução sem geração interna de calor (equação de Laplace); antes de passarmos à implementação numérica na seção III.4, entretanto, examinamos as modificações necessárias à consideração de fontes no domínio (equação de Poisson) na seção III.3.

Em uma primeira etapa do método, a equação diferencial do problema e suas condições de contorno são transformadas em uma equação integral de contorno que fornece a temperatura em um ponto qualquer do interior do domínio em função dos valores da temperatura (u) e sua derivada normal (v) no contorno. Isto é feito através da segunda fórmula de Green e, alternativamente, pelo método dos resíduos ponderados.

Nos dois casos usamos a função generalizada delta de Dirac; em seguida, mostramos como os mesmos resultados podem ser

obtidos sem o uso do delta de Dirac.

Para que esta equação integral possa ser usada, é necessário que conheçamos tanto u quanto v no contorno. Isto é feito em uma segunda etapa que consiste em fazermos o limite da expressão da temperatura em um ponto interno quando este ponto tende para o contorno. Este limite nos fornece uma equação integral que relaciona apenas valores de u e v no contorno; a solução numérica desta equação integral na seção III.4 completa a descrição do método para o caso linear.

Uma vez resolvido o problema no contorno, apresentamos as expressões da temperatura e dos fluxos em pontos internos quaisquer.

3.2.1 - Transformação da equação de Laplace em uma equação integral de contorno usando a segunda identidade de Green

Como vimos no capítulo II, problemas de condução de calor em um meio sólido homogêneo e isotrópico em regime permanente são descritos pela equação de Poisson, quando podemos admitir que a condutividade não varia com a temperatura.

A consideração do problema de condução de calor com condutividade variável com a temperatura e/ou com condições de contorno não lineares é feita no capítulo IV.

Inicialmente formulamos o método dos elementos de con-

torno para regiões onde não haja geração de calor e, neste caso, a equação do problema passa a ser a equação de Laplace. Em meios ortotrópicos, por meio de uma transformação de variáveis, a formulação fica praticamente a mesma da equação de Laplace, como pode ser visto em [13].

A extensão do método para a equação de Poisson é feita na seção III.3 e a consideração de regiões formadas por mais de uma sub-região homogênea, na seção III.5.

Seja Ω um domínio limitado pelo contorno Γ , como mostrado na figura 3.1. A equação de Laplace pode ser escrita como

$$\nabla^2 u(p) = 0 \quad , \quad p \in \Omega \quad (3.1)$$

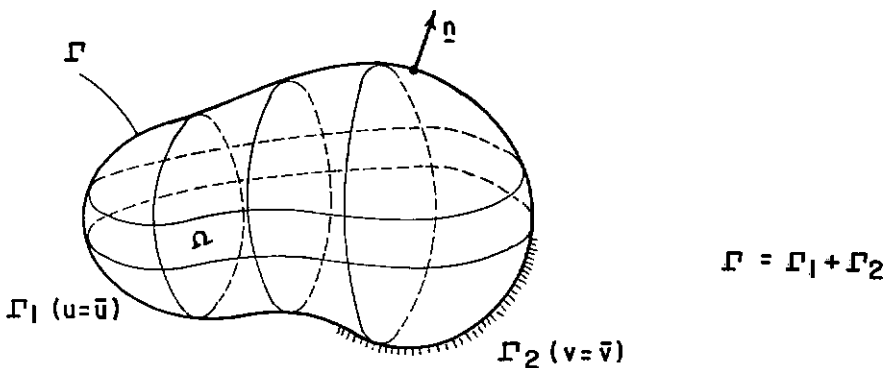


FIGURA 3.1 - Domínio e contorno do problema.

sujeita às condições de contorno

$$u(P) = \bar{u}(P) \quad , \quad P \in \Gamma_1 \quad ; \text{temperatura prescrita} \quad (3.2a)$$

e

$$v(P) = \bar{v}(P) \quad , \quad P \in \Gamma_2 \quad : \text{fluxo prescrito} \quad (3.2b)$$

onde

$u(p)$ é a temperatura no domínio,

$u(P)$ é a temperatura no contorno,

$v(P) = \frac{\partial u(P)}{\partial n(P)}$ é a derivada da temperatura com relação à normal ao contorno

e

$\underline{n}(P)$ é a normal (unitária) ao contorno Γ , dirigida para fora do domínio Ω .

A condição de contorno de convecção linear é considerada na seção III.4, enquanto que as condições de contorno não lineares serão vistas no capítulo IV.

O domínio Ω aqui considerado pode ser bidimensional ou tridimensional.

Estamos interessados em transformar a equação de Laplace em uma equação integral de contorno. Como vimos no capítulo II, o teorema de Gauss permite transformar integrais de domínio em integrais de contorno e tem como corolário a segunda fórmula de Green, repetida aqui por conveniência:

$$\int_{\Omega} (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (3.3)$$

Esta expressão é válida para quaisquer funções ψ e ϕ com derivadas parciais contínuas até pelo menos segunda ordem. Se adotarmos como função ψ a função u que é solução da equação de Laplace na região Ω de contorno Γ , o termo $-\phi \nabla^2 \psi$ se anula e a expressão (3.3) passa a ser escrita como

$$\int_{\Omega} u \nabla^2 \phi d\Omega = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi v \right) d\Gamma \quad (3.4)$$

Como queremos eliminar a integração no domínio, envolvendo a incógnita u , escolhemos para função ϕ a solução fundamental. Esta função nos dá a temperatura em um ponto p qualquer de um meio homogêneo infinito devida à existência de uma fonte pontual unitária localizada no ponto s .

A equação de Poisson, correspondente à solução fundamental, pode ser escrita como

$$\nabla^2 u^*(s;p) = - \frac{\delta(s;p)}{K}, \quad p \in \Omega^* \quad (3.5)$$

onde

$u^*(s;p)$ é a solução fundamental,
 $\delta(s;p)$ é o delta de Dirac e
 Ω^* é um domínio infinito

Como vimos, a solução fundamental é dada por

$$u^*(s;p) = \frac{1}{4K\pi r} \quad \text{em 3 dimensões} \quad (3.6)$$

e

$$u^*(s;p) = \frac{1}{2K\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{em 2 dimensões} \quad (3.7)$$

onde r é a distância entre o ponto onde se localiza a fonte (s) e o ponto onde se mede a temperatura (p).

Ao se isolar um domínio Ω limitado pelo contorno Γ , dentro do domínio infinito Ω^* , pode-se calcular a derivada em relação à normal ao contorno Γ , pela regra da cadeia, como

$$v^*(s;P) = \frac{\partial u^*(s;P)}{\partial r(s;P)} \cdot \frac{\partial r(s;P)}{\partial n(P)} \quad (3.8)$$

Portanto

$$v^*(s;P) = - \frac{1}{4K\pi r^2} \frac{\partial r(s;P)}{\partial n(P)} \quad \text{em 3 dimensões} \quad (3.9)$$

e

$$v^*(s;P) = - \frac{1}{2K\pi r} \frac{\partial r(s;P)}{\partial n(P)} \quad \text{em 2 dimensões} \quad (3.10)$$

É importante lembrar que estamos trabalhando com as soluções de dois problemas na expressão (3.3). Uma delas é a solução u da equação de Laplace que queremos determinar para a geometria do problema e condições de contorno impostas; a outra é a solução fundamental u^* conhecida e correspondente a fontes unitárias pontuais aplicadas ao domínio infinito.

Por analogia com a teoria do potencial, chamamos de ponto fonte o ponto de aplicação da fonte pontual unitária que gera a solução u^* a ser usada na expressão (3.4). Chamamos de pontos campo, os pontos nos quais calculamos a temperatura causada pela fonte pontual.

Como as expressões que serão obtidas para pontos do contorno diferem das obtidas para pontos do domínio, usamos letras maiúsculas para designar pontos do contorno (S para fonte e P para campo) e letras minúsculas para pontos do domínio (s para fonte e p para campo).

Substituindo na expressão (3.4) ϕ por u^* para um ponto fonte no domínio e explicitando a dependência das funções temos:

$$\int_{\Omega} \frac{u(p) \nabla^2 u^*(s;p)}{K} d\Omega(p) = \int_{\Gamma} u(P) v^*(s;P) d\Gamma(P) - \int_{\Gamma} v(P) u^*(s;P) d\Gamma(P) \quad (3.11)$$

Como a solução fundamental satisfaz a equação de Poisson (3.5), podemos escrever a integral de domínio, usando a propriedade do delta de Dirac, como:

$$- \int_{\Omega} \frac{u(p) \delta(s;p) d\Omega(p)}{K} = - \frac{u(s)}{K} \quad (3.12)$$

Levando este resultado à equação (3.11), obtemos

$$\frac{u(s)}{K} + \int_{\Gamma} u(P) v^*(s;P) d\Gamma(P) = \int_{\Gamma} v(P) u^*(s;P) d\Gamma(P) \quad (3.13)$$

Se multiplicarmos por K as expressões de u^* e v^* (o que equivale a termos uma fonte pontual de valor igual à condutividade), obtemos a terceira identidade de Green:

$$u(s) + \int_{\Gamma} u(P) v^*(s;P) d\Gamma(P) = \int_{\Gamma} v(P) u^*(s;P) d\Gamma(P) \quad (3.14)$$

A equação (3.14) representa uma função harmônica pela superposição de um potencial de camada simples, de densidade $K \cdot v(P)$, com um potencial de camada dupla de densidade $-K \cdot u(P)$. Em outras palavras, a temperatura em pontos internos pode ser calculada em função da temperatura e sua derivada normal no contorno.

3.2.2 - Obtenção da equação integral de contorno usando o método dos resíduos ponderados.

Uma forma alternativa de obtermos a integral de contor

no (3.14) é através do uso de resíduos ponderados [11].

A vantagem de se usar uma técnica de resíduos ponderados é a sua generalidade; no caso de elementos de contorno, ela permite uma extensão imediata do método para solução de equações diferenciais parciais mais complexas.

O fato de também poder ser usada para formular outras técnicas numéricas clássicas, como diferenças finitas e elementos finitos, torna mais fácil a combinação destes métodos com o método dos elementos de contorno.

Estamos procurando uma solução aproximada para o problema governado pela equação (3.1) sujeito às condições de contorno do tipo (3.2a) prescritas sobre a parte Γ_1 do contorno e do tipo (3.2b) prescritas sobre Γ_2 .

Podemos definir três funções de erro, que deveriam se anular no caso de termos a solução exata:

$$\varepsilon(p) = \nabla^2 u(p) \quad \text{em } \Omega \quad (3.15a)$$

$$\varepsilon_1(P) = u(P) - \bar{u}(P) \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (3.15b)$$

$$\varepsilon_2(P) = v(P) - \bar{v}(P) \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (3.15c)$$

Esses erros podem ser minimizados, escrevendo-se:

$$\int_{\Omega} \epsilon(p) u^*(s;p) d\Omega(p) = 0 \quad (3.16a)$$

$$\int_{\Gamma_1} \epsilon_1(P) v^*(s;P) d\Gamma(P) = 0 \quad (3.16b)$$

$$\int_{\Gamma_2} \epsilon_2(P) u^*(s;P) d\Gamma(P) = 0 \quad (3.16c)$$

onde u^* e v^* foram usadas como funções de ponderação.

As expressões (3.16a) - (3.16c) são dimensionalmente homogêneas e podem ser combinadas na seguinte expressão de resíduos ponderados:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u(p) u^*(s;p) d\Omega(p) = \int_{\Gamma_2} [v(P) - \bar{v}(P)] u^*(s;P) d\Gamma(P) - \int_{\Gamma_1} [u(P) - \bar{u}(P)] v^*(s;P) d\Gamma(P) \quad (3.17)$$

Esta é uma expressão do tipo misto pois envolve como incôgnitas u e v . Aplicando a 2ª fórmula de Green à integral de volume, temos:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nabla^2 u(p) u^*(s;p) d\Omega(p) &= \int_{\Omega} \nabla^2 u^*(s;p) u(p) d\Omega(p) + \\
+ \int_{\Gamma} v(P) u^*(s;P) d\Gamma(P) &- \int_{\Gamma} u(P) v^*(s;P) d\Gamma(P) \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Levando em conta que $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, podemos escrever (3.18) como

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nabla^2 u^*(s;p) u(p) d\Omega(p) &= \int_{\Gamma_1} \bar{u}(P) v^*(s;P) d\Gamma(P) + \\
\int_{\Gamma_2} u(P) v^*(s;P) d\Gamma(P) &- \int_{\Gamma_1} v(P) u^*(s;P) d\Gamma(P) - \\
\int_{\Gamma_2} \bar{v}(P) u^*(s;P) d\Gamma(P) &\quad (3.19)
\end{aligned}$$

que se reduz à expressão (3.11) levando-se em conta que, em Γ_1 , $u(P) = \bar{u}(P)$ e que, em Γ_2 , $v(P) = \bar{v}(P)$. Da mesma forma, as expressões do potencial para pontos internos podem ser deduzidas como no item 3.2.1.

Como dissemos na seção II.8, as mesmas expressões obtidas com o uso do delta de Dirac podem ser deduzidas através da análise convencional, como mostrado a seguir.

3.2.3 - Obtenção da integral de contorno sem o uso do delta de Dirac

A rigor, para que apliquemos a 2.^a fórmula de Green em 3.2.1 e 3.2.2 é necessário que $u(p)$ e $u^*(s,p)$ tenham derivadas parciais contínuas até pelo menos 2.^a ordem.

Esta condição fica satisfeita excluindo-se de Ω um domínio esférico (ou circular em duas dimensões) de raio ϵ centrado no ponto $p=s$ onde ocorre uma singularidade. O domínio passa a ser $\Omega-\Omega\epsilon$ e o contorno $\Gamma+\Gamma\epsilon$, como mostrado na figura 3.2.

Ao fazermos ϵ tender a zero, teremos o problema original e a expressão da terceira identidade de Green.

Em $\Omega-\Omega\epsilon$, a 2.^a fórmula de Green pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega-\Omega\epsilon} \left[(\nabla^2 u(p)) u^*(s;p) - u(p) \nabla^2 u^*(s;p) \right] d\Omega(p) = \\
 & \int_{\Gamma} \left[u^*(s;P) v(P) - v^*(s;P) u(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \int_{\Gamma\epsilon} \left[u^*(s;P) v(P) - v^*(s;P) u(P) \right] d\Gamma(P) \qquad (3.20)
 \end{aligned}$$

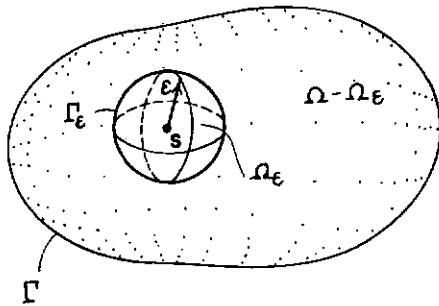


FIGURA 3.2 - Extração de uma vizinhança de raio ε em torno de um ponto do domínio.

A integral de volume em (3.20) se anula, pois em $\Omega - \Omega_\varepsilon$:

$$\nabla^2 u(p) = 0 \quad (u \text{ é solução da equação de Laplace})$$

e

$$\nabla^2 u^*(s;p) = 0 \quad (\text{o ponto fonte } s \text{ está fora do domínio})$$

A terceira identidade de Green é obtida ao calcularmos o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\Gamma_\varepsilon \rightarrow 0$, $\Omega - \Omega_\varepsilon \rightarrow \Omega$)

Os limites podem ser separados em

$$L_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u^*(s;P) v(P) d\Gamma(P) \quad (3.21)$$

e

$$L_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} v^*(s;P) u(P) d\Gamma(P) \quad (3.22)$$

Este limite, por sua vez, pode ser desmembrado em

$$L_2 = L_3 + L_4 \quad (3.23)$$

onde

$$L_3 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} [u(P) - u(s)] v^*(s; P) d\Gamma(P) \quad (3.24)$$

e

$$L_4 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u(s) \int_{\Gamma_\epsilon} v^*(s; P) d\Gamma(P) \quad (3.25)$$

A expressão (3.20) fica então:

$$\int_{\Gamma} [u^*(s; P) v(P) - v^*(s; P) u(P)] d\Gamma(P) + L_1 = L_2 \quad (3.26)$$

Analisaremos estes limites para o caso tridimensional; no caso bidimensional o procedimento é inteiramente análogo. Nos vários limites, Γ_ϵ é a superfície de uma esfera de raio ϵ , como mostrado na figura a seguir.

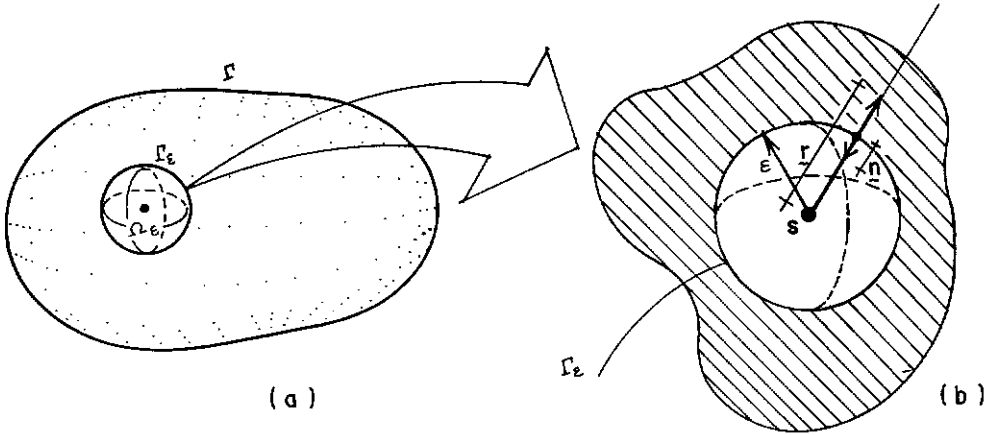


FIGURA 3.3 - Superfície esférica de raio ϵ em torno do ponto fonte :
 (a) vista geral
 (b) corte

Estudaremos inicialmente o limite L_4 (3.25).

Um exame da figura 3.3 (b) nos mostra que, em qualquer ponto P situado na superfície esférica Γ_ϵ , $r = \epsilon$ e $\partial r / \partial n = -1$.

Levando isto em conta na expressão (3.9), obtemos

$$v^*(s; p) = \frac{1}{4K \pi \epsilon^2} \quad (3.27)$$

Considerando que o valor da temperatura em s, $u(s)$, in depende de ϵ , o limite L_4 pode ser escrito como

$$L_4 = \frac{u(s)}{K} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi \epsilon^2} \int_{\Gamma_\epsilon} d\Gamma(P) \quad (3.28)$$

Como, na expressão (3.28), a integral corresponde à área

da superfície esférica Γ_ϵ , temos:

$$L_4 = \frac{u(s)}{K} \quad (3.29)$$

Admitindo que a temperatura seja contínua em $p=s$, vamos examinar o limite L_3 dado pela expressão (3.24).

Como, em toda a superfície Γ_ϵ, v^* é constante (3.27), podemos retirá-la da integral na expressão (3.24):

$$L_3 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4K \pi \epsilon^2} \int_{\Gamma_\epsilon} [u(P) - u(s)] d\Gamma(P) \quad (3.30)$$

Seja $W(\epsilon)$ o módulo da maior diferença entre a temperatura em s e a temperatura em pontos de superfície Γ_ϵ :

$$W(\epsilon) = |u(P) - u(s)| \quad (3.31)$$

Se, em cada ponto P da superfície Γ_ϵ , substituirmos $u(P) - u(s)$ por $W(\epsilon)$, temos:

$$|L_3| \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4K \pi \epsilon^2} \cdot W(\epsilon) \int_{\Gamma_\epsilon} d\Gamma(P) \quad (3.32)$$

Levando em conta que a integral em (3.32) corresponde à área da superfície esférica Γ_ϵ e que $W(0) = 0$, pela hipótese da continuidade da temperatura em s , temos

$$|L_3| \leq \frac{1}{K} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} W(\epsilon) = 0 \quad (3.33)$$

Portanto

$$L_2 = \frac{u(s)}{K} \quad (3.34)$$

Resta calcular o limite L_1 (3.21).

Como, em Γ_ϵ , a solução fundamental é constante ($= \frac{1}{4K\pi\epsilon}$),

podemos retirá-la da integral escrevendo:

$$L_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4K\pi\epsilon} \int_{\Gamma_\epsilon} v(P) d\Gamma(P) \quad (3.35)$$

Se, no teorema de divergência, fizermos $F = \nabla u$ para o domínio Ω_ϵ e contorno Γ_ϵ , teremos:

$$\int_{\Omega_\epsilon} \nabla^2 u(p) d\Omega(p) = \int_{\Gamma_\epsilon} \nabla u(P) \cdot \mathbf{n}(P) d\Gamma = \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial u(P)}{\partial n(P)} d\Gamma(P) \quad (3.36)$$

Em Γ_ϵ u é harmônica ($\nabla^2 u(p) = 0$), portanto:

$$\int_{\Gamma_\epsilon} v(P) d\Gamma(P) = 0 \quad (3.37)$$

Levando este resultado à expressão (3.35), concluímos que $L_1 = 0$. Substituindo L_1 e L_2 em (3.26), chegamos à mesma expressão (3.13), obtida anteriormente de uma forma mais sucinta através do uso da função generalizada delta de Dirac.

3.2.4 - Equação integral de contorno para pontos fonte no contorno

A equação (3.14) é válida apenas para pontos s do domínio e depende de valores de u e v no contorno, ainda desconhecidos; se queremos calcular as incógnitas no contorno, devemos obter a expressão da terceira identidade de Green para pontos S do contorno.

Para que possamos aplicar a segunda identidade de Green, eliminamos uma pequena região de raio ϵ em torno do ponto do contorno, como mostrado na figura 3.4(a). Levando em conta que, no domínio $\Omega - \Omega_\epsilon$, tanto u quanto u^* são harmônicas, chegamos à mesma expressão (3.26) obtida em 3.2.3.

Ao fazermos o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$, $\Omega - \Omega_\epsilon$ tende a Ω , $\Gamma - \bar{\Gamma}_\epsilon + \Gamma_\epsilon$ tende a Γ e s passa a ser um ponto do contorno S , como mostrado na figura 3.4 (b).

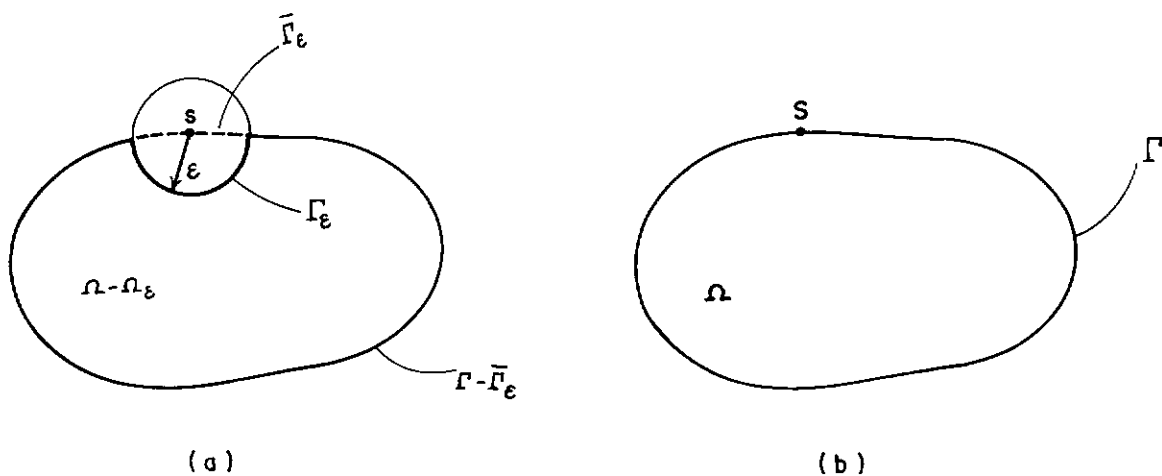


FIGURA 3.4 - Consideração do potencial em pontos do contorno :
 (a) domínio de aplicação da segunda fórmula de Green
 (b) situação limite quando $\epsilon \rightarrow 0$

Há duas diferenças importantes com relação à dedução da expressão feita para pontos internos. A primeira diz respeito às singularidades que ocorrem quando o ponto fonte S (para o qual queremos uma expressão da temperatura) coincide com o ponto campo; na terceira identidade de Green para pontos internos isto nunca acontecia pois o ponto fonte pertencia ao domínio e os pontos campo ao contorno.

Uma consequência disto é que as integrais em $\Gamma - \bar{\Gamma}_\epsilon$ devem ser feitas no sentido do valor principal de Cauchy [11].

Outra diferença está no fato de, na expressão (3.28), a integral em Γ_ϵ ser feita apenas em uma parte da superfície esférica.

$$L_4 = \frac{u(s)}{K} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\epsilon^2} \int_{\Gamma_\epsilon} d\Gamma(P) \quad (3.38)$$

Como $4\pi\epsilon^2$ é a área da superfície esférica de raio ϵ e a integral em Γ_ϵ é a área da calota esférica de raio ϵ pertencente ao domínio Ω , o limite acima, que valia $\frac{u(s)}{K}$ para pontos internos, passa a valer $\frac{u(S)}{K} c(S)$ onde $c(S)$ é a área da calota esférica pertencente ao domínio Ω dividida pela área da superfície esférica.

No caso bidimensional, o coeficiente $c(S)$ é igual ao comprimento do arco de círculo dividido pelo comprimento da circunferência.

A integral de contorno relacionando incógnitas apenas no contorno também pode ser obtida com a utilização do delta de Dirac. A única modificação a ser feita na dedução da terceira identidade de Green diz respeito à integral de domínio que, como vimos em 2.8, pode ser escrita:

$$- \int_{\Omega} \frac{u(p) \delta(S;p) d\Omega(p)}{K} = - \frac{c(S) u(S)}{K} \quad (3.39)$$

Substituindo este resultado em (3.11), obtemos a relação funcional entre u e v no contorno Γ , expressa pela equação integral

$$c(S) u(S) + \int_{\Gamma} u(P) v^*(S;P) d\Gamma(P) = \int_{\Gamma} v(P) u^*(S;P) d\Gamma(P) \quad (3.40)$$

Esta equação é o ponto de partida para o processo de discretização usando elementos de contorno apresentado em III.4. A partir desta equação, ao nos referirmos às soluções fundamentais, estaremos admitindo não mais uma fonte unitária, mas uma fonte de intensidade K ; isto simplifica as expressões de u^* e v^* eliminando K de seus denominadores.

A extensão das equações (3.14) e (3.40) para o caso de regiões infinitas deve ser feita levando-se em consideração algumas hipóteses adicionais relativas ao comportamento da solução fundamental e da solução do problema [11], [57].

Estas hipóteses dizem respeito ao comportamento das

funções em uma superfície infinitamente distante do contorno interno Γ e são chamadas condições de regularidade.

Se $u(p)$ e $v(p)$ têm um decaimento igual ou mais acentuado que a respectiva solução fundamental, então as condições de regularidade são satisfeitas.

Uma importante consequência prática deste resultado é que, neste tipo de problema, as equações deduzidas para corpos finitos continuam válidas sem que haja necessidade de se simular contornos infinitamente distantes.

Até bem pouco tempo, a condição de fluxo auto-equilibrado para cavidades em meios infinitos era imposta com a discretização de contornos suficientemente afastados onde se prescrevia a condição de fluxo nulo. Uma solução elegante que evita a discretização de contornos afastados pode ser vista em [47].

3.2.5 - Potencial e fluxo em pontos internos

A expressão que fornece o potencial em pontos internos é obtida diretamente da equação (3.14) e fica determinada uma vez resolvido o problema no contorno:

$$u(s) = \int_{\Gamma} v(P) u^*(s;P) d\Gamma(P) - \int_{\Gamma} u(P) v^*(s;P) d\Gamma(P) \quad (3.41)$$

Os fluxos internos, em uma direção l , podem ser obtidos pela diferenciação da expressão acima, levando em conta a lei de Fourier:

$$q_{\ell} = - K \left\{ \int_{\Gamma} v(P) \frac{\partial u^*(s;P)}{\partial \ell(s)} d\Gamma(P) - \int_{\Gamma} u(P) \frac{\partial v^*(s;P)}{\partial \ell(s)} d\Gamma(P) \right\}$$

(3.42)

Deve-se observar que, ao contrário do que acontece em métodos de domínio (elementos finitos e diferenças finitas), o cálculo dos fluxos não implica em uma perda de precisão dos resultados, pois só derivamos u^* e v^* , de modo que não introduzimos novas aproximações numéricas.

Além disso, temos a liberdade de escolher o número de pontos internos e sua localização, evitando assim cálculos desnecessários.

III.3 - FORMULAÇÃO DIRETA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA A EQUAÇÃO DE POISSON

Em presença de fontes de calor no domínio Ω , a equação que governa a condução de calor passa a ser a equação de Poisson:

$$\nabla^2 u(p) + b(p) = 0 \quad , \quad p \in \Omega \quad (3.43)$$

onde $b(p)$ é uma função conhecida que representa a distribuição de fontes no domínio ($= q'''(p)/K$).

Ao aplicarmos a segunda identidade de Green, a integral

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u(p) u^*(S;p) \quad (3.44)$$

não se anula mais, pois $\nabla^2 u(p) = -b(p)$.

Incluindo esta parcela na expressão (3.4), obtemos para pontos no contorno a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} C(S) u(S) + \int_{\Gamma} v^*(S;P) u(P) d\Gamma(P) &= \int_{\Gamma} u^*(S;P) v(P) d\Gamma(P) + \\ + \int_{\Omega} u^*(S;p) b(p) d\Omega(p) &\quad (3.45) \end{aligned}$$

A única diferença em relação à equação integral (3.40), correspondente à equação de Laplace, está no termo adicional

$$B(S) = \int_{\Omega} u^*(S;p) b(p) d\Omega(p) \quad (3.46)$$

Como esta integral envolve apenas funções conhecidas, seu cálculo pode ser feito e sua contribuição somada à equação de contorno obtida para a equação de Laplace; uma consequência imediata deste fato é que a equação integral (3.45) contém incógnitas apenas no contorno.

No caso geral, o cálculo da integral de domínio relativa às fontes distribuídas requer uma discretização do interior do corpo em células de geometria simples.

Estas células (ou celas) são usadas unicamente para integrações no domínio e, ao contrário do que ocorre em elementos finitos, não introduzem novas incógnitas no domínio [57].

Em muitos casos práticos, a subdivisão do domínio em células para integração das fontes distribuídas pode ser evitada. O caso mais simples corresponde a uma geração de calor constante em todo o domínio. A equação de Poisson fica então

$$\nabla^2 u(p) + b = 0 \quad (3.47)$$

A solução $u(p)$ pode ser decomposta na solução $u_1(p)$ da equação de Laplace mais uma solução particular $u_2(p)$.

Substituindo esta soma em (3.47) e levando em conta a linearidade do operador Laplaciano, podemos escrever

$$\nabla^2 u_1(p) + \nabla^2 u_2(p) = -b \quad (3.48)$$

O fato de u_2 ser uma solução particular de (3.47) requer que u_1 satisfaça a equação de Laplace.

Como o Laplaciano envolve derivadas segundas com relação a x, y (e z no caso tridimensional), adotamos como solução particular um polinômio de segundo grau em x, y (e z) que, substituído na equação de Poisson, se reduz a uma constante:

$$u_2(p) = a(x^2 + y^2) \text{ em duas dimensões} \quad (3.49)$$

ou

$$u_2(p) = a(x^2+y^2+z^2) \text{ em três dimensões} \quad (3.50)$$

onde x, y e z são as coordenadas do ponto p .

A constante "a" fica determinada ao substituirmos, na equação de Poisson, a expressão de $u_2(p)$:

$$u_2(p) = -\frac{b}{4} (x^2+y^2) \text{ no caso bidimensional} \quad (3.51)$$

e

$$u_2(p) = -\frac{b}{6} (x^2+y^2+z^2) \text{ no caso tridimensional} \quad (3.52)$$

Uma vez obtida a solução particular, o problema original recai na solução de uma equação de Laplace em u_1 . A solução desta equação exige a transformação das condições de contorno do problema original.

Em partes do contorno nas quais u é prescrito ($=\bar{u}$), temos:

$$u_1 = \bar{u} - u_2 \quad (3.53a)$$

Em partes de contorno nas quais v é prescrito ($=\bar{v}$):

$$v_1 = \bar{v} - v_2 \quad (3.53b)$$

Levando-se em conta que v_2 é uma derivada direcional, podemos escrevê-la como

$$\tilde{v}_2 = \tilde{\nabla} u_2 \cdot \tilde{\mathbf{n}} \quad (3.54)$$

No caso bidimensional

$$\tilde{\nabla} u_2 = \frac{-b}{2} (x, y) \quad (3.55)$$

e

no caso tridimensional

$$\tilde{\nabla} u_2 = \frac{-b}{3} (x, y, z) \quad (3.56)$$

Em cada ponto do contorno conhecemos x, y (e z), de modo que podemos calcular as condições de contorno e resolver a equação de Laplace em u_1 pelo método dos elementos de contorno; uma vez obtida a solução em u_1, v_1 basta somar a esta à solução particular u_2, v_2 para termos a solução do problema original.

Outro caso pertence a uma situação mais geral na qual $b(P)$ é uma função harmônica. Usando a idéia do teorema da divergência, é possível transformar a integral de domínio em uma integral de contorno que pode ser calculada numericamente junto com as demais integrais de contorno do problema [11].

Outra situação que ocorre freqüentemente e que dispensa a subdivisão do domínio ocorre quando podemos considerar as fontes como pontuais ou distribuídas em linhas [48].

III.4 - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Nesta seção, examinamos a solução da equação integral de contorno linear (3.40) que relaciona valores no contorno da temperatura u e de sua derivada em relação à normal exterior v . Como a solução analítica dessa equação só é possível em casos de geometrias e condições de contorno bem simples, nos casos mais gerais deve-se empregar um processo numérico que reduza as equações integrais a uma forma algébrica.

As características básicas deste processo constituem a essência do método dos elementos de contorno [11] e podem ser resumidas nos seguintes passos:

- (a) O contorno original Γ é aproximado por uma série de elementos nos quais a variação espacial de u e v é aproximada por funções que interpolam localmente u e v em termos dos seus valores nos pontos nodais de cada elemento.
- (b) A equação integral (3.40) é aplicada, em forma discretizada, a cada ponto nodal ξ do contorno e as integrais são calculadas (em geral de forma numérica aproximada) sobre cada elemento. Isto fornece um sistema de N equações algébricas envolvendo N valores nodais de u e N valores nodais de v .
- (c) As condições de contorno são impostas através dos valores conhecidos de u , v ou de uma relação linear entre u e v em cada nó do contorno. Desta forma, obtém-se um siste-

ma de equações algébricas que pode ser resolvido para as N incógnitas restantes.

Uma vez obtida a solução no contorno, tanto a temperatura quanto suas derivadas (e portanto fluxos) podem ser obtidas em pontos internos arbitrários, por meio das equações (3.41) e (3.42) também em forma discretizada.

A seguir, detalhamos cada uma das etapas de solução numérica descritas. Como o objetivo deste capítulo é dar uma noção do método dos elementos de contorno a ser usado nos problemas não lineares no próximo capítulo, deixamos detalhes para as diversas referências bibliográficas, em particular [9], [11] [57].

3.4.1 - Discretização do contorno

A seguir, descrevemos o processo de discretização em Elementos de Contorno para a equação de Laplace, sujeita a condições de contorno lineares; como a presença de fontes no domínio não introduz novas incógnitas, adiamos a consideração destas para o item 3.4.3.

Como, na equação (3.40), todos os pontos fonte e campo estão sobre o contorno, simplificaremos a notação escrevendo:

$$C(\xi) u(\xi) + \int_{\Gamma} v^*(\xi; x) u(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u^*(\xi; x) v(x) d\Gamma(x)$$

onde ξ é um ponto fonte no contorno e x um ponto campo genérico do contorno.

Há, basicamente, dois tipos de aproximação na solução numérica da equação (3.57). A primeira diz respeito à geometria do contorno e a segunda à variação das funções u e v dentro de cada elemento. Nos dois casos, usamos funções de interpolação em termos de valores em pontos nodais. Estas funções, geralmente polinomiais, são do mesmo tipo das usadas em elementos finitos, só que em uma dimensão a menos; assim, em problemas tridimensionais temos elementos de contorno de superfície e em problemas bidimensionais elementos de contorno na forma de segmentos de curvas.

Para cada tipo de domínio (bidimensional ou tridimensional) teremos diferentes tipos de elementos, dependendo da função que interpola a geometria e as funções u e v dentro de cada elemento [8] - [11], [23], [48], [57].

Em domínios bidimensionais, os elementos usados mais freqüentemente são mostrados na figura 3.5 e brevemente descritos a seguir:

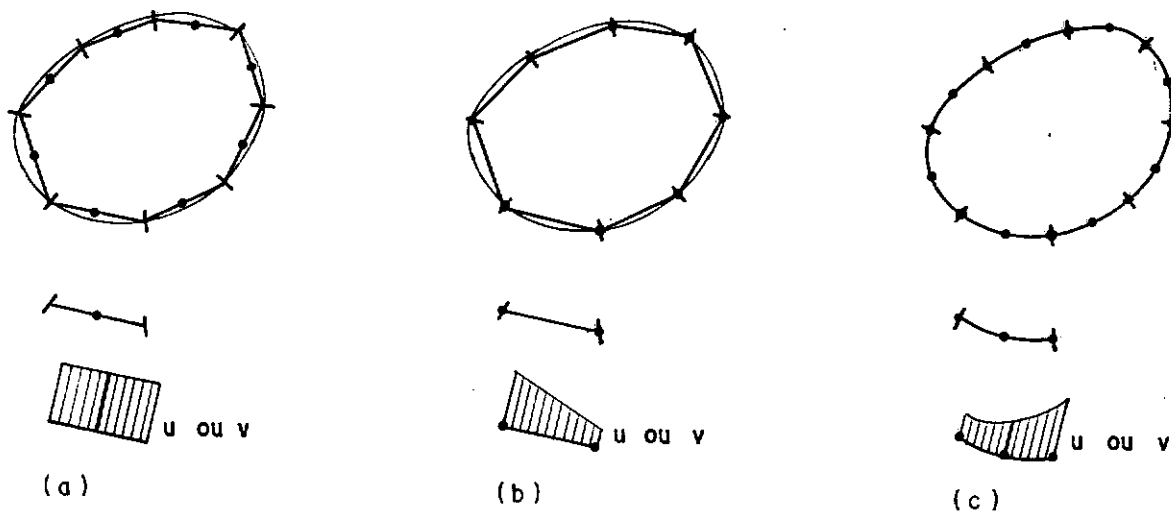


FIGURA 3.5 - Elementos de contorno mais comuns em duas dimensões:

(a) elementos constantes

(b) elementos lineares

(c) elementos quadráticos

(a) elementos constantes

Nestes elementos, o contorno é aproximado por segmentos de reta; os valores de u e v estão associados ao nó localizado no centro do elemento e são admitidos constantes dentro de cada elemento.

(b) elementos lineares

A aproximação da geometria do contorno é a mesma usada para os elementos constantes; os valores de u e v podem variar linearmente dentro de cada elemento, em função dos valores nos dois nós localizados nos extremos de cada segmento.

(c) elementos quadráticos

A aproximação tanto da geometria do contorno, quanto das funções u e v é quadrática dentro de cada elemento, em função dos valores assumidos nos dois nós extremos e nó central.

Ao aproximarmos o contorno original Γ por uma série de elementos Γ_e , as integrais presentes na equação (3.57) são substituídas por uma soma de integrais sobre os elementos Γ_e . Em cada ponto nodal ξ_i dos elementos de contorno podemos escrever

$$C(\xi_i) u(\xi_i) + \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} u(x) v^*(\xi_i; x) d\Gamma(x) = \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} v(x) u^*(\xi_i; x) d\Gamma(x) \quad (3.58)$$

onde E é o número de elementos de contorno Γ_e .

A seguir, examinaremos o caso bidimensional representado na figura 3.6. Os procedimentos para o caso tridimensional seguem a mesma idéia e podem ser vistos em [57].

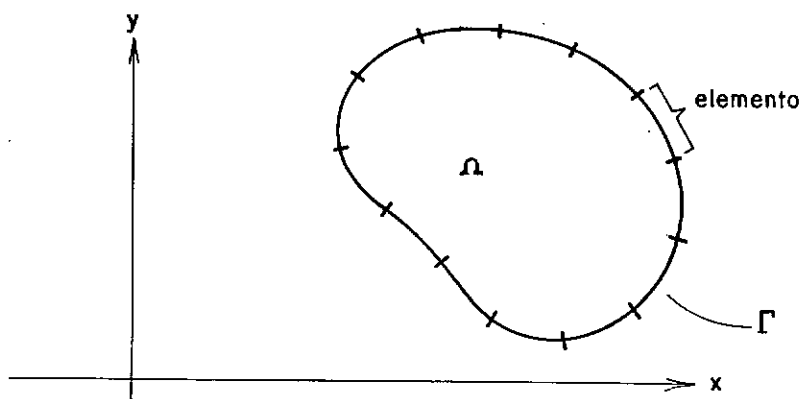


FIGURA 3.6 - Subdivisão do contorno de um problema bidimensional.

As coordenadas cartesianas $\underline{\underline{x}}^{(e)}$ dos pontos do contorno discretizado, pertencentes a um elemento Γ_e , podem ser expressas em termos de funções de interpolação $[M]$ e das coordenadas nodais $\underline{\underline{x}}^{(m)}$ do elemento, como:

$$\underline{\underline{x}}^{(e)} = [M] \underline{\underline{x}}^{(m)} \quad (3.59)$$

A mesma idéia pode ser usada para interpolar as funções u e v no elemento Γ_e :

$$\underline{\underline{u}}^{(e)} = [N] \underline{\underline{u}}^{(n)} \quad (3.60)$$

$$\underline{\underline{v}}^{(e)} = [N] \underline{\underline{v}}^{(n)} \quad (3.61)$$

onde os vetores $\underline{\underline{u}}^{(n)}$ e $\underline{\underline{v}}^{(n)}$ contêm os valores nodais de temperatura e derivadas da temperatura em relação à normal exterior ao domínio.

Nas expressões (3.60) e (3.61), u e v são interpolados no elemento Γ_e pela mesma função $[N]$; isto não é obrigatório, mas é bem comum devido às simplificações que traz em termos de implementação computacional.

Admitindo que o contorno Γ seja discretizado em E elementos Γ_e , a equação (3.58) pode ser escrita, para um ponto nodal "i", como:

$$c_i u_i + \sum_{e=1}^E \left(\int_{\Gamma_e} v_{ie}^* [N] d\Gamma \right) \tilde{\mathbf{u}}^{(n)} = \sum_{e=1}^E \left(\int_{\Gamma_e} u_{ie}^* [N] d\Gamma \right) \tilde{\mathbf{v}}^{(n)} \quad (3.62)$$

Como as funções de interpolação $[M]$ e $[N]$ são normalmente expressas em termos de uma coordenada adimensional η , é necessário relacionar $d\Gamma$ com o sistema de coordenadas intrínsecas:

$$d\Gamma = |\mathbf{J}| d\eta \quad (3.63)$$

No caso bidimensional, o Jacobiano da transformação de coordenadas é dado por

$$|\mathbf{J}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\eta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\eta} \right)^2} \quad (3.64)$$

No item seguinte, descrevemos o cálculo dos coeficientes de influência; este cálculo é apresentado com mais detalhes

para o elemento constante em 3.4.4.

3.4.2 - Coeficientes de Influência

Na expressão (3.62), as integrais envolvem a solução fundamental u_{ie}^* , sua derivada normal v_{ie}^* e a função de interpolação $[N]$. Todas estas funções ficam determinadas uma vez conhecida a geometria do contorno e permitem reduzir a equação integral a uma equação algébrica relacionando valores de u e v em pontos nodais do contorno.

Estas integrais são conhecidas como coeficientes de influência, pois relacionam os valores de u e v no ponto fonte "i" com os valores de u e v no elemento campo "e".

Embora em casos simples seja possível calcular os coeficientes de influência analiticamente, este cálculo é geralmente feito por integrações numéricas (do tipo Gauss-Legendre), pois conduzem a procedimentos mais eficientes e que podem ser usados para funções de interpolação de ordem mais elevada.

Quando o nó "i" pertence ao elemento Γ_e , devemos tomar cuidados especiais devido à singularidade que ocorre quando $r=0$. Nos casos normais, em que o nó "i" não pertence ao elemento Γ_e , as integrais são obtidas numericamente por Gauss-Legendre:

$$\int_{\Gamma_e} v^*(x) \cdot [N(\eta)] \, d\Gamma = \int_{-1}^1 v^*(\eta) \cdot [N(\eta)] \cdot |J| \, d\eta \approx \sum_{k=1}^K |J|_k \omega_k (v^* \cdot [N])_k \quad (3.65)$$

$$\int_{\Gamma_e} u^*(x) \cdot [N(\eta)] \, d\Gamma = \int_{-1}^1 u^*(\eta) \cdot [N(\eta)] \cdot |J| \, d\eta \approx \sum_{k=1}^K |J|_k \omega_k (u^* \cdot [N])_k \quad (3.66)$$

onde κ é o número de pontos de integração e ω_k o fator de ponderação de Gauss associado ao ponto k (determinado pelas abscissas de Gauss).

Normalmente são usados quatro pontos de integração (que permitem integrar exatamente polinômios de grau 7). Este número pode ser otimizado em esquemas de integração seletiva, em função da distância entre os pontos fonte e os pontos campo e do tamanho dos elementos campo (onde se dá a integração).

Antes de apresentarmos o cálculo dos coeficientes de influência, apresentamos a expressão matricial do método dos elementos de contorno no próximo item.

3.4.3 - Expressão Matricial do Método dos Elementos de Contorno

Consideraremos, a seguir, as expressões de elemento de contorno para o elemento constante bidimensional. Isto se justifica não só pela sua simplicidade, mas também pelo fato dos resultados obtidos com o seu uso serem muito bons em problemas de potencial.

Como vimos, a aproximação da geometria é feita por N segmentos de reta, nos quais se define um ponto médio (nó) onde as incógnitas u e v são consideradas. O elemento é denominado constante pois tanto u quanto v são admitidos constantes em cada segmento (elemento). A expressão matricial a que se chega, envolvendo valores nodais de u e v é idêntica à obtida para outros tipos de elementos; a única diferença é a expressão dos coeficientes de influência que podem ser vistos em [57].

No caso de elementos constantes, o nó funcional está localizado no meio do segmento de reta, onde o contorno é "suave", portanto, $c_i = \frac{1}{2}$. Como, em cada elemento, u_j e v_j são admitidos constantes e o número de elementos E coincide com o número de nós N , podemos escrever (3.62) como

$$\frac{1}{2} u_i + \sum_{j=1}^N u_j \int_{\Gamma_j} v^*_{ij} d\Gamma = \sum_{j=1}^N v_j \int_{\Gamma_j} u^*_{ij} d\Gamma \quad (3.67)$$

As integrais nos elementos Γ_j representam a influência de uma fonte unitária em um espaço infinito sobre os pontos cam-

pos em Γ_j . Estas integrais, como vimos, são chamadas de coeficientes de influência; por dependerem apenas da geometria e da solução fundamental, podem ser integradas fornecendo uma equação algébrica relacionando valores de u e v nos pontos nodais. Isto permite escrever a equação (3.67) como:

$$\sum_{j=1}^N u_j H_{ij} = \sum_{j=1}^N v_j G_{ij} \quad (3.68)$$

onde

$$H_{ij} = \hat{H}_{ij} + C_i \delta_{ij} = \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad , \quad (3.69)$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^*_{ij} d\Gamma \quad , \quad (3.70)$$

$$\hat{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} v^*_{ij} d\Gamma \quad (3.71)$$

e

$$\delta_{ij} \text{ é o delta de Kronecker} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Escrevendo a equação (3.68) para cada um dos N nós funcionais do contorno, obtemos

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} v_j, \quad i=1, \dots, N \quad (3.72)$$

que pode ser expressa, em forma matricial, como

$$[H] \underline{u} = [G] \underline{v} \quad (3.73)$$

onde $[H]$ e $[G]$ são matrizes cheias, não simétricas de ordem N ,

\underline{u} é o vetor que contém os valores das temperaturas nos N pontos nodais

\underline{v} é o vetor que contém os valores das derivadas normais nos N pontos nodais.

Este sistema contém N equações correspondentes aos pontos nodais e $2N$ incógnitas correspondentes aos valores de u e v nos pontos nodais. A indeterminação do sistema é levantado ao prescrevermos as condições de contorno nos N nós, como será mostrado no item 3.4.5.

Ao usarmos outros tipos de elementos, as integrais em cada elemento, que definem os coeficientes de influência g e h , contém em seu integrando u^* ou v^* multiplicados pelas funções de interpolação. Somando as influências dos elementos em cada nó, obtemos um sistema de equações da mesma forma que (3.73), no qual as variáveis são os valores nodais de u e v e a dependência da forma do contorno e das funções de interpolação de u e v em cada

elemento está considerada nos coeficientes de influência H_{ij} e G_{ij} . Detalhes relativos a outros elementos para problemas bidimensionais e tridimensionais (inclusive o caso axissimétrico) podem ser encontrados em [9], [11], [57].

No caso mais geral, os termos H_{ii} da diagonal da matriz $[H]$, que correspondem aos coeficientes C_i mais os valores principais \hat{H}_{ii} , podem ser calculados pela condição de fluxo nulo para um estado de potencial constante. Aplicando esta condição à equação (3.73), temos

$$u [H] [I] = 0 \quad (3.74)$$

onde $[I]$ é a matriz identidade de ordem N .

Expandindo (3.74), temos:

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = 0 \quad (3.75)$$

que fornece

$$H_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij} \quad i=1,2,\dots,N \quad (3.76)$$

Isto equivale aos movimentos de corpo rígido da elasticidade e foi usado primeiramente em elementos de contorno por Symm [45]. Esta expressão só é válida para regiões finitas; para regiões infinitas, ao não discretizarmos contornos infinita-

mente distantes, estamos implicitamente admitindo que a temperatura e o fluxo têm o mesmo decaimento da solução fundamental, de modo que a condição de fluxo nulo para potencial constante viola as condições de regularidade.

Neste caso, a expressão dos termos da diagonal da matriz $[H]$ passa a ser [57]:

$$H_{ii} = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij} \quad i=1,2,\dots,N \quad (3.77)$$

As expressões (3.76) e (3.77) fornecem uma forma conveniente de calcularmos H_{ii} sem a necessidade de calcularmos analiticamente os coeficientes C_i e as integrais \hat{H}_{ii} fortemente singulares e integráveis apenas no sentido do valor principal de Cauchy.

Cabe observar que a matriz $[H]$ de corpos finitos é singular, pois, como vimos, $[H] \underline{u} = 0$ admite infinitas soluções não triviais correspondentes à superposição de estados de temperatura constante. No caso de domínios infinitos, em que admitimos que as condições de regularidade sejam satisfeitas, a superposição de estados de temperatura constante não é mais livre e faz com que $[H]$ deixe de ser singular.

Como vimos na seção III.3, a consideração de fontes no domínio não introduz novas incógnitas, já que a integral no domínio só envolve termos conhecidos. A equação integral de contorno recebe uma contribuição no lado direito de modo que a equação dis

cretizada (3.58) se torna:

$$C(\xi_i) u(\xi_i) + \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} u(x) v^*(\xi_i, x) d\Gamma(x) = \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} v(x) u^*(\xi_i, x) d\Gamma(x) + \bar{B}_i \quad (3.78)$$

onde \bar{B}_i traduz a influência das cargas distribuídas no domínio sobre o nó "i".

Assim, a equação (3.72) passa a ser

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} v_j + \bar{B}_i, \quad i=1, \dots, N \quad (3.79)$$

ou, em forma matricial:

$$[H] \underline{u} = [G] \underline{v} + \bar{\underline{B}} \quad (3.80)$$

onde $\bar{\underline{B}}$ contém os termos (conhecidos) relativos a fontes no domínio.

A introdução das condições de contorno é apresentada em 3.4.5, após considerarmos o cálculo dos coeficientes de influência para elementos constantes bidimensionais.

3.4.4 - Cálculo dos coeficientes de influência para os elementos constantes bidimensionais

Para darmos uma idéia de como são calculados os coeficientes de influência, mostramos aqui as expressões correspondentes aos elementos bidimensionais constantes. O cálculo dos coeficientes para outros tipos de elementos não apresenta dificuldades especiais e pode ser visto em [9], [11], [57].

Os coeficientes de influência, definidos pelas integrais

$$\hat{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} v^*_{ij} d\Gamma \quad \text{e} \quad G_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^*_{ij} d\Gamma \quad (3.81)$$

podem ser calculados numericamente usando-se uma regra de integração de Gauss como visto em 3.4.2 para todos os elementos, exceto quando há uma singularidade ($i=j$).

A fim de padronizar o cálculo numérico das integrais H_{ij} e G_{ij} , usa-se uma transformação de variáveis que associa o comprimento de arco a uma coordenada adimensional, como mostrado na figura 3.7.

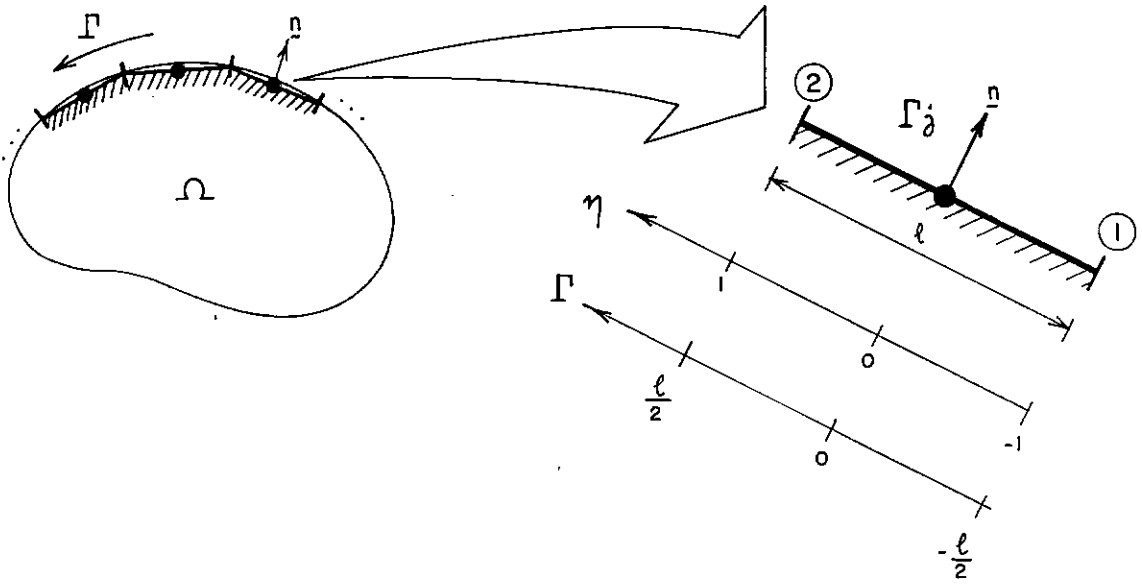


FIGURA 3.7 - Sistema de coordenadas para o elemento constante.

Para um ponto genérico do elemento Γ_j , podemos escrever

$$\Gamma_j = \frac{\ell_j}{2} (\eta + 1) \quad (3.82)$$

diferenciando esta expressão obtemos a relação que nos permite integrar em η :

$$d\Gamma_j = \frac{\ell_j}{2} d\eta \quad (3.83)$$

onde $|\mathbf{J}| = \frac{\ell_j}{2}$ é o jacobiano desta mudança de coordenadas.

Como as coordenadas de um ponto genérico, localizado em um elemento Γ_j , são interpoladas linearmente, temos:

$$x = \frac{1}{2} (1 - \eta) x_1 + \frac{1}{2} (1 + \eta) x_2 \quad (3.84a)$$

$$y = \frac{1}{2} (1 - \eta) y_1 + \frac{1}{2} (1 + \eta) y_2 \quad (3.84b)$$

onde x_1, y_1 são as coordenadas do ponto extremo 1 indicado na figura 3.7 e

x_2, y_2 as coordenadas do ponto 2.

Estas relações podem ser escritas, matricialmente, como

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(j)} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [\mathbf{M}] \tilde{\mathbf{x}}^{(m)} \quad (3.85)$$

onde

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} M1 & 0 & M2 & 0 \\ 0 & M1 & 0 & M2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(m)} = \{ x1, y1, x2, y2 \}^T,$$

$$M1 = \frac{1}{2} (1-\eta) \quad e$$

$$M2 = \frac{1}{2} (1+\eta)$$

A forma das funções de interpolação $M1$ e $M2$ pode ser vista na figura 3.8.

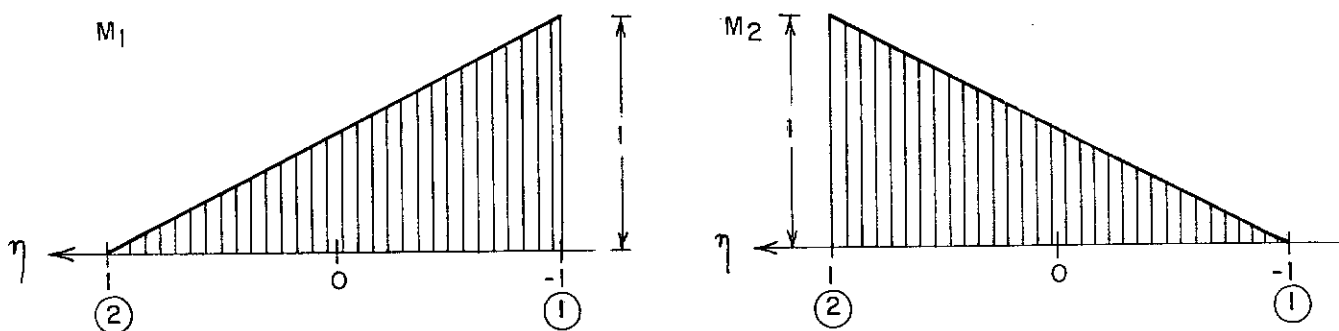


FIGURA 3.8 - Funções de interpolação da geometria do elemento constante.

As temperaturas e derivadas normais são admitidas constantes dentro de cada elemento e iguais ao seu valor no ponto médio do elemento:

$$u^{(j)} = u_j \quad , \quad v^{(j)} = v_j \quad (3.86)$$

Quando o nó "i" não pertence ao elemento Γ_j , a integração, como vimos, é feita por Gauss-Legendre:

$$H_{ij} = \hat{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} v_{ij}^* d\Gamma = \frac{l_j}{2} \int_{-1}^1 v_{ij}^* d\eta \approx \frac{l_j}{2} \sum_{k=1}^K \omega_k v^*(\xi_i; x_k) \quad (3.87)$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} u_{ij}^* d\Gamma = \frac{l_j}{2} \int_{-1}^1 u_{ij}^* d\eta \approx \frac{l_j}{2} \sum_{k=1}^K \omega_k u^*(\xi_i; x_k) \quad (3.88)$$

onde ξ_i é o ponto fonte associado ao nó "i" e x_k é o ponto campo associado à abscissa de Gauss x_k .

Quando o nó "i" coincide com o nó "j", as integrais são feitas analiticamente, sendo

$$\hat{H}_{ii} = \int_{\Gamma_j} v_{ij}^* d\Gamma \text{ no sentido do valor principal de Cauchy}$$

No elemento constante, ao integrarmos sobre um elemento que contém o ponto fonte ($i=j$), o raio vetor que parte do ponto fonte "i" e se dirige para qualquer ponto campo do elemento é sempre perpendicular à normal. Isto implica que

$$v_{ij}^* = \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial r_{ij}} \cdot \frac{\partial r_{ij}}{\partial n_j} = 0 \quad (3.89)$$

e portanto

$$H_{ii} = \hat{H}_{ii} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (3.90)$$

Uma forma alternativa de se obter H_{ii} é através das relações (3.76) e (3.77).

Finalmente, o coeficiente da diagonal da matriz $[G]$ é dado por

$$G_{ii} = \int_{-l_j/2}^{l_j/2} u_{ij}^* d\Gamma = -2 \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j/2} \ln r d\Gamma_j \right\} \quad (3.91)$$

como $d\Gamma = dr$,

$$G_{ii} = \frac{-1}{\pi} \int_0^{l_j/2} \ln r dr = \frac{l_j}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{2}{l_j} \right) + 1 \right] \quad (3.92)$$

3.4.5 - Introdução das Condições de Contorno

O sistema de equações algébricas (3.73) ou (3.80) possui N equações correspondentes aos nós do contorno e $2N$ incógnitas u e v . A consideração das N condições de contorno (uma em cada nó) diminui o número de incógnitas para N e permite que reordenemos o sistema (3.80) como:

$$[A] \tilde{\mathbf{x}} = [R] \tilde{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{b}} \quad (3.93)$$

onde $\tilde{\mathbf{x}}$ é o vetor que contém as incógnitas u ou v de cada nó,

$\tilde{\mathbf{r}}$ é o vetor que contém valores prescritos das condições de contorno,

e $\tilde{\mathbf{b}}$ é o vetor que contém a contribuição das fontes de calor no domínio.

Efetuada o produto matricial do lado direito da equa-

ção (3.93) e somando o vetor resultante ao vetor $\bar{\mathbf{b}}$, podemos escrever o sistema de equações como

$$[A] \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (3.94)$$

onde $[A]$ é uma matriz cheia e não simétrica de ordem N .

Para condições de contorno lineares, este sistema de equações também é linear e pode ser resolvido diretamente pelo método de eliminação de Gauss, fornecendo como solução os valores de u onde v era prescrito e v onde u era prescrito.

Em termos computacionais, as matrizes $[H]$ e $[G]$ não precisam ser montadas (o que corresponderia ao dobro da área de memória necessária à matriz $[A]$). Após o cálculo de cada coeficiente H_{ij} e G_{ij} , eles já são montados diretamente, na matriz $[A]$ ou no vetor de termos independentes \mathbf{f} , em função do tipo de condição de contorno prescrita.

As diferentes expressões dos termos A_{ij} , x_j e f_i são obtidas substituindo-se a expressão de condição de contorno na equação abaixo

$$\sum_j H_{ij} u_j = \sum_j G_{ij} v_j \quad (3.95)$$

e comparando, termo a termo, com a expressão

$$\sum_j A_{ij} x_j = f_i \quad (3.96)$$

Cabe observar que, em presença de fontes no domínio, f_i sempre recebe a contribuição \bar{b}_i (omitida por simplicidade nas expressões abaixo).

Assim:

- i) Para pontos nodais j pertencentes a contornos Γ_u , nos quais a temperatura é prescrita, temos $u_j = \bar{u}_j$ que substituído em (3.95) fornece, após reordenação:

$$- \sum_{j \in \Gamma_u} G_{ij} v_j = - \sum_{j \in \Gamma_u} H_{ij} \bar{u}_j \quad (3.97)$$

Comparando esta expressão com (3.96), obtemos

$$x_j = v_j \quad ; \quad A_{ij} = - G_{ij} \quad (3.98)$$

$$- \sum_{j \in \Gamma_u} H_{ij} \bar{u}_j : \text{contribuição para } f_i$$

- ii) Para pontos nodais j pertencentes a contornos Γ_q , nos quais o fluxo é prescrito, temos, pela lei de Fourier, que

$$v_j = - \frac{\bar{q}_j}{K}$$

Substituindo esta expressão em (3.95), obtemos

$$\sum_{j \in \Gamma_q} H_{ij} u_j = \sum_{j \in \Gamma_q} G_{ij} \left(\frac{-\bar{q}_j}{K} \right) \quad (3.99)$$

que implica em:

$$x_j = u_j \quad ; \quad A_{ij} = H_{ij} \quad (3.100)$$

$$- \sum_{j \in \Gamma_q} G_{ij} \frac{\bar{q}_j}{K} : \text{contribuição para } f_i$$

iii) Para pontos nodais j pertencentes a contornos Γ_c sujeitos a convecção, levando em conta as expressões do fluxo convectivo e da lei de Fourier, temos $v_j = \frac{-h_j}{K} (u_j - u_{cj})$.

Substituindo esta expressão em (3.95), obtemos:

$$\sum_{j \in \Gamma_c} H_{ij} u_j = \sum_{j \in \Gamma_c} G_{ij} \left\{ - \frac{h_j}{K} (u_j - u_{cj}) \right\} \quad (3.101)$$

que pode ser reordenado como

$$\sum_{j \in \Gamma_c} \left(H_{ij} + G_{ij} \cdot \frac{h_j}{K} \right) u_j = \sum_{j \in \Gamma_c} G_{ij} \cdot \frac{h_j}{K} u_{cj} \quad (3.102)$$

comparando (3.102) com (3.96), obtemos:

$$x_j = u_j \quad ; \quad A_{ij} = H_{ij} + G_{ij} \cdot \frac{h_j}{K} \quad (3.103)$$

$$\sum_{j \in \Gamma_c} G_{ij} \cdot \frac{h_j}{K} u_{cj} : \text{contribuição para } f_i$$

Matricialmente, a reordenação corresponde à troca de colunas (juntamente com seus sinais), das matrizes $[H]$ e $[G]$, que multiplicam a condição de contorno prescrita. Quando há condições de contorno não lineares, guardamos as colunas da matriz $[G]$, correspondentes aos nós sujeitos a condições de contorno não lineares, evitando que, a cada iteração, as mesmas integrais sejam recalculadas.

Como vimos no capítulo II, a condição de contorno de radiação pode ser fatorada e interpretada, para efeito de cálculo, como uma convecção não linear. Esta interpretação nos permite usar as expressões (3.103) correspondentes à convecção, a cada iteração, na solução do sistema de equações não lineares resultante por meio de algoritmos de iteração direta, como veremos no próximo capítulo.

3.4.6 - Cálculo de temperatura e fluxos em pontos internos

Uma vez resolvido o sistema (3.94), obtemos em todos os nós do contorno os valores de u onde v era prescrito e vice-versa. Isto nos permite calcular a temperatura e o fluxo em quaisquer pontos internos por meio das equações (3.41) e (3.42), em forma discretizada.

$$u_i = \sum_{j=1}^n v_j G_{ij} - \sum_{j=1}^n u_j \hat{H}_{ij} \quad (3.104)$$

$$(q_\ell)_i = -K \left\{ \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} v_j \frac{\partial u^*}{\partial \ell} d\Gamma - \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} u_j \frac{\partial v^*}{\partial \ell} d\Gamma \right\} \quad (3.105)$$

Isto completa as expressões de elementos de contorno a serem usados no capítulo IV, onde estamos interessados na consideração das não linearidades.

III.5 - SUB-REGIÕES

Se a condução de calor se processa em um sólido que é homogêneo apenas por partes, os procedimentos numéricos anteriormente descritos podem ser aplicados a cada sub-região homogênea como se ela fosse separada das demais.

Em cada sub-região podemos calcular os coeficientes de influência H_{ij} e G_{ij} e montar um sistema de equações.

A solução para cada sub-região contudo, não pode ser obtida isoladamente, pois, nas interfaces, tanto u quanto v são desconhecidos. A introdução de duas relações extras por nó de interface permite levantar a indeterminação dos sistemas; estas relações são a condição de compatibilidade e a condição de equilíbrio e levam a um sistema de equações para toda a região que, em vez de ser cheio, passa a ser bloqueado [9, 11, 13, 27, 57].

Uma vez resolvido o problema no contorno externo e nas interfaces, o cálculo de temperaturas e fluxos em pontos internos é feito usando-se as expressões obtidas anteriormente; nestas expressões a integração é feita apenas sobre o contorno da sub-região à qual pertence o ponto.

A seguir, damos uma idéia deste processo considerando, inicialmente, uma região Ω composta de duas sub-regiões Ω^1 e Ω^2 de contornos externos Γ^1 e Γ^2 , respectivamente, e interface Γ_I , como representado na figura 3.9.

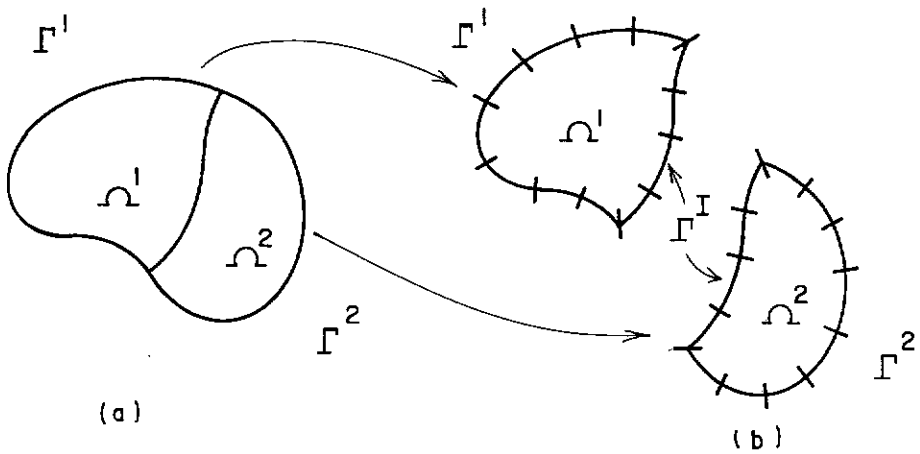


FIGURA 3.9 - Domínio composto de duas sub-regiões
 (a) problema original
 (b) separação em sub-regiões e discretização.

O sistema de equações (3.73), correspondente à região Ω^1 , pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} [H^1] & [H_I^1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^1 \\ \tilde{\mathbf{u}}_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G^1] & [G_I^1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}^1 \\ \tilde{\mathbf{v}}_I \end{Bmatrix} \quad (3.106)$$

onde

$\tilde{\mathbf{u}}^1$ e $\tilde{\mathbf{v}}^1$ são os vetores que contêm as temperaturas e suas derivadas normais, respectivamente, em nós do contorno externo Γ_1

$\tilde{\mathbf{u}}_I^1$ e $\tilde{\mathbf{v}}_I^1$ são os vetores que contêm as temperaturas e suas derivadas normais, respectivamente, na interface Γ_I considerada como pertencente a Ω^1

Admitindo que o número de nós funcionais seja N_1 no contorno Γ^1 , N_2 no contorno Γ^2 e N_I na interface Γ_I , as matrizes $[H^1]$ e $[G^1]$ têm dimensão $(N_1 + N_I) \times N_1$ e as matrizes $[H_I^1]$ e $[G_I^1]$ dimensão $(N_1 + N_I) \times N_I$.

De modo análogo, temos para a região Ω^2 :

$$\begin{bmatrix} [H^2] \\ [H_I^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^2 \\ \tilde{\mathbf{u}}_I^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G^2] \\ [G_I^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}^2 \\ \tilde{\mathbf{v}}_I^2 \end{Bmatrix} \quad (3.107)$$

Admitindo um contato perfeito entre Ω^1 e Ω^2 , na interface Γ_I , podemos escrever as condições de acoplamento:

$$\tilde{\mathbf{u}}_I^1 = \tilde{\mathbf{u}}_I^2 = \tilde{\mathbf{u}}_I \quad (\text{compatibilidade}) \quad (3.108)$$

e

$$\tilde{\mathbf{q}}_I^1 = -\tilde{\mathbf{q}}_I^2 \quad (\text{equilíbrio}) \quad (3.109)$$

O sinal negativo se deve às orientações contrárias das normais de cada sub-região na interface; fisicamente, isto significa que ao termos na interface um fluxo de calor saindo da região 1 ($q > 0$), este mesmo fluxo entra na região 2 ($q < 0$).

A condição de equilíbrio pode ser escrita, em termos das derivadas normais v , por meio da lei de Fourier, como:

$$\tilde{v}_I^1 = - \frac{K_2}{K_1} \tilde{v}_I^2 = \tilde{v}_I \quad (3.110)$$

Levando em conta as condições (3.108) e (3.110), podemos reescrever (3.106) como

$$\begin{bmatrix} [H^1] & [H_I^1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}^1 \\ \tilde{u}_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G^1] & [G_I^1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{v}^1 \\ \tilde{v}_I \end{Bmatrix} \quad (3.111)$$

e a equação (3.107) como

$$\begin{bmatrix} [H^2] & [H_I^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}^2 \\ \tilde{u}_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G^2] & - \frac{K_1}{K_2} [G_I^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{v}^2 \\ \tilde{v}_I \end{Bmatrix} \quad (3.112)$$

Combinando estas duas equações matriciais, formamos o sistema:

$$\begin{bmatrix} [H^1] & [H_I^1] & [0] \\ [0] & [H_I^2] & [H^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}^1 \\ \tilde{u}_I \\ \tilde{u}^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G^1] & [G_I^1] & [0] \\ [0] & -\frac{K_1}{K_2} [G_I^2] & [G^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{v}^1 \\ \tilde{v}_I \\ \tilde{v}^2 \end{Bmatrix} \quad (3.113)$$

que pode ser representado pela expressão (3.73), com a diferença de que agora as matrizes $[H]$ e $[G]$ não são mais cheias. Lembrando que na interface tanto u quanto v são incógnitas, o sistema (3.113) pode ser reordenado como

$$\begin{array}{l} \text{subregião 1} \\ \text{subregião 2} \end{array} \begin{bmatrix} [H^1] & [H_I^1] & - [G_I^1] & [0] \\ [0] & [H_I^2] & \frac{K_1}{K_2} [G_I^2] & [H^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}^1 \\ \tilde{u}_I \\ \tilde{v}_I \\ \tilde{u}^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G^1] & [0] \\ [0] & [G^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{v}^1 \\ \tilde{v}^2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ & \Gamma^1 & & \Gamma_I & & \Gamma^1 & \Gamma^2 \end{array} \quad (3.114)$$

De acordo com as condições de contorno impostas, as colunas com as submatrizes correspondentes aos contornos externos Γ^1 e Γ^2 podem trocar suas posições (juntamente com o sinal), como no problema de condução em uma região homogênea.

O sistema assim reordenado pode ser escrito como (3.94), mas a matriz do sistema deixa de ser cheia e tanto u quanto v nas interfaces são incógnitas.

Em termos computacionais, as matrizes $[G]$ e $[H]$ não são montados para cada sub-região. Após o cálculo de cada um dos

elementos G_{ij} e H_{ij} , as contribuições à matriz $[A]$ e ao vetor de termos independentes são montadas diretamente.

As mesmas idéias se aplicam a domínios compostos de mais de duas sub-regiões. O caso de uma região composta de três sub-regiões, visto na figura 3.10, nos permite observar certas características gerais dos sistemas de equações obtidos pelo acoplamento de sub-regiões.

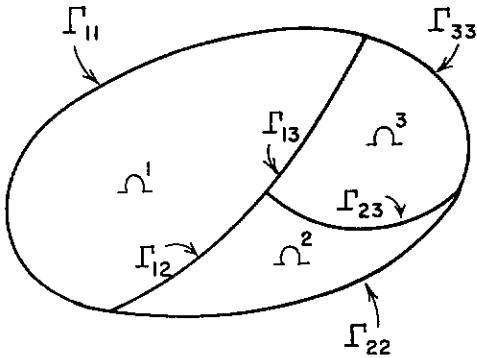


FIGURA 3.10 - Região composta de três sub-regiões

Na figura 3.10 representamos os contornos por meio de dois índices. Nas interfaces, o primeiro deles indica a região de menor número (à qual as variáveis estão referidas) e o segundo a outra região; em contornos externos, os dois índices são iguais.

Escrevendo as equações de elemento de contorno para cada sub-região e reunindo-as pelas condições de acoplamento, como vimos anteriormente, chegamos ao sistema:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma_{11} \quad \Gamma_{12} \quad \Gamma_{13} \quad \Gamma_{22} \quad \Gamma_{23} \quad \Gamma_{33} \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \text{subr.} \\
 \begin{array}{l}
 1 \\
 2 \\
 3
 \end{array}
 \end{array}
 \left[\begin{array}{ccc|cc|c}
 \boxed{H_{11}} & \boxed{H_{12}} & \boxed{H_{13}} & & & \\
 \hline
 & \boxed{H_{21}} & & \boxed{H_{22}} & \boxed{H_{23}} & \\
 \hline
 & & \boxed{H_{31}} & & \boxed{H_{32}} & \boxed{H_{33}}
 \end{array} \right]
 \left\{ \begin{array}{l}
 \underline{u} \\
 \sim_{11} \\
 \underline{u} \\
 \sim_{12} \\
 \underline{u} \\
 \sim_{13} \\
 \underline{u} \\
 \sim_{22} \\
 \underline{u} \\
 \sim_{23} \\
 \underline{u} \\
 \sim_{33}
 \end{array} \right\} =$$

$$\begin{array}{c}
 \Gamma_{11} \quad \Gamma_{12} \quad \Gamma_{13} \quad \Gamma_{22} \quad \Gamma_{23} \quad \Gamma_{33} \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 =
 \end{array}
 \left[\begin{array}{ccc|cc|c}
 \boxed{G_{11}} & \boxed{G_{12}} & \boxed{G_{13}} & & & \\
 \hline
 & -\frac{K_1}{K_2} \boxed{G_{21}} & & \boxed{G_{22}} & \boxed{G_{23}} & \\
 \hline
 & & -\frac{K_1}{K_3} \boxed{G_{31}} & -\frac{K_2}{K_3} \boxed{G_{32}} & \boxed{G_{33}} &
 \end{array} \right]
 \left\{ \begin{array}{l}
 \underline{v} \\
 \sim_{11} \\
 \underline{v} \\
 \sim_{12} \\
 \underline{v} \\
 \sim_{13} \\
 \underline{v} \\
 \sim_{22} \\
 \underline{v} \\
 \sim_{23} \\
 \underline{v} \\
 \sim_{33}
 \end{array} \right\} \quad (3.115)$$

que também pode ser escrito na forma (3.73).

O sistema é bloqueado e as quadrículas em branco correspondem a elementos nulos. As matrizes $\boxed{H_{ij}}$ e $\boxed{G_{ij}}$ representam os coeficientes de influência para pontos fonte localizados na sub-região i , sobre pontos campo na região j ; quando $i = j$, eles multiplicam valores no contorno e quando $i \neq j$, multiplicam as incógnitas na interface.

Podemos observar no sistema (3.115), que:

- (a) em "colunas" correspondentes a contornos externos (Γ_{ii}), apenas os blocos das "linhas" correspondentes à sub-região i não

são nulos; de acordo com as condições de contorno, os blocos $[H_{ii}]$ e $[G_{ii}]$ podem ser reordenados, como no caso de uma região homogênea.

(b) em "colunas" correspondentes a interfaces $(\Gamma_{ij}, i \neq j)$ há dois blocos não nulos, um em linhas correspondentes à sub-região i e outro em linhas correspondentes à sub-região j ; como esses blocos multiplicam valores de u e v na interface (que são sempre incógnitos), na reordenação as matrizes $[G_{ij}]$ passam para o lado esquerdo trocando de sinal.

(c) como vimos em (b), em "colunas" correspondentes a interfaces $(\Gamma_{ij}, i \neq j)$ há dois blocos não nulos. A consideração da condição de equilíbrio na interface da forma (3.110), faz com que o bloco $[G_{ji}]$, em que $j > i$, seja multiplicado por $-\frac{K_i}{K_j}$

O sistema (3.115) reordenado fica então:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma_{11} \quad \Gamma_{12} \quad \Gamma_{13} \quad \Gamma_2 \quad \Gamma_{23} \quad \Gamma_3 \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \text{subr.} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
 1 & \boxed{H_{11}} & \boxed{H_{12}} & \boxed{G_{12}} & \boxed{H_{13}} & \boxed{G_{13}} & \\
 \hline
 2 & & \boxed{H_{21}} & \frac{K_1}{K_2} \boxed{G_{21}} & & \boxed{H_{22}} & \boxed{H_{23}} & \boxed{G_{23}} \\
 \hline
 3 & & & & \boxed{H_{31}} & \frac{K_1}{K_3} \boxed{G_{31}} & \boxed{H_{32}} & \frac{K_2}{K_3} \boxed{G_{32}} & \boxed{H_{33}}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_{11} \\ \tilde{u}_{12} \\ \tilde{v}_{12} \\ \tilde{u}_{13} \\ \tilde{v}_{13} \\ \tilde{u}_{22} \\ \tilde{u}_{23} \\ \tilde{v}_{23} \\ \tilde{u}_{33} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c|c}
 \boxed{G_{11}} & & \\
 \hline
 & \boxed{G_{22}} & \\
 \hline
 & & \boxed{G_{33}}
 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}_{11} \\ \tilde{v}_{22} \\ \tilde{v}_{33} \end{array} \right\} \quad (3.116)$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $\Gamma_{11} \quad \Gamma_{22} \quad \Gamma_{33}$

que também pode ser escrito como (3.94).

Na reordenação, \tilde{u}_{ij} e \tilde{v}_{ij} ($i \neq j$) e coeficientes de influência correspondentes às incógnitas na interface, ficam no lado esquerdo. Isto provoca uma troca de sinal nas matrizes $\boxed{G_{ij}}$ que estavam do lado direito.

A reordenação para \tilde{u}_{ii} e \tilde{v}_{ii} (correspondentes a contornos externos) é feita como anteriormente. Assim, se \tilde{u}_{11} for prescrito, teremos em \boxed{A} a matriz - $\boxed{G_{11}}$ em vez de $\boxed{H_{11}}$ e - $\boxed{H_{11}} \tilde{u}_{11}$ como contribuição para o vetor f .

Vemos que a matriz do sistema agora é esparsa. Isto se deve ao fato da aproximação ser local (por sub-região) como em elementos finitos e diferenças finitas. Podemos tirar partido desta esparsidade na solução do sistema de equações, não fazendo cálculos com termos que sabemos de antemão que são nulos e armazenando apenas termos não nulos. Uma vantagem em relação aos esquemas equivalentes de solução em métodos de domínio é que a localização dos termos não nulos fica bastante facilitada pelo fato deles se acharem naturalmente blocados (isto, é claro, quando a cada sub-região corresponderem vários elementos de domínio).

O preço que se paga pela esparsidade dos sistemas, quando a aproximação é local, é o aumento do número de incógnitas relativas à aproximação do domínio. Em elementos finitos e diferenças finitas, isto sempre ocorre mesmo que o domínio seja homogêneo. Em elementos de contorno, quando o meio é homogêneo, não há aproximações no domínio e a matriz do sistema é cheia e de dimensões bem menores que as obtidas com os métodos de domínio. Ao usarmos sub-regiões conseguimos sistemas de equações esparsos, mas à custa de um aumento do número de incógnitas e da introdução de aproximações no domínio. Não se deve, portanto, separar domínios em sub-regiões, a menos que esta divisão seja necessária, como no caso de sub-regiões compostas de materiais diferentes.

Em regiões compostas de muitas sub-regiões, as características do método dos elementos de contorno desaparecem ao introduzirmos muitas aproximações no domínio e se acentuam características do método dos elementos finitos, como discretização exagerada do domínio e esparsidade das matrizes. Nestes casos, é

mais interessante usar diretamente o método dos elementos finitos.

Na grande maioria dos casos práticos, no entanto, o número de sub-regiões não é muito elevado e o uso de elementos de contorno com sub-regiões ainda se mostra mais vantajoso.

IV. O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS NÃO LINEARES DE
CONDUÇÃO DE CALOR

IV. O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS NÃO LINEARES DE CONDUÇÃO DE CALOR

IV.1 INTRODUÇÃO

Como vimos no capítulo II, a equação que governa a condução de calor em meios homogêneos isotrópicos, em regime permanente, é dada por

$$\nabla \cdot (K \nabla u) + q''' = 0 \quad (4.1)$$

Quando podemos considerar que a condutividade não varia com a temperatura, esta equação se torna a equação de Poisson; a solução desta equação, pelo método dos elementos de contorno, para condições de contorno lineares, foi apresentada no capítulo anterior, tanto no caso de apenas uma região homogênea quanto no caso de uma região composta de sub-regiões homogêneas.

Neste capítulo, consideramos a solução por elementos de contorno dos problemas não lineares de condução de calor descritos no capítulo II. Na seção IV.2, consideramos a não linearidade devida à dependência da condutividade com a temperatura. Com o uso da transformada de Kirchhoff conseguimos linearizar a equação (4.1); esta passa a ser uma equação de Poisson no espaço transformado, com as não linearidades transferidas para as condições de contorno de convecção e radiação e também para as condições de interface, no caso de sub-regiões.

Isto permite que tratemos de uma forma unificada as não

linearidades, tanto do operador quanto das condições de contorno, para uma região homogênea, por meio de esquemas iterativos descritos na seção IV.3. Nesta seção, apresentamos dois esquemas de iteração direta e introduzimos, no contexto de elementos de contorno, o algoritmo de Newton-Raphson. O primeiro esquema de iteração direta, do tipo "pseudo-força", por ser aplicável apenas a não linearidades fracas e por estar descrito em [6] e [40] não é detalhado. Para os outros dois esquemas iterativos apresentamos, primeiramente, o método para o caso de condutividade constante e depois para o problema transformado.

Finalmente, na seção IV.4, consideramos a não linearidade que surge na interface de sub-regiões, quando aplicamos a transformada de Kirchhoff às sub-regiões, tanto por iterações diretas quanto por Newton-Raphson.

Em todo o capítulo omitimos os termos relativos às fontes pois, como vimos no capítulo anterior, estas contribuem apenas com um termo adicional para o vetor de termos independentes.

IV.2 - CONDUÇÃO DE CALOR COM CONDUTIVIDADE DEPENDENTE DA TEMPERATURA

No capítulo anterior, a linearidade da equação foi resultado da hipótese da condutividade depender da temperatura. Esta hipótese deixa de ser válida em muitos problemas práticos, onde a condutividade não pode ser admitida constante.

A transformada de Kirchhoff (2.32), permite que se use

o método dos elementos de contorno, sem que seja necessário reescrever as expressões básicas usadas no caso linear.

Como foi visto no capítulo II, a equação da condução de calor pode ser colocada na forma da equação de Poisson através da transformada de Kirchhoff. Assim, a equação matricial equivalente a (3.73) no espaço transformado fica

$$[H] \tilde{U} = [G] \tilde{V} \quad (4.2)$$

onde \tilde{U} é o vetor cujas componentes são as transformadas de Kirchhoff de u

e \tilde{V} é o vetor cujas componentes são as derivadas normais de U , i.e., $V = \frac{\partial U}{\partial n}$.

Após a introdução das condições de contorno, podemos reordenar (4.2) como:

$$[A] \tilde{X} = \tilde{F} \quad (4.3)$$

Os coeficientes G_{ij} e H_{ij} são função apenas da geometria do problema e, por isso, suas expressões não se alteram nem com a transformada de Kirchhoff nem ao longo do processo iterativo, nos casos de condições de contorno não lineares. Isto significa uma grande economia de esforço computacional, correspondente às integrações numéricas.

Para que possamos resolver o sistema (4.2), é necessário introduzir as condições de contorno; estas precisam ser

transformadas, como mostrado abaixo:

Em Γ_u , temos simplesmente que

$$U = T(\bar{u}) = \bar{U} \quad (4.4)$$

onde T representa a transformada de Kirchhoff (2.32)

No resto do contorno, devemos encontrar expressões para V.

Usando a definição de U, obtemos a expressão de sua derivada normal:

$$V = K \frac{\partial u}{\partial n} = kv \quad (4.5)$$

Assim:

$$\text{em } \Gamma_q \text{ (fluxo prescrito): } V = -\bar{q} \quad (4.6a)$$

$$\text{em } \Gamma_c \text{ (convecção) : } V = -h(u - u_c) \quad (4.6b)$$

$$\text{em } \Gamma_r \text{ (radiação) : } V = -\sigma\epsilon(u^4 - u_r^4) \quad (4.6c)$$

Conseqüentemente, as expressões dos termos do sistema (4.3) são as mesmas do item 3.4.5, substituindo-se \bar{u} por \bar{U} e K por 1, como mostrado na tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Termos do Sistema $[A] \underline{X} = \underline{F}$

VALOR PRESCRITO	INCÓGNITA (X_j)	A_{ij}	Contr. para F_i
\bar{U}_j = $T(\bar{u}_j)$	V_j	$-G_{ij}$	$-\sum_{j \in \Gamma_u} H_{ij} \bar{U}_j$
V_j = $-\bar{q}_j$	U_j	H_{ij}	$-\sum_{j \in \Gamma_q} G_{ij} \bar{q}_j$
V_j = $-h_j(u - u_{cj})$	U_j	$H_{ij} + G_{ij} \cdot h_j$	$\sum_{j \in \Gamma_c} G_{ij} \cdot h_j u_{cj}$

Deve-se observar que, como no espaço transformado u deixa de ser incógnita principal do sistema, a condição de contorno de convecção torna-se não linear. Assim, o sistema (4.3) deve ser resolvido de modo iterativo, não apenas nos casos de radiação, mas também de convecção, como será visto na seção IV.3.

Após a resolução do sistema (4.3), as incógnitas primitivas podem ser obtidas através da transformada inversa $u = T^{-1}(U)$ onde v é prescrito, e dividindo-se V por $K(u)$ para se obter v onde u é prescrito; no último caso, se quisermos o fluxo, basta trocar o sinal de V .

IV.3 - ESQUEMAS ITERATIVOS

Os dois tipos de não linearidade considerados podem ser tratados de forma análoga, já que no caso de condutividade dependente da temperatura a não linearidade é transferida para as condições de contorno de convecção e radiação e condições de interface, ao aplicarmos a transformada de Kirchhoff. Uma consequência disto é que, quando as condições de contorno são apenas de temperatura ou fluxo prescrito, o problema transformado é linear.

Apresentamos, a seguir, três esquemas iterativos, cada qual mais adequado a um determinado tipo de não linearidade. Os processos básicos de solução de problemas não lineares de elementos de contorno apresentados são comuns aos usados na solução de sistemas de equações não lineares, da mesma forma que os processos usados em problemas não lineares em elementos finitos [36] e [60].

Em todos os esquemas, partimos da solução do problema linearizado e iteramos até que, em duas iterações sucessivas, a diferença média (absoluta) das respostas correspondentes a elementos não lineares seja menor que uma dada tolerância. Por questões de economia e segurança, também impomos um número máximo permissível de iterações.

4.3.1 - Iterações Diretas com Não Linearidade Transferidas para o Vetor de Termos Independentes

Podemos escrever a equação matricial (4.3) como:

$$[A] \underline{x} = \underline{f}_0 + \underline{f}_n(\underline{x}) \quad (4.7)$$

onde todas as não linearidades do sistema são lançadas, a cada iteração, no vetor \underline{f}_n

Se as componentes $f_{n_i}(\underline{x})$ forem pequenas em comparação com $\sum_{j=1}^N A_{ij} x_j$ para todo i ($i=1$ a N), podemos considerá-las como termos corretivos à solução \underline{x}_0 do problema linear $[A] \underline{x}_0 = \underline{f}_0$.

Um esquema iterativo simples para resolver (4.7) é

$$[A] \underline{x}_n^{(m)} = \underline{f}_n(\underline{x}_n^{(m-1)}) \quad , \quad m=1,2,\dots \quad (4.8)$$

onde $\underline{x}_n^{(m-1)} = \underline{x}_n^{(m-1)} + \underline{x}_0$

A iteração começa com uma estimativa $\underline{x}^{(0)} = \underline{x}_0$, geralmente a solução do problema linearizado, e as iterações sucessivas são obtidas resolvendo-se uma sequência de problemas lineares. Se $\underline{x}_n^{(m)}$ tende a algum limite, este somado a $\underline{x}^{(0)}$ é a solução de (4.7).

Neste esquema, conhecido em mecânica das estruturas como algoritmo de pseudo-forças, a matriz do sistema não se altera ao longo das iterações. Isto é feito lançando no vetor de ter-

mos independentes todas as contribuições não lineares, calculadas a partir do valor da solução para a iteração anterior.

Desta forma, na solução por eliminação de Gauss, a triangulação da matriz é feita apenas na determinação da solução de partida. Nas iterações seguintes, só é necessário reduzir os termos independentes e efetuar a retro-substituição. O esquema é convergente apenas para não linearidades fracas, como as introduzidas pela condição de convecção no espaço transformado. Nos casos em que a radiação está presente, o esquema geralmente diverge [6], [40] e [41].

4.3.2 - Iterações Diretas Considerando as Não Linearidades da Matriz e do Vetor de Termos Independentes

A seguir, apresentamos o esquema de iterações que leva em conta as não linearidades que ocorrem na matriz do sistema e no vetor de termos independentes diretamente. Para facilitar a exposição, apresentamos primeiramente o caso de condutividade constante e, em seguida, o caso de condutividade variável.

a) Condutividade Constante

No caso mais geral de convecção, o coeficiente de filme h depende da temperatura e podemos escrever, a cada iteração, as mesmas relações (3.403) substituindo nelas a expressão particular de $h_j(u)$.

Como vimos no item (2.4.2), podemos interpretar a radiação como uma convecção com coeficiente de filme dependente da temperatura, de forma que, a cada iteração, podemos escrever as seguintes relações, fazendo uso das expressões da convecção (3.103).

$$A_{ij}^{(m)} = A_{ij}^{(o)} + G_{ij} \cdot \frac{h_{rj}^{(m-1)}}{K} \quad (4.9a)$$

$$x_j = u_j^{(m)} \quad (4.9b)$$

$$f_i^{(m)} = f_i^{(o)} + \sum_{j \in \Gamma_r} G_{ij} \cdot \frac{h_{rj}^{(m-1)}}{K} u_{rj} \quad (4.9c)$$

onde $h_{rj} = \sigma \epsilon (u_j^2 + u_{rj}^2)(u_j + u_{rj})$ e os superescritos $^{(o)}$ e $^{(m)}$ representam os termos que se mantêm constantes e os que dependem da iteração m , respectivamente.

Freqüentemente, o calor transferido no contorno por radiação é acompanhado de uma convecção da mesma ordem de grandeza. Quando isto ocorre, o efeito combinado da convecção com radiação é considerado simplesmente somando as contribuições individuais à matriz $[A]$ e ao vetor \underline{f} .

Para fins práticos, a convergência pode ser considerada atingida quando alguma medida da mudança na incógnita \underline{x} , entre duas iterações sucessivas, se tornar toleravelmente pequena.

Pelas expressões (4.9), precisamos recalcular a matriz $[A]$ e o vetor \underline{f} a cada iteração. Para começar o processo, empregamos uma estimativa inicial de \underline{x} para calcularmos $[A(\underline{x})]$. Geralmente, uma solução $\underline{x}^{(0)}$ obtida admitindo-se uma propriedade do material média em toda a região é considerada satisfatória. Como apenas os termos afetados pelas condições de contorno não lineares, se alteram a cada iteração, computacionalmente os termos do sistema linear (matriz $[A]$ e vetor de termos independentes), são armazenados em memória auxiliar, evitando seu cálculo a cada iteração. Os coeficientes G_{ij} que multiplicam os termos não lineares também são armazenados a fim de, a cada iteração, serem multiplicados pelos fatores não lineares e somados às parcelas lineares do sistema linear trazido da memória auxiliar, resultando no sistema que, resolvido por eliminação de Gauss, fornecerá a próxima aproximação.

b) Condutividade dependente da temperatura

Neste caso, além da não linearidade causada pela radiação, temos a não linearidade da convecção mesmo quando o coeficiente de filme é constante, já que u deixa de ser incógnita principal no problema transformado.

Uma forma de se linearizar o problema é escrever, a cada iteração, u em função de U pela aproximação

$$u_j^{(m)} \cong \frac{u_j^{(m-1)}}{U_j^{(m-1)}} \cdot U_j^{(m)} \quad (4.10)$$

Levando-se em conta a expressão de V dada por (4.6b) e fazendo uso de (4.2), podemos escrever para os elementos com convecção

$$H_{ij} U_j = G_{ij} V_j \quad (4.11)$$

$$V_j = -h_j (u_j - u_{cj}) \quad (4.12)$$

Substituindo a aproximação (4.10), temos

$$V_j^{(m)} = -h_j \left\{ \left[\frac{u_j}{U_j} \right]^{(m-1)} \cdot U_j^{(m)} - u_{cj} \right\} \quad (4.13)$$

Substituindo em (4.11) e reordenando:

$$\left\{ H_{ij} + h_j \cdot \left[\frac{u_j}{U_j} \right]^{(m-1)} \cdot G_{ij} \right\} U_j^{(m)} = G_{ij} \cdot h_j \cdot u_{cj} \quad (4.14)$$

Ou seja,

$$X_j = U_j^{(m)} \quad (4.15a)$$

$$A_{ij}^{(m)} = A_{ij}^{(o)} + G_{ij} \cdot h_j \cdot \left[\frac{u_j}{U_j} \right]^{(m-1)} \quad (4.15b)$$

Ao contrário do que acontece com a radiação, os termos independentes são constantes ao longo do processo iterativo (quando o coeficiente de filme é constante) e têm a mesma forma que em (3.103), sendo por isso somados ao vetor $\underline{f}^{(0)}$ que é armazenado em memória auxiliar.

Para a radiação ou convecção com coeficiente de filme dependente da temperatura, podemos usar as mesmas expressões da convecção substituindo a expressão de $h(u)$ ou $h_r(u)$ dada anteriormente, respectivamente, no lugar de h . Neste caso, porém, a parcela dos termos independentes também é afetada pela não linearidade de h , como já era no caso de condutividade constante.

Podemos, então, escrever para cada iteração m :

$$X_j = U_j^{(m)} \quad (4.16a)$$

$$A_{ij}^{(m)} = A_{ij}^{(0)} + G_{ij} \left[h_{rj}^{(m-1)} \cdot \left(\frac{u_j}{U_j} \right)^{(m-1)} \right] \quad (4.16b)$$

$$F_i^{(m)} = F_i^{(0)} + \sum_{j \in \Gamma_c} G_{ij} h_{cj}^{(m-1)} \cdot u_{cj} + \sum_{j \in \Gamma_r} G_{ij} h_{rj}^{(m-1)} \cdot u_{rj} \quad (4.16c)$$

que são expressões semelhantes às expressões (3.103) obtidas para o caso de condutividade constante.

O esquema apresentado é mais vantajoso que o anterior, nos casos em que a dependência da condutividade com a temperatura é acentuada. A eficiência obtida no esquema mencionado em 4.3.1, não se triangularizando o sistema a cada iteração, é perdida pelo maior número de iterações necessárias, à convergência. Além disso, o esquema apresentado em 4.3.2 permite considerar diretamente não linearidades decorrentes da radiação.

4.3.3 - Algoritmo de Newton-Raphson

Como fizemos em 4.3.2 para iterações diretas, apresentamos inicialmente o método e as expressões dos termos do sistema para o caso de condutividade constante. Em seguida, mostramos as expressões correspondentes à condutividade dependente da temperatura usando a transformada de Kirchhoff.

a) Condutividade constante

Durante qualquer etapa de um processo iterativo de solução do sistema $[A] \underline{x} = \underline{f}$, o sistema não será exatamente satisfeito, a menos que a convergência tenha sido alcançada.

Podemos definir uma função de resíduos $\psi(\underline{x})$, que mede o afastamento ou desequilíbrio da solução aproximada em relação à solução exata, como:

$$\psi(\underline{x}) = [A] \underline{x} - \underline{f} = [H] \underline{u} - [G] \underline{v} \quad (4.17)$$

Para um nó i , temos

$$\psi_i = H_{ij} u_j - G_{ij} v_j \quad (4.18)$$

O esquema de Newton-Raphson pode ser formulado desenvolvendo-se a função de resíduos em série de Taylor em torno da solução aproximada:

$$\psi(\underline{\tilde{x}}) = \psi(\underline{\tilde{x}}^{(m)}) + \left[\frac{\partial \psi}{\partial \underline{\tilde{x}}} \right]_{\underline{\tilde{x}}^{(m)}} (\underline{\tilde{x}} - \underline{\tilde{x}}^{(m)}) + \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \underline{\tilde{x}}^2} \right]_{\underline{\tilde{x}}^{(m)}} (\underline{\tilde{x}} - \underline{\tilde{x}}^{(m)})^2 + \dots \quad (4.19)$$

onde $\underline{\tilde{x}}^{(m)}$ é uma solução aproximada do sistema (4.17).

Levando-se em conta que \underline{x} é a solução exata, isto é, $\psi(\underline{x}) = 0$, e desprezando em (4.19) termos envolvendo derivadas segundas e de ordem superior, podemos escrever, para uma iteração m , a seguinte aproximação:

$$[J]^{(m-1)} \Delta \underline{\tilde{x}}^{(m)} = - \psi(\underline{\tilde{x}}^{(m)}) \quad (4.20)$$

onde $[J] \equiv \left[\frac{\partial \psi}{\partial \underline{\tilde{x}}} \right]$ é a matriz tangente ou jacobiana

e $\Delta \underline{\tilde{x}}$ é o vetor de incrementos.

Partindo-se da solução linear, determina-se, a cada ite

ração, uma melhor aproximação para a solução \underline{x} através da expressão incremental

$$\underline{x}^{(m)} = \underline{x}^{(m-1)} + \Delta \underline{x} \quad (4.21)$$

O processo continua até que o vetor de resíduos ψ seja suficientemente pequeno ou, o que é equivalente, que duas aproximações sucessivas $\underline{x}^{(m-1)}$ e $\underline{x}^{(m)}$ estejam bem próximas.

Da definição da matriz $[J]$,

$$J_{ij} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \quad (4.22)$$

Substituindo a expressão de ψ_i (4.18) em (4.22), temos

$$\text{quando } x_j = v_j : \quad J_{ij} = \frac{\partial \psi_i}{\partial v_j} = -G_{ij} \quad (4.23)$$

$$\text{quando } x_j = u_j : \quad J_{ij} = \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j} = H_{ij} - G_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial u_j} \quad (4.24)$$

Como era de se esperar, os coeficientes J_{ij} relativos a elementos com condições de contorno lineares são idênticos aos coeficientes A_{ij} apresentados no item 3.4.5.

Para os elementos com radiação, usando a expressão do fluxo radiativo e a lei de Fourier, temos

$$v_j = -\frac{1}{K} \sigma \epsilon (u_j^4 - u_{rj}^4) \quad (4.25)$$

Substituindo (4.25) em (4.24) e como $x_j = u_j$, temos

$$J_{ij}^{(m-1)} = H_{ij} + G_{ij} \left\{ 4 \frac{\sigma \epsilon}{K} (u_j^3)^{(m-1)} \right\} \quad (4.26)$$

que também pode ser escrita como

$$J_{ij}^{(m-1)} = A_{ij}^{(0)} + G_{ij} \left\{ 4 \frac{\sigma \epsilon}{K} (u_j^3)^{(m-1)} \right\} \quad (4.27)$$

Nota-se que, a exemplo do esquema anterior, a cada iteração apenas acrescentamos parcelas não lineares ao termos do sistema que permanecem constantes. Cabe também lembrar que os coeficientes das matrizes $[G]$ e $[H]$ não se alteram ao longo das iterações e, portanto, podem ser calculadas apenas uma vez e armazenados.

Expressões para elementos com convecção não linear podem ser obtidas da mesma maneira, a partir da função que define a convecção.

Desde que tenhamos a expressão da relação entre u e v podemos derivá-la e obter os termos J_{ij} da jacobiana. Curvas genéricas que definem condições de contorno não lineares podem ser aproximadas por poligonais [49]. Em cada trecho da poligonal, a relação entre v e u é dada por

$$q = -Kv \quad (4.28)$$

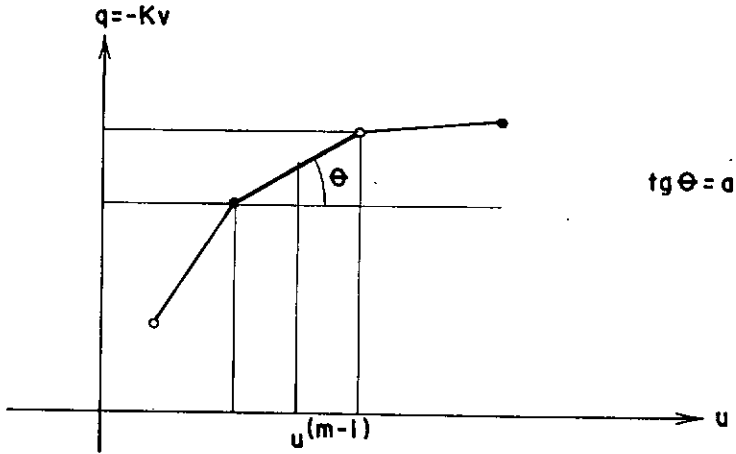


FIGURA 4.1 - Aproximação de expressões genéricas de fluxos por poligonais.

$$\frac{dv}{du} = \frac{-1}{K} \quad \frac{dq}{du} = \frac{-a}{K} \quad (4.29)$$

Para um elemento j , pertencente a um trecho do contorno sujeito a condições de contorno não lineares, a expressão (4.24) fornece

$$J_{ij} = H_{ij} + G_{ij} \frac{a}{K} \quad (4.30)$$

onde a é o coeficiente angular do segmento que aproxima a curva para $u = u^{(m-1)}$.

O único caso em que o coeficiente angular " a " fica indeterminado ocorre quando $\theta = \pi/2$, que corresponde à condição de temperatura prescrita, já examinada.

A condição de fluxo prescrito é um caso particular no qual $\theta = 0$, isto é, o fluxo independe da temperatura. Condições de convecção também podem ser vistas como casos particulares, nos quais

a curva é representada por um único trecho reto com coeficiente angular igual ao coeficiente de filme.

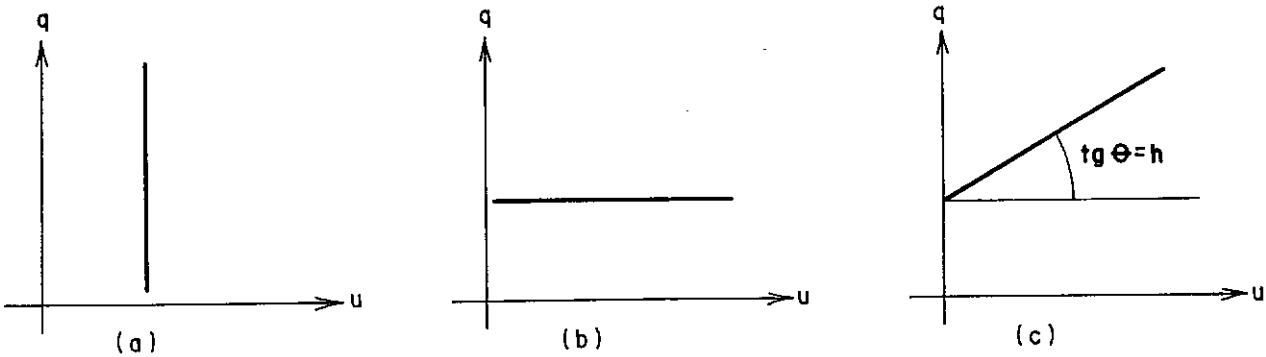


FIGURA 4.2 - Casos particulares da curva qxu :
 (a) temperatura prescrita
 (b) fluxo prescrita
 (c) convecção

No vetor de resíduos do sistema de equações (4.20), também aproveitamos as parcelas que se mantêm constantes ao longo das iterações, escrevendo:

$$-\psi_i^{(m-1)} = f_i^{(0)} - A_{ij}^{(0)} x_j^{(m-1)} + \left[G_{ij} v_j^{(m-1)} \right]_{\Gamma_r} \quad (4.31)$$

sendo $v_j = -\sigma \epsilon (u_j^4 - u_{rj}^4) / K$ (4.32)

b) Condutividade dependente da temperatura

A expressão do algoritmo de Newton-Raphson nas variáveis transformadas é

$$[J]^{(m-1)} \Delta \underline{X}^{(m)} = - \underline{\theta}(\underline{X}^{(m-1)}) \quad (4.33)$$

onde $[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{X}} \end{bmatrix}$ é a matriz jacobiana, cujos elementos são

$$J_{ij} = \frac{\partial \theta_i}{\partial X_j}$$

$$\theta = [H] \mathbf{U} - [G] \mathbf{V} \text{ e}$$

\mathbf{X} é o vetor cujas componentes são as incógnitas nodais U ou V

Para os termos relativos às condições de contorno lineares temos, como no caso de condutividade constante, que

$$J_{ij} = A_{ij}.$$

Como vimos anteriormente, a transformada de Kirchhoff transfere a não linearidade do operador diferencial para as condições de contorno de convecção e radiação no espaço transformado.

A expressão de J_{ij} , da mesma forma que no caso de condutividade constante, é obtida derivando-se a expressão do resíduo θ_i com relação à incógnita X_j .

Partindo da definição da transformada de Kirchhoff (2.32), obtemos por diferenciação

$$\frac{\partial u}{\partial U} = \frac{1}{K(u)} \tag{4.34}$$

que nos permite determinar J_{ij} para elementos sujeitos a convecção ou radiação.

Para a condição de convecção, temos $V_j = -h_j (u_j - u_{cj})$ que, substituída na expressão de resíduos, fornece $\theta_i = H_{ij} U_j + G_{ij} h_j (u_j - u_{cj})$.

A expressão de J_{ij} é obtida derivando-se θ_i com relação à incógnita $X_j = U_j$:

$$J_{ij} = H_{ij} + G_{ij} \left\{ h_j \cdot \frac{\partial u_j}{\partial U_j} \right\} \quad (4.35)$$

Substituindo a expressão da derivada (4.34) em (4.35), temos:

$$J_{ij}^{(m-1)} = H_{ij} + G_{ij} \left\{ \frac{h_j}{K(u_j)} \right\} \quad (4.36)$$

Esta expressão é análoga à apresentada em (3.103), com a diferença que agora K depende, a cada iteração, da transformada inversa da incógnita U .

Para a condição de radiação, temos a derivada normal de U dada por $V_j = -\sigma \epsilon (u_j^4 - u_{rj}^4)$ e a incógnita é U_j .

Substituindo V_j na expressão de resíduos, obtemos

$$\theta_i = H_{ij} \cdot U_j + G_{ij} \sigma \cdot \epsilon (u_j^4 - u_{rj}^4) \quad (4.37)$$

A expressão de J_{ij} é obtida derivando-se θ_i com rela-

ção à incógnita U_j :

$$J_{ij} = H_{ij} + G_{ij} \cdot 4\sigma\epsilon \left\{ u_j^3 \frac{\partial u_j}{\partial U_j} \right\} \quad (4.38)$$

Levando em conta a expressão da derivada (4.34), temos

$$J_{ij}^{(m-1)} = H_{ij} + G_{ij} \cdot 4\sigma\epsilon \left\{ \frac{u_j^3}{K(u_j)} \right\}^{(m-1)} \quad (4.39)$$

Esta expressão só difere de (4.26) porque K agora é função de $u_j^{(m-1)}$.

Finalmente, a expressão do resíduo é da forma

$$-\theta_i^{(m-1)} = F_i^{(o)} - A_{ij}^{(o)} X_j^{(m-1)} + \left\{ G_{ij} \cdot V_j^{(m-1)} \right\}_{\Gamma_c + \Gamma_r} \quad (4.40)$$

que é análoga à expressão (4.31), sendo

$$V_j = -h_j (u_j - u_{cj}) \text{ em } \Gamma_c \quad (4.41)$$

e

$$V_j = -\sigma\epsilon_j (u_j^4 - u_{rj}^4) \text{ em } \Gamma_r \quad (4.42)$$

Como na condição de contorno de convecção a parcela $h_j \cdot u_{cj}$ é constante ao longo das iterações; podemos também incluí-la em $F_i^{(o)}$ e escrever

$$-\theta_i^{(m-1)} = F_i^{(0)} - A_{ij}^{(0)} X_j^{(m-1)} + \left\{ G_{ij} \cdot V_{nj}^{(m-1)} \right\}_{\Gamma_c + \Gamma_r} \quad (4.43)$$

onde V_{nj} representa a parcela não linear de V_j .

Assim:

$$V_{nj} = -h_j \cdot u_j \quad \text{em } \Gamma_c \quad (4.44)$$

e

$$V_{nj} = V_j \quad \text{em } \Gamma_r \quad (4.45)$$

Como o algoritmo de Newton-Raphson tem uma convergência quadrática, o número de iterações necessárias à solução do problema não linear é geralmente muito menor do que o dos métodos de iteração direta, para um mesmo grau de precisão.

Esta vantagem, conseguida a custa de algumas operações adicionais a cada iteração, fica tanto mais evidente quanto mais forte a não linearidade, como no caso de radiação.

Uma variação deste algoritmo, conhecida como algoritmo de Newton-Raphson modificado, reduz o esforço de cálculo a cada iteração.

A única modificação, com relação ao método descrito anteriormente, consiste em não atualizar a matriz tangente $[J]$; a

cada iteração em que não modificamos a matriz tangente, precisamos apenas reduzir os termos independentes e fazer a retro substituição para que tenhamos a solução por eliminação de Gauss. Isto corresponde a uma economia de esforço computacional considerável a cada iteração, mas faz com que o número de iterações necessárias à convergência para uma determinada tolerância seja consideravelmente maior que usando o algoritmo de Newton-Raphson, como pode ser representado no caso unidimensional na figura 4.3.

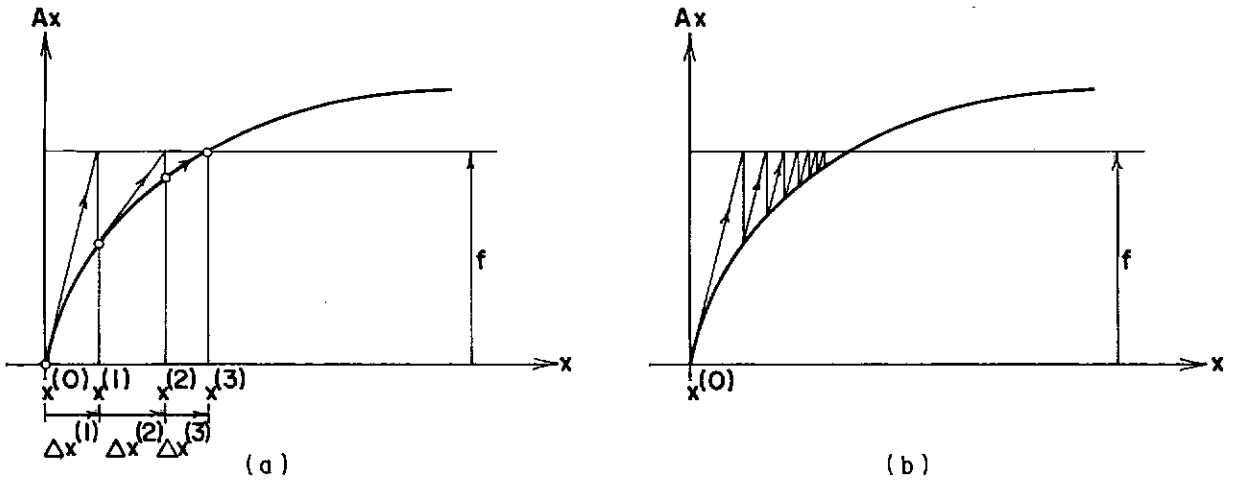


FIGURA 4.3 - Método de Newton-Raphson (caso unidimensional):
 (a) original
 (b) modificado

IV.4- SUB-REGIÕES COM CONDUTIVIDADE DEPENDENTE DA TEMPERATURA

Em regiões compostas de mais de uma sub-região homogênea, as equações de elementos de contorno podem ser aplicadas a cada sub-região em separado, como vimos no capítulo III. Na seção IV.2 vimos que, quando a condutividade depende da temperatura, devemos usar a transformada Kirchhoff antes de escrevermos as equações de elementos de contorno.

O problema envolvendo sub-regiões, como no caso de condutividade constante, não pode ser resolvido separadamente em cada sub-região, pois o número de incógnitas excede o número de equações. A indeterminação do sistema, no entanto, pode ser levantada ao considerarmos as condições de acoplamento entre as sub-regiões. Neste caso, porém, além das não linearidades da radiação e da convecção, já vistas neste capítulo, surge uma não linearidade na interface.

A seguir, consideramos a não linearidade introduzida pela transformada de Kirchhoff nas interfaces, tanto por iterações diretas quanto pelo algoritmo de Newton-Raphson. Nos dois casos, a não linearidade afeta apenas os termos da matriz do sistema, já que na interface não há valores prescritos.

4.4.1 - Solução por iterações diretas

Consideremos a região Ω mostrada na figura 3.9. Usando a mesma notação da seção III.5, obtemos equações análogas a (3.106) e (3.107), só que nas variáveis U e V:

Para a região Ω^1 :

$$\begin{bmatrix} [H^1] & [H_I^1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}^1 \\ \tilde{U}_I^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G^1] & [G_I^1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{V}^1 \\ \tilde{V}_I^1 \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

e para a região Ω^2 :

V. APLICAÇÕES

$$\left[\begin{array}{c} \square H^2 \\ \square H_I^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \tilde{u}^2 \\ \tilde{u}_I^2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} \square G^2 \\ \square G_I^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \tilde{v}^2 \\ \tilde{v}_I^2 \end{array} \right\} \quad (4.47)$$

Admitindo um contato perfeito entre Ω^1 e Ω^2 na interface Γ_I , as condições de acoplamento ficam

$$\tilde{u}_I^1 = \tilde{u}_I^2 = u_I \quad (\text{compatibilidade}) \quad (4.48a)$$

e

$$\tilde{q}_I^1 = -\tilde{q}_I^2 \quad (\text{equilíbrio}) \quad (4.48b)$$

A condição de compatibilidade, no espaço transformado, é não linear, pois envolve as transformadas inversas das variáveis U_I^1 e U_I^2 . Estas são descontínuas na interface sempre que o material das duas sub-regiões vizinhas for diferente; podemos relacioná-las com os valores das temperaturas u_I , usando a definição da transformada de Kirchhoff (2.32):

$$U_I^1 = \int_{u_0}^u K_1(u_I) du \quad ; \quad U_I^2 = \int_{u_0}^u K_2(u_I) du \quad (4.49)$$

A condição de equilíbrio pode ser escrita diretamente em termos de V , levando-se em conta a relação dada em (4.5) e a lei de Fourier:

$$\tilde{v}_I^1 = -\tilde{v}_I^2 = \tilde{v}_I \quad (4.50)$$

Considerando a expressão acima, podemos escrever (4.46) e (4.47), respectivamente como:

$$\begin{bmatrix} [H^1] & [H_I^1] \\ [G^1] & [G_I^1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}^1 \\ \tilde{U}_I^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G^1] & [G_I^1] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{V}^1 \\ \tilde{V}_I^1 \end{Bmatrix} \quad (4.51)$$

e

$$\begin{bmatrix} [H^2] & [H_I^2] \\ [G^2] & [G_I^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}^2 \\ \tilde{U}_I^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G^2] & [G_I^2] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{V}^2 \\ \tilde{V}_I^2 \end{Bmatrix} \quad (4.52)$$

Para que possamos combinar estas duas equações matriciais definimos, para cada nó da interface I, a razão α entre a transformada de Kirchhoff calculada para a região 2 e para a região 1, a cada iteração:

$$\alpha = \frac{U_I^2}{U_I^1} \quad (4.53)$$

Usando como incógnitas na interface os valores U_I e V_I relativos à primeira sub-regiões (em geral, à sub-região de menor número), podemos escrever o sistema acoplado como:

$$\begin{array}{l} \text{sub} \\ \text{reg.1} \end{array} \begin{bmatrix} [H^1] & [H_I^1] & -[G_I^1] & [0] \\ \hline [0] & [\alpha H_I^2] & [G_I^2] & [H^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}^1 \\ \tilde{U}_I^1 \\ \tilde{V}_I^1 \\ \tilde{U}^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G^1] & [0] \\ \hline [0] & [G^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{V}_1 \\ \tilde{V}_2 \end{Bmatrix}$$

coeficientes das interfaces

(4.54)

Após introduzir as condições de contorno, os "blocos" \boxed{H} e \boxed{G} correspondentes a elementos no contorno são reordenados e os coeficientes das interfaces se mantêm no lado esquerdo do sistema. O sistema resultante pode ser escrito como

$$\boxed{A} \underline{X} = \underline{F} \quad (4.55)$$

Este sistema pode ser resolvido por iterações diretas como descrito em 4.3.2. Neste caso, o sistema é bloqueado e, a cada iteração m , consideramos a não linearidade que afeta a transformada na interface através do cálculo de α para cada coluna dos "blocos" correspondente a valores de U_I^2 (no caso, o bloco $\boxed{H_I^2}$):

$$\alpha^{(m)} = \left(\begin{array}{c} U_I^2 \\ \frac{U_I^2}{U_I^1} \end{array} \right)^{(m-1)} \quad (4.56)$$

Nesta expressão, U_I^1 é obtida da solução do sistema para a iteração anterior; pela sua inversa, u_I , calculamos U_I^2 e conseqüentemente α . Em termos computacionais, os coeficientes de influência, como antes, são armazenados em memória auxiliar a fim de evitar que sejam recalculados a cada iteração.

4.4.2 - Solução pelo algoritmo de Newton-Raphson

A expressão do resíduo pode ser escrita, usando-se o sistema (4.55), como

$$\underline{\theta} = \boxed{A} \underline{X} - \underline{F} \quad (4.57)$$

Os coeficientes da matriz Jacobiana correspondentes aos contornos externos são idênticos aos obtidos em 4.3.3. Os coeficientes que multiplicam as incógnitas nas interfaces coincidem com os coeficientes de influência, exceto nos " blocos " $[\alpha H_I^2]$ relativos à segunda sub-região de cada interface, já que estes não são constantes.

Nestes blocos, cada coluna é multiplicada por um coeficiente α dado pela expressão (4.53).

Pela definição da matriz Jacobiana:

$$J_{ij} = \frac{\partial \theta_i}{\partial X_j} \quad (4.58)$$

Nos blocos da interface corrigidos por α temos $X_j = U_{Ij}^1$, de modo que podemos escrever (4.58) como:

$$J_{ij} = \frac{\partial [\alpha_j H_{ij} U_{Ij}^1]}{\partial U_{Ij}^1} \quad (4.59)$$

Levando-se em conta que H_{ij} é constante e substituindo a expressão de α (4.53), (4.59) se simplifica para

$$J_{ij} = H_{ij} \left(\frac{\partial U_I^2}{\partial U_I^1} \right)_j \quad (4.60)$$

A derivada na expressão acima pode ser obtida, aplicando-se a regra da cadeia:

$$\frac{\partial U_I^2}{\partial U_I^1} = \frac{\partial U_I^2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial U_I^1} \quad (4.61)$$

Derivando as expressões (4.49) com relação a u e usando o fato de que $\frac{\partial u}{\partial U_I^1} = 1/(\partial U_I^1/\partial u)$, a expressão (4.61) fica

$$J_{ij} = H_{ij} \left\{ \begin{array}{c} K_2(u_I) \\ K_1(u_I) \end{array} \right\}_j \quad (4.62)$$

Esta expressão é a mesma que seria obtida para o caso de condutividade constante, ao usarmos $U = Ku$ e $V = Kv$ (o que corresponde, simplesmente, a multiplicar a equação por K em ambos os lados). A diferença, mais uma vez, está no fato de que aqui as condutividades são função da temperatura.

No próximo capítulo, reunimos algumas aplicações da teoria aqui apresentada; estas servem de base para as conclusões e sugestões para futuros trabalhos condensadas no capítulo VI.

V. APLICAÇÕES

V.1 - INTRODUÇÃO

A teoria desenvolvida nos capítulos anteriores foi aplicada ao estudo de alguns problemas de condução de calor em regime estacionário com solução (analítica e/ou numérica aproximada) conhecida com o intuito de ilustrar a técnica e demonstrar a precisão dos resultados obtidos com o método dos elementos de contorno. Em todos os exemplos estudados foram empregados elementos constantes.

Inicialmente estudamos uma série de casos de condução de calor apresentados por Khader e Hanna [30]. Tais exemplos são analisados como bidimensionais e servem para demonstrar a precisão dos resultados obtidos, a convergência das soluções e o desempenho dos esquemas iterativos, incluindo comparações de tempos de execução.

A seguir, analisamos o campo térmico em uma placa quadrada, apresentada por Bialecki e Nowak [6], sujeita a condições de contorno de convecção e radiação simultâneas.

No terceiro exemplo analisamos o perfil de temperaturas através de uma parede para quatro tipos de materiais com condutividade dependente da temperatura. Este exemplo, analisado por Zienkiewicz [61] como de difusão através de uma membrana, serve para testar a eficiência do uso da aproximação poligonal para cálculo das condutividades, das transformadas de Kirchhoff

e de suas inversas.

No quarto exemplo, também analisado por Zienkiewicz [61], obtemos a distribuição de temperaturas em uma placa quadrada sujeita a condições de temperatura prescrita e com condutividade apresentando uma dependência linear da temperatura.

Tanto no terceiro quanto no quarto exemplo não houve iterações, já que a transformada de Kirchhoff consegue linearizar o problema. O uso da aproximação da curva $K \cdot x \cdot u$ por poligonais confere uma generalidade e simplicidade no processo de ida e volta do espaço transformado.

No quinto exemplo, apresentamos a análise da transferência de calor em um cilindro longo composto de duas camadas. Este problema foi analisado por elementos finitos por Feijóo [20] e demonstra o uso de elementos de contorno para o caso de regiões compostas de mais de uma sub-região homogênea.

O sexto e último exemplo apresenta o perfil radial de temperaturas em um cilindro longo composto de três camadas, com condutividades térmicas dependentes da temperatura. Este exemplo, apresentado por Donea [18], demonstra a eficiência do método de Newton-Raphson na consideração da não linearidade que surge na interface de sub-regiões pela aplicação da transformada de Kirchhoff.

Os exemplos aqui apresentados demonstram a precisão dos resultados obtidos com elementos de contorno em problemas de transferência de calor não linear. Isto foi possível basicamen

te devido ao uso da transformada de Kirchhoff, de sub-regiões e de esquemas iterativos eficientes, dos quais se destaca o esquema seletivo de Newton-Raphson.

Graças ao desacoplamento da aproximação da geometria da parte não linear, a simplicidade de representação de problemas bi e tri-dimensionais com formas arbitrárias de contorno é a mesma do caso de condutividade constante e condições de contorno lineares, podendo ser vista em [3], [48], [49], [53] - [59].

No próximo capítulo encerramos este trabalho apresentando as conclusões e sugestões para futuros trabalhos.

V.2 - SIMULAÇÃO DE CASOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR UNIDIMENSIONAL (Exemplo nº 1)

Neste primeiro exemplo, publicado por Khader e Hanna [30], estudamos vários problemas de transferência unidimensional de calor através da modelação de retângulos de seção $a \times b$ nos quais isolamos termicamente duas faces paralelas ($x=0$ e a) e aplicamos diferentes condições de contorno às outras faces ($y=0$ e b). Na tabela 5.1 apresentamos para cada caso as condições de contorno, as dimensões a e b e os parâmetros físicos necessários à análise em unidades do sistema internacional.

Nesta mesma tabela apresentamos, além das soluções analíticas, as soluções obtidas por elementos de contorno para uma malha de 64 elementos, os erros relativos para a menor discretização possível do retângulo (4 elementos) e para a malha de 64

elementos. Estes resultados demonstram a alta precisão do método para os diversos casos analisados. As duas últimas colunas se referem ao número de iterações necessárias à convergência das soluções dos problemas não lineares por iterações diretas e pelo algoritmo de Newton-Raphson, respectivamente.

Como critério de convergência para os esquemas iterativos adotamos o erro relativo médio, entre duas iterações consecutivas, menor que uma tolerância de 10^{-4} . Nesta média incluímos apenas os resultados relativos a elementos sujeitos a condições de contorno não lineares.

Nas figuras 5.1 e 5.2 apresentamos os tempos de "CPU" gastos no computador CDC 170/730 D para os diversos casos, em função do número de elementos utilizados; estes tempos correspondem à análise completa (entrada e geração automática de dados, integrações, solução de partida, iterações e impressão).

A simples observação destas figuras nos mostra a superioridade do algoritmo de Newton-Raphson. Apenas no caso 4, no qual ambos esquemas convergiram em duas iterações, o tempo de processamento foi maior no esquema de Newton-Raphson. Esta diferença de tempo se deve aos cálculos adicionais relativos ao cálculo dos resíduos e é bem pequena.

Nas figuras 5.3 a 5.7 é evidente a convergência dos resultados (u e v) dos diversos casos, tanto para valores no ponto médio das faces (subscrito m) quanto para valores médios nas faces (super-escrito \sim).

TABELA 5.1 - Resultados do Exemplo N° 1

CASO	CONDIÇÕES DE CONTORNO		PARÂMETROS				SOLUÇÃO		ERRO		N° DE ITERAÇÕES	
	LADO S1 (y = 0)	LADO S2 (y = b)	a	b	K	h	ANALÍTICA	ELEM. CONT. (64 ELEM.)	4 ELEM.	64 ELEM.	IT. DIR.	N. RAPHSON
1	Temp. Const. $\bar{u} = 200^{\circ}\text{C}$	Convecção $u_c = 50^{\circ}\text{C}$	2	3	1,5	10	$u_2 = 57,14^{\circ}\text{C}$ $v_2 = -47,62^{\circ}\text{C/m}$	$57,13^{\circ}\text{C}$ $-47,53^{\circ}\text{C/m}$	4% 32%	0,02% 0,2%	-	-
2	Fluxo Const. $\bar{q} = 1000 \text{ W/m}^2$	Radiação $u_r = 350 \text{ K}$	1	0,5	2	-	$u_1 = 675,07\text{K}$ $u_2 = 425,07\text{K}$ $v_2 = -500\text{K/m}$	$674,99\text{K}$ $425,08\text{K}$ $-499,93 \text{ K/m}$	1% 0,002% 0,04%	0,01% 0,002% 0,01%	7	3
3	Convecção $u_c = 600 \text{ K}$	Radiação $u_r = 300 \text{ K}$	10	10	5	20	$u_1 = 593,18\text{K}$ $u_2 = 320,17\text{K}$ $v_2 = -27,30 \frac{\text{K}}{\text{m}}$	$593,18\text{K}$ $320,16\text{K}$ $-27,28 \frac{\text{K}}{\text{m}}$	0,1% 0,2% 16%	- 0,003% 0,07%	3	2
4	Temp. Const. $\bar{u} = 300 \text{ K}$	Conv. + Rad. $u_c = u_r = 500 \text{ K}$	1	0,25	0,2	1	$u_2 = 494,61\text{K}$ $v_2 = 778,44 \frac{\text{K}}{\text{m}}$	$494,61\text{K}$ $778,41 \frac{\text{K}}{\text{m}}$	0,01% 0,53%	- 0,004%	2	2
5	Temp. Const. $\bar{u} = 100^{\circ}\text{C}$	Convecção $u_c = 20^{\circ}\text{C}$	1	2	$0,5(1+0,01u)$	3	$u_2 = 29,66^{\circ}\text{C}$ $v_2 = -44,71 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{m}}$	$29,64^{\circ}\text{C}$ $-44,61 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{m}}$	5% 13%	0,07% 0,2%	4	3

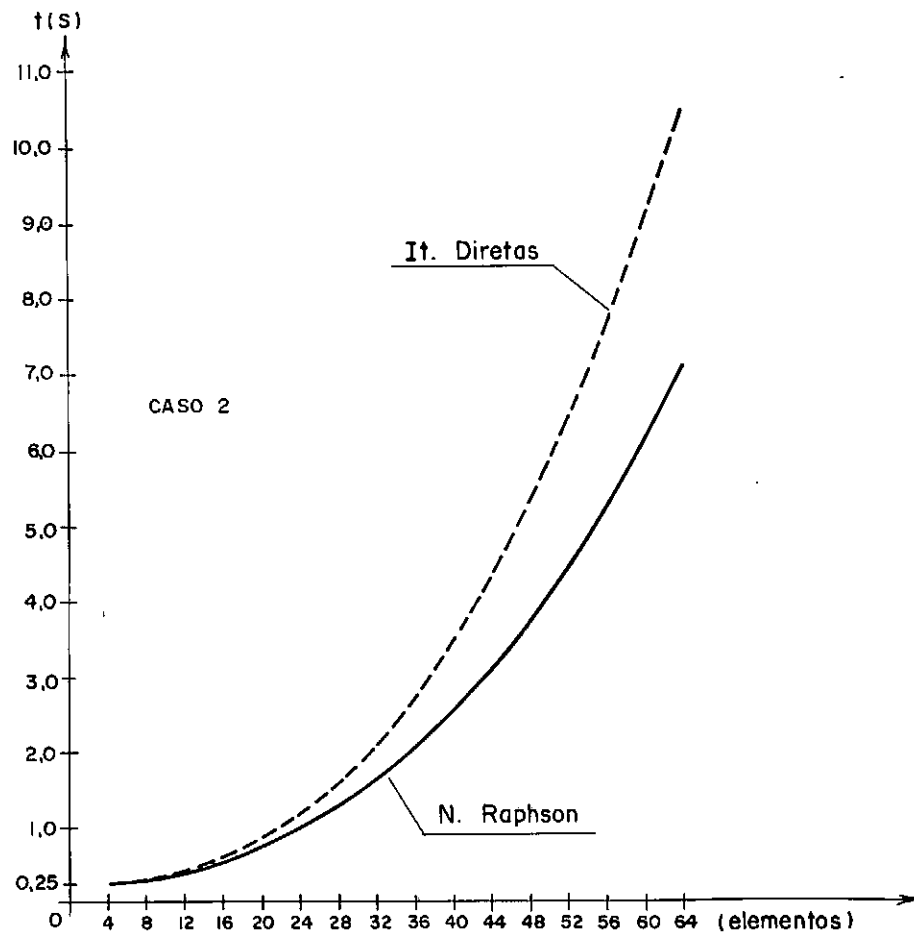
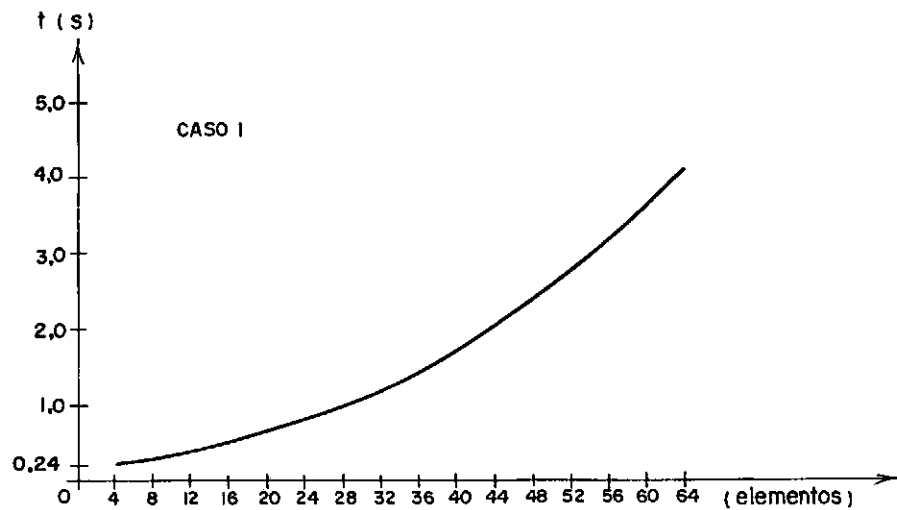


FIGURA 5.1 - Tempo de processador para o exemplo nº 1.

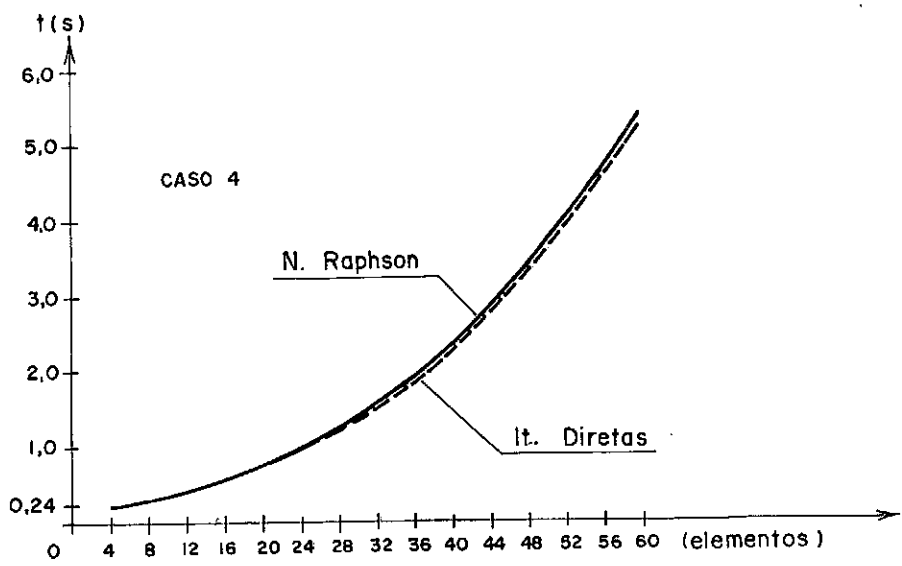
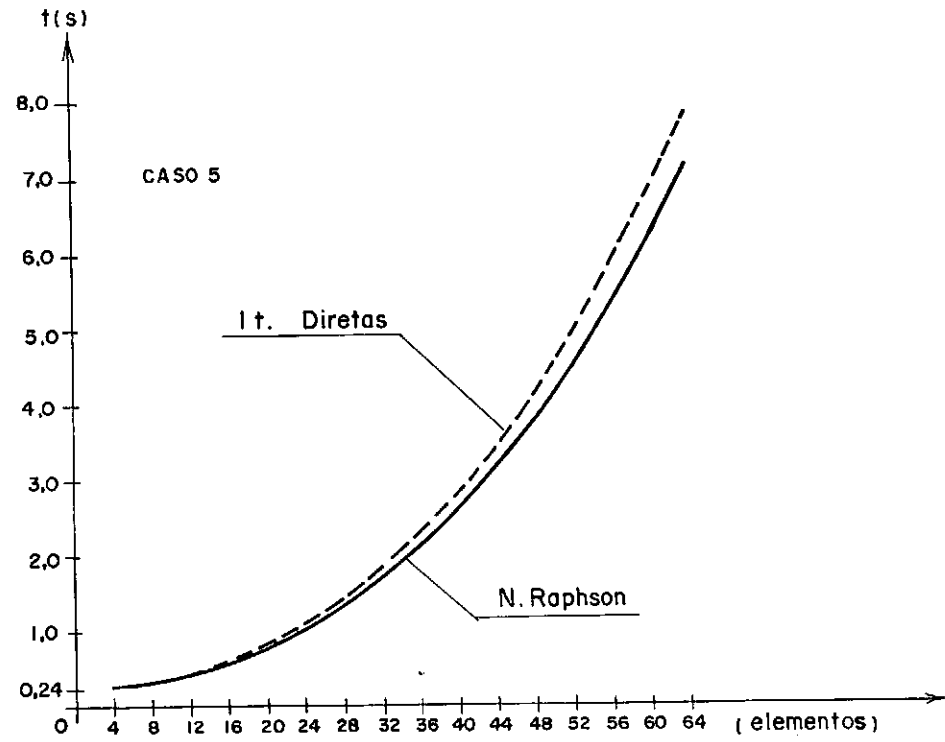
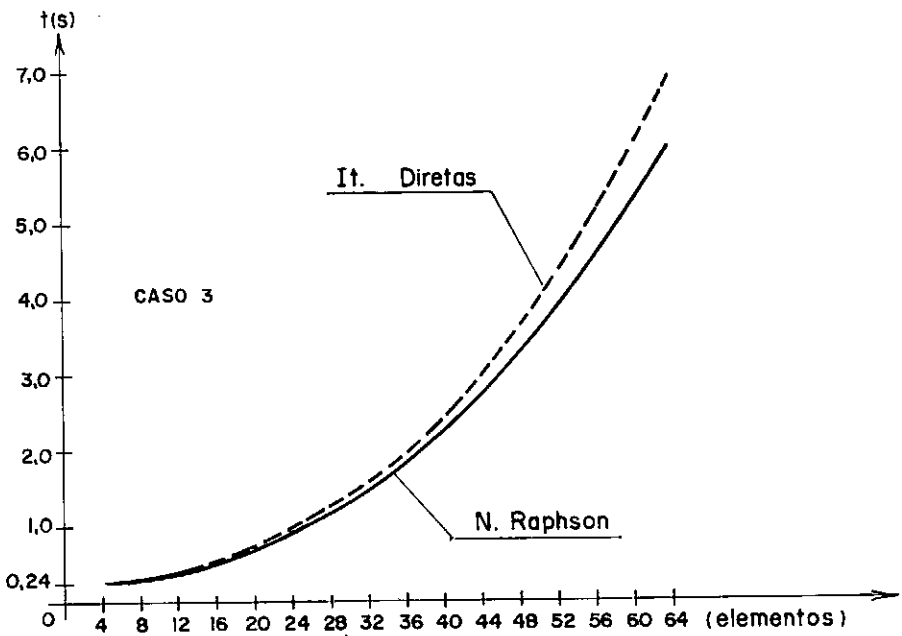
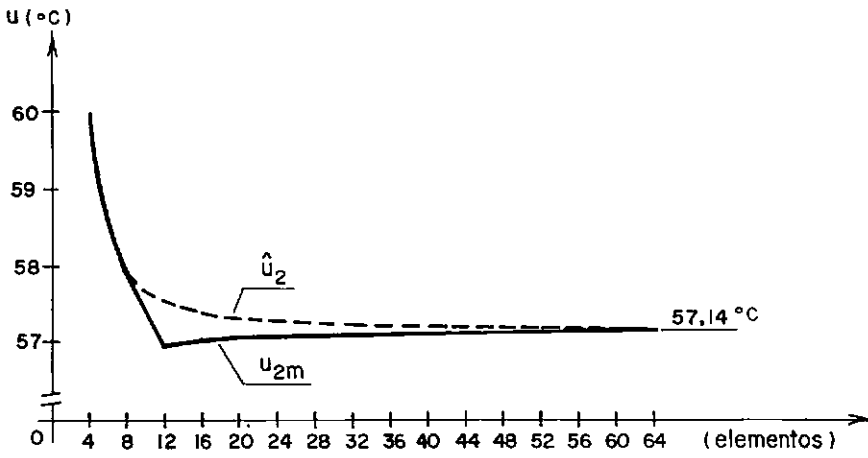
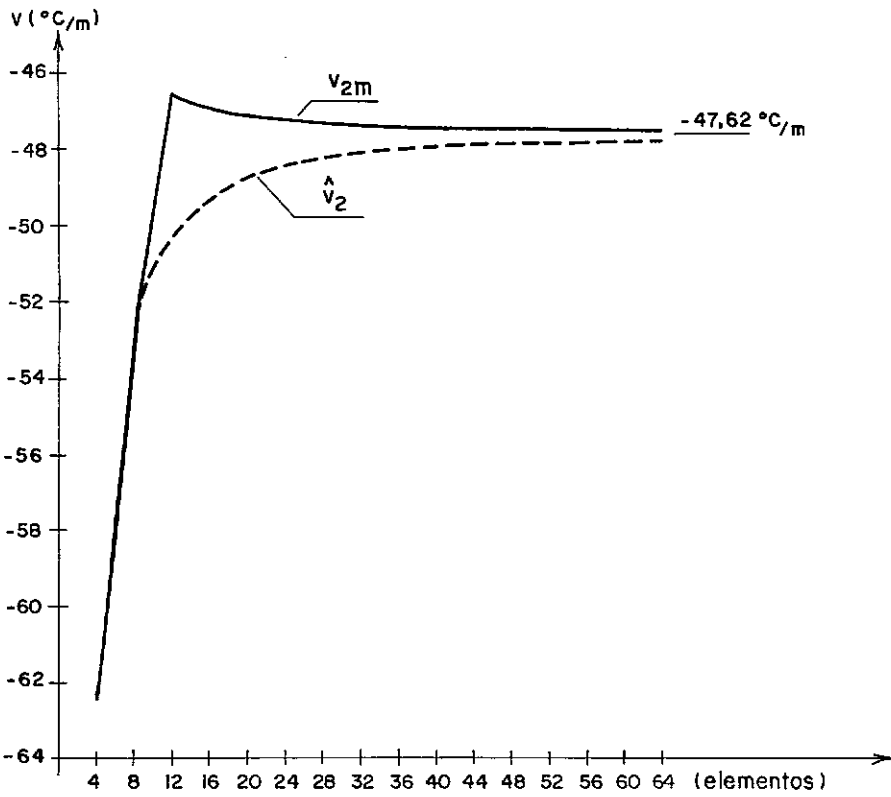


FIGURA 5.2 - Tempo de processador para o exemplo nº1 (cont.)



(a)



(b)

FIGURA 5.3 - Convergência da solução para o CASO 1
(a) temperatura na face 2
(b) derivada normal na face 2

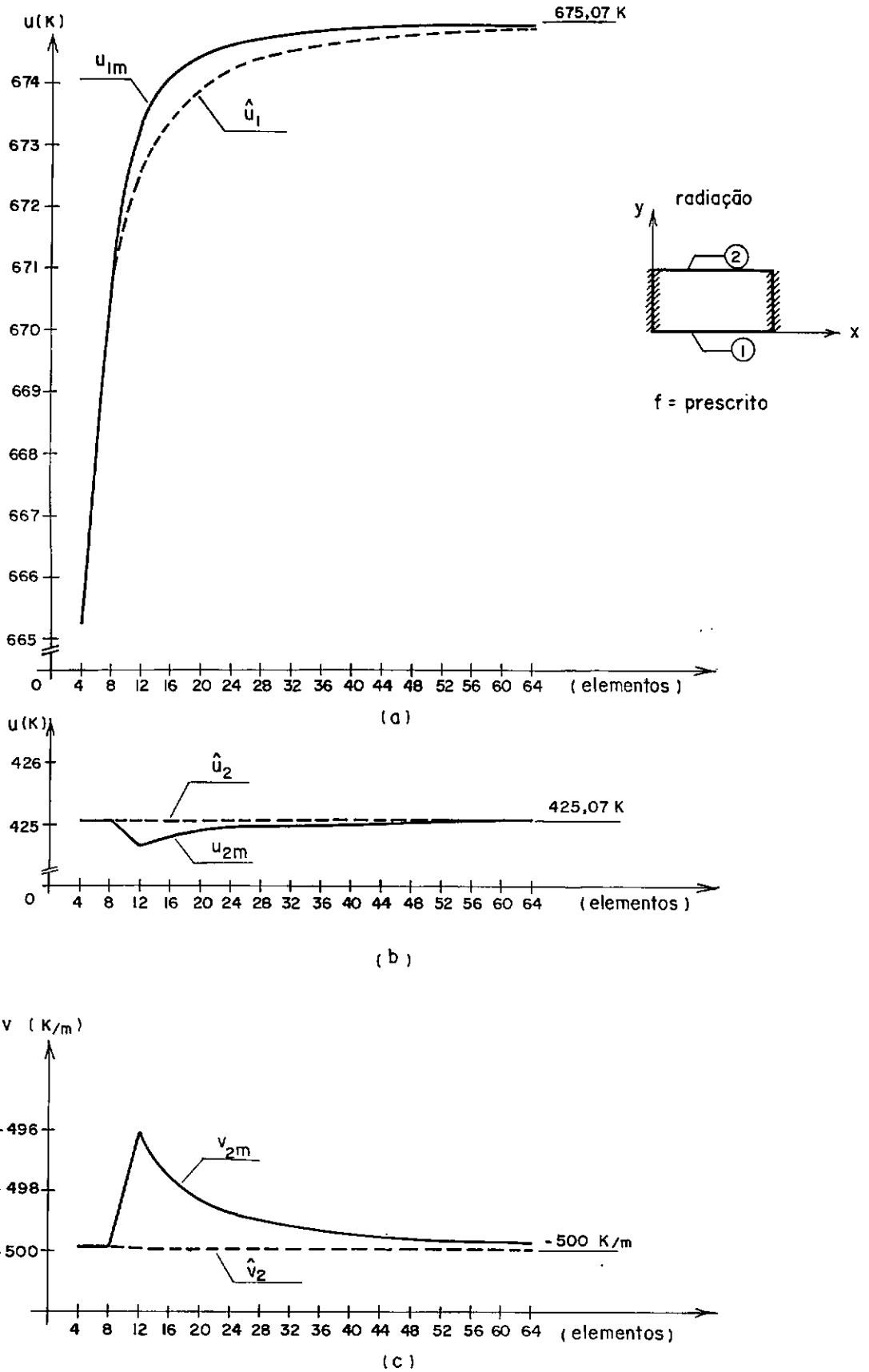


FIGURA 5.4 - Convergência da solução para o CASO 2
 (a) temperatura na face 1
 (b) temperatura na face 2
 (c) derivada normal na face 2

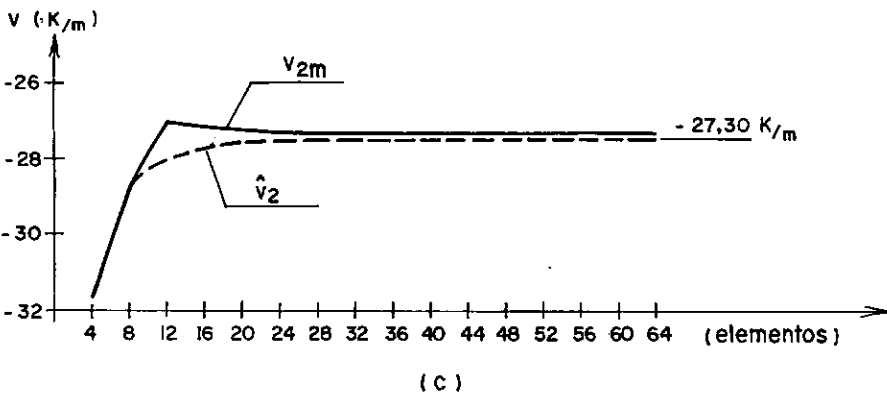
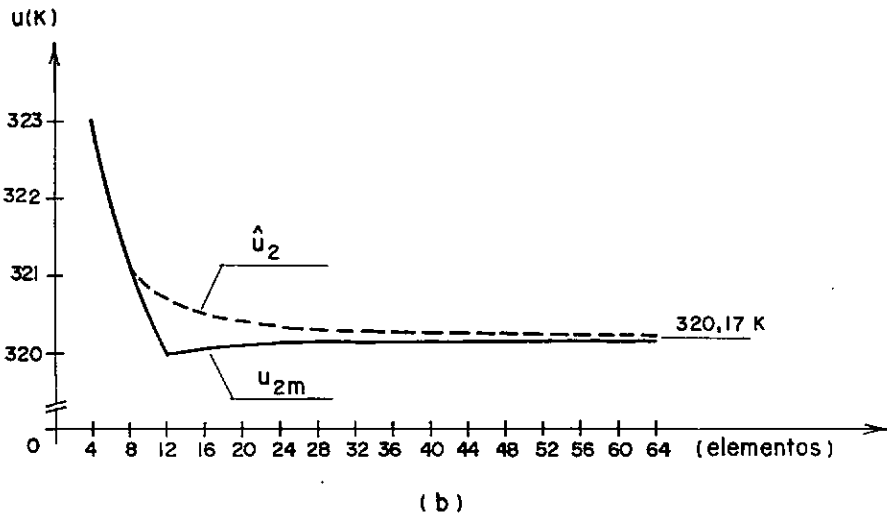
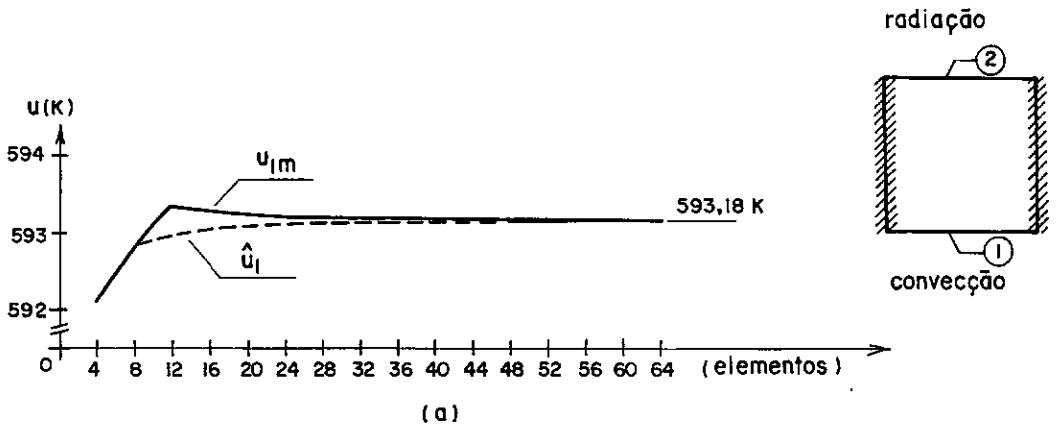
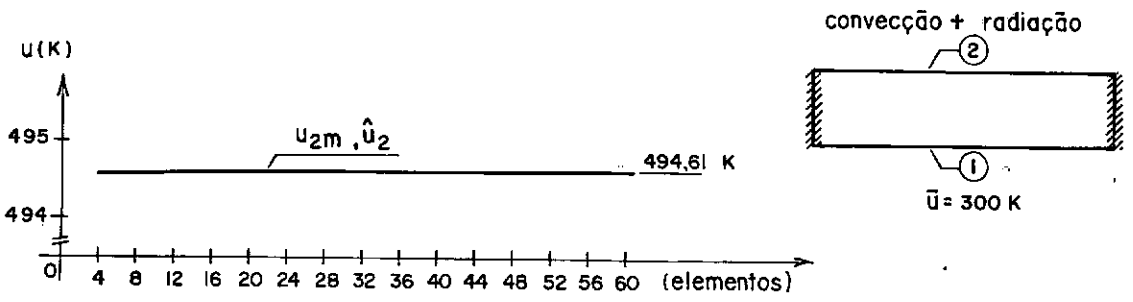
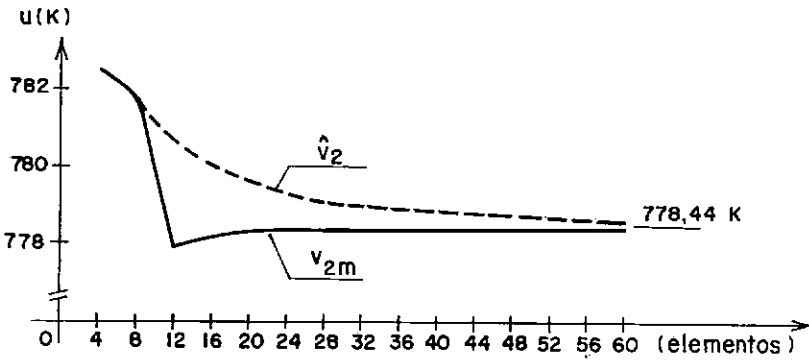


FIGURA 5.5 - Convergência da solução para o caso 3
(a) temperatura na face 1
(b) temperatura na face 2
(c) derivada normal na face 2



(a)

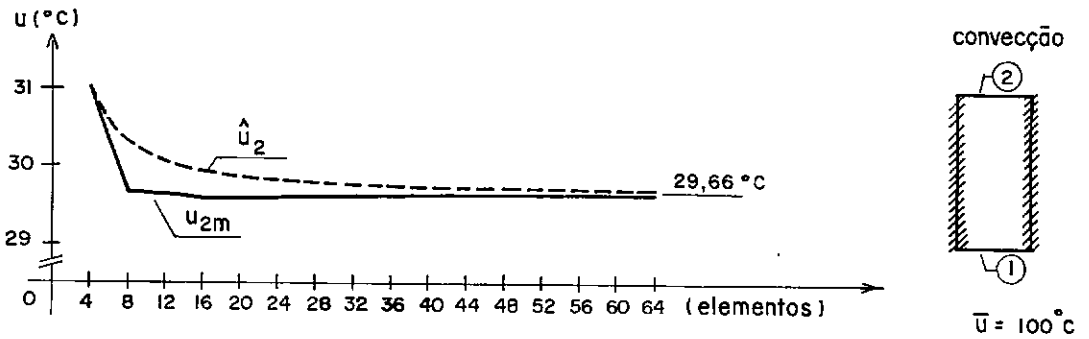


(b)

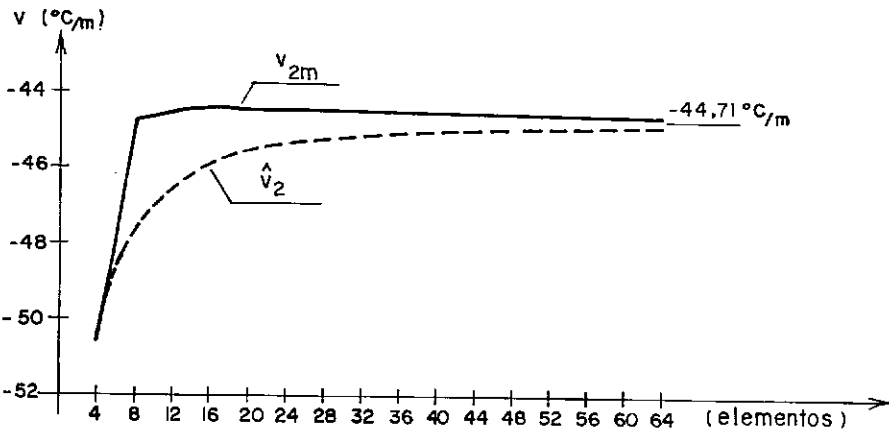
FIGURA 5.6 - Convergência da solução para o CASO 4

(a) temperatura na face 2

(b) derivada normal na face 2



(a)



(b)

FIGURA 5.7 - Convergência da solução para o CASO 5

(a) temperatura na face 2

(b) derivada normal na face 2

V.3 - CAMPO TÉRMICO EM UMA PLACA QUADRADA SUJEITA A CONVECÇÃO E RADIAÇÃO (Exemplo nº 2)

Neste exemplo, apresentado por Bialecki e Nowak [6], de seja-se determinar o campo de temperaturas em regime estacionário em uma placa quadrada de lado unitário, mostrada na figura 5.8 juntamente com a malha de elementos de contorno adotada (36 elementos iguais).

A condutividade térmica é constante e igual a 1 W/mK.

As faces \overline{AB} e \overline{DA} são isoladas termicamente; a face \overline{CD} é mantida a 300 K; na face \overline{BC} o calor é trocado por convecção (com um fluido à temperatura $u_c = 500$ K e com coeficiente de filme constante $h = 10$ W/m²K) e por radiação (com uma superfície à temperatura $u_r = 500$ K e $\epsilon=1$).

A distribuição de temperaturas mostrada na figura 5.9 foi obtida, tanto por iterações diretas quanto pelo esquema de Newton-Raphson, para uma tolerância de 10^{-4} . Nos dois casos, a convergência foi obtida em 2 iterações (erros relativos de 10^{-4} para iterações diretas e 10^{-5} para Newton-Raphson).

Como prova da qualidade dos resultados para esta malha, podemos aplicar em termos numéricos a lei de Gauss; na ausência de fontes de calor, ela exige que o fluxo total atravessando o contorno seja nulo. Somando separadamente as contribuições de fluxo entrando e de fluxo saindo, temos um "desequilíbrio" do fluxo de 0,13% para iterações diretas e de 0,11% para o esquema

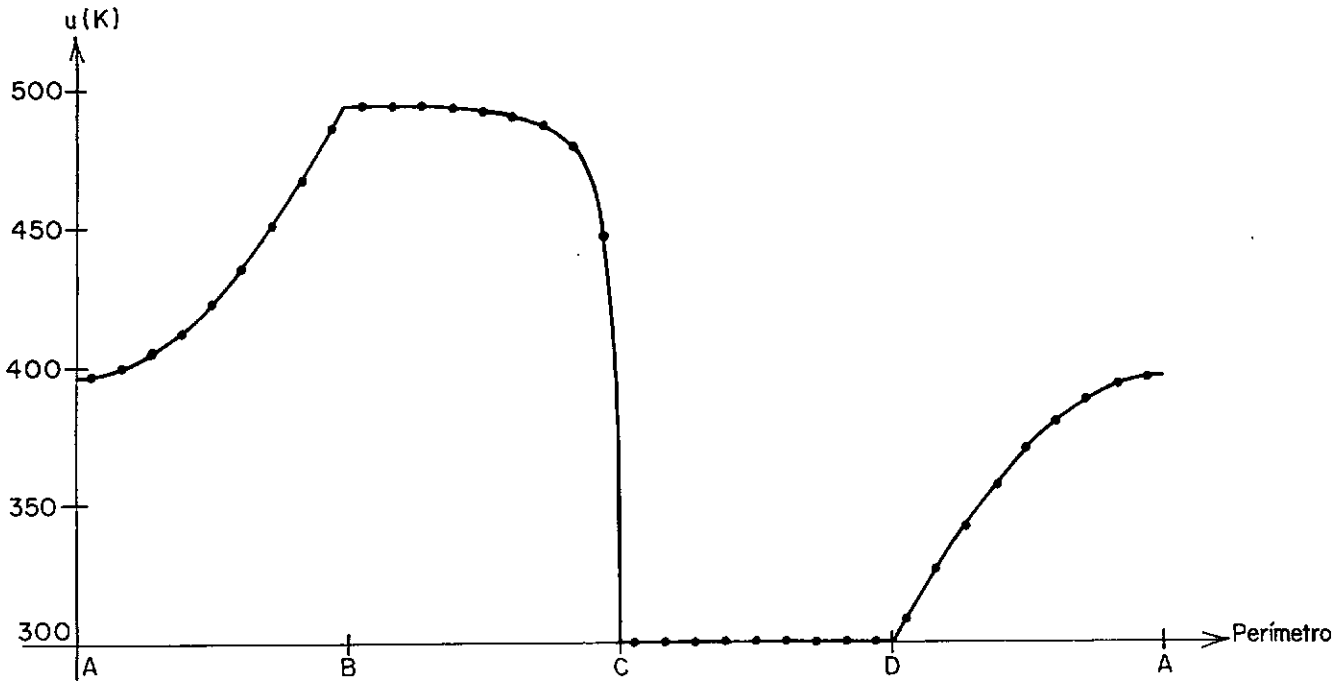


FIGURA 5.9 - Temperaturas ao longo do contorno do exemplo nº 2

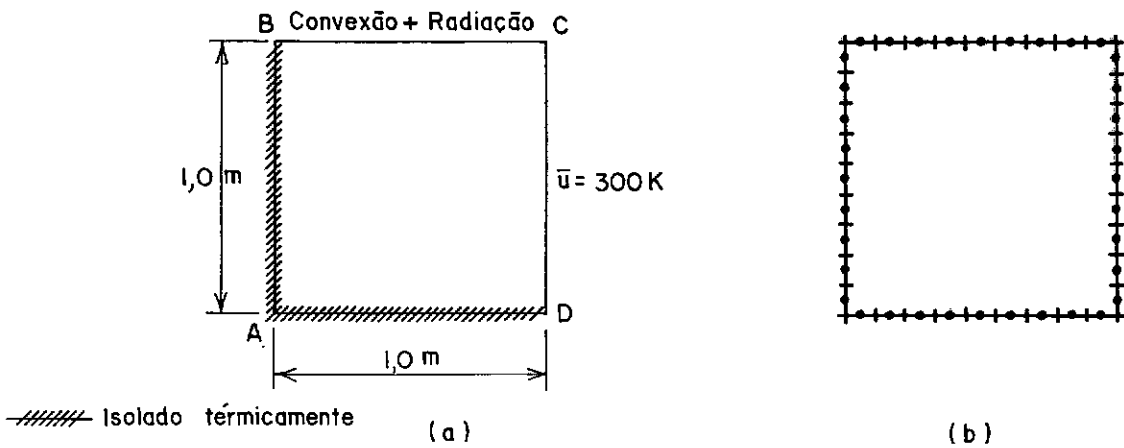


FIGURA 5.8 - Exemplo nº 2

(a) geometria e condições de contorno

(b) modelo usando 36 elementos (de contorno) constantes.

de Newton-Raphson, que confirmam a qualidade da solução para a discretização do contorno utilizada.

V.4 - CONDUÇÃO DE CALOR ATRAVÉS DE UMA PAREDE COM CONDUTIVIDADE DEPENDENTE DA TEMPERATURA (Exemplo nº 3)

Neste exemplo examinamos a condução unidimensional através de uma parede para quatro materiais com condutividade térmica variável com a temperatura.

Na figura 5.10(a) apresentamos a geometria do problema e as temperaturas em °C nas duas faces da parede com espessura $L = 15$ cm. Nas figuras 5.11 e 5.12 apresentamos as curvas de variação da condutividade (em W/cm °C) com a temperatura para quatro materiais, representadas pelas letras de A a D.

Nas figuras 5.10 (b)-(d) podem ser vistas, respectivamente, a malha de elementos finitos cúbicos usada em [61] e duas malhas de elementos de contorno constantes por nós adotadas.

Em todos os três modelos fizemos uso da simetria e extraímos uma fatia da parede de altura $H = 3$ cm. No modelo de elementos finitos impomos $v=0$ em $y=0$ e $y=H$. Nos dois modelos de elementos de contorno fizemos uso da simetria não discretizando elementos em $y=0$; com isto conseguimos reduzir o número de incógnitas sem reduzir a precisão dos resultados.

A representação aproximada das curvas adotada para os cálculos foi a mesma poligonal usada por Zienkiewicz [61]. Os

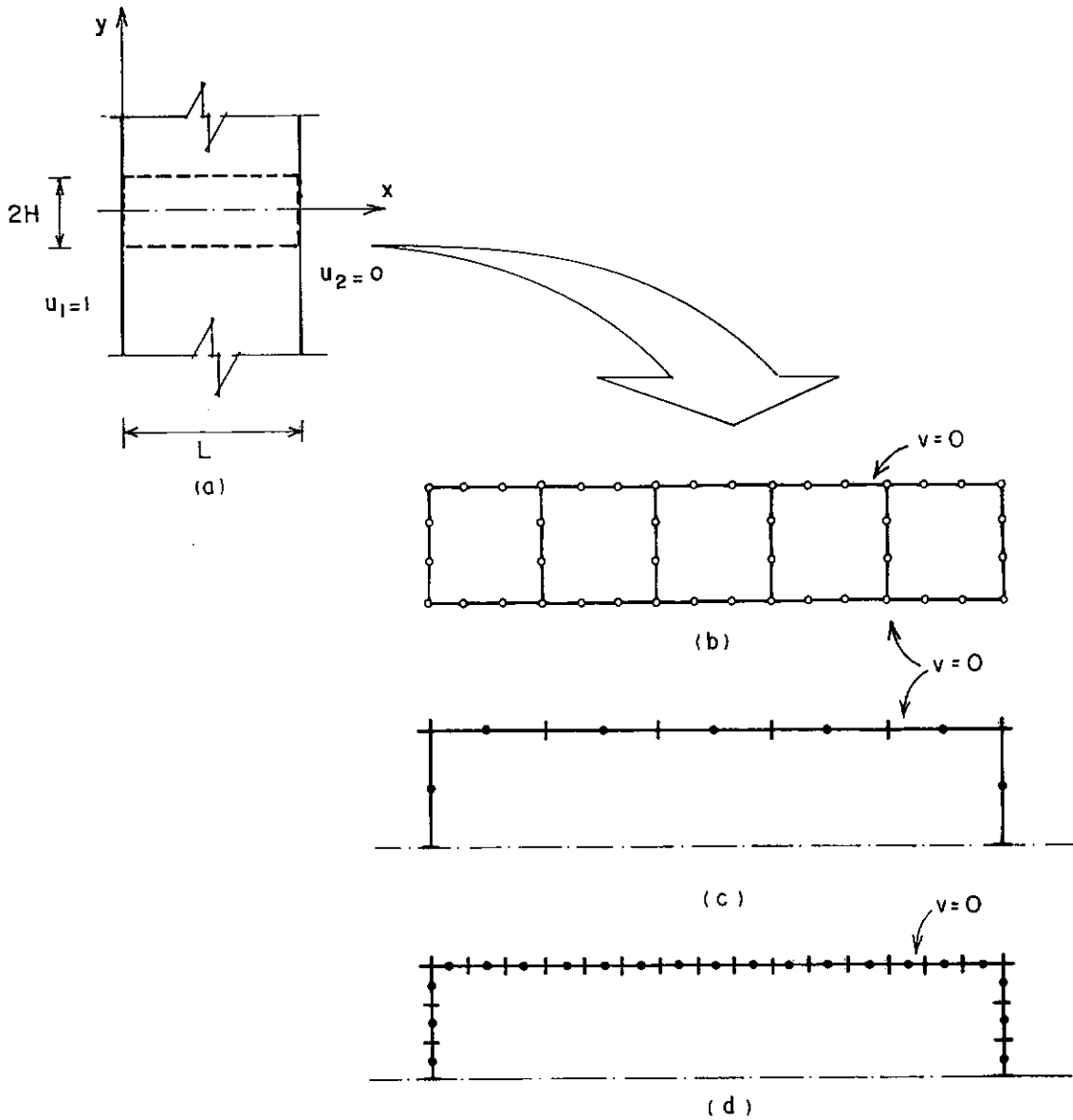


FIGURA 5.10 - Exemplo nº 3

- (a) dimensões e condições de contorno
- (b) malha de elementos finitos
- (c) malha de elementos de contorno (7 elementos)
- (d) malha de elementos de contorno (21 elementos).

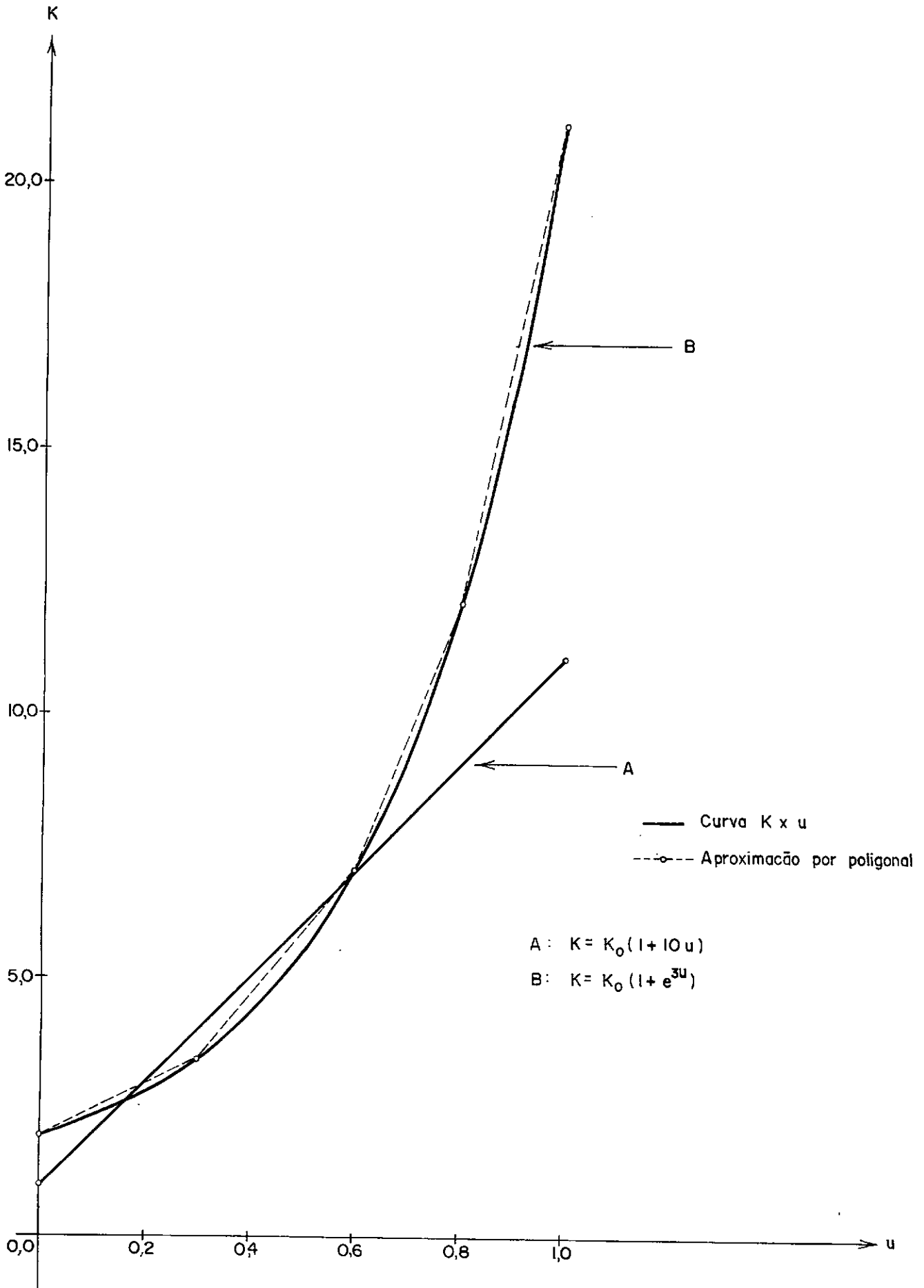


FIGURA 5.11 - Curvas de variação de condutividade dos materiais A e B com a temperatura.

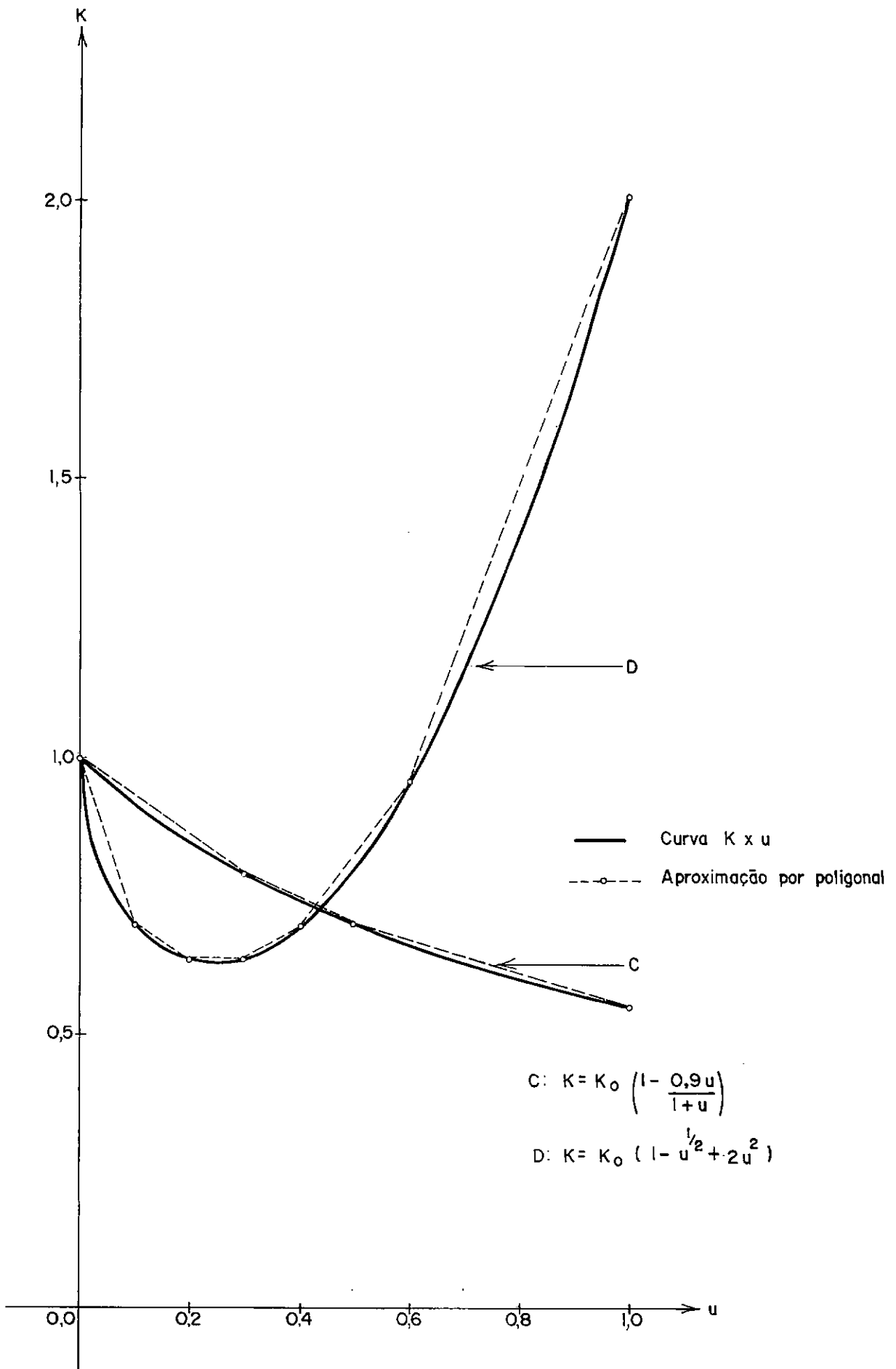


FIGURA 5.12 - Curvas de variação de condutividade dos materiais C e D com a temperatura.

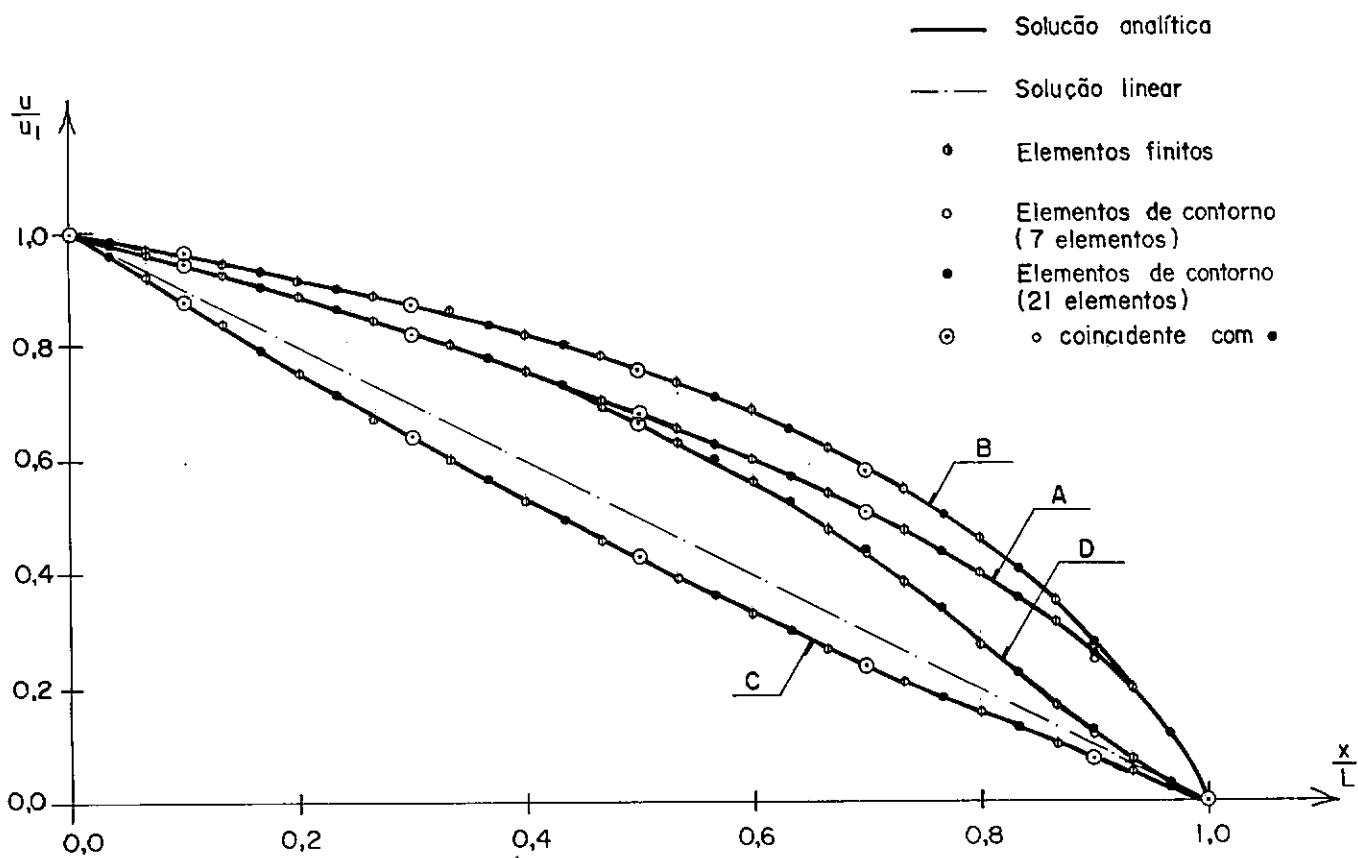


FIGURA 5.13 - Distribuição de temperaturas para 4 tipos de materiais do exemplo nº 3

resultados apresentados na figura 5.13 demonstram a qualidade dos resultados obtidos mesmo para uma aproximação pouco refinada das curvas originais.

O sucesso da representação por meio de poligonais no cálculo da transformada de Kirchhoff e sua inversa nos permite tratar de forma bem simples e padrão a solução do problema no espaço transformado e depois voltar ao espaço original.

Com o uso da transformada de Kirchhoff este problema é linear no espaço transformado e, portanto, dispensa esquemas iterativos presentes na solução por elementos finitos apresentada em [61].

V.5 - CONDUÇÃO DE CALOR EM UMA PLACA QUADRADA COM CONDUTIVIDADE VARIÁVEL (Exemplo nº 4)

Este exemplo, apresentado por Zienkiewicz [61], considera a condução de calor em uma placa quadrada mostrada na figura 5.14 juntamente com a modelação de elementos finitos cúbicos usada por Zienkiewicz e a malha de elementos de contorno constantes por nós adotada. Mais uma vez usamos a simetria para evitar discretização de parte do contorno.

Uma distribuição senoidal de temperaturas foi aplicada ao lado superior, enquanto que os outros lados foram mantidos a temperatura constante igual a zero.

Para a condutividade térmica, admitiu-se a seguinte lei de variação linear com a temperatura:

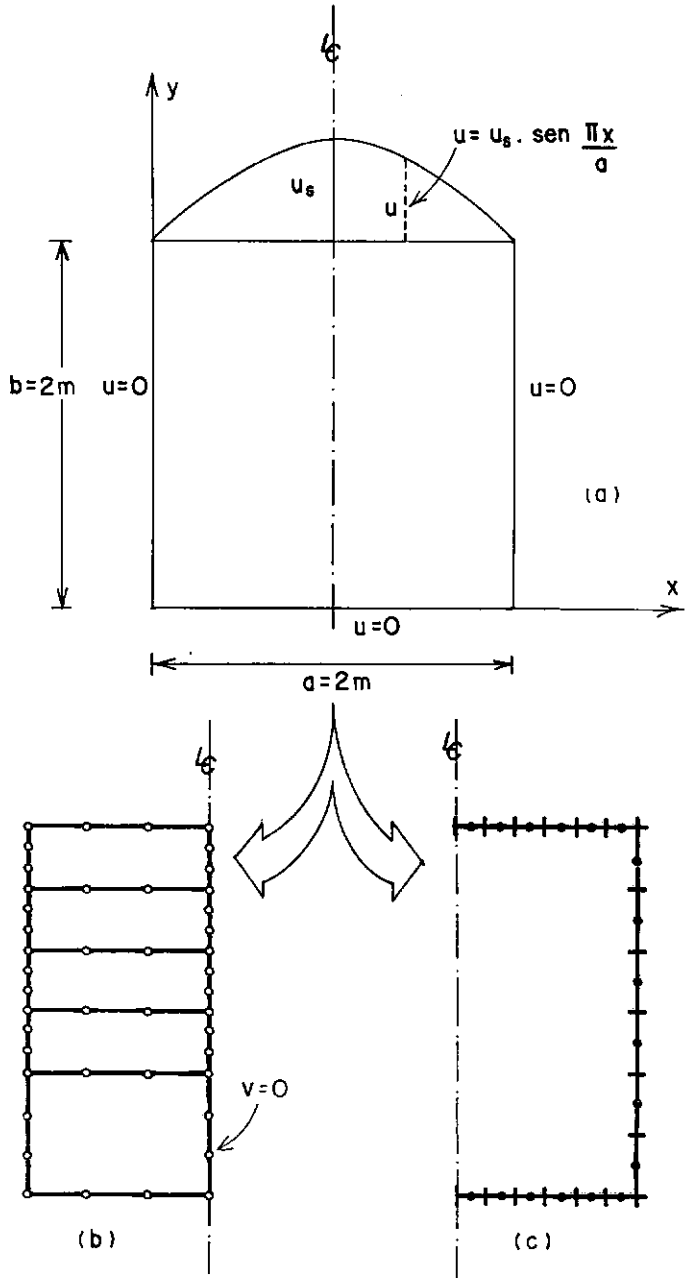


FIGURA 5.14 - Condução de calor através de uma placa quadrada (Exemplo nº 4).

- (a) geometria e condições de contorno
- (b) malha de elementos finitos
- (c) malha de elementos de contorno

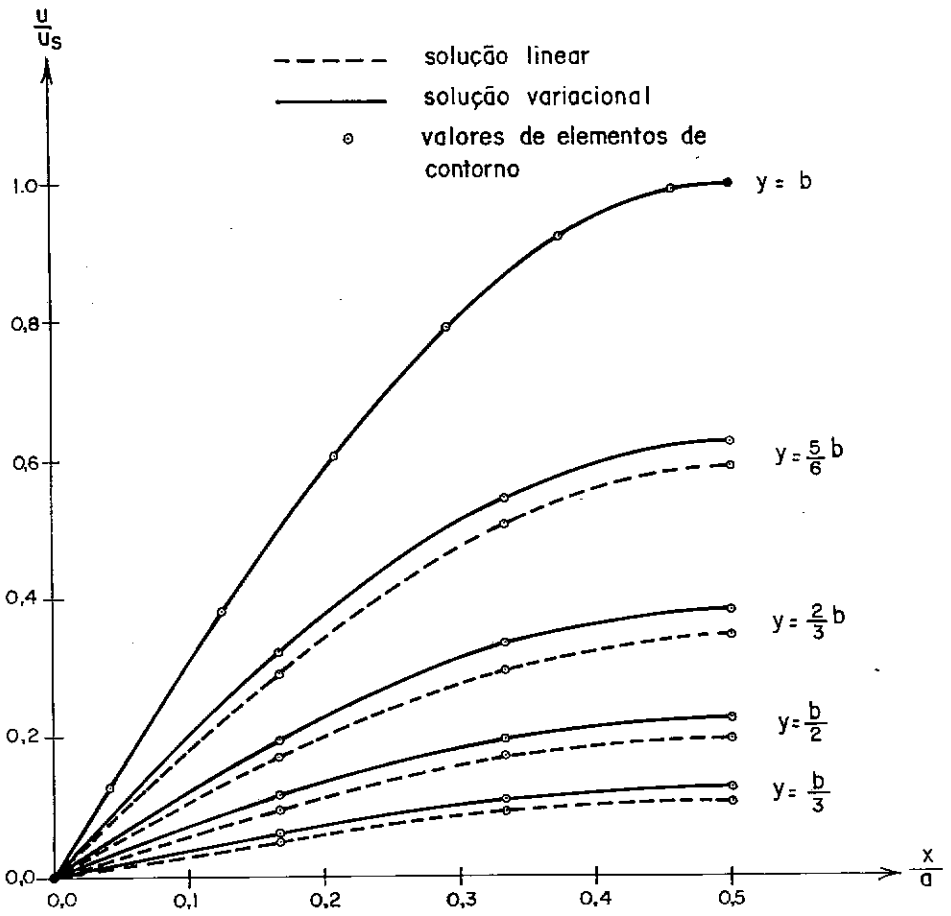


FIGURA 5.15 - Distribuição de temperaturas através de várias seções da placa do exemplo nº 4

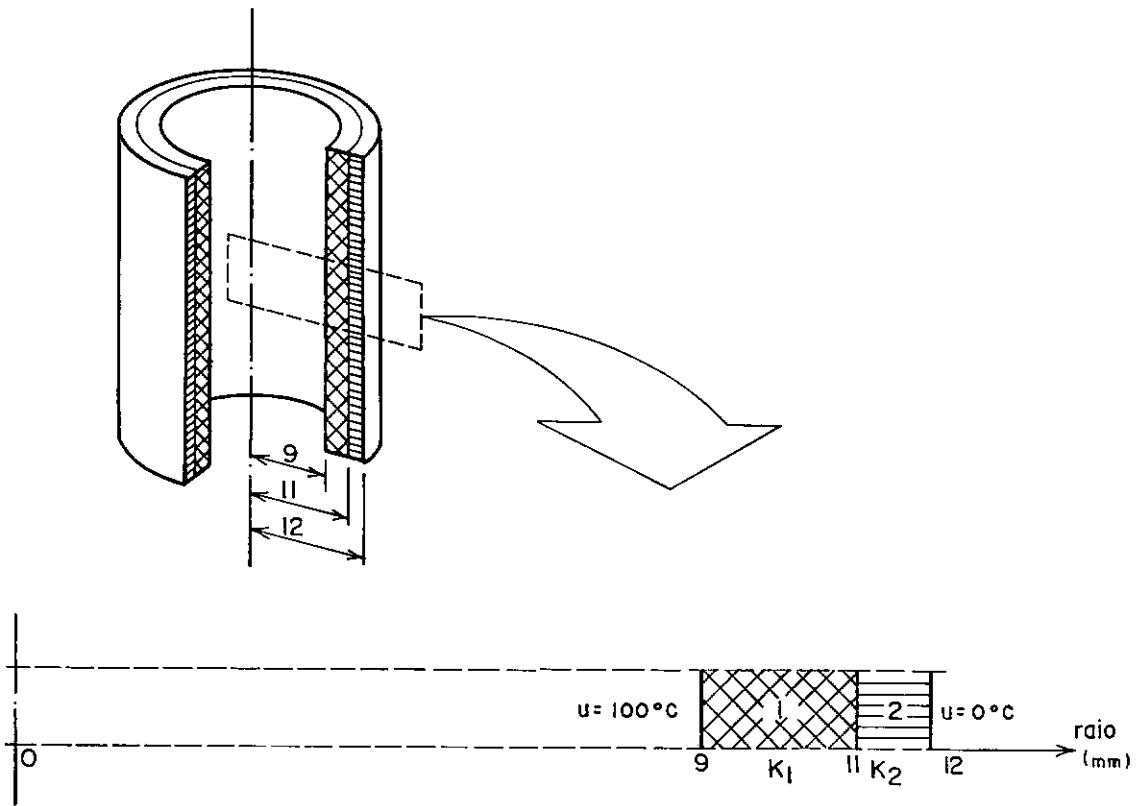


FIGURA 5.16 - Geometria e condições de contorno do cilindro do exemplo nº 5.

$$K = K_0 \left(1 + 0,5 \frac{u}{u_s} \right) \frac{W}{m^2 C}$$

Neste caso, a poligonal se reduz a uma reta.

Na figura 5.15 mostramos os resultados de elementos de contorno, tanto para o caso linear (condutividade constante) quanto para o caso de condutividade variável, juntamente com a solução variacional dada em [61]. Como as condições de contorno envolvem apenas temperaturas prescritas (problema de Dirichlet) o problema é linear no espaço transformado e dispensa esquemas iterativos. Os resultados obtidos para elementos finitos usando o esquema iterativo de Newton-Raphson coincidem com os obtidos pelo método dos elementos de contorno.

Como afirmamos no capítulo III, o cálculo da solução em pontos internos é feito a partir da solução no contorno e possui uma grande precisão.

V.6 - DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS EM UM CILINDRO LONGO COMPOSTO DE DUAS CAMADAS (Exemplo nº 5)

Neste exemplo, analisamos por elementos de contornos a distribuição axissimétrica de temperaturas em um cilindro oco composto de duas camadas e de comprimento infinito, representado na figura 5.16 e analisado por elementos finitos por Feijão [20]. Esta análise considera o caso de um único material ($K_1=K_2$) e o caso de dois materiais com condutividades diferentes ($K_2=10 K_1$). Na figura 5.18 apresentamos as malhas usadas na análise de elementos finitos (elementos quadráticos) e elementos de contorno (elementos constantes).

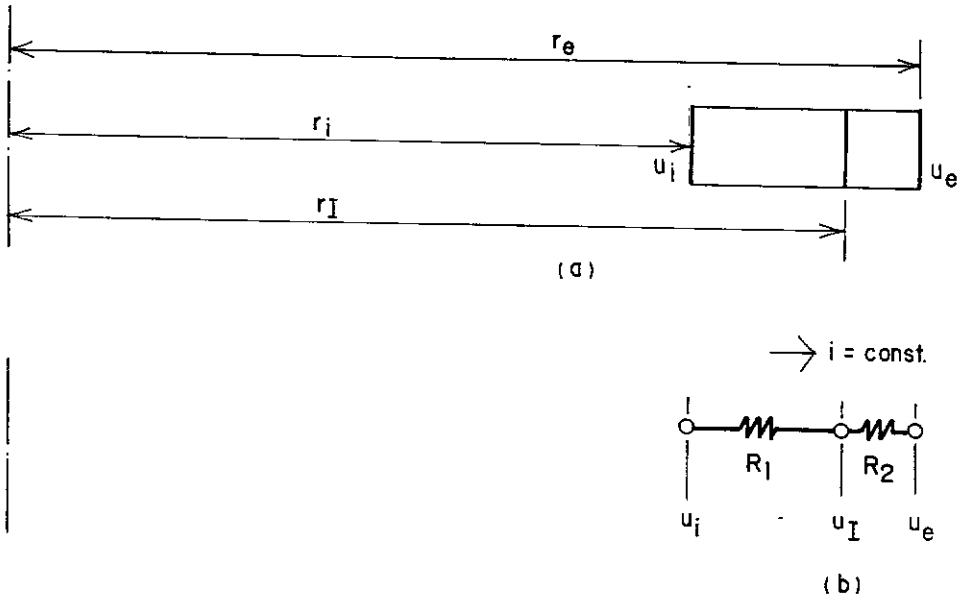


FIGURA 5.17 - Modelo analítico para o exemplo nº 5
(a) dimensões e condições de contorno
(b) analogia elétrica.

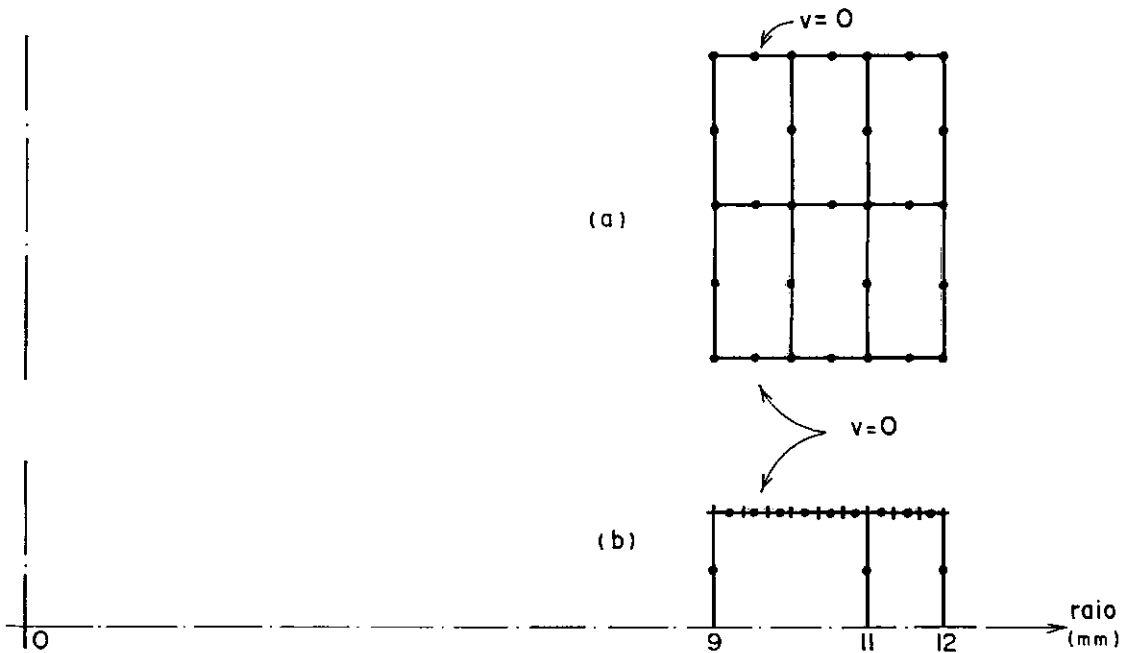


FIGURA 5.18 - Modelos para análise numérica da condução de calor no cilindro composto de duas camadas (exemplo nº 5)
(a) malha de elementos finitos
(b) malha de elementos de contorno

Na figura 5.19 apresentamos as soluções por elementos finitos e elementos de contorno juntamente com a solução analítica descrita a seguir.

Para cada sub-região homogênea da figura 5.17, podemos aplicar a equação diferencial da condução de calor; como não há fontes no interior da região e a condutividade independe da temperatura, o fenômeno é descrito pela equação de Laplace.

Escrevendo o Laplaciano em coordenadas cilíndricas e levando em conta que o problema independe de θ e Z , obtemos a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = 0$$

que integrada duas vezes fornece

$$u = c_1 \ln r + c_2$$

Esta expressão nos mostra que a variação da temperatura através da espessura de cada camada homogênea de um tubo infinitamente longo é logarítmica; para que possamos aplicar esta expressão a cada camada, precisamos antes achar o valor da temperatura na interface.

Para a primeira sub-região do modelo apresentado na figura 5.17-a, podemos determinar a constante c_1 subtraindo as expressões correspondentes às temperaturas u_i e u_I :

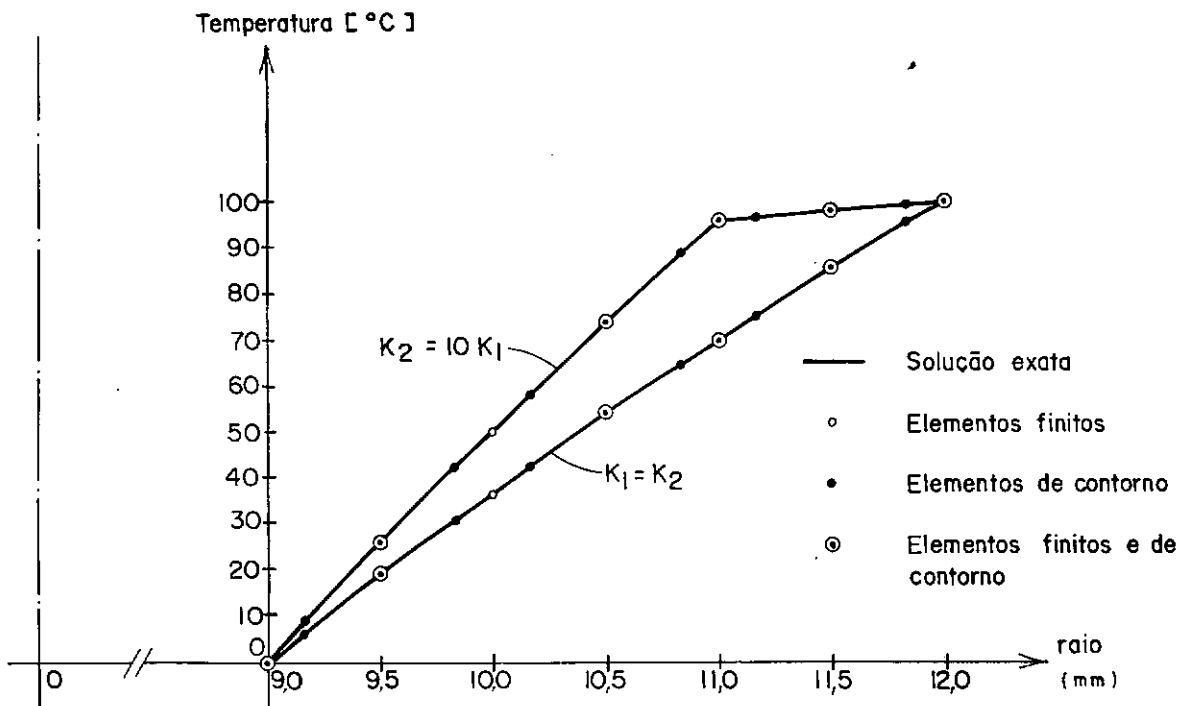


FIGURA 5.19 - Distribuição de temperaturas no cilindro do exemplo nº 5

$$c_1 = \frac{u_I - u_i}{\ln \left(\frac{r_I}{r_i} \right)}$$

A constante c_2 pode ser obtida, a partir da temperatura na face mais interna, como:

$$u_i = c_1 \ln (r_i)$$

Na segunda sub-região o procedimento é análogo.

Outra condição a ser satisfeita é a conservação do fluxo. A expressão da densidade superficial de fluxo é obtida da expressão da temperatura, pela aplicação da lei de Fourier:

$$q = K_1 \left(\frac{u_I - u_i}{\ln(r_I/r_i)} \right) \cdot \frac{1}{r}$$

O fluxo térmico total que atravessa cada camada de raio r é dado por

$$i = q \cdot 2\pi r$$

Portanto

$$i = \frac{K_1 (u_I - u_i)}{\ln (r_I/r_i)} \cdot 2\pi$$

Podemos fazer uma analogia com a lei de Ohm, na qual

$R = \frac{\ln (r_I/r_i)}{2\pi \cdot K}$ é a resistência térmica, $u_I - u_i$ é a d.d.p. e i a

corrente térmica. Isto nos permite trabalhar diretamente com a analogia elétrica mostrada na figura 5.17 (b), onde as duas sub-regiões aparecem como resistências em série.

A resistência equivalente é obtida somando-se R_1 e R_2 ; tendo a resistência equivalente e a diferença de potencial entre as faces interna e externa calculamos a corrente i .

Com o valor da corrente calculamos a temperatura na interface, a partir da queda de potencial em R_1 . Uma vez determinada esta temperatura, a expressão logarítmica de cada sub-região fica determinada e podemos calcular o valor da temperatura para qualquer raio dentro das sub-regiões.

Esta solução apresenta diversas semelhanças com as etapas do método dos elementos de contorno em sub-regiões:

- a expressão da solução em cada sub-região é escrita separadamente em termos da sua geometria e condutividade e de coeficientes a serem determinados;
- pela consideração das condições de interface, determinamos os parâmetros antes indeterminados;
- a solução pode ser calculada em qualquer ponto interno apenas em função dos valores no contorno desta.

V.7 - TRANSFERÊNCIA DE CALOR NÃO LINEAR EM UM CILINDRO COMPOSTO
(Exemplo nº 6)

Neste último exemplo consideraremos o perfil radial de temperaturas em um cilindro longo composto de três camadas de materiais diferentes com condutividade térmica dependente da temperatura.

A geometria e as condições de contorno são mostradas na figura 5.20, sendo os raios dados em mm. Este exemplo faz parte de um estudo prévio realizado por Donea e Giuliani [18] para a análise da transferência de calor não linear que ocorre em "gaps" gasosos existentes entre o elemento combustível de reatores nucleares e seu "canning".

As condutividades, representadas nas figuras 5.23 e 5.24 (exceto a reta $K_3(u)$), são dadas, em W/m^0C , por:

$$K_1 = 7 - 5.10^{-3} u + 3.10^{-6} u^2 - 5.10^{-10} u^3 + 3.10^{-14} u^4$$

$$K_2 = 2 + 5.10^{-3} u - 10^{-6} u^2$$

$$K_3 = 10 + 4.10^{-2} u$$

Neste estudo admite-se um contato perfeito nas interfaces. O tubo opera a uma temperatura uniforme $u_1 = 2000^0C$ na superfície interna, enquanto que a superfície externa é mantida a 0^0C .

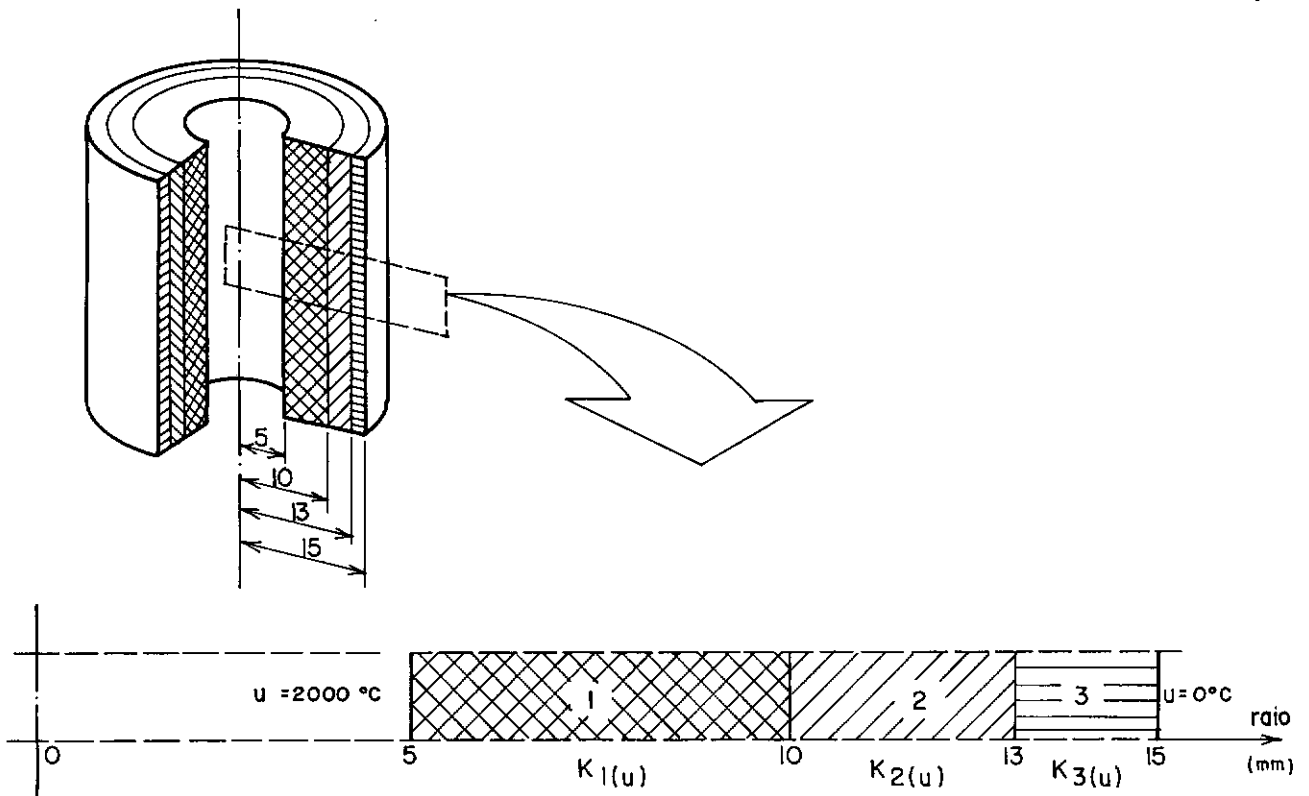


FIGURA 5.20 - Geometria e condições de contorno do cilindro do exemplo nº 6 .

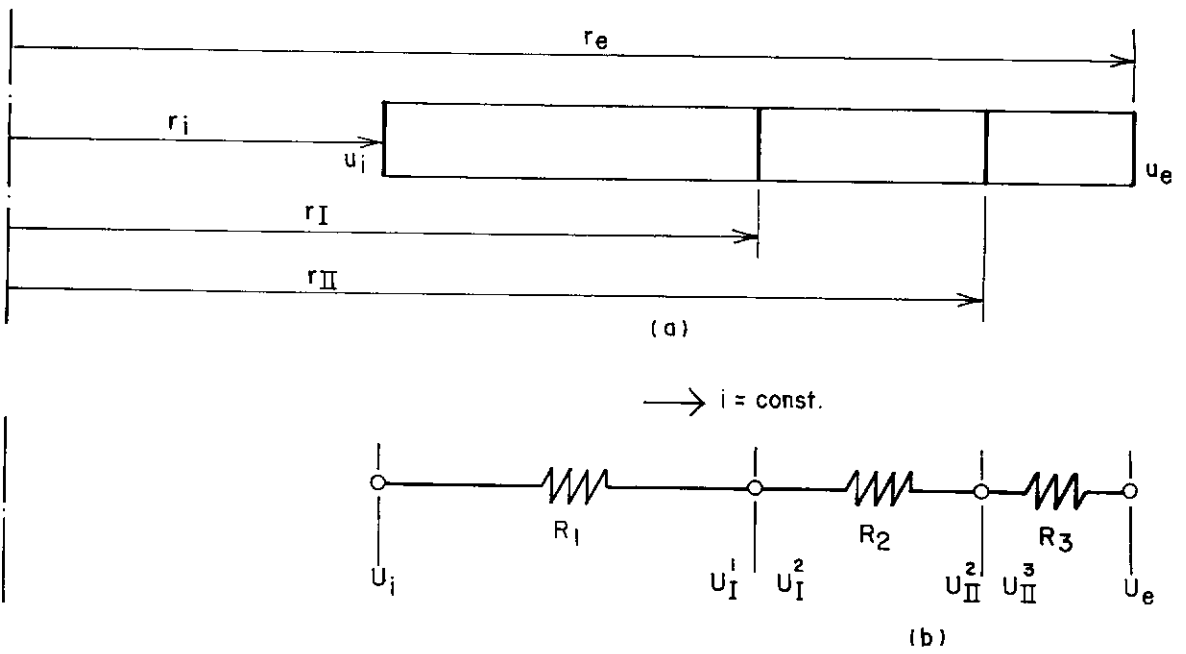


FIGURA 5.21 - Modelo analítico para o exemplo nº 6

(a) dimensões e condições de contorno

(b) analogia elétrica

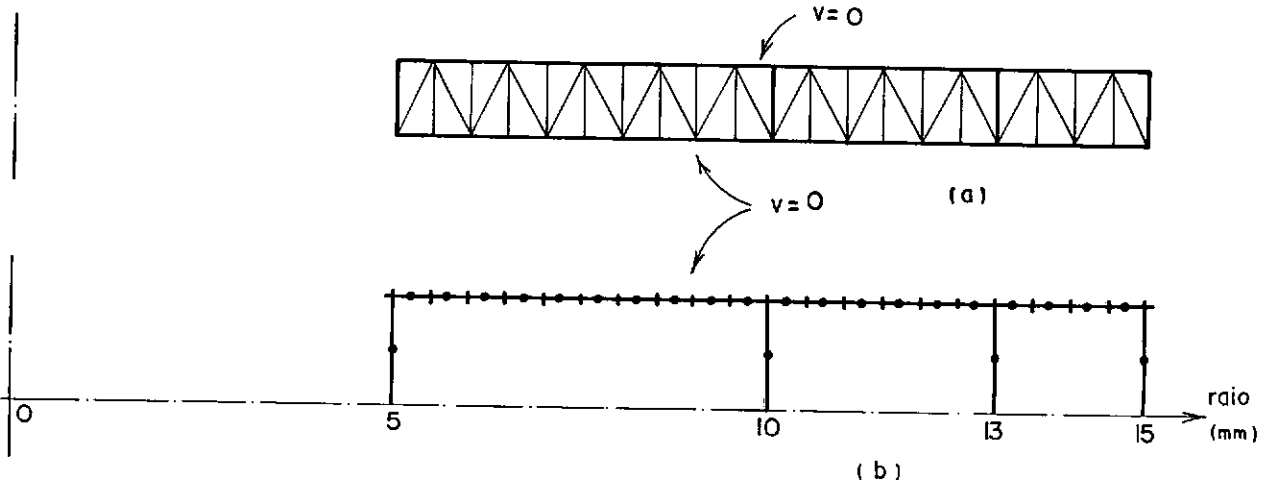


FIGURA 5.22 - Modelos para análise numérica da condução de calor no cilindro composto de três camadas (exemplo nº 6)

(a) malha de elementos finitos

(b) malha de elementos de contorno

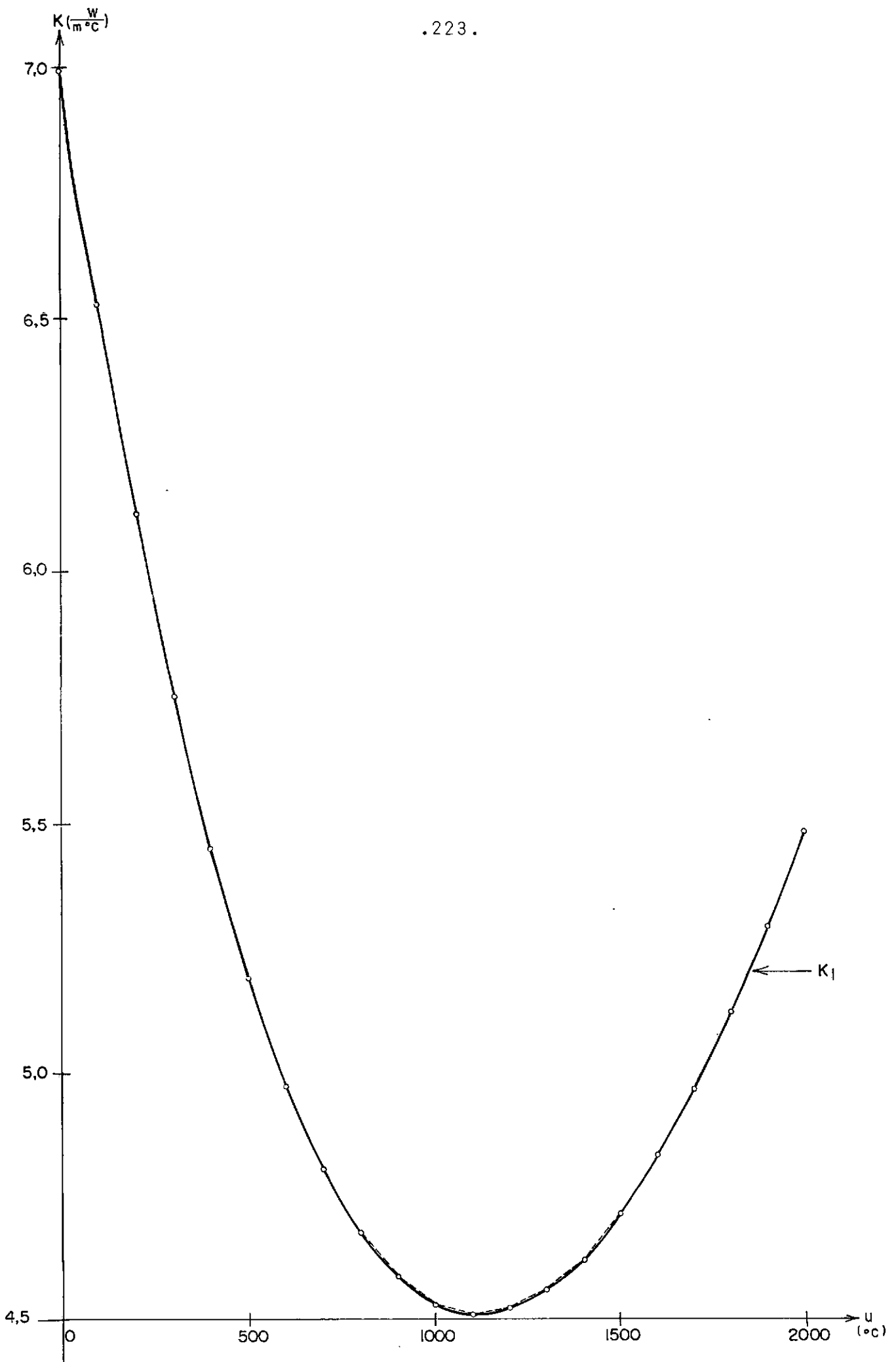


FIGURA 5.23 - Curva da condutividade em função da temperatura para a sub-região nº 1

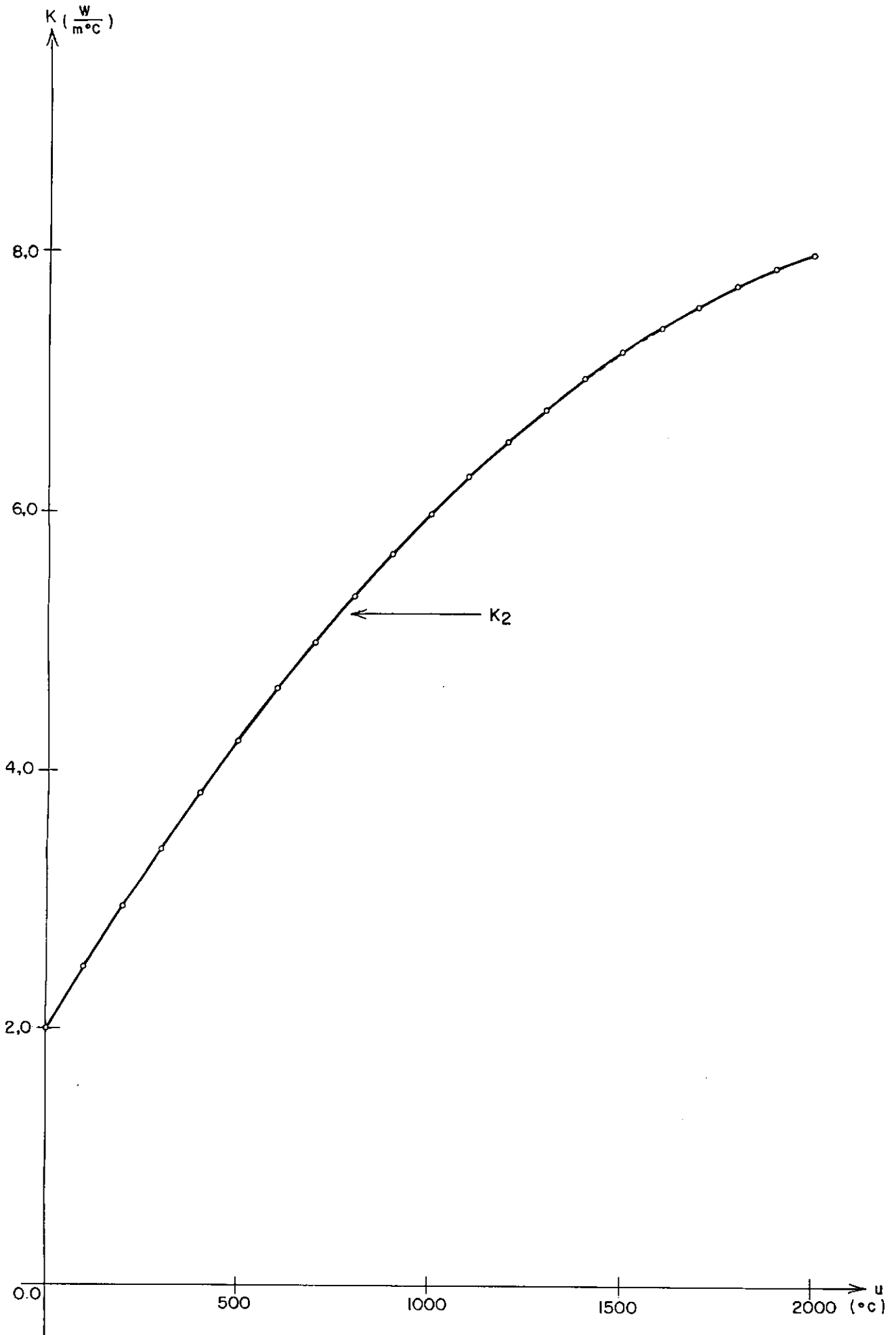


FIGURA 5.24 - Curva da condutividade em função da temperatura para a sub-região n^o 2

Na figura 5.22 apresentamos a idealização de elementos finitos triangulares usada por Donea e nossa representação por elementos de contorno constantes.

A não linearidade do operador em cada sub-região é removida pelo uso das transformadas de Kirchhoff (Figura 5.25), permitindo o emprego do método dos elementos de contorno. Como vimos no capítulo IV, esta não linearidade é transferida para condições de interface e o sistema não linear resultante é resolvido tanto por iterações diretas quanto pelo esquema de Newton-Raphson, tomando-se partido da blocagem natural do sistema.

Na figura 5.26 apresentamos os fatores de correção dos coeficientes de influência correspondentes aos valores da transformada da temperatura na interface, como descrito no capítulo IV.

No método de iteração direta os coeficientes $\frac{U_2}{U_1}$ e $\frac{U_3}{U_2}$ ficam indeterminados quando $u=0$; tal indeterminação pode ser levantada através da regra de L'Hôpital e nos fornece as relações $\frac{K_2}{K_1}$ e $\frac{K_3}{K_2}$, respectivamente, como pode ser facilmente observada na interseção dos dois pares de curvas na figura 5.26.

A solução de partida foi obtida admitindo-se para as interfaces as temperaturas de 1000°C em $r=10$ mm e $u=500^{\circ}\text{C}$ em $r=13$ mm. Neste exemplo aproximamos as curvas K_1 e K_2 por poligonais (20 trechos) e os resultados obtidos pelos dois esquemas iterativos coincidem, como mostrado no perfil radial de temperaturas na figura 5.28. Para uma tolerância de 10^{-4} o esquema

de iterações diretas convergiu em 10 iterações (4×10^{-5}) e o esquema de Newton-Raphson em 3 iterações (6×10^{-6}).

Os valores de temperaturas obtidas para a malha de elementos de contorno (figura 5.22(b)) estão reunidos na tabela 5.2; a comparação destes resultados com aqueles obtidos analiticamente e organizados na tabela 5.3 demonstra a alta precisão conseguida com o uso das técnicas aqui propostas.

Neste exemplo, ao usarmos o esquema de iterações diretas, observamos oscilações em torno da solução exata que se amortecem à medida em que cresce o número de iterações. O número de iterações necessárias à convergência pode ser bastante diminuído por meio de um esquema de super-relaxação sucessiva ("SOR") da forma apresentada por Donea; outra forma eficiente de acelerar a convergência consiste em admitir que os incrementos da solução estejam em progressão geométrica e obter uma melhor aproximação com a soma infinita dos termos desta P.G. de razão < 1 .

A seguir, como no exemplo anterior, examinaremos a solução analítica do problema de condução de calor axissimétrico. Na figura 5.21 apresentamos o modelo analítico e a analogia elétrica.

Neste caso, como a condutividade de cada camada varia com a temperatura, aplicamos a transformada de Kirchhoff a cada uma delas. Isto implica em expressões análogas às obtidas no exemplo anterior, só que na variável transformada U . Assim, para a camada mais interna temos:

$$U = c_1 \ln r + c_2$$

$$c_1 = \frac{U_i - U_I^1}{\ln \left(\frac{r_i}{r_I} \right)} \quad ; \quad c_2 = U_i - c_1 \ln r_i$$

No espaço transformado, entretanto, não há continuidade de U nas interfaces; isto se deve às diferentes expressões de condutividades, conforme se considere a interface pertencente a uma ou outra sub-região.

Para resolver o problema, podemos escrever, por interface, as condições de conservação do fluxo e igualdade de temperatura (no espaço original).

A conservação do fluxo pode ser escrita, para a interface I , como

$$i = \frac{U_I^1 - U_i}{\ln \left(\frac{r_I}{r_i} \right)} \cdot 2\pi \cdot r_I = \frac{U_{II}^2 - U_I^2}{\ln \left(\frac{r_{II}}{r_I} \right)} \cdot 2\pi \cdot r_I$$

Escrevendo relações análogas para todas interfaces e simplificando os termos comuns, temos:

- na interface 1:

$$\frac{U_I^1 - U_i}{\ln \left(\frac{r_I}{r_i} \right)} = \frac{U_{II}^2 - U_I^2}{\ln \left(\frac{r_{II}}{r_I} \right)}$$

$$\text{- na interface 2: } \frac{U_{II}^2 - U_I^2}{\ln\left(\frac{r_{II}}{r_I}\right)} = \frac{U_e - U_{II}^3}{\ln\left(\frac{r_e}{r_{II}}\right)}$$

onde os subscritos I e II se referem à primeira e segunda interface, respectivamente, e os super-escritos 1, 2 e 3 se referem às sub-regiões 1, 2 e 3, respectivamente, como mostrado na figura 5.21.

Estas relações nos fornecem um sistema de equações não lineares que pode ser escrito, após serem substituídos os raios e as temperaturas prescritas, como:

$$\begin{bmatrix} \left(0,378512 + \frac{U_I^2}{U_I^1} \right) & -1 \\ \left(0,545428 \frac{U_I^2}{U_I^1} \right) & \left(-0,545428 - \frac{U_{II}^3}{U_{II}^2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_I^1 \\ U_{II}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,85779 \\ 0,0 \end{bmatrix}$$

Esta equação matricial está na forma adequada para o esquema de iterações diretas, análogo ao descrito no capítulo IV. Para o esquema de Newton-Raphson, a matriz jacobiana é dada por:

$$[J] = \begin{bmatrix} \left(0,378512 + \frac{K_2}{K_1} \right) & -1 \\ \left(0,545428 \frac{K_2}{K_1} \right) & \left(-0,545428 - \frac{K_3}{K_2} \right) \end{bmatrix}$$

Este sistema, como o correspondente de elementos de contorno, foi resolvido tanto por iterações diretas quanto pelo esquema de Newton-Raphson, para uma tolerância de 10^{-4} ; a transformada de Kirchhoff foi obtida analiticamente (integração dos polinômios que definem as relações $K \times u$) e a inversa foi obtida pelo algoritmo de Newton-Raphson a uma dimensão. A convergência da solução nas interfaces é apresentada na figura 5.27 e a solução analítica obtida é dada na tabela 5.3.

Neste caso, também, podemos observar uma série de características comuns à solução de elementos de contorno:

- surge a discontinuidade em U nas interfaces, decorrente da aplicação da transformada de Kirchhoff
- a cada iteração devemos achar a inversa na interface; esta, a temperatura, é contínua e permite que se calcule os fatores de correção para a iteração seguinte, plotados na figura 5.26.
- uma vez obtida a convergência, o cálculo de temperaturas em pontos de cada camada é idêntico ao apresentado no caso linear (ver exemplo anterior), só que na variável transformada. A temperatura nestes pontos é obtida posteriormente pela transformada inversa.

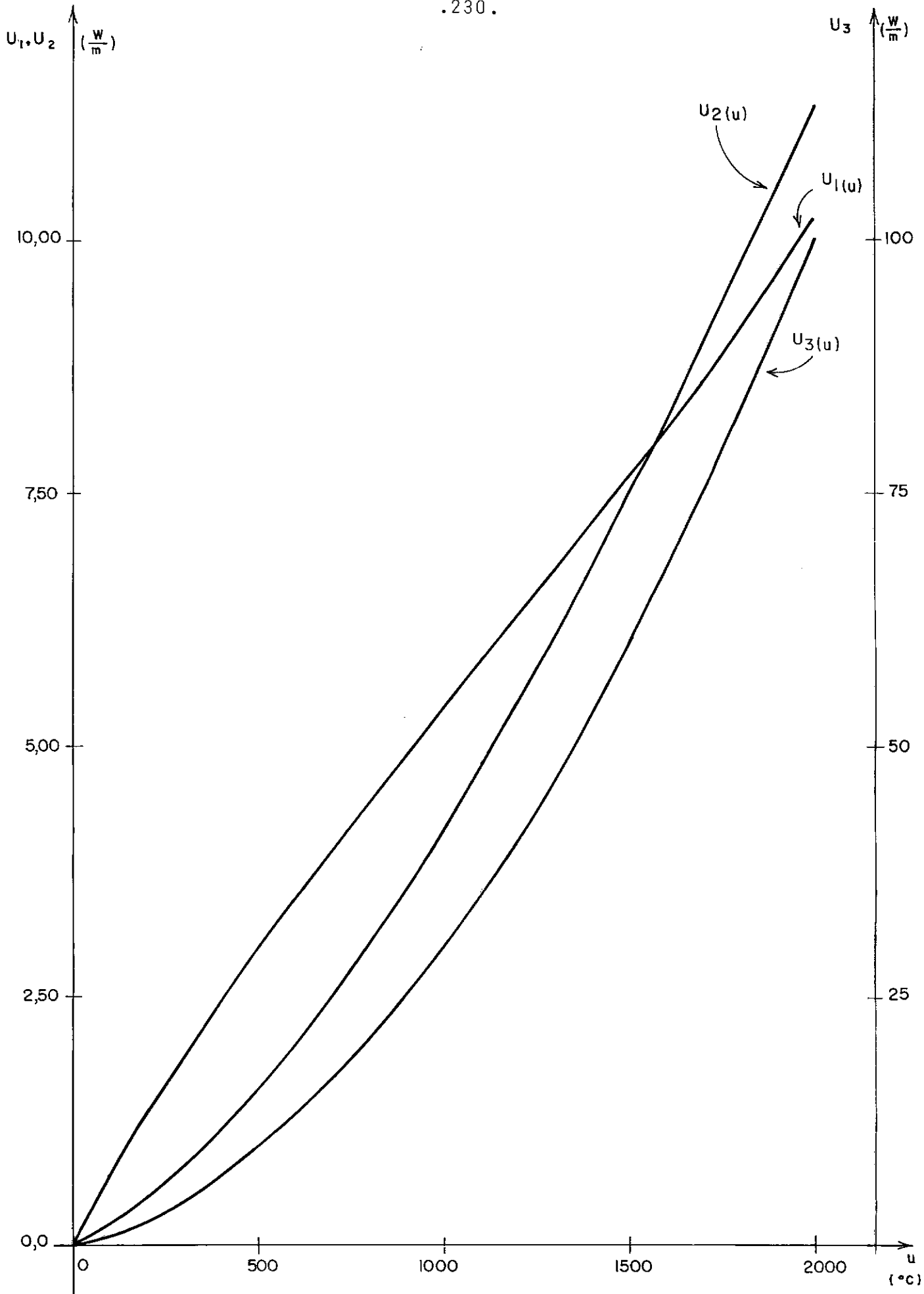


FIGURA 5.25 - Curvas da transformada de Kirchhoff em função da temperatura para os materiais das três sub-regiões.

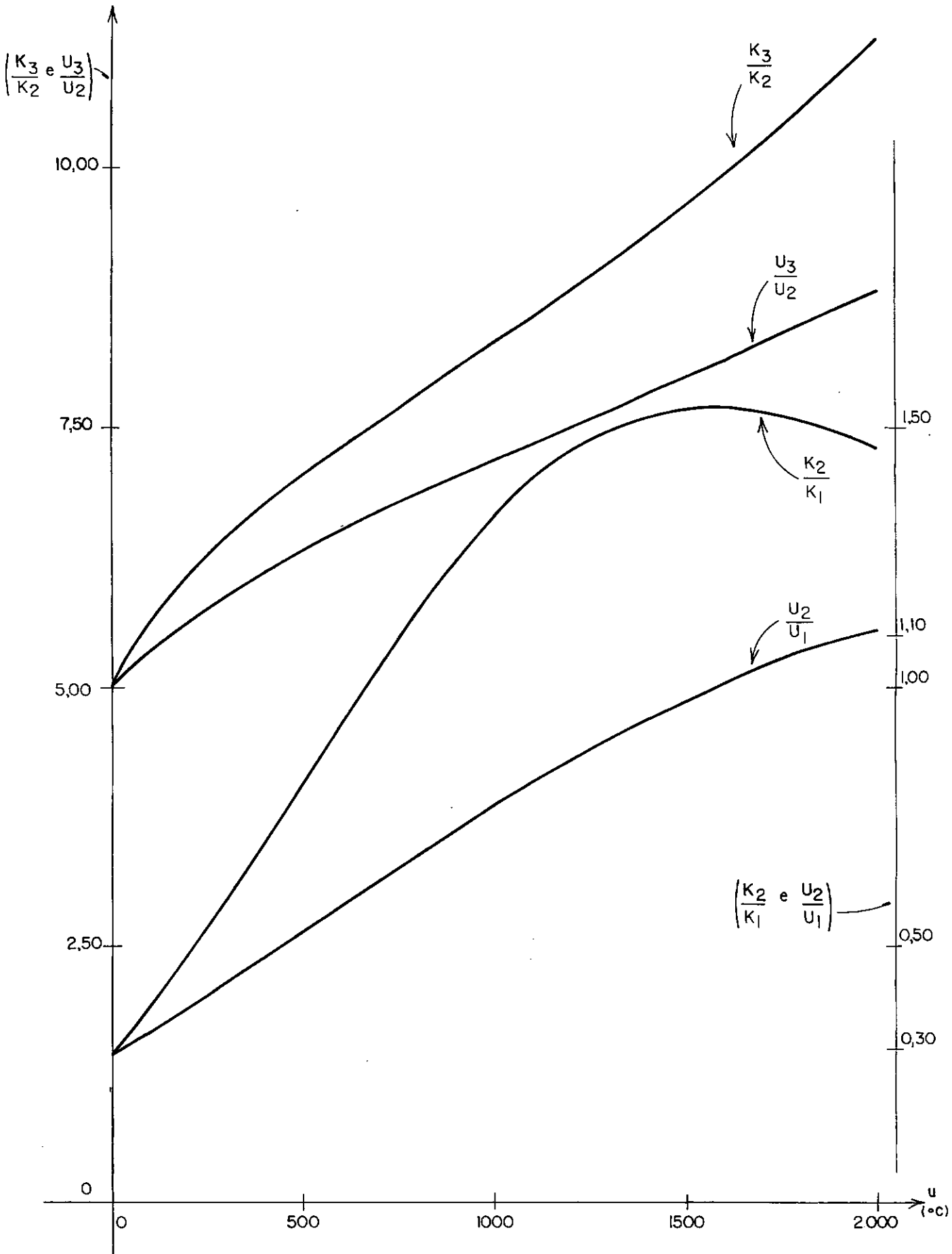


FIGURA 5.26 - Curvas das razões entre condutividades e transformadas de Kirchoff em função da temperatura das interfaces (exemplo nº 6)

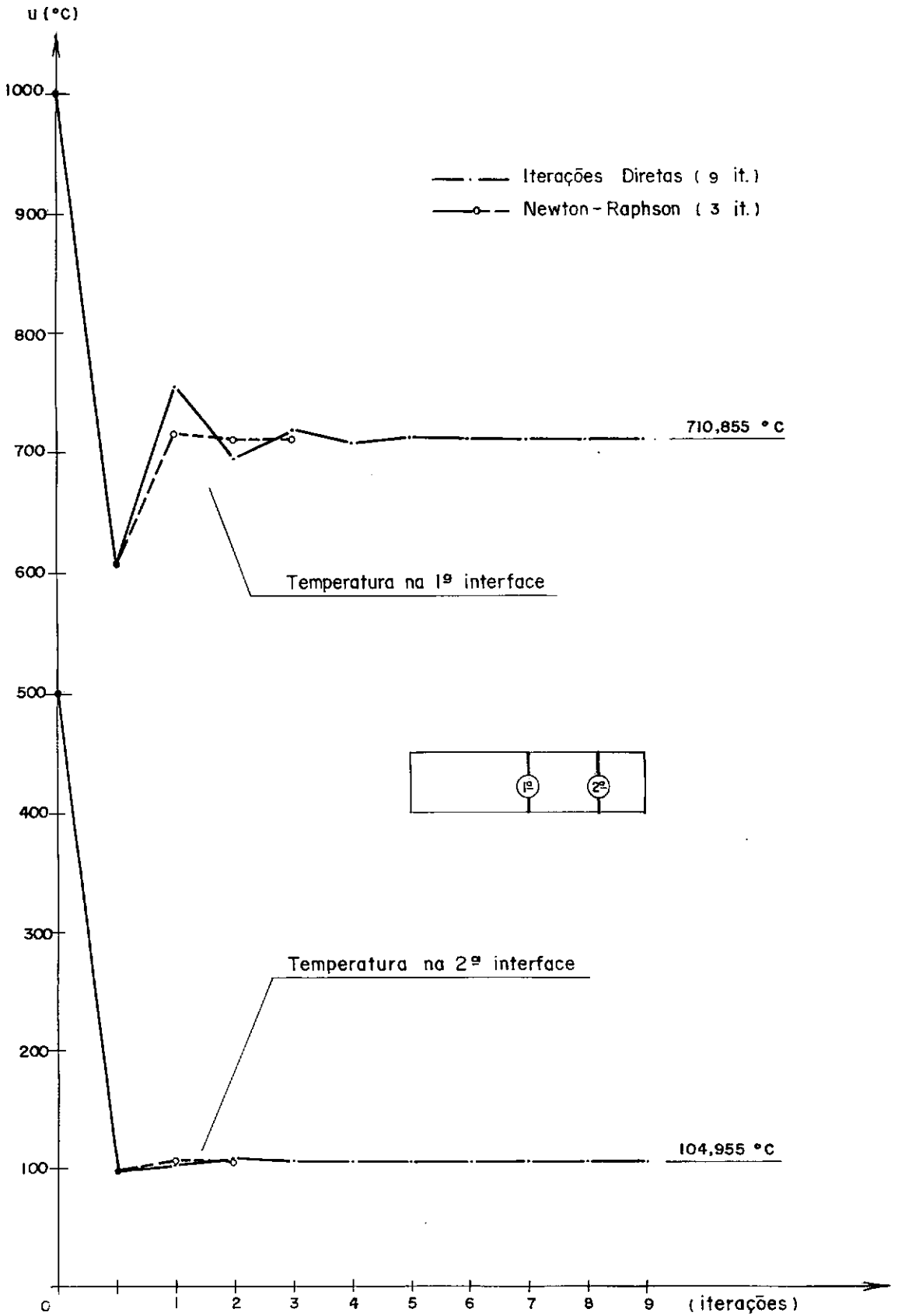


FIGURA 5.27 - Convergência da solução nas interfaces do exemplo nº 6

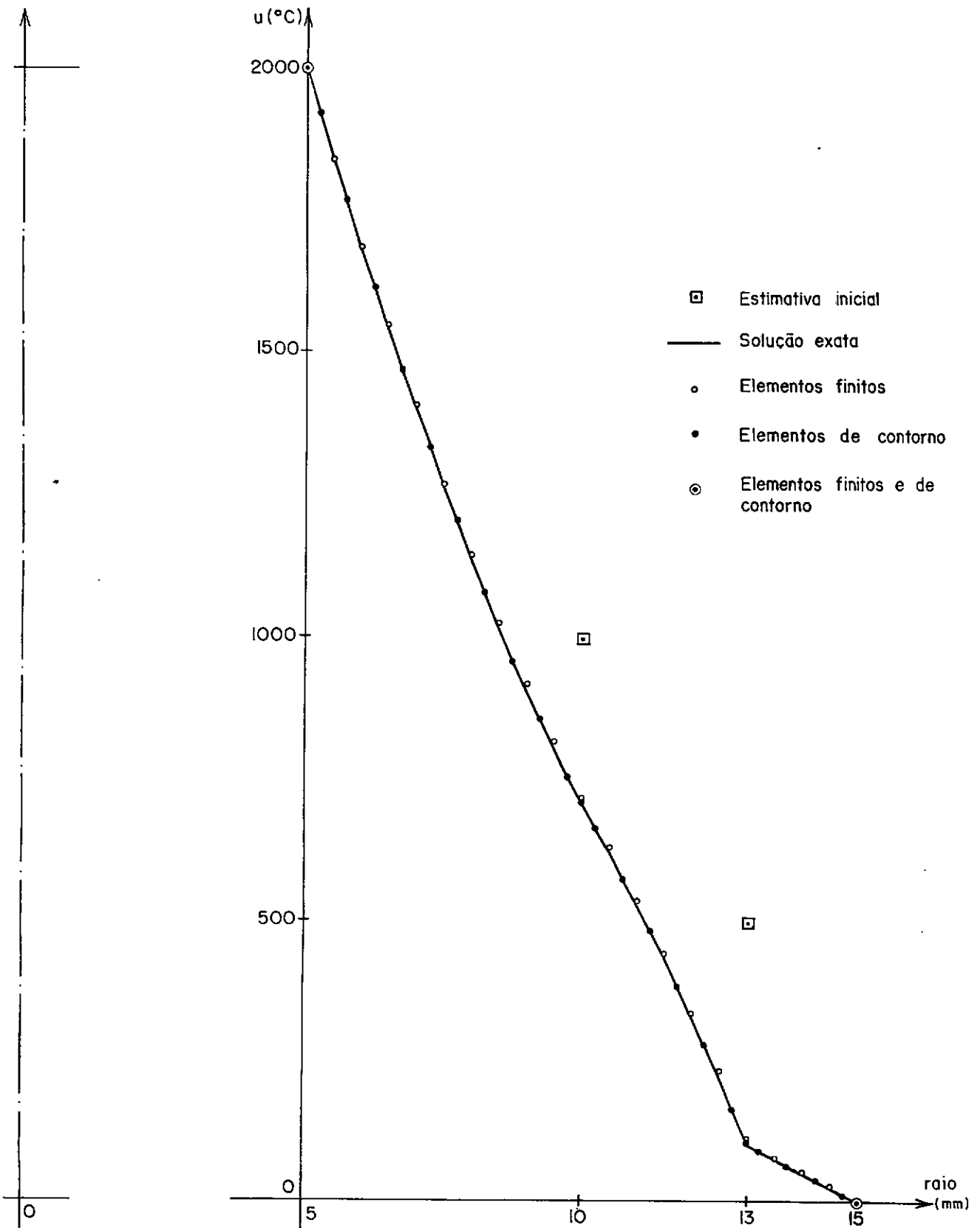


FIGURA 5.28 - Perfil radial da temperatura no cilindro composto da figura 5.20

TABELA 5.2 - Resultados de Elementos de Contorno para o Exemplo Nº 6

1ª SUB-REGIÃO		2ª SUB-REGIÃO		3ª SUB-REGIÃO	
r (mm)	u (°C)	r (mm)	u (°C)	r (mm)	u (°C)
5,0	2000	10,0	711	13,0	105
5,25	1921	10,25	668	13,25	93
5,75	1765	10,75	578	13,75	68
6,25	1616	11,25	485	14,25	42
6,75	1472	11,75	388	14,75	14
7,25	1335	12,25	284	15,0	0
7,75	1204	12,75	168		
8,25	1081	13,0	105		
8,75	967				
9,25	857				
9,75	757				
10,0	711				

TABELA 5.3 - Solução Analítica do Exemplo N° 6

1ª SUB-REGIÃO		2ª SUB-REGIÃO		3ª SUB-REGIÃO	
r (mm)	u (°C)	r (mm)	u (°C)	r (mm)	u (°C)
5,0	2000	10,0	711	13,0	105
5,25	1920	10,25	667	13,25	93
5,5	1841	10,5	622	13,5	81
5,75	1764	10,75	577	13,75	68
6,0	1689	11,0	532	14,0	55
6,25	1615	11,25	485	14,25	42
6,5	1542	11,5	437	14,5	28
6,75	1472	11,75	388	14,75	14
7,0	1402	12,0	338	15,0	0
7,25	1335	12,25	285		
7,5	1268	12,5	229		
7,75	1204	12,75	170		
8,0	1142	13,0	105		
8,25	1081				
8,5	1023				
8,75	966				
9,0	911				
9,25	858				
9,5	807				
9,75	758				
10,0	711				

VI. CONCLUSÕES

VI. CONCLUSÕES

Até pouco tempo atrás, a eficiência do método dos elementos de contorno (M.E.C.) era amplamente reconhecida, mas sua aplicação se limitava a casos lineares e de material homogêneo.

Esta situação está se modificando rapidamente nos mais diversos tipos de problemas; na análise de problemas de transferência de calor, (potencial, em geral) o uso da transformada de Kirchhoff, de sub-regiões e de esquemas iterativos eficientes, como o algoritmo de Newton-Raphson aqui desenvolvido, conferem a esta classe de problemas a mesma eficiência conhecida nos casos lineares.

O uso do método dos elementos de contorno, juntamente com a transformada de Kirchhoff, na análise de problemas de potencial não linear, nos permite obter soluções com boa precisão e sem esforço computacional elevado, principalmente ao empregarmos o método de Newton-Raphson para solução dos sistemas de equações algébricas não lineares. Esta afirmação também vale para problemas transientes, nos quais a transformada de Kirchhoff consegue transformar a equação não linear que governa o problema em uma equação de difusão linear.

A transformada de Kirchhoff permite um tratamento unificado dos problemas não lineares ao transferir as não linearidades do operador para as condições de contorno e de interface. Quando as condições de contorno são apenas de temperatura e/ou fluxo prescrito, a não linearidade se transfere apenas para as condi-

ções de interface entre sub-regiões.

Em presença de não linearidades fracas, como as que surgem devido à aplicação de transformada de Kirchhoff em problemas com condições de contorno de convecção, podemos resolver tais sistemas através de esquemas iterativos do tipo "pseudo-força".

Tal aproximação não pode mais ser feita se a solução não linear não estiver bem próxima à solução de partida; isto explica os problemas de convergência enfrentados por Bialecki e Nowak [6], Skerget e Brebbia [40] e Skerget e Alukevic [41] em problemas com condições de contorno de radiação. A incorporação dos termos não lineares à matriz e ao vetor de termos independentes do sistema garantem a convergência no segundo esquema de iterações diretas mesmo no caso de condições de contorno de radiação.

O algoritmo de Newton-Raphson, desenvolvido por Azevedo e Wrobel [3], [59], demonstrou rapidez de convergência e eficiência computacional. Isto se deve ao fato do método possuir convergência quadrática, das modificações no sistema serem seletivas e dispensarem recalcular os coeficientes de influência a cada iteração; quando aplicado ao problema transformado, as expressões obtidas são análogas às da condutividade constante em virtude da diferenciação da expressão integral da transformada de Kirchhoff.

A aproximação de curvas genéricas $K \times u$ por poligonais, aliada ao esquema de busca, se mostrou bastante eficiente do pon-

to de vista de representação da condutividade, da transformada de Kirchhoff e da sua inversa; esta padronização do mapeamento de ida e volta do espaço transformado é essencial à aplicação do método dos elementos de contorno a problemas com condutividade variável e se mostra bem prática de se construir a partir de dados experimentais.

Como vimos no capítulo III, o método dos elementos de contorno não se limita a problemas em regiões homogêneas. Quando a região é composta de sub-regiões com materiais homogêneos, pode-se formular o problema de elementos de contorno em cada sub-região homogênea e recompor o problema original por meio das condições de acoplamento nas interfaces.

Caso a condutividade varie com a temperatura em alguma(s) dessas sub-regiões, é necessário aplicar a transformada de Kirchhoff antes de fazermos a aproximação de elementos de contorno. A não linearidade do operador, que para regiões homogêneas se transferia para as condições de contorno de convecção e radiação, passa a ser transferida também para a interface, já que a condição de continuidade da temperatura causa, no espaço transformado, uma não linearidade em U .

Também para este tipo de não linearidade, o método de Newton-Raphson se mostrou mais eficiente que o algoritmo de iterações diretas.

O assunto possui uma série de caminhos a serem explorados e como sugestões para trabalhos futuros nesta mesma linha

de pesquisa destacamos os seguintes assuntos:

- análise termo-elástica e termo-visco-plástica de estruturas e componentes sujeitos a condução de calor não linear. Uma primeira fase deste trabalho consiste na análise desacoplada do campo térmico e de deformações; para os problemas em que este desacoplamento não for possível, é necessária uma segunda fase envolvendo os problemas acoplados.
- análise de transferência de calor não linear em regime transiente. Neste tipo de problema, já resolvido por outros esquemas iterativos, provavelmente o método de Newton-Raphson modificado será o mais indicado, já que a matriz do sistema não sofrerá, em geral, grandes mudanças entre intervalos de tempo consecutivos.
- análise da não linearidade que surge no "gap" entre elementos combustíveis de reatores nucleares e seus "cannings". Esta análise, realizada por Donea e Giuliani por elementos finitos, é análoga à efetuada no último exemplo do nosso trabalho e é fundamental para a determinação dos campos térmicos (conseqüentemente para a determinação das solicitações mecânicas) neste tipo de componente.
- análise de não linearidades geométricas.

Para finalizar, cabe lembrar que qualquer método de solução de problemas físicos, seja ele analítico ou numérico aproximado, só fornece resultados realísticos se os parâmetros de ma

terial que descrevem os fenômenos básicos são disponíveis. Isto exige, além do desenvolvimento de técnicas de análise, um esforço significativo na direção do desenvolvimento de leis constitutivas adequadas e na determinação realística de coeficientes e propriedades de materiais.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ADAMS, J.A.; ROGERS, D.F., Computer Aided Heat Transfer Analysis, Mc Graw-Hill Kogakusha - Tokyo - 1973.
- [2] AKKURATOV, Y.N.; MIKHAILOV, V.N., The Method of Boundary Integral Equations for Solving Nonlinear Heat Transmission Problems. U.S.S.R. Comp. Meths. Math. Phys. Vol. 20 No. 3, pp. 117-125, 1980.
- [3] AZEVEDO, J.P.S.; WROBEL, L.C., Transferência de Calor com Não Linearidades Usando o Método dos Elementos de Contorno - Anais do 3º Simpósio Brasileiro sobre Tubulações e Vasos de Pressão, Vol. 2, pp. 683-700, Salvador(Bahia), 1984.
- [4] BATHE, K.J.; KHOSHGOFTAAR, M.R., Finite Element Formulation and Solution of Nonlinear Heat Transfer, Nucl. Eng. Des., 51, 389, 1979.
- [5] BATHE, K.J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, New Jersey - 1982.
- [6] BIALECKI, R.; NOWAK, A.J., Boundary Value Problems in Heat Conduction with Nonlinear Material and Nonlinear Boundary Conditions, Applied Math. Modelling, 5(6), 417-421, 1981.
- [7] BREBBIA, C.A.; FERRANTE, A.J. (Eds), The Finite Element Technique, Editora da URS, Porto Alegre, 1975.

- [8] BREBBIA, C.A.; DOMINGUEZ, J., Boundary Element Methods for Potential Problems, Applied Math. Modelling, Vol. 1, No. 7, pp.372-378, 1977.
- [9] BREBBIA, C.A., The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, London, 1978.
- [10] BREBBIA, C.A.; NAKAGUMA, R., Analysis of an Offshore Gravity Platform Using Boundary Elements - International Symposium on Offshore Structures, Vol. II - Rio de Janeiro, 1979.
- [11] BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L.C., Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [12] CARSLAW, H.S.; JAEGER, J.C., Conduction of Heat in Solids, 2nd edn, Clarendon Press, Oxford, 1959.
- [13] CHANG, Ooi Voon, Boundary Elements Applied to Seepage Problems in Zoned Anisotropic Soils, M.Sc. Thesis, University of Southampton - England, 1979.
- [14] COURANT, R., VORLESUNGEN ÜBER DIFFERENTIAL-UND INTEGRALRECHNUNG-Erster Band - Functionen einer Veränderlichen-Zweite Auflage-Springer Verlag - Berlin - 1930.

- [15] COURANT, R., Vorlesungen über Differential - u. Integralrechnung, Zweiter Band (Funktionen Mehrerer Veränderlicher)-Zweite Auflage-Springer Verlag, Berlin, 1931.
- [16] DAVID, Domingos de Faria Brito, O Método Quasi-Finito e o Método dos Elementos Finitos para Campos Térmicos - Tese de Mestrado - COPPE/UFRJ - Rio de Janeiro, 1978.
- [17] DIRAC, P.A.M., Les Principes de la Mécanique Quantique - Les Presses Univ. de France - Paris - 1931.
- [18] DONEA, J.; GIULIANI, S., Finite Element Analysis of Steady-State Nonlinear Heat Transfer Problems, Nuclear Engng. Design, 30(2), 205-213, 1974.
- [19] DUSINBERRE, G.M., Heat Transfer Calculations by Finite Differences, International Textbook Co., Scranton, 1961.
- [20] FEIJÓO, Raul A., Método das Funções de Interpolação Seqüenciais, Tese de Doutorado - COPPE/UFRJ - Rio de Janeiro - 1975.
- [21] FREDHOLM, I., Sur une Classe d'equations Fonctionelles, Acta Math. 27, 365-390, 1903.
- [22] FU, J.W.; CHOW, J.S.K., Cathodic Protection Designs Using an Integral Equation Numerical Method - Materials and Performance Vol. 21, 10-pp. 9-12 - 1982.

- [23] HALBRITTER, A.L.; TELLES, J.C.F.; MANSUR, W.J., Aplica-
ção dos Elementos de Contorno a Problemas de Campo,
Anais da Conferência sobre Análise, Projeto e Construção
de Estruturas de Centrais Nucleares, pp. 707-724, Porto
Alegre, 1978.
- [24] HOLMAN, J.P., Heat Transfer, 4th ed., Mc Graw-Hill
Kogakusha, Tokyo, 1976.
- [25] JASWON, M.A., Integral Equation Methods in Potential
Theory I, Proc. Royal Society A, 275, 23-32, 1963.
- [26] JASWON, M.A.; SYMM, G.T., Integral Equation Methods in
Potential Theory and Elastostatics, Academic Press,
London, 1977.
- [27] JAWORSKI, A.R., Boundary Elements for Heat Conduction in
Composite Media - Applied Math. Modelling, Vol. 5,
pp. 45-48, 1981.
- [28] KANTOROWICH, L.V; KRYLOV, V.I., Approximate Methods of
Higher Analysis, Noordhoff, Groningen, 1958.
- [29] KELLOGG, O.D., Foundations of Potential Theory, Springer,
Berlin, 1929.
- [30] KHADER, M.S.; HANNA, M.C., An Iterative Boundary Integral
Numerical Solution for General Steady Heat Conduction
Problems, Trans. ASME, J. Heat Transfer, 103(1), 26-31,
1981.

- [31] LEITE, Rogério Cezar de Cerqueira; CASTRO, Antônio Rubens Britto de, Física do Estado Sólido, Editora Edgard Blücher, São Paulo - 1978.
- [32] MERIAN, J.L., Dinâmica, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1976.
- [33] ONISHI, K.; KUROKI, T., Boundary Element Method in Singular and Nonlinear Heat Transfer, Proc. Fourth Int. Seminar on Boundary Element Methods in Engng., pp. 141-155, Springer Verlag, Berlin, 1982.
- [34] ONISHI, K.; KUROKI, T., Time-Dependent Nonlinear Potential Problems, Ch. 4 in Topics in Boundary Element Research, Vol. 1, Ed. C.A. Brebbia, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [35] OWEN, D.R.J.; HINTON, E., A Simple Guide to Finite Elements, Pineridge Press, Swansea, 1980.
- [36] OWEN, D.R.J.; HINTON, E., Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice - Pineridge Press- Swansea, 1980.
- [37] SEARS, F.W.; ZEMANSKY, M.W., Física, Vol. 2, Livros Técnicos e Científicos - Rio de Janeiro - 1977.
- [38] SEELY, F.B., Advanced Mechanics of Materials, John Wiley and Sons, 9th printing, New York, 1948.

- [39] SLATER, J.C.; FRANK, N.H., Electromagnetism, Mc Graw-Hill, New York, 1947.
- [40] SKERGET, P.; BREBBIA, C.A., Non-linear Potential Problems, Ch. 1 in Progress in Boundary Element Methods, Vol. 2, Ed. C.A. Brebbia, Pentech Press, London, 1982.
- [41] SKERGET, P.; ALUJEVIC, A., Boundary Element Method in Nonlinear Transient Heat Transfer of Reactor Solids with Convection and Radiation on Surfaces. Nuclear Engng. Design, 76(1), 47-54, 1983.
- [42] SPARROW, E.M.; KOOPMAN, R.N., Heat Transfer in Reactor Components Having Temperature Dependent Thermal Conductivity, Nuclear Sci. Eng., 42, 406, 1970.
- [43] STERNBERG, W.J.; SMITH, T.L., The Theory of Potential and Spherical Harmonics, University of Toronto Press, Toronto, 1944.
- [44] STRELKOV, S.P., Mecánica. Editorial Mir, Moscou, 1978.
- [45] SYMM, G.T., Integral Equation Methods in Potential Theory II, Proc. Royal Society A, 275, 33-46, 1963.
- [46] TELLES, J.C.F., The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems. Lecture Notes in Engineering I - Springer-Verlag - Berlin - 1983.

- [47] TELLES, J.C.F.; MANSUR, W.J.; WROBEL, L.C., On Boundary Elements for External Potential Problems - Mechanics Research Communications, Vol. 11(6) 373-377, 1984.
- [48] TELLES, J.C.F.; MANSUR, W.J.; WROBEL, L.C., Manual de Teoria do Sistema PROCAT, Relatório COPPETEC ET-15206 - 1984.
- [49] TELLES, J.C.F.; WROBEL, L.C.; MANSUR, W.J.; AZEVEDO, J. P.S., Boundary Elements for Cathodic Protection Problems, Proceedings of the 7th International Conference on Boundary Element Methods in Engineering - Como (Italia), 1985.
- [50] VON HIPPEL, A., Dielectrics and Waves, John Wiley and Sons - New York, 1954.
- [51] WILLECKE, Curt Guilherme, Transmissão de Calor por Condução - Regime permanente - Fundamentos, Serviço de Publicações - Escola de Engenharia da U.F.R.J. - Rio de Janeiro - 1968.
- [52] WILSON, E.L.; BATHE, K.J.; PETERSON, F.E., Finite Element Analysis of Linear and Nonlinear Heat Transfer, Nuclear Eng. Design, 29, 110 - 1974.

- [53] WROBEL, L.C.; BREBBIA, C.A., The Boundary Element Method for Steady State and Transient Heat Conduction, Proc. First Int. Conf. on Numerical Methods in Thermal Problems, Pineridge Press, Swansea, 1979.
- [54] WROBEL, L.C. ;BREBBIA, C.A., Boundary Elements in Thermal Problems, Chapter 5 in Numerical Methods in Heat Transfer, Ed.R.W. Lewis, K. Morgan and O.C. Zienkiewicz, Wiley, Chichester, 1981.
- [55] WROBEL, L.C. ;BREBBIA, C.A., A Formulation of the Boundary Element Method for Axisymmetric Transient Heat Conduction, Int. J. Heat Mass Transfer, 24(5), 843-850, 1981.
- [56] WROBEL, L.C.; BREBBIA, C.A., Time Dependent Potential Problems, Ch. 6 in Progress in Boundary Element Methods, Vol.1, Ed. C.A. Brebbia, Pentech Press, London, 1981.
- [57] WROBEL, L.C., Potential and Viscous Flow Problems Using the Boundary Element Method, Ph.D. Thesis, Southampton University, 1981.
- [58] WROBEL, L.C.; MANSUR, W.J.; TELLES, J.C.F.; AZEVEDO, J. P.S., Elementos de Contorno Aplicados à Proteção Catódica de Oleodutos e Estruturas Offshore, 5º Congresso Latino Americano de Métodos Computacionais para Engenharia, Salvador, 1984.

- [59] WROBEL, L.C.; AZEVEDO, J.P.S., A Boundary Element Analysis of Non-linear Heat Conduction, Proceedings of the 4th International Conference on Numerical Methods in Thermal Problems, Swansea, July 1985.
- [60] ZIENKIEWICZ, O.C., The Finite Element Method, Mc Graw-Hill, London, 1977.
- [61] ZIENKIEWICZ, O.C.; LYNESS, J.F.; OWEN, D.R.J., The Finite Element Analysis of Engineering Systems Governed by a Non-Linear Quasi-Harmonic Equation, Computers and Structures, Vol. 5, No 1, pp. 65-79, 1975.