COPPE
Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia
UFRJ

ESTRATÉGIAS EXPLÍCITAS DE INTEGRAÇÃO TEMPORAL CONSIDERANDO TÉCNICAS OTIMIZADAS DE SUBCICLAGEM PARA ANÁLISE DE PROPAGAÇÃO DE ONDAS

Lucas Ruffo Pinto

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientadores: Webe João Mansur
Delfim Soares Jr

Rio de Janeiro
Abril de 2025

ESTRATÉGIAS EXPLÍCITAS DE INTEGRAÇÃO TEMPORAL CONSIDERANDO TÉCNICAS OTIMIZADAS DE SUBCICLAGEM PARA ANÁLISE DE PROPAGAÇÃO DE ONDAS

Lucas Ruffo Pinto

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Orientadores: Webe João Mansur
Delfim Soares Jr

Aprovada por: Prof. Webe João Mansur
Prof. Delfim Soares Júnior
Prof. Breno Pinheiro Jacob
Prof. Felipe dos Santos Loureiro
Prof. Marco Felipe Fialho
Dr. André Bulcão

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
ABRIL DE 2025

Pinto, Lucas Ruffo

Estratégias explícitas de integração temporal considerando técnicas otimizadas de subciclagem para análise de propagação de ondas/Pinto, Lucas Ruffo. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2025.

XX, 145 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Webe João Mansur

Delfim Soares Jr

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Civil, 2025.

Referências Bibliográficas: p. 140 – 145.

1. Marcha do tempo. 2. Análise explícita. 3. subciclagem. I. João Mansur, Webe *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

O certo nem sempre é o mais óbvio.

Agradecimentos

À minha esposa Isabelle pelo carinho e amor.

Aos meus pais pelo apoio incondicional.

Aos orientadores Delfim Soares Jr. e Webe João Mansur, pela paciência, ensinamentos e amizade.

À COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, e a Universidade Federal de Juiz de Fora, pelo acolhimento.

Ao Programa de Recursos Humanos da Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis pelo suporte financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ESTRATÉGIAS EXPLÍCITAS DE INTEGRAÇÃO TEMPORAL CONSIDERANDO TÉCNICAS OTIMIZADAS DE SUBCICLAGEM PARA ANÁLISE DE PROPAGAÇÃO DE ONDAS

Lucas Ruffo Pinto

Abril/2025

Orientadores: Webe João Mansur
Delfim Soares Jr

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho propõe uma estrutura avançada de integração temporal explícita, baseada em técnicas adaptativas e subciclagem otimizada, voltada à análise de problemas hiperbólicos, como a propagação de ondas acústicas e elásticas em domínios geofísicos. A abordagem concentra-se na adaptação local dos valores de passo de tempo e dos parâmetros de integração temporal, ajustando-os às propriedades espaciais e temporais do modelo discretizado. Nesse contexto, emprega-se um algoritmo de otimização para identificar a distribuição mais eficiente de múltiplos valores de passo de tempo ao longo do domínio, reduzindo significativamente os custos computacionais e aumentando a precisão das soluções. Três formuladores adaptativos são considerados: uma abordagem com um parâmetro temporal α adaptativo; uma segunda, com estabilidade ampliada, baseada em dois parâmetros constantes μ_1 e μ_2, mantidos fixos ao longo de toda a análise; e uma formulação híbrida, que combina elevada precisão com amortecimento algorítmico ajustável, utilizando dois parâmetros temporais α_1' e α_2'. A combinação dessas formulações com a subciclagem otimizada permite que o elemento mais crítico do modelo não opere necessariamente em seu passo de tempo mínimo, possibilitando uma melhor distribuição dos elementos entre os subdomínios. Com isso, reduz-se a imposição de restrições globais decorrentes de regiões rígidas ou altamente refinadas. A metodologia é validada por meio de aplicações numéricas em modelos teóricos e geofísicos, demonstrando sua robustez, eficiência e aplicabilidade a problemas de grande escala — especialmente na indústria de petróleo e gás, onde domínios fortemente heterogêneos exigem estratégias numéricas adaptativas e de alto desempenho.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

EXPLICIT TIME-INTEGRATION STRATEGIES WITH OPTIMIZED SUB-CYCLING TECHNIQUES FOR WAVE PROPAGATION ANALYSIS

Lucas Ruffo Pinto

April/2025

Advisors: Webe João Mansur
Delfim Soares Jr

Department: Civil Engineering

This work proposes an advanced framework for explicit time integration, based on adaptive techniques and optimized sub-cycling, aimed at the analysis of hyperbolic problems such as the propagation of acoustic and elastic waves in geophysical domains. The approach focuses on the local adaptation of time-step values and time integration parameters, adjusted according to the spatial and temporal properties of the discretized model. In this context, an optimization algorithm is employed to identify the most efficient distribution of multiple time-step values across the domain, significantly reducing computational costs while increasing solution accuracy. Three adaptive formulations are considered: one approach based on an adaptive temporal parameter α; a second, with enhanced stability, based on two constant parameters μ_1 and μ_2 fixed throughout the entire analysis; and a hybrid formulation, which combines high accuracy with adjustable algorithmic damping, using two temporal parameters α'_1 and α'_2. The combination of these formulations with the optimized sub-cycling strategy allows the most critical element of the model to operate without necessarily being constrained to its minimum time-step, enabling a more efficient distribution of elements across subdomains. As a result, the need for global restrictions imposed by rigid or highly refined regions is significantly reduced. The proposed methodology is validated through numerical applications on both theoretical and geophysical models, demonstrating its robustness, efficiency, and suitability for large-scale problems — especially in the oil and gas industry, where strongly heterogeneous domains require adaptive and high-performance numerical strategies.

Sumário

Lista de Figuras **x**

Lista de Tabelas **xiv**

Lista de Símbolos **xv**

Lista de Abreviaturas **xix**

1 Introdução **1**

1.1 Estudo da Literatura 4

1.2 Originalidade e relevância 7

1.3 Organização da Tese 8

2 Formulação dos modelos **9**

2.1 Modelo acústico 9

2.1.1 Equações Governantes 11

2.1.2 Condições iniciais 21

2.1.3 Condições de contorno 21

2.1.4 PML acústico 23

2.2 Modelo Elástico 30

2.2.1 Equações Governantes 32

2.2.2 Condições iniciais 39

2.2.3 Condições de contorno 39

2.2.4 PML elástico 40

3 Formulação numérica **44**

3.1 Discretização Espacial 44

3.1.1 Método dos Elementos Finitos 45

3.1.2 Equações para o modelo acústico 46

3.1.3 Equações numérica PML para o modelo acústico 50

3.1.4 Equações para o modelo elástico 53

3.1.5 Equações numérica PML para o modelo elástico 56

3.2 Discretização Temporal 60
3.2.1 Método das Diferenças Centrais 62
3.2.2 $\alpha-$Generalizado Explícito 64
3.2.3 Noh-Bathe Explícito 70
3.2.4 Método $\alpha-$adaptativo 75
3.2.5 Método $\mu-$adaptativo 79
3.2.6 Método híbrido adaptativo 84

4 Subciclagem **89**
4.1 Subciclagem ótima 92

5 Exemplos numéricos **95**
5.1 Exemplos analíticos 96
5.1.1 Membrana Acústica 96
5.1.2 Membrana infinita 106
5.1.3 Barra heterogênea 116
5.2 Exemplos sintéticos 124
5.2.1 Geofísicos acústicos 126
5.2.2 Geofísicos elásticos 131

6 Conclusões **137**

Referências Bibliográficas **140**

Lista de Figuras

2.1 Ilustração gráfica do teorema de Leibniz. 12
2.2 Representação geométrica de um volume de controle. 13
2.3 Balanço das forças que atuam na superfície do elemento, na direção x_1. 16
2.4 Esquematização de um domínio PML:(a) Um PMM adjacente a um domínio "limitado" (truncado) atenuando uma onda plana de saída; (b) um PML com uma borda fixa refletindo a onda de volta para o domínio limitado. 25
2.5 Diagrama de carga-alongamento da barra cilíndrica 32

3.1 Raio espectral em função de ρ_b para o α-*GE.*[1] 67
3.2 Razão de amortecimento numérica do método α-GE.[1] 68
3.3 Erro de alongamento e encurtamento do período relativo do método α-GE.[1] 68
3.4 Dependência do raio espectral para o método NB.[2] 72
3.5 Porcentagem de alongamentos de período e decaimento de amplitude para o método NB.[2] 73
3.6 Esquema do cálculo do parâmetro oscilatório. 76
3.7 Raio espectral considerando $\Omega_e^{max} = 1.0, 1.1, 1, 2..., 2.0$: análises (a) sem e (b) com amortecimento físico $\xi_e = 0.1$.[3] 77
3.8 Erros na analise considerando $\Omega_e^{max} = 1.0, 1.1, 1, 2..., 2.0$: (a) alongamento de período (b) decaimento de amplitude.[3] 77
3.9 Raios espectrais para $\Omega_b = 1.5, 1.6, \ldots, 3.4$ (do cinza mais claro ao mais escuro): (a) $\xi = 0.0$; (b) $\xi = 0.1$. Os resultados para o MDC são representados por linhas pontilhadas pretas, para referência. [4] . 82
3.10 Resultados de erro para $\Omega_b = 1.5, 1.6, \ldots, 3.4$ (do cinza mais claro ao mais escuro): (a) erros de alongamento de período; (b) erros de decaimento de amplitude. Os resultados para o MDC são representados por linhas pontilhadas pretas, para referência. [4] 82

3.11 Raios espectrais para $\Omega_e^{\max} = 1.0, 1.1, \ldots, 4.0$ (da cor cinza mais clara para a mais escura): (a) formulação não dissipativa; (b) formulação dissipativa. Resultados para o MDC são representados como linhas pontilhadas pretas, para referência.[5] 87
3.12 Erros de alongamento de período para $\Omega_e^{\max} = 1.0, 1.1, \ldots, 4.0$ (da cor cinza mais clara para a mais escura): (a) formulação não dissipativa; (b) formulação dissipativa.[5] 88
3.13 Erros de decaimento de amplitude para $\Omega_e^{\max} = 1.0, 1.1, \ldots, 4.0$ (da cor cinza mais clara para a mais escura): (a) formulação não dissipativa; (b) formulação dissipativa.[5] 88

4.1 Esquema ilustrativo representando o procedimento de interpolação. [4] 91

5.1 Exemplo 1.(a) Esboço do problema acústico (b) Malha do modelo (devido à simetria do modelo, apenas a metade superior do domínio é discretizada). 97
5.2 Valores computados do Exemplo 1: (a) Δt_e de cada elemento. (b) subdomínios de tipo de Ω para *hib-adap*; e (c) subdomínios de tipo de Ω para *hib-adap/sub-ótima*. (branco tipo-1; verde tipo-2 e vermelho tipo-3) 97
5.3 Subdomínios Δt do Exemplo 1:(a) α-*adap/sub*; (b) α-*adap/sub-ótima*; (c) μ-*adap/sub*; (d) μ-*adap/sub-ótima* e (e) *hib-adap/sub-ótima* 98
5.4 Parâmetros de integração temporal dos métodos para o Exemplo 1: (a) α^{act} para o α-*adap*; e (b) μ_1 e (c) μ_2 para o μ-*adap*; considerando as configurações: (1) sem subciclagem, (2) subciclagem padrão; e (3) subciclagem otimizada. 101
5.5 Parâmetros de integração temporal $\alpha_1^{'}$ e $\alpha_2^{'}$ dos métodos para o Exemplo 1: (a) *hib-adap*; e (b) *hib-adap/sub-ótima*; para condição sem amortecimento (1) $\bar{\alpha}_1^e$; e (2) $\bar{\alpha}_2^e$; e com amortecimento (3) $\tilde{\alpha}_1^e$; e (4) $\tilde{\alpha}_2^e$. (Foi desconsiderado a parcela Δt^2 para melhor escala de representação.) 102
5.6 Ilustração da ativação dos parâmetros adaptativos durante a propagação da onda: (a)parâmetros α ativado; e (b) campo acústico. 103
5.7 Resultados computados no tempo para todas as metodologias, considerando um ponto a $0.5m$ da borda (meio do modelo). 104
5.8 Campo acústico para tempo de 0.25s: (a) *MDC*; (b) α-*GE*; (c) *NB*; (d) α-*adap/sub-ótima*; (e) μ-*adap/sub-ótima*; (f) *hib-adap/sub-ótima* e (g) Analítica. 105
5.9 Malhas geradas para o Exemplo 2: (a) 50k elementos; (b) 100k elementos; (c) 150k elementos; e (d) 200k elementos. 106

5.10 Valores computados do Exemplo 2, modelo 4: (a) Δt_e de cada elemento. (b) subdomínios de tipo de Ω para *hib-adap*; e (c) subdomínios de tipo de Ω para *hib-adap/sub-ótima*. (branco tipo-1; verde tipo-2 e vermelho tipo-3) 106
5.11 Subdomínios Δt do Exemplo 2, modelo 4:(a) α-*adap/sub*; (b) α-*adap/sub-ótima*; (c) μ-*adap/sub*; (d) μ-*adap/sub-ótima* e (e) *hib-adap/sub-ótima* 108
5.12 Parâmetros de integração temporal dos métodos para o Exemplo 2, modelo 4: (a) α^{act} para o α-*adap*; e (b) μ_1 e (c) μ_2 para o μ-*adap*; considerando as configurações: (1) sem subciclagem, (2) subciclagem padrão; e (3) subciclagem otimizada. 110
5.13 Parâmetros de integração temporal $\alpha_1^{'}$ e $\alpha_2^{'}$ dos métodos para o Exemplo 2: (a) *hib-adap*; e (b) *hib-adap/sub-ótima*; para condição sem amortecimento (1) $\bar{\alpha}_1^e$; e (2) $\bar{\alpha}_2^e$; e com amortecimento (3) $\tilde{\alpha}_1^e$; e (4) $\tilde{\alpha}_2^e$. (Foi desconsiderado a parcela Δt^2 para melhor escala de representação.) 111
5.14 Deslocamentos na direção x, para tempo de 5s do Exemplo 2, modelo 4: (a) *MDC*; (b) α-*GE*; (c) *NB*; (d) α-*adap/sub-ótima*; (e) μ-*adap/sub-ótima*; (f) *hib-adap/sub-ótima* e (g) Analítica. 111
5.15 Gráficos de convergência para o Exemplo 2: (a) erro; e (b) tempo de CPU. 113
5.16 Resultados computados no tempo para todas as metodologias, considerando um ponto a $1m$ da aplicação da carga, modelo 1. 114
5.17 Resultados computados no tempo para todas as metodologias, considerando um ponto a $1m$ da aplicação da carga, modelo 2. 114
5.18 Resultados computados no tempo para todas as metodologias, considerando um ponto a $1m$ da aplicação da carga, modelo 3. 115
5.19 Resultados computados no tempo para todas as metodologias, considerando um ponto a $1m$ da aplicação da carga, modelo 4. 115
5.20 Exemplo 3. (a) Esboço da barra heterogênea (b) Malha do modelo. . 116
5.21 Valores computados de subdomínios de tipo de Ω para o Exemplo 3: (a) *hib-adap*; e (b) *hib-adap/sub-ótima*, para o (1) modelo 1; (2) modelo 2; (3) modelo 3; e (4) modelo 4. (branco tipo-1; verde tipo-2 e vermelho tipo-3) 116
5.22 Subdomínios Δt do Exemplo 3: (a) α-*adap/sub*; e (b) α-*adap/sub-ótima*, para o (1) modelo 1; (2) modelo 2; (3) modelo 3; e (4) modelo 4. 118

5.23 Subdomínios Δt do Exemplo 3: (a) *μ-adap/sub*; e (b) *μ-adap/sub-ótima*, para o (1) modelo 1; (2) modelo 2; (3) modelo 3; e (4) modelo 4. 118
5.24 Subdomínios Δt do Exemplo 3 para *hib-adap/sub-ótima*, para o (a) modelo 1; (b) modelo 2; (c) modelo 3; e (d) modelo 4. 120
5.25 Resultados computados no tempo para todas as metodologias, considerando um ponto no meio da barra, Exemplo 3, modelo 1. 120
5.26 Resultados computados no tempo para todas as metodologias, considerando um ponto no meio da barra, Exemplo 3, modelo 2. 122
5.27 Resultados computados no tempo para todas as metodologias, considerando um ponto no meio da barra, Exemplo 3, modelo 4. 122
5.28 Resultados computados no tempo para todas as metodologias, considerando um ponto no meio da barra, Exemplo 3, modelo 4. 123
5.29 Modelos acústicos sintéticos do Exemplo 4: (a) Marmousi (b) Buzios. 126
5.30 Valores computados do Exemplo 4, para (1) modelo 1 e (2) modelo 2: (a) Δt_e de cada elemento. (b) subdomínios de tipo de Ω para *hib-adap*; e (c) subdomínios de tipo de Ω para *hib-adap/sub-ótima*. (branco tipo-1; verde tipo-2 e vermelho tipo-3) 127
5.31 Subdomínios de Δt do Exemplo 4, para (1) modelo 1 e (2) modelo 2: (a) *α-adap/sub-ótima*; (b) *μ-adap/sub-ótima*; e (c) *hib-adap/sub-ótima* 128
5.32 Campo acústico p computado ao longo do modelo geofísico acústico 1 no tempo (1) 1s; (2) 2s e (3) 3s: (a) *α-GE*; e (b) *hib-adap/sub-ótima* 129
5.33 Campo acústico p computado ao longo do modelo geofísico acústico 2 no tempo (1) 2s; (2) 3s e (3) 4s: (a) *α-GE*; e (b) *hib-adap/sub-ótima* 130
5.34 Modelos elásticos sintéticos do Exemplo 5: (a) 2DEW (b) BP 2004. . 131
5.35 Valores computados do Exemplo 5, para (1) modelo 1 e (2) modelo 2: (a) Δt_e de cada elemento. (b) subdomínios de tipo de Ω para *hib-adap*; e (c) subdomínios de tipo de Ω para *hib-adap/sub-ótima*. (branco tipo-1; verde tipo-2 e vermelho tipo-3) 132
5.36 Subdomínios de Δt do Exemplo 5, para (1) modelo 1 e (2) modelo 2: (a) *α-adap/sub-ótima*; (b) *μ-adap/sub-ótima*; e (c) *hib-adap/sub-ótima* 133
5.37 Módulo dos deslocamentos computado ao longo do modelo geofísico elástico 1 no tempo: (1) 2s; (2) 4s e (3) 6s: (a) *α-GE*; e (b) *hib-adap/sub-ótima* 134
5.38 Módulo dos deslocamentos computado ao longo do modelo geofísico elástico 2 no tempo: (1) 10s; (2) 20s e (3) 25s: (a) *α-GE*; e (b) *hib-adap/sub-ótima* 134

Lista de Tabelas

3.1 Parâmetros dissipativos $\tilde{\alpha}_1^e$ e $\tilde{\alpha}_2^e$. 86
3.2 Parâmetros não dissipativos $\bar{\alpha}_1$ e $\bar{\alpha}_2$. 86

5.1 Subdomínios de Δt para o Exemplo 1. 99
5.2 Subdomínios de tipo de $\Omega_e^{\max}$ para o Exemplo 1. 100
5.3 Performance das metodologias para o Exemplo 1. 103
5.4 Subdomínios de tipo de $\Omega_e^{\max}$ para o Exemplo 2. 107
5.5 Subdomínios de Δt para o Exemplo 2. 109
5.6 Performance das metodologias para o Exemplo 2. 112
5.7 Subdomínios de tipo de $\Omega_e^{\max}$ para o Exemplo 3. 117
5.8 Subdomínios de Δt_i para o Exemplo 3. 119
5.9 Performance das metodologias para o Exemplo 3. 121
5.10 Subdomínios de tipo de $\Omega_e^{\max}$ para o Exemplo 4. 127
5.11 Subdomínios de Δt para o Exemplo 4. 128
5.12 Performance das metodologias para o Exemplo 4. 129
5.13 Subdomínios de tipo de $\Omega_e^{\max}$ para o Exemplo 5. 132
5.14 Subdomínios de Δt para o Exemplo 5. 135
5.15 Performance das metodologias para o Exemplo 5. 136

Lista de Símbolos

A	superfície de fronteira 11
$A^*(t)$	superfície fechada 12
$F(x,t)$	função que depende de uma variável espacial independente x e do tempo t 11
F_i	vetor qualquer 11
G	módulo de cisalhamento 35
I_p	momento polar de inércia 33
K	módulo volumétrico 33
K	módulo volumétrico adiabático 20
L_p	tamanho do domínio PML 25
M_t	momento de torção 33
V	volume fixo ou volume material 11
$V^*(t)$	volume móvel 12
$\bigcup_e$	*assembly* 47
$\Delta\varepsilon$	alongamento 32
Δt	passo de tempo 50
α_1'	parâmetro de integração temporal da metodologia *hib-adaptativo* 85
α_2'	parâmetro de integração temporal da metodologia *hib-adaptativo* 85
$\boldsymbol{B}$	matriz gradiente 47

$\boldsymbol{C}$	matriz de amortecimento	47
$\boldsymbol{D}$	matriz constitutiva	47
$\boldsymbol{K}$	matriz de rigidez	47
$\boldsymbol{M}$	matriz de massa	47
$\boldsymbol{N}$	matriz de funções de forma	47
$\boldsymbol{P}^n$	pressão no instante de tempo	47
$\boldsymbol{n}$	vetor normal	12
$\boldsymbol{v}$	velocidade local	12
δu_i	deslocamento virtual	53
ℓ	comprimento	32
λ	constante de Lamé	34
λ	viscosidade volumétrica	18
λ_i	funções de estiramento de coordenadas	23
μ	constante de Lamé	34
μ	viscosidade dinâmica	18
ν	coeficiente de Poisson	33
ω	frequência de excitação	23
$\omega_e^{\max}$	frequência natural máxima	76
ρ	densidade do fluido	15
ρ_0	densidade de equilíbrio	19
ρg_i	componente da força de corpo por unidade de volume	35
σ_h	tensão hidrostática	33
σ_{ij}	tensor de tensão	17
$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$	tensões de Cauchy	30
$\sigma_{ij} n_j$	forças de superfície	30

ε_x	deformação axial	32
ε_{ij}	campo de deformação	36
$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$	deformações	30
ε_{kk}	dilatação	34
ε_{mm}	taxa de deformação volumétrica	18
ε_{mn}	tensor de deformações	18
ξ	amortecimento viscoso	21
ζ	razão de amortecimento	27
a_i	componente da aceleração	35
c	velocidade termodinâmica do som	21
dV	volume do elemento diferencial	16
$f(\mathbf{x}, t)$	fonte	21
f_0	amplitude de atenuação	25
ks	número de onda	27
l_i	distância do início do domínio PML	25
p	pressão termodinâmica	17
p'	pressão instantânea	19
p'_0	pressão de equilíbrio	19
s	condensação	19
w	função de ponderação	46
c_p	onda de dilatação	38
c_s	onda de cisalhamento	38
$u_i(\boldsymbol{x}, t)$	deslocamento	30
Δt_c	passo de tempo crítico	62
Δt_e	passo de tempo crítico do elemento	89

Γ_p	condições de contorno essenciais ou Dirichlet 10
Γ_u	condições de contorno essenciais ou Dirichlet 31
Γ_τ	condições de contorno naturais ou Neumann 31
Γ_q	condições de contorno naturais ou Neumann 10
Ω_b	limite de bifurcação 65
$\Omega_e^{\max}$	frequência de amostragem máxima do elemento 76
Ω_s	limite crítico 65
α	parâmetro de integração temporal da metodologia α-*adaptativo* 75
$\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$	vetor de forças externas 50
$\boldsymbol{F}_{\text{int}}$	vetor de forças internas 50
δ_{ij}	delta de Kronecker 17
$\mathbf{V}$	vetores auxiliares 90
μ_1	parâmetro de integração temporal da metodologia μ-*adaptativo* 79
μ_2	parâmetro de integração temporal da metodologia μ-*adaptativo* 79
$\omega_{\max}$	frequência natural máxima do modelo 62
ϕ	parâmetro de critério oscilatório 76
ρ_∞	parâmetro de dissipação em alta frequência 66
ρ_b	raio espectral no limite de bifurcação 66
ρ_p	raízes principal 65
ρ_s	raíz espúria 65
τ	tensor de tensão desviante 17
t	incremento de tempo atual 90
E	módulo de Young 32

Lista de Abreviaturas

α-GE	α-Generalizado Explícito, p. . . 60, 64–67, 69, 95, 97, 103, 104, 128, 133
α-adap/sub-ótima	α-adaptativo com subciclagem ótima, p. 100, 101, 103, 110, 118, 120, 127, 133
α-adap/sub	α-adaptativo com subciclagem, p. 99, 100, 118
α-adap	α-adaptativo 98, 101, 102, 109, 110, 117
μ-adap/sub-ótima	μ-adaptativo com subciclagem ótima, p. 100, 101, 103, 110, 118, 120, 127, 128, 132, 133
μ-adap/sub	μ-adaptativo com subciclagem, p. 99, 100, 118
μ-adap	μ-adaptativo 98, 101, 109
hib-adap/sub-ótima	hib-adaptativo com subciclagem ótima, p. 100, 101, 109–111, 113, 120, 128, 133
hib-adap	hib-adaptativo 98, 99, 101, 102, 110, 113
ANP	Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis, p. 7
EDO	Equações Diferenciais Ordinárias, p. 60
EDP	Equações Diferenciais Parciais, p. 39, 44, 45
MDC	Método de Diferenças Centrais, p. 2, 60, 62, 63, 66, 68, 70–72, 81, 82, 84, 85, 87, 95, 98, 138
MEF	Método de Elementos Finitos, p. 1, 8, 44–46, 131
NB	Noh-Bathe, p. 60, 95, 98, 104
PCE	Predictor-corrector explicit, p. 64

PCE predictor-corrector explicit, p. 64

PML Perfectly Matched Layer, p. 8, 9, 23, 25, 26, 28, 29, 41–43, 50, 57, 91, 126, 131, 138, 139

PMM Perfectly Matched Medium, p. 24, 41

PSO Particle swarm optimization 93

Capítulo 1

Introdução

A resolução precisa de equações diferenciais que governam problemas transientes complexos em física depende de métodos capazes de discretizar tanto os domínios espaciais quanto os temporais. Geralmente, o procedimento de solução começa tratando as variáveis espaciais, reduzindo as equações diferenciais parciais originais a um sistema de equações diferenciais ordinárias no tempo. Após estabelecer essa formulação semi-discreta, um esquema de integração temporal é empregado para avançar a solução ao longo de sucessivos passos de tempo.

O Método de Elementos Finitos (MEF) [6, 7], que utiliza funções de forma localmente definidas, é amplamente reconhecido por sua versatilidade e eficácia em engenharia, além de inúmeras aplicações científicas e industriais, para a solução de equações diferenciais parciais. No entanto, apesar dos avanços significativos nas metodologias de discretização espacial, o desenvolvimento na integração temporal, especialmente para equações hiperbólicas, não acompanhou o mesmo nível de sofisticação e diversidade. Muitas estratégias de discretização temporal ainda dependem de definições fixas ou adaptativas de passo de tempo, incluindo controle de tamanho de passo [8–10] e metodologias avançadas, como esquemas multi-passos ou subciclagem [11–14]. Embora essas abordagens garantam estabilidade e precisão no domínio temporal, frequentemente carecem da flexibilidade e das estratégias de refinamento localizadas, amplamente empregadas no domínio espacial. Isso tem motivado o interesse crescente em explorar estratégias de integração temporal mais sofisticadas e localmente adaptativas, que possam reproduzir as capacidades de refinamento e adaptação aplicadas na discretização espacial.

Com o objetivo de avançar nesse conceito, este trabalho apresenta três metodologias baseadas em relações de recorrência simples: *α-adaptativo* [3, 12], *μ-adaptativo* [4] e *híbrido-adaptativo* [5]. Cada uma dessas metodologias opera por meio de parâmetros adaptativos locais, associados a cada elemento na discretização espacial. Esses parâmetros de integração temporal são ajustados de acordo com as características específicas do modelo discretizado, promovendo maior flexibilidade e precisão

no avanço da solução no tempo.

As formulações totalmente adaptativas estudadas são altamente eficazes, oferecendo análises mais precisas e eficientes em comparação com as técnicas clássicas. Entre as principais características das metodologias em estudo, destacam-se:

(i) As metodologias são abordagens explícitas, não exigindo o tratamento de qualquer sistema de equações;

(ii) Elas são verdadeiramente auto-iniciantes, baseando-se apenas em relações de deslocamento-velocidade de passo único, o que as torna formulações simples e eficientes;

(iii) Permitem dissipação algorítmica adaptativa, aplicando amortecimento numérico otimizado em altas frequências sem comprometer significativamente os modos de baixa frequência.

  - A técnica *α-adaptativa* possibilita uma dissipação algorítmica mais intensa;
  - A metodologia *μ-adaptativa* oferece dissipação numérica moderada, além de reduzir os erros de alongamento de período;
  - A metodologia *híbrido-adaptativo* apresenta como inovação a introdução de parâmetros não-dissipativos autoajustáveis, que aumentam significativamente a precisão do avanço no tempo. Além disso, seus parâmetros dissipativos fornecem uma forma mais eficaz de amortecimento algorítmico em comparação com metodologias anteriores, melhorando ainda mais a precisão.

(iv) Os limites de estabilidade variam conforme a metodologia:

  - *α-adaptativa* possui o mesmo limite de estabilidade do Método de Diferenças Centrais (MDC);
  - *μ-adaptativa* permite um limite de estabilidade 1,72 vezes maior que o MDC ;
  - *híbrido-adaptativo* alcança um limite de estabilidade até 2 vezes maior que o MDC .

Além disso, essas metodologias adaptativas de integração temporal são integradas a procedimentos otimizados de passos de tempo adaptativo e subciclagem (chamada, *sub-ótima*). Nesse contexto, o custo computacional total por elemento orienta a seleção do passo de tempo mais eficiente, utilizando um algoritmo de otimização genética. Essa estrutura totalmente adaptativa assegura que tanto os

passos de tempo quanto os integradores temporais sejam determinados de forma local, levando em consideração as discretizações espaciais adotadas, as propriedades intrínsecas do modelo e a busca pela máxima eficiência computacional. Além disso, α-*adaptativa* e *híbrido-adaptativo* se adaptam às respostas dinâmicas que evoluem ao longo da simulação. Como resultado, é possível estabelecer procedimentos de solução altamente eficazes e eficientes, capazes de combinar precisão, desempenho computacional e flexibilidade na análise de modelos complexos.

Nesse contexto, a seleção otimizada dos passos de tempo permite mitigar de forma mais eficaz os erros provenientes da discretização espacial, enquanto o amortecimento numérico é introduzido apenas onde e quando realmente necessário. Isso resulta em uma estratégia de dissipação mais direcionada e eficiente, aprimorando a qualidade e a robustez geral da solução numérica.

1.1 Estudo da Literatura

Nos últimos anos, uma quantidade significativa de pesquisas tem sido dedicada ao desenvolvimento de algoritmos explícitos de integração temporal com amortecimento numérico em altas frequências [1, 2, 15–22]. Esses métodos buscam atenuar oscilações espúrias e não físicas que podem surgir devido à excitação de modos espacialmente não resolvidos. Os esforços nesse campo levaram à proposta de diversas estratégias, incluindo formulações de passo único [1, 15, 16], esquemas compostos [2, 17, 18], abordagens indiretas [19] e procedimentos de ordem superior [20–22], entre outros.

Encontrar o equilíbrio ideal — introduzindo amortecimento suficiente para altas frequências sem comprometer excessivamente as respostas críticas de baixa frequência — permanece um desafio considerável. Como será demonstrado neste trabalho, as formulações adaptativas propostas mostram-se capazes de atingir esse equilíbrio delicado, oferecendo uma dissipação eficaz dos componentes indesejados em altas frequências, ao mesmo tempo em que preservam a dinâmica essencial em baixas frequências.

Um dos principais motivadores para o desenvolvimento de abordagens de subdivisão em subdomínios, foco deste trabalho, surge em problemas de propagação de ondas, nos quais o domínio espacialmente discretizado frequentemente inclui regiões relativamente rígidas e outras mais flexíveis. Nessas condições, se o domínio apresenta propriedades heterogêneas e/ou regiões altamente refinadas, apenas alguns elementos rígidos podem impor um passo de tempo global extremamente pequeno, especialmente quando esquemas explícitos são utilizados. Para mitigar esse problema, é comum dividir o domínio em subdomínios ou regiões que podem ser resolvidos separadamente, adotando diferentes passos de tempo e/ou técnicas de integração temporal, e posteriormente acoplar os resultados, alcançando maior eficiência computacional.

Os algoritmos padrão de multi-passos de tempo/subciclagem implementam procedimentos de acoplamento particionado e escalonado no tempo, permitindo o uso de esquemas de integração temporal arbitrários, tamanhos de passo de tempo distintos e até estratégias de discretização variáveis para diferentes subdomínios. No entanto, se uma grande parte do domínio for rígida, mesmo a subciclagem pode resultar em um passo de tempo proibitivamente pequeno nesse subdomínio rígido, limitando a eficiência global.

Com a aplicação da abordagem de *subciclagem otimizada*, é possível criar um cenário ideal em que as regiões mais flexíveis não precisam ficar estritamente limitadas pelo menor passo de tempo imposto pelas regiões mais rígidas e críticas do modelo. Em vez disso, um algoritmo de otimização genética é utilizado para deter-

minar tamanhos de passo de tempo estáveis, formando subdomínios mais eficientes. Esses subdomínios são ajustados por meio de parâmetros adequados de integração temporal. Como resultado, elementos que, em uma subciclagem padrão, ficariam restritos aos subdomínios mais limitantes podem agora ser alocados a subdomínios com limites de estabilidade mais amplos, sem comprometer a precisão, graças aos parâmetros de integração ajustados.

Em outras palavras, um maior conjunto de elementos passa a pertencer a um subdomínio definido por um passo de tempo específico, que o aproxima o máximo possível de seu passo de tempo crítico. Isso permite cálculos mais precisos e eficientes em todo o domínio.

As técnicas discutidas neste trabalho podem ser utilizadas para resolver problemas de diferentes naturezas. Neste estudo, o foco será em casos de acústica e elastodinâmica, com ênfase especial em aplicações geofísicas. É importante destacar que esses procedimentos são particularmente úteis em análises de meios heterogêneos complexos, onde a presença de diferentes camadas e materiais, combinada com uma discretização espacial bem elaborada, resulta em múltiplas subdivisões de domínios e passos de tempo.

Na indústria de gás e óleo, a relevância dessas técnicas é especialmente evidente. A exploração e produção de hidrocarbonetos frequentemente envolvem análises de propagação de ondas sísmicas para caracterizar reservatórios subterrâneos, avaliar estruturas geológicas e identificar potenciais zonas de produção. Nesses cenários, a precisão e eficiência computacional das metodologias discutidas tornam-se essenciais, pois os modelos geofísicos utilizados apresentam alta heterogeneidade, com camadas de diferentes propriedades físicas e regiões altamente refinadas que demandam soluções robustas.

Além disso, a capacidade de ajustar localmente os passos de tempo e os parâmetros de integração temporal permite reduzir significativamente o custo computacional dessas análises, mantendo alta precisão nos resultados. Isso é crucial para a viabilidade de projetos que requerem simulações em larga escala, como a modelagem sísmica 3D e a inversão sísmica, amplamente utilizadas na exploração de petróleo e gás. Assim, as metodologias apresentadas não apenas contribuem para avanços técnicos na solução de problemas geofísicos, mas também impactam diretamente a eficiência e o custo operacional.

A presente tese se insere no escopo da linha de pesquisa em modelagem computacional e propagação de ondas no meio contínuo, tradicionalmente desenvolvida no Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ. Ao longo dos últimos anos, o PEC/COPPE tem mantido uma produção científica consistente em temas relacionados à formulação, implementação e aplicação de métodos numéricos avançados (como MEF, DF e estratégias híbridas de acoplamento) aplicados à solução de proble-

mas acústicos e elastodinâmicos, com ênfase em aplicações geofísicas. A diversidade e profundidade das pesquisas podem ser observadas em trabalhos como o de Santos [23], que propõe um esquema não iterativo para a análise de problemas de valor de contorno primais estacionários, combinando a flexibilidade geométrica do MEF com a eficiência computacional do MDF. A abordagem é baseada em um acoplamento tipo multi-método MEF/MDF, aplicado a subdomínios retangulares (2D) ou hexaédricos (3D), permitindo a construção de malhas híbridas capazes de equilibrar precisão e desempenho numérico em simulações de grande porte; e de Kakhki [24], que trata da caracterização geofísica do solo urbano da cidade de Babol, no Irã, a partir da aplicação de métodos sísmicos passivos baseados em ruído ambiente em estação única, evidenciando o potencial dessas abordagens para áreas densamente povoadas e de alta vulnerabilidade sísmica.

Outros exemplos recentes incluem o trabalho de Souza [25], que propôs uma abordagem baseada em *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) no domínio do tempo, utilizando Funções de Green Numéricas implícitas e explícitas para análise elastodinâmica tridimensional via MEF, com foco na redução de ordem e integração eficiente. Destaca-se também o trabalho de Soares Jr. [26], que analisa e compara procedimentos adaptativos de integração temporal do tipo implícito–explícito (imp–exp) e explícito–explícito com subciclagem (exp–exp), voltados para problemas com múltiplas escalas temporais, especialmente em geofísica. Ambas as metodologias são automatizadas, auto-inicializáveis e compatíveis com técnicas de amortecimento numérico adaptativo.

Complementarmente, Valente et al. [27] desenvolveram uma formulação baseada no método dos volumes finitos com malhas adaptativas do tipo OcTree para simulação de hipertermia com nanopartículas, combinando eficiência computacional com tratamento preciso de domínios complexos. No campo da inversão sísmica, Souza et al. [28] propuseram uma técnica de regularização baseada no *Geological Incoherence Index* (GII) como alternativa aos métodos tradicionais de regularização de Tikhonov e Variação Total, com o objetivo de aprimorar a recuperação de propriedades da subsuperfície em problemas inversos mal-postos.

A presente tese dá continuidade à linha de pesquisas desenvolvidas no PEC/-COPPE, ampliando o escopo das formulações numéricas explícitas por meio da proposta de uma estratégia de subciclagem otimizada, que se adapta eficientemente a diferentes condições de malha e propriedades do meio, agregando precisão, estabilidade e desempenho computacional às análises transientes de propagação de ondas.

1.2 Originalidade e relevância

Este trabalho foi idealizado observando as demandas específicas da indústria de petróleo e gás, com foco no desenvolvimento de metodologias computacionais capazes de resolver problemas de propagação de ondas em meios heterogêneos. Essa necessidade é particularmente crítica para análises sísmicas, fundamentais para a caracterização de reservatórios e a avaliação de estruturas geológicas. Como bolsista da Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP), o objetivo é contribuir diretamente para os avanços tecnológicos na área, otimizando processos de exploração e produção de hidrocarbonetos.

Apesar dos avanços recentes, ainda existem lacunas significativas no desenvolvimento de metodologias que equilibrem precisão, eficiência computacional e robustez. A precisão dos resultados impacta diretamente a confiabilidade dos projetos, enquanto a redução do custo computacional e a facilidade de aplicação têm influência direta no custo final e na viabilidade econômica de empreendimentos. Além disso, esses aspectos estão alinhados com as exigências da ANP , que visam fomentar tecnologias que garantam segurança operacional, sustentabilidade ambiental e competitividade para o setor.

Outro desafio relevante enfrentado por muitos dos softwares atuais é o controle das oscilações espúrias, provenientes dos modos de vibração adicionados durante a discretização espacial. A ausência de um gerenciamento eficiente dessas oscilações pode comprometer toda a propagação da solução no tempo, prejudicando a análise final. Nesse contexto, a dissipação numérica se torna essencial para preservar o comportamento físico esperado do problema. No entanto, a aplicação inadequada ou excessiva dessa dissipação pode introduzir erros significativos na solução, comprometendo os resultados.A escolha das metodologias adaptativas explícitas exploradas atende aos requisitos identificados como fundamentais.

As propostas apresentadas neste trabalho mantém os requisitos de uma boa metodologia explícita, enquanto avançam ao introduzir uma abordagem otimizada e automatizada, para a divisão de subdomínios e subciclagem. Essa automação é especialmente vantajosa para domínios complexos, como os encontrados em análises geofísicas da indústria de petróleo e gás, que frequentemente envolvem discretizações não estruturadas e regiões altamente refinadas. Além disso, as metodologias desenvolvidas foram implementadas com paralelização, maximizando o aproveitamento dos recursos computacionais modernos e garantindo que o trabalho atenda às demandas de alta performance necessárias para a indústria.

Dessa forma, este trabalho visa contribuir diretamente para o desenvolvimento de ferramentas mais eficientes e precisas, fortalecendo a capacidade da indústria de petróleo e gás de lidar com desafios tecnológicos, ambientais e econômicos.

1.3 Organização da Tese

O presente trabalho é organizado da seguinte forma:

No capítulo 1, é apresentada a motivação para o desenvolvimento desta pesquisa, com a introdução ao problema estudado e as justificativas para as escolhas metodológicas realizadas. As considerações iniciais são discutidas na Seção 1.2, onde os objetivos e a importância do trabalho são destacados.

No capítulo 2, são descritas as formulações matemáticas dos modelos utilizados. Em 2.1, são abordadas as equações governantes, condições iniciais e de contorno do modelo acústico, seguidas pelo modelo elastodinâmico em 2.2. Adicionalmente, são apresentados os equacionamentos para os modelos com condições Perfectly Matched Layer (PML), tanto para o meio acústico (2.1.4) quanto para o elastodinâmico (2.2.4).

No capítulo 3, é apresentada a formulação numérica empregada neste trabalho. A seção 3.1 detalha a discretização espacial, com ênfase no Método dos Elementos Finitos (MEF), incluindo sua aplicação nos modelos acústico (3.1.2) e elastodinâmico (3.1.4). Já na seção 3.2, são abordadas as metodologias para discretização temporal, com uma apresentação detalhada de técnicas clássicas, como o Método das Diferenças Centrais (3.2.1), α-Generalizado Explícito (3.2.2) e o Noh-Bathe (3.2.3). Em seguida, são discutidas as formulações avançadas da família explícita adaptativa, os métodos α-adaptativo (3.2.4) e μ-adaptativo (3.2.5), além do método híbrido adaptativo (3.2.6).

No capítulo 4, são explicadas as técnicas de subdivisão de domínios e subciclagem, abordando a metodologia padrão e a subciclagem otimizada em 4.1. Essas técnicas são detalhadas em termos de algoritmos e critérios de aplicação.

No capítulo 5, são apresentados exemplos numéricos para validar as metodologias propostas. Em 5.1.1, é analisado um caso acústico envolvendo uma membrana sujeita a condições prescritas. A 5.1.2 analisa um domínio infinito elástico sujeito a um pulso inicial, enquanto a 5.1.3 aborda uma barra elástica em diferentes configurações de materiais. Posteriormente, dois casos sintéticos acústicos (5.2.1) e dois casos sintéticos elásticos (5.2.2) com ordem de grandeza da indústria são estudados, evidenciando a eficácia das técnicas desenvolvidas.

Finalmente, no capítulo 6, são apresentadas as conclusões do trabalho, com uma síntese dos resultados alcançados.

Capítulo 2

Formulação dos modelos

Neste capítulo, são descritos os modelos acústico e elastodinâmico que fundamentam este trabalho. Cada modelo é apresentado juntamente com suas hipóteses constitutivas, seguidas do desenvolvimento das equações governantes, incluindo as respectivas condições iniciais e de contorno. Adicionalmente, é abordada a formulação do *Perfectly Matched Layer* (PML), uma técnica amplamente utilizada para simular domínios infinitos por meio de camadas absorventes perfeitamente acopladas. Ressalta-se que, embora existam diversas abordagens e formulações de PML na literatura especializada [29–42], este trabalho adota prioritariamente a formulação proposta por Basu [42], em função de sua adequação às características do modelo e da estratégia de integração numérica empregada.

Todo o conteúdo teórico apresentado neste capítulo é baseado em referências clássicas da literatura e em diversos trabalhos científicos consolidados na área, os quais serão devidamente citados ao longo do texto. O objetivo é compilar e sistematizar os principais conceitos e equações relevantes, sem a pretensão de apresentar contribuições originais nesta seção.

Destaca-se ainda a adoção da notação indicial como convenção ao longo do capítulo. No entanto, quando for necessário ou convencional, especialmente para facilitar a apresentação de operadores ou expressões mais compactas, a notação matricial também será utilizada. No caso do modelo acústico, embora envolva grandezas como tensão e deformação tratadas como taxas, opta-se por omitir o índice de derivação temporal, em conformidade com a padronização adotada na bibliografia especializada. Por fim, os aspectos relacionados à discretização dos modelos e à formulação numérica são discutidos com mais detalhes no Capítulo 3.

2.1 Modelo acústico

Nesta seção, será abordada a propagação de ondas de pressão em fluidos, apresentando apenas as equações principais com base no referencial lagrangeano, desconsi-

derando as condições energéticas. As ondas acústicas representam um tipo específico de variação de pressão em fluidos compressíveis, que podem ocorrer de diferentes formas. Entre elas, destacam-se os campos de pressão audíveis e de intensidade moderada, considerados os mais naturais. Além disso, existem outras categorias, como ondas ultrassônicas e infrassônicas, cujas frequências estão além dos limites da audição humana; ondas de alta intensidade (como as geradas por motores a jato ou mísseis), que podem provocar sensações de dor em vez de som; ondas não lineares, associadas a intensidades ainda mais elevadas; e ondas de choque, comumente produzidas por explosões ou aeronaves supersônicas, conforme descrito por Kinsler et al. [43].

O domínio acústico é tratado como um meio contínuo, uma vez que um volume infinitesimal de fluido contém moléculas em quantidade suficiente para permitir a aplicação das leis da mecânica contínua, mas ainda é pequeno o bastante para que as variáveis acústicas possam ser consideradas uniformes em seu interior. A formulação adotada neste trabalho segue os fundamentos clássicos da literatura, especialmente os desenvolvimentos teóricos apresentados por Kinsler et al. [43], Malvern [44], Kundu et al. [45] e White [46].

Nesse modelo, o fluido é assumido como invíscido, de modo que as forças restauradoras responsáveis pela propagação das ondas resultam exclusivamente das variações de pressão associadas à compressão e rarefação. Adicionalmente, considera-se que o meio é não dissipativo, desconsiderando-se perdas relacionadas à condução térmica ou efeitos viscosos. Para simplificar a formulação, assume-se ainda que as ondas possuem amplitude relativamente pequena, de forma que as variações de densidade são mínimas e as propriedades de equilíbrio do meio permanecem praticamente constantes ao longo do tempo.

Com essas considerações, as variáveis relacionadas ao meio acústico são:

- Velocidade, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$;
- Densidade, $\rho = \rho(\boldsymbol{x}, t)$;
- Pressão, $p = p(\boldsymbol{x}, t)$,

onde $\boldsymbol{x} \in \Omega$ representa uma posição no espaço e $t \in [0, \infty)$ o instante de tempo. Considera-se que Ω é uma região bem definida no espaço ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $n = 2$ ou 3), cuja superfície Γ é denominada contorno, e $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1}$.

O contorno é subdividido em dois subconjuntos:

- Γ_p, onde as pressões são conhecidas (condições de contorno essenciais ou Dirichlet);
- Γ_q, onde os fluxos na superfície são conhecidos (condições de contorno naturais ou Neumann).

2.1.1 Equações Governantes

A mecânica dos fluidos fundamenta-se nas leis de conservação de massa, momento e energia. Essas leis podem ser formuladas tanto de maneira diferencial, aplicáveis a um ponto específico, quanto integral, aplicáveis a uma região estendida. Na abordagem integral, as expressões dessas leis variam dependendo se estão relacionadas a um volume fixo no espaço ou a um volume material, composto pelas mesmas partículas de fluido e cuja superfície limite se move com o fluido. As formas integral e diferencial podem ser derivadas uma da outra, e durante a derivação, integrais de superfície frequentemente precisam ser convertidas em integrais de volume (ou vice-versa) por meio do teorema da divergência de Gauss:

$$\int_V F_{i,i}\, dV = \int_A n_i F_i\, dA \tag{2.1}$$

onde F_i é um vetor, V pode ser tanto um volume fixo quanto um volume material, A é sua superfície de fronteira e n_i é vetor unitário orientado para fora de V [45].

O resultado cinemático necessário para desenvolver as versões diferencial e de volume de controle das equações de conservação para o movimento de fluidos é o *Teorema do Transporte de Reynolds*. Esse teorema é utilizado para a diferenciação de integrais sobre volumes arbitrariamente móveis e deformáveis. Ele é uma extensão tridimensional do *Teorema de Leibniz* para diferenciação de uma integral de variável única com integrando dependente do tempo e limites de integração também dependentes do tempo [45].

Considere uma função F que depende de uma variável espacial independente x e do tempo t. Suponha que a derivada no tempo da sua integral seja de interesse quando os limites de integração a e b também são funções do tempo. O Teorema de Leibniz estabelece que a derivada no tempo da integral de $F(x,t)$, entre $x = a(t)$ e $x = b(t)$, é dada por:

$$\frac{d}{dt}\int_{x=a(t)}^{x=b(t)} F(x,t)\, dx = \int_a^b \dot{F}(x,t)\, dx + \frac{db(t)}{dt}F(b,t) - \frac{da(t)}{dt}F(a,t) \tag{2.2}$$

onde, a, b, F e suas derivadas no lado direito da Eq. (2.2) são avaliadas no instante de tempo t [45]. O superescrito $\dot{F}$ é referente à derivada temporal.

Uma representação gráfica dos três termos do teorema de Leibniz é apresentada na Figura 2.1. Os três termos no lado direito de (2.2) correspondem a [45]:

- O primeiro termo, $\int_a^b \dot{F}(x,t)\, dx$, representa a contribuição da variação temporal de F no intervalo de integração.
- O segundo termo, $\frac{db(t)}{dt}F(b,t)$, é o ganho de F no limite superior, que se move com uma taxa $\frac{db(t)}{dt}$.

- O terceiro termo, $-\frac{da(t)}{dt}F(a,t)$, é a perda de F no limite inferior, que se move com uma taxa $\frac{da(t)}{dt}$.

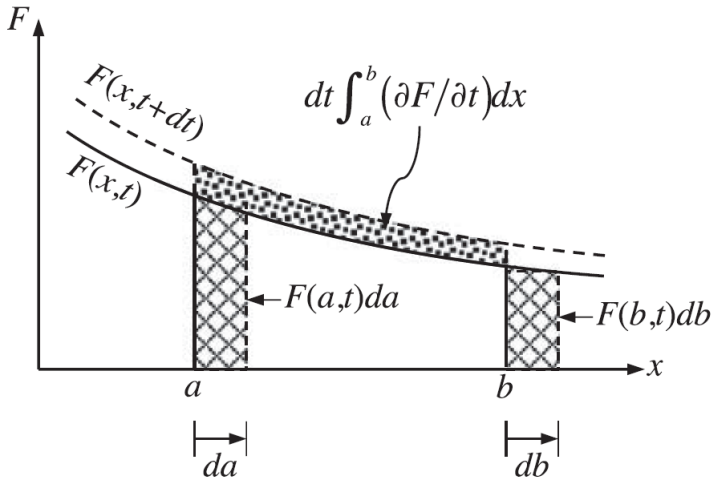


Figura 2.1: Ilustração gráfica do teorema de Leibniz.

Essas características essenciais mostram que a derivada total no lado esquerdo inclui a derivada parcial do integrando e termos que levam em conta a dependência do tempo dos limites de integração. Essa formulação pode ser generalizada para três dimensões e serve como base para derivar os princípios fundamentais de conservação no movimento de fluidos [45].

Considere um volume móvel $V^*(t)$ com uma superfície fechada $A^*(t)$, tendo uma normal para fora $\boldsymbol{n}$. Denote por $\boldsymbol{v}$ a velocidade local de A^* (ver Figura 2.5). O volume V^* e sua superfície A^* são comumente chamados de volume de controle e superfície de controle, respectivamente. A situação é bastante geral: o volume e sua superfície não precisam coincidir com nenhum limite, interface ou superfície específicos. Além disso, a velocidade $\boldsymbol{v}$ não precisa ser uniforme ou constante em $A^*(t)$. Nenhum sistema de coordenadas específico ou origem é necessário. O objetivo deste desenvolvimento é determinar a derivada temporal da integral de uma função contínua de valor único, $F(\boldsymbol{x},t)$, no volume $V^*(t)$ [45].

O ponto de partida para este esforço é a definição de derivada temporal [45]:

$$\frac{d}{dt}\int_{V^*(t)} F(\boldsymbol{x},t)\,dV = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\int_{V^*(t+\Delta t)} F(\boldsymbol{x},t+\Delta t)\,dV - \int_{V^*(t)} F(\boldsymbol{x},t)\,dV\right\} \quad (2.3)$$

A geometria das duas integrais dentro das chaves $\{.\}$ é representada na Figura 2.2, onde as linhas sólidas correspondem ao tempo t e as linhas tracejadas ao tempo $t+\Delta t$. A derivada temporal no lado esquerdo é escrita de maneira apropriada como uma derivada temporal total, já que a integração no volume engloba a dependência espacial de F. O primeiro termo dentro das chaves pode ser expandido em quatro termos ao definir o incremento de volume $\Delta V = V^*(t+\Delta t) - V^*(t)$ e ao expandir

a função $F(\boldsymbol{x}, t + \Delta t) \approx F(\boldsymbol{x}, t) + \Delta t(\partial F/\partial t)$ para $\Delta t \to 0$ [45]:

$$\int_{V^*(t+\Delta t)} F(\boldsymbol{x}, t + \Delta t)\, dV \approx \int_{V^*(t)} F(\boldsymbol{x}, t)\, dV + \int_{V^*(t)} \Delta t \dot{F}(\boldsymbol{x}, t)\, dV + \int_{\Delta V} F(\boldsymbol{x}, t)\, dV + \int_{\Delta V} \Delta t \dot{F}(\boldsymbol{x}, t)\, dV \tag{2.4}$$

O primeiro termo à direita da Equação 2.4 será cancelado com o termo inicial da Equação 2.3. Quando o limite da Equação 2.3 é tomado, tanto Δt quanto ΔV tendem a zero, de modo que o último termo da Equação 2.4 não contribui porque é de segunda ordem. Assim, o resultado é [45]:

$$\frac{d}{dt} \int_{V^*(t)} F(\boldsymbol{x}, t)\, dV = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{V^*(t)} \Delta t \dot{F}(\boldsymbol{x}, t)\, dV + \int_{\Delta V} F(\boldsymbol{x}, t)\, dV \right\} \tag{2.5}$$

Este limite pode ser interpretado com base na relação entre ΔV e Δt, mostrando como o volume e os fluxos através da superfície contribuem para a variação temporal da integral [45].

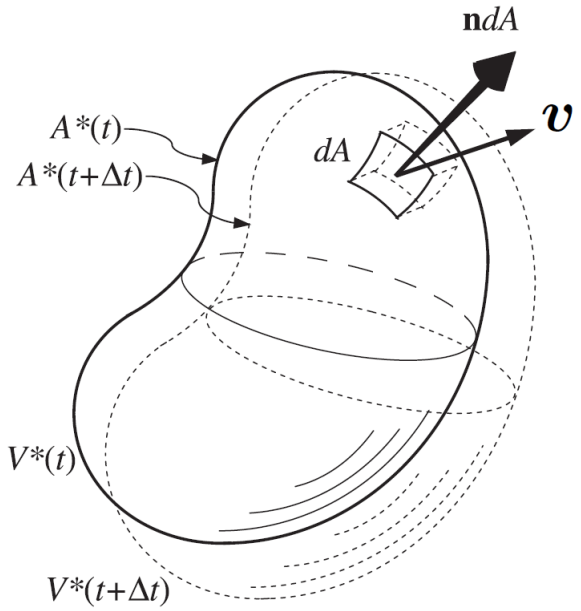


Figura 2.2: Representação geométrica de um volume de controle.

Para estabelecer a relação entre ΔV e Δt, considere o movimento do pequeno elemento de área dA mostrado na Figura 2.2. Durante o intervalo de tempo Δt, dA varre um volume elementar $(\boldsymbol{v}\Delta t) \cdot \boldsymbol{n}\, dA$ do incremento de volume ΔV. Além disso, esse pequeno elemento de ΔV está localizado adjacente à superfície $A^*(t)$. Todas essas contribuições elementares para ΔV podem ser somadas por meio de uma integral de superfície. À medida que $\Delta t \to 0$, o valor do integrando $F(x, t)$ nesses volumes elementares pode ser considerado como o de F na superfície $A^*(t)$.

Assim, temos [45]:

$$\int_{\Delta V} F(\boldsymbol{x},t)\,dV \approx \int_{A^*(t)} F(\boldsymbol{x},t)(\boldsymbol{v}\Delta t\cdot\boldsymbol{n})\,dA \quad \text{com } \Delta t\to 0 \tag{2.6}$$

Substituindo a Equação 2.6 na Equação 2.5 e tomando o limite, obtemos a seguinte formulação do *Teorema do Transporte de Reynolds*:

$$\frac{d}{dt}\int_{V^*(t)} F(\boldsymbol{x},t)\,dV = \int_{V^*(t)} \dot{F}(\boldsymbol{x},t)\,dV + \int_{A^*(t)} F(\boldsymbol{x},t)\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,dA. \tag{2.7}$$

O componente final segue o padrão estabelecido pelo Teorema de Leibniz: a derivada temporal total de uma integral com limites dependentes do tempo é igual à integral da derivada parcial do integrando somada a um termo que considera o movimento da fronteira de integração. Na Equação 2.7, tanto as entradas quanto as saídas de F são contabilizadas através do produto escalar no termo integral de superfície, que monitora se $A^*(t)$ está localmente avançando ($\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}>0$) ou recuando ($\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}<0$) ao longo de $\boldsymbol{n}$. Assim, termos separados como os da Equação 2.2 tornam-se desnecessários [45].

Adicionalmente, a dependência espaço-temporal $(\boldsymbol{x},t)$ da velocidade da superfície do volume de controle $\boldsymbol{v}$ e da normal unitária $\boldsymbol{n}$ não é explicitamente exibida na Equação 2.7 porque $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{n}$ são definidos apenas em $A^*(t)$; não são quantidades de campo como $F(\boldsymbol{x},t)$. A Equação 2.7 é um resultado puramente cinemático e demonstra que $\frac{d}{dt}$ pode ser movido para dentro de uma integral de volume, sendo substituído por $\frac{\partial}{\partial t}$ apenas quando o volume de integração $V^*(t)$ é fixado no espaço, de forma que $\boldsymbol{v}=0$ (ou mais precisamente $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0$). A Equação 2.7 e escolhas cuidadosas de F e $\boldsymbol{v}$ são os pontos de partida para derivar as equações de movimento de fluidos a partir dos princípios de conservação de massa, momento e energia [45].

Ao desconsiderar reações nucleares e efeitos relativísticos, a massa não é criada nem destruída. Assim, elementos individuais de massa (moléculas, grãos, partículas de fluido, etc.) podem ser rastreados dentro de um campo de fluxo porque não desaparecerão nem novos elementos surgirão espontaneamente. As equações que representam a conservação de massa em um fluido em movimento baseiam-se no princípio de que a massa de uma coleção específica de partículas de fluido vizinhas é constante. O volume ocupado por essa coleção específica de partículas de fluido é chamado de *volume material* $V(t)$. Tal volume move-se e deforma-se dentro de um campo de fluxo de forma que ele sempre contenha os mesmos elementos; nada entra ou sai do volume. Isso implica que a superfície do volume material $A(t)$, uma superfície material, deve mover-se com a velocidade local do fluido $\boldsymbol{v}$, de modo que partículas de fluido dentro de $V(t)$ permaneçam dentro e partículas fora de $V(t)$ permaneçam fora. Assim, uma formulação da conservação de massa para um volume

material em um fluido em movimento é:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho(\boldsymbol{x},t)\, dV = 0 \tag{2.8}$$

onde ρ é a densidade do fluido. O conceito principal aqui é equivalente a um balão infinitamente flexível, perfeitamente selado e de paredes finas contendo fluido. O conteúdo do balão desempenha o papel do volume material $V(t)$, enquanto a superfície do balão define a superfície material $A(t)$. E, porque o balão está selado, a massa total de fluido dentro do balão permanece constante enquanto o balão se move, expande-se, contrai-se ou deforma-se [45].

A partir da Equação 2.8, pode-se ver que o princípio de conservação de massa restringe a densidade do fluido. As implicações da Equação 2.8 para o campo de velocidade do fluido podem ser melhor expressas ao usar o *Teorema do Transporte de Reynolds*, com $F = \rho$, para expandir a derivada temporal na Equação 2.8 [45]:

$$\int_{V(t)} \dot{\rho}(\boldsymbol{x},t)\, dV + \int_{A(t)} \rho(\boldsymbol{x},t)\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\cdot \boldsymbol{n}\, dA = 0 \tag{2.9}$$

Esta é uma formulação de balanço de massa entre mudanças integradas de densidade dentro de $V(t)$ e o movimento integrado de sua superfície $A(t)$. Embora geral e correta, a Equação 2.9 pode ser difícil de utilizar na prática porque o movimento e a evolução de $V(t)$ e $A(t)$ são determinados pelo fluxo, o qual pode ser desconhecido [45].

Assim, para desenvolver a equação diferencial que representa a conservação de massa deve-se aplicar o teorema da divergência de Gauss (Equação 2.1) à integral de superfície da Equação 2.9 [45]:

$$\int_{V(t)} \left(\dot{\rho}(\boldsymbol{x},t) + \rho(\boldsymbol{x},t) v_{i,i}(\boldsymbol{x},t)\right)\, dV = 0 \tag{2.10}$$

Essa equação só pode ser verdadeira se o integrando se anular em todos os pontos do espaço. Se o integrando não se anular em algum ponto, então integrando a Equação 2.10 em um pequeno volume ao redor desse ponto onde o integrando é diferente de zero produziria um resultado não nulo. Este conceito é fundamental para a equação de continuidade, que constitui a forma diferencial do princípio da conservação da massa [45]:

$$\dot{\rho}(\boldsymbol{x},t) + \rho(\boldsymbol{x},t) v_{i,i}(\boldsymbol{x},t) = 0 \tag{2.11}$$

A equação pode ser formulada de diversas maneiras. Ao reestruturar o termo de divergência contido nela, e desconsiderando a representação $(\boldsymbol{x},t)$, obtemos a forma

mais comumente conhecida [45]:

$$\frac{1}{\rho}\dot{\rho} + v_{i,i} = 0 \tag{2.12}$$

A derivada $\dot{\rho}$ indica como a densidade de uma partícula de fluido varia ao longo do tempo, alterações que podem ser decorrentes de mudanças físicas. No entanto, no caso de um fluido incompressível, que é o cenário considerado aqui, a densidade é tratada como constante em relação à pressão [45].

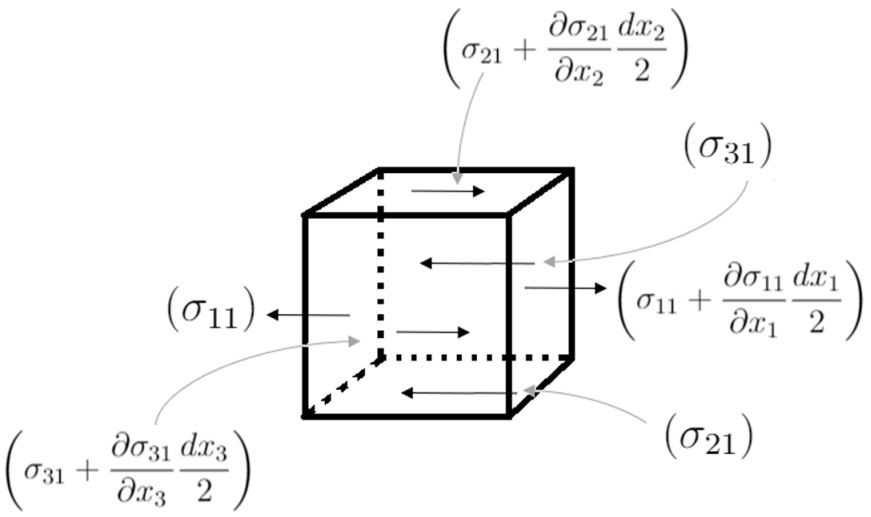


Figura 2.3: Balanço das forças que atuam na superfície do elemento, na direção x_1.

Para expressar a lei da conservação do momento em sua forma diferencial, aplica-se a segunda lei do movimento de Newton a um elemento infinitesimal de fluido. Essa lei estipula que a força líquida atuante sobre o elemento deve ser igual à massa do elemento vezes sua aceleração. A resultante das forças superficiais na direção x_1 (veja figura 2.3) é dada por:

$$\begin{aligned}
&\left(\sigma_{11} + \tfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}\tfrac{dx_1}{2} - \sigma_{11} + \tfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}\tfrac{dx_1}{2}\right) dx_2 dx_3 + \\
&\left(\sigma_{21} + \tfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2}\tfrac{dx_2}{2} - \sigma_{21} + \tfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2}\tfrac{dx_2}{2}\right) dx_1 dx_3 + \\
&\left(\sigma_{31} + \tfrac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3}\tfrac{dx_3}{2} - \sigma_{31} + \tfrac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3}\tfrac{dx_3}{2}\right) dx_1 dx_2
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Que pode ser simplificado da seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3}\right) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial \sigma_{j1}}{\partial x_j} dV \tag{2.14}$$

onde dV é o volume do elemento diferencial [45].

Utilizando a propriedade de simetria do tensor de tensões, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, consideramos g como a força de corpo por unidade de massa, de modo que ρg representa a

força de corpo por unidade de volume. De acordo com a lei de Newton, a equação do movimento relaciona a aceleração com as forças atuantes em um ponto e é aplicável a qualquer meio contínuo, seja ele sólido ou fluido, independentemente da relação entre o tensor de tensão σ_{ij} e o campo de deformação. Esta equação é também conhecida como a equação de movimento de Cauchy [45]:

$$\rho \dot{v}_i = \rho g_i + \sigma_{ij,j} \tag{2.15}$$

No contexto de um fluido newtoniano, a relação entre tensão e deformação é descrita por uma equação constitutiva. Esta equação estabelece uma relação linear entre as tensões e as taxas de deformação. Inicialmente, analisa-se um fluido em repouso, onde apenas as tensões normais são observadas e são independentes da orientação da superfície, sugerindo que o tensor de tensões é isotrópico. Neste caso, sendo o único tensor isotrópico de segunda ordem o delta de Kronecker δ_{ij}, o tensor de tensões deve ser proporcional a este [45]:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \tag{2.16}$$

Aqui, p representa a pressão termodinâmica. O sinal negativo na equação reflete a convenção de que as componentes normais de σ são consideradas positivas quando indicam tração, e não compressão [45].

Quando o fluido está em movimento, ele desenvolve componentes adicionais de tensão devido à viscosidade, alterando os termos diagonais do tensor de tensões σ e resultando no desenvolvimento de tensões de cisalhamento. Assim, o tensor de tensões pode ser decomposto em duas partes: uma componente $-p\delta_{ij}$, correspondente ao estado de repouso do fluido, e uma componente τ_{ij}, que surge exclusivamente devido ao movimento do fluido. Embora p continue a representar a pressão termodinâmica, esta não é uma suposição perfeita, pois as grandezas termodinâmicas são idealmente definidas para estados de equilíbrio. No entanto, para o caso analisado, espera-se que as discrepâncias relacionadas ao não equilíbrio termodinâmico sejam mínimas, considerando que o tempo de relaxamento molecular é curto em relação à escala de tempo do fluxo. Portanto, o tensor de tensões pode ser expresso da seguinte forma [45]:

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} - p\delta_{ij} \tag{2.17}$$

A componente não isotrópica do tensor de tensões, conhecida como tensor de tensão desviante τ, está associada aos gradientes de velocidade $v_{i,j}$. Este tensor pode ser decomposto em partes simétrica e antissimétrica [45]:

$$v_{i,j} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right) + \frac{1}{2}\left(v_{i,j} - v_{j,i}\right) \tag{2.18}$$

Como a parte antissimétrica do gradiente de velocidade representa a rotação do fluido sem causar deformação, ela não contribui para a geração de tensão. Portanto, as tensões são induzidas exclusivamente pelo tensor de taxa de deformação [45]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right) \tag{2.19}$$

Assumindo uma relação linear entre o tensor de tensões σ_{ij} e o tensor de deformações ε_{mn}, expressa como $\sigma_{ij} = k_{ijmn}\varepsilon_{mn}$, onde k_{ijmn} é um tensor de quarta ordem com 81 componentes que dependem do estado termodinâmico do meio. Essa configuração implica que cada componente de tensão está linearmente relacionada a todas as nove componentes de ε_{ij}, exigindo assim 81 constantes para descrever a relação completamente. No entanto, em meios isotrópicos, a ausência de direções preferenciais significa que a relação tensão-deformação deve ser independente da orientação do sistema de coordenadas. Isso só é possível se k_{ijmn} for um tensor isotrópico. Conforme conhecido na literatura, todos os tensores isotrópicos de ordem par são construídos a partir de produtos do δ_{ij} (delta de Kronecker), e um tensor isotrópico de quarta ordem assume a forma [45]:

$$k_{ijmn} = \lambda\delta_{ij}\delta_{mn} + \mu\delta_{im}\delta_{jn} + \gamma\delta_{in}\delta_{jm} \tag{2.20}$$

onde λ, μ e γ são escalares dependentes do estado termodinâmico local. Dado que τ_{ij} é um tensor simétrico, requer-se que k_{ijmn} também seja simétrico nos índices i e j. Consequentemente, para consistência, deve-se ter $\mu = \gamma$. Assim, das 81 constantes originais, apenas duas, λ e μ, são preservadas sob as restrições de isotropia material e simetria de tensão. O tensor de tensões desviante, então, pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{mm}\delta_{ij} \tag{2.21}$$

onde $\varepsilon_{mm} = v_{m,m}$ é a taxa de deformação volumétrica [45].

O tensor de tensões completo, que estabelece as relações constitutivas entre a taxa de tensão e a taxa de deformação em um fluido, pode ser expresso como:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{mm}\delta_{ij} - p\delta_{ij} \tag{2.22}$$

onde λ e μ são constantes dependentes da temperatura do fluido. Estas são denominadas, respectivamente, viscosidade volumétrica e viscosidade dinâmica [45].

Em muitas aplicações, as suposições de Stokes estabelecem que $3\lambda + 2\mu = 0$. Esta condição é adotada devido à dificuldade em realizar medições conclusivas para determinar esses parâmetros. No entanto, esta suposição é considerada suficientemente precisa e é apoiada pela teoria cinética dos gases monoatômicos. Com isso, o

tensor de tensões pode ser simplificado em função da viscosidade dinâmica [45]:

$$\sigma_{ij} = \mu \left(v_{i,j} + v_{j,i} \right) - \left(p + \frac{2}{3} \mu v_{m,m} \right) \delta_{ij} \tag{2.23}$$

A equação de movimento para um fluido newtoniano é obtida ao substituir a equação constitutiva 2.23 na equação de Cauchy 2.15, e reescrevendo $p_{,j}\delta_{ij} = p_{,i}$ [45]:

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \rho g_i + \partial_j \left[\mu \left(v_{i,j} + v_{j,i} \right) - \frac{2}{3} \mu v_{m,m} \delta_{ij} \right] \tag{2.24}$$

Esta equação é uma forma geral da equação de Navier-Stokes, onde a viscosidade μ pode ser uma função do estado termodinâmico, o que geralmente ocorre devido à forte dependência da temperatura. Contudo, se as variações de temperatura no fluido forem pequenas, μ pode ser tratada como constante nas derivadas, simplificando a expressão para [45]:

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \rho g_i + \mu \left(v_{i,jj} + \frac{1}{3} v_{j,ji} \right) \tag{2.25}$$

Considerando um fluido incompressível, onde $v_{j,j} = 0$, e ignorando os efeitos viscosos, geralmente válidos longe das bordas do campo de fluxo, chegamos à equação de Euler, apropriada para processos acústicos de baixa amplitude [43]:

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \rho g_i \tag{2.26}$$

Para pequenas oscilações acústicas, linearizamos os valores de referência: $s = (\rho - \rho_0)/\rho_0$, onde ρ, ρ_0 e s são a densidade instantânea, a densidade de equilíbrio e a condensação, respectivamente, sendo $\rho_0 s$ a densidade acústica. $p = p' - p'_0$, onde p', p'_0 e p são a pressão instantânea, a pressão de equilíbrio e a pressão acústica, respectivamente. Assumindo que o processo acústico é isentrópico (adiabático e reversível), tanto a condutividade térmica quanto o gradiente de temperatura de perturbação são tão pequenos que a transferência de energia entre elementos próximos do fluido é negligenciável. Dessa forma, a relação isentrópica entre pressão e densidade é determinada expandindo a pressão em uma série de Taylor [43]:

$$p' = p'_0 + \left(\frac{\partial p'}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial \rho^2} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 + \dots \tag{2.27}$$

Neste contexto, calculamos as derivadas parciais para a compressão e expansão isentrópica do fluido em relação à sua densidade de equilíbrio. Contudo, como as oscilações acústicas são consideradas pequenas, apenas o termo de menor ordem em $(\rho - \rho_0)$ é relevante. Isso estabelece uma relação linear entre a variação de pressão

e a alteração na densidade, que pode ser escrita em função do módulo volumétrico adiabático $K = \rho_0 \left(\frac{\partial p'}{\partial \rho}\right)_{\rho_0}$ [43]:

$$p' - p'_0 = K\frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0} \tag{2.28}$$

O módulo volumétrico adiabático é um parâmetro que resume a tendência de um material sofrer deformações sob carga uniforme em todas as direções, descrevendo assim sua elasticidade volumétrica. Para a pressão acústica p e a condensação s (assumindo que a condensação seja pequena), a relação é expressa como [43]:

$$p = Ks \tag{2.29}$$

As equações linearizadas anteriormente 2.12 e 2.26 podem ser combinadas para formar uma única equação diferencial. Considerando o fluido como irrotacional (sem excitações acústicas), onde $\rho_0 g_i = \partial_i p'_0$ e $\partial_i p' = \partial_i p + \rho_0 g_i$, reescrevemos a equação de Euler em sua forma linearizada [43]:

$$(1+s)\dot{v}_i = \frac{-p_{,i}}{\rho_0} + sg_i \tag{2.30}$$

Se considerarmos $|sg_i| \ll |p_{,i}|/\rho_0$ e $|s| \ll 1$, obtemos a equação linear de Euler [43]:

$$\rho_0 \dot{v}_i = -p_{,i} \tag{2.31}$$

Aplicando a divergência à equação linear de Euler [43]:

$$\partial_i \left(\rho_0 \dot{v}_i\right) = -p_{,ii} \tag{2.32}$$

Após realizar a derivada temporal da equação de continuidade linearizada $\rho = \rho_0(1+s)$, considerando que espaço e tempo são independentes e p é no máximo uma função fraca do tempo, temos [43]:

$$\rho_0 \ddot{s} + \partial_i(\rho_0 \dot{v}_i) = 0 \tag{2.33}$$

Eliminando o termo divergente entre as duas equações, deduzimos [43]:

$$p_{,ii} = \rho_0 \ddot{s} \tag{2.34}$$

Dado que o módulo volumétrico permite escrever a condensação como $s = p/K$ e que K é uma função fraca do tempo relacionada à velocidade termodinâmica do

som $c^2 = K/\rho_0$, deduz-se a equação linear da onda (sem considerar perdas) [43]:

$$p_{,ii} = \frac{1}{c^2}\ddot{p} \tag{2.35}$$

Considerando que as variações em relação ao valor de referência são pequenas, a notação relativa às oscilações é omitida. Ao determinar o rotacional da equação da onda vetorial, demonstra-se que as ondas cisalhantes não se propagam em fluidos invíscidos; portanto, as ondas existentes são apenas de dilatação. Assim, a equação 2.35 representa a propagação de ondas de dilatação, onde c é a velocidade da onda no fluido isentrópico [43]:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \tag{2.36}$$

Para a formulação acústica adotada neste trabalho, adicionamos uma fonte $f = f(\mathbf{x}, t)$ e amortecimento viscoso ξ à equação da onda:

$$p_{,ii} - \frac{\xi\dot{p}}{K} - \frac{\ddot{p}}{c^2} + f = 0 \tag{2.37}$$

Para concluir a descrição do problema acústico, deve-se explicitar agora as condições iniciais e as condições de contorno apropriadas para a equação diferencial parcial.

2.1.2 Condições iniciais

As condições iniciais a serem utilizadas com a equação da onda (2.37), para t=0, ao longo do contorno Γ e domínio Ω são:

$$p(\boldsymbol{x}, 0) = \bar{p}_0(\boldsymbol{x}) \tag{2.38a}$$

$$\dot{p}(\boldsymbol{x}, 0) = \dot{\bar{p}}_0(\boldsymbol{x}) \tag{2.38b}$$

onde $\bar{p}^0(\boldsymbol{x})$ e $\dot{\bar{p}}^0(\boldsymbol{x})$ são os valores prescritos do problema.

2.1.3 Condições de contorno

As condições de contorno a serem utilizadas com a equação da onda (2.37), para t>0, ao longo do contorno Γ, sendo $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_q$, são:

$$p(\boldsymbol{x}, t) = \bar{p}(\boldsymbol{x}, t) \quad \textit{para } \boldsymbol{x} \textit{ em } \Gamma_p \tag{2.39a}$$

$$q(\boldsymbol{x}, t) = p_{,i}(\boldsymbol{x}, t)\, n_i(\boldsymbol{x}) = \bar{q}(\boldsymbol{x}, t) \quad \textit{para } \boldsymbol{x} \textit{ em } \Gamma_q \tag{2.39b}$$

onde q representa o fluxo ao longo do contorno de normal representada pelo vetor n_i.

2.1.4 PML acústico

Considere um fluido linear, ideal, invíscido e compressível, movendo-se com velocidade média zero na ausência de forças de corpo. A pressão dinâmica p no fluido (em excesso de pressão estática) é regida pela equação da onda escalar, apresentada aqui em uma forma ligeiramente não convencional para facilitar a formulação das equações para a Camada Perfeitamente Encaixada (PML , do inglês *Perfectly Matched Layer*):

$$\varphi_{i,i} = \rho\ddot{p} \tag{2.40a}$$

$$\varphi_i = K\gamma_i \tag{2.40b}$$

$$\gamma_i = p_{,i} \tag{2.40c}$$

onde K é o módulo volumétrico do meio e ρ é sua densidade de massa; φ_i e γ_i são apenas variáveis internas introduzidas para permitir que a equação da onda seja escrita como acima [42].

Se o meio estiver sujeito a uma excitação harmônica no tempo (por condições de contorno), então a pressão p também é harmônica no tempo, da forma $p(\boldsymbol{x}, t) = \bar{p}(\boldsymbol{x}) \exp(i\omega t)$, onde ω é a frequência de excitação, com $\bar{p}(\boldsymbol{x})$ regida pela forma reformulada da equação da onda:

$$\bar{\varphi}_{i,i} = -\omega^2\rho\bar{p} \tag{2.41a}$$

$$\bar{\varphi}_i = K\bar{\gamma}_i \tag{2.41b}$$

$$\bar{\gamma}_i = \bar{p}_{,i} \tag{2.41c}$$

onde $\bar{\varphi}_i$ e $\bar{\gamma}_i$ são amplitudes harmônicas de φ_i e γ_i, respectivamente [42].

Quando consideramos um domínio ilimitado, a Equação 2.41 admite soluções da forma: $\bar{p}(\boldsymbol{x}) = \exp(-iK\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{r})$, onde $\boldsymbol{r}$ é um vetor unitário que denota a direção de propagação [42].

Considere um sistema de equações da mesma forma que a Equação 2.41, mas com x_i substituído por coordenadas esticadas $\tilde{x}_i$, definidas como:

$$\widetilde{x}_i = \int_0^{x_i} \lambda_i(s)\, ds \tag{2.42}$$

onde λ_i são funções contínuas, complexas, não nulas de estiramento de coordenadas. Este estiramento de coordenadas implica formalmente [42]:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{1}{\lambda_i(x_i)} \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.43}$$

Assim, este sistema de equações pode ser definido como:

$$\Lambda_{ij}\bar{\varphi}_{j,i} = -\omega^2\rho\bar{p} \tag{2.44a}$$

$$\bar{\varphi}_i = K\bar{\gamma}_i \tag{2.44b}$$

$$\bar{\gamma}_i = \Lambda_{ij}\bar{p}_{,j} \tag{2.44c}$$

onde $\Lambda_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $\Lambda_{ij} = 1/\lambda_i(x_i)$ para $i = j$ [42].

Um meio perfeitamente adaptado para ondas acústicas harmônicas no tempo, chamado de PMM (*Perfectly Matched Medium*), é definido como aquele regido pela Equação 2.44; um meio acústico corresponde a $\lambda_i(x_i) = 1$. A Equação 2.44 é definida independentemente, mas motivada pela definição de $\tilde{x}_i$. Dada a continuidade de λ_i, soluções admitidas no PMM são similares àquelas da Equação 2.41 no meio acústico, mas com x_i substituído por $\tilde{x}_i$: $\bar{p}(\boldsymbol{x}) = \exp\left(-iK\widetilde{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{r}\right)$, no domínio ilimitado [42].

A propriedade de correspondência perfeita desses PMMs é que, se dois PMMs com diferentes λ_i forem colocados adjacentes um ao outro, com as funções λ_i dos dois meios coincidindo na interface dos meios, então uma onda de propagação passará através da interface sem gerar nenhuma onda refletida. Essa propriedade é demonstrada da seguinte maneira: presume-se implicitamente na definição do PMM que λ_i é função apenas de x_i, ou seja, os estiramentos de coordenadas são desacoplados. Para fins de ilustração, considere o problema bidimensional no plano x_1-x_2, com dois PMMs definidos sobre ele: um no semiplano esquerdo ($= \{(x_1, x_2)|x_1 < 0\}$) com $\lambda_i(x_i) = \lambda_i^{\text{esq}}(x_i)$, e outro no semiplano direito ($= \{(x_1, x_2)|x_1 \geq 0\}$) com $\lambda_i(x_i) = \lambda_i^{\text{dir}}(x_i)$. Se $\lambda_2^{\text{esq}} = \lambda_2^{\text{dir}}$ e $\lambda_1^{\text{esq}}(0) = \lambda_1^{\text{dir}}(0)$, então os dois PMMs podem ser considerados como um único PMM , onde um λ_i contínuo é definido em partes nos dois semiplanos, e cada λ_i é função apenas de x_i; assim, não há interface para gerar nenhuma onda refletida [42].

Uma escolha adequada de λ_i impõe uma atenuação nas soluções da Equação 2.44 da onda. Isso é alcançado quando as funções λ_i são expressas através de funções de atenuação reais e contínuas, f_i, que admitem solução do tipo: $\bar{p}(\boldsymbol{x}) = \exp\left(-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{r}\right)\exp\left(-iK\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{r}\right)$, da seguinte forma [42]:

$$\lambda_i(x_i) = 1 - i\tfrac{f_i(x_i)}{K} \tag{2.45a}$$

$$\widetilde{x}_i = x_i - i\tfrac{F_i(x_i)}{K} \tag{2.45b}$$

$$F_i(x_i) = \textstyle\int_0^{x_i} f_i(\xi)\, d\xi \tag{2.45c}$$

Portanto, se $F_i(x_i) > 0$ e $r_i > 0$, então a pressão $\bar{p}(\boldsymbol{x})$ será atenuada na direção x_i seguindo um fator de $\exp(-F_i(x_i)r_i)$, ocorrendo essa atenuação de forma independente da frequência. As funções de atenuação são escolhidas a partir da equação

empírica:

$$f_i(x_i) = f_0 \left(\frac{l_i}{L_p} \right)^n \tag{2.46}$$

onde l_i é a distância do início do domínio PML até a coordenada calculada, L_p é o tamanho do domínio PML na direção x_i e f_0 é a amplitude de atenuação, com bons resultados obtidos com $f_0 = 5$. O expoente n controla o perfil de crescimento da função de atenuação dentro da camada PML, sendo $n = 1$ uma escolha comum na literatura por proporcionar uma transição suave e eficaz da absorção ao longo do domínio [42].

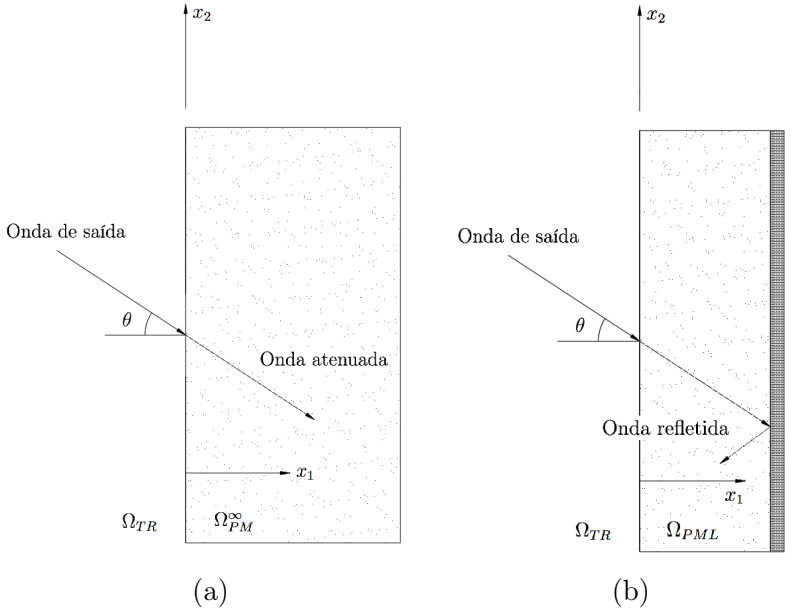


Figura 2.4: Esquematização de um domínio PML:(a) Um PMM adjacente a um domínio "limitado" (truncado) atenuando uma onda plana de saída; (b) um PML com uma borda fixa refletindo a onda de volta para o domínio limitado.

Considere uma onda propagando-se em um domínio acústico ilimitado, o plano x_1-x_2, regido pela Equação 2.41. O objetivo de definir um PML é simular essa propagação de onda utilizando um domínio limitado correspondente. Para isso, substituímos o domínio ilimitado por $\Omega_{\mathrm{TR}} \cup \Omega_{\mathrm{PM}}^{\infty}$, como mostrado na Figura 2.4a, onde Ω_{TR} é um domínio "limitado"(truncado), regido pela Equação 2.41, e $\Omega_{\mathrm{PM}}^{\infty}$ é o PML ilimitado, regido pela Equação 2.44, com λ_1 conforme estabelecido na Equação 2.45, satisfazendo $f_1(0) = 0$, e $\lambda_2 = 1$. Onde Ω_{TR} atua como um caso particular de PML onde $\lambda_i(x_i) = 1$, e esses dois meios são configurados para corresponder entre si na interface $\Omega_{TR} - \Omega_{PM}^{\infty}$. Assim, todas as ondas da forma: $\bar{p}\,(\boldsymbol{x}) = \exp\left(-iK\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{r}\right)$ que se propagam para fora de Ω_{TR} (ondas com $r_1 > 0$) são completamente absorvidas e, em seguida, atenuadas na direção x_1 em $\Omega_{\mathrm{PM}}^{\infty}$. Dessa forma, as pressões em Ω_{TR} devido a uma onda se propagando para fora são exatamente as mesmas que as pressões no domínio acústico ilimitado original em Ω_{TR} devido à mesma onda [42].

Se esta onda propagando-se para fora for suficientemente atenuada em uma distância finita, então $\Omega_{\mathrm{PM}}^{\infty}$ pode ser truncada por uma fronteira fixa sem nenhuma reflexão significativa da onda. Conforme ilustrado na Figura 2.4b, essa camada Ω_{PML} é denominada PML . Se a reflexão da onda na fronteira fixa não for significativa, então as pressões deste sistema ($\Omega_{\mathrm{TR}} \cup \Omega_{\mathrm{PML}}$) em Ω_{TR} devem ser quase as mesmas que as do domínio acústico ilimitado em Ω_{TR} [42].

O efeito do truncamento do domínio no PML é analisado estudando a reflexão de ondas planas pela fronteira fixa. Conforme mostrado na Figura 2.4b, a onda plana, incidente em um ângulo θ e com amplitude unitária ao entrar no PML , é refletida na fronteira fixa. Portanto, o movimento total da onda pode ser representado como: $\bar{p}(\boldsymbol{x}) = \exp(-iK\widetilde{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{r}^I) + R\exp(-iK\widetilde{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{r}^R)$, onde $\boldsymbol{r}^I$ e $\boldsymbol{r}^R$ representam as direções de propagação das ondas incidentes e refletidas, respectivamente. Se a onda incidente tem amplitude unitária, então a amplitude $|R|$ da onda refletida ao sair do PML é dada por: $|R| = \exp(-2F_1(L_p)\cos(\theta))$ [42].

Essa expressão estabelece que o coeficiente de reflexão é controlado pela escolha dos parâmetros f_1 e L_P (independentemente do tamanho do domínio limitado ao qual o PML está adjacente) e é influenciado pelo ângulo de incidência. Isso sugere que o domínio limitado pode ser restrito à região de interesse na análise, reduzindo assim o custo computacional, caso os parâmetros e a orientação do PML sejam escolhidos adequadamente. Embora os argumentos apresentados tenham sido baseados em um cenário bidimensional para simplificar a explicação, o mesmo princípio aplica-se a problemas tridimensionais, levando a conclusões semelhantes [42].

Considere dois sistemas de coordenadas cartesianas retangulares para o plano como segue: (i) um sistema $\{x_i\}$, com respeito a uma base ortonormal $\{e_i\}$, e (ii) um sistema $\{x_i'\}$, com respeito a outra base ortonormal $\{e_i'\}$, com as duas bases relacionadas pela matriz de rotação $\mathbf{Q}$, com componentes $Q_{ij} = e_i \cdot e_j'$. A Equação 2.44 pode ser reescrita em termos das coordenadas x_i' substituindo x_i por x_i', representando um meio no qual as ondas são atenuadas nas direções e_1' e e_2', em vez das direções e_1 e e_2 [42].

Representando um PML onde as ondas são atenuadas nas direções e_1' e e_2', como na Equação 2.44, define-se a função $\mathcal{J}$ como o determinante do jacobiano do alongamento das coordenadas, dado por: $\mathcal{J} = \lambda_1(x_1')\lambda_2(x_2')$ (caso 2D). Multiplicando a Equação 2.44a por $\mathcal{J}$ e utilizando o fato de que λ_i é função apenas de x_i', a equação pode ser reescrita como [42]:

$$\widetilde{\Lambda}_{ij}\bar{\varphi}_{j,i} = -\omega^2\rho\mathcal{J}\bar{p} \tag{2.47a}$$

$$\bar{\varphi}_j = K(1 + 2ia_0\zeta)\bar{\gamma}_j \tag{2.47b}$$

$$\bar{\gamma}_i = \Lambda_{ij}\bar{p}_{,j} \tag{2.47c}$$

onde

$$\widetilde{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{Q}\widetilde{\boldsymbol{\Lambda}}'\boldsymbol{Q}^T \tag{2.48a}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}'\boldsymbol{Q}^T \tag{2.48b}$$

com

$$\widetilde{\boldsymbol{\Lambda}}' = \begin{bmatrix} \lambda_2\left(x_2'\right) & 0 \\ 0 & \lambda_1\left(x_1'\right) \end{bmatrix} \tag{2.49a}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}' = \begin{bmatrix} \lambda_1\left(x_1'\right)^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2\left(x_2'\right)^{-1} \end{bmatrix} \tag{2.49b}$$

A Equação 2.47 foi ajustada para incorporar explicitamente o amortecimento material de Voigt por meio do princípio de correspondência, em termos de uma razão de amortecimento ζ e uma frequência adimensional $a_0 = k_s b$, onde b é uma medida característica do comprimento físico do problema, $ks = w/c$ é o número de onda e c é a velocidade da onda [42].

Como a multiplicação ou divisão pelo fator $i\omega$ no domínio da frequência corresponde a uma derivada ou integral, respectivamente, no domínio do tempo, equações harmônicas no tempo são facilmente transformadas em equações correspondentes para movimento transiente se a dependência em frequência for apenas uma dependência simples nesse fator. Portanto, as funções de estiramento são escolhidas na forma [42]:

$$\lambda_i\left(x_i'\right) = 1 + f_i^e\left(x_i'\right) - i\frac{f_i^p\left(x_i'\right)}{k_s} \tag{2.50}$$

onde as funções f_i^e servem para atenuar ondas evanescentes (de curta duração) enquanto as funções f_i^p servem para atenuar ondas propagantes (adicionado f_i^e na Equação 2.45a). Nesse trabalho, adotou-se as duas funções atenuantes iguais à equação 2.46. Para λ_i como na equação 2.50, os tensores de estiramento $\widetilde{\boldsymbol{\Lambda}}$ e $\boldsymbol{\Lambda}$ podem ser escritos como [42]:

$$\widetilde{\boldsymbol{\Lambda}} = \widetilde{\boldsymbol{F}}^e + (iw)^{-1}\widetilde{\boldsymbol{F}}^p \tag{2.51a}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = [\boldsymbol{F}^e + (iw)^{-1}\boldsymbol{F}^p]^{-1} \tag{2.51b}$$

onde

$$\widetilde{\boldsymbol{F}}^{e} = \boldsymbol{Q}\widetilde{\boldsymbol{F}}^{e\prime}\boldsymbol{Q}^{T} \tag{2.52a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{F}}^{p} = \boldsymbol{Q}\widetilde{\boldsymbol{F}}^{p\prime}\boldsymbol{Q}^{T} \tag{2.52b}$$

$$\boldsymbol{F}^{e} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}^{e\prime}\boldsymbol{Q}^{T} \tag{2.52c}$$

$$\boldsymbol{F}^{p} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}^{p\prime}\boldsymbol{Q}^{T} \tag{2.52d}$$

com

$$\widetilde{\boldsymbol{F}}^{e\prime} = \begin{bmatrix} 1 + f_2^e\left(x_2'\right) & 0 \\ 0 & 1 + f_1^e\left(x_1'\right) \end{bmatrix} \tag{2.53a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{F}}^{p\prime} = \begin{bmatrix} cf_2^p\left(x_2'\right) & 0 \\ 0 & cf_1^p\left(x_1'\right) \end{bmatrix} \tag{2.53b}$$

$$\boldsymbol{F}^{e\prime} = \begin{bmatrix} 1 + f_1^e\left(x_1'\right) & 0 \\ 0 & 1 + f_2^e\left(x_2'\right) \end{bmatrix} \tag{2.53c}$$

$$\boldsymbol{F}^{p\prime} = \begin{bmatrix} cf_1^p\left(x_1'\right) & 0 \\ 0 & cf_2^p\left(x_2'\right) \end{bmatrix} \tag{2.53d}$$

Por fim, a equação 2.47c é pré-multiplicada por $iw\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$, as funções 2.50 e tensores 2.51 de estiramento são substituídas na Equação 2.47, e a transformada inversa de Fourier é aplicada à resultante para obter as equações no domínio do tempo para o PML [42]:

$$\widetilde{\varphi}_{i,i} = \rho f_m \ddot{p} + \rho \tfrac{c}{b} f_c \dot{p} + \left(\tfrac{c}{b}\right)^2 f_k p \tag{2.54a}$$

$$\varphi_j = K(\gamma_j + \tfrac{2\zeta b}{c}\dot{\gamma}_j) \tag{2.54b}$$

$$F_{ij}{}^{e}\dot{\gamma}_j + F_{ij}{}^{p}\gamma_j = \dot{p}_{,i} \tag{2.54c}$$

onde

$$\widetilde{\varphi}_i = F_{ij}{}^{e}\varphi_j + F_{ij}{}^{p}\Phi_j \tag{2.55a}$$

$$\Phi_j = \textstyle\int_0^t \varphi_j d\tau \tag{2.55b}$$

com

$$f_m = [1 + f_1^e(x_1')][1 + f_2^e(x_2')] \tag{2.56a}$$

$$f_c = [1 + f_1^e(x_1')]f_2^p(x_2') + [1 + f_2^e(x_2')]f_1^p(x_1') \tag{2.56b}$$

$$f_k = f_1^p(x_1')f_2^p(x_2') \tag{2.56c}$$

A aplicação da transformada inversa de Fourier para obter Σ_j assume que $\widetilde{\varphi}_i(0) = 0$. A presença da integral temporal de φ_i nas equações governantes, embora não convencional do ponto de vista da mecânica dos meios contínuos, não é incomum em uma implementação no domínio do tempo de um PML obtido sem separação de campos [42].

2.2 Modelo Elástico

Nesta seção, a formulação elastodinâmica será abordada, e suas equações principais serão desenvolvidas com base no referencial lagrangeano. As construções humanas, em sua maioria, dependem da mecânica dos sólidos para garantir estabilidade e resistência a tensões externas. Sejam casas, torres e pontes, projetadas para permanecerem estáticas, ou automóveis, aviões e navios, projetados para se moverem, suas integridades estruturais dependem das propriedades dos materiais de que são feitos [47].

Durante a concepção de um projeto, os engenheiros devem conhecer as tensões internas das estruturas para definir limites de segurança e prever riscos. Estes cálculos são realizados a partir das equações elásticas, utilizando as propriedades dos materiais. No estudo do modelo sólido, essas formulações são implementadas em algoritmos que permitem obter respostas mais precisas, fundamentais para o projeto de estruturas complexas. Além disso, as estruturas devem ser arquitetadas de forma a evitar o superdimensionamento, o que é essencial nos dias atuais, visando uma utilização consciente das matérias-primas e a redução dos custos das obras.

A formulação apresentada nesta seção é baseada nos desenvolvimentos clássicos da literatura sobre mecânica dos sólidos e teoria da elasticidade, em particular nos trabalhos de Marsden e Hughes [48], Batra [49], Dowell [50], Lautrup [51] e Lai et al. [52], que serviram como referência principal para a construção deste modelo. A apresentação é feita de forma sucinta, aproveitando definições previamente estabelecidas no modelo acústico e adaptando-as ao contexto da elasticidade.

Nesse cenário, a elastostática trata das deformações em sólidos submetidos a forças externas simples, como ações gravitacionais ou eletromagnéticas. Supõe-se que os sólidos sejam constituídos de um material elástico linear, isotrópico e homogêneo. As equações fundamentais da elastostática são derivadas a partir de uma combinação da equação de Cauchy para a conservação do momento linear, do tensor de deformação de Cauchy e da lei de Hooke.

Com essas considerações, as variáveis relacionadas ao meio sólido são:

- Deslocamento, $\boldsymbol{u} = u_i(\boldsymbol{x}, t)$;
- Deformações, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$;
- Tensões de Cauchy, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$;
- Forças de superfície, $\tau_i = \sigma_{ij} n_j$,

onde $\boldsymbol{n}$ é o vetor normal unitário à superfície, $\boldsymbol{x} \in \Omega$ representa uma posição espacial e $t \in [0, \infty)$ o instante de tempo. Considera-se que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) seja uma região bem delimitada no espaço, cujo contorno $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1}$ está subdividido em:

- Γ_u, onde os deslocamentos são conhecidos (condições de contorno essenciais ou Dirichlet);
- Γ_τ, onde as forças de superfície são conhecidas (condições de contorno naturais ou Neumann).

2.2.1 Equações Governantes

Considere uma barra cilíndrica esbelta sujeita a uma tensão estática causada por uma força axial P, resultando em um alongamento $\Delta\varepsilon$, conforme ilustrado na Figura 2.5. A relação entre a tensão e o alongamento é representada pela curva na figura. Na seção linear OA, conhecida como faixa proporcional, se a força P for removida (descarregamento), o ponto na curva retorna ao ponto de origem O, indicando um comportamento elástico. Caso a força exceda o ponto A e posteriormente seja removida, segue-se o trajeto $OABC$, deixando um alongamento residual OC na barra. Se a força for reaplicada a partir de C, observa-se um comportamento elástico similar ao inicial, com uma inclinação igual à de OA, porém com um limite proporcional expandido, indicando que a barra foi endurecida pelo trabalho [52].

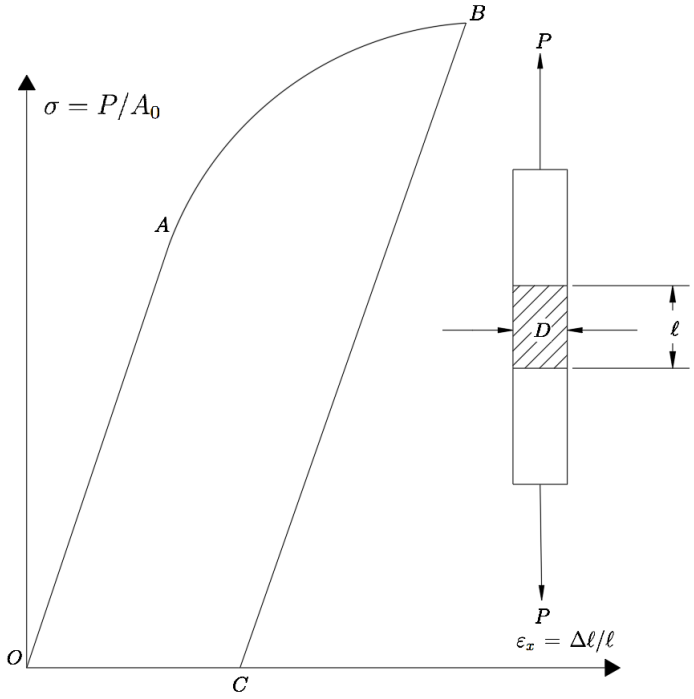


Figura 2.5: Diagrama de carga-alongamento da barra cilíndrica

O diagrama de carga-deformação (Figura 2.5) ilustra a relação entre a carga aplicada e a deformação da barra, variando de acordo com a seção transversal e o comprimento ℓ. Para uma análise do material que independe das dimensões da barra, define-se a tensão $\sigma = P/A_0$, onde A_0 é a área da seção transversal inicial, e a deformação axial $\varepsilon_x = \Delta\ell/\ell$ como a variação relativa do comprimento. Essas definições permitem apresentar dados independentemente das dimensões da barra. A inclinação da linha OA é um coeficiente material conhecido como módulo de elasticidade ou módulo de Young, dado por [52]:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_x} \tag{2.57}$$

Durante o teste de tensão, observam-se também alterações na dimensão transversal da barra. Supondo uma barra com seção transversal circular inicial de diâmetro D, em condições ideais (material hipotético, isotrópico e homogêneo), a seção transversal mantém sua forma circular. A alteração no diâmetro é ΔD, e a deformação transversal $\varepsilon_y = \Delta D/D$. A relação entre as taxas de deformação transversal e longitudinal fornece o coeficiente de Poisson ν, expresso como [52]:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \tag{2.58}$$

Adicionalmente, a análise inclui a mudança de volume da barra sob tensão hidrostática σ_h, onde o estado de tensão é representado por $\sigma_{ij} = \sigma_h \delta_{ij}$. A correlação entre a tensão hidrostática aplicada σ_h e a variação volumétrica específica ε_v (dilatação) é observada, e para variações volumétricas modestas em materiais elásticos, esta relação é linear, caracterizada pelo módulo volumétrico K, como [52]:

$$K = \frac{\sigma_h}{\varepsilon_v} \tag{2.59}$$

Um experimento de torção revela outra constante elástica. Ao aplicar um momento de torção M_t ao longo do eixo do cilindro de comprimento l, a barra torce por um ângulo θ. A relação linear entre θ e M_t para pequenos ângulos define o módulo de cisalhamento G, dado por:

$$G = \frac{M_t \ell}{I_p \theta} \tag{2.60}$$

onde $I_p = \pi r^4/2$ é o momento polar de inércia. Para sólidos elásticos anisotrópicos, as constantes de material variam de acordo com a orientação da amostra [52].

Neste estudo, focamos em materiais isotrópicos, os quais possuem propriedades mecânicas uniformes em todas as direções, eliminando a necessidade de uma orientação específica para descrição. Essa característica é comum em muitos metais, como aço e alumínio, assumidos como isotrópicos dentro de uma margem de erro aceitável [52].

A formulação do comportamento de um material ideal, descrito como um sólido elástico de acordo com a Lei de Hooke, é realizada por meio de uma equação constitutiva que relaciona tensão e deformação. Esta relação é expressa utilizando o tensor de tensão de Cauchy σ_{ij} e o tensor de deformação infinitesimal ε_{kl}:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \tag{2.61}$$

onde C_{ijkl} são componentes de um tensor de elasticidade de quarta ordem. Apesar da existência de 81 coeficientes em C_{ijkl}, a simetria dos tensores reduz o número de coeficientes independentes necessários para 21, devido às relações $C_{ijkl} = C_{ijlk}$,

$C_{ijkl} = C_{jikl}$, e $C_{ijkl} = C_{klij}$ [52].

Para materiais isotrópicos, os componentes do tensor de elasticidade permanecem inalterados sob qualquer rotação ou reflexão da base ortogonal, caracterizando o tensor como isotrópico. Portanto, um tensor isotrópico de quarta ordem pode ser expresso como:

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \mu\delta_{il}\delta_{jk} \tag{2.62}$$

Aqui, λ e μ são as constantes de Lamé, as únicas constantes restantes devido à simetria requerida. A equação constitutiva para um sólido isotrópico linearmente elástico, então, torna-se:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \tag{2.63}$$

onde ε_{kk} representa a dilatação. As constantes de Lamé devem ser determinadas experimentalmente para um material específico, visto que elas possuem dimensões de força por unidade de área [52].

Além disso, a relação entre os componentes de tensão e deformação pode ser invertida, fornecendo a equação de deformação [52]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left[\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right] \tag{2.64}$$

e a equação para a deformação volumétrica (dilatação) é dada por:

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\sigma_{kk}}{3\lambda + 2\mu} \tag{2.65}$$

Ao considerar uma situação em que apenas um dos componentes de tensão normal é distinto de zero, estamos diante de um estado de tensão uniaxial. Este estado representa uma aproximação precisa para a condição de tensão em uma barra cilíndrica submetida a carga, como descrito inicialmente. Se a direção axial corresponde à direção $\boldsymbol{e}_1$, e sendo σ_{11} o único componente significativo de tensão, a partir da Equação 2.64, obtemos [52]:

$$\varepsilon_{11} = \tfrac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{11} \tag{2.66a}$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\tfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\varepsilon_{11} \tag{2.66b}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \tag{2.66c}$$

A razão $\sigma_{11}/\varepsilon_{11}$, que corresponde ao módulo de Young E, é dado por:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \tag{2.67}$$

A razão $-\varepsilon_{22}/\varepsilon_{11}$ e $-\varepsilon_{33}/\varepsilon_{11}$, que corresponde ao coeficiente de Poisson ν, é:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \tag{2.68}$$

Em situações onde somente um par de tensões de cisalhamento está presente e todas as outras são nulas, denominamos isso como um estado de cisalhamento puro. Aqui, as tensões de cisalhamento são descritas por [52]:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{\tau}{2\mu} \tag{2.69}$$

O módulo de cisalhamento G é então definido pela relação entre a tensão de cisalhamento τ e a pequena alteração angular entre elementos originalmente alinhados ao longo das direções $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$ [52]:

$$G = \frac{\tau}{2\varepsilon_{12}} \tag{2.70}$$

Comparando, observamos que a constante de Lamé μ é equivalente ao módulo de cisalhamento G.

No estado hidrostático de tensão, definido pelo tensor de tensão $\sigma_{ij} = \sigma_h \delta_{ij}$, a dilatação volumétrica ε_{kk}, a partir da equação 2.65, é [52]:

$$\varepsilon_{kk} = \frac{3\sigma_h}{3\lambda + 2\mu} \tag{2.71}$$

O módulo volumétrico K, que é a razão entre a tensão hidrostática normal σ_h e a mudança no volume unitário, é expresso como [52]:

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{2.72}$$

As constantes de Lamé, o módulo de Young, o módulo de cisalhamento, o coeficiente de Poisson e o módulo volumétrico estão interconectados em sua natureza. Em um material isotrópico que obedece à elasticidade linear, apenas duas dessas constantes são necessárias para definir completamente o comportamento elástico do material, e todas as outras podem ser derivadas destas duas [52].

Continuando a dedução da teoria elástica, a equação de Cauchy, que deve ser satisfeita pelo campo de tensão em qualquer meio contínuo, é reescrita como:

$$\rho a_i = \rho g_i + \sigma_{ij,j} \tag{2.73}$$

onde ρ é a densidade, a_i a componente da aceleração, ρg_i a componente da força de corpo por unidade de volume, e σ_{ij} as componentes de tensão de Cauchy. Todos os termos são associados a uma partícula atualmente na posição (x_1, x_2, x_3) [52].

Considerando apenas movimentos caracterizados por pequenos deslocamentos, assumimos que cada partícula permanece próxima do seu estado natural. A posição

de uma partícula típica no estado natural é denotada por X_i, de tal forma que $x_i \approx X_i$. Além disso, os componentes do gradiente de deslocamento $u_{i,j}$ são considerados insignificantes. Assim, define-se $x_i = X_i + u_i$, onde u_i representa um deslocamento [52].

Os componentes de velocidade relacionados aos componentes de deslocamento são dados por:

$$v_i = (\dot{u}_i)_{x_j-\text{fixo}} + v_j u_{i,j} \tag{2.74}$$

onde $v_j u_{i,j}$ são pequenos componentes de velocidade associados a pequenos deslocamentos. Negligenciando termos de ordem superior, os componentes de velocidade v_i e aceleração a_i são [52]:

$$v_i = (\dot{u}_i)_{x_j-\text{fixo}} \tag{2.75a}$$

$$a_i = (\ddot{u}_i)_{x_j-\text{fixo}} \tag{2.75b}$$

A alteração do volume de um material é ilustrada considerando um paralelepípedo retangular originado de um ponto P e estendido nas principais direções espaciais, com lados originalmente medindo ds_1, ds_2, e ds_3. Após a deformação, esses comprimentos são alterados para $ds_1(1+\varepsilon_{11})$, $ds_2(1+\varepsilon_{22})$, e $ds_3(1+\varepsilon_{33})$, onde ε_{11}, ε_{22} e ε_{33} representam as deformações principais. O volume diferencial após a deformação é [52]:

$$dV = (1 + \varepsilon_{kk})dV_0 \tag{2.76}$$

Portanto, as densidades são relacionadas por:

$$\rho = (1 + \varepsilon_{kk})^{-1}\rho_0 \approx (1 - \varepsilon_{kk})\rho_0 \tag{2.77}$$

Utilizando o teorema binomial e ignorando termos de ordem superior, temos:

$$\rho_0 \ddot{u}_i = \rho_0 g_i + \sigma_{ij,j} \tag{2.78}$$

Para um campo de deslocamento $u_i(\boldsymbol{x}, t)$, o campo de deformação ε_{ij} é calculado a partir da parte simétrica do gradiente de deslocamento [52]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{2.79}$$

Substituindo o tensor de deformação 2.79 no tensor de tensões 2.63, obtemos:

$$\sigma_{ij} = \mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \tag{2.80}$$

Considerando a equação resultante 2.80 em conjunto com a equação de Cauchy

2.78, e negligenciando pequenas variações na massa do volume inicial (aproximando que a densidade ρ é praticamente igual à densidade inicial ρ_0, ou seja, $\rho \approx \rho_0$), deduzimos as equações de movimento de Navier-Cauchy:

$$\rho \ddot{u}_i = \rho g_i + (\mu + \lambda) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} \tag{2.81}$$

onde o gradiente de $\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$ é $\varepsilon_{kk,i}$, e $\varepsilon_{kk} = u_{j,j}$ [52].

Considere agora uma sequência infinita de ondas planas senoidais que descrevem o seguinte movimento:

$$u_1 = \varepsilon \sin\left(\frac{2\pi}{l}\left(x_1 - c_p t\right)\right), \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0 \tag{2.82}$$

Neste cenário, as partículas realizam oscilações harmônicas simples de amplitude reduzida em torno de seu estado natural, movendo-se sempre paralelamente à direção $\boldsymbol{e}_1$. Em qualquer instante, todas as partículas em um plano perpendicular a $\boldsymbol{e}_1$ estão sincronizadas na mesma fase da oscilação harmônica [52].

Para garantir a sincronia, consideramos uma partícula em $x_1 + dx_1$ em um tempo t, que em um tempo $t + dt$ adquire a mesma fase do movimento que a partícula em x_1 no tempo t. Isso ocorre se: $(x_1 + dx_1) - c_p(t + dt) = x_1 - c_p t$, onde c_p é a velocidade de fase da onda, definida como a velocidade com que a perturbação senoidal de comprimento de onda l se move na direção $\boldsymbol{e}_1$. Este é um exemplo de onda longitudinal [52].

Para calcular a velocidade de fase c_p desta onda, primeiro determinamos os componentes de deformação:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon\left(\frac{2\pi}{l}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{l}\left(x_1 - c_p t\right)\right), \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{33} = 0 \tag{2.83}$$

A dilatação $\varepsilon_v = \varepsilon_{kk}$ é dada por:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{11} + 0 + 0 = \varepsilon_{11} = \varepsilon\left(\frac{2\pi}{l}\right)\cos\frac{2\pi}{l}(x_1 - c_p t) \tag{2.84}$$

e os componentes não nulos da tensão são:

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon\left(\frac{2\pi}{l}\right)\cos\frac{2\pi}{l}(x_1 - c_p t), \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \lambda\varepsilon_{11} \tag{2.85}$$

Substituindo σ_{11} e u_1 na Equação 2.78, temos:

$$-\rho_o \varepsilon\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 {c_p}^2 \sin\frac{2\pi}{l}(x_1 - c_p t) = -(\lambda + 2\mu)\varepsilon\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \sin\frac{2\pi}{l}(x_1 - c_p t) \tag{2.86}$$

a partir da qual obtemos a velocidade de fase c_p como:

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \tag{2.87}$$

Conhecida como onda de dilatação, pois, durante a oscilação de uma partícula, observa-se uma variação harmônica no seu volume. Ainda vemos que a onda de dilatação c_p depende apenas das propriedades do material e não do comprimento de onda l [52].

Considerando agora uma sequência infinita de ondas planas harmônicas transversais:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \varepsilon \sin\left(\frac{2\pi}{l}\left(x_1 - c_s t\right)\right), \quad u_3 = 0 \tag{2.88}$$

O movimento das partículas é paralelo à direção $\boldsymbol{e}_2$, enquanto a perturbação se propaga na direção $\boldsymbol{e}_1$. Para este movimento, os componentes de deformação não nulos são:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{2\pi}{l}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{l}\right)\left(x_1 - c_s t\right) \tag{2.89}$$

e os únicos componentes não nulos da tensão são:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu\,\varepsilon\left(\frac{2\pi}{l}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{l}\right)\left(x_1 - c_s t\right) \tag{2.90}$$

Substituindo σ_{12} e u_2 na Equação 2.78, temos:

$$\mu\,\varepsilon\left(\frac{2\pi}{l}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{l}\right)\left(x_1 - c_s t\right) = \rho\,\varepsilon\sin\left(\frac{2\pi}{l}\left(x_1 - c_s t\right)\right) \tag{2.91}$$

a partir da qual obtemos a velocidade de fase c_s como:

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{2.92}$$

Conhecido como onda de cisalhamento, uma vez que a dilatação ε_{kk} é zero em todos os momentos. A velocidade de fase c_s, novamente independente do comprimento de onda l, adquire uma importância adicional por representar a velocidade de propagação tanto de um conjunto finito de ondas equivoluminais quanto de quaisquer perturbações equivoluminais arbitrariamente induzidas em uma região estável [52].

Com essas deduções, as equações de movimento de Navier-Cauchy 2.81 podem ser reescritas em função das velocidades de propagação da onda elástica:

$$\rho\ddot{u}_i = \rho g_i + ({c_p}^2 + {c_s}^2)u_{j,ji} + {c_s}^2 u_{i,jj} \tag{2.93}$$

Para concluir a descrição do problema sólido, agora, deve-se explicitar as condições iniciais e condições de contorno apropriadas da EDP .

2.2.2 Condições iniciais

As condições iniciais a serem utilizadas com as equações de Navier-Cauchy (2.81), para t=0, ao longo do contorno Γ e domínio Ω são:

$$u_i(\boldsymbol{x}, 0) = \bar{u}_i^0(\boldsymbol{x}) \tag{2.94a}$$

$$\dot{u}_i(\boldsymbol{x}, 0) = \dot{\bar{u}}_i^0(\boldsymbol{x}) \tag{2.94b}$$

onde $\bar{u}_i^0(\boldsymbol{x})$ e $\dot{\bar{u}}_i^0(\boldsymbol{x})$ são os valores prescritos do problema.

2.2.3 Condições de contorno

As condições de contorno a serem utilizadas com as equações de Navier-Cauchy (2.81), para t>0, ao longo do contorno Γ, sendo $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\tau$, são:

$$u_i\left(\boldsymbol{x}, t\right) = \bar{u}_i\left(\boldsymbol{x}, t\right) \quad \textit{para } \boldsymbol{x} \textit{ em } \Gamma_u \tag{2.95a}$$

$$\tau_i\left(\boldsymbol{x}, t\right) = \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}, t)\, n_j\left(\boldsymbol{x}\right) = \bar{\tau}_i\left(\boldsymbol{x}, t\right) \quad \textit{para } \boldsymbol{x} \textit{ em } \Gamma_\tau \tag{2.95b}$$

onde τ_i representa as forças de superfície ao longo do contorno de normal representada pelo vetor n_j.

2.2.4 PML elástico

Considere um meio elástico isotrópico homogêneo que se movimenta na ausência de forças de corpo. Os deslocamentos $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ deste meio são governados pelas seguintes equações [42]:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i \tag{2.96a}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{2.96b}$$

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{2.96c}$$

onde C_{ijkl}, escrito em termos do delta de Kronecker δ_{ij}, é dado por:

$$C_{ijkl} = \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \tag{2.97}$$

Se o meio é submetido a uma excitação harmônica no tempo (por condições de contorno), então o deslocamento $\boldsymbol{u}$ é harmônico no tempo da forma: $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})\exp(i\omega t)$, onde ω é a frequência de excitação, com $\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$ regido pela seguinte equação [42]:

$$\bar{\sigma}_{ij,j} = -\omega^2 \rho \bar{u}_i \tag{2.98a}$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\bar{\varepsilon}_{kl} \tag{2.98b}$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}\right) \tag{2.98c}$$

onde $\bar{\sigma}_{ij}$ e $\bar{\varepsilon}_{ij}$ são as amplitudes harmônicas dos componentes de σ_{ij} e ε_{ij}, respectivamente.

Em um domínio ilimitado, a Equação 2.98 admite soluções em forma de ondas primárias (P-waves, do inglês *primary waves*, as chamadas ondas de dilatação): $\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}\exp\left[-ik_p \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{r}\right]$, onde $k_p = \omega/c_p$, com $c_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ (2.87), $\boldsymbol{r}$ é um vetor unitário que denota a direção de propagação, e $\boldsymbol{q} = \pm\boldsymbol{x}$ é a direção do movimento da partícula; e ondas secundárias (S-waves, do inglês *secundary waves*, as chamadas ondas de cisalhamento): $\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}\exp\left[-ik_s \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{r}\right]$, onde $k_s = \omega/c_s$, com $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ (2.92), e $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r} = 0$ [42].

A Equação 2.96 também permite ondas guiadas pela interface, tais como ondas de Rayleigh e ondas de Stoneley. Ondas de Rayleigh se propagam ao longo de uma superfície livre, enquanto ondas de Stoneley podem propagar-se na interface entre dois meios elásticos semi-infinitos. Ambos os tipos de ondas propagam-se com amplitude decrescente exponencialmente na direção normal e para longe da superfície ou interface, respectivamente. Além disso, um meio viscoelástico é descrito pelas mesmas equações, porém com módulos complexos, onde $\lambda^* = \lambda(1 + 2i\xi)$ e

$\mu^* = \mu(1 + 2i\xi)$, com ξ sendo a taxa de amortecimento histerético , e as velocidades das ondas correspondentes também são valores complexos [42].

Considere um PMM para movimento elastodinâmico, definido como um meio regido pelas seguintes equações:

$$\Lambda_{jk}\bar{\sigma}_{ij,k} = -\omega^2\rho\bar{u}_i \tag{2.99a}$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\bar{\varepsilon}_{kl} \tag{2.99b}$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\Lambda_{kj}\bar{u}_{k,i} + \Lambda_{ki}\bar{u}_{k,j}\right) \tag{2.99c}$$

onde $\Lambda_{jk} = 0$ para $i \neq j$ e $\Lambda_{jk} = 1/\lambda_i(x_i)$ para $i = j$. Essas funções λ_i são contínuas, não nulas e complexas, conforme especificado na Equação 2.50. Além disso, a relação constitutiva apresentada na Equação 2.99 é equivalente àquela descrita para o meio elástico convencional na Equação 2.96. Consequentemente, para problemas bidimensionais, a equação 2.99 descreve movimentos em deformação plana ou tensão plana, seguindo uma definição apropriada de λ_i. A definição de λ_i é independente, mas motivada pela definição de $\widetilde{x}_i$ dada pela equação 2.42 [42].

A continuidade de λ_i pode ser usada para mostrar que, em um domínio ilimitado, a equação 2.99 admite soluções da mesma forma que a equação 2.98, mas com $\boldsymbol{x}$ substituído por $\widetilde{\boldsymbol{x}}$. Uma solução em forma de ondas primárias: $\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}\exp\left[-ik_p\widetilde{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{r}\right]$ com $\boldsymbol{q} = \pm\boldsymbol{x}$; e uma solução e ondas secundárias: $\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}\exp\left[-ik_s\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{r}\right]$ com $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r} = 0$ [42].

Os PMMs exibem a propriedade de encaixe perfeito: se dois PMMs com diferentes λ_i são colocados adjacentes um ao outro, com as funções λ_i de tal forma que eles se encaixam na interface dos dois meios, então qualquer propagação de onda é possível sem que haja geração de onda refletida na interface. A demonstração para esta afirmação é a mesma utilizada em PMMs para ondas acústicas (subseção 2.1.4) [42].

Fazendo uma escolha de λ_i semelhante a Equação 2.45 , nos leva a soluções atenuadas para ondas P da seguinte forma: $\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = \exp\left[-c_s/c_p\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{r}\right]\boldsymbol{q}\exp\left[-ik_p\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{r}\right]$ e ondas S: $\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = \exp\left[-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{r}\right]\boldsymbol{q}\exp\left[-ik_s\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{r}\right]$ onde se $F_i(x_i) > 0$ e $r_i > 0$, com F_i definido como na equação 2.45. A atenuação é independente da frequência ω se r_i é constante [42].

As propriedades absorventes e atenuantes do PMM podem ser utilizadas para definir uma camada absorvente PML , adjacente a um domínio limitado, como explicado para ondas acústicas (subseção 2.1.4). A capacidade absorvente desta camada é analisada estudando a reflexão de ondas planas a partir da fronteira fixa [42].

Considere o modelo apresentado na Figura 2.4b, com o domínio truncado Ω_{TR}

regido pela Equação 2.98 e um domínio PML Ω_{PML} governado pela Equação 2.99 com λ_i da forma da equação 2.45, satisfazendo $f_1(0) = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Ademais, considere uma onda P com amplitude unitária conforme entra no PML sob um ângulo de incidência θ. A onda incidente será refletida pela fronteira como uma onda P e uma onda S, com o movimento total representado como [42]:

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}_p^{(I)} \exp\left[-ik_p\widetilde{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{r}_p^{(I)}\right] + R_{pp}\boldsymbol{q}_p^{(R)} \exp\left[-ik_p\widetilde{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{r}_p^{(R)}\right] + \\ + R_{sp}\boldsymbol{q}_p^{(R)} \exp\left[-ik_s\widetilde{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{r}_s^{(R)}\right]\end{aligned} \tag{2.100}$$

onde os subscritos p e s referem-se às ondas P e S, respectivamente, e os superescritos (I) e (R) indicam onda incidente e refletida, respectivamente. Impondo $\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = 0$ para $x_1 = L_p$ e para todos x_2, e expressando as direções de propagação e movimento das partículas em termos de θ, obtemos [42]:

$$|R_{pp}| = \frac{\cos(\theta + \theta_s)}{\cos(\theta - \theta_s)} \exp\left[-2\frac{c_s}{c_p}F_1(L_p)\cos\theta\right] \tag{2.101a}$$

$$|R_{sp}| = \frac{\sin(2\theta)}{\cos(\theta - \theta_s)} \exp\left[-F_1(L_p)\left(\frac{c_s}{c_p}\cos\theta + \cos\theta_s\right)\right] \tag{2.101b}$$

onde θ_s é dado por: $\sin\theta_s = c_s/c_p \sin\theta$.

Uma análise similar pode ser realizada para determinar os coeficientes de reflexão devido a uma onda S incidente. As amplitudes das ondas P e S refletidas, ao saírem da PML , são dadas por $|R_{pp}|$ e $|R_{sp}|$, respectivamente. Estas são controladas pela escolha dos parâmetros f_1 e L_p (independentemente do tamanho do domínio limitado ao qual a PML é adjacente) e também são influenciadas pelo ângulo de incidência. Isso sugere que o domínio limitado pode ser restrito à região de interesse na análise, reduzindo assim o custo computacional, se os parâmetros e a orientação da PML forem escolhidos adequadamente. Os argumentos acima consideraram apenas um problema bidimensional, no entanto, o mesmo raciocínio pode ser estendido para problemas tridimensionais para alcançar uma conclusão idêntica [42].

Considere dois sistemas de coordenadas cartesianas retangulares: (i) um sistema x_i com base ortonormal e_i, e (ii) um sistema x_i' com base ortonormal e_i'. Ambos os sistemas estão interligados por uma transformação de rotação descrita pela matriz ortogonal $\boldsymbol{Q}$, onde os componentes são definidos por $Q_{ij} = e_i' \cdot e_j$. Esta transformação das coordenadas x_i para x_i' ilustra como as ondas são atenuadas preferencialmente nas direções e_1' e e_2', ao contrário de e_1 e e_2. A manipulação matemática necessária para refletir essa mudança nas bases é exemplificada pela adaptação da Equação 2.99, como demonstrado na base e_i' :

$$\Lambda'_{jk}\bar{\sigma}'_{ij,k} = -\omega^2\rho\bar{u}'_i \tag{2.102a}$$

$$\bar{\sigma}'_{ij} = C_{ijkl}\bar{\varepsilon}'_{kl} \tag{2.102b}$$

$$\bar{\varepsilon}'_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\Lambda'_{kj}\bar{u}'_{k,i} + \Lambda'_{ki}\bar{u}'_{k,j}\right) \tag{2.102c}$$

com todos os componentes representados na base e'_i [42].

Multiplicando a equação 2.102a pelo determinante do jacobiano da coordenada alongada $\widetilde{x}_i$, $\mathcal{J}$, dado por: $\mathcal{J} = \lambda_1\left(x'_1\right)\lambda_2\left(x'_2\right)$ (caso 2D); reescreve-se o sistema 2.102 na base e_i, incorporando explicitamente amortecimento do tipo Voigt:

$$\tilde{\Lambda}_{jk}\bar{\sigma}_{ij,k} = -\omega^2\rho\mathcal{J}\bar{u}_i \tag{2.103a}$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = (1 + 2ia_0\zeta)C_{ijkl}\bar{\varepsilon}_{kl} \tag{2.103b}$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\Lambda_{kj}\bar{u}_{k,i} + \Lambda_{ki}\bar{u}_{k,j}\right) \tag{2.103c}$$

onde $\mathbf{\Lambda}$ e $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ são dados pela Equação 2.48 [42].

A Equação 2.103a é pré-multiplicada por $i\omega\Lambda^{-T}$ e pós-multiplicada por Λ^{-1}. As Equações 2.51 são substituídas na Equação 2.103c, fazendo $J\Lambda = \widetilde{\Lambda}$ e a transformada de Fourier inversa é aplicada ao resultado para obter as equações do domínio do tempo para o PML elástico bidimensional [42]:

$$\tilde{F}^e_{jk}\sigma_{ij,k} + \tilde{F}^p_{jk}S_{ij,k} = \rho f_m\ddot{u}_i + \tfrac{c_s}{b}\rho f_c\dot{u}_i + \tfrac{\mu}{b^2}f_k u_i \tag{2.104a}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl} + \tfrac{2\zeta b}{c_s}\dot{\varepsilon}_{kl}\right) \tag{2.104b}$$

$$F^e_{ki}\dot{\varepsilon}_{kl}F^e_{lj} + F^p_{ki}\varepsilon_{kl}F^e_{lj} + F^e_{ki}\varepsilon_{kl}F^p_{lj} + F^p_{ki}E_{kl}F^p_{lj} = \tfrac{1}{2}\left(F^e_{kj}\dot{u}_{k,i} + F^e_{ki}\dot{u}_{k,j} + F^p_{kj}u_{k,i} + F^p_{ki}u_{k,j}\right) \tag{2.104c}$$

onde $\widetilde{\boldsymbol{F}}^e$, $\widetilde{\boldsymbol{F}}^p$, $\boldsymbol{F}^e$ e $\boldsymbol{F}^p$ são como nas equações 2.52, mas com c_s substituindo c; f_m, f_c e f_k são como nas Equações 2.56, e:

$$\boldsymbol{\varsigma} = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}\, d\tau \tag{2.105a}$$

$$\boldsymbol{E} = \int_0^t \boldsymbol{\varepsilon}\, d\tau \tag{2.105b}$$

A aplicação da transformada de Fourier inversa para obter $\boldsymbol{\Phi}$ e $\boldsymbol{E}$ pressupõe que $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\omega = 0) = 0$ e $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\omega = 0) = 0$ [42].

Capítulo 3

Formulação numérica

No presente capítulo, métodos numéricos para a resolução das equações apresentadas na Seção 2 são descritos de maneira teórica. A principal finalidade da discretização numérica é resolver as equações hiperbólicas dependentes do tempo, que apresentam um alto grau de complexidade. As discretizações numéricas propostas neste trabalho buscam soluções para domínios contínuos em um sistema finito discreto.

3.1 Discretização Espacial

A maioria dos problemas físicos regidos por Equações Diferenciais Parciais (EDPs) apresentam geometrias complexas e soluções analíticas muitas vezes inviáveis. Nesse contexto, a discretização espacial se torna essencial, permitindo o cálculo aproximado das respostas em um conjunto finito de pontos selecionados. Esta abordagem não apenas respeita as condições impostas pelo problema, mas também leva em consideração as limitações computacionais.

Neste trabalho, optou-se pelo clássico Método dos Elementos Finitos (MEF) para a discretização espacial. O MEF é particularmente adequado para o tratamento de domínios finitos e contínuos e envolve a subdivisão do domínio em um número finito de elementos, que podem ser triangulares, quadriláteros, entre outros (caso 2D). Esta subdivisão permite uma convergência direta para a solução desejada, onde a precisão aumenta à medida que os elementos do domínio são reduzidos em tamanho. Contudo, é necessário um grau de refinamento que balanceie o aumento da precisão com o custo computacional; além de certo ponto, o aumento na acurácia não justifica o maior custo de resolução. A seção a seguir apresenta uma breve introdução ao MEF, cuja formulação está fundamentada nos desenvolvimentos clássicos da literatura, especialmente nos trabalhos de Hughes [6], Bathe [7] e Zienkiewicz [53, 54].

3.1.1 Método dos Elementos Finitos

O MEF é uma técnica numérica para a resolução de EDPs , em que o domínio de interesse é segmentado em múltiplas partes denominadas elementos finitos. Esses elementos são compostos por nós, nos quais as funções de aproximação são definidas com base em seus valores nodais. Tal abordagem permite transformar problemas físicos de valores de contorno em problemas discretizados em elementos finitos.

A precisão do método tem sido amplamente validada na literatura, indicando que, para incrementar a qualidade dos resultados, basta aumentar o número ou a ordem dos elementos, processo conhecido como refinamento. O MEF caracteriza-se também por formar tipicamente um sistema de equações esparsas, facilitando a redução no armazenamento das matrizes do problema e permitindo o trabalho com malhas mais refinadas para problemas que exigem tal detalhamento.

Na discretização contínua, uma coleção de elementos ligados forma uma malha, que é um conjunto de matrizes contendo coordenadas nodais e conectividades dos elementos. Dentro desta malha, as funções de interpolação, geralmente polinômios cujo grau é determinado pelo número de nós de um elemento, são usadas para interpolar as variáveis de campo sobre o elemento.

A configuração da matriz de cada elemento e a subsequente montagem do sistema de equações global são processos detalhados, onde as conectividades são essenciais. Antes da solução do sistema, as condições de contorno são impostas. Dado que o sistema de equações global é tipicamente esparso, simétrico e bem condicionado, métodos diretos ou iterativos são utilizados para resolver o sistema e obter os resultados nodais.

Após a solução do sistema, o pós-processamento é frequentemente realizado para calcular parâmetros adicionais, como tensões e fluxos. Neste trabalho, o método de Galerkin é empregado para a formulação das equações.

3.1.2 Equações para o modelo acústico

Para iniciar a formulação do domínio fluido utilizando o Método dos Elementos Finitos, a equação da onda 2.37 é reformulada com a substituição da velocidade de propagação. Adicionalmente, multiplica-se a equação inteira pelo módulo volumétrico e rearranja-se da seguinte maneira:

$$\rho\ddot{p} + \xi\dot{p} - Kp_{,ii} - Kf = 0 \tag{3.1}$$

Considerando a presença de resíduos ou erros, que surgem devido ao uso de uma solução aproximada, recorremos ao método dos resíduos ponderados. Neste método, o resíduo é multiplicado por uma função de ponderação w, escolhida por sua continuidade e compatibilidade com as condições de contorno do problema. Ao integrar o produto do resíduo e da função de ponderação por todo o domínio e sobre os contornos, o erro é distribuído de modo a tornar a solução aproximada mais aceitável, minimizando o erro total. Aplicando o método dos resíduos ponderados à equação da onda, temos:

$$\int_\Omega (\rho\ddot{p} + \xi\dot{p} - Kp_{,ii} - Kf)w\, d\Omega = \int_{\Gamma_q} (q - \bar{q})Kw\, d\Gamma - \int_{\Gamma_p} (p - \bar{p})Kw_{,i}\, d\Gamma \tag{3.2}$$

Utilizando a identidade de Green no termo contendo a derivada de segunda ordem $p_{,ii}$, obtemos:

$$\int_\Omega (Kp_{,ii})w\, d\Omega = \int_\Gamma (Kp_{,i}n_i)w\, d\Gamma - \int_\Omega (Kp_{,i}w_{,i})\, d\Omega \tag{3.3}$$

Dividindo o contorno Γ em suas parcelas Γ_q e Γ_p, e reescrevendo o termo $p_{,i}n_i$ pelas condições de contorno estabelecidas, resulta em:

$$\int_\Gamma (Kp_{,i}n_i)w\, d\Gamma = \int_{\Gamma_q} (K\bar{q})w\, d\Gamma + \int_{\Gamma_p} (Kq)w\, d\Gamma \tag{3.4}$$

No contexto do MEF , que foca na discretização de domínio, esforça-se para anular os resíduos nas fronteiras e se concentrar nas aproximações válidas, principalmente no interior do domínio. Com isso, os resíduos de contorno são considerados nulos onde possível, o que é alcançado $p = \bar{p}$ em Γ_p. Finalmente, o resíduo em Γ_p é considerado nulo, assumindo $w = 0$ nessa região, o que nos permite reescrever a equação 3.1 em sua forma fraca:

$$\int_\Omega (Kp_{,i}w_{,i})\, d\Omega + \int_\Omega (\rho\ddot{p} + \xi\dot{p})w\, d\Omega = \int_\Omega (Kf)w\, d\Omega + \int_{\Gamma_q} (K\bar{q})w\, d\Gamma \tag{3.5}$$

Na formulação de Galerkin, as funções de ponderação, denotadas por w, são definidas pelas funções de forma, também conhecidas como funções de interpolação. Essas funções constituem a base do espaço funcional utilizado para aproximar o campo de soluções dentro de cada elemento finito. Assim, a pressão p em qualquer ponto do domínio é aproximada utilizando os valores nodais dos elementos finitos através destas funções de forma, expressa por:

$$p(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{i=1}^{I} N_i(\boldsymbol{x}) p_i(t) = \boldsymbol{N}\boldsymbol{P} \tag{3.6}$$

Aqui, I representa o número total de nós em um elemento finito. As funções N_i, conhecidas como funções de interpolação ou de forma, mapeiam os valores nodais para pontos específicos dentro do elemento e são expressas na forma matricial pelo vetor $\boldsymbol{N}$. O vetor $p_i(t)$ contém os valores nodais no tempo t, que são utilizados para calcular a solução aproximada $p(\boldsymbol{x}, t)$, e este vetor é representado matricialmente por $\boldsymbol{P}$.

Aplicando a aproximação de Galerkin na forma fraca 3.5 e reorganizando os termos, obtém-se a formulação matricial do problema, expressa por:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{P}}^n + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{P}}^n + \boldsymbol{K}\boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{F}^n \tag{3.7}$$

onde $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{K}$ representam, respectivamente, a matriz de massa, a matriz de amortecimento e a matriz de rigidez. $\boldsymbol{P}^n$ é o vetor de pressão no instante de tempo, com os pontos acima do símbolo denotando as primeiras e segundas derivadas temporais, e n denota a associação com o instante temporal t^n. $\boldsymbol{F}^n$ corresponde ao vetor de cargas nodais no respectivo momento.

As matrizes $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{K}$ e o vetor $\boldsymbol{F}^n$ são definidos por:

$$\boldsymbol{M} = \bigcup_e \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T \rho \boldsymbol{N} \, d\Omega \tag{3.8a}$$

$$\boldsymbol{C} = \bigcup_e \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T \xi \boldsymbol{N} \, d\Omega \tag{3.8b}$$

$$\boldsymbol{K} = \bigcup_e \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \, d\Omega \tag{3.8c}$$

$$\boldsymbol{F}^n = \bigcup_e \left(\int_{\Gamma_e} \boldsymbol{N}^T K \bar{q} \, d\Gamma + \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T K f \, d\Omega \right) \tag{3.8d}$$

onde $\boldsymbol{N}$ é a matriz de funções de forma, $\boldsymbol{B}$ é a matriz gradiente e $\boldsymbol{D}$ é a matriz constitutiva em um meio isotrópico. O símbolo $\bigcup_e$ indica o processo de montagem (do inglês *assembly*), onde as matrizes locais de cada elemento são combinadas para formar matrizes em nível global. Importante destacar que as matrizes são simétricas, facilitando manipulações e implementações. As integrais são resolvidas utilizando a quadratura de Gauss.

As matrizes $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{D}$ para o caso 2D são dadas por:

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} N_1 & \dots & N_I \end{bmatrix} \tag{3.9a}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & \dots & N_I \end{bmatrix} \tag{3.9b}$$

$$\boldsymbol{D} = K\boldsymbol{I} \tag{3.9c}$$

Para concluir, é essencial diagonalizar as matrizes $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{C}$, já que o estudo aborda técnicas de integração temporal explícitas. Esses métodos se beneficiam significativamente, tanto em desempenho computacional quanto em estabilidade numérica, quando tais matrizes são assumidas como diagonais. Desta forma, torna-se relevante discutir um procedimento padrão de diagonalização para essas matrizes. Neste contexto, considere a seguinte forma genérica para este tipo de matriz:

$$\boldsymbol{A} = \int_{\Omega} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{c} \boldsymbol{N} \, d\Omega \tag{3.10}$$

onde $\boldsymbol{N}$ representa a matriz de funções de forma, e $\boldsymbol{c}$ é uma matriz de pequena dimensão, frequentemente associada a propriedades materiais, e que, em muitos casos, assume uma forma diagonal. Quando $\boldsymbol{N}$ é expressa como $\boldsymbol{N}_i = N_i\boldsymbol{I}$, ou seja, com cada função de forma multiplicando a identidade, a matriz $\boldsymbol{A}$ resulta em blocos diagonais que podem ser reduzidos, sob certas condições, a uma matriz puramente diagonal. A completa diagonalização de $\boldsymbol{A}$ é garantida apenas se $\boldsymbol{c}$ for diagonal.

Uma estratégia comum para diagonalizar esse tipo de matriz, garantindo ainda a conservação das propriedades físicas integradas no domínio (como a massa total), é forçar que a quantidade total de $\boldsymbol{c}$ seja preservada após a diagonalização. Isso corresponde, em termos físicos, à preservação da massa do elemento no caso de matrizes de massa.

A primeira abordagem considerada neste trabalho é o método da *soma de linhas*, que consiste em transferir o somatório dos elementos de cada linha da matriz original para a posição correspondente na diagonal. O resultado é uma matriz diagonal que conserva a massa por linha, sendo adequada especialmente quando todos os graus de liberdade representam quantidades fisicamente equivalentes. Sua forma é dada por:

$$A_{ij} = \begin{cases} \sum_k \int_{\Omega_i} \boldsymbol{N}_i^T \boldsymbol{c} \boldsymbol{N}_k \, d\Omega & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \tag{3.11}$$

Outra alternativa abordada é a técnica de *escalonamento por conservação*, na qual se parte da matriz consistente original e aplica-se um fator de correção esca-

lar nas diagonais, de forma que a soma total dos elementos da matriz resultante permaneça fiel à integral original. A matriz resultante é descrita por:

$$A_{ij} = \begin{cases} a \int_{\Omega} \boldsymbol{N}_i^T \boldsymbol{c} \boldsymbol{N}_i \, d\Omega & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \tag{3.12}$$

sendo o fator de escalonamento a obtido de forma que:

$$\sum_i A_{ii} = \int_{\Omega} \boldsymbol{c} \, d\Omega \tag{3.13}$$

Neste trabalho, ambas as técnicas de diagonalização são consideradas eficazes no caso de elementos *Lagrangeanos*, uma vez que seus graus de liberdade apresentam interpretação física uniforme e estão distribuídos de forma regular no domínio. No entanto, para elementos *Serendipity*, a aplicação do método da soma de linhas pode conduzir a resultados inconsistentes, especialmente devido à distribuição não uniforme dos nós e à presença de graus de liberdade restritos às bordas do elemento. Nesses casos, adota-se exclusivamente o método de escalonamento com conservação, por garantir maior coerência física e estabilidade numérica na diagonalização das matrizes.

3.1.3 Equações numérica PML para o modelo acústico

Assim como realizado na subseção 3.1.2, aplica-se à equação 2.54 uma metodologia convencional de elementos finitos. A forma fraca desta equação é obtida multiplicando-se o campo de deslocamentos por uma função teste w, que reside em um espaço funcional admissível, e integrando o produto resultante sobre todo o domínio computacional Ω através de técnicas de integração por partes e aplicação do teorema da divergência. A expressão resultante é dada por [42]:

$$\int_\Omega w_{,i}\widetilde{\varphi}_i d\Omega + \int_\Omega \left(\rho f_m w\ddot{p} + \rho\frac{c}{b}f_c w\dot{p} + \rho\left(\frac{c}{b}\right)^2 f_k wp\right) d\Omega = \int_\Gamma w(\widetilde{\varphi}_i n_i)d\Gamma \tag{3.14}$$

Inicialmente, a forma fraca é discretizada espacialmente por meio da interpolação das variáveis p e w utilizando funções de forma nodais apropriadas. Essa abordagem conduz ao seguinte sistema de equações dinâmicas [42]:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{F}_{\text{int}} = \boldsymbol{F}_{\text{ext}} \tag{3.15}$$

onde $\boldsymbol{F}_{\text{int}}$ representa o vetor de forças internas; e $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ o vetor de forças externas. Estes componentes são montados a partir dos correspondentes matriciais e vetoriais em nível de elemento. Em particular, as matrizes constituintes dos elementos para $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{K}$ são definidas, respectivamente, por:

$$\boldsymbol{M} = \int_\Omega \boldsymbol{N}^T \rho f_m \boldsymbol{N} d\Omega \tag{3.16a}$$

$$\boldsymbol{C} = \int_\Omega \boldsymbol{N}^T \rho \frac{c}{b} f_c \boldsymbol{N} d\Omega \tag{3.16b}$$

$$\boldsymbol{K} = \int_\Omega \boldsymbol{N}^T \rho \left(\frac{c}{b}\right)^2 f_k \boldsymbol{N} d\Omega \tag{3.16c}$$

O termo de força interna em nível de elemento é expresso por:

$$\boldsymbol{F}_{\text{int}} = \int_\Omega \boldsymbol{B}^T \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}\, d\Omega \tag{3.17}$$

sendo conveniente assumir $\widetilde{\varphi}_i n_i = 0$ em um contorno livre da PML [42].

Utilizando o método implícito de Euler (*Backward Euler method*), a variável $\boldsymbol{\gamma}^{n+1}$ pode ser aproximada pela seguinte expressão: $\boldsymbol{\gamma}^{n+1} = \boldsymbol{\gamma}^n + \Delta t\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{n+1}$, onde Δt representa o passo de tempo. Aplicando essa aproximação na equação 2.54c, obtém-se [42]:

$$\boldsymbol{\gamma}^{n+1} = \left[\Delta t^{-1}\boldsymbol{F}^e + \boldsymbol{F}^p\right]^{-1}\left[\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{P}}^{n+1} + \Delta t^{-1}\boldsymbol{F}^e\boldsymbol{\gamma}^n\right] \tag{3.18}$$

De maneira análoga à equação 2.54c, utiliza-se a aproximação $\boldsymbol{\gamma}^{n+1} = \boldsymbol{\gamma}^n +$

$\Delta t\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{n+1}$ na equação 2.54b, obtendo-se [42]:

$$\boldsymbol{\varphi}^{n+1} = K\left(1 + \frac{2\zeta b}{c\Delta t}\right)\boldsymbol{\gamma}^{n+1} - K\left(\frac{2\zeta b}{c\Delta t}\right)\boldsymbol{\gamma}^{n} \tag{3.19}$$

Aplicando o método de *Backward Euler* para a variável $\boldsymbol{\Phi}$, a aproximação é expressa como: $\boldsymbol{\Phi}^{n+1} = \boldsymbol{\Phi}^{n} + \dot{\boldsymbol{\Phi}}^{n+1}\Delta t$. Combinando essa aproximação com a derivada da equação 2.55b no instante de tempo $n+1$, temos: $\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{n+1} = \boldsymbol{\varphi}^{n+1}$, resultando em: $\boldsymbol{\Phi}^{n+1} = \boldsymbol{\Phi}^{n} + \boldsymbol{\varphi}^{n+1}\Delta t$. Finalmente, pode-se substituir a expressão resultante na equação 2.55a [42]:

$$\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}^{n+1} = \Delta t\left(\Delta t^{-1}\widetilde{\boldsymbol{F}}^{e} + \widetilde{\boldsymbol{F}}^{p}\right)\boldsymbol{\varphi}^{n+1} + \widetilde{\boldsymbol{F}}^{p}\boldsymbol{\Phi}^{n} \tag{3.20}$$

Assim, o termo de força interna pode ser expandido substituindo a equação 3.20 na equação 3.17:

$$\boldsymbol{F}_{\text{int}} = \int_{\Omega} \boldsymbol{B}^{T}\left[\Delta t\left(\Delta t^{-1}\widetilde{\boldsymbol{F}}^{e} + \widetilde{\boldsymbol{F}}^{p}\right)\boldsymbol{\varphi}^{n+1} + \widetilde{\boldsymbol{F}}^{p}\boldsymbol{\Phi}^{n}\right] d\Omega \tag{3.21}$$

Ao aproximar a Equação 2.55b por um somatório, obtemos: $\boldsymbol{\Phi}^{n} \approx \sum_{t=0}^{n}\boldsymbol{\varphi}^{t}\Delta t$. Substituindo a Equação 3.19, resulta em: $\boldsymbol{\Phi}^{n} \approx K(1+\eta)\sum_{t=0}^{n}\boldsymbol{\gamma}^{t}\Delta t - K\eta\sum_{t=0}^{n-1}\boldsymbol{\gamma}^{t}\Delta t$, sendo $\eta = 2\zeta b/c\Delta t$. Dessa forma, o termo de força interna pode ser expandido apenas em função de $\boldsymbol{\gamma}$ [42]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{\text{int}} = \int_{\Omega} [\boldsymbol{B}^{T}\widetilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{P}}^{n+1} + \boldsymbol{B}^{T}\widetilde{\boldsymbol{F}}^{p}K\sum_{t=0}^{n}\boldsymbol{\gamma}^{t}\Delta t + \\ + \boldsymbol{B}^{T}(\Delta t^{-1}\widetilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{F}^{e} + K\eta(\widetilde{\boldsymbol{F}}^{p}\Delta t - \hat{\boldsymbol{D}}))\boldsymbol{\gamma}^{n}]\, d\Omega\end{aligned} \tag{3.22}$$

onde

$$\hat{\boldsymbol{D}} = \Delta t\left[\Delta t^{-1}\widetilde{\boldsymbol{F}}^{e} + \widetilde{\boldsymbol{F}}^{p}\right] \tag{3.23a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{D}} = \Delta t K(1+\eta)\left[\Delta t^{-1}\widetilde{\boldsymbol{F}}^{e} + \widetilde{\boldsymbol{F}}^{p}\right]\left[\Delta t^{-1}\boldsymbol{F}^{e} + \boldsymbol{F}^{p}\right]^{-1} \tag{3.23b}$$

Assim reorganiza-se as matrizes para reescrever o sistema discreto em sua forma usual, $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}$, onde definimos $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\text{ext}} - \boldsymbol{R}^{n}$ e $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}' + \boldsymbol{C}''$. Essas matrizes são detalhadas conforme segue [42]:

$$\boldsymbol{C}' = \textstyle\int_{\Omega}\boldsymbol{N}^{T}\rho\frac{c}{b}f_{c}\boldsymbol{N}\,d\Omega \tag{3.24a}$$

$$\boldsymbol{C}'' = \textstyle\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^{T}\widetilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{B}\,d\Omega \tag{3.24b}$$

$$\boldsymbol{R}^{n} = \textstyle\int_{\Omega}[\boldsymbol{B}^{T}(\widetilde{\boldsymbol{F}}^{p}K\sum_{t=0}^{n}\boldsymbol{\gamma}^{t}\Delta t + (\Delta t^{-1}\widetilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{F}^{e} + K\eta(\widetilde{\boldsymbol{F}}^{p}\Delta t - \hat{\boldsymbol{D}}))\boldsymbol{\gamma}^{n})]\,d\Omega \tag{3.24c}$$

Como se observa nesta formulação, ela é voltada para métodos implícitos, já que a matriz $\boldsymbol{C}$ não é diagonal, o que demanda o uso de um solver. Para abordar essa questão, visando uma formulação para métodos explícitos, a equação 2.54c deve ser integrada uma vez no tempo:

$$\int_0^{n+1} \left(\boldsymbol{F}^e\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{F}^p\boldsymbol{\gamma}\right) d\tau = \int_0^{n+1} \nabla\dot{\boldsymbol{P}} d\tau \Rightarrow \boldsymbol{F}^e\boldsymbol{\gamma}^{n+1} + \boldsymbol{F}^p \sum_{t=0}^{n+1} \boldsymbol{\gamma}^t \Delta t = \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{n+1} \quad (3.25)$$

Manipulando a equação 3.25 algebricamente para isolar $\boldsymbol{\gamma}^{n+1}$, obtemos:

$$\boldsymbol{\gamma}^{n+1} = \left[\boldsymbol{F}^e + \boldsymbol{F}^p\Delta t\right]^{-1} \left[\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{n+1} - \boldsymbol{F}^p \sum_{t=0}^{n} \boldsymbol{\gamma}^t \Delta t\right] \quad (3.26)$$

Assim, o termo de força interna 3.21 deve ser redefinido para nova formulação de $\boldsymbol{\gamma}^{n+1}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{\text{int}} = \int_\Omega [\boldsymbol{B}^T\widetilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{n+1} + \boldsymbol{B}^T\left(\widetilde{\boldsymbol{F}}^p K - \widetilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{F}^p\right) \sum_{t=0}^{n} \boldsymbol{\gamma}^t \Delta t + \\ + \boldsymbol{B}^T K\eta\left(\widetilde{\boldsymbol{F}}^p\Delta t - \hat{\boldsymbol{D}}\right)\boldsymbol{\gamma}^n] \, d\Omega \end{aligned} \quad (3.27)$$

Assim, novamente, reorganizam-se as matrizes para reescrever o sistema discreto em sua forma usual, $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}$, atendendo aos critérios dos métodos explícitos, onde definimos $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\text{ext}} - \boldsymbol{R}^n$ e $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}' + \boldsymbol{K}''$. Essas matrizes são detalhadas conforme segue:

$$\boldsymbol{K}' = \textstyle\int_\Omega \boldsymbol{N}^T\rho\left(\frac{c}{b}\right)^2 f_k\boldsymbol{N}\, d\Omega \quad (3.28a)$$

$$\boldsymbol{K}'' = \textstyle\int_\Omega \boldsymbol{B}^T\widetilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{B}\, d\Omega \quad (3.28b)$$

$$\boldsymbol{R}^n = \textstyle\int_\Omega [\boldsymbol{B}^T\left(\widetilde{\boldsymbol{F}}^p\kappa - \widetilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{F}^p\right) \sum_{t=0}^{n} \boldsymbol{\gamma}^t\Delta t + \boldsymbol{B}^T\kappa\eta\left(\widetilde{\boldsymbol{F}}^p\Delta t - \hat{\boldsymbol{D}}\right)\boldsymbol{\gamma}^n] \, d\Omega \quad (3.28c)$$

onde

$$\hat{\boldsymbol{D}} = \Delta t\left[\Delta t^{-1}\widetilde{\boldsymbol{F}}^e + \widetilde{\boldsymbol{F}}^p\right] \quad (3.29a)$$

$$\widetilde{\boldsymbol{D}} = \Delta t\kappa\left(1+\eta\right)\left[\Delta t^{-1}\widetilde{\boldsymbol{F}}^e + \widetilde{\boldsymbol{F}}^p\right]\left[\boldsymbol{F}^e + \boldsymbol{F}^p\Delta t\right]^{-1} \quad (3.29b)$$

3.1.4 Equações para o modelo elástico

Assim como no meio acústico, para o domínio sólido, a equação 2.78 é modificada pela inclusão do termo de amortecimento viscoso ξ, resultando em:

$$\rho\ddot{u}_i + \xi\dot{u}_i = \rho g_i + \sigma_{ij,j} \tag{3.30}$$

Aqui, multiplicamos a equação de interesse por um vetor arbitrário e integramos o produto no domínio Ω. Neste caso, escolhemos como função arbitrária um deslocamento virtual δu_i, assumindo que este é nulo na fronteira Γ_p. Aplicando a integração por partes e utilizando a propriedade de simetria do tensor de tensões, obtemos a expressão resultante para a formulação do problema [54]:

$$\int_\Omega (\delta\varepsilon_{ij}\sigma_{ij})\, d\Omega + \int_\Omega (\rho\ddot{u}_i + \xi\dot{u}_i)\delta u_i\, d\Omega = \int_\Omega (\rho g_i)\delta u_i\, d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{\tau}_i \delta u_i\, d\Gamma \tag{3.31}$$

onde as deformações virtuais são definidas em função dos deslocamentos virtuais por:

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \tag{3.32}$$

Ao aplicar a aproximação de Galerkin na forma fraca 3.31 e reorganizar os termos, obtemos a formulação matricial do problema, expressa por:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{U}}^n + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{U}}^n + \boldsymbol{K}\boldsymbol{U}^n = \boldsymbol{F}^n \tag{3.33}$$

Aqui, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{K}$ representam, respectivamente, a matriz de massa, a matriz de amortecimento e a matriz de rigidez, enquanto $\boldsymbol{U}^n$ é o vetor de deslocamentos no instante de tempo n, com os pontos acima do símbolo denotando as primeiras e segundas derivadas temporais (velocidade e aceleração, respectivamente). $\boldsymbol{F}^n$ corresponde ao vetor de cargas nodais no instante considerado.

As matrizes $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{K}$, bem como o vetor $\boldsymbol{F}^n$, são definidos conforme as seguintes expressões:

$$\boldsymbol{M} = \bigcup_e \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T \rho \boldsymbol{N}\, d\Omega \tag{3.34a}$$

$$\boldsymbol{C} = \bigcup_e \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T \xi \boldsymbol{N}\, d\Omega \tag{3.34b}$$

$$\boldsymbol{K} = \bigcup_e \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\, d\Omega \tag{3.34c}$$

$$\boldsymbol{F}^n = \bigcup_e \left(\int_{\Gamma_e} \boldsymbol{N}^T \bar{\boldsymbol{\tau}}\, d\Gamma + \int_{\Omega_e} \rho \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{g}\, d\Omega \right) \tag{3.34d}$$

Para o caso bidimensional, as matrizes $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{B}$ são especificadas como:

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_I & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_I \end{bmatrix} \tag{3.35a}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_I & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_I \end{bmatrix} \tag{3.35b}$$

A matriz constitutiva $\boldsymbol{D}$, em um meio homogêneo, é definida com configurações adaptadas ao contexto bidimensional, sendo conveniente escrever a equação 2.64 na forma [53, 54]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}^0 \tag{3.36}$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ são deformações iniciais residuais.

Sob condição de tensão plana para um material isotrópico, temos [53, 54]:

$$\varepsilon_{xx} = \tfrac{\sigma_{xx}}{E} - \tfrac{\nu\sigma_{yy}}{E} + \varepsilon^0_{xx} \tag{3.37a}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\tfrac{\nu\sigma_{xx}}{E} + \tfrac{\sigma_{yy}}{E} + \varepsilon^0_{yy} \tag{3.37b}$$

$$\varepsilon_{xy} = \tfrac{2(1+\nu)\tau_{xy}}{E} + \varepsilon^0_{xy} \tag{3.37c}$$

A partir destas relações, a matriz $\boldsymbol{D}$ é expressa como [53, 54]:

$$\boldsymbol{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

Para deformação plana em um material isotrópico, a existência de uma tensão normal σ_{zz}, além dos outros três componentes de tensão, altera as relações de deformação. Neste contexto, as expressões atualizadas são [53, 54]:

$$\varepsilon_{xx} = \tfrac{\sigma_{xx}}{E} - \tfrac{\nu\sigma_{yy}}{E} - \tfrac{\nu\sigma_{zz}}{E} + \varepsilon^0_{xx} \tag{3.39a}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\tfrac{\nu\sigma_{xx}}{E} + \tfrac{\sigma_{yy}}{E} - \tfrac{\nu\sigma_{zz}}{E} + \varepsilon^0_{yy} \tag{3.39b}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\tfrac{\nu\sigma_{xx}}{E} - \tfrac{\nu\sigma_{yy}}{E} + \tfrac{\sigma_{zz}}{E} + \varepsilon^0_{zz} \tag{3.39c}$$

$$\varepsilon_{xy} = \tfrac{2(1+\nu)\tau_{xy}}{E} + \varepsilon^0_{xy} \tag{3.39d}$$

Considerando que $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) - E\varepsilon^0_{zz}$, e resolvendo para as demais tensões,

a matriz $\boldsymbol{D}$ é formulada como [53, 54]:

$$\boldsymbol{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

3.1.5 Equações numérica PML para o modelo elástico

A equação 2.104 é implementada usando a abordagem de elementos finitos baseada em deslocamento padrão. A forma fraca da equação 2.104a é derivada tomando seu produto interno com um deslocamento virtual δu_i, realizando integrações por partes e aplicando o teorema da divergência sobre todo o domínio computacional Ω para obter [42]:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(\rho\, f_m\, \delta u_i \ddot{u}_i + \frac{c_s}{b}\, f_c\, \delta u_i \dot{u}_i + \frac{\mu}{b^2}\, f_k\, \delta u_i u_i\right) d\Omega + \int_\Omega \delta\widetilde{\varepsilon}_{ij}{}^e \sigma_{ji}\, d\Omega + \\ + \int_\Omega \delta\widetilde{\varepsilon}_{ij}{}^p S_{ji}\, d\Omega = \int_\Gamma \delta u_i(\sigma_{ik}\widetilde{F}^e_{kj} + S_{ik}\widetilde{F}^p_{kj}) n_j\, d\Gamma\end{aligned} \tag{3.41}$$

onde a simetria de $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varsigma}$ é usada para obter as duas últimas integrais do lado esquerdo:

$$\delta\widetilde{\varepsilon}_{ij}{}^e = \tfrac{1}{2}[\widetilde{F}^e_{kj}\delta u_{k,i} + \widetilde{F}^e_{ki}\delta u_{k,j}] \tag{3.42a}$$

$$\delta\widetilde{\varepsilon}_{ij}{}^p = \tfrac{1}{2}[\widetilde{F}^p_{kj}\delta u_{k,i} + \widetilde{F}^p_{ki}\delta u_{k,j}] \tag{3.42b}$$

A forma fraca é inicialmente discretizada espacialmente interpolando u_i e δu_i em termos de funções de forma nodais apropriadas. Isso leva ao sistema de equações [42]:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{F}_{int} = \boldsymbol{F}_{ext} \tag{3.43}$$

onde $\boldsymbol{F}_{\text{int}}$ representa o vetor de forças internas; e $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ o vetor de forças externas. As matrizes do sistema são montadas a partir de matrizes constituintes de elementos, como:

$$\boldsymbol{M} = \textstyle\int_\Omega \boldsymbol{N}^T \rho f_m \boldsymbol{N}\, d\Omega \tag{3.44a}$$

$$\boldsymbol{C} = \textstyle\int_\Omega \boldsymbol{N}^T \rho \frac{c_s}{b} f_c \boldsymbol{N}\, d\Omega \tag{3.44b}$$

$$\boldsymbol{K} = \textstyle\int_\Omega \boldsymbol{N}^T \frac{\mu}{b^2} f_k \boldsymbol{N}\, d\Omega \tag{3.44c}$$

O termo de força interna de nível elementar é dado por [42]:

$$\boldsymbol{F}_{\text{int}} = \int_\Omega \widetilde{\boldsymbol{B}}^{eT} \hat{\boldsymbol{\sigma}}\, d\Omega + \int_\Omega \widetilde{\boldsymbol{B}}^{pT} \hat{\boldsymbol{\varsigma}}\, d\Omega \tag{3.45}$$

com

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix} \tag{3.46}$$

onde $\hat{\boldsymbol{\varsigma}}$ é a integral no tempo de $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, $\widetilde{\boldsymbol{B}}^e$ e $\widetilde{\boldsymbol{B}}^p$ são dados em termos submatrizes de

atenuação:

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}^e = \begin{bmatrix} \widetilde{F}^e_{11}N_{,1} & 0 \\ 0 & \widetilde{F}^e_{22}N_{,2} \\ \widetilde{F}^e_{22}N_{,2} & \widetilde{F}^e_{11}N_{,1} \end{bmatrix} \tag{3.47a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}^p = \begin{bmatrix} \widetilde{F}^p_{11}N_{,1} & 0 \\ 0 & \widetilde{F}^p_{22}N_{,2} \\ \widetilde{F}^p_{22}N_{,2} & \widetilde{F}^p_{11}N_{,1} \end{bmatrix} \tag{3.47b}$$

sendo assumido que não há contribuição para $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ de uma fronteira livre do PML .

A solução das equações de movimento requer o cálculo de σ^{n+1} e ς^{n+1} em t^{n+1} para determinar $\boldsymbol{F}_{\text{int}}$. Para isso, aplica-se o método de *Backward Euler* para obter as seguintes aproximações [42]:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n+1} \approx (\boldsymbol{\varepsilon}^{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}^n)\Delta t^{-1} \tag{3.48a}$$

$$\boldsymbol{E}^{n+1} \approx \boldsymbol{E}^n + \boldsymbol{\varepsilon}^{n+1}\Delta t \tag{3.48b}$$

Aplicando essa aproximação na equação 2.104c, obtém-se:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n+1} = \Delta t^{-1}\left[\boldsymbol{B}^e\dot{\boldsymbol{U}}^{n+1} + \boldsymbol{B}^p\boldsymbol{U}^{n+1} + \Delta t^{-1}\hat{\boldsymbol{F}}^e\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^n - \hat{\boldsymbol{F}}^p\hat{\boldsymbol{E}}^n\right] \tag{3.49}$$

com

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

onde $\hat{\boldsymbol{E}}^n$ é a integral temporal de $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$; $\boldsymbol{B}^e$, $\boldsymbol{B}^p$, $\hat{\boldsymbol{F}}^e$ e $\hat{\boldsymbol{F}}^p$ são definidos em termos de: $\boldsymbol{F}' = [\Delta t^{-1}\boldsymbol{F}^e + \boldsymbol{F}^p]^{-1}$, $\tilde{\boldsymbol{F}}^e = \Delta t^{-1}\boldsymbol{F}^e\boldsymbol{F}'$, $\tilde{\boldsymbol{F}}^p = \boldsymbol{F}^p\boldsymbol{F}'$ e $N'_i = F'_{ij}N_{,j}$, da seguinte forma [42]:

$$\hat{\boldsymbol{F}}^e = \begin{bmatrix} (\tilde{\boldsymbol{F}}^e{}_{11})^2 & (\tilde{\boldsymbol{F}}^e{}_{21})^2 & \tilde{\boldsymbol{F}}^e{}_{11}\tilde{\boldsymbol{F}}^e{}_{21} \\ (\tilde{\boldsymbol{F}}^e{}_{12})^2 & (\tilde{\boldsymbol{F}}^e{}_{22})^2 & \tilde{\boldsymbol{F}}^e{}_{12}\tilde{\boldsymbol{F}}^e{}_{22} \\ 2\tilde{\boldsymbol{F}}^e{}_{11}\tilde{\boldsymbol{F}}^e{}_{12} & 2\tilde{\boldsymbol{F}}^e{}_{21}\tilde{\boldsymbol{F}}^e{}_{22} & \tilde{\boldsymbol{F}}^e{}_{11}\tilde{\boldsymbol{F}}^e{}_{22} + \tilde{\boldsymbol{F}}^e{}_{12}\tilde{\boldsymbol{F}}^e{}_{21} \end{bmatrix} \tag{3.51a}$$

$$\hat{\boldsymbol{F}}^p = \begin{bmatrix} (\tilde{\boldsymbol{F}}^p{}_{11})^2 & (\tilde{\boldsymbol{F}}^p{}_{21})^2 & \tilde{\boldsymbol{F}}^p{}_{11}\tilde{\boldsymbol{F}}^p{}_{21} \\ (\tilde{\boldsymbol{F}}^p{}_{12})^2 & (\tilde{\boldsymbol{F}}^p{}_{22})^2 & \tilde{\boldsymbol{F}}^p{}_{12}\tilde{\boldsymbol{F}}^p{}_{22} \\ 2\tilde{\boldsymbol{F}}^p{}_{11}\tilde{\boldsymbol{F}}^p{}_{12} & 2\tilde{\boldsymbol{F}}^p{}_{21}\tilde{\boldsymbol{F}}^p{}_{22} & \tilde{\boldsymbol{F}}^p{}_{11}\tilde{\boldsymbol{F}}^p{}_{22} + \tilde{\boldsymbol{F}}^p{}_{12}\tilde{\boldsymbol{F}}^p{}_{21} \end{bmatrix} \tag{3.51b}$$

$$\boldsymbol{B}^e = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{F}}^e{}_{11}\boldsymbol{N}_1' & \tilde{\boldsymbol{F}}^e{}_{21}\boldsymbol{N}_1' \\ \tilde{\boldsymbol{F}}^e{}_{12}\boldsymbol{N}_2' & \tilde{\boldsymbol{F}}^e{}_{22}\boldsymbol{N}_2' \\ \tilde{\boldsymbol{F}}^e{}_{11}\boldsymbol{N}_2' + \tilde{\boldsymbol{F}}^e{}_{12}\boldsymbol{N}_1' & \tilde{\boldsymbol{F}}^e{}_{21}\boldsymbol{N}_2' + \tilde{\boldsymbol{F}}^e{}_{22}\boldsymbol{N}_1' \end{bmatrix} \tag{3.51c}$$

$$\boldsymbol{B}^p = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{F}}^p{}_{11}\boldsymbol{N}_1' & \tilde{\boldsymbol{F}}^p{}_{21}\boldsymbol{N}_1' \\ \tilde{\boldsymbol{F}}^p{}_{12}\boldsymbol{N}_2' & \tilde{\boldsymbol{F}}^p{}_{22}\boldsymbol{N}_2' \\ \tilde{\boldsymbol{F}}^p{}_{11}\boldsymbol{N}_2' + \tilde{\boldsymbol{F}}^p{}_{12}\boldsymbol{N}_1' & \tilde{\boldsymbol{F}}^p{}_{21}\boldsymbol{N}_2' + \tilde{\boldsymbol{F}}^p{}_{22}\boldsymbol{N}_1' \end{bmatrix} \tag{3.51d}$$

Usando a equação 3.48a na equação constitutiva 2.104b resulta em:

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \left(1 + \frac{2\zeta b}{c_s \Delta t}\right) \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}^{n+1} - \frac{2\zeta b}{c_s \Delta t} \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}^n \tag{3.52}$$

onde $\boldsymbol{D}$ é a matriz constitutiva do modelo elástico [42].

Aplicando o método de *Backward Euler* para a variável $\boldsymbol{\varsigma}$, a aproximação é expressa como: $\boldsymbol{\varsigma}^{n+1} = \boldsymbol{\varsigma}^n + \dot{\boldsymbol{\varsigma}}^{n+1}\Delta t$. Combinando essa aproximação com a derivada da equação 2.105a no instante de tempo $n+1$, temos: $\dot{\boldsymbol{\varsigma}}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^{n+1}$, resultando nas variáveis que estamos trabalhando em: $\boldsymbol{\varsigma}^{n+1} = \boldsymbol{\varsigma}^n + \boldsymbol{\sigma}^{n+1}\Delta t$. Finalmente, pode-se substituir a expressão resultante na equação 3.45:

$$\boldsymbol{F}_{\text{int}} = \int_\Omega \widetilde{\boldsymbol{B}}^T \boldsymbol{\sigma}^{n+1} d\Omega + \int_\Omega \widetilde{\boldsymbol{B}}^{pT} \boldsymbol{\varsigma}^n d\Omega \tag{3.53}$$

onde $\widetilde{\boldsymbol{B}} = \widetilde{\boldsymbol{B}}^e + \Delta t \widetilde{\boldsymbol{B}}^p$ [42].

Substituindo a aproximação 3.52 na equação 2.105a no tempo n, e aproximando a integral por um somatório, obtemos: $\boldsymbol{\varsigma}^n = (1+\eta)\,\boldsymbol{D}\sum_{t=0}^{n}\boldsymbol{\varepsilon}^t\Delta t - \eta\boldsymbol{D}\sum_{t=0}^{n-1}\boldsymbol{\varepsilon}^t\Delta t$, sendo $\eta = 2\zeta b/c_s\Delta t$. De maneira semelhante, a integral no tempo 2.105b também pode ser aproximada por um somatório: $\boldsymbol{E}^n = \sum_{t=0}^{n}\boldsymbol{\varepsilon}^t\Delta t$, com $\boldsymbol{E}^n$ podendo ser calculado a partir da equação 3.48b. Dessa forma, o termo de força interna pode ser expandido apenas em função de $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{\text{int}} = \int_\Omega [&\widetilde{\boldsymbol{B}}^T \hat{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{B}^e \dot{\boldsymbol{U}}^{n+1} + \widetilde{\boldsymbol{B}}^T \hat{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{B}^p \boldsymbol{U}^{n+1} + \\ &+ \left(\widetilde{\boldsymbol{B}}^T \hat{\boldsymbol{D}} \Delta t^{-1} \hat{\boldsymbol{F}}^e - \widetilde{\boldsymbol{B}}^{eT} \eta \boldsymbol{D}\right) \boldsymbol{\varepsilon}^n + \left(\widetilde{\boldsymbol{B}}^{pT} \boldsymbol{D} - \widetilde{\boldsymbol{B}}^T \hat{\boldsymbol{D}} \hat{\boldsymbol{F}}^p\right) \boldsymbol{E}^n] \, d\Omega \end{aligned} \tag{3.54}$$

onde $\hat{\boldsymbol{D}} = \Delta t^{-1}\,(1+\eta)\,\boldsymbol{D}$ [42].

Assim reorganiza-se as matrizes para reescrever o sistema discreto em sua forma usual, $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}$, onde definimos $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\text{ext}} - \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}' + \boldsymbol{C}''$ e $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}' + \boldsymbol{K}''$. Essas matrizes são detalhadas conforme segue [42]:

$$\boldsymbol{C}' = \textstyle\int_\Omega \boldsymbol{N}^T \rho \frac{cs}{b} f_e \boldsymbol{N}\, d\Omega \tag{3.55a}$$

$$\boldsymbol{C}'' = \textstyle\int_\Omega \widetilde{\boldsymbol{B}}^T \hat{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{B}^e\, d\Omega \tag{3.55b}$$

$$\boldsymbol{K}' = \textstyle\int_\Omega \boldsymbol{N}^T \frac{\mu}{b^2} f_k \boldsymbol{N}\, d\Omega \tag{3.55c}$$

$$\boldsymbol{K}'' = \textstyle\int_\Omega \widetilde{\boldsymbol{B}}^T \hat{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{B}^p\, d\Omega \tag{3.55d}$$

$$\boldsymbol{R}^n = \textstyle\int_\Omega [\left(\widetilde{\boldsymbol{B}}^T \hat{\boldsymbol{D}} \Delta t^{-1} \hat{\boldsymbol{F}}^e - \widetilde{\boldsymbol{B}}^{eT} \eta \boldsymbol{D}\right) \boldsymbol{\varepsilon}^n + \left(\widetilde{\boldsymbol{B}}^{pT} \boldsymbol{D} - \widetilde{\boldsymbol{B}}^T \hat{\boldsymbol{D}} \hat{\boldsymbol{F}}^p\right) \boldsymbol{E}^n]\, d\Omega \tag{3.55e}$$

Esta formulação direciona-se para métodos implícitos, pois a matriz $\boldsymbol{C}$ não é diagonal, exigindo assim o uso de um solver. Para lidar com essa situação e buscar uma abordagem adequada para métodos explícitos, iremos aproximar o termo: $\dot{\boldsymbol{U}}^{n+1} = (\boldsymbol{U}^{n+1} - \boldsymbol{U}^n)/\Delta t$ na equação 3.49, reescrevendo-a da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{n+1} = \Delta t^{-1} \left[\Delta t^{-1} \hat{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{U}^{n+1} - \Delta t^{-1} \boldsymbol{B}^e \boldsymbol{U}^n + \Delta t^{-1} \hat{\boldsymbol{F}}^e \boldsymbol{\varepsilon}^n - \hat{\boldsymbol{F}}^p \boldsymbol{E}^n\right] \tag{3.56}$$

Assim, o termo de força interna 3.54 deve ser redefinido para nova formulação de $\boldsymbol{\varepsilon}^{n+1}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{\text{int}} = \int_\Omega [&\widetilde{\boldsymbol{B}}^T \hat{\boldsymbol{D}} \hat{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{U}^{n+1} - \widetilde{\boldsymbol{B}}^T \hat{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{B}^e \boldsymbol{U}^n + \\ &+ \left(\widetilde{\boldsymbol{B}}^T \hat{\boldsymbol{D}} \hat{\boldsymbol{F}}^e - \widetilde{\boldsymbol{B}}^{eT} \eta \boldsymbol{D}\right) \boldsymbol{\varepsilon}^n + \left(\widetilde{\boldsymbol{B}}^{pT} \boldsymbol{D} - \Delta t \widetilde{\boldsymbol{B}}^T \hat{\boldsymbol{D}} \hat{\boldsymbol{F}}^p\right) \boldsymbol{E}^n]\, d\Omega \end{aligned} \tag{3.57}$$

onde $\hat{\boldsymbol{D}} = \Delta t^{-2}\,(1+\eta)\,\boldsymbol{D}$, e $\hat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^e + \Delta t \boldsymbol{B}^p$.

Assim, novamente, reorganiza-se as matrizes para reescrever o sistema discreto em sua forma usual, $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F}$, atendendo aos critérios dos métodos explícitos, onde definimos $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\text{ext}} + \boldsymbol{R}_1^n + \boldsymbol{R}_2^n$, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}' + \boldsymbol{K}''$ e $\boldsymbol{R}_1^n = \boldsymbol{K}'''\boldsymbol{U}^n$. Essas matrizes são detalhadas conforme segue:

$$\boldsymbol{K}' = \textstyle\int_\Omega \boldsymbol{N}^T \frac{\mu}{b^2} f_k \boldsymbol{N}\, d\Omega \tag{3.58a}$$

$$\boldsymbol{K}'' = \textstyle\int_\Omega \widetilde{\boldsymbol{B}}^T \hat{\boldsymbol{D}} \hat{\boldsymbol{B}}\, d\Omega \tag{3.58b}$$

$$\boldsymbol{K}''' = \textstyle\int_\Omega \widetilde{\boldsymbol{B}}^T \hat{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{B}^e\, d\Omega \tag{3.58c}$$

$$\boldsymbol{R}_2^n = -\textstyle\int_\Omega [\left(\widetilde{\boldsymbol{B}}^T \hat{\boldsymbol{D}} \hat{\boldsymbol{F}}^e - \widetilde{\boldsymbol{B}}^{eT} \eta \boldsymbol{D}\right) \boldsymbol{\varepsilon}^n + \left(\widetilde{\boldsymbol{B}}^{pT} \boldsymbol{D} - \Delta t \widetilde{\boldsymbol{B}}^T \hat{\boldsymbol{D}} \hat{\boldsymbol{F}}^p\right) \hat{\boldsymbol{E}}^n]\, d\Omega \tag{3.58d}$$

3.2 Discretização Temporal

A resolução de problemas transientes exige a discretização temporal, que consiste em dividir o tempo contínuo em pequenos intervalos, chamados passos de tempo (Δt). Essa abordagem permite transformar problemas dependentes do tempo em um sistema discreto, facilitando sua solução numérica.

Problemas transientes podem ser representados por sistemas de equações diferenciais ordinárias (EDOs), onde o número de equações corresponde ao número de graus de liberdade do sistema. Para determinar esses graus de liberdade, considera-se o tipo de domínio analisado:

- Modelo acústico: possui um grau de liberdade por nó, sendo a pressão a variável de interesse, representada como uma grandeza escalar.

- Modelo elastodinâmico: o número de graus de liberdade por nó depende da dimensão do problema. No caso bidimensional (2D), cada nó possui dois graus de liberdade, com o deslocamento sendo a variável principal, descrito como uma grandeza vetorial.

Na discretização temporal, o tempo contínuo é substituído por uma sequência de instantes discretos, definidos por Δt. Partindo de uma condição inicial no instante t_0, calcula-se a solução para o instante seguinte, t_1, que serve como base para determinar o próximo passo, t_2, e assim sucessivamente. Essa técnica oferece vantagens importantes, como:

1. A possibilidade de resolver problemas transientes de forma discreta.

2. A equivalência entre conceitos de sistemas contínuos e discretos.

3. A simplicidade relativa na implementação do método.

Neste contexto, são utilizados métodos explícitos para integrar numericamente o tempo. Três métodos da família explícita adaptativa proposta por Soares: α-*adaptativo* [3, 12], μ-*adaptativo* [4] e *híbrido-adaptativo* [5], são analisados em detalhe. Para comparação, outras técnicas amplamente reconhecidas também são abordadas, como o Método das Diferenças Centrais (MDC), o método α-Generalizado Explícito (α-GE) [1] e Noh-Bathe (NB) [2].

Os métodos implementados compartilham características comuns:

1. Foram desenvolvidos em linguagem FORTRAN.

2. Seguem uma lógica estruturada, com adaptações específicas para cada algoritmo (por exemplo, o α-GE exige o cálculo das acelerações).

3. Utilizam diagonalização de matrizes para otimização.

4. Incorporam diretivas OpenMP para paralelizar operações, como a multiplicação da matriz K.

Com o objetivo de melhorar o desempenho computacional dos métodos implementados, foram incorporadas diretivas de paralelização utilizando a interface OpenMP. A paralelização foi aplicada em diferentes etapas do código, com destaque para a montagem das matrizes do Método dos Elementos Finitos (MEF). Além disso, a multiplicação entre a matriz de rigidez K e o vetor de variáveis foi paralelizada por meio de laços sobre os elementos, explorando a independência entre iterações. Durante o processo de assembly (montagem global), que exige escrita concorrente em posições compartilhadas da matriz global, foi utilizada a diretiva `atomic` para garantir a integridade dos dados e evitar condições de corrida, assegurando, assim, paralelização segura e eficiente.

Apesar de todas as formulações serem apresentadas, a aplicação da divisão de subdomínios e a técnica de subciclagem são implementadas exclusivamente nos métodos adaptativos mencionados.

Com uma discretização temporal uniforme, a solução numérica é obtida iterativamente em função do passo de tempo Δt. A equação semidiscreta que rege os métodos apresentados é formulada de maneira geral utilizando uma variável vetorial genérica X, cuja escolha visa unificar a apresentação dos modelos acústico e elastodinâmico.

A partir deste ponto, X será utilizado para representar de forma genérica as variáveis de estado envolvidas — como os vetores de pressão P no caso do meio acústico, ou de deslocamentos U no caso do meio elastodinâmico (bem como suas respectivas derivadas temporais, como velocidade e aceleração). Essa notação compacta permite tratar de maneira unificada os diferentes sistemas físicos analisados, facilitando a descrição dos métodos de integração temporal e das estratégias de subciclagem adotadas.

3.2.1 Método das Diferenças Centrais

O Método das Diferenças Centrais realiza as aproximações dos operadores de derivadas de primeira e segunda ordem da seguinte forma:

$$\dot{\boldsymbol{X}}^n \approx \frac{\boldsymbol{X}^{n+1}-\boldsymbol{X}^{n-1}}{2\Delta t} \tag{3.59a}$$

$$\ddot{\boldsymbol{X}}^n \approx \frac{\boldsymbol{X}^{n-1}-2\boldsymbol{X}^n+\boldsymbol{X}^{n+1}}{\Delta t^2} \tag{3.59b}$$

Substituindo as aproximações dos operadores de derivadas de primeira 3.59a e segunda ordem 3.59b na equação semi-discreta, temos:

$$\left(\tfrac{1}{\Delta t^2}\boldsymbol{M}+\tfrac{1}{2\Delta t}\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{X}^{n+1} = \boldsymbol{F}^n - \left(\boldsymbol{K}-\tfrac{2}{\Delta t^2}\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{X}^n - \left(\tfrac{1}{\Delta t^2}\boldsymbol{M}-\tfrac{1}{2\Delta t}\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{X}^{n-1} \tag{3.60}$$

Observa-se que a Eq. 3.60 necessita dos resultados $\boldsymbol{X}^n$ e $\boldsymbol{X}^{n-1}$ para ser resolvida. Dessa maneira, o cálculo prévio de $\boldsymbol{X}^{-1}$ (no primeiro passo no tempo) é facultado pela seguinte expressão:

$$\boldsymbol{X}^{-1} = \boldsymbol{X}^0 - \Delta t\dot{\boldsymbol{X}}^0 + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\boldsymbol{X}}^0 \tag{3.61}$$

onde a segunda derivada temporal inicial $\ddot{X}_0$ é dada por:

$$\ddot{\boldsymbol{X}}^0 = \boldsymbol{M}^{-1}\left(\boldsymbol{F}^0 - \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{X}}^0 - \boldsymbol{K}\boldsymbol{X}^0\right) \tag{3.62}$$

conseguindo-se assim, calcular o primeiro passo de tempo.

A equação 3.60 pode ser escrita da seguinte forma: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{n+1} = \hat{\boldsymbol{F}}$, onde $\boldsymbol{A}$ é a matriz efetiva do problema, que é a soma dos termos entre parênteses do lado esquerdo da equação 3.60 e $\hat{\boldsymbol{F}}$ é o vetor de carga efetiva, que é a soma de todos os termos do lado direito da equação 3.60.

É importante salientar que os cálculos prévios acrescentam complexidade e dificuldade de implementação. Porém, uma vez que se trabalha com matrizes diagonalizadas, o sistema de equações não necessitará de fatoração de matrizes, podendo ser resolvida de maneira direta, tornando-se mais eficiente.

Sendo o MDC um método explícito, ou seja, condicionalmente estável, deve-se manter o Δt menor que um valor calculado a partir da frequência crítica do modelo para que os erros computacionais não sejam amplificados e propagados. O cálculo do passo de tempo crítico Δt_c é dado por:

$$\Delta t_c = \frac{2}{\omega_{\max}} \tag{3.63}$$

onde $\omega_{\max}$ é a frequência natural máxima do modelo, que deve ser obtida a partir

da solução do problema de autovalor generalizado dado por:

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{X} = \omega^2 \boldsymbol{M}\boldsymbol{X} \tag{3.64}$$

onde $\omega_{\max}$ será a raiz quadrada do maior autovalor.

Apesar de esta formulação ser teoricamente precisa, sua aplicação direta pode ser computacionalmente onerosa, especialmente em modelos com elevado número de graus de liberdade. O cálculo do maior autovalor global exige a resolução de um problema espectral de larga escala, o que pode comprometer a eficiência das análises numéricas.

Por essa razão, neste trabalho adota-se uma abordagem mais eficiente, baseada na estimativa local da frequência de amostragem máxima por elemento. Em vez de buscar o maior autovalor globalmente, a frequência máxima é estimada individualmente para cada elemento da malha, a partir de suas propriedades locais. Essa estratégia permite capturar adequadamente os efeitos de alta frequência relevantes para a estabilidade dos esquemas explícitos, ao mesmo tempo em que reduz significativamente o custo computacional associado à estimativa de $\omega_{\max}$.

Durante análises numéricas, oscilações ou comportamentos não físicos, conhecidos como modos espúrios, podem surgir devido à discretização numérica, especialmente em esquemas de alta ordem ou em problemas com descontinuidades. Esses modos podem degradar a precisão da solução, causar instabilidades numéricas e introduzir artefatos não físicos nos resultados. Para atenuar esses efeitos, o amortecimento numérico pode ser empregado como um mecanismo eficiente para filtrar e suprimir componentes de alta frequência indesejadas, melhorando a estabilidade e a qualidade da solução.

O MDC , em sua formulação original, não inclui amortecimento numérico, o que pode ser uma limitação em casos onde modos espúrios de alta frequência estão presentes. Apesar de sua simplicidade e eficiência, com uma ordem de precisão espacial de $O(h^2)$ (expresso em termos da ordem de precisão do método, o erro de truncamento é a diferença entre a solução exata de uma equação diferencial e a solução aproximada obtida pelo método numérico, considerando apenas os erros introduzidos pela discretização. Para o MDC o erro de truncamento é obtido pela expansão em série de Taylor), a introdução de amortecimento numérico pode impactar a precisão do método. Em particular, a inclusão explícita de amortecimento pode reduzir a ordem de precisão para $O(h)$, comprometendo a convergência quadrática característica do método em sua forma pura. Essa alteração deve ser considerada cuidadosamente em função dos requisitos de estabilidade e precisão do problema analisado.

3.2.2 $\alpha-$Generalizado Explícito

O α-generalizado explícito [1] é baseado na sua versão implícita dos mesmos autores, onde se utiliza a técnica *predictor-corrector explicit* (PCE) para torná-lo explícito. Inicialmente, apresenta-se o sistema de equações do α-Generalizado implícito [55]:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}}^{n+1-\alpha_m} + \boldsymbol{F}^{\text{int}}\left(\boldsymbol{X}^{n+1-\alpha_f}, \dot{\boldsymbol{X}}^{n+1-\alpha_f}\right) = \boldsymbol{F}^{\text{ext}}\left(\boldsymbol{X}^{n+1-\alpha_f}, \dot{\boldsymbol{X}}^{n+1-\alpha_f}, t_{n+1-\alpha_f}\right) \tag{3.65a}$$

$$\boldsymbol{X}^{n+1} = \boldsymbol{X}^n + \Delta t_{n+1}\dot{\boldsymbol{X}}^n + \Delta t_{n+1}^2\left(\left(\tfrac{1}{2}-\beta\right)\ddot{\boldsymbol{X}}^n + \beta\ddot{\boldsymbol{X}}^{n+1}\right) \tag{3.65b}$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}^{n+1} = \dot{\boldsymbol{X}}^n + \Delta t_{n+1}\left((1-\gamma)\ddot{\boldsymbol{X}}^n + \gamma\dot{\boldsymbol{X}}^{n+1}\right) \tag{3.65c}$$

$$\ddot{\boldsymbol{X}}^0 = \boldsymbol{M}^{-1}F_{\text{ext}}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}, 0) - F_{\text{int}}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}) \tag{3.65d}$$

onde:

$$\boldsymbol{X}^{n+1-\alpha_f} = (1-\alpha_f)\boldsymbol{X}^{n+1} + \alpha_f\boldsymbol{X}^n \tag{3.66a}$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}^{n+1-\alpha_f} = (1-\alpha_f)\dot{\boldsymbol{X}}^{n+1} + \alpha_f\dot{\boldsymbol{X}}^n \tag{3.66b}$$

$$\ddot{\boldsymbol{X}}^{n+1-\alpha_m} = (1-\alpha_m)\ddot{\boldsymbol{X}}^{n+1} + \alpha_m\ddot{\boldsymbol{X}}^n \tag{3.66c}$$

$$t_{n+1-\alpha_f} = (1-\alpha_f)t_{n+1} + \alpha_f t_n \tag{3.66d}$$

sendo os parâmetros do algoritmo dados em termos do raio espectral último ρ_∞:

$$\alpha_m = \tfrac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1} \tag{3.67a}$$

$$\alpha_f = \tfrac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1} \tag{3.67b}$$

$$\gamma = \tfrac{1}{2} - \alpha_m - \alpha_f \tag{3.67c}$$

$$\beta = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2} + \gamma\right) \tag{3.67d}$$

Dessa forma, seguindo com a técnica PCE , tem-se:

Predictors:

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}^{n+1} = \boldsymbol{X}^n + \Delta t_{n+1}\dot{\boldsymbol{X}}^n + \Delta t_{n+1}^2\left(\tfrac{1}{2}-\beta\right)\ddot{\boldsymbol{X}}^n \tag{3.68a}$$

$$\widetilde{\dot{\boldsymbol{X}}}^{n+1} = \dot{\boldsymbol{X}}^n + \Delta t_{n+1}\left(1-\gamma\right)\ddot{\boldsymbol{X}}^n \tag{3.68b}$$

Correctors:

$$\boldsymbol{X}^{n+1} = \widetilde{\boldsymbol{X}}^{n} + \Delta t_{n+1}^{2} \beta \ddot{\boldsymbol{X}}^{n} \tag{3.69a}$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}^{n+1} = \widetilde{\dot{\boldsymbol{X}}}^{n} + \Delta t_{n+1} \gamma \ddot{\boldsymbol{X}}^{n} \tag{3.69b}$$

onde:

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}^{n+1-\alpha_f} = (1-\alpha_f)\,\widetilde{\boldsymbol{X}}^{n+1} + \alpha_f \boldsymbol{X}^{n} \tag{3.70a}$$

$$\widetilde{\dot{\boldsymbol{X}}}^{n+1-\alpha_f} = (1-\alpha_f)\,\widetilde{\dot{\boldsymbol{X}}}^{n+1} + \alpha_f \dot{\boldsymbol{X}}^{n} \tag{3.70b}$$

Para desenvolver o α-GE , é necessário relaxar as restrições originais e estabelecer novas relações para os parâmetros algorítmicos, ajustando sua formulação para maximizar a dissipação em frequências altas [1].

O α-GE é classificado como um método linear de múltiplos passos, caracterizado por uma equação característica com três raízes. Duas dessas raízes são denominadas principais, enquanto a terceira é uma raiz espúria. No α-GI , as três raízes são construídas para serem reais e iguais no limite de alta frequência ($\Omega \to \infty$). Por outro lado, no método explícito, o limite de alta frequência é substituído por um limite crítico Ω_c. Neste caso, as raízes principais tornam-se complexas conjugadas no limite de alta frequência, com bifurcações apenas nesse regime [1].

O conceito de bifurcação é essencial no método explícito. Ele resulta em uma redução na dissipação em altas frequências, onde os dois limites de interesse são Ω_s (limite crítico) e Ω_b (limite de bifurcação). A redução da dissipação em altas frequências é um mecanismo que garante maior estabilidade do método [1].

No limite de bifurcação (Ω_b), todas as raízes se tornam reais, enquanto no limite crítico (Ω_s), o método é ajustado para maximizar a dissipação de alta frequência. Esses limites são fundamentais para garantir a estabilidade e a precisão do método em diferentes condições. A equação característica do método EG-α pode ser expressa como: $(\lambda+\rho_p)^2(\lambda+\rho_s)=0$, onde ρ_p e ρ_s representam as raízes principal e espúria, respectivamente.

Os limites críticos de estabilidade do método são definidos como [1]:

$$\Omega_b = \frac{(1+\rho_p)\sqrt{2-\rho_b}}{\rho_b} \tag{3.71a}$$

$$\Omega_s = \sqrt{\frac{12(1-\rho_\infty)(1+\rho_\infty)^2}{10+15\rho_\infty-\rho_\infty^2+\rho_\infty^3-\rho_\infty^4}} \tag{3.71b}$$

Aqui, ρ_∞ é um parâmetro que controla a dissipação em alta frequência, enquanto ρ_b representa o raio espectral no limite de bifurcação [1].

Os parâmetros algorítmicos do método α-GE podem ser determinados a partir de ρ_p e ρ_s, como mostrado abaixo:

$$\alpha_m = \frac{-2\rho_p\rho_s+\rho_p-1}{(\rho_p+1)(\rho_s+1)} \tag{3.72a}$$

$$\beta = \alpha_f + \frac{1-\rho_p-2\rho_p\rho_s}{(1+\rho_p)(1+\rho_s)} + \frac{(1-\rho_p)(1-\rho_p\rho_s)^2}{\alpha_f(1+\rho_p)^2(1+\rho_s)(2+\rho_s-\rho_p\rho_s)} \tag{3.72b}$$

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f \tag{3.72c}$$

onde α_m, α_f, β e γ são ajustados para atender aos requisitos de estabilidade e precisão do método. Esses parâmetros controlam a dissipação numérica e garantem que a solução seja precisa mesmo em sistemas dinâmicos de alta frequência [1].

Quando $\rho_p = \rho_s = 1$, $\Omega_c = 2$, o que significa que o método possui o mesmo limite de estabilidade do MDC . Note-se que α_f não tem influência sobre o limite de bifurcação ou o limite de estabilidade; assim, α_f é um parâmetro livre. Caso $\alpha_f = 0$, é necessário que $\rho_p = 1$; e, adicionalmente, se $\rho_s = 0$, o MDC é recuperado. O método α-GE é semelhante ao método α-GI, pois, para um dado valor de dissipação em alta frequência, a dissipação em baixa frequência é minimizada quando $\rho_s = \rho_p$. Assim, ao definir o valor do raio espectral no limite de bifurcação como ρ_b, temos que $\rho_s = \rho_p = \rho_b$ alcança o equilíbrio ideal entre dissipação em baixa e alta frequência. O que resulta é uma família de métodos α-GE de dois parâmetros (α_f, ρ_b). Porém, α-GE pode ser reduzido a um parâmetro, ao considerar $\alpha_f = 1$, resultando nas seguintes relações de recorrência para o α-GE para sistemas não amortecidos [1]:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\mathbf{X}}^{n+1-\alpha_m} = \boldsymbol{F}_n^{\text{ext}} - \boldsymbol{F}^{\text{int}}(\mathbf{X}^n) \tag{3.73a}$$

$$\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{X}^n + \Delta t\dot{\mathbf{X}}^n + \Delta t^2\left(\left(\tfrac{1}{2}-\beta\right)\ddot{\mathbf{X}}^n + \beta\ddot{\mathbf{X}}^{n+1}\right) \tag{3.73b}$$

$$\dot{\mathbf{X}}^{n+1} = \dot{\mathbf{X}}^n + \Delta t\left((1-\gamma)\ddot{\mathbf{X}}^n + \gamma\ddot{\mathbf{X}}^{n+1}\right) \tag{3.73c}$$

$$\ddot{\mathbf{X}}^{n+1-\alpha_m} = (1-\alpha_m)\ddot{\mathbf{X}}^{n+1} + \alpha_m\ddot{\mathbf{X}}^n \tag{3.73d}$$

$$\tag{3.73e}$$

onde:

$$\alpha_m = \frac{2\rho_b - 1}{\rho_b + 1} \tag{3.74a}$$

$$\beta = \frac{5-3\rho_b}{(1+\rho_b)^2(2-\rho_b)} \tag{3.74b}$$

$$\gamma = \frac{3}{2} - \alpha_m \tag{3.74c}$$

Os limites críticos de estabilidade do método são definidos substituindo $\rho_\infty = \rho_p = \rho_b$ nas Equações 3.71.

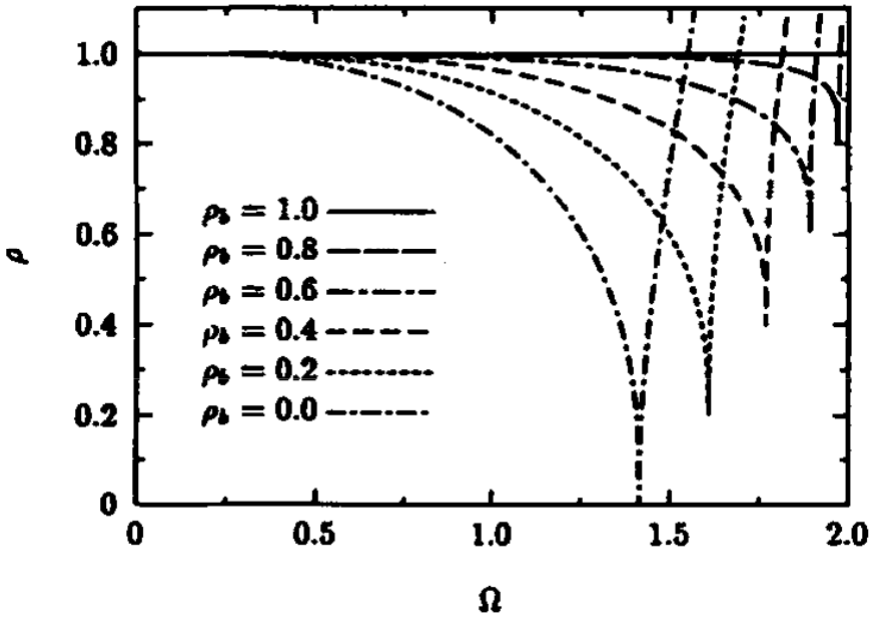


Figura 3.1: Raio espectral em função de ρ_b para o α-*GE*.[1]

Uma das propriedades mais importantes do método α-*GE* é sua capacidade de ajustar a dissipação numérica. A variação do raio espectral em função de ρ_b é mostrada na Figura 3.1.Quando $\rho_b = 0$, o método apresenta uma aniquilação assimptótica, eliminando completamente respostas de alta frequência em um único passo de tempo. No entanto, para valores diferentes de ρ_b, o método permite controle sobre a dissipação, o que é útil em sistemas dinâmicos com diferentes escalas de frequência [1].

A dissipação numérica aumenta à medida que ρ_b diminui, a razão de amortecimento numérico do método é mostrada na Figura 3.2 para diferentes valores de ρ_b, alcançando valores máximos de dissipação em baixa frequência quando $\rho_b = 0.3665$. Este valor específico minimiza o erro relativo no período no domínio de baixa frequência, conforme descrito pela seguinte equação:$11\rho_b^3 - 36\rho_b^2 + 39\rho_b - 10 = 0$. O valor $\rho_b = 0.3665$ representa o equilíbrio ideal entre alongamento e encurtamento do período relativo no método α-*GE* , conforme apresenta a Figura 3.3. No entanto, tanto o alongamento quanto o encurtamento do período podem ocorrer dependendo

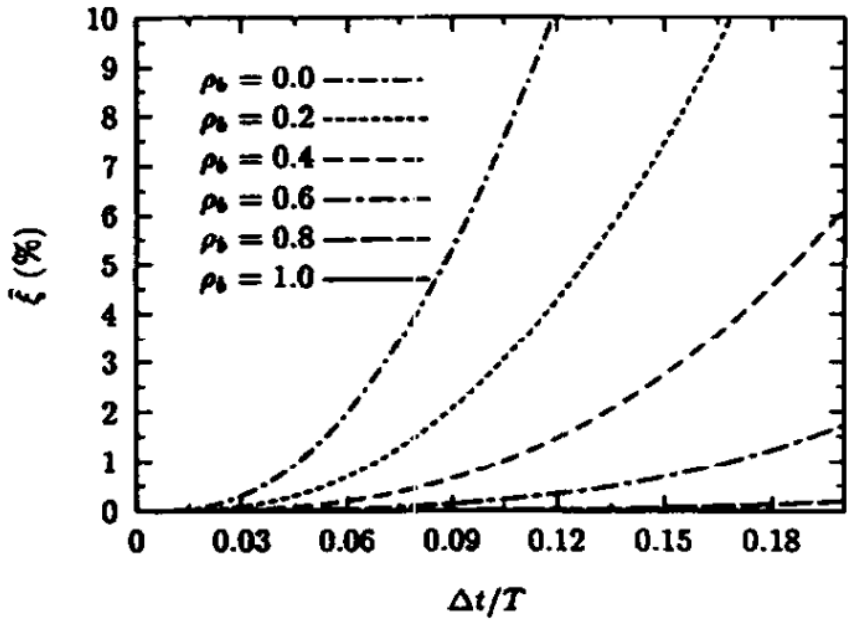


Figura 3.2: Razão de amortecimento numérica do método α-GE.[1]

do valor de ρ_b, o que torna o ajuste desse parâmetro essencial para controlar a precisão em diferentes faixas de frequência. Quando $\rho_b = 1$, o método perde eficiência, com comportamento semelhante ao MDC , apresentando menor controle sobre a dissipação numérica [1].

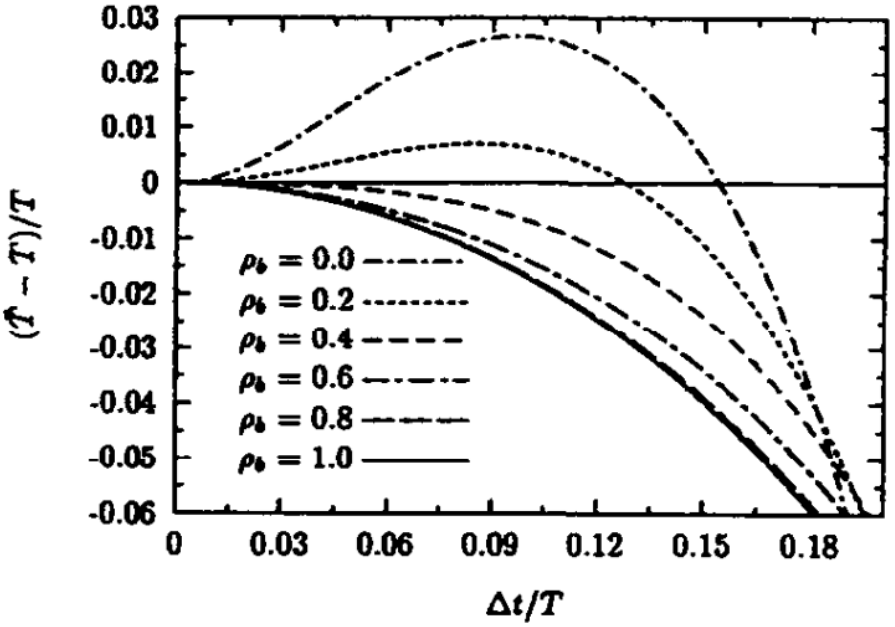


Figura 3.3: Erro de alongamento e encurtamento do período relativo do método α-GE.[1]

O amortecimento físico pode ser incorporado em algoritmos explícitos de integração temporal por meio do tratamento direto do termo de amortecimento. Embora

seja possível tratar o amortecimento tanto de forma implícita quanto explícita, focamos exclusivamente no tratamento explícito, que é frequentemente preferido devido à simplicidade computacional e à facilidade de implementação [1].

O tratamento explícito do amortecimento torna muitos algoritmos precisos apenas em primeira ordem; a precisão de segunda ordem pode ser recuperada por meio de uma segunda passagem de corretor através da equação de equilíbrio. No entanto, para o α-GE , a precisão de segunda ordem pode ser mantida sem a necessidade de uma segunda passagem de corretor. Isso é alcançado diretamente pela formulação algorítmica, que preserva a precisão enquanto lida de forma explícita com o termo de amortecimento [1].

Um desafio importante no caso amortecido é que expressões analíticas úteis para o limite de bifurcação, Ω_b, não estão disponíveis. Como resultado, os parâmetros ρ_p e ρ_s não representam mais diretamente as raízes algorítmicas no limite Ω_b. No entanto, são utilizadas as mesmas definições de parâmetros algorítmicos dos sistemas não amortecidos [1].

O tratamento explícito do amortecimento físico no método EG-α é realizado utilizando a equação de equilíbrio do método. Para preservar a precisão de segunda ordem, tem-se o parâmetro $\alpha_f = 1$ e o limite de estabilidade é dado por:

$$\Omega_s = \frac{4(1-\alpha_m)\xi - \sqrt{16(1-\alpha_m)^2\xi^2 - 4(1-2\alpha_m)(3-2\alpha_m-4\beta)}}{3-2\alpha_m-4\beta} \tag{3.75}$$

onde ξ é a taxa de amortecimento físico. Como ocorre frequentemente nos tratamentos explícitos, é necessária uma estimativa do valor máximo de ξ para garantir a estabilidade [1].

O Ω_c é definido como o menor valor entre Ω_b, Ω_s e a frequência na qual $|\lambda_3| > |\lambda_{1,2}|$ ocorre pela primeira vez, ou seja, quando a magnitude da raiz espúria excede a das raízes principais. Para $\rho_s = 0$, o método apresenta maior estabilidade. À medida que a taxa de amortecimento físico ξ aumenta, o limite crítico Ω_c diminui, e para $\rho_s = \rho_p = 1$, o método torna-se instável para qualquer valor não nulo de amortecimento físico [1].

3.2.3 Noh-Bathe Explícito

A abordagem utilizada no esquema explícito proposto por Noh-Bathe [2] consiste em calcular os deslocamentos, velocidades e acelerações desconhecidas considerando que o passo de tempo Δt consiste em dois subpassos, conforme inspirado pelo método implícito de Bathe [56]. Os tamanhos dos subpassos de tempo são $p\Delta t$ e $(1-p)\Delta t$ para o primeiro e segundo subpasso, respectivamente, onde $p \in (0,1)$.

Primeiro subpasso:

$$\boldsymbol{X}^{n+p} = \boldsymbol{X}^{n} + (p\Delta t)\dot{\boldsymbol{X}}^{n} + \tfrac{1}{2}(p\Delta t)^2\ddot{\boldsymbol{X}}^{n} \tag{3.76a}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{X}}}^{n+p} = \dot{\boldsymbol{X}}^{n} + \tfrac{1}{2}(p\Delta t)\ddot{\boldsymbol{X}}^{n} \tag{3.76b}$$

$$\dot{\widetilde{\boldsymbol{X}}}^{n+p} = 2\dot{\hat{\boldsymbol{X}}}^{n+p} - \dot{\boldsymbol{X}}^{n} \tag{3.76c}$$

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}}^{n+p} = (1-p)\boldsymbol{F}^{n+1} + p\boldsymbol{F}^{n} - \boldsymbol{C}\dot{\widetilde{\boldsymbol{X}}}^{n+p} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{X}^{n+p} \tag{3.76d}$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}^{n+p} = \dot{\hat{\boldsymbol{X}}}^{n} + \tfrac{1}{2}(p\Delta t)\ddot{\boldsymbol{X}}^{n+p} \tag{3.76e}$$

Segundo subpasso:

$$\boldsymbol{X}^{n+1} = \boldsymbol{X}^{n+p} + [(1-p)\Delta t]\dot{\boldsymbol{X}}^{n+p} + \tfrac{1}{2}[(1-p)\Delta t]^2\ddot{\boldsymbol{X}}^{n+p} \tag{3.77a}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{X}}}^{n+1} = \dot{\boldsymbol{X}}^{n+p} + \tfrac{1}{2}[(1-p)\Delta t]\ddot{\boldsymbol{X}}^{n+p} \tag{3.77b}$$

$$\dot{\widetilde{\boldsymbol{X}}}^{n+1} = 2\dot{\hat{\boldsymbol{X}}}^{n+1} - \dot{\boldsymbol{X}}^{n+p} \tag{3.77c}$$

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}}^{n+1} = \boldsymbol{F}^{n+1} - \boldsymbol{C}\dot{\widetilde{\boldsymbol{X}}}^{n+1} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{X}^{n+1} \tag{3.77d}$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}^{n+1} = \dot{\hat{\boldsymbol{X}}}^{n+1} + [(1-p)\Delta t](q_0\ddot{\boldsymbol{X}}^{n} + q_1\ddot{\boldsymbol{X}}^{n+p} + q_2\ddot{\boldsymbol{X}}^{n+1}) \tag{3.77e}$$

Podemos interpretar o primeiro subpasso como usando um passo de avanço de Euler de diferença finita seguido pelo uso da regra trapezoidal para as velocidades finais (como no MDC , envolvendo apenas as velocidades no início do subpasso e as acelerações no início e no final do subpasso). O segundo subpasso pode ser visto como o mesmo preditor-corretor, mas com uma equação para as velocidades finais usando as três acelerações envolvidas no passo. Os parâmetros p, q_0, q_1 e q_2 afetam as características de estabilidade e precisão do método, e são determinados da seguinte forma, para obter precisão de segunda ordem, com ou sem amortecimento físico incluído [2]:

$$q_0 + q_1 + q_2 = \tfrac{1}{2} \tag{3.78a}$$

$$q_2 = \tfrac{1}{2} - pq_1 \tag{3.78b}$$

$$\tag{3.78c}$$

Nas equações modais desacopladas, o método pode ser representado como:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}^{t+\Delta t} \\ \dot{x}^{t+\Delta t} \\ x^{t+\Delta t} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \ddot{x}^{t} \\ \dot{x}^{t} \\ x^{t} \end{bmatrix} + \mathbf{L}_a \boldsymbol{r}^{t+p\Delta t} + \mathbf{L}_b \boldsymbol{r}^{t+\Delta t} \tag{3.79}$$

onde $\mathbf{A}$, $\mathbf{L}_a$ e $\mathbf{L}_b$ são os operadores que descrevem a aproximação da integração e os operadores de carga. Assumindo o caso sem amortecimento físico, o polinômio característico de $\mathbf{A}$ é expresso como:$\tilde{p}(\lambda) = \lambda^3 - 2A_1\lambda^2 + A_2\lambda - A_3$, onde os coeficientes são definidos em função da frequência natural modal ω_0 [2]:

$$A_1 = 1 - \tfrac{1}{2}\omega_0^2\Delta t^2 + \tfrac{1}{4}p(1-p)\left(p^2 q_1 - pq_1 + \tfrac{1}{2}\right)\omega_0^4\Delta t^4 \tag{3.80a}$$

$$A_2 = 1 + \tfrac{1}{2}pq_1(1-p)^3\omega_0^4\Delta t^4 \tag{3.80b}$$

$$A_3 = 0 \tag{3.80c}$$

Aqui, ω_0 é a frequência natural modal. Utilizando os critérios de estabilidade de Routh-Hurwitz (maneira de determinar se todas as raízes de um polinômio têm partes reais negativas) e definindo $\Omega_0 = \omega_0\Delta t$, obtemos o limite máximo de estabilidade [2]:

$$\Omega_s^2 = \tfrac{1}{\gamma p(1-p)} \qquad -\frac{1}{4(1-p)} \leq q_1 \leq \frac{4p(1-p)-1}{8(1-p)^2 p} \tag{3.81a}$$

$$\gamma = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}(1-p)q_1 \tag{3.81b}$$

Para valores de $p = 0.5$ e $q_1 = 0$, o limite de estabilidade é $\Omega_s = 4$, o que torna o método duas vezes mais estável que o MDC , embora utilizando subpassos. Os autovalores de $\mathbf{A}$ devem permanecer no plano complexo para representar soluções oscilatórias. Como $A_3 = 0$, temos: $\lambda_{1,2} = A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - A_2}$. Dessa forma, os pontos de bifurcação, onde os autovalores tornam-se reais, são dados por [2]:

$$\Omega_{b1}^2 = \tfrac{2}{\alpha(1-p)} \tag{3.82a}$$

$$\Omega_{b2,3}^2 = \tfrac{2-p\pm\sqrt{\beta}}{\alpha(1-p)p} \tag{3.82b}$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2} - (1-p)pq_1 \tag{3.82c}$$

$$\beta = 8p(p-1)^2 q_1 + p^2 \tag{3.82d}$$

$$\tag{3.82e}$$

Para garantir que $\alpha > 0$, temos:

$$q_1 = \frac{2p-1}{2p(p-1)} \tag{3.83a}$$

$$q_2 = \frac{1}{2} - pq_1 \tag{3.83b}$$

$$q_0 = \frac{1}{2} - q_1 - q_2 \tag{3.83c}$$

Com isso, o ponto de bifurcação e o limite de estabilidade são maximizados como:

$$\Omega_b = \frac{2}{p} \tag{3.84a}$$

$$\Omega_s = \frac{2}{\sqrt{(1-p)(3p-1)}} \tag{3.84b}$$

A condição $1/2 \leq p < 2/3$ garante que sempre $\Omega_b \leq \Omega_s$. Para uma aplicação geral, é recomendado utilizar $p = 0.54$, que introduz dissipação numérica moderada, com alta precisão. Caracterizando-se como um esquema que é basicamente o MDC levemente modificado para introduzir dissipação numérica. Utilizando o raio espectral $\rho(\mathbf{A})$ no ponto de bifurcação (ρ_b), a relação entre ρ_b e p é dada por [2]:

$$p = \frac{2 - \sqrt{2 + 2\rho_b}}{1 - \rho_b}; \quad p = 0.5 \quad \text{se} \quad \rho_b = 1 \tag{3.85}$$

Essa abordagem permite ajustar p com base em ρ_b, que representa a quantidade de dissipação numérica em altas frequências, mantendo o método estável e eficiente em várias condições de aplicação. O intervalo de p para $0 \leq \rho_b \leq 1$ é obtido como $0.5 \leq p \leq 2 - \sqrt{2}$. Aqui, $p = 0.5$ resulta em $\rho_b = 1$, implicando nenhuma dissipação numérica, enquanto $p = 2 - \sqrt{2}$ resulta em máxima dissipação numérica e alongamento de período mínimo (negativo) [2].

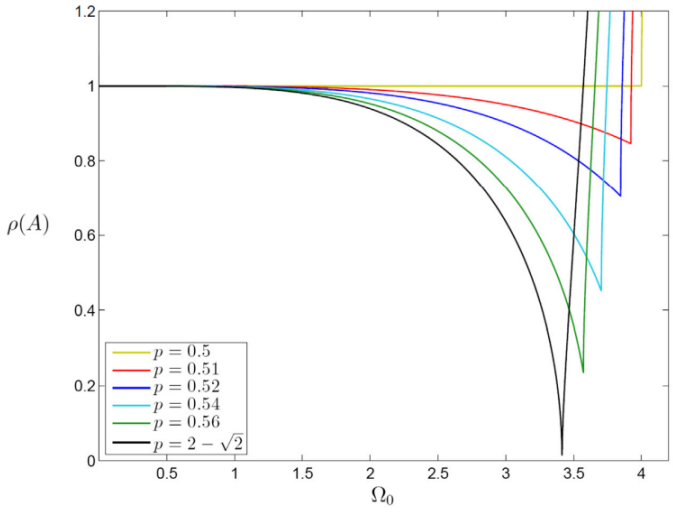


Figura 3.4: Dependência do raio espectral para o método NB.[2]

A Figura 3.4 mostra o raio espectral do método como uma função de Ω_0 para vários valores de p. Observa-se que, para todos os valores de p, $\rho(\mathbf{A}) \cong 1$ até $\Omega_0 \cong 1.25$ ($\Delta t/T_0 \cong 0.20$). Essa propriedade é desejável, pois proporciona alta precisão para os modos de baixa frequência. As características do esquema proposto mostram um pequeno decaimento de amplitude e alongamento (negativo) de período para todos os valores de p [2].

Para métodos explícitos, é crucial manter a precisão na integração de frequências mais baixas enquanto se impõe dissipação numérica em frequências mais altas. A Figura 3.4 mostra que o limite de bifurcação Ω_b do esquema diminui conforme ρ_b diminui. Especificamente, quando ρ_b varia de 1 a 0 (ou seja, de dissipação mínima para máxima), o limite de bifurcação Ω_b do método proposto muda de 4 para 3.414 [2].

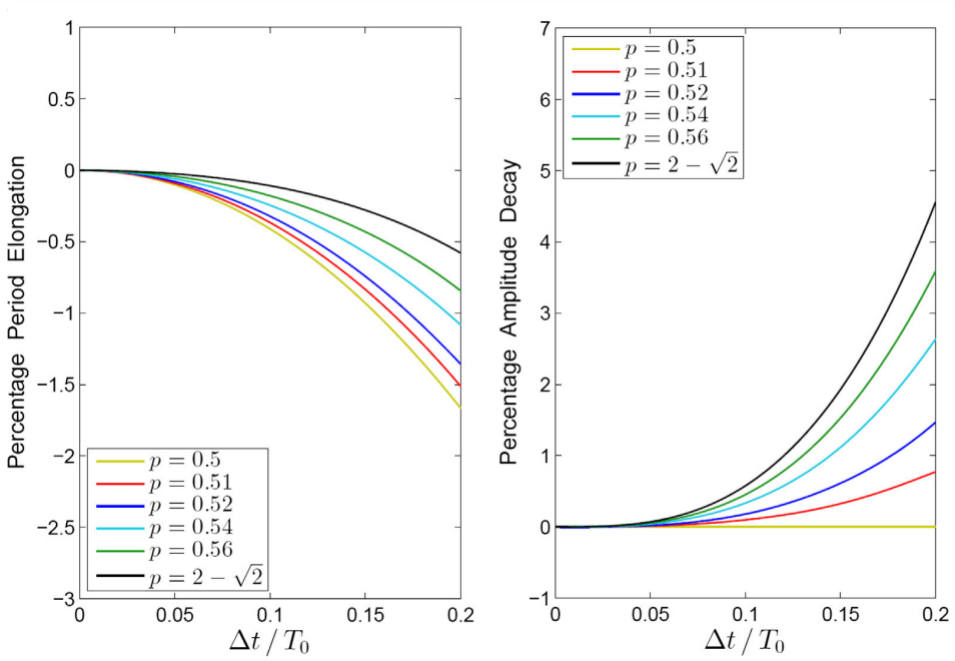


Figura 3.5: Porcentagem de alongamentos de período e decaimento de amplitude para o método NB.[2]

Para modelos sem amortecimento físico, o limite de estabilidade do método é caracterizado por $\Delta t \leq 4/\omega^{\max}$, para $p = 0.5$, e $\Delta t \leq 3.571/\omega^{\max}$, para $p = 2 - \sqrt{2}$ (limites intermediários são obtidos para valores intermediários de p , por exemplo, para $p = 0.54$, $\Delta t \leq 3.745/\omega^{\max}$), diminuindo-se estes valores caso o amortecimento físico seja considerado [2].

Embora o parâmetro p possa ser ajustado para uma solução específica, a quantidade de amortecimento numérico em altas frequências geralmente requer experimentação numérica. Com $p = 0.54$, o esquema mostra boa precisão na resposta em baixa frequência, como visto na Figura 3.5: o alongamento de período é de

aproximadamente 1%, e o decaimento de amplitude é de cerca de 2.5% [2].

3.2.4 Método $\alpha-$adaptativo

Ao integrar o sistema semi discreto à nível de elemento [3, 12], considerando um passo de tempo Δt, pode-se escrever:

$$\boldsymbol{M}_e \int_{t^n}^{t^n+1} \ddot{\boldsymbol{X}}_e(t)dt + \boldsymbol{C}_e \int_{t^n}^{t^n+1} \dot{\boldsymbol{X}}_e(t)dt + \boldsymbol{K}_e \int_{t^n}^{t^n+1} \boldsymbol{X}_e(t)dt = \int_{t^n}^{t^n+1} \boldsymbol{F}_e(t)dt \quad (3.86)$$

que pode ser interpretada como uma forma simples residual ponderada das equações locais de movimento (ou, alternativamente, a forma forte de um resíduo global ponderado considerando funções peso de Heaviside para os elementos do modelo). As integrais no lado esquerdo da equação 3.86 podem ser aproximadas por:

$$\int_{t^n}^{t^n+1} \ddot{\boldsymbol{X}}_e(t)dt = \dot{\boldsymbol{X}}_e^{n+1} - \dot{\boldsymbol{X}}_e^n \quad (3.87a)$$

$$\int_{t^n}^{t^n+1} \dot{\boldsymbol{X}}_e(t)dt = \boldsymbol{X}_e^{n+1} - \boldsymbol{X}_e^n \quad (3.87b)$$

$$\int_{t^n}^{t^n+1} \boldsymbol{X}_e(t)dt = \Delta t \boldsymbol{X}_e^n + \tfrac{1}{2}\alpha_e^n \Delta t^2 \dot{\boldsymbol{X}}_e^n \quad (3.87c)$$

onde α_e^n é o parâmetro de integração do método, calculado em cada elemento e em cada passo de tempo.

O deslocamento $\boldsymbol{X}^{n+1}$ pode ser definido pela seguinte expressão de diferença finita simples:

$$\boldsymbol{X}^{n+1} = \boldsymbol{X}^n + \frac{1}{2}\Delta t \dot{\boldsymbol{X}}^n + \frac{1}{2}\Delta t \dot{\boldsymbol{X}}^{n+1} \quad (3.88)$$

Levando em conta as aproximações 3.87c e 3.88, a equação 3.86 pode ser reescrita como a seguinte relação recursiva:

$$\left(\boldsymbol{M}_e + \frac{1}{2}\Delta t \boldsymbol{C}_e\right) \dot{\boldsymbol{X}}_e^{n+1} = \overline{\boldsymbol{F}_e} + \boldsymbol{M}_e \dot{\boldsymbol{X}}_e^n - \frac{1}{2}\Delta t \boldsymbol{C}_e \dot{\boldsymbol{X}}^n - \boldsymbol{K}_e \left(\Delta t \boldsymbol{X}_e^n + \frac{1}{2}\alpha_e^n \Delta t^2 \dot{\boldsymbol{X}}_e^n\right) \quad (3.89)$$

onde $\overline{\boldsymbol{F}}$ representa a integral do vetor de força, que pode ser calculada analiticamente ou considerando técnicas numéricas padrão (e.g., regra retangular: $\overline{\boldsymbol{F}} = \Delta t \boldsymbol{F}^{n+\lambda}$, onde $0 \leq \lambda \leq 1$; regra trapezoidal: $\overline{\boldsymbol{F}} = \frac{1}{2}\Delta t \boldsymbol{F}^n + \frac{1}{2}\Delta t \boldsymbol{F}^{n+1}$; etc.).

As aproximações apresentadas nas equações 3.87c e 3.88 são fundamentadas e discutidas em maiores detalhes no trabalho de Soares [57], onde a Figura 1 ilustra a interpretação geométrica das integrais envolvidas, e a equação (12) apresenta a dedução formal das expressões utilizadas no esquema adaptativo.

Como se pode observar, existe um parâmetro de integração temporal na equação 3.89, representado por α_e^n, que varia seu valor para cada elemento da malha adotada (veja o subscrito "e") e para cada passo de tempo do procedimento de marcha temporal (veja o superscrito "n"). Este parâmetro α, controla a quantidade de amortecimento numérico a ser introduzido na análise, cuja a estratégia aqui é adotar $\alpha > 1$ sempre e onde quer que o amortecimento numérico possa ser necessário, e

$\alpha = 1$ caso contrário. Esta estratégia pode ser automaticamente conduzida com base em um critério oscilatório controlado por um parâmetro ϕ, que também é calculado em cada passo de tempo e para cada elemento. O cálculo deste parâmetro oscilatório pode ser dado por:

$$\phi_e^n = \sum_{i=1}^{d_e} \left| \left| \boldsymbol{x}_i^n - \boldsymbol{x}_i^{n-2} \right| - \left| \boldsymbol{x}_i^n - \boldsymbol{x}_i^{n-1} \right| - \left| \boldsymbol{x}_i^{n-1} - \boldsymbol{x}_i^{n-2} \right| \right| \tag{3.90}$$

onde d_e representa o total de graus de liberdade do elemento, que são representados por $\boldsymbol{x}_i$. Portanto, quando $\phi_e^n \neq 0$, pelo menos um grau de liberdade do elemento está oscilando.

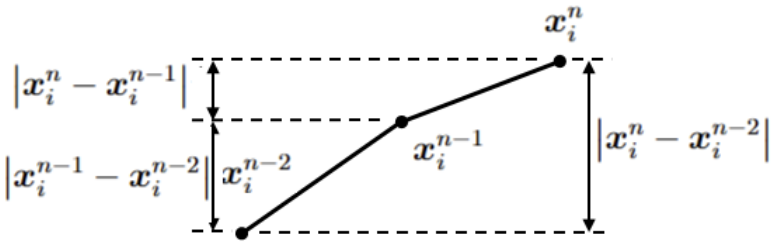


Figura 3.6: Esquema do cálculo do parâmetro oscilatório.

O algoritmo ativa a dissipação numérica máxima na frequência de amostragem máxima do elemento $\Omega_e^{\max}$ (onde $\Omega_e^{\max} = \omega_e^{\max} \Delta t$, portanto, quando $\phi_e^n \neq 0$, α_e^{n} assume o valor:

$$\alpha_e^{\mathrm{act}} = \frac{-\Omega_e^{\max} - 4\xi_e \left(\Omega_e^{\max} + 1^{1/2}\right)}{\Omega_e^{\max}} \tag{3.91}$$

onde o superscrito "act"(abreviação de ativo) destaca que esta expressão é aplicada somente quando o amortecimento numérico deve ser introduzido na análise. Para $\phi_e^n = 0$, $\alpha_e^n = 1$ é considerado. Na equação 3.91, $\xi_e = \zeta_e/(2\rho_e \omega_e^{\max})$, onde, como definido anteriormente, $\omega_e^{\max}$, ρ_e e ζ_e representam as propriedades físicas do elemento (ou seja, frequência natural máxima, densidade de massa e coeficiente de amortecimento viscoso, respectivamente).

Em outras palavras, o parâmetro α_e^n pode assumir dois valores a cada passo de tempo: $\alpha_e^n = 1$ quando o amortecimento não está ativado, e $\alpha_e^n \neq 1$ quando o amortecimento numérico é aplicado de forma adaptativa.

Na figura 3.7, os raios espectrais do método α-adaptativo são mostrados, seguindo a equação 3.91 para definir o parâmetro α do método e considerando vários valores para $\Omega_e^{\max}$ e ξ_e, de modo que uma ampla gama de configurações é ilustrada. Deve-se observar que, para $\Omega_e^{\max} = 2$ e $\xi_e = 0$, $\alpha_e^{\mathrm{act}} = 1$, caracterizando o caso não dissipativo, ou seja, para $\phi_e^n = 0$, $\alpha_e^n = 1$. A figura 3.7 ilustra o comportamento do raio espectral para modelos fisicamente não amortecidos ($\xi_e = 0$) e amortecidos ($\xi_e > 0$). Como observado anteriormente, para $\alpha = 1$, o amortecimento numérico

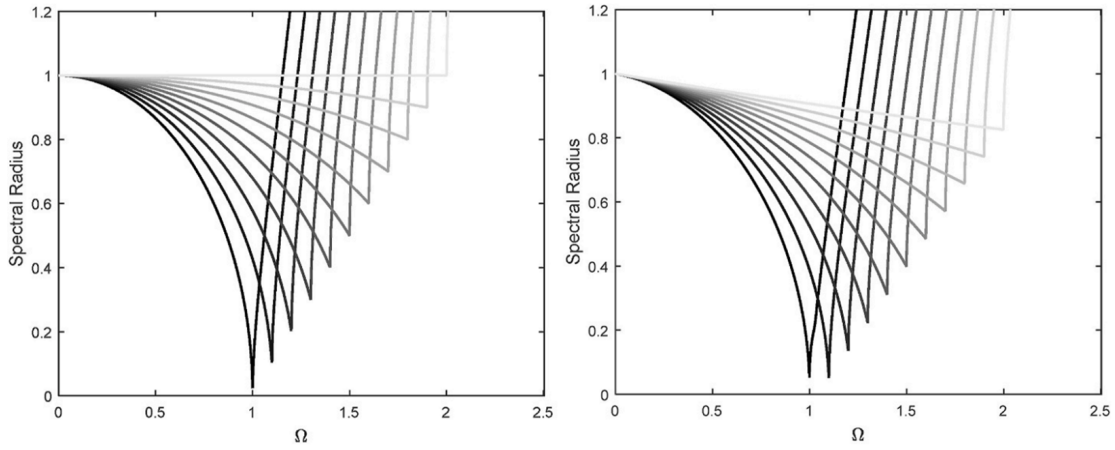


Figura 3.7: Raio espectral considerando $\Omega_e^{max} = 1.0, 1.1, 1, 2..., 2.0$: análises (a) sem e (b) com amortecimento físico $\xi_e = 0.1$.[3]

não é introduzido na análise, e o amortecimento algorítmico é introduzido à medida que o valor de α aumenta para $\Omega_e^{\max} = 1$ e $\xi_e = 0$, $\alpha_e^{\text{act}} = 3$, que é o maior valor de α adotado no trabalho; neste caso, o raio espectral nulo é obtido na frequência de amostragem de bifurcação. Como é bem conhecido, na frequência de amostragem de bifurcação, autovalores complexos conjugados (da matriz de amplificação) bifurcam em autovalores reais distintos e o raio espectral atinge um valor mínimo. Seguindo a equação 3.91, a frequência de amostragem de bifurcação do método é igual a $\Omega_e^{\max}$, permitindo que o amortecimento numérico máximo seja fornecido na frequência de amostragem máxima do elemento, resultando em um procedimento de dissipação muito eficaz para os modos mais elevados do modelo.

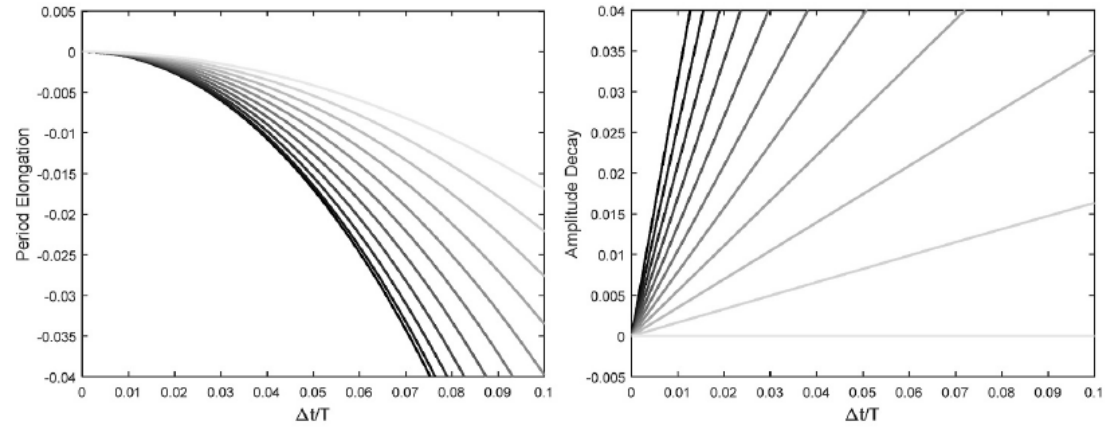


Figura 3.8: Erros na analise considerando $\Omega_e^{max} = 1.0, 1.1, 1, 2..., 2.0$: (a) alongamento de período (b) decaimento de amplitude.[3]

Na figura 3.8, os erros de alongamento de período e decaimento de amplitude são mostrados, para o método α (deve-se observar que resultados análogos aos do CD são fornecidos considerando $\alpha = 1$). Como esperado, os erros de alongamento

de período e decaimento de amplitude aumentam à medida que α aumenta; assim, $\alpha > 1$ deve ser aplicado apenas quando e onde o amortecimento numérico pode ser necessário, extinguindo localmente oscilações espúrias (que se desenvolvem devido à excitação de modos espacialmente não resolvidos), sem danificar severamente a precisão geral das respostas calculadas.

3.2.5 Método $\mu-$adaptativo

Esta técnica inovadora é uma extensão de um procedimento de marcha temporal verdadeiramente explícito de segunda ordem de precisão proposto por Soares [4, 58] para tratar o sistema de equações semi-discreto considerando coeficientes adequados e composições encadeadas de multiplicações de matrizes de rigidez e amortecimento. Esta metodologia, considerando uma abordagem não dissipativa (ou seja, adotando $\alpha = 1$), pode ser definida pelas seguintes relações de recorrência:

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{V}_1 = \bar{\boldsymbol{F}} - \Delta t \left[\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{X}}^n + \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{X}^n + \tfrac{1}{2}\Delta t\dot{\boldsymbol{X}}^n\right)\right] \tag{3.92a}$$

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{V}_2 = \Delta t\boldsymbol{C}\boldsymbol{V}_1 \tag{3.92b}$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}^{n+1} = \dot{\boldsymbol{X}}^n + \boldsymbol{V}_1 - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{V}_2 \tag{3.92c}$$

$$\boldsymbol{X}^{n+1} = \boldsymbol{X}^n + \tfrac{1}{2}\Delta t\left(\dot{\boldsymbol{X}}^n + \dot{\boldsymbol{X}}^{n+1}\right) \tag{3.92d}$$

onde Δt representa o passo de tempo adotado na análise, $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ são vetores auxiliares e $\bar{\boldsymbol{F}} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \boldsymbol{F}(t)\, dt$, que pode ser calculado considerando qualquer procedimento numérico padrão para avaliar o valor numérico de uma integral definida. O amortecimento viscoso clássico de Rayleigh também é considerado neste trabalho, e assume-se que a matriz de amortecimento viscoso $\boldsymbol{C}$ seja proporcional às matrizes de massa e de rigidez do modelo, ou seja, $\boldsymbol{C} = \alpha_m\boldsymbol{M} + \alpha_k\boldsymbol{K}$, onde α_m e α_k são constantes de proporcionalidade.

O procedimento de integração temporal estudado é a modificação do algoritmo de solução descrito pelas equações 3.92, introduzindo o cálculo de um vetor auxiliar adicional na análise $\mathbf{V}_3$, que é avaliado considerando dois parâmetros de integração temporal chamados: μ_1 e μ_2. A introdução deste vetor adicional na análise permite fornecer dissipação numérica controlável, limites de estabilidade estendidos e erros dispersivos reduzidos, resultando em um procedimento de solução de marcha temporal aprimorado. O novo algoritmo de solução que surge ao considerar essa abordagem pode ser definido pelas seguintes relações de recorrência:

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{V}_1 = \bar{\boldsymbol{F}} - \Delta t \left[\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{X}}^n + \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{X}^n + \tfrac{1}{2}\Delta t\dot{\boldsymbol{X}}^n\right)\right] \tag{3.93a}$$

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{V}_2 = \Delta t\boldsymbol{C}\boldsymbol{V}_1 \tag{3.93b}$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}^{n+1} = \dot{\boldsymbol{X}}^n + \boldsymbol{V}_1 - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{V}_2 \tag{3.93c}$$

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{V}_3 = \Delta t\boldsymbol{K}\left(\mu_1\Delta t\dot{\boldsymbol{X}}^{n+1} + \mu_2\Delta t\dot{\boldsymbol{X}}^n\right) \tag{3.93d}$$

$$\boldsymbol{X}^{n+1} = \boldsymbol{X}^n + \tfrac{1}{2}\Delta t\left(\dot{\boldsymbol{X}}^n + \dot{\boldsymbol{X}}^{n+1} - \boldsymbol{V}_3\right) \tag{3.93e}$$

Como se pode observar, ao adotar $\mu_1 = \mu_2 = 0$, o sistemas de equações descrito

3.93 replica o 3.92, estabelecendo uma formulação não dissipativa. A principal ideia desse procedimento de integração temporal é avaliar o novo vetor $\mathbf{V}_3$ levando em consideração as características locais do modelo discretizado espacialmente adotado e introduzir amortecimento numérico adaptativo na análise, considerando os parâmetros de integração temporal μ_1 e μ_2. Assim, a equação 3.93d é aqui avaliada no nível do elemento (ou seja, levando em consideração os elementos que caracterizam a discretização espacial adotada), considerando um vetor local $\mathbf{V}_e$ que é calculado como $\mathbf{V}_e = \mathbf{K}_e \left(\bar{\mu}_1^e \dot{\mathbf{X}}_e^{n+1} + \bar{\mu}_2^e \dot{\mathbf{X}}_e^n \right)$, onde $\bar{\mu}_i^e = \Delta t \mu_i^e$. Uma vez avaliado $\mathbf{V}_e$, ele pode ser montado compondo o vetor $\mathbf{V}$ e, uma vez estabelecido o vetor $\mathbf{V}$, o vetor auxiliar $\mathbf{V}_3$ pode então ser finalmente calculado como $\mathbf{V}_3 = \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{V}$. As seguintes expressões são propostas para definir μ_1^e e μ_2^e:

$$\mu_1^e = 4(\xi_e \Omega_e^{\max} - 1)^{-1} \Omega_e^{\max -4} + 4\xi_e \Omega_e^{\max -3} + 2\Omega_e^{\max -2}, \tag{3.94a}$$

$$\mu_2^e = -2(\xi_e \Omega_e^{\max} - 1)^{-1} \Omega_e^{\max -4} - 4\xi_e \Omega_e^{\max -3} \tag{3.94b}$$

onde ξ_e representa a razão de amortecimento do elemento (que é calculada como $\xi_e = \alpha_m (2\omega_e^{\max})^{-1} + \frac{1}{2}\alpha_k \omega_e^{\max}$, caso seja considerado o amortecimento viscoso clássico de Rayleigh). As expressões 3.94 são formuladas de modo que o raio espectral do método se torne nulo em $\Omega_e^{\max}$, fornecendo o máximo amortecimento numérico na frequência de amostragem mais alta do elemento. Este design produz uma formulação otimizada para diminuir a influência dos modos espúrios de alta frequência nas respostas calculadas, permitindo análises aprimoradas. De fato, o principal objetivo de introduzir amortecimento numérico em uma análise é extinguir oscilações espúrias não físicas que podem ocorrer devido à excitação de modos espacialmente não resolvidos. Esta metodologia é formulada visando aplicar adaptativamente valores consideravelmente baixos (ou seja, próximos de zero) para o raio espectral do método nas frequências mais altas do modelo, bem como fornecendo valores de raio espectral relativamente altos (ou seja, próximos de um, considerando modelos fisicamente não amortecidos) na faixa de baixa frequência importante. É importante destacar que para que o excesso de amortecimento numérico possa ser evitado (quando procedimentos de divisão de subdomínios/subciclagem não são considerados) um valor mínimo de $\Omega_e^{\max} = \sqrt{2}$ é sugerido.

Como é bem conhecido, se valores não nulos de α_k forem considerados, o amortecimento físico já é aplicado nas frequências mais altas do modelo. Nesse caso, o amortecimento numérico não é necessário ser introduzido na análise, e $\mu_1^e = \mu_2^e = 0$ pode então ser adotado, evitando avaliar a equação 3.93d o que melhora ainda mais a eficiência do algoritmo de solução discutido. Portanto, neste trabalho, se $\xi_e \geq 0.222$, o amortecimento numérico não é aplicado na análise, e parâmetros de integração temporal nulos são considerados (ou seja, $\mu_1^e = \mu_2^e = 0$).

O algoritmo de solução apresentado é muito simples de implementar e aplicar, não exigindo especialização e/ou esforço do usuário. De fato, como discutido, todos os parâmetros do método são avaliados automaticamente seguindo as propriedades dos elementos do modelo, não exigindo nenhuma informação de entrada a ser fornecida pelo usuário. Além disso, conforme descrito pelas equações 3.93, a técnica é baseada apenas em relações de deslocamento-velocidade de um único passo, não exigindo a avaliação de qualquer termo de aceleração (é claro, valores de aceleração também podem ser calculados, se desejado, considerando qualquer procedimento numérico de pós-processamento adequado). Assim, a técnica é verdadeiramente auto-inicializável, evitando cálculos complicados, como a computação de acelerações iniciais e/ou valores iniciais de múltiplos passos. Ao contrário da técnica α-*adaptativo*, o μ-*adaptativo* mantém constantes seus parâmetros de integração temporal, garantindo a presença contínua do amortecimento numérico ao longo das análises.

Como se pode observar ainda, o método se apresenta como uma abordagem verdadeiramente explícita, não exigindo tratamento de qualquer sistema de equações, exigindo apenas a "inversão" da matriz $\boldsymbol{M}$, que aqui é adotada diagonalmente. Além disso, como a formulação de marcha temporal proposta é baseada nas propriedades dos elementos do modelo, estabelece um vínculo entre os procedimentos de discretização espacial e temporal adotados, permitindo que seus erros sejam melhor contrabalançados e respostas mais precisas sejam calculadas. A estabilidade é garantida para frequências de amostragem até $\Omega_e^{\max} = 2 + \sqrt{2}$, resultando no limite de estabilidade da nova abordagem ser mais de 1,7 vezes maior que do MDC (deve-se ter em mente que a frequência de amostragem crítica do MDC é 2). Por outro lado, se $\mu_1^e = \mu_2^e = 0$ for considerado (o que é o caso aqui para $\xi_e \geq 0.222$, como destacado anteriormente), o limite de estabilidade do método se torna função do amortecimento físico aplicado, como geralmente ocorre em formulações verdadeiramente explícitas. Assim, para a metodologia de solução proposta, o valor limite do Δt) para cada elemento do modelo discretizado pode ser estabelecido considerando duas possíveis configurações, conforme indicado abaixo:

$$\text{se} \quad \xi_e \leq 0.222, \quad \Delta t_e = (2 + \sqrt{2})(\omega_e^{\max})^{-1} \tag{3.95a}$$

$$\text{se} \quad \xi_e > 0.222, \quad \Delta t_e = (\xi_e \, \omega_e^{\max})^{-1} \tag{3.95b}$$

Na figura 3.9 os raios espectrais da técnica proposta são apresentados considerando μ_1 e μ_2 definidos conforme indicado pelas equações 3.94, para $\Omega_b = 1.5, 1.6, \ldots, 3.4$ e para $\xi = 0.0$ e $\xi = 0.1$. Os resultados para o MDC também são apresentados nesta figura, para referência. Como pode ser observado, como esperado, $\rho_b = 0$ (ρ_b é raio espectral de bifurcação) é sempre obtido considerando a

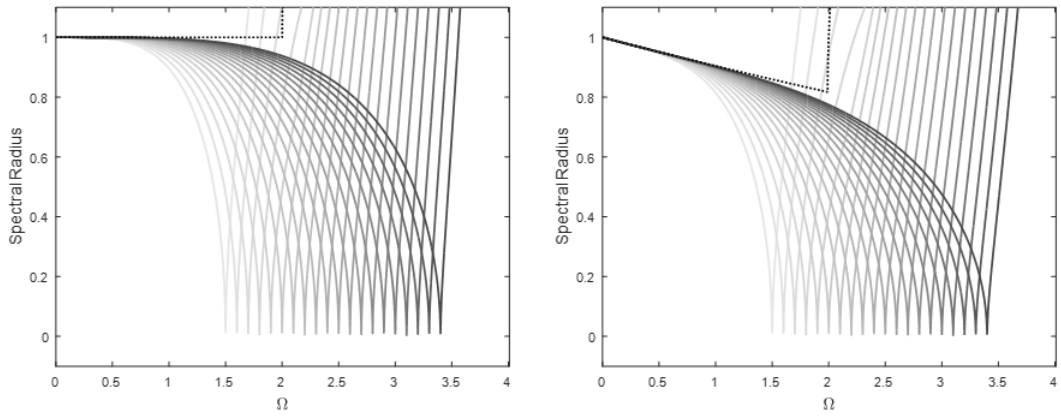


Figura 3.9: Raios espectrais para $\Omega_b = 1.5, 1.6, \ldots, 3.4$ (do cinza mais claro ao mais escuro): (a) $\xi = 0.0$; (b) $\xi = 0.1$. Os resultados para o MDC são representados por linhas pontilhadas pretas, para referência. [4]

formulação, bem como valores relativamente altos (ou seja, próximos da unidade, para $\xi = 0$) são gerados para ρ (raio espectral da matriz de amplificação do método) quando frequências mais baixas são consideradas, descrevendo uma abordagem numérica dissipativa apropriada. É interessante destacar que a técnica proposta replica espectralmente o MDC quando modelos não amortecidos são analisados e $\mu_1 = \mu_2 = 0$ são considerados (neste caso, a dissipação numérica não é introduzida na análise, e o raio espectral do método permanece 1 até que seu limite de estabilidade seja alcançado, em $\Omega_c = 2$).

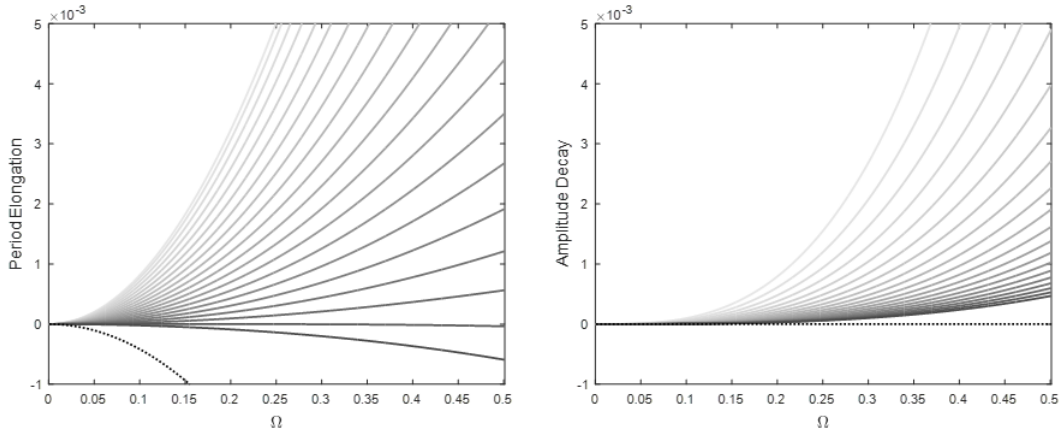


Figura 3.10: Resultados de erro para $\Omega_b = 1.5, 1.6, \ldots, 3.4$ (do cinza mais claro ao mais escuro): (a) erros de alongamento de período; (b) erros de decaimento de amplitude. Os resultados para o MDC são representados por linhas pontilhadas pretas, para referência. [4]

Na figura 3.10 os erros de alongamento de período e decaimento de amplitude são apresentados, considerando a formulação 3.93 (para $\Omega_b = 1.5, 1.6, \ldots, 3.4$) e o MDC . Como pode ser observado nesta figura, erros relativamente pequenos são fornecidos

pela abordagem estudada quando frequências mais baixas são consideradas, e erros de alongamento de período extremamente baixos são produzidos considerando as equações 3.94 quando Ω_b está próximo de 3.3.

3.2.6 Método híbrido adaptativo

Novamente, ao integrar o sistema semi discreto a nível de elemento, considerando um passo de tempo Δt, pode-se escrever [5]:

$$\boldsymbol{M}\int_{t^n}^{t^n+1}\ddot{\boldsymbol{X}}(t)dt+\boldsymbol{C}\int_{t^n}^{t^n+1}\dot{\boldsymbol{X}}(t)dt+\boldsymbol{K}\int_{t^n}^{t^n+1}\boldsymbol{X}(t)dt=\int_{t^n}^{t^n+1}\boldsymbol{F}(t)dt \quad (3.96)$$

onde as integrais no lado esquerdo da equação podem ser aproximadas por:

$$\int_{t^n}^{t^n+1}\ddot{\boldsymbol{X}}_e(t)dt=\dot{\boldsymbol{X}}_e^{n+1}-\dot{\boldsymbol{X}}_e^n \quad (3.97a)$$

$$\int_{t^n}^{t^n+1}\dot{\boldsymbol{X}}_e(t)dt=\boldsymbol{X}_e^{n+1}-\boldsymbol{X}_e^n \quad (3.97b)$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}}\boldsymbol{X}_e(t)\,dt=\Delta t\,\boldsymbol{X}_e^n+\tfrac{1}{2}\Delta t^2(\alpha_1\dot{\boldsymbol{X}}_e^n+\alpha_2\dot{\boldsymbol{X}}_e^{n+1}) \quad (3.97c)$$

onde α_1 e α_2 são parâmetros de integração temporal para o procedimento de solução numérica. Complementarmente, levando em consideração a expressão de diferença finita 3.88 aplicada juntamente com as equações 3.97, permite obter a seguinte relação recursiva:

$$\dot{\boldsymbol{X}}^{n+1}=\dot{\boldsymbol{X}}^n+\boldsymbol{E}^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{F}}-\Delta t\,\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{X}}^n-\Delta t\boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{X}^n+\frac{1}{2}\Delta t(\alpha_1\dot{\boldsymbol{X}}^n+\alpha_2\dot{\boldsymbol{X}}^{n+1})\right)\right) \quad (3.98)$$

O algoritmo se torna espectralmente equivalente ao MDC para $\alpha_1=1$ e $\alpha_2=0$, e reproduz a Regra do Trapézio implícita (TR) para $\alpha_1=1/2$ e $\alpha_2=1/2$. A matriz efetiva $\boldsymbol{E}$ é definida como $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{M}+\frac{1}{2}\Delta t\boldsymbol{C}$, que é a mesma do MDC . Como pode ser observado, a equação 3.98 não é escrita seguindo uma configuração "implícita" padrão, ou seja, isolando seu termo $\dot{\boldsymbol{X}}^{n+1}$ no lado esquerdo, quando um valor não nulo α_2 é considerado. Isso é feito porque a estratégia adotada por Soares [5] é avaliar a equação 3.98 duas vezes, primeiro considerando $\alpha_1=1$ e $\alpha_2=0$, permitindo computar explicitamente um vetor de velocidade $\boldsymbol{V}$ no passo de tempo atual, que é então aplicado no lado direito da equação 3.98 (considerando quaisquer valores α_1 e α_2), permitindo que o vetor de velocidade final $\dot{\boldsymbol{X}}^{n+1}$ seja computado. Esta estratégia de solução pode ser descrita pelo seguinte algoritmo de avanço no tempo:

$$\boldsymbol{V}=\dot{\boldsymbol{X}}^n+\boldsymbol{E}^{-1}(\bar{\boldsymbol{F}}-\Delta t\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{X}}^n-\Delta t\boldsymbol{K}(\boldsymbol{X}^n+\tfrac{1}{2}\Delta t\dot{\boldsymbol{X}}^n)) \quad (3.99a)$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}^{n+1}=\boldsymbol{V}-\boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{K}(\alpha_1'\dot{\boldsymbol{X}}^n+\alpha_2'\boldsymbol{V}) \quad (3.99b)$$

$$\boldsymbol{X}^{n+1}=\boldsymbol{X}^n+\tfrac{1}{2}\Delta t(\dot{\boldsymbol{X}}^n+\dot{\boldsymbol{X}}^{n+1}) \quad (3.99c)$$

onde $\alpha_1'=\frac{1}{2}\Delta t^2(\alpha_1-1)$ e $\alpha_2'=\frac{1}{2}\Delta t^2\alpha_2$.

Como pode ser observado, o algoritmo de solução descrito é muito simples de im-

plementar e requer apenas a "inversão" da matriz efetiva $\boldsymbol{E}$. Além disso, essa técnica de avanço no tempo é baseada somente nas velocidades e relações de deslocamentos, não havendo computação de acelerações. Portanto, o procedimento discutido é uma abordagem verdadeiramente auto-inicializável, eliminando qualquer necessidade de procedimentos de múltiplas etapas. Se $\alpha_1' = \alpha_2' = 0$ (o que ocorre na maioria das vezes, com o cálculo feito localmente), $\dot{\boldsymbol{X}}^{n+1} = \boldsymbol{V}$ a equação 3.99b pode ser desconsiderada, e a dissipação numérica não é introduzida na análise e o limite de estabilidade da técnica torna-se igual ao do MDC . No entanto, para diferentes valores de α_1' e α_2', o limite de estabilidade do método pode ser consideravelmente aumentado até o dobro do MDC , permitindo melhorar o desempenho do procedimento de solução proposto.

Para habilitar este procedimento de solução aprimorado, parâmetros de integração adaptativos, localmente definidos (considerando as propriedades do modelo discretizado) e avaliados de forma otimizada são considerados, levando em conta características dissipativas ou não-dissipativas. Neste contexto, diferentes valores de α_1' e α_2' são permitidos para cada elemento da discretização espacial adotada e para cada passo de tempo da análise, fornecendo uma abordagem muito flexível e versátil. Seguindo este *design*, a dissipação algorítmica pode ser aplicada localmente sempre que necessário e removida quando e onde não for. Nesse sentido, um padrão dissipativo excessivo pode ser superado e grandes erros numéricos de amortecimento subsequente evitados. Este procedimento adaptativo pode ser estabelecido com base no mesmo critério oscilatório da equação 3.90: Se $\sum \phi_e^n > 0$, pelo menos um grau de liberdade do elemento está oscilando, e é introduzida a dissipação numérica na análise aplicando $\alpha_1' = \tilde{\alpha}_1^e$ e $\alpha_2' = \tilde{\alpha}_2^e$; caso contrário, o elemento não está oscilando, e $\alpha_1' = \bar{\alpha}_1^e$ e $\alpha_2' = \bar{\alpha}_2^e$ são então considerados, não introduzindo dissipação numérica na análise. Os parâmetros $\tilde{\alpha}_1^e$, $\tilde{\alpha}_2^e$, $\bar{\alpha}_1^e$, e $\bar{\alpha}_2^e$ são definidos nas Tabelas 3.1 e 3.2, em função da frequência máxima de amostragem do elemento $\Omega_e^{\max}$.

As expressões fornecidas na tabela 3.1 para $\tilde{\alpha}_1^e$ e $\tilde{\alpha}_2^e$ são formuladas para introduzir amortecimento numérico máximo na frequência máxima de amostragem do elemento. Assim, os modos superiores são mais efetivamente dissipados seguindo esse *design*. Para $1 < \Omega_e^{\max} \leq 3$, o raio espectral de bifurcação do método torna-se nulo, permitindo que respostas de alta frequência sejam rapidamente eliminadas, proporcionando uma abordagem dissipativa mais eficaz. Para $0 < \Omega_e^{\max} \leq 1$, as expressões fornecidas para $\tilde{\alpha}_1^e$ e $\tilde{\alpha}_2^e$ para $1 < \Omega_e^{\max} \leq 3$ são mais uma vez consideradas, mas adotando $\Omega_e^{\max} = 1$; Para $\Omega_e^{\max} > 3$, $\tilde{\alpha}_1^e$ e $\tilde{\alpha}_2^e$ são definidas de modo que o raio espectral de bifurcação da técnica descreva um comportamento transicional e varie linearmente de 0 a $1 - \xi_e$, à medida que $\Omega_e^{\max}$ aumenta de 3 para 4. As expressões fornecidas na tabela 3.2 para $\bar{\alpha}_1^e$ e $\bar{\alpha}_2^e$ são formuladas para introduzir dissipação numérica nula na análise. Nesse contexto, para $0 < \Omega_e^{\max} \leq 2$, $\bar{\alpha}_1^e = \bar{\alpha}_2^e = 0$

Tabela 3.1: Parâmetros dissipativos $\tilde{\alpha}_1^e$ e $\tilde{\alpha}_2^e$.

Intervalo de $\Omega_e^{\max}$	Parâmetros
$0 < \Omega_e^{\max} \leq 1$	$\tilde{\alpha}_1^e = \Delta t^2(2 - \xi_e^2 + 1)$ $\tilde{\alpha}_2^e = \Delta t^2(2 - \xi_e^2 - \xi_e)$
$1 < \Omega_e^{\max} \leq 3$	$\tilde{\alpha}_1^e = \Delta t^2(-{\Omega_e^{\max}}^2 \xi_e^2 + 1){\Omega_e^{\max}}^{-4}$ $\tilde{\alpha}_2^e = \Delta t^2({\Omega_e^{\max}}^3 \xi_e - {\Omega_e^{\max}}^2(\xi_e^2 - 1) - 2\Omega_e^{\max}\xi_e - 1){\Omega_e^{\max}}^{-4}$
$3 < \Omega_e^{\max} \leq 4$	$\tilde{\alpha}_1^e = -\Delta t^2({\Omega_e^{\max}}^5(\xi_e^3 - 2\xi_e^2 + \xi_e)$ $+{\Omega_e^{\max}}^4(\xi_e^4 - 8\xi_e^3 + 14\xi_e^2 - 8\xi_e + 1)$ $-{\Omega_e^{\max}}^3(6\xi_e^4 - 23\xi_e^3 + 32\xi_e^2 - 21\xi_e + 6)$ $+{\Omega_e^{\max}}^2(9\xi_e^4 - 24\xi_e^3 + 24\xi_e^2 - 16\xi_e + 8))$ $+\Omega_e^{\max}(6\xi_e^2 - 14\xi_e + 8) - (9\xi_e^2 - 24\xi_e + 16)){\Omega_e^{\max}}^{-4}$ $\tilde{\alpha}_2^e = -\Delta t^2(({\Omega_e^{\max}}^4(\xi_e^4 - 2\xi_e^3 + \xi_e^2)$ $-{\Omega_e^{\max}}^3(6\xi_e^4 - 16\xi_e^3 + 12\xi_e^2 - \xi_e)$ $+{\Omega_e^{\max}}^2(9\xi_e^4 - 36\xi_e^3 + 45\xi_e^2 - 18\xi_e))$ $+\Omega_e^{\max}(18\xi_e^3 - 54\xi_e^2 + 46\xi_e - 8) + (9\xi_e^2 - 24\xi_e + 16)){\Omega_e^{\max}}^{-4}$

Tabela 3.2: Parâmetros não dissipativos $\bar{\alpha}_1$ e $\bar{\alpha}_2$.

Intervalo de $\Omega_e^{\max}$	Parâmetros
Tipo1 $0 < \Omega_e^{\max} \leq 2$	$\bar{\alpha}_1^e = 0$ $\bar{\alpha}_2^e = 0$
Tipo 2 $2 < \Omega_e^{\max} \leq 2\sqrt{2}$	$\bar{\alpha}_1^e = \Delta t^2(-{\Omega_e^{\max}}^3 \xi_e - {\Omega_e^{\max}}^2(4\xi_e^2 + 1) + 4){\Omega_e^{\max}}^{-4}$ $\bar{\alpha}_2^e = \Delta t^2({\Omega_e^{\max}}^3 \xi_e - {\Omega_e^{\max}}^2(4\xi_e^2 - 1) - 8\Omega_e^{\max}\xi_e - 4){\Omega_e^{\max}}^{-4}$
Tipo 3 $2\sqrt{2} < \Omega_e^{\max} \leq 4$	$\bar{\alpha}_1^e = \frac{1}{16}\Delta t^2(-4\xi_e - 1)$ $\bar{\alpha}_2^e = \frac{1}{16}\Delta t^2(4\xi_e + 1)$

é adotado e, nesse caso, como destacado anteriormente, o MDC é espectralmente reproduzido. Para $2 < \Omega_e^{\max} \leq 2\sqrt{2}$, por outro lado, as expressões são definidas de modo que a frequência de bifurcação da técnica proposta torne-se igual à frequência máxima de amostragem do elemento e os autovalores de bifurcação de sua matriz de amplificação tornam-se iguais a -1, visando resultados mais precisos para análises de propagação de ondas. Para $\Omega_e^{\max} > 2\sqrt{2}$, $\Omega_e^{\max}$, $\bar{\alpha}_1^e$ e $\bar{\alpha}_2^e$ são definidas de modo que a frequência de bifurcação da técnica proposta torne-se igual a 4 e os autovalores de bifurcação de sua matriz de amplificação tornam-se iguais a $+1$. Assim, essa formulação adaptativa localmente definida não apenas fornece um procedimento de solução muito preciso e uma abordagem dissipativa numérica efetiva, mas também permite análises muito mais eficientes do que as técnicas padrão, permitindo que valores maiores de passo de tempo sejam considerados sem aumentar severamente o esforço computacional da metodologia de solução por passo de tempo.

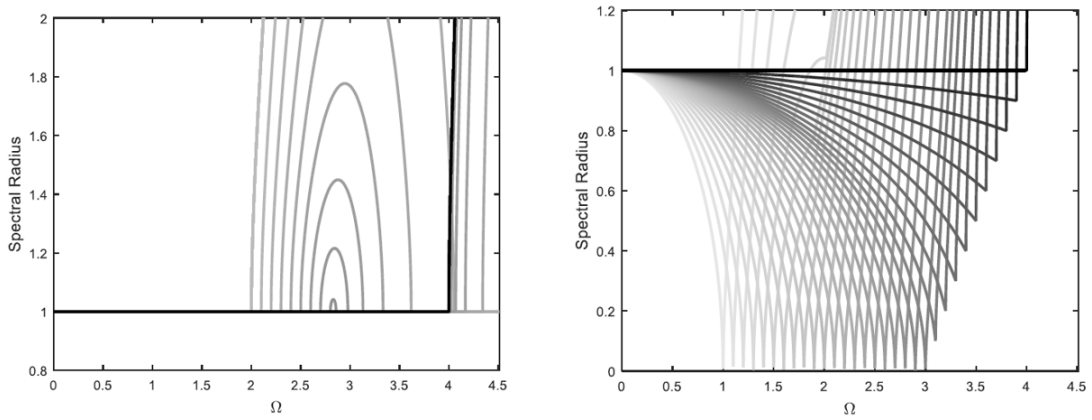


Figura 3.11: Raios espectrais para $\Omega_e^{\max} = 1.0, 1.1, \ldots, 4.0$ (da cor cinza mais clara para a mais escura): (a) formulação não dissipativa; (b) formulação dissipativa. Resultados para o MDC são representados como linhas pontilhadas pretas, para referência.[5]

Na figura 3.11, os raios espectrais da técnica híbrida são representados considerando α_1' e α_2' definidos conforme indicado nas tabelas 3.1 e 3.2. Nesse caso, como pode ser observado, na configuração não dissipativa $\Omega_c = 2$ para $\Omega_e^{\max} \leq 2$, $\Omega_c = \Omega_e^{\max}$ para $2 < \Omega_e^{\max} \leq 2\sqrt{2}$, e $\Omega_c = 4$ para $2\sqrt{2} < \Omega_e^{\max} \leq 4$. Por outro lado, na configuração dissipativa, $\rho = 0$ (ρ, é o raio espectral da matriz de amplificação do método) em $\Omega = 1$ para $0 < \Omega_e^{\max} \leq 1$, e $\rho = 0$ em $\Omega = \Omega_e^{\max}$ para $1 < \Omega_e^{\max} \leq 3$. Para $3 < \Omega_e^{\max} \leq 4$, $\rho = (\Omega_e^{\max} - 3)(1 - \xi_e)$ em $\Omega = \Omega_e^{\max}$ e, consequentemente, ocorre uma variação linear para ρ_b (raio espectral de bifurcação) dentro desse domínio, com seu valor variando de 0, em $\Omega_e^{\max} = 3$, para $1 - \xi_e$, em $\Omega_e^{\max} = 4$.

A figura 3.12 mostra os erros de alongamento de período da técnica híbrida, com os resultados sempre menores do que aqueles relacionados ao MDC utilizando os parâmetros não dissipativos ou quando parâmetros dissipativos são aplicados. Em

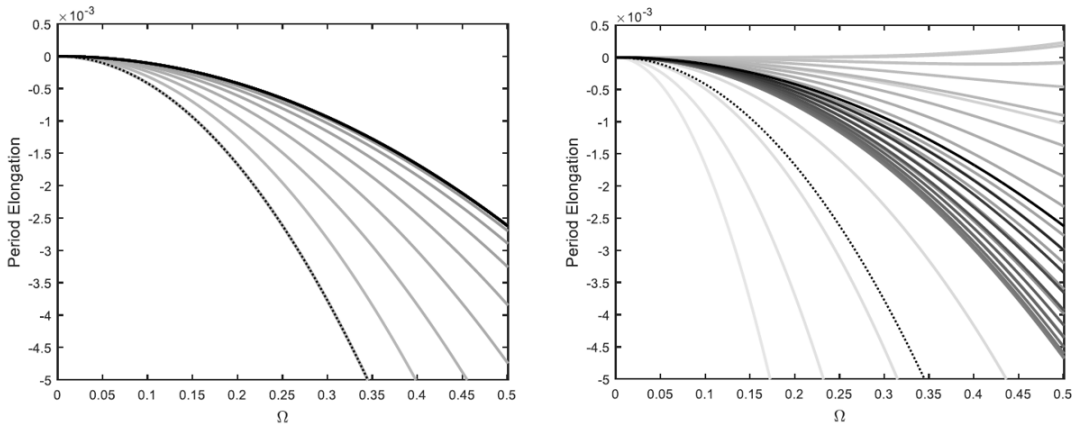


Figura 3.12: Erros de alongamento de período para $\Omega_e^{\max} = 1.0, 1.1, \ldots, 4.0$ (da cor cinza mais clara para a mais escura): (a) formulação não dissipativa; (b) formulação dissipativa.[5]

relação aos erros de decaimento de amplitude, apresentados na figura 3.13, nenhum erro de amplitude é gerado, uma vez que as expressões apresentadas na tabela 3.2 são seguidas, e uma quantidade significativa de amortecimento numérico é fornecida uma vez que as expressões indicadas na tabela 3.1 são consideradas. Os intensos erros de decaimento de amplitude apresentados na configuração dissipativa foram projetados propositalmente por Soares [5], uma vez que, na formulação adaptativa, o amortecimento algorítmico é aplicado apenas de forma eventual, localmente no espaço e no tempo. Como tal, ele deve ser suficientemente expressivo para eliminar adequadamente as oscilações não físicas e espúrias que podem surgir nas respostas computadas.

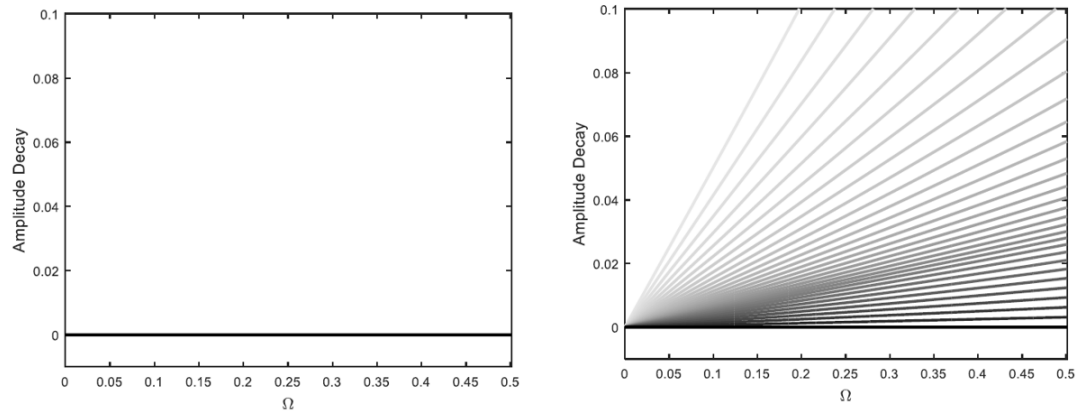


Figura 3.13: Erros de decaimento de amplitude para $\Omega_e^{\max} = 1.0, 1.1, \ldots, 4.0$ (da cor cinza mais clara para a mais escura): (a) formulação não dissipativa; (b) formulação dissipativa.[5]

Capítulo 4

Subciclagem

A sub-ciclagem é uma técnica inicialmente proposta por Belytschko et al. [11], que decompõe o domínio em subdomínios associados a cálculos em vários "subpassos". Essa técnica divide um domínio considerando seus diferentes níveis de refinamento e propriedades físicas, permitindo uma solução explícita de marcha no tempo sem limitar o domínio inteiro ao seu menor valor de passo de tempo crítico. Assim, essa abordagem permite considerar valores de passo de tempo maiores para diferentes subdomínios, reduzindo os esforços computacionais.

De fato, o estímulo para o uso de procedimentos de divisão em múltiplos passos de tempo/sub-ciclagem surge de problemas onde malhas incluem tanto subdomínios relativamente "rígidos" quanto subdomínios "moles". Nesse caso, se um modelo possui propriedades que variam espacialmente ou discretizações espaciais altamente refinadas em algumas regiões, alguns poucos elementos rígidos impõem o uso de um valor de passo de tempo excessivamente pequeno para todo o modelo, tornando os procedimentos de solução explícita muito ineficazes. Portanto, para possibilitar uma abordagem computacional eficiente, deve-se ser capaz de resolver essas regiões separadamente, considerando diferentes valores de passo de tempo para diferentes subdomínios do modelo e conectando as respostas computadas desses subdomínios. Porém, a sub-ciclagem deve ser considerada adequadamente, pois subdivisões excessivas podem resultar em deterioração tanto na precisão quanto na eficiência.

Neste trabalho, um algoritmo automatizado é adotado para subdividir o domínio do modelo, melhorando a eficiência sem comprometer a precisão. Dessa forma, o algoritmo desenvolvido realiza a subdivisão controlada do domínio, calculando e atribuindo um Δt para cada nó do modelo. Esse procedimento consiste em dividir o modelo em grupos de elementos que podem ter o mesmo Δt atribuído, respeitando seu limite de estabilidade. Nesse contexto, a seguinte sequência de comandos é empregada para definir automaticamente essa divisão de subdomínios:

1. Calcular o passo de tempo crítico de todos os elementos (ou seja, Δt_e) seguindo

$\Omega_e^{\max}$ de cada metodologia em estudo, encontrando o menor Δt_e do modelo (ou seja, $\Delta t_e^{\min}$, onde $\Delta t_e^{\min} = \min(\Delta t_e)$), que é o passo de tempo básico para a proposta de subdivisão controlada do domínio.

2. Com $\Delta t_e^{\min}$ definido, calcular valores subsequentes de passo de tempo como múltiplos da potência de 2 desse valor de passo de tempo mínimo (ou seja, calcular Δt_i, onde $\Delta t_i = 2^{(i-1)} \Delta t_e^{\min}$).

3. Associar cada elemento a um valor de passo de tempo calculado (ou seja, a Δt_i, onde $\Delta t_i \leq \Delta t_e \leq \Delta t_{i+1}$ e i indica o subdomínio desse elemento).

4. Associar um valor de passo de tempo (ou seja, associar um subdomínio) a cada grau de liberdade do modelo considerando o menor valor de passo de tempo dos elementos circundantes.

Uma vez seguido esse algoritmo de divisão de subdomínios/sub-ciclagem, os valores de deslocamento e velocidade próximos às fronteiras desses subdomínios de passo de tempo podem precisar ser interpolados. Neste trabalho, as seguintes expressões são adotadas para essas interpolações:

$$\boldsymbol{X}(t) = \tfrac{1}{2\Delta t} \left(\dot{\boldsymbol{X}}^{n+1} - \dot{\boldsymbol{X}}^{n} \right) t^2 + \dot{\boldsymbol{X}}^{n} t + \boldsymbol{X}^{n} \tag{4.1a}$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \tfrac{1}{\Delta t} \left(\dot{\boldsymbol{X}}^{n+1} - \dot{\boldsymbol{X}}^{n} \right) t + \dot{\boldsymbol{X}}^{n} \tag{4.1b}$$

onde t é o incremento de tempo atual ($0 \leq t \leq \Delta t$) para o subdomínio em foco e Δt é o valor do passo de tempo do grau de liberdade sendo interpolado, que está relacionado ao subdomínio vizinho. Uma expressão análoga à indicada é considerada para interpolar os vetores auxiliares $\mathbf{V}$ (como a equação 3.93d), quando necessário. É importante observar que as equações 4.1 assumem um comportamento de segunda ordem ao longo do tempo para o campo de deslocamento calculado, que também é o caso de alguns algoritmos em estudo, resultando em uma formulação consistente.

Na Figura 4.1, um esquema ilustrativo é apresentado para descrever melhor o procedimento de interpolação mencionado acima. Nesse esquema, são considerados dois subdomínios, nomeadamente subdomínio 1, com passo de tempo Δt, e subdomínio 2. Para calcular a evolução dos deslocamentos no subdomínio 2, os resultados nos nós que estão fora desse subdomínio (como aqueles marcados na figura), mas em elementos que compartilham nós com o subdomínio 2, devem ser utilizados (veja, por exemplo, a multiplicação pela matriz $\mathbf{K}$ nas metodologias em estudo). Assim, esses valores são interpolados considerando as respostas calculadas no subdomínio 1, conforme esboçado na Figura 4.1, levando em conta as equações 4.1. Ao seguir

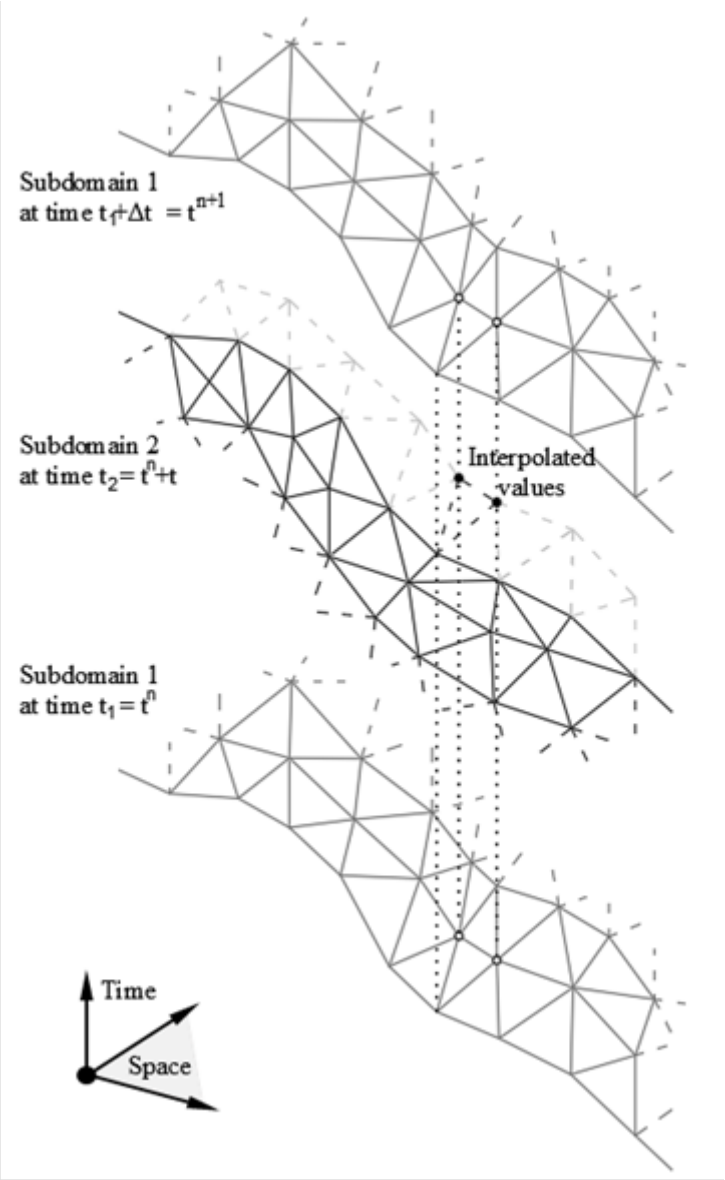


Figura 4.1: Esquema ilustrativo representando o procedimento de interpolação. [4]

essa abordagem, as novas metodologias estudadas podem ser facilmente aplicadas a cada subdomínio do modelo.

É importante destacar que, ao considerar valores de passo de tempo mais adequados para cada subdomínio do modelo, são estabelecidos melhores parâmetros de integração no tempo para os elementos desses subdomínios, o que aprimora ainda mais o desempenho das metodologias. Além disso, o esquema de subciclagem funciona perfeitamente no domínio PML .

4.1 Subciclagem ótima

A subciclagem padrão apresentada na subseção anterior já proporciona um ganho significativo em termos de computação e precisão. Como discutido e será demonstrado com exemplos numéricos no próximo capítulo, ela permite cálculos mais precisos em todos os elementos do modelo. No entanto, através de testes e análises exaustivas, identificou-se a necessidade de ajustar a abordagem na subdivisão dos subdomínios. Isso não apenas para melhorar a adequação às propriedades físicas do modelo e à metodologia utilizada, mas também amplia os benefícios da técnica.

Explicitando os pontos a serem melhorados, temos: (i) Modelos com alta heterogeneidade, devido às propriedades físicas ou geométricas da discretização, apresentavam muitos elementos em subdomínios com passos de tempo menores, o que reduzia o ganho computacional proporcionado pela subciclagem. (ii) Ao iniciar o estudo da metodologia híbrida, que já possui subdomínios intrínsecos definidos em função da frequência de amostragem máxima, a subciclagem comprometia essa característica, pois, ao subdividir os elementos com base em $\min(\Delta t_e)$, nenhum elemento permanecia no subdomínio de $0 \leq \Omega_e^{\max} \leq 2$, onde há uma redução expressiva do custo computacional. (iii) Por fim, nas metodologias em estudo, a aplicação do amortecimento numérico nas altas frequências, que elimina oscilações espúrias, depende da frequência de amostragem máxima do elemento. Como na subciclagem padrão, quanto maior o número de elementos operando próximos do seu valor crítico, melhores parâmetros de integração temporal são calculados, resultando em um amortecimento numérico mais preciso e, consequentemente, em uma análise mais acurada.

Diante dessas observações, percebe-se que uma melhor subdivisão dos elementos, não restrita pelo passo de tempo mais crítico, mas respeitando o limite de estabilidade imposto pelo elemento mais crítico, pode superar todas essas limitações. Dessa forma, ao processo automático já existente, incorporamos um processo automático de otimização da subdivisão dos subdomínios. Esse processo consiste em encontrar a melhor subdivisão de subdomínios, seguindo o mesmo procedimento de subdivisão controlada com base na potência de 2, que minimize o custo computacional da análise. Para isso, cada metodologia em estudo tem seu custo computacional equacionado em função do número de passos que cada elemento realiza, dado o subdomínio ao qual pertence. Assim, para encontrar o menor custo computacional, basta minimizar essa função de aptidão.

De forma simplificada, a otimização permite que o passo de tempo base da subciclagem seja flexível, podendo ser menor do que o menor passo de tempo crítico entre todos os elementos, diferentemente da abordagem anterior, que utilizava esse menor valor como base fixa de cálculo. No entanto, esse passo de tempo base não é

escolhido arbitrariamente; ele é determinado com base em um critério de desempenho global da análise, visando alcançar o menor custo computacional possível.

Para realizar essa minimização, utilizamos o clássico algoritmo evolutivo *particle swarm optimization* (PSO) (qualquer algoritmo de otimização poderia ser utilizado). Abaixo, é apresentado um equacionamento genérico da função objetivo:

$$\Theta = \sum_{i=1}^{s} p_i * gl_i * (MV + N_a + N_s) \tag{4.2}$$

onde i representa o número do subdomínio, e s o número total de subdomínios possíveis com o Δt_i em análise. p_i é o número total de passos que o subdomínio realizará para completar o tempo total de análise; gl_i é o número de graus de liberdade do subdomínio; MV é o custo da multiplicação matriz-vetor vezes o número de vezes que ela ocorre. Por exemplo, na metodologia híbrida, se o elemento está em $0 \leq \Omega_e^{\max} \leq 2$, isso ocorre uma vez, caso contrário, ocorre duas vezes por elemento; N_a é o número de vezes que as matrizes locais são montadas no vetor global; finalmente, N_s é o número de operações simples (escalar * escalar). Minimizar Θ resulta no menor custo computacional.

A escolha por um algoritmo não determinístico, como o *Particle Swarm Optimization* (PSO), fundamenta-se na própria natureza do problema de otimização proposto. O objetivo é encontrar o valor ótimo do passo de tempo base Δt_b que, ao ser utilizado como referência para a criação dos subdomínios de subciclagem, minimize o custo computacional total da análise. Trata-se de um problema univariado, mas com múltiplas possíveis configurações discretas de subdivisão dos subdomínios de Δt, cada uma levando a uma distribuição distinta de elementos por subdomínio. Como consequência, não há uma função objetivo explícita com forma analítica contínua ou diferenciável, o que inviabiliza o uso de métodos baseados em gradientes tradicionais, como Newton-Raphson. Isso se deve ao fato de que pequenas variações no valor de Δt_b podem alterar de forma abrupta a configuração dos subdomínios, modificando discretamente a distribuição dos elementos. O PSO, por ser um algoritmo populacional que não requer informação do gradiente e que explora eficientemente espaços de busca reduzidos, mostra-se altamente adequado para este tipo de tarefa, permitindo encontrar soluções próximas do ótimo de forma rápida e robusta.

Para a execução do algoritmo PSO, foram utilizadas 200 partículas e 100 iterações como limite máximo, com critério de parada baseado na estabilização do valor ótimo por 10 iterações consecutivas. Como o problema de otimização envolve apenas uma variável contínua — o passo de tempo base Δt_b — e um espaço de busca bastante restrito, definido por $\min(\Delta t_e)/2 \leq \Delta t_b \leq \min(\Delta t_e)$, o processo de convergência é naturalmente rápido. No PSO, cada partícula representa uma possível solução

e é atualizada iterativamente com base em sua própria melhor posição já visitada e na melhor posição global identificada pelo grupo. Como o domínio do problema é unidimensional, a movimentação das partículas tende a se estabilizar em poucas iterações, e o número elevado de partículas garante uma boa cobertura do espaço de busca mesmo em sua fase inicial, acelerando ainda mais a convergência para o valor ótimo de Δt_b.

Com a aplicação dessa técnica otimizada, permite-se que o elemento mais crítico não opere necessariamente em seu passo de tempo crítico, facilitando uma melhor distribuição dos elementos nos subdomínios. Além disso, para a metodologia híbrida, considera-se um custo computacional mais baixo ao levar em conta diferentes $\Omega_e^{\max}$, reduzindo significativamente o custo computacional geral da análise e aproveitando ao máximo o método com a subciclagem. Assim, o algoritmo criado tornou-se ainda mais flexível e robusto, adaptando-se às mais diversas configurações. Todas as análises numéricas foram realizadas em um processador Intel Core i7-13620H de 13ª geração, com 16 GB de memória RAM.

Capítulo 5

Exemplos numéricos

Com a fundamentação teórica dos modelos acústico e elastodinâmico, bem como a apresentação das metodologias numéricas utilizadas e das técnicas de subciclagem, este capítulo aborda três aplicações numéricas cuja resposta analítica está disponível na literatura.

O primeiro exemplo aborda o movimento transversal de uma membrana acústica [59], sendo ideal para avaliar com precisão os erros numéricos. O segundo considera um sistema homogêneo infinito, cuja resposta analítica é descrita pela função de Green para o problema elástico [60]. Esse caso permite quantificar a precisão das soluções e explorar os benefícios e a eficiência no tratamento de configurações rígido-flexíveis. Já o terceiro exemplo analisa uma barra heterogênea formada por dois materiais distintos [61], possibilitando uma análise aprofundada das metodologias discutidas e evidenciando suas vantagens e eficiência ao lidar com configurações mais complexas.

Além disso, para evidenciar a robustez das metodologias estudadas, são analisados dois exemplos geofísicos para o modelo acústico, denominados Marmousi [62] e Búzios [63], e dois para o modelo elastodinâmico, denominados 2DEW [64] e 2004 BP [65]. Esses benchmarks sofisticados se assemelham a casos reais frequentemente encontrados na indústria de petróleo e gás, apresentando múltiplas camadas e propriedades heterogêneas, incluindo extensas regiões de sal.

Para avaliar os resultados numéricos produzidos pelas metodologias discutidas, foi realizada uma análise comparativa com métodos explícitos consagrados. Essa comparação inclui o Método das Diferenças Centrais (MDC), o método α-generalizado explícito [1] (com $\rho_b = 0.3665$, conforme recomendado) e o método Noh-Bathe (NB) [2] (com $p = 0.54$, como sugerido pelos autores). Cada técnica foi aplicada utilizando seu valor máximo de passo de tempo estável — determinado no nível do elemento — para garantir a análise mais eficiente para cada esquema, com Δt calculado automaticamente pelo algoritmo.

Além disso, a família adaptativa de Soares foi analisada em três configurações

distintas: sem subciclagem, com subciclagem padrão (sub) e com subciclagem otimizada (sub-ótima). Cabe destacar que o esquema híbrido-adaptativo não foi considerado no caso subciclagem padrão devido à impossibilidade de uma eficiente subdivisão em subdomínios. Com essas configurações, foi possível investigar de forma abrangente os ganhos reais em precisão e eficiência, tanto em comparação aos métodos clássicos quanto entre as abordagens propostas.

Como soluções analíticas estão disponíveis para as aplicações elásticas e acústicas discutidas nesta seção, fornecendo uma base confiável para avaliar detalhadamente o desempenho das técnicas de integração temporal propostas, a seguinte expressão é utilizada para calcular os erros:

$$\text{Erro} = \left[\frac{\sum_{n=1}^{N} \left(x^n - x_A(t^n)\right)^2}{\sum_{n=1}^{N} \left(x_A(t^n)\right)^2} \right]^{1/2} \tag{5.1}$$

onde o campo computado, que representa a evolução temporal de um dado grau de liberdade, é denotado por x, sua contraparte analítica é representada por x_A, e o número total de passos de tempo na análise é indicado por N.

5.1 Exemplos analíticos

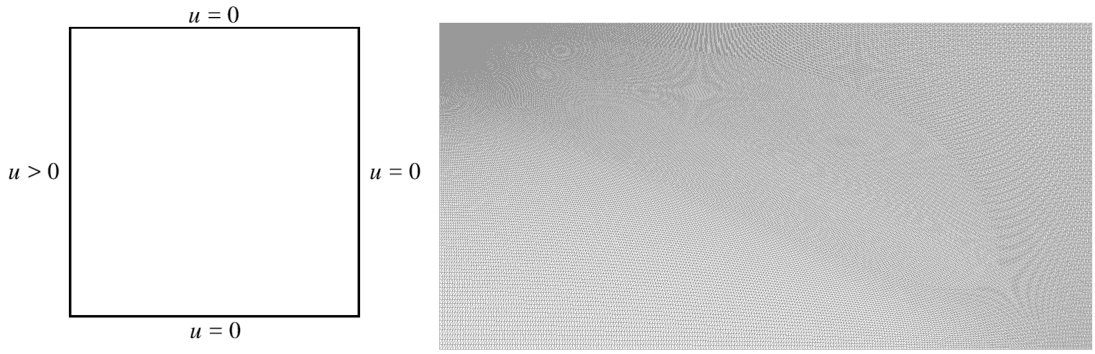
5.1.1 Membrana Acústica

Neste primeiro exemplo, é analisada uma membrana quadrada sob condições de contorno de Dirichlet, com condições iniciais nulas e sem a aplicação de forças externas. A configuração do problema é ilustrada na Figura 5.1a. Devido à simetria do modelo, apenas a metade superior do domínio é discretizada, utilizando uma malha de Elementos Finitos (FEM) composta por 125.000 elementos triangulares lineares. A malha apresenta um refinamento na região do canto superior esquerdo do domínio para capturar com maior precisão os efeitos localizados, dado que há uma descontinuidade nas condições de contorno nessa região, conforme mostrado na Figura 5.1b. A membrana possui comprimento lateral unitário, densidade de massa de $10\,\mathrm{kg/m^3}$ e velocidade de propagação de ondas de $10\,\mathrm{m/s}$.

A solução analítica para este modelo pode ser expressa como:

$$u_A(x,y,t) = \frac{2A}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(l\pi) - 1}{l \sinh(l\pi L_x / L_y)} \sinh\left(\frac{l\pi (x - L_x)}{L_y}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{L_y}\right)$$

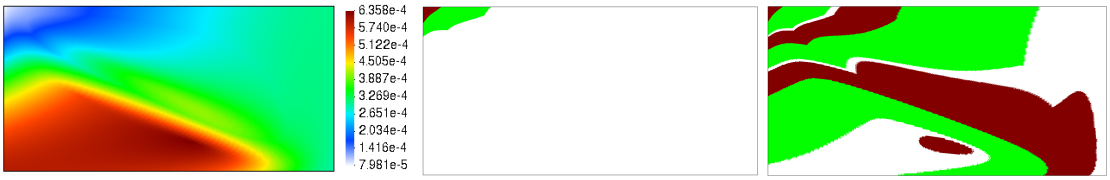
$$+ \frac{4A}{\pi^2} e^{-\frac{\zeta t}{2\rho}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n L_y^2 \left(\cos(m\pi) - 1\right)}{m \left(L_x^2 m^2 + L_y^2 n^2\right)} f_{mn}(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) \tag{11}$$



(a) (b)

Figura 5.1: Exemplo 1.(a) Esboço do problema acústico (b) Malha do modelo (devido à simetria do modelo, apenas a metade superior do domínio é discretizada).

onde A representa a amplitude da condição de contorno aplicada, L_x e L_y descrevem as dimensões da membrana, e ρ, κ e ζ representam, respectivamente, a densidade, a compressibilidade e o parâmetro de amortecimento viscoso do modelo. Além disso, $f_{mn}(t)$ e μ_{mn}^2 são definidos como: $f_{mn}(t) = \cos(\mu_{mn}t) + \frac{\zeta}{2\rho\mu_{mn}}\sin(\mu_{mn}t)$, $\mu_{mn}^2 = \frac{\kappa}{\rho}\left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \frac{\kappa}{\rho}\left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 - \left(\frac{\zeta}{2\rho}\right)^2$. Para os cálculos realizados, foram considerados 500 termos para os somatórios nos índices l e m, e 100 termos para o índice n.



(a) (b) (c)

Figura 5.2: Valores computados do Exemplo 1: (a) Δt_e de cada elemento. (b) subdomínios de tipo de Ω para *hib-adap*; e (c) subdomínios de tipo de Ω para *hib-adap/sub-ótima*. (branco tipo-1; verde tipo-2 e vermelho tipo-3)

Ao iniciar a análise deste exemplo acústico homogêneo, observamos na Figura 5.2a o Δt_e calculado para cada elemento. Fica evidente a heterogeneidade da malha criada, que é não estruturada, apresentando um limite de estabilidade distinto para cada elemento. Nesse contexto, as diferentes metodologias explícitas em estudo abordam o problema de maneiras distintas. As metodologias clássicas e as novas metodologias explícitas padrão utilizam um único passo de tempo para todo o modelo, que deve respeitar o limite de estabilidade imposto pelo menor Δt_e. Este valor corresponde ao elemento mais rígido, localizado na região branca da Figura 5.2a, que representa a área mais refinada do modelo. Assim, o elemento mais rígido dita o Δt, o custo computacional e a precisão alcançada na análise.

É interessante destacar alguns aspectos das metodologias estudadas. A metodologia α-GE apresenta o menor Δt, pois reduz seu limite de estabilidade para

incorporar amortecimento numérico à análise. Por outro lado, a metodologia *α-adap* possui o mesmo limite de estabilidade do *MDC* , alcançando o mesmo Δt. No entanto, o *MDC* não possui amortecimento numérico ativo, enquanto o *α-adap* incorpora amortecimento numérico adaptativo em sua formulação. A metodologia *μ-adap* apresenta valores estendidos de estabilidade, com amortecimento numérico também integrado. Já a metodologia *NB* , embora também melhore o Δt e tenha amortecimento numérico, ela utiliza um modelo composto, realizando subpassos a cada passo de tempo, o que aumenta significativamente o custo computacional.

Por fim, como apresentado no capítulo da formulação, a metodologia *hib-adap* possui uma característica intrínseca de subdivisão em subdomínios segundo o tipo de $\Omega_e^{\max}$, permitindo alcançar os melhores valores de passo de tempo. A Figura 5.2b ilustra bem esse aspecto. Cada elemento pode pertencer a um dos três subdomínios de $\Omega_e^{\max}$, classificados da seguinte forma: elementos do tipo 1, com $0 < \Omega_e^{\max} \leq 2$; elementos do tipo 2, com $2 < \Omega_e^{\max} \leq 2\sqrt{2}$; e elementos do tipo 3, com $2\sqrt{2} < \Omega_e^{\max} \leq 4$. Na Figura 5.2b, a região branca da Figura 5.2a, que correspondia aos elementos mais rígidos, foi tratada como elementos do tipo 3 ($2\sqrt{2} < \Omega_e^{\max} \leq 4$), ou seja, com um cálculo aprimorado para a região mais rígida.

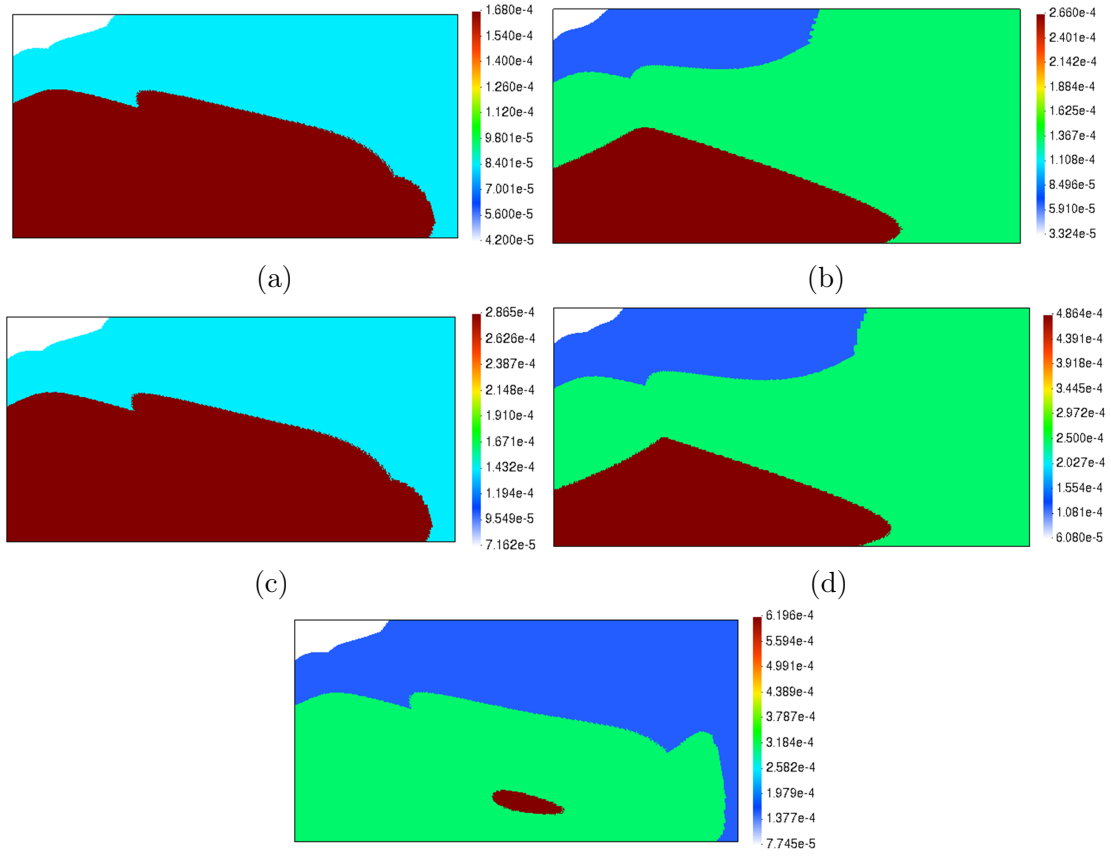


Figura 5.3: Subdomínios Δt do Exemplo 1:(a) *α-adap/sub*; (b) *α-adap/sub-ótima*; (c) *μ-adap/sub*; (d) *μ-adap/sub-ótima* e (e) *hib-adap/sub-ótima*

Tabela 5.1: Subdomínios de Δt para o Exemplo 1.

Método	Δt (10^{-5}s)	%
α-adap/sub	4.20	14.81
	8.40	50.65
	16.8	34.54
μ-adap/sub	7.16	14.81
	14.3	50.65
	28.6	34.54
α-adap/sub-ótima	3.32	7.43
	6.65	28.47
	13.3	52.85
	26.6	11.25
μ-adap/sub-ótima	6.08	9.66
	12.2	31.25
	24.3	49.99
	48.6	9.10
hib-adap/sub-ótima	7.75	13.82
	15.5	47.06
	31.0	38.57
	62.0	0.55

No entanto, apesar das melhorias significativas das novas metodologias adaptativas em relação às metodologias clássicas no tratamento de características heterogêneas, é evidente a necessidade de avanços para lidar com problemas mais complexos, sejam eles de natureza física ou estrutural. A subciclagem é uma das abordagens mais simples e eficazes para tratar modelos que apresentam regiões rígidas e flexíveis. Ao subdividir o modelo em subdomínios com diferentes passos de tempo, essa técnica reduz o impacto no custo computacional e melhora a precisão da análise. As metodologias *α-adap/sub* e *μ-adap/sub* são exemplos de formulações que permitem a aplicação dessa técnica, obtendo subdomínios com passos de tempo até $4\times$ e $7\times$ maiores, respectivamente, quando comparadas às abordagens padrão (veja Tabela 5.1). Por outro lado, a metodologia *hib-adap* também permite a aplicação da subciclagem padrão. No entanto, ao se adotar a técnica com potências de 2,

utilizando o passo de tempo mais crítico da análise como base para a subdivisão em subdomínios, todos os elementos acabariam sendo classificados como do tipo 2 ou 3 ($2 < \Omega_e^{\max} \leq 4$).Dessa forma, a principal característica do método, a presença de elementos do tipo 1, que apresentam menor custo computacional, deixaria de ocorrer. Por esse motivo, essa aplicação é desconsiderada.

Tabela 5.2: Subdomínios de tipo de $\Omega_e^{\max}$ para o Exemplo 1.

Método	Δt (10^{-5}s)	**Tipo 1**	**Tipo 2**	**Tipo 3**	**Total**
hib-adap	7.98	86.87	10.18	2.95	100
hib-adap/sub-ótima	7.75	1.64	9.83	2.35	13.82
	15.5	12.16	23.43	11.47	47.06
	31.0	4.63	11.39	22.55	38.57
	62.0	0.00	0.00	0.55	0.55
	Total	18.43	44.65	36.92	100

A subciclagem otimizada foi projetada para superar as limitações da abordagem padrão, explorando de forma mais eficiente as características das técnicas em estudo. Com a aplicação da subciclagem otimizada, três novas metodologias foram desenvolvidas: *α-adap/sub-ótima* , *μ-adap/sub-ótima* e *hib-adap/sub-ótima* . Por meio de um processo de minimização, que busca a melhor subdivisão dos subdomínios, a maioria dos elementos é ajustada de maneira mais precisa, permitindo que o máximo possível de elementos opere próximo do seu Δt_c. Essa abordagem mitiga os efeitos das regiões rígidas e flexíveis, resultando em cálculos mais precisos e uma melhora significativa na acurácia da análise como um todo. Além disso, essa técnica permitiu o desenvolvimento da metodologia de múltiplos subdomínios *hib-adap/sub-ótima* , que agora processa elementos dos tipos 1, 2 e 3. Como mostrado na Figura 5.2c e Tabela 5.2, os três subdomínios de $\Omega_e^{\max}$ são distribuídos em cada subdomínio de Δt criado.

Na Figura 5.3, são apresentados os subdomínios de passo de tempo de cada metodologia. As metodologias *α-adap/sub* (Figura 5.3a) e *μ-adap/sub* (Figura 5.3c) obtiveram automaticamente três subdomínios. Contudo, ao comparar com *α-adap/sub-ótima* (Figura 5.3b) e *μ-adap/sub-ótima* (Figura 5.3d), observamos a formulação de um quarto subdomínio. Em ambos os casos, o subdomínio mais rígido foi reduzido em tamanho, permitindo a criação de um quarto subdomínio com passo de tempo maior. A Tabela 5.1 apresenta a distribuição dos elementos em cada subdomínio. Observa-se que *α-adap/sub* e *μ-adap/sub* sempre geram a mesma distribuição de subdomínios, pois utilizam uma subdivisão fixa. Já as metodologias

α-adap/sub-ótima e *μ-adap/sub-ótima* empregam uma minimização baseada em uma função de aptidão, considerando cada formulação de forma individual. Isso resulta em uma subdivisão específica para cada metodologia.

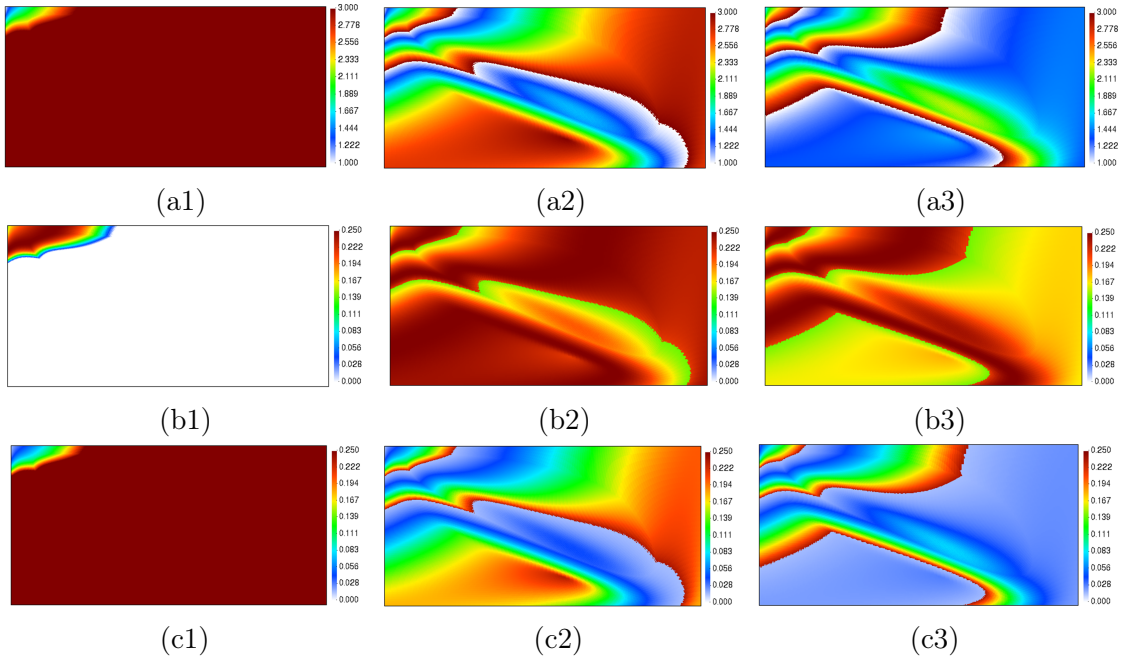


Figura 5.4: Parâmetros de integração temporal dos métodos para o Exemplo 1: (a) α^{act} para o *α-adap*; e (b) μ_1 e (c) μ_2 para o *μ-adap*; considerando as configurações: (1) sem subciclagem, (2) subciclagem padrão; e (3) subciclagem otimizada.

A metodologia *hib-adap/sub-ótima* de múltiplos subdomínios apresentou os melhores valores de passo de tempo. Seu subdomínio mais rígido foi capaz de operar com um passo de tempo maior em comparação com os mais rígidos das outras metodologias, além de alcançar o maior passo de tempo com quatro subdomínios (Figura 5.2c).A Tabela 5.2 ilustra os ganhos obtidos com essa nova metodologia. Enquanto a abordagem *hib-adap* apresentava mais de 86% dos elementos classificados como do tipo 1, a versão *hib-adap/sub-ótima* distribui os elementos de forma mais equilibrada, com uma maior proporção de elementos aprimorados — os chamados elementos dos tipos 2 e 3, que possuem limites de estabilidade estendidos.

A subciclagem, de maneira geral, não apenas busca melhorar o desempenho das metodologias que a utilizam, mas também aprimorar a acurácia. Como já mencionado, quanto mais próximo um elemento opera de seu passo de tempo crítico, melhores resultados são computados, e um melhor uso de seus parâmetros de integração temporal e feito. Esses parâmetros incluem α para o *α-adap* , μ_1 e μ_2 para o *μ-adap* , e $\alpha_1^{'}$ e $\alpha_2^{'}$ para o *hib-adap*. Esse comportamento é evidenciado nas Figuras 5.4 e 5.5, que apresentam os parâmetros de integração temporal calculados para todas as metodologias.

Os parâmetros de integração, que podem ou não introduzir amortecimento nu-

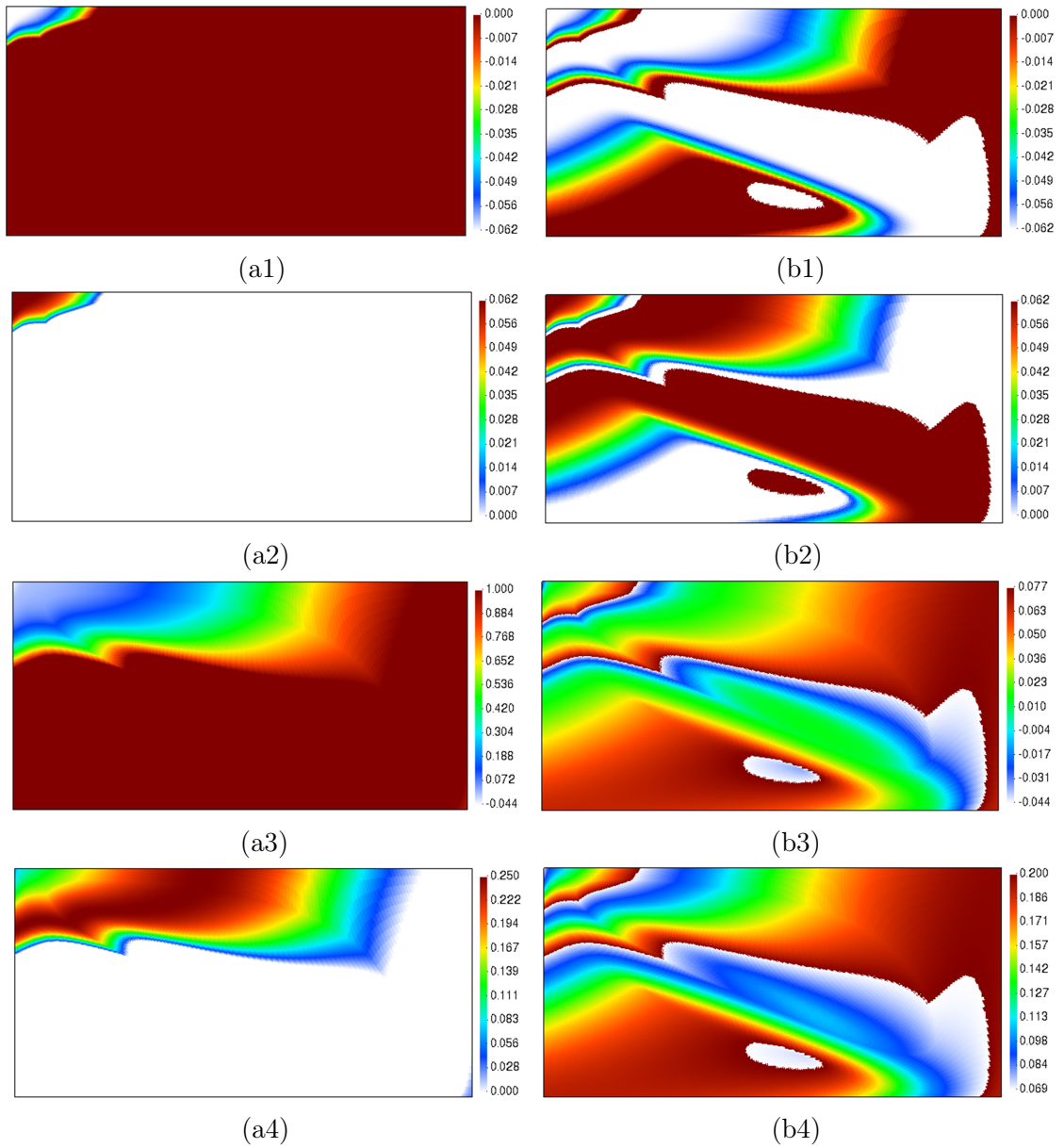
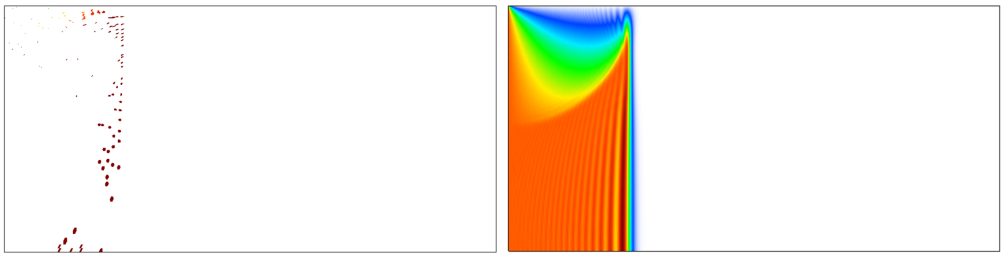


Figura 5.5: Parâmetros de integração temporal $\alpha_1^{'}$ e $\alpha_2^{'}$ dos métodos para o Exemplo 1: (a) *hib-adap*; e (b) *hib-adap/sub-ótima*; para condição sem amortecimento (1) $\bar{\alpha}_1^e$; e (2) $\bar{\alpha}_2^e$; e com amortecimento (3) $\tilde{\alpha}_1^e$; e (4) $\tilde{\alpha}_2^e$. (Foi desconsiderado a parcela Δt^2 para melhor escala de representação.)

mérico, são aplicados de forma adaptativa nas metodologias α-*adap* e *hib-adap* , seguindo critérios baseados na identificação de oscilações discutidos na formulação. A Figura 5.6 demonstra a ativação dos parâmetros adaptativos durante a propagação da onda, onde essa ativação ocorre pontualmente nos elementos que apresentam oscilações.

A Tabela 5.3 apresenta os resultados computados para este primeiro problema, corroborando todos os aspectos discutidos anteriormente. A metodologia *hib-adap/sub-ótima* foi a que apresentou o melhor desempenho, conforme esperado, com um subdomínio operando com um Δt até 16 vezes maior do que o calculado na meto-



(a) (b)

Figura 5.6: Ilustração da ativação dos parâmetros adaptativos durante a propagação da onda: (a)parâmetros α ativado; e (b) campo acústico.

dologia α-*GE* . Além disso, *hib-adap/sub-ótima* também obteve a melhor acurácia, seguida de perto pela metodologia α-*adap/sub-ótima* , evidenciando a importância da ativação do amortecimento numérico com base no critério de oscilação. Essa abordagem permite que a metodologia se adapte de maneira mais eficiente a cada passo de tempo. Em termos de desempenho, a metodologia *hib-adap/sub-ótima* novamente se destacou, seguida por μ-*adap/sub-ótima* . Ambas apresentaram tempos de computação que corresponderam a menos da metade daqueles das metodologias clássicas.

Tabela 5.3: Performance das metodologias para o Exemplo 1.

Método	Δt(máx) (10^{-5}s)	**Valor relativo**	**Erro**	**Valor relativo**	**Tempo CPU (s)**	**Valor relativo**
MDC	4.20	1.11	0.16829	1.43	31.81	2.14
α-GE	3.79	1.00	0.16598	1.41	35.26	2.37
NB	7.87	2.08	0.16743	1.42	43.27	2.91
α-adap	4.20	1.11	0.13051	1.11	31.42	2.11
μ-adap	7.17	1.89	0.14361	1.22	22.37	1.50
hib-adap	7.98	2.11	0.12961	1.10	21.48	1.44
α-adap/sub	16.8	4.44	0.12720	1.08	20.62	1.39
μ-adap/sub	28.6	7.57	0.14058	1.19	17.65	1.19
α-adap/sub-ótima	26.6	7.03	0.11990	1.02	17.89	1.20
μ-adap/sub-ótima	48.6	12.85	0.13135	1.12	15.73	1.06
hib-adap/sub-ótima	62.0	16.37	0.11765	1.00	14.88	1.00

De fato, os resultados demonstram que a metodologia α-*adap/sub-ótima* foi projetada como uma solução simples, porém com elevada acurácia. Por outro lado, a abordagem μ-*adap/sub-ótima* representa uma solução aprimorada, que oferece ganhos significativos em desempenho e facilidade de implementação, uma vez que seus parâmetros não variam ao longo do tempo. Já *hib-adap/sub-ótima* se posiciona como uma metodologia completa, combinando alta acurácia com excelente desempenho computacional.

A Figura 5.7 apresenta os resultados ao longo de toda a análise para as metodologias estudadas, considerando um grau de liberdade posicionado no centro da

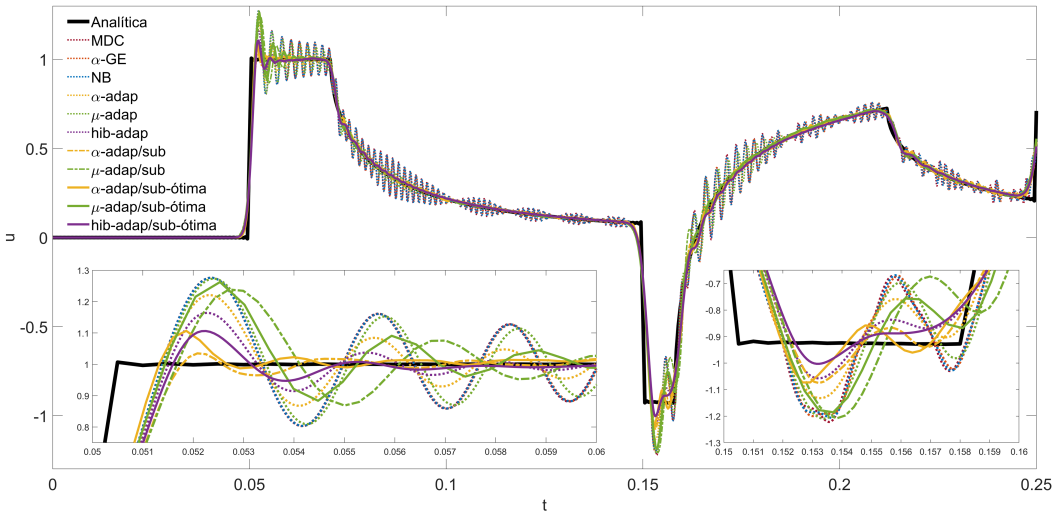


Figura 5.7: Resultados computados no tempo para todas as metodologias, considerando um ponto a $0.5m$ da borda (meio do modelo).

membrana. Observando os detalhes ampliados (zoom), nota-se que as metodologias adaptativas conseguem lidar de maneira eficiente com as oscilações espúrias, enquanto as técnicas clássicas apresentam oscilações por todo o modelo.

Por fim, para encerrar o estudo deste exemplo acústico, a Figura 5.8 apresenta o campo acústico no último instante de tempo da análise, após a frente de onda ter percorrido todo o modelo e retornado. A Figura 5.8 permite uma comparação direta entre as metodologias clássicas, as adaptativas *sub-ótima* e a solução analítica. Os resultados das metodologias clássicas, mesmo com o amortecimento numérico presente em α-GE e NB , ainda estão afetados por oscilações espúrias. Em contrapartida, as metodologias adaptativas *sub-ótima* representam o modelo de forma significativamente mais precisa.

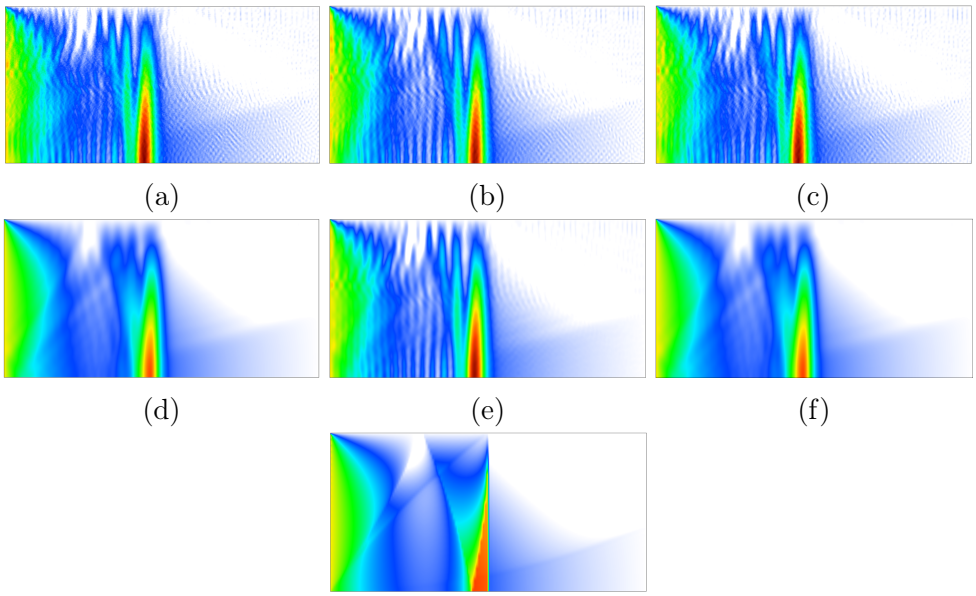
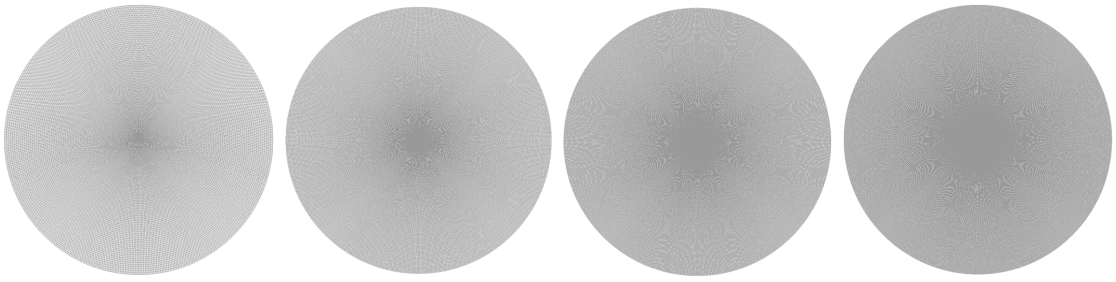


Figura 5.8: Campo acústico para tempo de 0.25s: (a) *MDC*; (b) α-*GE*; (c) *NB*; (d) α-*adap/sub-ótima*; (e) μ-*adap/sub-ótima*; (f) *hib-adap/sub-ótima* e (g) Analítica.

5.1.2 Membrana infinita

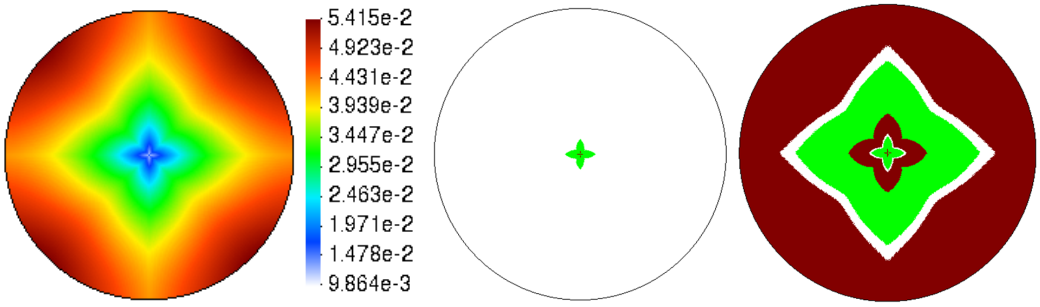
O segundo exemplo analisado nesta subseção trata de um modelo acústico infinito submetido a uma fonte impulsiva. Para discretizar o modelo, são consideradas quatro malhas de Elementos Finitos (FEM), cada uma com diferentes níveis de refinamento, todas centradas no ponto de aplicação da fonte. Essas malhas foram projetadas com uma maior concentração de elementos nas proximidades do ponto de aplicação da fonte, conforme ilustrado na Figura 5.9. O número de elementos triangulares lineares em cada malha é o seguinte: (i)Discretização 1 – 50.000 elementos; (ii) Discretização 2 – 100.000 elementos; (iii) Discretização 3 – 150.000 elementos; e (iv)Discretização 4 – 200.000 elementos. Como o meio analisado é homogêneo, as regiões de maior "rigidez" são exclusivamente determinadas pelo refinamento dessas malhas.



(a) (b) (c) (d)

Figura 5.9: Malhas geradas para o Exemplo 2: (a) 50k elementos; (b) 100k elementos; (c) 150k elementos; e (d) 200k elementos.

A Figura 5.10a ilustra o valor de Δt_e para cada elemento da malha mais refinada (Figura 5.9d), evidenciando a heterogeneidade gerada pelo refinamento da malha devido à concentração de elementos. Dado que $\Omega_e^{\max}$ é calculado com base em Δt_e, observa-se, na Figura 5.9d, uma variação de aproximadamente 6 vezes entre os valores correspondentes ao elemento mais rígido e ao mais flexível.



(a) (b) (c)

Figura 5.10: Valores computados do Exemplo 2, modelo 4: (a) Δt_e de cada elemento. (b) subdomínios de tipo de Ω para *hib-adap*; e (c) subdomínios de tipo de Ω para *hib-adap/sub-ótima*. (branco tipo-1; verde tipo-2 e vermelho tipo-3)

A metodologia *hib-adap* (que não apresenta subciclagem) trata automaticamente as regiões mais rígidas com cálculos aprimorados, classificando como tipos 2 e 3 os elementos com $\Omega_e^{\max}$ entre $2 < \Omega_e^{\max} \leq 4$. Esse processo resulta em apenas 2,51% dos elementos sendo classificados como dos tipos 2 e 3, conforme apresentado na Tabela 5.4 e ilustrado na Figura 5.10b. Essa pequena porcentagem de elementos aprimorados já é suficiente para garantir ganhos significativos em precisão e desempenho, como demonstrado na Tabela 5.6, na qual o Δt atinge até o dobro dos valores obtidos com os métodos clássicos.

Tabela 5.4: Subdomínios de tipo de $\Omega_e^{\max}$ para o Exemplo 2.

Modelo	**Método**	Δt (10^{-2}s)	**Tipo 1**	**Tipo 2**	**Tipo 3**	**Total**
1	hib-adap	2.65	89.96	8.90	1.14	100
	hib-adap/sub-ótima	1.92	0.70	1.43	0.00	2.13
		3.85	8.14	30.44	9.21	47.79
		7.70	0.00	0.00	50.08	50.08
		Total	8.84	31.87	59.29	100
2	hib-adap	1.44	97.31	2.60	0.09	100
	hib-adap/sub-ótima	1.40	0.78	2.31	0.05	3.14
		2.81	7.22	26.80	8.30	42.32
		5.62	0.00	0.58	53.96	54.54
		Total	8.00	29.69	62.31	100
3	hib-adap	1.14	97.47	2.44	0.09	100
	hib-adap/sub-ótima	1.14	0.79	2.42	0.08	3.29
		2.27	6.93	26.21	8.22	41.35
		4.55	0.00	1.13	54.23	55.36
		Total	7.73	29.75	62.52	100
4	hib-adap	0.98	97.49	2.43	0.08	100
	hib-adap/sub-ótima	0.50	0.01	0.00	0.00	0.01
		1.01	0.86	2.71	0.13	3.70
		2.02	7.57	28.15	8.84	44.55
		4.03	0.00	0.00	51.74	51.74
		Total	8.43	30.86	60.71	100

A Figura 5.10c apresenta os resultados obtidos com a abordagem *hib-adap/sub-ótima* aplicada ao modelo 4. Comparando com a abordagem *hib-adap*, observa-se que a análise é significativamente aprimorada ao considerar múltiplos domínios. Para cada subdomínio de Δt_i, são definidos três subdomínios baseados nos tipos de Ω, o que permite uma maior eficiência no tratamento.

A Tabela 5.4 detalha a divisão dos múltiplos domínios para os três modelos analisados. Na abordagem *sub-ótima*, todos os modelos apresentaram cerca de metade dos elementos classificados como tipo 3, enquanto os elementos do tipo 1 permaneceram concentrados nas regiões mais flexíveis, garantindo um desempenho otimizado.

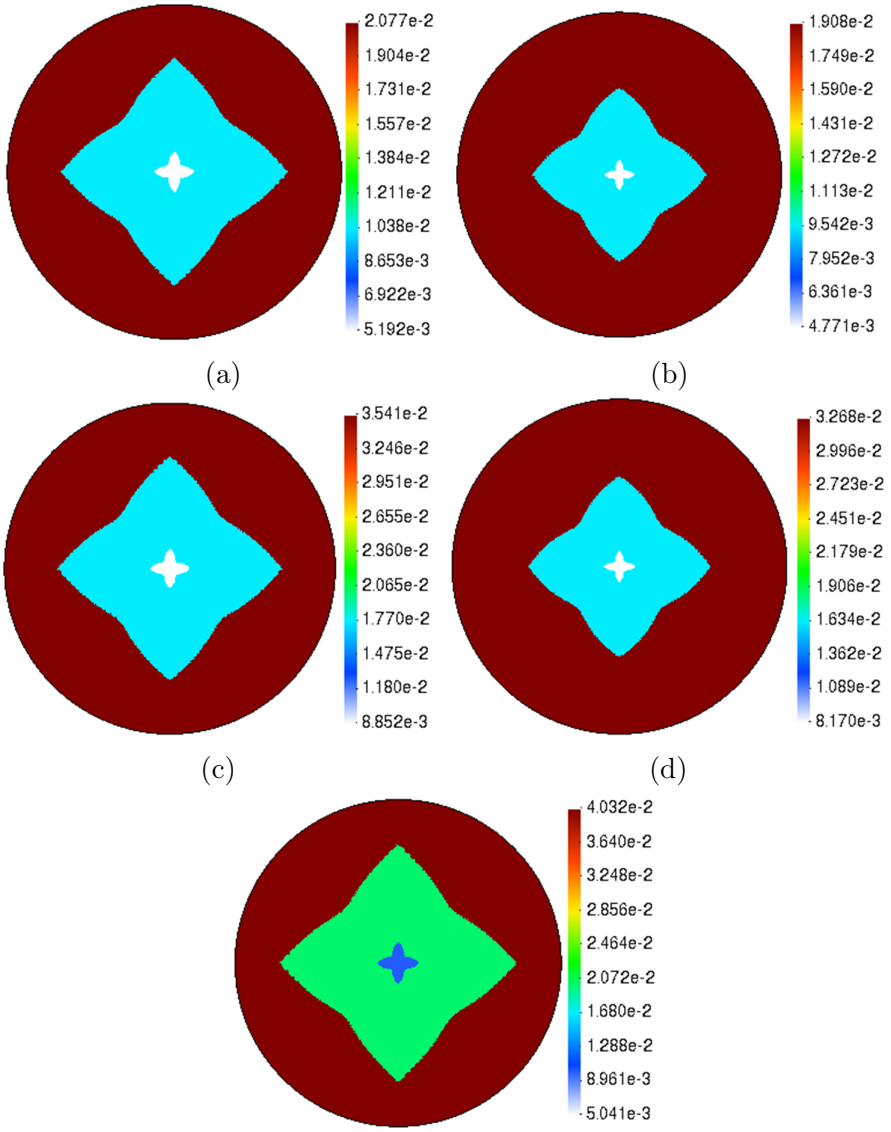


Figura 5.11: Subdomínios Δt do Exemplo 2, modelo 4:(a) *α-adap/sub*; (b) *α-adap/sub-ótima*; (c) *μ-adap/sub*; (d) *μ-adap/sub-ótima* e (e) *hib-adap/sub-ótima*

A Figura 5.11 apresenta os subdomínios Δt_i gerados pelas metodologias com subciclagem, enquanto a Tabela 5.5 detalha a distribuição de elementos em cada um desses subdomínios. Ao comparar as metodologias de subciclagem padrão e otimizada, observa-se que, ao contrário do Exemplo 1, não houve a criação de um novo subdomínio. Na verdade, os subdomínios existentes apresentam valores de Δt ligeiramente menores na subciclagem otimizada.

Essa diferença ocorre porque o objetivo da abordagem *sub-ótima* não é criar o maior número de subdomínios, mas sim encontrar a configuração mais eficiente de subdomínios. Dessa forma, como apresentado na Tabela 5.5, é possível observar que um maior número de elementos agora se encontra no subdomínio com o maior Δt para os modelos 2, 3 e 4. Por outro lado, o modelo 1 apresentou a geração de um

subdomínio adicional, comportamento semelhante ao observado no Exemplo 1.

Ainda, analisando a Tabela 5.5, observa-se que a metodologia *hib-adap/sub-ótima* apresentou subdomínios marchando com os maiores valores de Δt em comparação com as demais metodologias de subciclagem. No caso do modelo 4, a abordagem conseguiu manter o subdomínio mais rígido com apenas 0,01% dos elementos, permitindo a geração de um subdomínio mais flexível, com um Δt relativamente maior do que o obtido nas outras metodologias *sub-ótima*.

Tabela 5.5: Subdomínios de Δt para o Exemplo 2.

Modelo	**Método**	Δt (10^{-2}s)	%	**Modelo**	**Método**	Δt (10^{-2}s)	%
1	α-adap/sub	1.39	12.60	2	α-adap/sub	0.75	3.53
		2.79	87.40			1.51	45.55
		-	-			3.02	50.92
	μ-adap/sub	2.38	12.60		μ-adap/sub	1.29	3.53
		4.76	87.40			2.58	45.55
		-	-			5.16	50.92
	α-adap/sub-ótima	0.90	0.81		α-adap/sub-ótima	0.67	1.86
		1.81	33.27			1.35	31.72
		3.62	65.92			2.70	66.42
	μ-adap/sub-ótima	1.56	0.87		μ-adap/sub-ótima	1.15	1.80
		3.13	34.61			2.29	31.25
		6.25	64.52			4.59	66.95
	hib-adap/sub-ótima	1.87	2.13		hib-adap/sub-ótima	1.42	3.14
		3.73	47.79			2.84	42.32
		7.47	50.08			5.68	54.54
3	α-adap/sub	0.60	3.35	4	α-adap/sub	0.51	3.33
		1.20	41.74			1.04	41.54
		2.40	54.91			2.08	55.13
	μ-adap/sub	1.02	3.35		μ-adap/sub	8.85	3.33
		2.05	41.74			1.77	41.54
		4.09	54.91			3.54	55.13
	α-adap/sub-ótima	0.55	2.06		α-adap/sub-ótima	0.47	2.08
		1.10	32.01			0.95	31.94
		2.20	65.93			1.91	65.98
	μ-adap/sub-ótima	0.95	2.27		μ-adap/sub-ótima	0.81	2.12
		1.91	33.61			1.63	32.37
		3.82	64.12			3.30	65.51
	hib-adap/sub-ótima	1.14	3.29		hib-adap/sub-ótima	0.50	0.01
		2.27	41.35			1.01	3.70
		4.55	55.36			2.02	44.55
		-	-			4.03	51.74

A Figura 5.12 apresenta os parâmetros de integração temporal calculados para as metodologias *α-adap* e *μ-adap* , considerando todas as suas três configurações aplicadas ao modelo 4. Como observado, a diferença de Δt entre as subciclagens é menor, o que resulta em uma diferença reduzida entre os parâmetros computa-

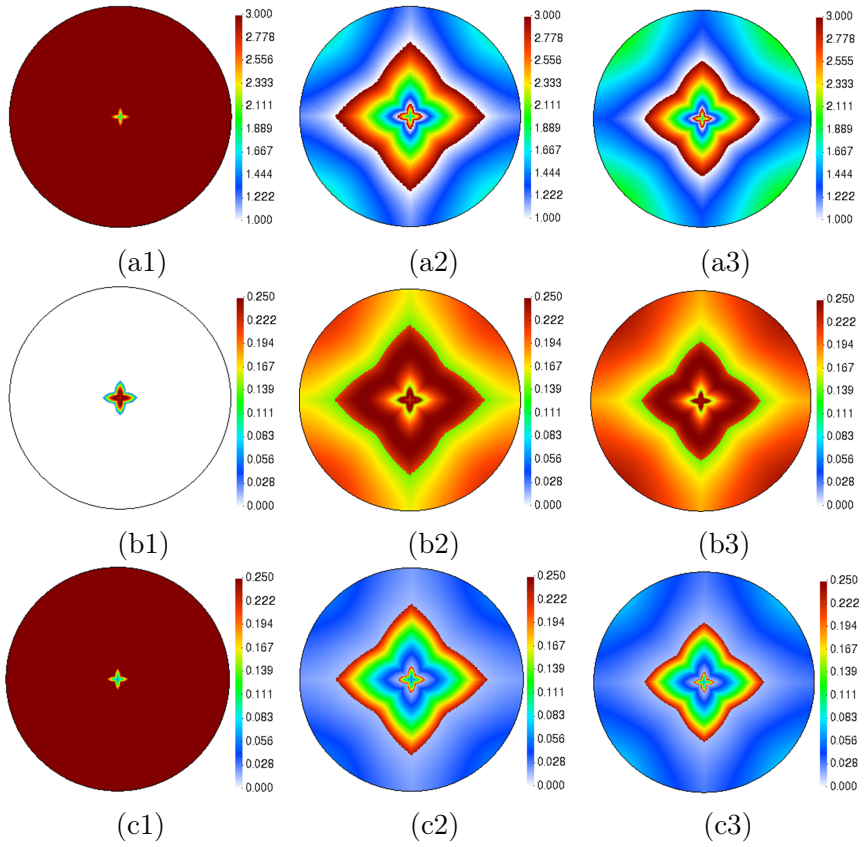


Figura 5.12: Parâmetros de integração temporal dos métodos para o Exemplo 2, modelo 4: (a) α^{act} para o α-*adap*; e (b) μ_1 e (c) μ_2 para o μ-*adap*; considerando as configurações: (1) sem subciclagem, (2) subciclagem padrão; e (3) subciclagem otimizada.

dos. No entanto, esses parâmetros continuam sendo melhor ajustados em relação às metodologias tradicionais.

A Figura 5.13 apresenta os parâmetros calculados para a metodologia *hib-adap* em suas duas configurações. Ao considerar os múltiplos domínios, observa-se que os quatro parâmetros também são melhor computados. Ressalta-se que essa metodologia possui configurações distintas de parâmetros para condições com e sem amortecimento numérico, o que destaca ainda mais a importância de um cálculo aprimorado para a análise.

A Tabela 5.6 apresenta a performance de todas as metodologias para os quatro modelos analisados no Exemplo 2. Como esperado, os resultados computados foram similares aos do Exemplo 1, com a metodologia *hib-adap/sub-ótima* alcançando os melhores índices de acurácia e tempo de CPU para todos os modelos. Novamente, a abordagem α-*adap/sub-ótima* apresentou erros computados próximos à solução híbrida. Isso ocorre devido à alta necessidade de controle de condições espúrias neste tipo de problema, uma característica intrínseca tanto à *hib-adap* quanto à α-*adap* . Por sua vez, a metodologia μ-*adap/sub-ótima* demonstrou a segunda melhor

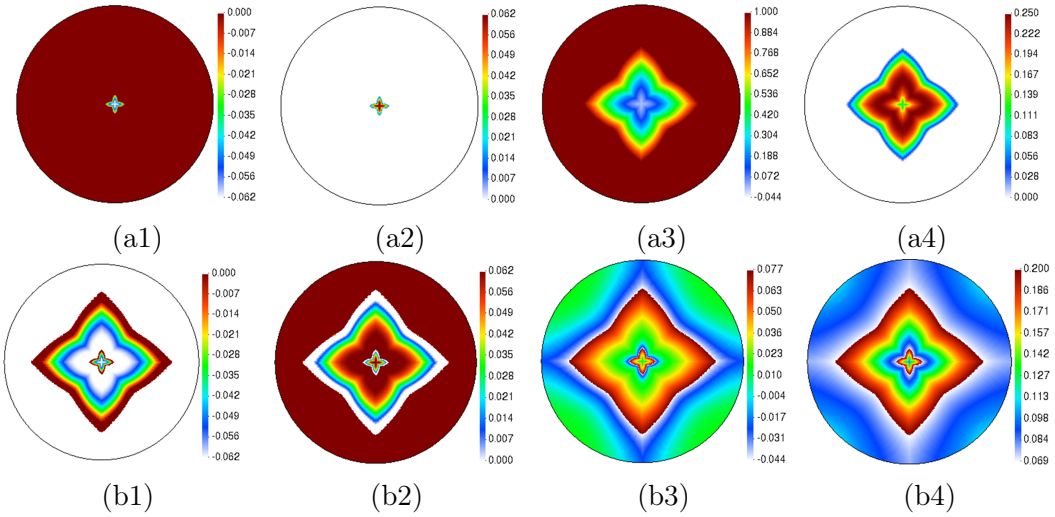


Figura 5.13: Parâmetros de integração temporal $\alpha_1^{'}$ e $\alpha_2^{'}$ dos métodos para o Exemplo 2: (a) *hib-adap*; e (b) *hib-adap/sub-ótima*; para condição sem amortecimento (1) $\bar{\alpha}_1^e$; e (2) $\bar{\alpha}_2^e$; e com amortecimento (3) $\tilde{\alpha}_1^e$; e (4) $\tilde{\alpha}_2^e$. (Foi desconsiderado a parcela Δt^2 para melhor escala de representação.)

eficiência, embora tenha se mostrado 20%-30% mais custosa em termos de tempo de CPU em comparação com a *hib-adap/sub-ótima* .

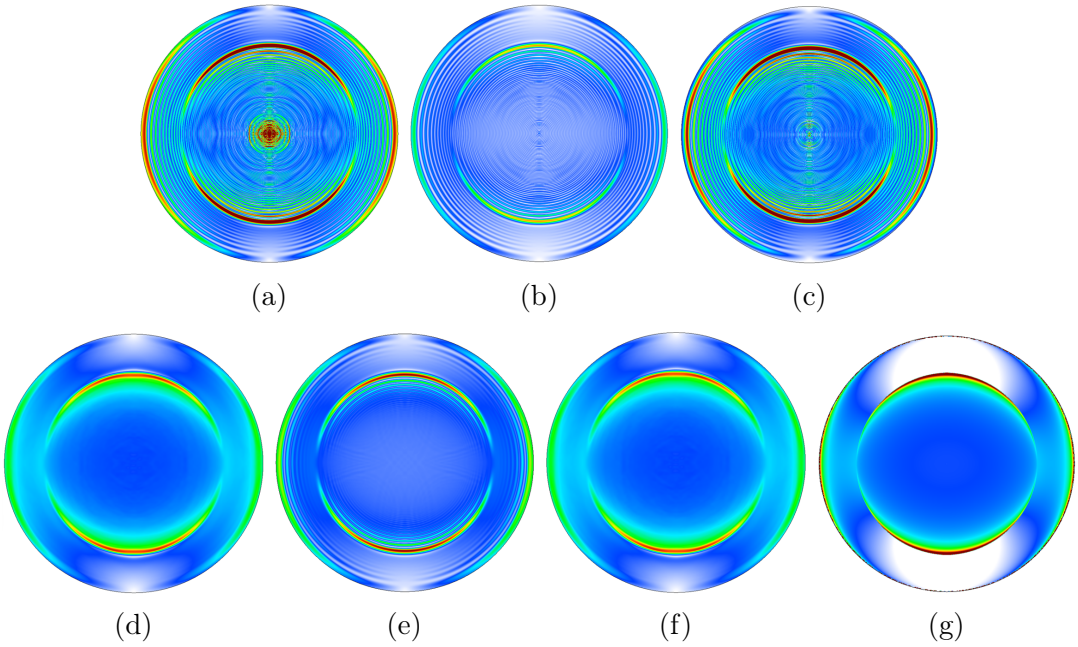


Figura 5.14: Deslocamentos na direção x, para tempo de 5s do Exemplo 2, modelo 4: (a) *MDC*; (b) α-*GE*; (c) *NB*; (d) α-*adap/sub-ótima*; (e) μ-*adap/sub-ótima*; (f) *hib-adap/sub-ótima* e (g) Analítica.

A Figura 5.14 apresenta os deslocamentos computados no último instante de tempo da análise, considerando o modelo 4. Observa-se que as metodologias clássicas tiveram suas respostas completamente dominadas por oscilações espúrias, enquanto as metodologias adaptativas *sub-ótima* apresentaram resultados mais próximos à

Tabela 5.6: Performance das metodologias para o Exemplo 2.

Modelo	Método	Δt(máx) (10^{-2}s)	Valor relativo	Erro	Valor relativo	Tempo CPU (s)	Valor relativo
	MDC	1.39	1.11	0.55400	2.76	15.55	3.29
	α-GE	1.26	1.00	0.43611	2.17	17.65	3.73
	NB	2.61	2.08	0.49698	2.48	23.86	5.04
	α-adap	1.39	1.11	0.24940	1.24	15.61	3.30
	μ-adap	2.38	1.89	0.27939	1.39	10.41	2.20
1	hib-adap	2.65	2.11	0.24732	1.23	9.75	2.06
	α-adap/sub	2.79	2.22	0.21503	1.07	11.32	2.39
	μ-adap/sub	4.76	3.78	0.26287	1.31	7.65	1.62
	α-adap/sub-ótima	3.62	2.88	0.20629	1.03	8.16	1.72
	μ-adap/sub-ótima	6.25	4.97	0.25532	1.27	5.71	1.21
	hib-adap/sub-ótima	7.70	6.12	0.20058	1.00	4.73	1.00
	MDC	0.75	1.11	0.53649	3.00	34.29	3.18
	α-GE	0.68	1.00	0.41637	2.33	36.24	3.37
	NB	1.42	2.08	0.48465	2.71	44.33	4.12
	α-adap	0.75	1.11	0.23781	1.33	34.94	3.25
	μ-adap	1.29	1.89	0.25552	1.43	26.13	2.43
2	hib-adap	1.44	2.11	0.23474	1.31	25.62	2.38
	α-adap/sub	3.02	4.44	0.19095	1.07	26.02	2.42
	μ-adap/sub	5.16	7.57	0.24626	1.38	19.64	1.82
	α-adap/sub-ótima	2.70	3.97	0.18668	1.04	19.92	1.85
	μ-adap/sub-ótima	4.59	6.73	0.24155	1.35	13.86	1.29
	hib-adap/sub-ótima	5.62	8.25	0.17866	1.00	10.77	1.00
	MDC	0.60	1.11	0.51926	3.21	55.96	2.79
	α-GE	0.54	1.00	0.39816	2.46	58.08	2.89
	NB	1.12	2.08	0.46874	2.89	67.60	3.37
	α-adap	0.60	1.11	0.22201	1.37	55.62	2.77
	μ-adap	1.02	1.89	0.23754	1.47	42.83	2.13
3	hib-adap	1.14	2.11	0.21698	1.34	41.62	2.07
	α-adap/sub	2.40	4.44	0.17694	1.09	40.47	2.02
	μ-adap/sub	4.09	7.57	0.22837	1.41	32.91	1.64
	α-adap/sub-ótima	2.20	4.07	0.16863	1.04	34.56	1.72
	μ-adap/sub-ótima	3.82	7.06	0.22540	1.39	25.05	1.25
	hib-adap/sub-ótima	6.57	12.15	0.16200	1.00	20.07	1.00
	MDC	0.51	1.11	0.50252	3.61	108.67	3.10
	α-GE	0.46	1.00	0.38117	2.74	112.10	3.20
	NB	0.97	2.08	0.44833	3.22	134.25	3.83
	α-adap	0.51	1.11	0.20176	1.45	107.97	3.08
	μ-adap	0.88	1.89	0.21690	1.56	91.58	2.61
4	hib-adap	0.98	2.11	0.19902	1.43	89.23	2.54
	α-adap/sub	2.08	4.44	0.15094	1.09	74.80	2.13
	μ-adap/sub	3.54	7.57	0.21288	1.53	62.15	1.77
	α-adap/sub-ótima	1.91	4.08	0.14132	1.02	66.74	1.90
	μ-adap/sub-ótima	3.27	6.98	0.20817	1.50	45.10	1.29
	hib-adap/sub-ótima	4.03	8.62	0.13910	1.00	35.08	1.00

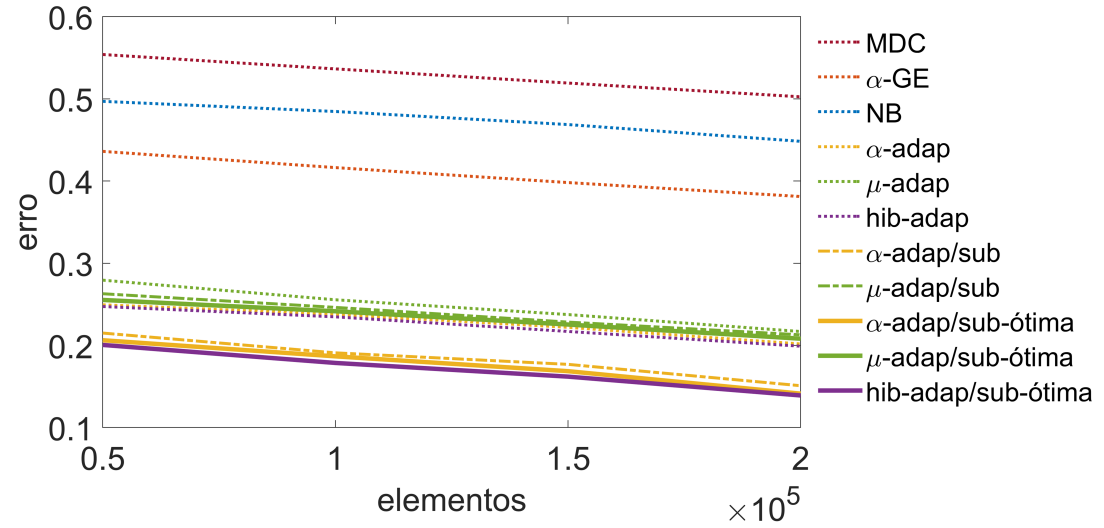
solução analítica.

Essa diferença também pode ser observada nas Figuras 5.16 a 5.19, que exibem os resultados computados ao longo do tempo para todas as metodologias nos quatro modelos. As metodologias adaptativas demonstram uma rápida supressão das oscilações espúrias geradas, enquanto, nas metodologias clássicas, essas oscilações persistem ao longo de toda a análise.

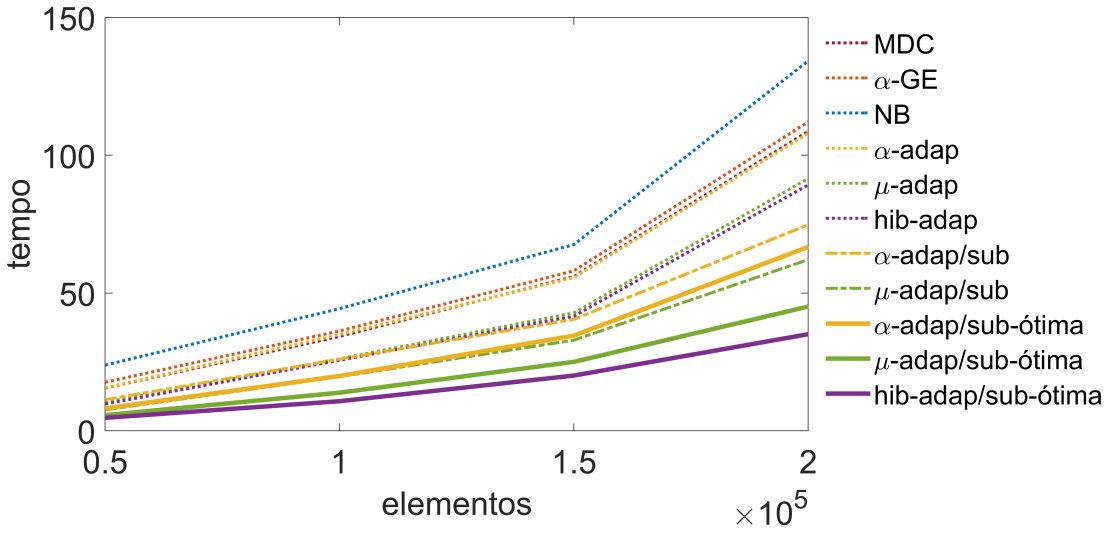
Encerrando a análise deste exemplo, gráficos de convergência dos erros computados e tempos de CPU foram gerados e são apresentados na Figura 5.15. Observa-se que, além do ganho computacional direto ao comparar as metodologias dentro de

um mesmo modelo, as metodologias *sub-ótima* entregam uma acurácia superior em relação a outras metodologias, mesmo com modelos menos refinados.

Essa eficiência é especialmente evidente na metodologia *hib-adap/sub-ótima* , que alcançou, com o modelo 1, um valor de erro próximo ao obtido pela mesma configuração sem subciclagem (*hib-adap*) aplicada ao modelo 4. Esses resultados reforçam a eficácia da abordagem *sub-ótima* tanto em termos de precisão quanto de desempenho computacional.



(a)



(b)

Figura 5.15: Gráficos de convergência para o Exemplo 2: (a) erro; e (b) tempo de CPU.

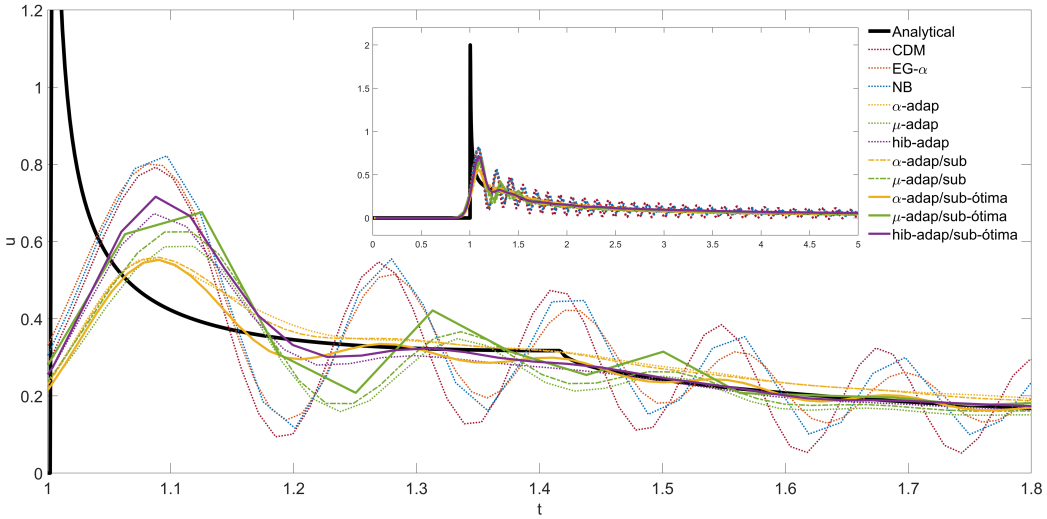


Figura 5.16: Resultados computados no tempo para todas as metodologias, considerando um ponto a $1m$ da aplicação da carga, modelo 1.

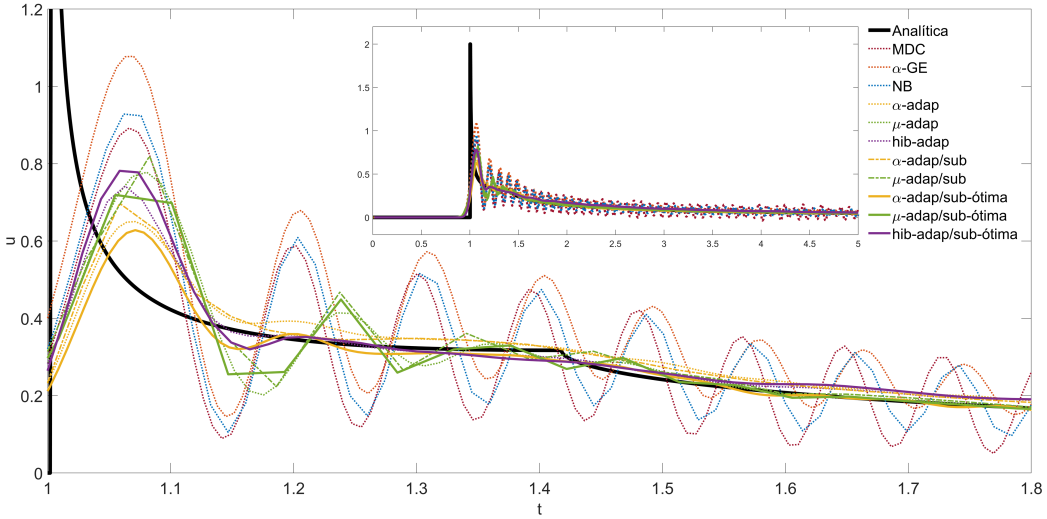


Figura 5.17: Resultados computados no tempo para todas as metodologias, considerando um ponto a $1m$ da aplicação da carga, modelo 2.

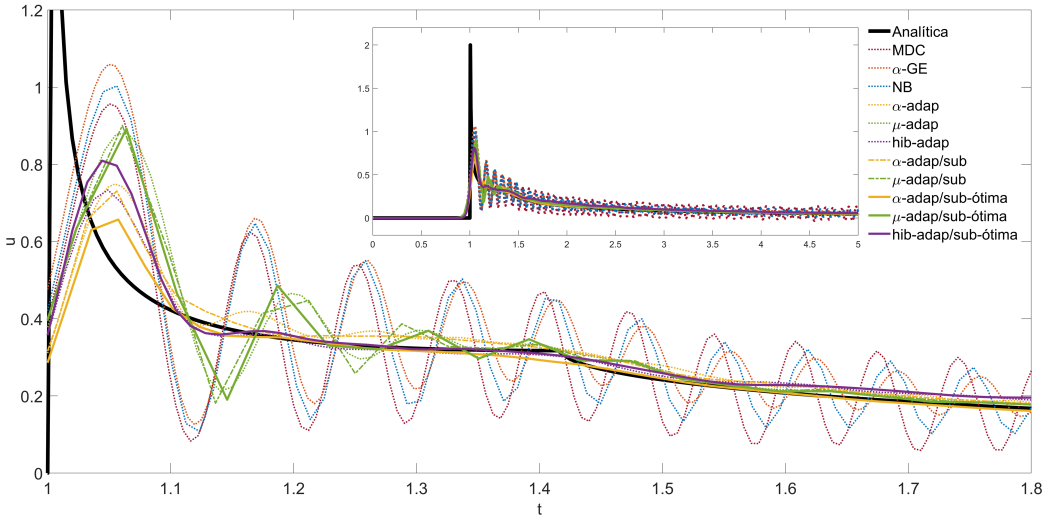


Figura 5.18: Resultados computados no tempo para todas as metodologias, considerando um ponto a $1m$ da aplicação da carga, modelo 3.

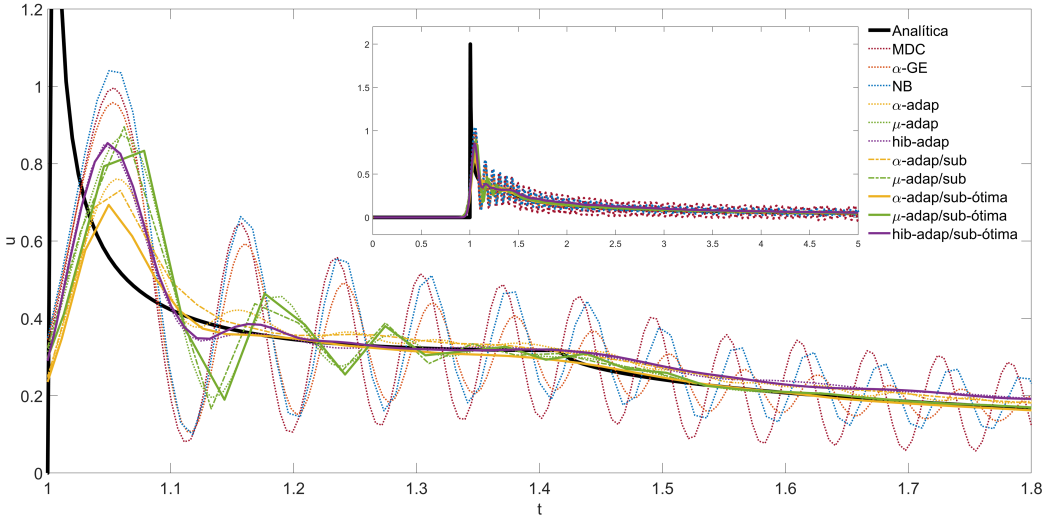
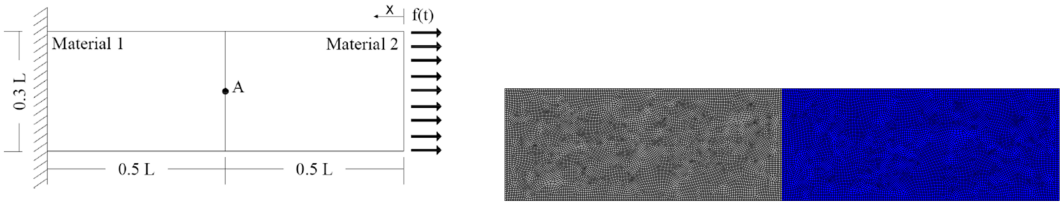


Figura 5.19: Resultados computados no tempo para todas as metodologias, considerando um ponto a $1m$ da aplicação da carga, modelo 4.

5.1.3 Barra heterogênea

Neste terceiro exemplo, é analisada uma barra retangular heterogênea composta por diferentes combinações de dois materiais distintos. Nesse contexto, diversas configurações de modelo são investigadas, variando a proporção de cada material em cada metade da barra, conforme ilustrado na Figura 5.20a. Para todas as análises realizadas, o chamado "material 1" mantém as mesmas propriedades físicas, com módulo de elasticidade de 100 kPa e densidade de 1 kg/m^3. A densidade do chamado "material 2" também é igual à do material 1; no entanto, seu módulo de elasticidade é sistematicamente modificado para gerar proporções crescentes entre as velocidades de propagação de onda (c_2/c_1) dos dois materiais.



(a) Esboço da barra heterogênea (b) Malha do modelo

Figura 5.20: Exemplo 3. (a) Esboço da barra heterogênea (b) Malha do modelo.

Essas proporções resultam em diferenças entre as duas velocidades consideradas, variando de 1 a 4 vezes (sendo 1 o caso homogêneo, usado como referência para comparação). Para a discretização espacial da barra, é utilizada uma malha não estruturada de Elementos Finitos composta por 25.527 elementos quadrados lineares, conforme apresentado na Figura 5.20b.

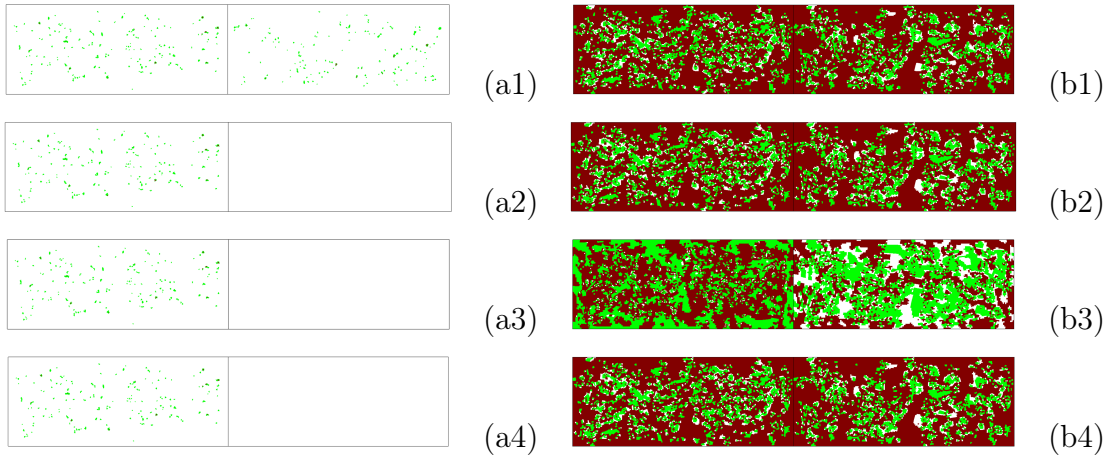


Figura 5.21: Valores computados de subdomínios de tipo de Ω para o Exemplo 3: (a) *hib-adap*; e (b) *hib-adap/sub-ótima*, para o (1) modelo 1; (2) modelo 2; (3) modelo 3; e (4) modelo 4. (branco tipo-1; verde tipo-2 e vermelho tipo-3)

Os subdomínios dos tipos de Ω para os quatro modelos são apresentados na Figura 5.21. É possível identificar que a subdivisão é "prejudicada" pelas propri-

edades físicas heterogêneas, onde apenas o material 1 consegue apresentar valores aprimorados computados para os tipos 2 e 3 na metodologia *hib-adap*.Ao analisar a Tabela 5.7, observa-se que menos de 4% do modelo homogêneo pertencem aos tipos 2 e 3, enquanto, nos modelos heterogêneos, apenas 2,01% (equivalente ao material 1) são classificados nesses tipos. Em termos de eficiência, os elementos do tipo 1 são mais vantajosos, pois apresentam menor custo computacional e comportamento semelhante ao do *α-adap* , embora com melhor amortecimento numérico. No entanto, ao considerar a acurácia, os elementos do tipo 2 são preferíveis. Por isso, uma boa distribuição dos tipos de elementos é essencial para garantir o equilíbrio entre precisão e desempenho.

Tabela 5.7: Subdomínios de tipo de $\Omega_e^{\max}$ para o Exemplo 3.

Modelo	**Método**	Δt (10^{-4}s)	**Tipo 1**	**Tipo 2**	**Tipo 3**	**Total**
1	hib-adap	1.66	96.41	3.37	0.22	100
	hib-adap/sub-ótima	1.17	0.11	0.20	0.00	0.31
		2.33	8.86	21.61	3.07	33.54
		4.66	0.01	2.77	63.37	66.15
		Total	8.98	24.58	66.44	100
2	hib-adap	0.83	97.99	1.87	0.14	100
	hib-adap/sub-ótima	0.58	0.04	0.13	0.00	0.17
		1.18	4.72	11.92	1.86	18.50
		2.36	4.90	12.45	31.61	48.96
		4.71	0.00	1.17	31.20	32.37
		Total	9.66	25.67	64.67	100
3	hib-adap	0.55	97.99	1.87	0.14	100
	hib-adap/sub-ótima	0.33	0.03	0.03	0.00	0.06
		0.66	1.75	5.03	0.52	7.30
		1.32	0.19	12.55	30.26	43.00
		2.65	9.96	23.69	3.04	36.69
		5.30	0.00	0.20	12.75	12.95
		Total	11.93	41.50	46.57	100
4	hib-adap	0.41	97.99	1.87	0.14	100
	hib-adap/sub-ótima	0.29	0.04	0.13	0.00	0.17
		0.58	4.61	11.81	1.86	18.28
		1.18	0.07	1.35	30.22	31.64
		2.36	4.89	11.14	1.45	17.48
		4.71	0.00	1.18	31.25	32.43
		Total	9.61	25.61	64.78	100

Esses resultados evidenciam que, embora a metodologia *hib-adap* apresente diversas vantagens em comparação a outras abordagens, a subdivisão do domínio é essencial para lidar com modelos complexos. Observando os valores computados para *hib-adap/sub-ótima* na Figura 5.21 e na Tabela 5.7, percebe-se o potencial de

melhoria de um modelo simples, composto por dois materiais e uma malha não estruturada, ao aplicar o conceito de múltiplos domínios. Essa abordagem proporciona um equilíbrio significativo entre acurácia e performance.

Em comparação com *hib-adap*, a metodologia *hib-adap/sub-ótima* obteve cerca de 90% dos elementos classificados como tipos 2 e 3, inclusive no caso homogêneo, devido à malha não estruturada utilizada.

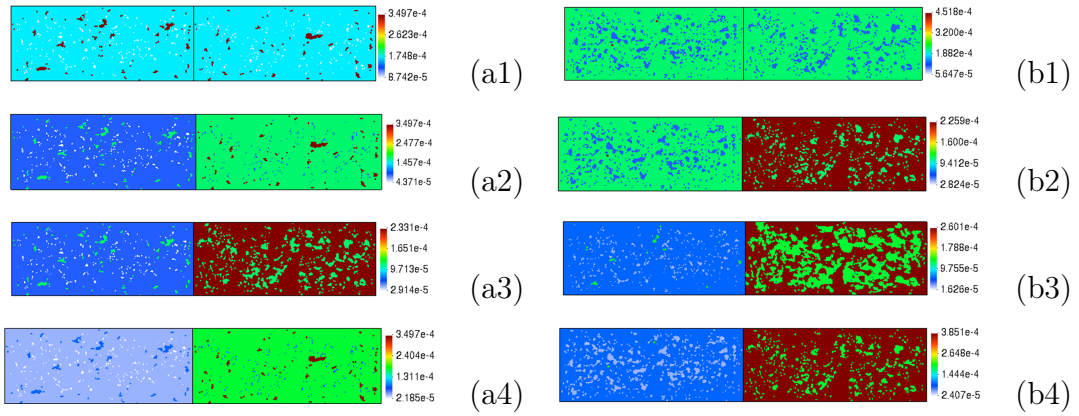


Figura 5.22: Subdomínios Δt do Exemplo 3: (a) *α-adap/sub*; e (b) *α-adap/sub-ótima*, para o (1) modelo 1; (2) modelo 2; (3) modelo 3; e (4) modelo 4.

As Figuras 5.22 e 5.23 apresentam, lado a lado, a subdivisão em subdomínios de Δt dos quatro modelos para as metodologias *α-adap/sub* e *μ-adap/sub* , juntamente com suas versões otimizadas *α-adap/sub-ótima* e *μ-adap/sub-ótima* , respectivamente. Dessa forma, é possível observar claramente o ganho obtido caso a caso com uma ótima subdivisão.

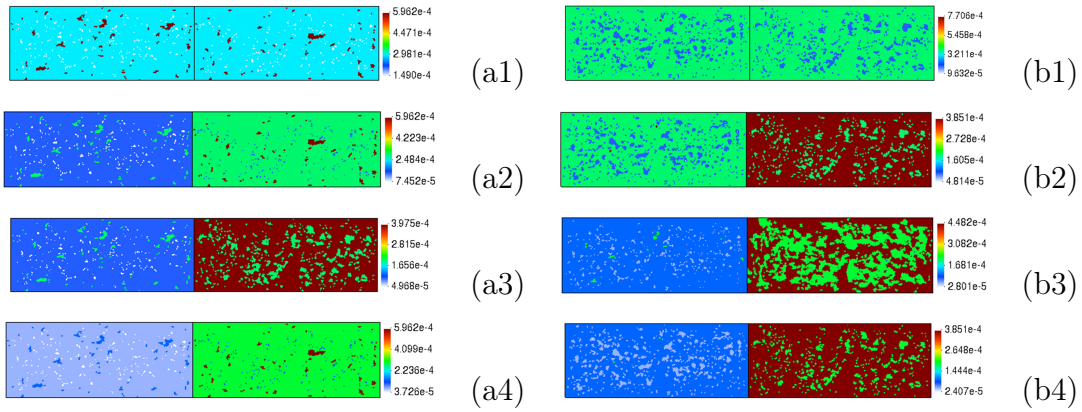


Figura 5.23: Subdomínios Δt do Exemplo 3: (a) *μ-adap/sub*; e (b) *μ-adap/sub-ótima*, para o (1) modelo 1; (2) modelo 2; (3) modelo 3; e (4) modelo 4.

Em conjunto com a Tabela 5.8, verifica-se que, em todos os casos analisados, como esperado, um maior número de elementos pôde marchar com um Δt mais elevado, no *α-adap/sub-ótima* e *μ-adap/sub-ótima* . Além disso, ambas as técnicas apresentaram a geração de um subdomínio adicional no caso homogêneo.

Tabela 5.8: Subdomínios de Δt_i para o Exemplo 3.

Modelo	**Método**	Δt (10^{-4}s)	%	**Modelo**	**Método**	Δt (10^{-4}s)	%
1	α-adap/sub	0.87	4.98	2	α-adap/sub	0.43	2.72
		1.75	93.83			0.87	48.84
		3.50	1.19			1.75	47.89
		-	-			3.50	0.55
	μ-adap/sub	1.49	4.98		μ-adap/sub	0.74	2.72
		2.98	93.83			1.49	48.84
		5.96	1.19			2.98	47.89
		-	-			5.96	0.55
	α-adap/sub-ótima	0.56	0.12		α-adap/sub-ótima	0.28	0.08
		1.13	20.95			0.56	11.05
		2.26	78.92			1.13	48.81
		4.52	0.01			2.26	40.06
	μ-adap/sub-ótima	0.96	0.13		μ-adap/sub-ótima	0.48	0.08
		1.93	20.99			0.96	11.04
		3.85	78.87			1.93	48.82
		7.71	0.01			3.85	40.06
	hib-adap/sub-ótima	1.17	0.31		hib-adap/sub-ótima	0.58	0.17
		2.33	33.54			1.18	18.50
		4.66	66.15			2.36	48.96
		-	-			4.71	32.37
3	α-adap/sub	0.29	2.72	4	α-adap/sub	0.21	2.73
		0.58	46.66			0.43	46.58
		1.17	12.51			0.87	2.89
		2.33	38.11			1.75	47.25
	μ-adap/sub	0.49	2.72		μ-adap/sub	0.37	2.73
		0.99	46.66			0.74	46.58
		1.99	12.51			1.49	2.89
		3.97	38.11			2.98	47.25
	α-adap/sub-ótima	0.16	0.02		α-adap/sub-ótima	0.14	0.08
		0.32	5.03			0.28	11.01
		0.65	45.06			0.56	38.90
		1.30	23.81			1.13	9.97
		2.60	26.08			2.26	40.04
	μ-adap/sub-ótima	0.28	0.02		μ-adap/sub-ótima	0.24	0.08
		0.56	5.33			0.48	10.99
		1.12	44.78			0.96	38.91
		2.24	25.59			1.93	9.96
		4.48	24.3			3.85	40.1
	hib-adap/sub-ótima	0.33	0.06		hib-adap/sub-ótima	0.29	0.17
		0.66	7.30			0.58	18.28
		1.32	43.00			1.18	31.64
		2.65	36.69			2.36	17.48
		5.30	12.95			4.71	32.43

A subdivisão em subdomínios de Δt dos quatro modelos para a solução híbrida, em destaque, é apresentada na Figura 5.24. Analisando em conjunto com a Tabela 5.8, observa-se que a metodologia computou 5 subdomínios para os modelos 3 e

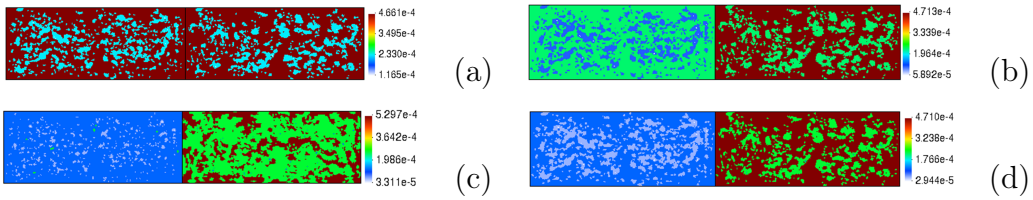


Figura 5.24: Subdomínios Δt do Exemplo 3 para *hib-adap/sub-ótima*, para o (a) modelo 1; (b) modelo 2; (c) modelo 3; e (d) modelo 4.

4. Além disso, ela apresentou os maiores subdomínios de Δt nos três modelos heterogêneos.

Na configuração homogênea, a metodologia *hib-adap/sub-ótima* gerou um subdomínio a menos em comparação com as outras metodologias *sub-ótima*. No entanto, o quarto subdomínio das demais metodologias continha apenas 0,01% dos elementos, indicando que sua influência prática na análise é mínima.

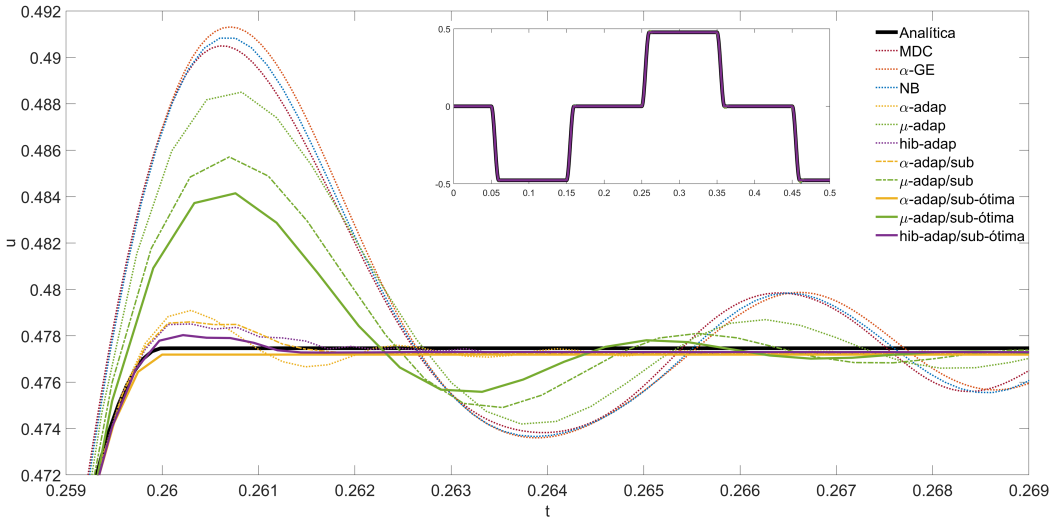


Figura 5.25: Resultados computados no tempo para todas as metodologias, considerando um ponto no meio da barra, Exemplo 3, modelo 1.

A Tabela 5.9 apresenta a performance de todas as metodologias para os quatro modelos analisados no Exemplo 3. Como esperado, a metodologia *hib-adap/sub-ótima* alcançou os melhores índices de acurácia e tempo de CPU para todos os modelos. Essa abordagem permite um melhor ajuste dos elementos em todas as configurações, mostrando-se uma ótima solução para lidar com configurações rígido-flexíveis.

Diferentemente dos exemplos anteriores, as metodologias *α-adap/sub-ótima* e *μ-adap/sub-ótima* não obtiveram resultados tão próximos aos da solução híbrida ótima (embora muito superiores as outras técnicas), tanto em termos de acurácia quanto de custo computacional, respectivamente. Neste exemplo, caracterizado por propriedades físicas e geométricas heterogêneas, observou-se um aumento na

Tabela 5.9: Performance das metodologias para o Exemplo 3.

Modelo	Método	$\Delta t_{\text{máx}}$ (10^{-4}s)	Valor relativo	Erro	Valor relativo	Tempo CPU (s)	Valor relativo
	MDC	0.87	1.11	0.00955	8.01	23.339	2.14
	α-GE	0.78	1.00	0.01012	8.49	26.038	2.39
	NB	1.64	2.08	0.00998	8.37	31.233	2.87
	α-adap	0.87	1.11	0.00301	2.53	23.705	2.18
	μ-adap	1.49	1.89	0.00682	5.72	16.778	1.54
1	hib-adap	1.66	2.11	0.00244	2.04	15.490	1.42
	α-adap/sub	3.50	4.44	0.00207	1.73	14.799	1.36
	μ-adap/sub	5.96	7.57	0.00599	5.03	12.252	1.12
	α-adap/sub-ótima	4.52	5.73	0.00177	1.48	13.298	1.22
	μ-adap/sub-ótima	7.71	9.78	0.00527	4.42	11.249	1.03
	hib-adap/sub-ótima	4.66	5.92	0.00119	1.00	10.899	1.00
	MDC	0.43	1.11	0.03287	13.06	27.034	2.25
	α-GE	0.39	1.00	0.03211	12.75	33.441	2.78
	NB	0.81	2.08	0.03110	12.35	38.140	3.17
	α-adap	0.43	1.11	0.01472	5.85	27.572	2.29
	μ-adap	0.74	1.89	0.02414	9.59	20.313	1.69
2	hib-adap	0.83	2.11	0.00654	2.60	18.216	1.52
	α-adap/sub	3.5	8.88	0.00472	1.87	17.260	1.44
	μ-adap/sub	2.98	7.57	0.02078	8.25	14.118	1.17
	α-adap/sub-ótima	2.25	5.73	0.00384	1.53	15.320	1.27
	μ-adap/sub-ótima	3.85	9.78	0.01825	7.25	13.543	1.13
	hib-adap/sub-ótima	4.71	11.96	0.00252	1.00	12.019	1.00
	MDC	0.29	1.11	0.05814	14.83	49.358	2.38
	α-GE	0.26	1.00	0.05967	15.22	58.165	2.80
	NB	0.54	2.08	0.05989	15.28	68.202	3.29
	α-adap	0.29	1.11	0.02081	5.31	49.644	2.39
	μ-adap	0.49	1.89	0.03272	8.35	38.115	1.84
3	hib-adap	0.55	2.11	0.01670	4.26	34.107	1.64
	α-adap/sub	2.33	8.88	0.00492	1.25	31.394	1.51
	μ-adap/sub	3.97	15.13	0.02885	7.36	26.143	1.26
	α-adap/sub-ótima	2.60	9.91	0.00410	1.05	28.147	1.36
	μ-adap/sub-ótima	4.48	17.07	0.02771	7.07	24.498	1.18
	hib-adap/sub-ótima	5.30	20.17	0.00392	1.00	20.744	1.00
	MDC	0.21	1.11	0.02782	11.24	68.013	2.37
	α-GE	0.19	1.00	0.02791	11.28	81.789	2.85
	NB	0.40	2.08	0.02795	11.29	94.990	3.31
	α-adap	0.21	1.11	0.01182	4.78	69.709	2.43
	μ-adap	0.37	1.89	0.01343	5.43	53.385	1.86
4	hib-adap	0.41	2.11	0.00667	2.70	48.333	1.68
	α-adap/sub	3.50	17.75	0.00319	1.29	43.655	1.52
	μ-adap/sub	5.96	30.27	0.00971	3.92	38.499	1.34
	α-adap/sub-ótima	2.26	11.47	0.00294	1.19	36.489	1.27
	μ-adap/sub-ótima	3.85	19.55	0.00881	3.56	32.182	1.12
	hib-adap/sub-ótima	4.71	23.91	0.00248	1.00	28.695	1.00

discrepância entre as metodologias, com erros relativos até 15 vezes maiores nas abordagens clássicas.

Por fim, as Figuras 5.25 a 5.28 exibem os resultados computados ao longo do tempo para todas as metodologias nos quatro modelos. Novamente, observa-se que as metodologias adaptativas demonstram uma rápida supressão das oscilações espúrias, enquanto, nas metodologias clássicas, essas oscilações persistem ao longo de toda a análise.

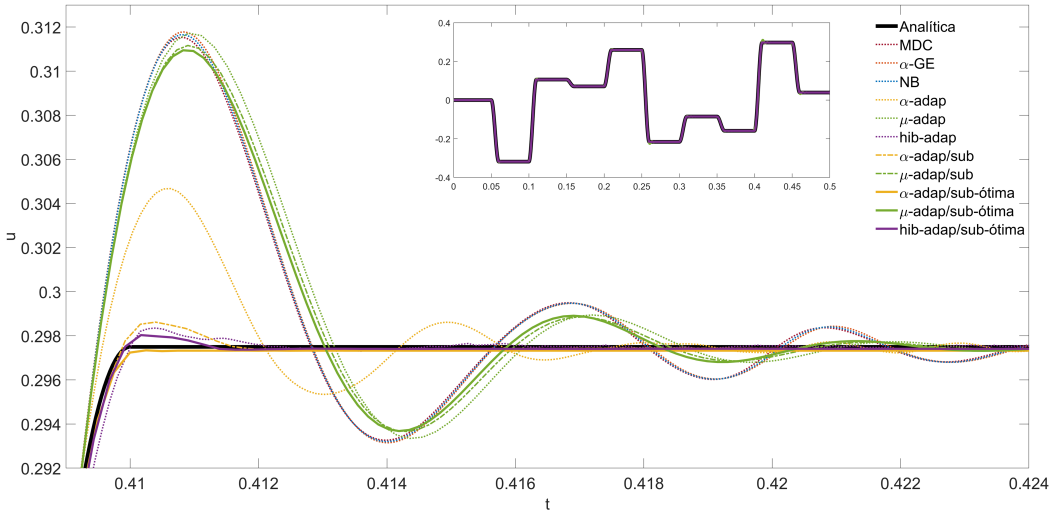


Figura 5.26: Resultados computados no tempo para todas as metodologias, considerando um ponto no meio da barra, Exemplo 3, modelo 2.

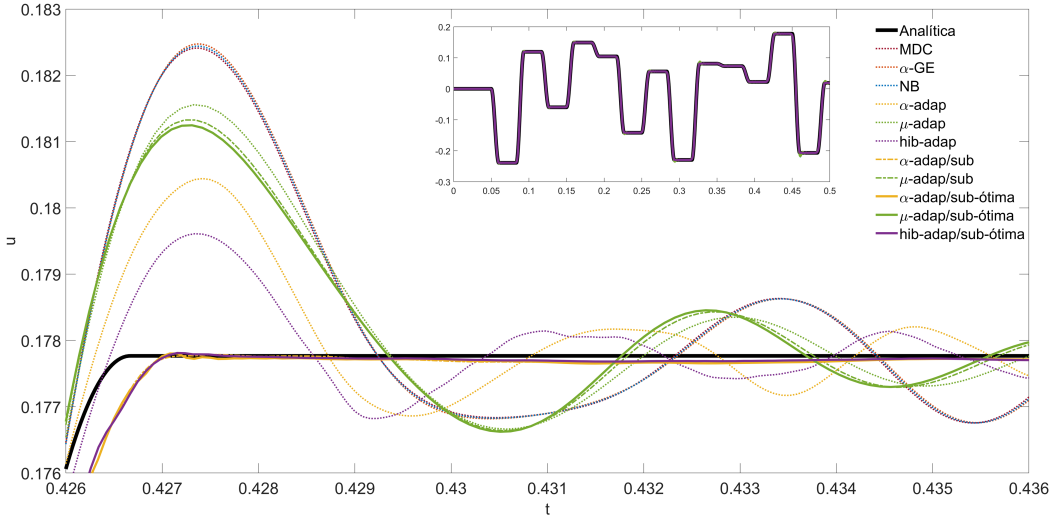


Figura 5.27: Resultados computados no tempo para todas as metodologias, considerando um ponto no meio da barra, Exemplo 3, modelo 4.

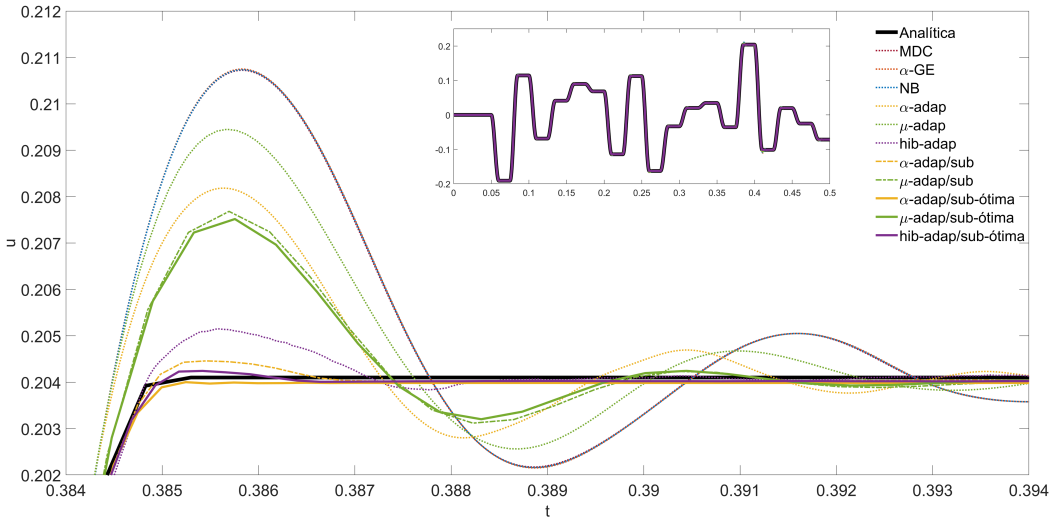


Figura 5.28: Resultados computados no tempo para todas as metodologias, considerando um ponto no meio da barra, Exemplo 3, modelo 4.

5.2 Exemplos sintéticos

Nos exemplos sintéticos realizados neste trabalho ([62–65]), a excitação aplicada aos modelos simulados foi definida por uma força impulsiva suavemente modulada no tempo, garantindo boa localidade temporal e conteúdo espectral concentrado. Essa força, inspirada em uma modificação da função de Ricker, é comumente empregada em análises transientes por apresentar características desejáveis tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência.

A expressão matemática da força impulsiva considerada é dada por:

$$f(t) = \text{mag} \cdot \left[2\pi^2 \left(\pi f_c (t - t_0)\right)^2 - 1\right] \cdot \exp\left[-\pi^2 \left(\pi f_c (t - t_0)\right)^2\right] \tag{5.2}$$

onde mag é a magnitude máxima da excitação aplicada; f_c representa a frequência de corte da função; e t_0 é o instante central da função, que define a posição do pulso (em geral, assumido implicitamente como $t_0 = 1/f_c$).

Para os testes apresentados, foram utilizados os valores $f_c = 0{,}1$ e mag $= 1000$. A aplicação dessa força ao longo do tempo gera uma excitação bem localizada, capaz de ativar as principais frequências de interesse do modelo. Além disso, por apresentar um pico bem definido e de rápido decaimento, essa função impulsiva contribui para evitar reflexões artificiais e efeitos de *aliasing* na análise numérica transiente.

Embora o MEF ofereça grande flexibilidade para lidar com malhas não estruturadas, com diferentes níveis de refinamento espacial e adaptação local, os modelos utilizados neste trabalho foram construídos utilizando discretizações espaciais estruturadas e uniformes por DF (distribuição regular de nós de modelos sintéticos de código aberto disponíveis na comunidade científica). Essa escolha, embora limite parcialmente a exploração de uma das principais vantagens do MEF, não compromete os resultados obtidos — pelo contrário, mesmo com essa particularidade, observa-se um desempenho computacional elevado e ganhos significativos em termos de acurácia.

As metodologias desenvolvidas e aplicadas demonstraram boa capacidade de adaptação às características desses modelos, apresentando comportamento robusto ao longo de todos os testes realizados. Isso evidencia que, apesar do uso de uma discretização espacial simples, os métodos propostos são capazes de extrair bons resultados, mantendo estabilidade numérica e precisão nas respostas.

O objetivo central deste trabalho, portanto, não é explorar ao máximo a versatilidade geométrica do MEF, mas sim evidenciar a ampla aplicabilidade da subciclagem automatizada em contextos variados. Mostra-se que a técnica é estável mesmo na presença de múltiplos subdomínios, sendo compatível com diferentes formulações explícitas e estruturas de malha. Assim, reforça-se seu potencial como uma ferramenta eficiente e robusta para análises transientes de propagação de ondas.

No exemplo elástico, modelo BP 2004 [65], foram inseridos nós adicionais na região correspondente ao domo salino, promovendo um maior refinamento local com o intuito de criar uma situação ainda mais crítica em termos de avaliar a estabilidade da metodologia em uso. Mesmo nesse cenário mais exigente, a subciclagem otimizada apresentou altíssima estabilidade e desempenho, comprovando a robustez da metodologia proposta. Ressalta-se, entretanto, que com uma malha construída de forma criteriosa segundo os princípios de uma boa discretização espaço-tempo — i.e., levando em conta o contrabalanceamento dos erros entre discretização espacial e discretização temporal, considerando as propriedades do meio —, é possível que o número de subdomínios fosse reduzido. Ainda assim, a aplicação da subciclagem continuaria sendo vantajosa, uma vez que o processo automatizado detectaria a viabilidade de aplicação e ajustaria os subdomínios conforme as condições locais.

Os casos sintéticos apresentados mostram que, mesmo em situações nas quais o usuário não possui experiência com o processo de geração de malhas balanceadas ou não tem acesso a ferramentas automatizadas de contrabalanceamento, a técnica de subciclagem otimizada oferece uma solução alternativa eficaz. Por meio de uma abordagem centrada na discretização temporal, torna-se possível compensar desequilíbrios espaciais da malha, garantindo estabilidade e eficiência na análise, sem exigir refinamentos manuais ou processos complexos de pré-processamento.

Como as malhas utilizadas neste trabalho foram originalmente concebidas para modelos baseados em DF, as propriedades físicas dos materiais — como densidade e módulos elásticos — estavam associadas aos nós da malha, e não aos elementos, como é usual nas formulações do MEF. Para compatibilizar essas informações com a estrutura de dados adotada nas implementações em MEF, foi necessário realizar um processo de interpolação, convertendo os dados nodais em propriedades definidas por elemento. Esse procedimento é comum em aplicações com malhas híbridas ou importadas, permitindo manter a consistência física do modelo sem comprometer a precisão dos resultados.

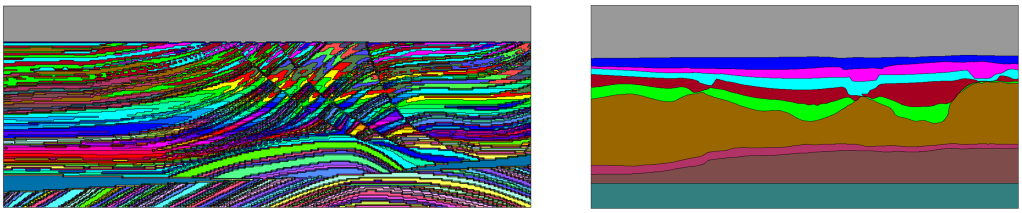
Por fim, todos os modelos numéricos considerados neste trabalho foram analisados com a presença de camadas PML, com o objetivo de simular condições de contorno não reflexivas e absorver adequadamente as ondas incidentes nas bordas do domínio. As dimensões dessas camadas foram definidas de forma a garantir sua efetividade sem comprometer significativamente o domínio físico de interesse. Especificamente, o tamanho das PMLs foi limitado a, no máximo, 6% da extensão longitudinal do modelo, assegurando uma boa relação entre precisão numérica e custo computacional.

As PMLs foram implementadas com amortecimento viscoso ativo, o que introduz dissipação local ao sistema. Para garantir a estabilidade dos métodos de integração explícita utilizados, aplicou-se um fator de segurança de 5% sobre o passo de tempo

crítico calculado com base na frequência máxima local de cada elemento. Essa medida conservadora permitiu acomodar os efeitos do amortecimento numérico e assegurar a estabilidade global da simulação. Nenhum tipo de instabilidade foi observado em todos os casos estudados, o que evidencia a eficácia da modelagem PML associada à subciclagem otimizada.

5.2.1 Geofísicos acústicos

O quarto exemplo aborda dois modelos acústicos sintéticos. O primeiro é uma extensão do modelo Marmousi (Figura 5.29a), desenvolvido por MARTIN et al. [62], com dimensões de 17 km de largura e 3,5 km de profundidade, abrangendo 199 camadas geológicas e uma camada de água com 450 m de profundidade. O segundo modelo, que cobre uma área de 16,8 km $\times$ 8 km, representa a região de Búzios (Figura 5.29b) [63], localizada no sudeste da Bacia de Santos, no Brasil, conhecida por seus importantes depósitos de pré-sal.



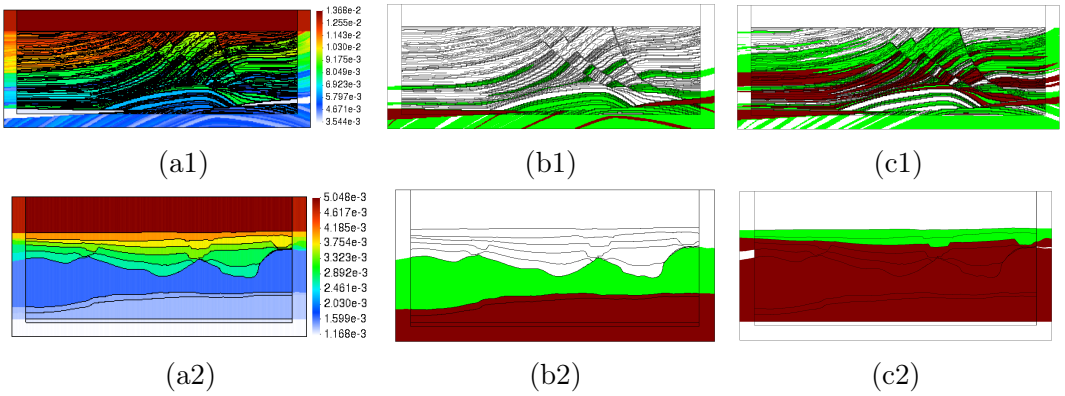
(a) (b)

Figura 5.29: Modelos acústicos sintéticos do Exemplo 4: (a) Marmousi (b) Buzios.

Originalmente, esses modelos foram gerados para análise utilizando o método das diferenças finitas (MDF). Isso implica que, além de serem malhas estruturadas com o mesmo espaçamento em x-y, eles possuem apenas as coordenadas nodais. Dessa forma, as conectividades do modelo foram criadas, e as informações nodais foram associadas aos respectivos elementos.

O modelo 1 possui uma malha composta por 224.731 nós e 223.672 elementos quadrangulares lineares, enquanto o modelo 2 apresenta uma malha com 4.864.312 elementos triangulares lineares. Ambos os modelos estão sujeitos a um pulso sísmico aplicado em sua superfície superior: no modelo 1, em $x = 8.500\,\mathrm{m}$, e no modelo 2, em $x = 8.400\,\mathrm{m}$. Em ambas as aplicações, camadas perfeitamente ajustadas (*Perfectly Matched Layers*, PMLs) são empregadas para evitar reflexões de ondas nas fronteiras inferior e horizontais do domínio discretizado. As espessuras dessas PMLs são de 800 m em ambos os modelos.

A Figura 5.30 apresenta os valores computados de Δt_e para os dois modelos acústicos, destacando também os subdomínios de tipo Ω gerados pelas metodologias *hib-adap* e *hib-adap/sub-ótima*. Ao analisar essas figuras em conjunto com



(a1) (b1) (c1)

(a2) (b2) (c2)

Figura 5.30: Valores computados do Exemplo 4, para (1) modelo 1 e (2) modelo 2: (a) Δt_e de cada elemento. (b) subdomínios de tipo de Ω para *hib-adap*; e (c) subdomínios de tipo de Ω para *hib-adap/sub-ótima*. (branco tipo-1; verde tipo-2 e vermelho tipo-3)

Tabela 5.10: Subdomínios de tipo de $\Omega_e^{\max}$ para o Exemplo 4.

Modelo	**Método**	Δt (10^{-3}s)	**Tipo 1**	**Tipo 2**	**Tipo 3**	**Total**
1	hib-adap	3.73	73.16	22.59	4.25	100
	hib-adap/sub-ótima	3.43	12.29	16.61	2.72	31.62
		6.85	29.81	20.73	17.84	68.38
		Total	42.10	37.34	20.56	100
2	hib-adap	1.23	48.12	23.34	28.54	100
	hib-adap/sub-ótima	0.64	12.45	0.00	0.00	12.45
		1.29	0.29	0.00	39.43	39.72
		2.59	25.47	8.62	13.74	47.83
		Total	38.21	8.62	53.17	100

a Tabela 5.10, observa-se que a metodologia *hib-adap/sub-ótima* resultou em uma subdivisão mais equilibrada entre os subdomínios de tipo Ω. Diferentemente dos exemplos analíticos de pequena escala, a análise otimizada apresentou uma maior quantidade de elementos do tipo 1, que são computacionalmente mais eficientes para processamento.

A Figura 5.31 apresenta os subdomínios de Δt dos modelos analisados para as metodologias *sub-ótima*, objetos de estudo deste trabalho, enquanto a Tabela 5.11 mostra a proporção de elementos em cada subdomínio. Neste exemplo, as metodologias *μ-adap/sub-ótima* obtiveram os maiores valores de Δt por subdomínio. Isso ocorreu porque, como já relatado, a metodologia *hib-adap/sub-ótima* apresentou uma maior quantidade de elementos do tipo 1, o que resultou em um Δt superior ao da *α-adap/sub-ótima* , mas ainda abaixo do alcançado pela *μ-adap/sub-ótima*.

Apesar disso, a metodologia *hib-adap/sub-ótima* teve a maior concentração de elementos no subdomínio com o maior Δt.

Embora a *μ-adap/sub-ótima* tenha registrado os maiores valores de Δt_i por sub-

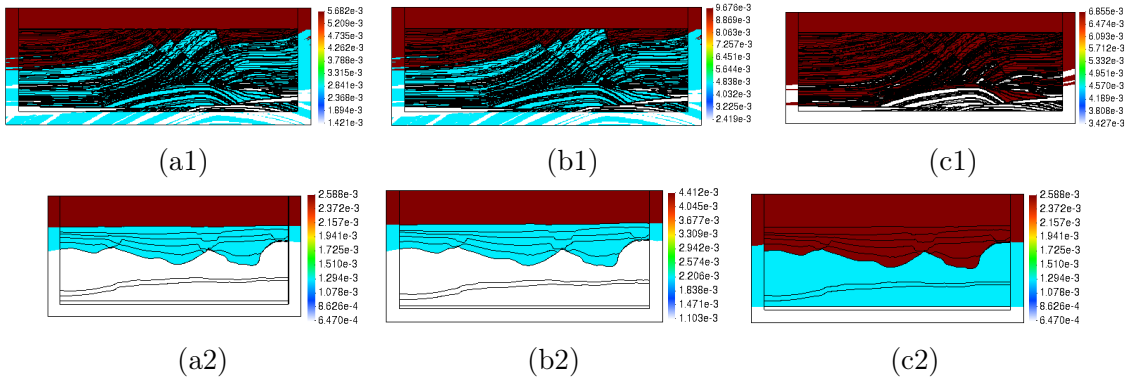


Figura 5.31: Subdomínios de Δt do Exemplo 4, para (1) modelo 1 e (2) modelo 2: (a) *α-adap/sub-ótima*; (b) *μ-adap/sub-ótima*; e (c) *hib-adap/sub-ótima*

Tabela 5.11: Subdomínios de Δt para o Exemplo 4.

Modelo	**Método**	Δt (10^{-3}s)	%	**Modelo**	**Método**	Δt (s)	%
1	α-adap/sub	1.96	36.43	2	α-adap/sub	0.64	51.88
		3.93	63.57			1.29	22.65
		-	-			2.59	25.47
	μ-adap/sub	3.35	36.43		μ-adap/sub	1.10	51.88
		6.70	63.57			2.21	22.65
		-	-			4.41	25.47
	α-adap/sub-ótima	1.42	11.89		α-adap/sub-ótima	0.63	50.05
		2.84	52.72			1.27	23.69
		5.68	35.39			2.54	26.26
	μ-adap/sub-ótima	2.42	11.88		μ-adap/sub-ótima	1.08	50.01
		4.84	52.73			2.16	22.67
		9.68	35.39			4.32	23.32
	hib-adap/sub-ótima	3.43	31.62		hib-adap/sub-ótima	0.64	12.45
		6.85	68.38			1.29	39.72
		-	-			2.59	47.83

domínio, isso não se traduz diretamente em melhor tempo de CPU. De fato, como mostrado na Tabela 5.12, a *hib-adap/sub-ótima* obteve a melhor performance, seguida pela *μ-adap/sub-ótima* .Considerando a grande escala deste exemplo, observa-se que as metodologias *sub-ótima* resolveram a análise até 3,5 vezes mais rápido do que as metodologias clássicas. Em termos absolutos, isso representa uma diferença de mais de 6.000 segundos, como detalhado na Tabela 5.12.

O campo acústico computado para os dois modelos é apresentado nas Figuras 5.32 e 5.33, comparando a metodologia clássica *α-GE* , que obteve os melhores resultados nas análises analíticas, com a metodologia adaptativa *hib-adap/sub-ótima* , que demonstrou o melhor desempenho geral. Observa-se que a *hib-adap/sub-ótima* produziu resultados similares aos da *α-GE* , porém com oscilações espúrias reduzidas nas imagens, evidenciando de forma mais clara os modos importantes de média e baixa frequência.

Tabela 5.12: Performance das metodologias para o Exemplo 4.

Modelo	**Método**	$\Delta t_{\text{máx}}$ (10^{-3}s)	**Valor relativo**	**Tempo CPU (s)**	**Valor relativo**
	MDC	1.96	1.11	187.492	2.61
	α-GE	1.77	1.00	214.880	2.99
	NB	3.68	2.08	266.110	3.71
	α-adap	1.96	1.11	191.442	2.67
	μ-adap	3.35	1.89	142.755	1.99
1	hib-adap	3.73	2.11	103.085	1.44
	α-adap/sub	3.92	2.22	124.578	1.74
	μ-adap/sub	6.69	3.78	96.226	1.34
	α-adap/sub-ótima	5.68	3.21	108.061	1.51
	μ-adap/sub-ótima	9.67	5.47	73.733	1.03
	hib-adap/sub-ótima	6.85	3.87	71.769	1.00
	MDC	0.64	1.11	7601.189	2.69
	α-GE	0.58	1.00	8092.333	2.86
	NB	1.21	2.08	9929.014	3.52
	α-adap	0.64	1.11	7645.049	2.71
	μ-adap	1.10	1.89	5383.657	1.91
2	hib-adap	1.23	2.11	4309.350	1.53
	α-adap/sub	2.58	4.44	4012.131	1.42
	μ-adap/sub	4.41	7.57	2967.912	1.05
	α-adap/sub-ótima	2.54	4.35	3838.580	1.36
	μ-adap/sub-ótima	4.32	7.42	2942.725	1.04
	hib-adap/sub-ótima	2.59	4.44	2824.662	1.00

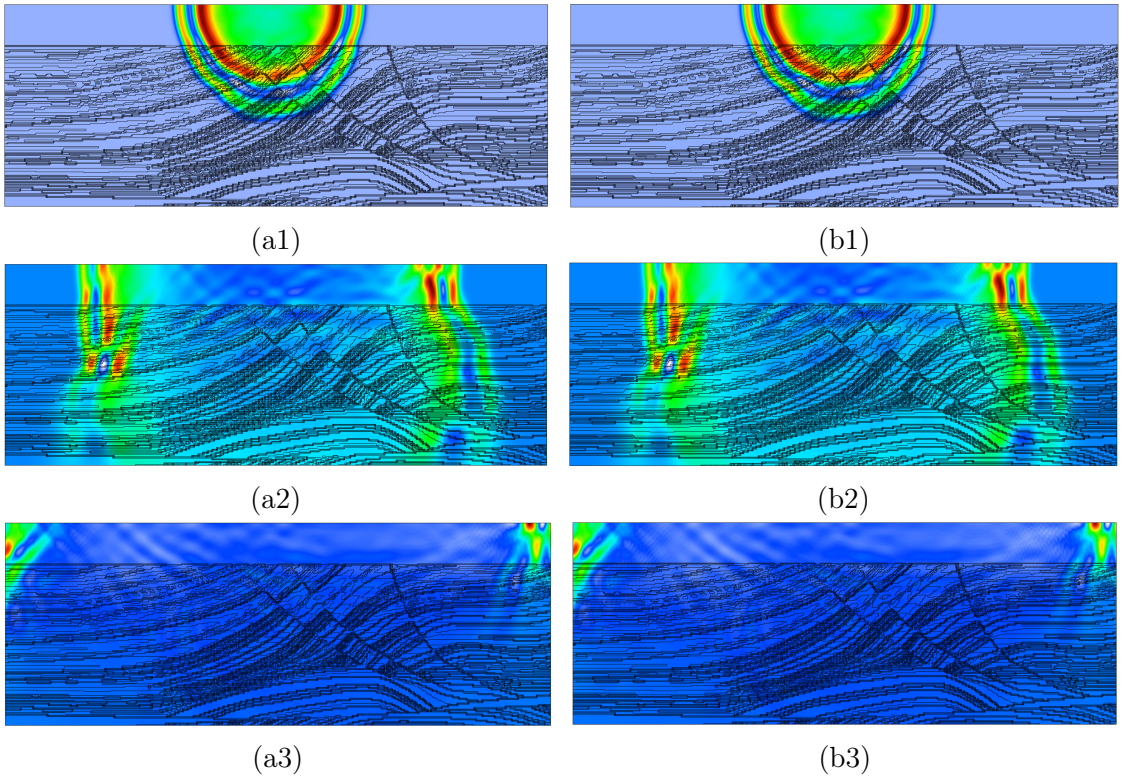


Figura 5.32: Campo acústico p computado ao longo do modelo geofísico acústico 1 no tempo (1) 1s; (2) 2s e (3) 3s: (a) α-*GE*; e (b) *hib-adap/sub-ótima*

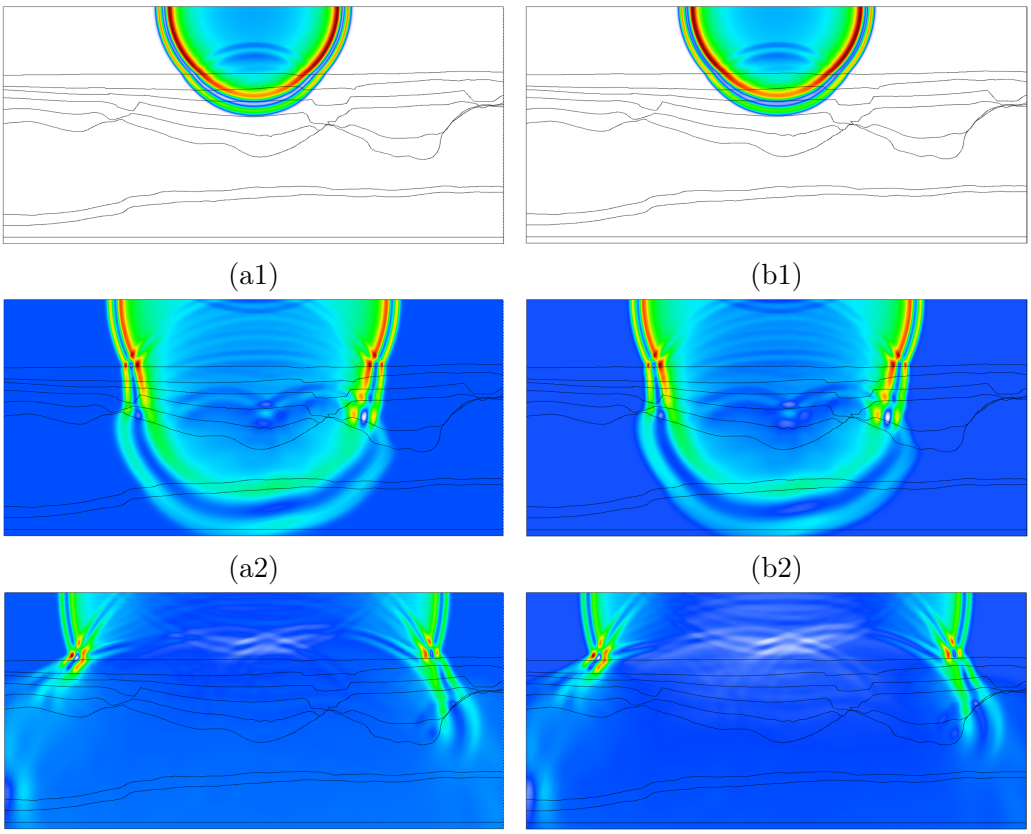
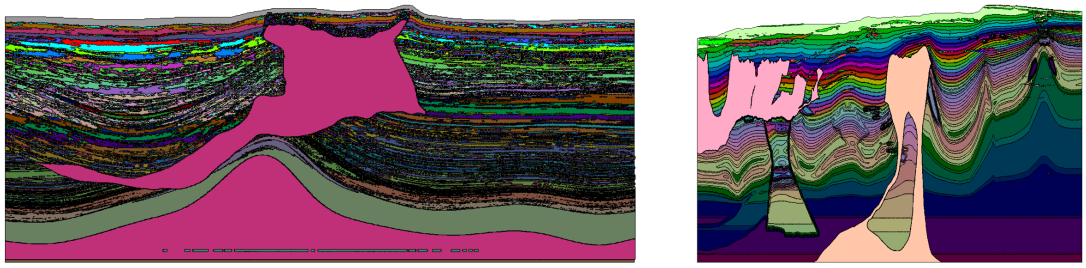


Figura 5.33: Campo acústico p computado ao longo do modelo geofísico acústico 2 no tempo (1) 2s; (2) 3s e (3) 4s: (a) α-GE; e (b) *hib-adap/sub-ótima*

5.2.2 Geofísicos elásticos

O quinto exemplo trata de dois modelos elásticos sintéticos. O primeiro modelo descreve uma aplicação elastodinâmica e é comumente conhecido como o modelo 2DEW (ver Figura 5.34a) [64]. Ele reproduz formações salinas encontradas no Golfo do México. O segundo modelo considerado, denominado modelo BP 2004 (ver Figura 5.34b) [65], apresenta uma representação composta que integra diversas seções geológicas de diferentes regiões, incluindo o oeste e centro-leste do Golfo do México, além de elementos observados nos mares Cáspio, do Norte e de Trinidad. Esse modelo elastodinâmico incorpora uma estratigrafia complexa, proporcionando uma descrição detalhada das características do subsolo.



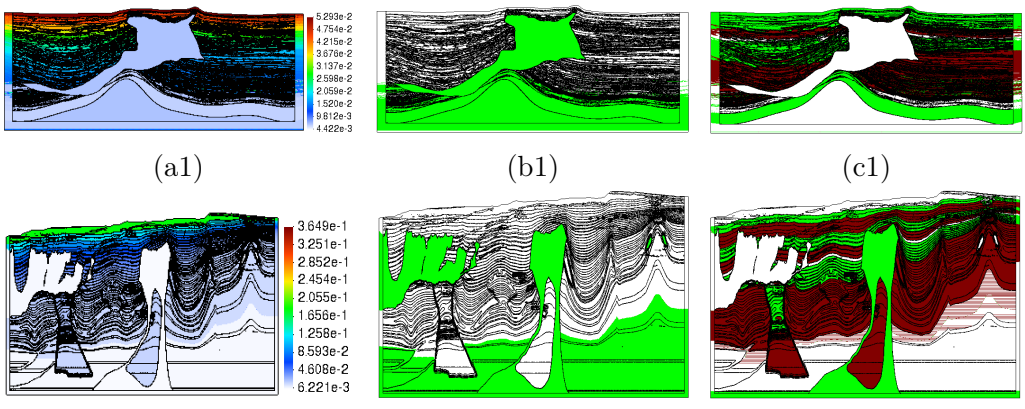
(a) (b)

Figura 5.34: Modelos elásticos sintéticos do Exemplo 5: (a) 2DEW (b) BP 2004.

As distribuições utilizadas possuem três arquivos binários correspondentes à densidade, à velocidade da onda P (dilatação) e à velocidade da onda S (cisalhante). Os conjuntos de dados foram inicialmente desenvolvidos para o MDF e, por esse motivo, além de utilizar uma malha estruturada com espaçamentos uniformes entre os nós, não apresentavam conectividades. Para melhor adaptação ao MEF e à subdivisão de subdomínios, foi realizado um tratamento na malha, no qual as camadas com $V_p > 4300\,\mathrm{m/s}$ mantiveram um refinamento maior, enquanto as demais tiveram seu número de nós reduzido.

O primeiro modelo, que representa uma região de 35×15 km, é discretizado por meio de uma malha composta por 717.139 elementos triangulares lineares e é excitado por uma força aplicada em sua superfície superior, na posição $x = 17.440$ m. O segundo modelo, que se estende por uma área de 67.5×46 km, é discretizado com uma malha composta por 2.574.204 elementos triangulares lineares e é excitado por uma força aplicada em $x = 33.750$ m. Em ambas as aplicações, foram utilizadas camadas perfeitamente ajustadas (PMLs) com espessura de 1 km.

A Figura 5.35 apresenta os valores computados de Δt_e para os dois modelos elásticos, destacando também os subdomínios do tipo Ω gerados pelas metodologias *hib-adap* e *hib-adap/sub-ótima*. Ao analisar essas figuras em conjunto com a Tabela 5.13, observa-se que a metodologia *hib-adap/sub-ótima* resultou em uma subdivisão



(a1) (b1) (c1)

(a2) (b2) (c2)

Figura 5.35: Valores computados do Exemplo 5, para (1) modelo 1 e (2) modelo 2: (a) Δt_e de cada elemento. (b) subdomínios de tipo de Ω para *hib-adap*; e (c) subdomínios de tipo de Ω para *hib-adap/sub-ótima*. (branco tipo-1; verde tipo-2 e vermelho tipo-3)

mais equilibrada entre os subdomínios do tipo Ω. Em ambos os modelos, a otimização computou aproximadamente 55% dos elementos como sendo do tipo 1. Esse resultado é particularmente relevante ao considerar o segundo modelo, que possui mais de 5 milhões de graus de liberdade a serem calculados. Além disso, a metodologia *hib-adap/sub-ótima* avançou com o dobro de elementos do tipo 1 em comparação com *hib-adap*, evidenciando sua eficiência na distribuição dos subdomínios.

Tabela 5.13: Subdomínios de tipo de $\Omega_e^{\max}$ para o Exemplo 5.

Modelo	**Método**	Δt (10^{-2}s)	**Tipo 1**	**Tipo 2**	**Tipo 3**	**Total**
1	hib-adap	0.46	23.1	76.76	0.14	100
	hib-adap/sub-ótima	0.35	53.59	18.74	0.01	72.34
		0.70	0.45	1.25	4.58	6.28
		1.41	0.74	4.92	8.99	14.65
		2.82	0.00	4.47	2.26	6.73
		Total	54.78	29.38	15.84	100
2	hib-adap	0.62	23.1	76.75	0.15	100
	hib-adap/sub-ótima	0.43	51.85	18.41	0.00	70.26
		0.87	1.33	0.08	1.05	2.46
		1.75	0.35	2.86	15.6	18.81
		3.50	0.00	1.56	1.31	2.87
		7.01	1.82	1.42	2.36	5.6
		Total	55.35	24.33	20.32	100

A Figura 5.36 apresenta os subdomínios de Δt dos modelos analisados para as metodologias *sub-ótima*. Em conjunto, a Tabela 5.14 exibe a proporção de elementos em cada subdomínio. Neste exemplo, as metodologias *μ-adap/sub-ótima* novamente obtiveram os maiores valores de Δt_i por subdomínio. Esse resultado ocorreu por-

que, conforme já relatado, a metodologia *hib-adap/sub-ótima* apresentou uma maior quantidade de elementos do tipo 1, resultando em um Δt superior ao da *α-adap/sub-ótima* , mas ainda inferior ao alcançado pela *μ-adap/sub-ótima* . No entanto, a metodologia *hib-adap/sub-ótima* concentrou a maior quantidade de elementos no subdomínio com o maior Δt, superando 5% dos elementos, o que evidencia sua eficiência. Em contraste, as metodologias *μ-adap/sub-ótima* e *α-adap/sub-ótima* registraram menos de 2% de elementos em seus respectivos subdomínios de maior Δt.

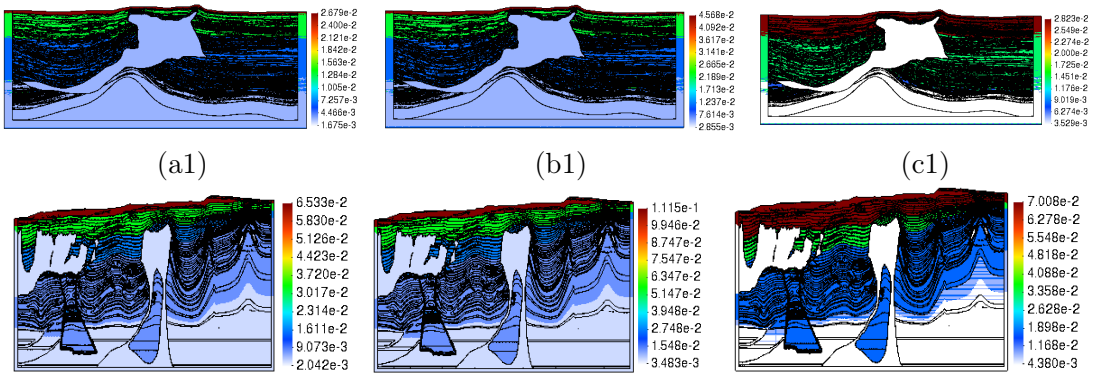


Figura 5.36: Subdomínios de Δt do Exemplo 5, para (1) modelo 1 e (2) modelo 2: (a) *α-adap/sub-ótima*; (b) *μ-adap/sub-ótima*; e (c) *hib-adap/sub-ótima*

Assim como nos exemplos acústicos sintéticos, embora a metodologia *μ-adap/sub-ótima* tenha apresentado os maiores valores de Δt_i por subdomínio, isso não resultou em um menor tempo de CPU. Conforme ilustrado na Tabela 5.15, a abordagem *hib-adap/sub-ótima* demonstrou o melhor desempenho computacional, enquanto a *μ-adap/sub-ótima* teve um custo computacional 25% e 9% superior para os dois modelos, respectivamente.

Dada a escala considerável destes exemplos, percebe-se que as metodologias *sub-ótima* reduziram o tempo de solução em até 4.3 vezes em comparação com as abordagens clássicas. Em termos práticos, essa otimização representou uma economia superior a 1000 segundos, como evidenciado na Tabela 5.15.

As Figuras 5.37 e 5.38 ilustram o módulo dos deslocamentos computado para ambos os modelos, permitindo uma comparação entre a metodologia clássica *α-GE* , que apresentou os melhores resultados nas análises analíticas, entre os clássicos, e a metodologia adaptativa *hib-adap/sub-ótima* , que obteve o melhor desempenho global. Nota-se que a abordagem *hib-adap/sub-ótima* gerou resultados equivalentes aos da *α-GE* , porém com uma atenuação significativa das oscilações espúrias, tornando mais nítida a identificação dos modos relevantes de média e baixa frequência nas imagens.

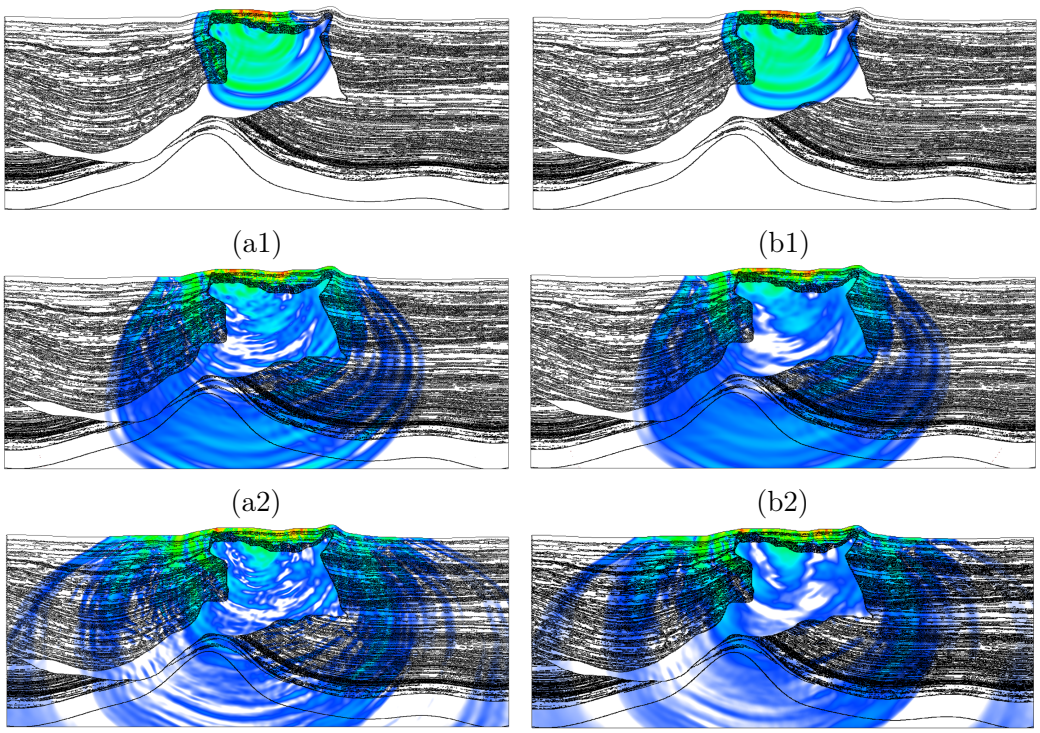


Figura 5.37: Módulo dos deslocamentos computado ao longo do modelo geofísico elástico 1 no tempo: (1) 2s; (2) 4s e (3) 6s: (a) α-*GE*; e (b) *hib-adap/sub-ótima*

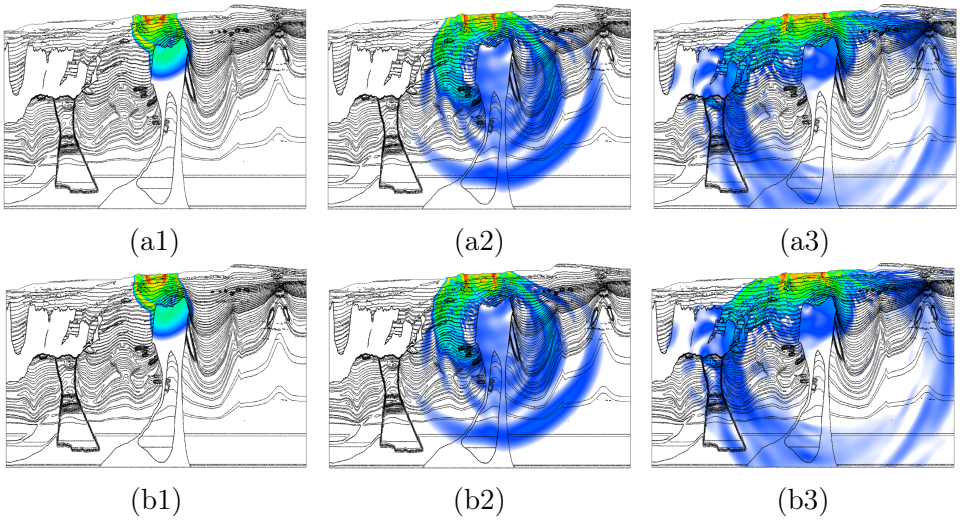


Figura 5.38: Módulo dos deslocamentos computado ao longo do modelo geofísico elástico 2 no tempo: (1) 10s; (2) 20s e (3) 25s: (a) α-*GE*; e (b) *hib-adap/sub-ótima*

Tabela 5.14: Subdomínios de Δt para o Exemplo 5.

Modelo	**Método**	Δt (10^{-2}s)	%	**Modelo**	**Método**	Δt (s)	%
1	α-adap/sub	0.24	76.91	2	α-adap/sub	0.32	71.32
		0.49	10.54			0.65	17.88
		0.98	8.08			1.31	4.13
		1.96	4.47			2.62	3.43
		-	-			5.24	3.23
		-	-			10.5	0.01
	μ-adap/sub	0.41	76.91		μ-adap/sub	0.55	71.32
		0.83	10.54			1.12	17.88
		1.67	8.08			2.23	4.13
		3.34	4.47			4.47	3.43
		-	-			8.93	3.23
		-	-			17.9	0.01
	α-adap/sub-ótima	0.16	0.15		α-adap/sub-ótima	0.20	0.03
		0.33	78.01			0.40	71.35
		0.67	13.99			0.81	19.39
		1.34	6.93			1.63	3.07
		2.68	0.92			3.27	4.34
		-	-			6.53	1.82
	μ-adap/sub-ótima	0.28	0.14		μ-adap/sub-ótima	0.34	0.03
		0.57	78.01			0.69	71.34
		1.14	13.99			1.39	19.39
		2.28	6.93			2.79	3.07
		4.57	0.93			5.57	4.33
		-	-			11.1	1.84
	hib-adap/sub-ótima	0.35	72.34		hib-adap/sub-ótima	0.43	70.26
		0.70	6.28			0.87	2.46
		1.41	14.65			1.75	18.81
		2.82	6.73			3.50	2.87
		-	-			7.01	5.60

Tabela 5.15: Performance das metodologias para o Exemplo 5.

Modelo	**Método**	$\Delta t_{\text{máx}}$ (10^{-2}s)	**Valor relativo**	**Tempo CPU (s)**	**Valor relativo**
	MDC	0.24	1.11	917.96	2.64
	α-GE	0.22	1.00	1061.76	3.05
	NB	0.45	2.08	1502.74	4.32
	α-adap	0.24	1.11	915.21	2.63
	μ-adap	0.41	1.89	750.25	2.16
1	hib-adap	0.46	2.11	732.64	2.11
	α-adap/sub	1.96	8.88	703.30	2.02
	μ-adap/sub	3.34	15.13	567.34	1.63
	α-adap/sub-ótima	2.68	12.13	589.68	1.69
	μ-adap/sub-ótima	4.57	20.69	434.61	1.25
	hib-adap/sub-ótima	2.82	12.79	348.02	1.00
	MDC	0.32	1.11	6217.81	2.18
	α-GE	0.29	1.00	6810.65	2.39
	NB	0.61	2.08	9154.43	3.21
	α-adap	0.32	1.11	6268.30	2.20
	μ-adap	0.55	1.89	4918.37	1.72
2	hib-adap	0.62	2.11	4722.96	1.65
	α-adap/sub	10.5	35.51	3865.01	1.35
	μ-adap/sub	17.9	60.54	3425.26	1.20
	α-adap/sub-ótima	6.53	22.14	3625.26	1.27
	μ-adap/sub-ótima	11.1	37.77	3123.46	1.09
	hib-adap/sub-ótima	7.01	23.75	2853.84	1.00

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho, foram desenvolvidas metodologias adaptativas de integração explícita no tempo, incorporando técnicas otimizadas de subciclagem, cujo desempenho foi avaliado por meio de diversos modelos teóricos e aplicados à propagação de ondas. Os resultados evidenciaram avanços relevantes em termos de eficiência computacional, precisão e flexibilidade, com destaque para as formulações α-*adaptativo*, μ-*adaptativo* e *híbrido-adaptativo*, além da estratégia de *subciclagem otimizada*. A aplicação dessas abordagens mostrou impacto expressivo na qualidade e no desempenho das soluções numéricas, sobretudo em problemas geofísicos de alta complexidade, com potencial direto de aplicação na indústria de Petróleo e Gás.

Os resultados obtidos evidenciaram que as formulações adaptativas propostas possuem vantagens significativas sobre os esquemas clássicos, permitindo melhorias substanciais no desempenho computacional e na qualidade da solução numérica. As principais contribuições podem ser resumidas nos seguintes aspectos:

(i) **Tratamento eficaz da dissipação algorítmica**: as metodologias adaptativas garantiram um controle aprimorado das oscilações espúrias em altas frequências, preservando a precisão dos modos de baixa frequência sem comprometer a estabilidade numérica.

(ii) **Formulações explícitas auto-iniciantes**: as metodologias empregam relações de recorrência simples e de passo único, o que a torna naturalmente auto-inicializável e de fácil implementação. Seus projetos garantem uma execução totalmente automatizada, sem necessidade de conhecimentos adicionais ou intervenções por parte do usuário.

(iii) **Flexibilidade na seleção de parâmetros de integração temporal**: a utilização local de parâmetros adaptativos de integração no tempo, juntamente com valores otimizados de passo de tempo, permite uma abordagem altamente personalizada, garantindo cálculos precisos e eficientes, ao mesmo tempo que minimiza o amortecimento indesejado em modos críticos de alta frequência.

(iv) **Limites de estabilidade ampliados**: observou-se um aumento significativo na estabilidade numérica (μ-*adaptativo* e *híbrido-adaptativo*), com ganhos de até duas vezes em relação ao Método das Diferenças Centrais (MDC), resultando em melhor desempenho e maior eficiência na simulação de fenômenos transientes complexos.

(v) **Integração otimizada com subciclagem adaptativa**: a abordagem híbrida entre as técnicas adaptativas e a subciclagem permitiu reduzir substancialmente o custo computacional, mantendo a precisão dos resultados em problemas de alta complexidade.

A análise dos três exemplos analíticos demonstrou a robustez e a precisão das formulações adaptativas propostas. Em particular, observamos que os métodos desenvolvidos foram capazes de capturar corretamente as soluções esperadas, mesmo em regimes onde os esquemas tradicionais apresentariam dificuldades, como na presença de descontinuidades na solução ou de oscilações espúrias. Além disso, os testes comprovaram que a subdivisão em passos de tempo permitiu um controle eficiente da dissipação numérica e da estabilidade, garantindo que as soluções obtidas fossem não apenas mais precisas, mas também computacionalmente viáveis.

A aplicação da metodologia de subciclagem otimizada demonstrou ser especialmente vantajosa em cenários com grande heterogeneidade no domínio, como observado nos modelos acústicos e elastodinâmicos sintéticos. Para otimizar o desempenho computacional, foi utilizado um algoritmo de otimização genética para definir automaticamente subdomínios que maximizam a eficiência da integração temporal. Esse processo minimizou o impacto de regiões altamente rígidas, que de outra forma imporiam passos de tempo extremamente reduzidos ao modelo completo, tornando a solução mais eficiente.

Do ponto de vista das aplicações práticas, os resultados deste estudo possuem grande relevância para a indústria de petróleo e gás, especialmente na análise sísmica voltada para a caracterização de reservatórios subterrâneos. O aprimoramento dos métodos de integração temporal e subciclagem demonstrou ser capaz de reduzir drasticamente o tempo de processamento sem perda significativa de precisão (na verdade, aumentando a acurácia, como demonstrado nos exemplos analíticos). Isso torna viáveis simulações em larga escala que exigem alto desempenho computacional, contribuindo diretamente para o avanço das técnicas numéricas aplicadas à modelagem computacional.

Os resultados deste estudo também evidenciaram que a metodologia de subciclagem otimizada pode ser integrada de forma eficiente a outras técnicas avançadas de modelagem numérica, como a implementação de camadas absorventes perfeitamente adaptadas (PML) para o amortecimento de ondas em contornos artificiais. A

compatibilidade entre essas abordagens revelou-se vantajosa, uma vez que a subciclagem permite o refinamento local da solução em regiões críticas sem comprometer o desempenho da absorção proporcionado pelo PML . Tal característica é particularmente relevante em simulações geofísicas de alta fidelidade, nas quais a combinação de diferentes estratégias numéricas é essencial para alcançar soluções mais precisas, estáveis e com maior eficiência computacional.

Como desdobramento natural desta pesquisa, propõe-se extensões da metodologia de subciclagem otimizada para aplicações ainda mais desafiadoras, como a Migração Reversa no Tempo (RTM) e a Inversão de Forma de Onda Completa (FWI), técnicas fundamentais na indústria de petróleo e gás para imageamento sísmico de alta resolução e caracterização de reservatórios. Essas aplicações envolvem elevado desempenho computacional, sendo ambientes ideais para a aplicação das estratégias desenvolvidas. Além disso, a generalização da abordagem para simulações 3D representa um passo relevante, permitindo explorar sua robustez em geometrias mais complexas e realistas. Outro caminho promissor é a integração com métodos híbridos , nos quais diferentes regiões do modelo serão implícitas e explícitas. A subciclagem otimizada, com sua natureza flexível e automatizada, mostra-se uma ferramenta altamente compatível para esse tipo de acoplamento, contribuindo para a construção de modelos computacionais mais eficientes, estáveis e adaptáveis às necessidades específicas de cada aplicação.

Conclui-se, portanto, que as formulações propostas representam um avanço significativo na solução de equações diferenciais transientes, fornecendo ferramentas computacionais mais eficazes e flexíveis para a modelagem numérica de sistemas físicos complexos. O impacto dessas contribuições reforça a importância do desenvolvimento contínuo de metodologias adaptativas e subciclagem avançada, promovendo a evolução das técnicas de integração temporal aplicadas a problemas geofísicos e outras áreas da mecânica computacional.

Referências Bibliográficas

[1] HULBERT, G. M., CHUNG, J. "Explicit time integration algorithms for structural dynamics with optimal numerical dissipation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 137, n. 2, pp. 175–188, 1996. ISSN: 0045-7825. doi: https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01036-5.

[2] NOH, G., BATHE, K.-J. "An explicit time integration scheme for the analysis of wave propagations", *Computers & Structures*, v. 129, pp. 178–193, 2013. ISSN: 0045-7949. doi: https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2013.06.007.

[3] SOARES JR, D. "A model/solution-adaptive explicit-implicit time-marching technique for wave propagation analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 119, n. 7, pp. 590–617, 2019.

[4] SOARES JR, D., PINTO, L. R., MANSUR, W. J. "A truly-explicit time-marching formulation for elastodynamic analyses considering locally-adaptive time-integration parameters and time-step values", *International Journal of Solids and Structures*, v. 271, pp. 112260, 2023.

[5] SOARES JR, D. "An improved adaptive formulation for explicit analyses of wave propagation models considering locally-defined self-adjustable time-integration parameters", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 399, pp. 115324, 2022.

[6] HUGHES, T. J. *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Courier Corporation, 2003.

[7] BATHE, K.-J. "Finite element procedures prentice-hall", *New Jersey*, v. 1037, n. 1, pp. 1–6, 1996.

[8] ZIENKIEWICZ, O., XIE, Y. "A simple error estimator and adaptive time stepping procedure for dynamic analysis", *Earthquake engineering & structural dynamics*, v. 20, n. 9, pp. 871–887, 1991.

[9] HULBERT, G. M., JANG, I. "Automatic time step control algorithms for structural dynamics", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 126, n. 1-2, pp. 155–178, 1995.

[10] CHOI, C.-K., CHUNG, H.-J. "Error estimates and adaptive time stepping for various direct time integration methods", *Computers & structures*, v. 60, n. 6, pp. 923–944, 1996.

[11] BELYTSCHKO, T., SMOLINSKI, P., LIU, W. K. "Stability of multi-time step partitioned integrators for first-order finite element systems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 49, n. 3, pp. 281–297, 1985.

[12] PINTO, L. R., SOARES JR, D., MANSUR, W. J. "Elastodynamic wave propagation modelling in geological structures considering fully-adaptive explicit time-marching procedures", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, v. 150, pp. 106962, 2021.

[13] SOARES JR, D., SALES, I. D. S., PINTO, L. R., et al. "A Study on Adaptive Implicit–Explicit and Explicit–Explicit Time Integration Procedures for Wave Propagation Analyses". In: *Acoustics*, v. 6, pp. 651–680. MDPI, 2024.

[14] NAKSHATRALA, P. B., NAKSHATRALA, K., TORTORELLI, D. A. "A time-staggered partitioned coupling algorithm for transient heat conduction", *International journal for numerical methods in engineering*, v. 78, n. 12, pp. 1387–1406, 2009.

[15] SOARES JR, D. "A novel family of explicit time marching techniques for structural dynamics and wave propagation models", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 311, pp. 838–855, 2016.

[16] SOARES JR, D. "A novel single-step explicit time-marching procedure with improved dissipative, dispersive and stability properties", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 386, pp. 114077, 2021.

[17] ZHANG, H., XING, Y. "Two novel explicit time integration methods based on displacement-velocity relations for structural dynamics", *Computers & Structures*, v. 221, pp. 127–141, 2019.

[18] KIM, W. "An accurate two-stage explicit time integration scheme for structural dynamics and various dynamic problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 120, n. 1, pp. 1–28, 2019.

[19] LOUREIRO, F., SILVA, J., MANSUR, W. "An explicit time-stepping technique for elastic waves under concepts of Green's functions computed locally by the FEM", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 50, pp. 381–394, 2015.

[20] YUAN, P., LI, D., CAI, C., et al. "A novel decoupling dynamic method with third-order accuracy and controllable dissipation", *Computers & Structures*, v. 249, pp. 106512, 2021.

[21] WEN, W., DUAN, S., YAN, J., et al. "A quartic B-spline based explicit time integration scheme for structural dynamics with controllable numerical dissipation", *Computational Mechanics*, v. 59, pp. 403–418, 2017.

[22] LIU, T., HUANG, F., WEN, W., et al. "An improved higher-order explicit time integration method with momentum corrector for linear and nonlinear dynamics", *Applied Mathematical Modelling*, v. 98, pp. 287–308, 2021.

[23] SANTOS, M., DO CARMO, E. D., JUNIOR, E. F., et al. "A scheme for the analysis of primal stationary boundary value problems based on fe/fd multi-method", *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 209, pp. 103809, 2022.

[24] KAKHKI, M. K., PIÑA-FLORES, J., MANSUR, W. J., et al. "Soil characterization of Babol City using single-station ambient seismic noise method", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, v. 177, pp. 108359, 2024.

[25] SOUZA, Y. P., LOUREIRO, F. S., MANSUR, W. J., et al. "A time-domain POD approach based on numerical implicit and explicit Green's functions for 3D elastodynamic analysis", *Computers & Structures*, v. 286, pp. 106973, 2023. doi: 10.1016/j.compstruc.2023.106973.

[26] SOARES JR, D., SALES, I. S., PINTO, L. R., et al. "A Study on Adaptive Implicit–Explicit and Explicit–Explicit Time Integration Procedures for Wave Propagation Analyses", *Acoustics*, v. 6, n. 1, pp. 172–192, 2024. doi: 10.3390/acoustics6010011.

[27] VALENTE, A., LOUREIRO, F., DI BARTOLO, L., et al. "Computer simulation of hyperthermia with nanoparticles using an OcTree finite volume technique", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 97, pp. 158–165, 2018. doi: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2018.07.008.

[28] SOUZA, R. V. M., PETERS, F. C., MANSUR, W. J., et al. "GII regularization technique for seismic data inversion", *Journal of Applied Geophysics*, v. 170, pp. 103865, 2019. doi: 10.1016/j.jappgeo.2019.103865.

[29] APPELÖ, D., HAGSTROM, T., KREISS, G. "Perfectly matched layers for hyperbolic systems: general formulation, well-posedness, and stability", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 67, n. 1, pp. 1–23, 2006.

[30] BERENGER, J.-P. "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves", *Journal of computational physics*, v. 114, n. 2, pp. 185–200, 1994.

[31] BÉRENGER, J.-P. *Perfectly matched layer (PML) for computational electromagnetics*, v. 8. Springer, 2007.

[32] BERMUDEZ, A., HERVELLA-NIETO, L., PRIETO, A., et al. "Perfectly matched layers for time-harmonic second order elliptic problems", *Archives of Computational Methods in Engineering*, v. 17, pp. 77–107, 2010.

[33] COLLINO, F., TSOGKA, C. "Application of the perfectly matched absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media", *Geophysics*, v. 66, n. 1, pp. 294–307, 2001.

[34] FATHI, A., POURSARTIP, B., KALLIVOKAS, L. F. "Time-domain hybrid formulations for wave simulations in three-dimensional PML-truncated heterogeneous media", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 101, n. 3, pp. 165–198, 2015.

[35] HASTINGS, F. D., SCHNEIDER, J. B., BROSCHAT, S. L. "Application of the perfectly matched layer (PML) absorbing boundary condition to elastic wave propagation", *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 100, n. 5, pp. 3061–3069, 1996.

[36] HU, F. Q. "On absorbing boundary conditions for linearized Euler equations by a perfectly matched layer", *Journal of computational physics*, v. 129, n. 1, pp. 201–219, 1996.

[37] HU, F. Q. "Development of PML absorbing boundary conditions for computational aeroacoustics: A progress review", *Computers & Fluids*, v. 37, n. 4, pp. 336–348, 2008.

[38] KATZ, D. S., THIELE, E. T., TAFLOVE, A. "Validation and extension to three dimensions of the Berenger PML absorbing boundary condition for FD-TD meshes", *IEEE microwave and guided wave letters*, v. 4, n. 8, pp. 268–270, 1994.

[39] KUCUKCOBAN, S., KALLIVOKAS, L. F. "Mixed perfectly-matched-layers for direct transient analysis in 2D elastic heterogeneous media", *Computer*

methods in applied mechanics and engineering, v. 200, n. 1-4, pp. 57–76, 2011.

[40] TEIXEIRA, F., CHEW, W., OTHERS. "Advances in the theory of perfectly matched layers". In: *Fast and efficient algorithms in computational electromagnetics*, v. 7, Artech House Boston, pp. 283–346, 2001.

[41] TURKEL, E., YEFET, A. "Absorbing PML boundary layers for wave-like equations", *Applied Numerical Mathematics*, v. 27, n. 4, pp. 533–557, 1998.

[42] BASU, U. "Perfectly matched layers for acoustic and elastic waves", *Dam Safety Research Program, US Department of the Interior*, 2008.

[43] KINSLER, L. E., FREY, A. R., COPPENS, A. B., et al. *Fundamentals of acoustics*. John wiley & sons, 2000.

[44] MALVERN, L. E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Monograph, 1969.

[45] KUNDU, P. K., COHEN, I. M., DOWLING, D. R., et al. *Fluid mechanics*. Elsevier, 2024.

[46] WHITE, F. "Fundamentals of Acoustics by Lawrence E. Kinsler, Austin R. Frey, Alan B. Coppens, and James V. Sanders". 1982.

[47] VOGEL, S. *Life's devices: the physical world of animals and plants*. Princeton University Press, 1988.

[48] MARSDEN, J. E., HUGHES, T. J. *Mathematical foundations of elasticity*. Courier Corporation, 1994.

[49] BATRA, R. C. *Elements of continuum mechanics*. Aiaa, 2006.

[50] DOWELL, E. H. *A modern course in aeroelasticity*, v. 264. Springer Nature, 2021.

[51] LAUTRUP, B. *Physics of continuous matter: exotic and everyday phenomena in the macroscopic world*. CRC press, 2011.

[52] LAI, W. M., RUBIN, D., KREMPL, E. *Introduction to continuum mechanics*. Butterworth-Heinemann, 2009.

[53] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L., ZHU, J. Z. *The finite element method: its basis and fundamentals*. Elsevier, 2005.

[54] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. *The finite element method for solid and structural mechanics*. Elsevier, 2005.

[55] CHUNG, J., HULBERT, G. "A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized-α method", *Journal of Applied Mechanics*, v. 60, n. 2, pp. 371–375, 06 1993.

[56] BATHE, K.-J., BAIG, M. M. I. "On a composite implicit time integration procedure for nonlinear dynamics", *Computers & Structures*, v. 83, n. 31-32, pp. 2513–2524, 2005.

[57] SOARES JR, D. "A simple and effective new family of time marching procedures for dynamics", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 283, pp. 1138–1166, 2015.

[58] SOARES JR, D. "Three novel truly-explicit time-marching procedures considering adaptive dissipation control", *Engineering with Computers*, v. 38, n. 4, pp. 3251–3268, 2022.

[59] HAN, S. "Finite volume solution of 2-D hyperbolic conduction in a heterogeneous medium", *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, v. 70, n. 7, pp. 723–737, 2016.

[60] MANSUR, W. J. *A time-stepping technique to solve wave propagation problems using the boundary element method*. Tese de Doutorado, University of Southampton, 1983.

[61] BATRA, R., PORFIRI, M., SPINELLO, D. "Free and forced vibrations of a segmented bar by a meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) formulation", *Computational Mechanics*, v. 41, pp. 473–491, 2008.

[62] MARTIN, G. S., WILEY, R., MARFURT, K. J. "Marmousi2: An elastic upgrade for Marmousi", *The leading edge*, v. 25, n. 2, pp. 156–166, 2006.

[63] FREITAS, D. F., SIQUEIRA, R., CETALE, M., et al. "3D Velocity Model Building of Búzios oil field—Improvements and updates", *Proceedings of the IX Simpósio Brasileiro de Geofísica, Curitiba, PR, Brazil*, pp. 4–6, 2022.

[64] FEHLER, M. "Seam update: Seam phase i rpsea update: Status of simulations", *The Leading Edge*, v. 31, n. 12, pp. 1424–1426, 2012.

[65] BILLETTE, F., BRANDSBERG-DAHL, S. "The 2004 BP velocity benchmark". In: *67th EAGE Conference & Exhibition*, pp. cp–1. European Association of Geoscientists & Engineers, 2005.