



INVERSÃO DA FORMA DE ONDA COMPLETA DE FONTES SUPERFICIAIS

Bruno de Souza Silva

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientador: Luiz Landau

Rio de Janeiro
Dezembro de 2020

INVERSÃO DA FORMA DE ONDA COMPLETA DE FONTES SUPERFICIAIS

Bruno de Souza Silva

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Orientador: Luiz Landau

Aprovada por: Prof. Luiz Landau

Dr. Djalma Manoel Soares Filho

Prof. Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho

Prof. Fernando Alves Rochinha

Prof. José Luis Drummond Alves

Dr. André Bulcão

Dr. Bruno Pereira Dias

Prof. Philippe Remy Bernard Devloo

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

DEZEMBRO DE 2020

Silva, Bruno de Souza

Inversão da Forma de Onda Completa de Fontes Superficiais/Bruno de Souza Silva. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2020.

XVIII, 125 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Luiz Landau

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Civil, 2020.

Referências Bibliográficas: p. 86 – 94.

1. Modelagem Sísmica. 2. Operador de Síntese. 3. Família de Múltiplas Fontes. 4. Inversão Sísmica. 5. Full Waveform Inversion. I. Landau, Luiz. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

*Dedico este trabalho à minha
esposa Gisele Vieira e minha
mãe Maria Célia.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por tudo.

À minha esposa, Gisele Vieira, por estar ao meu lado em todos os momentos difíceis dessa jornada me encorajando e incentivando com muito amor, compreensão e companheirismo.

À minha querida mãe por toda dedicação e sabedoria que me proporcionaram os conhecimentos que formam a base da minha vida.

Agradeço ao coordenador e orientador Prof. Luiz Landau pelo incentivo, encorajamento e sugestões, que foram fundamentais para a continuidade do trabalho.

Agradeço ao meu co-orientador Dr. Djalma Manoel Soares Filho, por proporcionar os conhecimentos fundamentais que guiaram o desenvolvimento deste trabalho. Além de toda dedicação, incentivo e inúmeras discussões.

Aos professores Álvaro Coutinho e José Alves pelo incentivo e ensinamentos.

À todo corpo técnico administrativo dos laboratórios LAMCE e LAB2M da COPPE/UFRJ pela oportunidade da realização deste trabalho.

Ao Geofísico Carlos Henrique por sua amizade, conversas e apoio durante o doutorado.

Ao Geofísico Felipe Duarte pela contribuição nos códigos da FWI, revisões e sugestões ao longo do trabalho.

Agradeço aos companheiros de laboratório Charlan Dellon, Candy Rosa Contreiras, Luciano Leite, Lizianne Medeiros e Luana Nobre pelos diversos momentos de trocas de conhecimentos e todos os momentos de descontrações.

Agradeço aos companheiros de trabalho João Cláudio e Igor Marzano pela apoio e encorajamento.

Ao Geofísico Cristhian Cortez pelas sugestões ao longo do trabalho.

Aos examinadores da banca por suas importantes correções, revisões e contribuições para elaboração do documento final.

Agradeço também ao Nacad pela utilização da infraestrutura do Lobo Carneiro.

Ao Programa de Recursos Humanos da ANP, pelo apoio financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

INVERSÃO DA FORMA DE ONDA COMPLETA DE FONTES SUPERFICIAIS

Bruno de Souza Silva

Dezembro/2020

Orientador: Luiz Landau

Programa: Engenharia Civil

A Inversão da Forma de Onda Completa está entre as tecnologias mais robustas na construção de modelos de velocidades em ambientes geologicamente complexos. O sucesso do método pode ser explicado devido o mesmo não estar restrito à inversão apenas de ondas primárias. De fato, neste algoritmo, todos os eventos preditos pela equação diferencial que governa o fenômeno de propagação da onda são levados em consideração. Contudo na prática, devido ao seu alto custo computacional associado principalmente ao grande número de problemas de extrapolação do campo de onda direto e reverso, o método é muitas vezes restrito até cerca de 10 Hz de frequência de pico. Com isso, o campo de velocidades pode não ser suficiente para garantir a resolução necessária para uma migração em profundidade precisa. Nesse trabalho, propõe-se um algoritmo que busca reduzir o custo computacional a fim de proporcionar o emprego do método até 30 Hz de frequência de pico, de modo que o campo de velocidades obtido possa ser utilizado como uma ferramenta de interpretação. A estratégia consiste em reduzir o número de modelagens direta e reversa utilizando a tecnologia de fontes superficiais (do inglês, *Areal Shot Technology*). Em outras palavras, em vez de resolver a equação da onda para todas as Famílias de Tiro Comum, a equação da onda é resolvida para um pequeno número de registros de fontes superficiais, criadas para aumentar a iluminação na região de interesse. Por fim, pode se dizer que as fontes passivas (difrações ou reflexões) são ativadas durante a propagação direta ou reversa do campo de onda de forma controlada ao longo do modelo de velocidade de fundo. Nos experimentos numéricos, realizados no modelo de velocidades Marmousi-2, o método convergiu com sucesso em direção ao modelo verdadeiro e foi observada uma redução substancial do custo computacional em comparação com o método tradicional.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

FULL WAVEFORM INVERSION OF AREAL SHOT RECORDS

Bruno de Souza Silva

December/2020

Advisor: Luiz Landau

Department: Civil Engineering

Full Waveform Inversion is among the most robust technologies for velocity field determination in areas of high geological complexity, such as those which present salt tectonics. The success of this method may be explained by the fact that it is not restricted to inverting primary reflected waves. All events predicted by the differential equation, which governs the wave phenomenon, are employed in its algorithm. This increases the seismic illumination tremendously in relation to the methods which linearize the forward problem. In practice, however, due to its high computational cost, which is mainly associated with the large number of forward and reverse extrapolations, this method is typically restricted to frequencies of a few Hertz (around peak frequency of 10 Hertz), which may be insufficient to guarantee the velocity field resolution required for effective depth migrations. In this work, we propose an algorithm that aims to reduce the computational cost with the goal of improving the feasibility of this method for frequencies up to 30 Hertz so as to consider the final velocity field as an interpretation tool itself. The strategy employed is decreasing the number of forward and reverse extrapolations using the concept of areal shot record technology. Rather than solving the wave equation for all common shot gathers, we solved the wave equation for a small number of areal shot records to increase the seismic illumination on the target zones. Ultimately, we activated passive sources (diffractions or reflections) when the controlled wavefield propagates (or reverse propagates) along the background velocity models. In our numerical experiments, performed on Marmousi-2 velocity model, our method successfully converged to the target model. Further, a substantial reduction was observed in the computational cost compared to the traditional method.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xvii
1 Introdução	1
1.1 Metodologia	5
1.2 Estrutura da Tese	8
2 Inversão da Forma de Onda Completa	9
2.1 Introdução	9
2.2 Solução do Problema Direto	11
2.3 FWI para Famílias de Tiro Comum	12
2.3.1 Função Objetivo	12
2.3.2 Gradiente e Pré-Condicionamento	12
2.3.3 Algoritmo FWI para Famílias de Tiro Comum	14
2.3.4 Resultados Numéricos	14
3 Inversão da Forma de Onda Completa de Fontes Superficiais	22
3.1 Operador de Síntese	23
3.2 Registro de Tiros Superficiais	27
3.3 Inversão da Forma de Onda Completa de Registro de Fontes Superficiais	29
3.4 Algoritmo para a FWI de Fontes Superficiais - FWIAR	31
4 Resultados Numéricos	34
4.1 FWIAR na presença das mais baixas Frequências - Operadores em Subsuperfície e Assimétrico	35
4.1.1 Experimento 1 - Estimativa do Modelo-I na presença das frequências mais baixas e intermediárias	35
4.1.2 Experimento 2 - Estimativa do Modelo-I na presença das mais altas frequências	47
4.1.3 Experimento 3 - Estimativa do Modelo-II na presença das frequências mais baixas e intermediárias	50

4.1.4	Experimento 4 - Estimativa do Modelo-II na presença das mais altas frequências	57
4.2	FWIAR na ausência das mais baixas frequências - Operadores em Subsuperfície e Assimétrico	62
4.2.1	Experimento 5 - Estimativa do Modelo-I na ausência das mais baixas frequências	62
4.3	FWIAR na presença das mais baixas frequências - Operadores em Superfície e Assimétrico	70
4.3.1	Experimento 6 - Operador em Superfície	70
4.4	FWIAR na presença das mais baixas frequências - Operadores em Subsuperfície e Simétrico	75
4.4.1	Experimento 7 - Operador Simétrico	75
5	Discussão e Propostas Futuras	80
5.1	Discussão	80
5.2	Propostas Futuras	81
6	Conclusão	85
	Referências Bibliográficas	86
A	Equação Acústica da Onda	95
B	Modelagem Sísmica	98
B.1	Fórmula de Modelagem Discreta da Equação Acústica da Onda	99
B.2	Análise de Dispersão e Estabilidade	100
B.2.1	Assinatura da Fonte Sísmica	101
C	Tópicos da Inversão da Forma de Onda Completa	104
C.1	Método de Newton	104
C.2	Cálculo do Gradiente	105
C.3	Cálculo da matriz Hessiana	109
C.4	Direção de Busca	112
C.5	Método de Busca em Linha	115
C.6	Inversão FWI Utilizando o Esquema Multiescala em Frequência	117
D	O Método Adjunto Aplicado ao Cálculo dos Elementos do Gradiente	120

Lista de Figuras

1.1	Fontes virtuais distribuídas em subsuperfície.	4
1.2	Campos de velocidade: a) Rugoso e b) Suave.	6
1.3	a) Perfil de velocidade extraído na posição de $x=5,5\text{km}$ e b) Perfil de derivada da velocidade em relação a profundidade na posição $x=5,5\text{km}$	6
1.4	Três diferentes instantes de tempo da propagação do campo de onda incidente (1,0s, 1,5s e 2,0s de cima para baixo). À esquerda, modelo rugoso; à direita, modelo suave.	7
2.1	a) Modelo verdadeiro I e b) Modelo inicial.	17
2.2	Modelo 2D estimado pela FWI utilizando uma frequência máxima de 30 Hz. a) para Gradiente Descendente, b) para gradiente conjugado, c) para gradiente descendente pré condicionado, d) para gradiente conjugado pré-condicionado e e) para gradiente conjugado pré condicionado pela diagonal da pseudo-Hessiana.	17
2.3	Gradiente gerado na primeira iteração considerando 14 tiros, para os intervalos de frequência de: a) e b) [0-3Hz]; c) e d) [0-9Hz]; e) e f) [0-15Hz]; g) e h) [0-30Hz]. À esquerda para o modelo-I e à direita para o modelo-II	18
2.4	Comparações de perfis verticais para diferentes métodos de otimização na posição 1km. a) Todos os experimentos realizados e b) Somente os experimentos com Pré-Condicionamento.	19
2.5	Função Objetivo de cada experimento para: a) todas as iterações, b) as últimas iterações, c) a comparação entre o método do Gradiente Descendente (GD) e Conjugado (GC) e d) Comparação entre o Gradiente descendente e conjugado pré-condicionado pelo campo incidente (GC_P) e pela diagonal da pseudo-Hessiana (GC_PH).	20
2.6	a) Modelo-I, b) Modelo-II e c) e d) Resultados da FWI referente à saída para 30 Hz dos respectivos modelos.	21
2.7	Comparação dos perfis de velocidade na posição $x=1,0\text{km}$ relativos aos resultados da FWI nos modelos-I e -II, para a frequência final de 30Hz.	21

3.1	Modelo de velocidade Marmousi-2 modificado. a) Modelo de velocidade verdadeiro e b) Modelo de velocidade suavizado (Média Móvel de 30 pontos), com linhas horizontais (pontos pretos) em 2,6km representando os pontos fontes em subsuperfície para criar o operador de síntese. A linha branca indica a posição dos receptores localizados próximos a superfície.	25
3.2	Registro do campo de onda (invertido) gerado pelas fontes superficiais para o tempo total de registro de 4s relativo a profundidade em: a) 0,5km e b) 2,6Km.	26
3.3	Operador de Síntese relativo a linha horizontal em: a) 0,5km e b) 2,6km. A assinatura da fonte não foi deconvolvida.	26
3.4	Propagação direta do Operador de Síntese sobre o modelo verdadeiro gerado na profundidade de 0,5km representado nas imagens à esquerda e 2,6km representado nas imagens à direita.	27
3.5	Energia registrada na região do reservatório durante a propagação reversa dos operadores de síntese gerados na profundidade de 0,5km (superfície) e 2,6km (subsuperfície).	28
3.6	Esquema da construção da Fonte Superficial gerada a partir da Equação 3.4.	28
3.7	Registro de fontes superficiais obtido a partir do empilhamento da convolução entre as Famílias de Tiro Comum e os operadores de síntese associados a: a) Fontes virtuais em superfície e b) Fontes virtuais em subsuperfície. O modelo Marmousi foi utilizado para simular as Famílias de Tiro Comum.	29
3.8	Posicionamento das fontes virtuais em subsuperfície.	31
3.9	Gradiente normalizado gerado a partir de 15 registros de fontes superficiais para a frequência de corte de 12Hz e o modelo de velocidades verdadeiro e inicial: a) Sem o pré-condicionamento e b) com pré-condicionamento.	31
4.1	Modelo de velocidade Marmousi 2. O retângulo tracejado preto representa o Modelo-I e o vermelho representa o Modelo-II.	34
4.2	a) Modelo-I, altamente estruturado com altos contrastes de propriedade; b) Modelo-II, pouco estruturado e com baixos contrastes de propriedade na região do reservatório; c) Ampliação do Modelo-I na área de interesse; d) Ampliação do Modelo-II na área de interesse. . .	35

4.3	a) Modelo de velocidades inicial usado no primeiro intervalo de frequência da FWI e FWIAR-1; (b) modelo de velocidades inicial utilizado no primeiro intervalo de frequência da aplicação FWIAR-2 e c) o modelo inicial utilizado na FWIAR-3.	37
4.4	Posicionamento das fontes virtuais em subsuperfície nas aplicações da FWIAR do experimento 1.	38
4.5	a) e b) Perfis de velocidade referentes ao modelo inicial nos experimentos da FWIAR, extraídos na posição de $x=5,5\text{km}$ e seus respectivos perfis da derivada da velocidade em relação a profundidade c) e d).	39
4.6	Três diferentes instantes de tempo da propagação reversa dos registros de fontes superficiais para a FWIAR-1, 2 e 3 referente ao intervalo de frequência de $[0-9\text{Hz}]$. Para fins de comparação, os valores foram normalizados pelo máximo valor absoluto em cada registro.	40
4.7	Registros de fontes superficiais observados e calculados associados a uma onda plana na profundidade de $2,6\text{km}$, para o intervalo de frequência de $[0-9\text{Hz}]$, relativos a FWIAR-1, FWIAR-2 e FWIAR-3, de cima para baixo, respectivamente.	41
4.8	Gradientes obtidos para o intervalo de frequência $[0-9\text{Hz}]$. a) FWIAR-1, b) FWIAR-2 e c) FWIAR-3. Os gradientes foram normalizados pelo máximo valor absoluto para fins de comparação.	42
4.9	Modelo de velocidades obtido para o último intervalo de frequência de inversão das aplicações a) FWI, b) FWIAR-1, c) FWIAR-2 e d) FWIAR-3. O retângulo pontilhado na região direita inferior indica a área de interesse.	43
4.10	Ampliação dos modelos de velocidades na área de interesse obtido na última inversão do intervalo de frequência, respectivamente, nas aplicações a) FWI, b) FWIAR-1, c) FWIAR-2, d) FWIAR-3 e e) Verdadeiro.	44
4.11	Perfil de velocidade em $x = 5 \text{ km}$ do modelo verdadeiro, linha preta; O modelo inicial para aplicações FWI e FWIAR-1, linha amarela; e o modelo de velocidades final obtido, na FWI, FWIAR-1, -2, -3, respectivamente, linha azul, laranja e lilás.	45
4.12	Função objetivo normalizada e obtida em cada iteração no esquema multiescala do Experimento 1 para (a) FWI e (b) FWIAR-1, -2 e -3.	45
4.13	Erro relativo do Experimento 1 calculado para o último intervalo de frequência de inversão das aplicações a) FWI, c) FWIAR-1, e) FWIAR-2 e g) FWIAR-3. O retângulo pontilhado indica a área de interesse ampliadas nas aplicações b) FWI, d) FWIAR-1, f) FWIAR-2, e h) FWIAR-3.	46

4.14	Modelos de velocidades obtidos na última inversão do intervalo de frequência do segundo experimento, respectivamente, nas aplicações a) FWI, b) FWIAR-1, c) FWIAR-2 e d) FWIAR-3. O retângulo pontilhado na região direita inferior indica a área de interesse.	48
4.15	Ampliação dos modelos de velocidades na área de interesse obtido na última inversão da faixa de frequência do segundo experimento, respectivamente, nas aplicações a) FWI, b) FWIAR-1, c) FWIAR-2, d) FWIAR-3 e e) Verdadeiro.	49
4.16	Funções objetivas normalizadas referentes aos resultados do Experimento 2 das aplicações a) FWI e b) FWIAR-1, 2 e 3.	49
4.17	Erro relativo do Experimento 2 calculado para o último intervalo de frequência de inversão das aplicações a) FWI, c) FWIAR-1, e) FWIAR-2 e g) FWIAR-3. O retângulo pontilhado indica a área de interesse ampliadas nas aplicações b) FWI, d) FWIAR-1, f) FWIAR-2, e h) FWIAR-3.	51
4.18	Campos de velocidade inicial. a) Modelo de velocidade Marmousi-2 com baixos contrastes de velocidade suavizado a partir da média móvel, b) Campo de velocidade final para a FWI de 3Hz e c) Campo de velocidade final estimado a partir da estratégia multiescala FWI de 3 a 6Hz	52
4.19	Representação da distribuição dos Operadores de Síntese para o Experimento 3.	53
4.20	Modelos de velocidades obtidos na última inversão do intervalo de frequência do Experimento 3 nas aplicações a) FWI, b) FWIAR-1, c) FWIAR-2 e d) FWIAR-3, respectivamente. O retângulo pontilhado representa a área de interesse.	54
4.21	Ampliação dos modelos de velocidades na área de interesse obtido na última inversão do intervalo de frequência do Experimento 3, respectivamente, nas aplicações a) FWI, b) FWIAR-1, c) FWIAR-2, d) FWIAR-3 e e) Verdadeiro.	55
4.22	Funções objetivas normalizadas referentes aos resultados do Experimento 3 das aplicações a) FWI e b) FWIAR apresentadas por faixa de frequência e c) FWI e d) FWIAR apresentadas por iteração.	55
4.23	Erro relativo do Experimento 2 calculado para o último intervalo de frequência de inversão das aplicações a) FWI, c) FWIAR-1, e) FWIAR-2 e g) FWIAR-3. O retângulo pontilhado indica a área de interesse ampliadas nas aplicações b) FWI, d) FWIAR-1, f) FWIAR-2, e h) FWIAR-3.	56

4.24	Modelos de velocidades obtidos na última inversão do intervalo de frequência referente ao Experimento 4, respectivamente, nas aplicações a) FWI, c) FWIAR-1, b) FWIAR-2 e d) FWIAR-3.	58
4.25	Ampliação dos modelos de velocidades na área de interesse obtido na última inversão do intervalo de frequência do Experimento 4, respectivamente, nas aplicações a) FWI, b) FWIAR-1, c) FWIAR-2, d) FWIAR-3 e) Verdadeiro.	59
4.26	Funções objetivos normalizadas referente aos resultados do quarto experimento das aplicações a) FWI e b) FWIAR apresentadas por faixa de frequência e c) FWI e d) FWIAR apresentadas por iteração.	60
4.27	Erro relativo do Experimento 4 calculado para o último intervalo de frequência de inversão das aplicações a) FWI, c) FWIAR-1, e) FWIAR-2 e g) FWIAR-3. O retângulo pontilhado indica a área de interesse ampliadas nas aplicações b) FWI, d) FWIAR-1, f) FWIAR-2, e h) FWIAR-3.	61
4.28	Modelos de velocidades obtidos na última inversão do intervalo de frequência do Experimento 5 a) FWI e b) FWIAR-1.	63
4.29	Modelos de velocidades obtidos na última inversão do intervalo de frequência do Experimento 5 a) Modelo Inicial, b) FWI e c) FWIAR-1. O retângulo pontilhado na região direita inferior indica a área de interesse.	64
4.30	Modelos de velocidades obtidos na última inversão do intervalo de frequência do Experimento 5, respectivamente, nas aplicações a) FWIAR-2, b) FWIAR-2-30t e c) FWIAR-3. O retângulo pontilhado na região direita inferior indica a área de interesse.	65
4.31	Ampliação dos modelos de velocidades na área de interesse obtido na última inversão da faixa de frequência do experimento 5, respectivamente, nas aplicações a) FWI, b) FWIAR-1, c) FWIAR-2, d) FWIAR-2-30t, e) FWIAR-3 e f) Verdadeiro.	66
4.32	Função objetivo normalizada e obtida em cada iteração no esquema multiescala. A esquerda observa-se as funções objetivos para todas as iterações e a direita uma ampliação para melhor representar o comportamento das últimas iterações. As Figuras a) a d) representam a comparação da iteração por faixa de frequência e as Figuras de e) a h) tem-se a representação do valor por iteração.	68

4.33	Erro relativo do Experimento 5 calculado para o último intervalo de frequência de inversão das aplicações a) FWI, c) FWIAR-1, e) FWIAR-2, g) FWIAR-2-30t e i) FWIAR-3. O retângulo pontilhado indica a área de interesse ampliadas nas aplicações b) FWI, d) FWIAR-1, f) FWIAR-2, h) FWIAR-2_30it e j) FWIAR-3.	69
4.34	Posicionamento das fontes virtuais em: a) Superfície e b) Subsuperfície	70
4.35	Modelos de velocidades obtidos na última inversão do intervalo de frequência do Experimento 6, respectivamente, nas aplicações a) FWI, b) FWIAR-1, c) FWIAR-2 e d) FWIAR-3. O retângulo pontilhado na região direita inferior indica a área de interesse.	72
4.36	Ampliação dos modelos de velocidades na área de interesse obtidos na última inversão do intervalo de frequência do Experimento 6, respectivamente, nas aplicações a) FWI, b) FWIAR-1, c) FWIAR-2, d) FWIAR-3 e e) Verdadeiro.	73
4.37	Funções objetivas normalizadas referentes aos resultados do sexto Experimento das aplicações a) FWI e b) FWIAR apresentadas por faixa de frequência e c) FWI e d) FWIAR apresentadas por iteração. . . .	73
4.38	Erro relativo do Experimento 6 calculado para o último intervalo de frequência de inversão das aplicações a) FWI, c) FWIAR-1, e) FWIAR-2 e g) FWIAR-3. O retângulo pontilhado indica a área de interesse ampliadas nas aplicações b) FWI, d) FWIAR-1, f) FWIAR-2, e h) FWIAR-3.	74
4.39	Posicionamento das fontes virtuais para: a) Arranjos Simétricos e b) Assimétricos.	75
4.40	Modelos de velocidades obtidos na última inversão do intervalo de frequência do sétimo experimento, respectivamente, nas aplicações a) FWI, b) FWIAR-1 c) FWIAR-2 e d) FWIAR-3. O retângulo pontilhado na região direita inferior indica a área de interesse. . . .	77
4.41	Ampliação dos modelos de velocidades na área de interesse obtido na última inversão da faixa de frequência do sétimo experimento, respectivamente, nas aplicações a) FWI, b) FWIAR-1, c) FWIAR-2, d) FWIAR-3 e e) Verdadeiro.	78
4.42	Funções objetivas normalizadas referentes aos resultados do sétimo Experimento das aplicações a) FWI e b) FWIAR apresentadas por faixa de frequência e c) FWI e d) FWIAR apresentadas por iteração.	78

4.43	Erro relativo do Experimento 7 calculado para o último intervalo de frequência de inversão das aplicações a) FWI, c) FWIAR-1, e) FWIAR-2 e g) FWIAR-3. O retângulo pontilhado indica a área de interesse ampliadas nas aplicações b) FWI, d) FWIAR-1, f) FWIAR-2, e h) FWIAR-3.	79
5.1	Atributo Edge Detection aplicado em: a) Modelo I Inicial, b) FWI de 3 Hz gerado para o modelo I e c) FWI de 6 Hz gerado para o modelo I.	83
B.1	Direção de Propagação da onda plana. Retirada de DUARTE (2012)	100
B.2	Assinatura da fonte e seus espectros de frequência para $f_{corte} = 3$ a 30 Hz.	102
B.3	Assinatura da fonte com filtro corta baixa e seus espectros de frequência para $f_{corte} = 6$ a 30 Hz.	103
C.1	Esquema da interpretação física do gradiente da função objetivo calculado, através das derivadas de Fréchet (SOARES FILHO, 2017). . .	106
C.2	Modelos de velocidades sintéticos utilizados no cálculo do gradiente da Função Objetivo, através do método adjunto.	108
C.3	(a) Dado observado gerado sobre o modelo de velocidades verdadeiro. (b) Dado calculado gerado sobre o modelo de velocidades inicial, (c) Resíduo: diferença entre o dado observado e calculado.	109
C.4	Gradiente da Função Objetivo calculado, a partir do método adjunto sobre o modelo de velocidades inicial.	109
C.5	Convergência do Método do Gradiente (NOCEDAL e WRIGHT, 2006).	113
C.6	Convergência do Método do Gradiente Conjugado (NOCEDAL e WRIGHT, 2006).	114
C.7	Princípio do problema de salto de ciclo (VIRIEUX e OPERTO, 2009).	118
C.8	Ilustração do Esquema Multiescala em frequência para três estágios de inversão (Adaptado de (FICHTNER, 2011)).	119
D.1	Domínio de Inversão	120

Lista de Tabelas

2.1	Parâmetros da Inversão acústica.	16
4.1	Comparação do custo computacional da FWI e FWIAR para o Experimento 1. O número de EDPs resolvidas na obtenção dos modelos iniciais para FWIAR-2 e -3 foi considerado, assim como o número de EDPs na construção dos operadores de síntese (equivalente a 75, 67 e 60 EDPs para FWIAR-1, FWIAR-2 e FWIAR-3, respectivamente). Os erros dizem respeito ao somatório dos erros relativos absolutos globais e locais.	46
4.2	Comparação do custo computacional da FWI e FWIAR para o Experimento 2. O número de EDPs resolvidas na obtenção dos modelos iniciais para FWIAR-2 e -3 foi considerado, assim como o número de EDPs na construção dos operadores de síntese (equivalente a 75, 67 e 60 EDPs para FWIAR-1, FWIAR-2 e FWIAR-3, respectivamente). Os erros dizem respeito ao somatório dos erros relativos absolutos globais e locais.	50
4.3	Comparação do custo computacional da FWI e FWIAR para o Experimento 3. O número de EDPs resolvidas na obtenção dos modelos iniciais para FWIAR-2 e -3 foi considerado, assim como o número de EDPs na construção dos operadores de síntese (equivalente a 75, 67 e 60 EDPs para FWIAR-1, FWIAR-2 e FWIAR-3, respectivamente). Os erros dizem respeito ao somatório dos erros relativos absolutos globais e locais.	53
4.4	Comparação do custo computacional da FWI e FWIAR para o Experimento 4. O número de EDPs resolvidas na obtenção dos modelos iniciais para FWIAR-2 e -3 foi considerado, assim como o número de EDPs na construção dos operadores de síntese (equivalente a 75, 67 e 60 EDPs para FWIAR-1, FWIAR-2 e FWIAR-3, respectivamente). Os erros dizem respeito ao somatório dos erros relativos absolutos globais e locais.	59

4.5	<p>Comparação do custo computacional da FWI e FWIAR para o Experimento 2. O número de EDPs resolvidas na obtenção dos modelos iniciais para FWIAR-2 e -3 foi considerado, assim como o número de EDPs na construção dos operadores de síntese (equivalente a 75, 67 e 60 EDPs para FWIAR-1, FWIAR-2 e FWIAR-3, respectivamente). Os erros dizem respeito ao somatório dos erros relativos absolutos globais e locais.</p>	67
4.6	<p>Comparação do custo computacional da FWI e FWIAR para o Experimento 6. O número de EDPs resolvidas na obtenção dos modelos iniciais para FWIAR-2 e -3 foi considerado, assim como o número de EDPs na construção dos operadores de síntese (equivalente a 75, 67 e 60 EDPs para FWIAR-1, FWIAR-2 e FWIAR-3, respectivamente). Os erros dizem respeito ao somatório dos erros relativos absolutos globais e locais.</p>	71
4.7	<p>Comparação do custo computacional da FWI e FWIAR para o Experimento 7. O número de EDPs resolvidas na obtenção dos modelos iniciais para FWIAR-2 e -3 foi considerado, assim como o número de EDPs na construção dos operadores de síntese (equivalente a 75, 67 e 60 EDPs para FWIAR-1, FWIAR-2 e FWIAR-3, respectivamente). Os erros dizem respeito ao somatório dos erros relativos absolutos globais e locais.</p>	76

Capítulo 1

Introdução

A Inversão da Forma de Onda Completa (do inglês, Full Waveform Inversion - FWI) tem sido uma das tecnologias mais precisas para construção de modelos de velocidade para migração em profundidade em áreas que apresentam alta complexidade estrutural e estratigráfica. Existe um grande número de casos em que essa tecnologia tem contribuído fortemente para gerar campos de velocidades e imagens de refletividade de alta resolução (CHAZALNOEL *et al.*, 2017; GABRIELLI *et al.*, 2016; WARNER *et al.*, 2013; ZHANG *et al.*, 2018). Os resultados obtidos com os dados OBC do Valhall (LIU *et al.*, 2012) e na Bacia de Santos - Brasil (BARRAGAN *et al.*, 2019; PENNA *et al.*, 2019), por exemplo, são notáveis.

A FWI é um problema inverso não linear que tem como objetivo estimar as propriedades física do meio, a partir da minimização da diferença entre o dado sísmico observado (dado de campo) e calculado (simulado sinteticamente). A razão de seu sucesso está relacionada com o fato de ir além das aproximações de Born na solução do problema direto. Ao contrário de outros métodos de inversão que utilizam apenas ondas primárias, todos os eventos preditos pela equação da elastodinâmica podem ser utilizados no seu algoritmo. Amplitude, tempos de trânsito de refrações, reflexões e difrações, além de múltiplas de todas as ordens e tipos trazem informações importantes para a FWI.

Ao longo do processo de seu desenvolvimento surgiram contribuições cruciais para viabilizar a FWI. O maior avanço foi alcançado por TARANTOLA (1984) e LAILLY (1983), onde ambos demonstraram que o gradiente poder ser obtido a partir da correlação cruzada entre os campos de onda direto e reverso. Anteriormente era necessário calcular as derivadas de Fréchet para cada ponto do modelo. Diante disso, foi possível vincular de forma elegante os conceitos de migração reversa no tempo e inversão, provendo o primeiro passo da FWI em direção às aplicações do mundo real. No entanto, apesar do progresso substancial, muitos avanços ainda seriam necessários até que o FWI fosse capaz de proporcionar um modelo de velocidades cada vez mais efetivo para ambientes complexos, tais como informações incompletas da

subsuperfície devido a limitação do número de onda presentes no dado (ALKHALIFAH, 2016; LI *et al.*, 2020, 2017), questões relacionadas a iluminação, *crosstalk* causados pela ausência da predição de múltiplas energias (DUVAL e RATCLIFFE, 2020) e questões relacionadas a absorção (ALKHALIFAH, 2014a) e meios elásticos (ALVES, 2017; CARNEIRO *et al.*, 2018).

De fato, para problemas de inversão sísmica essa não é uma tarefa fácil de resolver. Geralmente, as funções objetivo apresentam um grande número de mínimos locais como consequência do fenômeno de salto de ciclo, especialmente observado quando altas frequências temporais estão envolvidas. Outra questão importante é seu alto custo computacional. Recentemente a tecnologia de *Nodes* tem surgido como uma das aquisições sísmica mais confiáveis para imagens de ambientes do pré-sal de águas profundas por FWI, no entanto essas aquisições trazem desafios em comparações a aquisição de *streamer*, pois requerem que a modelagem sísmica seja realizada em grandes domínios computacionais a fim de cobrir toda a malha de nós, levando assim a problemas computacionais de alto desempenho (AGHAMIRY *et al.*, 2020). Por ser um esquema de otimização local, o método geralmente precisa realizar um grande número de extrapolações do campo de onda direto e reverso. Na maioria das vezes, o Método de Diferenças Finitas (MDF) é empregado na solução numérica da equação da onda utilizando malha espacial e temporal de alta densidade. Esse fato é um dos responsáveis por limitar o emprego da FWI a dados de baixa frequência. Existem algumas alternativas para mitigar o efeito de salto de ciclo na função objetivo. A primeira é buscar funções objetivo menos sensíveis a este efeito. As propostas de ABUBAKAR *et al.* (2011), GUASCH e WARNER (2014) e METIVIER *et al.* (2016) caminharam nesta direção.

Outra importante contribuição foi dada por BUNKS *et al.* (1995). Uma vez que o número de mínimos locais aumenta com o crescimento da frequência temporal, os autores propuseram um esquema multiescala em frequência, no qual os dados de entrada são filtrados. Com isso a FWI foi realizada sequencialmente para vários dados de entrada para diferentes intervalos de frequência, iniciando dos mais baixos para os mais altos.

Esta proposta tem sido eficiente nos casos em que as mais baixas frequências são registradas e/ou um modelo que honra o tempo de trânsito dos principais eventos esta disponível. Contudo, esta estratégia torna a FWI computacionalmente mais custosa, pois em vez de uma aplicação é necessário realizar a inversão para vários intervalos de frequência. Este custo pode ser especialmente elevado para intervalos de frequências mais altas, como consequência da necessidade de empregar o MDF utilizando malhas mais densas e também uma variação do incremento temporal demasiadamente pequena. Basicamente, existem três soluções possíveis para reduzir o custo computacional: esquema de pré-condicionamento, redatumação e decimação

inteligente das Famílias de Tiro Comum, tal como Super Tiros (BEN-HADJ-ALI *et al.*, 2011; KREBS *et al.*, 2009; KWON *et al.*, 2019; MATHARU e SACCHI, 2018).

O pré-condicionamento pode acelerar a convergência consideravelmente e uma excelente aproximação da Hessiana foi testada por CARNEIRO *et al.* (2018); JANG *et al.* (2009); SHIN *et al.* (2001). Ademais, a filtragem do gradiente como proposto por ALKHALIFAH (2014b) também tem sido efetiva. De outra forma técnicas de redatumação reduzem o domínio de aplicação em torno da zona de interesse e o problema inverso é focado em um sub-domínio do espaço do modelo e seu dado de entrada consiste do campo de velocidade inicial e de Famílias de Tiro Comum redatumadas de curta duração. Além de tornar as extrapolações significativamente menos custosas, a taxa de convergência tende a ser muito rápida (HAFFINGER, 2013).

A questão principal relativa a essa estratégia consiste na maneira como a redatumação é realizada. Para realizar a extrapolação de forma eficaz é necessário um bom modelo de velocidade em termos cinemáticos, que nem sempre está disponível antes das aplicações da FWI. Existem estratégias sofisticadas baseadas na tecnologia Marchenko que dispensam o campo de velocidade (WAPENAAR *et al.*, 2014), contudo, a focalização da energia em subsuperfície está longe de ser uma tarefa fácil para os padrões vigentes de aquisição de dados sísmicos devido principalmente a dificuldade de se estimar a função de Green para problemas reais.

Quanto a estratégia de decimação pode ser dita que a redução do número de Famílias de Tiro Comum, torna possível a redução do custo computacional na FWI. No entanto, fortes artefatos presentes no gradiente, proveniente de uma iluminação sísmica pobre podem influenciar negativamente na qualidade da convergência, conforme declarado em SIRGUE e PRATT (2004).

BAUMSTEIN *et al.* (2011); BEN-HADJ-ALI *et al.* (2011); KREBS *et al.* (2009); SCHUSTER *et al.* (2011) aplicaram na FWI o conceito de *Phase Encoded* introduzido por ROMERO *et al.* (2000). Dessa forma, foi substituído um alto número de Famílias de Tiro Comum por um número consideravelmente pequeno de Super Tiros. Essa estratégia permite a FWI ser mais barata, além disso elimina parcialmente a ausência de cobertura sísmica, se comparado com a estratégia de decimação. No entanto, como os Super Tiros são obtidos como uma síntese de onda plana próximo a superfície, a cobertura sísmica não é garantida próximo aos alvos mais profundos, especialmente nos casos em que as camadas acima da zona de interesse exibem um alto contraste de impedância. As zonas de reservatórios do Pré-Sal da Bacia de Santos são bons exemplos (BARRAGAN *et al.*, 2019).

De fato, mesmo considerando todas as Famílias de Tiro Comum como entrada não é possível garantir a iluminação na zona de interesse. E, naturalmente, a situação

tende a piorar quando se considera um pequeno número de síntese de ondas planas longe da região alvo. Neste trabalho, propõe-se um esquema, que diminui o custo computacional, a partir da redução do número de propagação do campo de onda direto e reverso de forma similar à abordagem *Phase Encoded*. Porém, este trabalho busca mitigar a falta de cobertura sísmica adequada nas regiões de interesse em zonas mais profundas. A ideia consiste em trazer os conceitos de iluminação controlada e fontes de tiros superficiais, para a Inversão da Forma de Onda Completa.

BERKHOUT (1992) e RIETVELD e BERKHOUT (1994) introduziram esses conceitos no contexto da migração sísmica, que foram posteriormente estendido para iluminação controlada (CHEN *et al.*, 2004; WANG *et al.*, 2001) e para Equação completa da onda no domínio do tempo (BOECHAT, 2007). Eles substituíram um grande número de Famílias de Tiro Comum por um pequeno número de registros de fontes superficiais associados a frentes de ondas específicas, por exemplo, ondas planas na subsuperfície. Como resultado, além da economia computacional, eles aumentaram a resolução sísmica controlando a iluminação nas proximidades das zonas de interesse. O registro de fontes superficiais representa a resposta sísmica para um conjunto de fontes superficiais determinadas, a partir das convoluções ponderadas entre o operador de síntese e as Famílias de Tiro Comum. Os operadores de síntese são obtidos resolvendo a equação da onda para um conjunto de fontes virtuais distribuídas ao longo da localização das frentes de onda desejadas na subsuperfície, utilizando o campo de velocidade de migração (Figura 1.1).

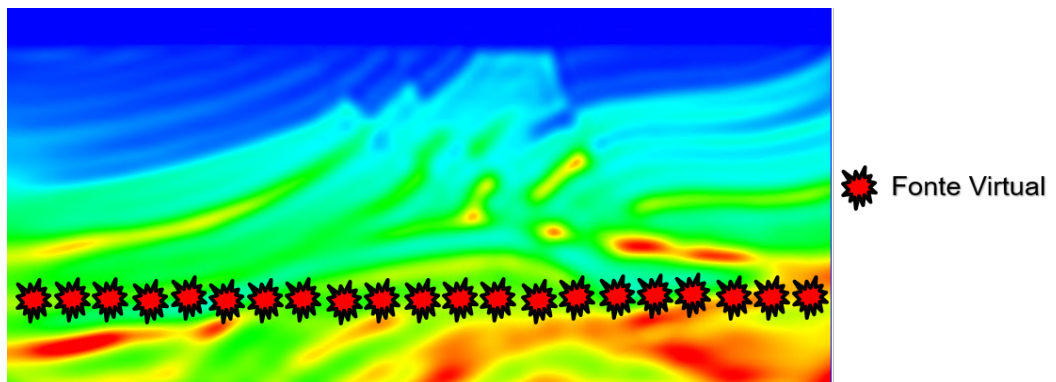


Figura 1.1: Fontes virtuais distribuídas em subsuperfície.

Neste trabalho, é proposto um novo método de Inversão da Forma de Onda Completa, designado por FWIAR (do inglês, *Full Waveform Inversion of Areal Shot Records*), em que as Famílias de Tiro Comum são substituídas por um pequeno número de fontes superficiais determinadas dinamicamente, à medida que o campo de velocidade de fundo é atualizado ao longo do processo iterativo. A partir deste método um esquema híbrido empregando a FWI e a FWIAR é sugerido.

1.1 Metodologia

Neste trabalho, com o objetivo de reduzir o custo computacional da FWI é proposto um novo método que utiliza os conceitos de Fontes Superficiais e síntese de ondas, como empregados por BERKHOUT (1992); BOECHAT (2007); RIETVELD (1995); RIETVELD e BERKHOUT (1994). Esse método busca reduzir o número de Famílias de Tiro Comum a partir do emprego de fontes superficiais geradas através dos operadores de síntese associados às ondas planas em subsuperfície. Essa proposta busca explorar a presença das fontes passivas no processo de propagação do campo de onda direto e reverso. Tais fontes são todos os eventos que têm origem quando o campo de onda, gerado pelas fontes reais, incide nas regiões que apresentam contrastes de propriedades (velocidade e densidade, no caso acústico).

As fontes passivas estão associadas às derivadas espaciais das propriedades acústicas presente no modelo de fundo. Bem como, dependem da intensidade e a forma de onda do campo de onda incidente nos pontos onde as derivadas espaciais não são nulas. Estas fontes estão presentes na FWI e FWIAR, no entanto no segundo método ocorre a concentração de energia. Esta concentração favorece a ativação das fontes passivas na região de interesse.

Para ilustrar a presença das fontes passivas, um experimento a partir da propagação direta do campo de ondas incidente utilizando a Equação Completa da Onda é empregado a partir de dois campos de velocidade um rugoso e outro suave, Figura 1.2. Para evidenciar a diferença de contraste de propriedade entre os modelos foi extraído um perfil vertical na posição de 5,5km, Figura 1.3a, e sobre esse perfil foi calculado a derivada da velocidade em relação a profundidade (Figura 1.3b). Pode-se observar que as oscilações de velocidade são significativamente superiores no modelo rugoso. Essa diferença em termos da propagação do campo incidente para um termo fonte pontual inserido no centro do modelo pode ser observada na Figura 1.4. Nesta imagem, pode-se observar que a propagação do campo de onda incidente no modelo rugoso gera mais eventos (difrações e reflexões), em relação ao campo de onda propagado no modelo suave.

O conceito de fontes passivas foi explorado na estratégia de várias passadas, introduzida por BULCÃO *et al.* (2011), nessa estratégia na FWI o processo de multiescala em frequência foi aplicado repetidas vezes a fim de explorar a maior diversidade de eventos no campo calculado, encontrado nas passadas anteriores.

Cabe ressaltar que neste trabalho, as fontes passivas não têm relação direta com a série de Born, na qual os espalhamentos ocorrem quando há discrepância entre o modelo de fundo e o modelo de velocidade “real”, ou seja, pressupõem-se dois modelos. Nesta tese, não se faz referência a dois modelos, e sim a um único modelo.

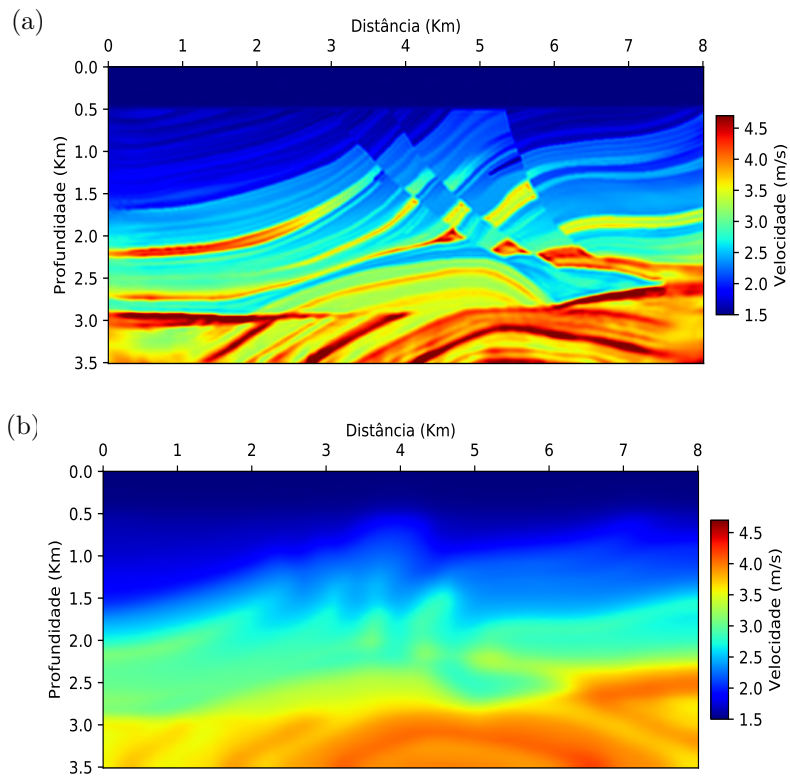


Figura 1.2: Campos de velocidade: a) Rugoso e b) Suave.

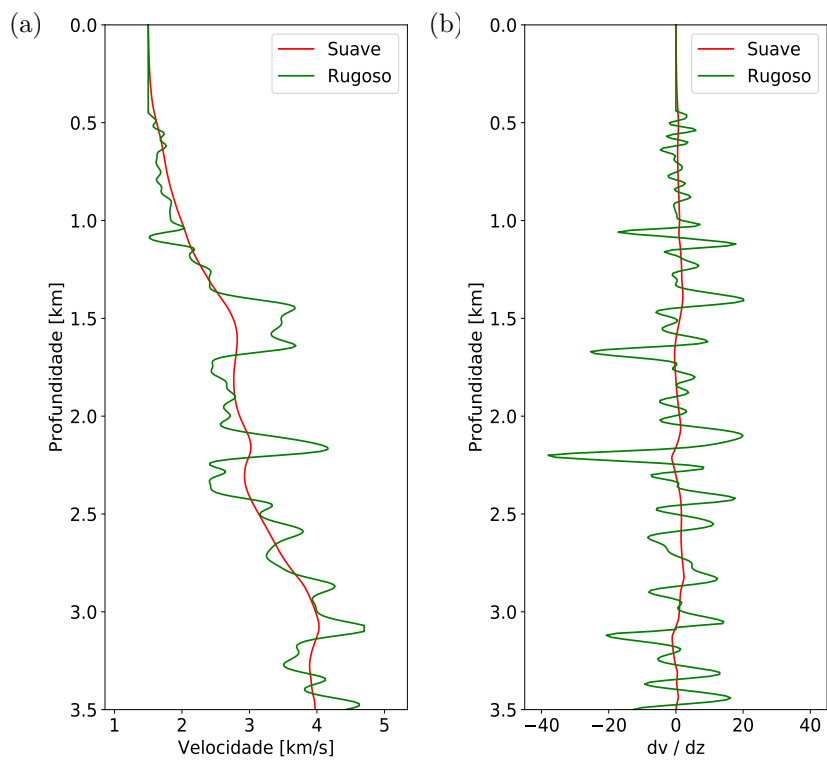


Figura 1.3: a) Perfil de velocidade extraído na posição de $x=5,5\text{km}$ e b) Perfil de derivada da velocidade em relação a profundidade na posição $x=5,5\text{km}$.

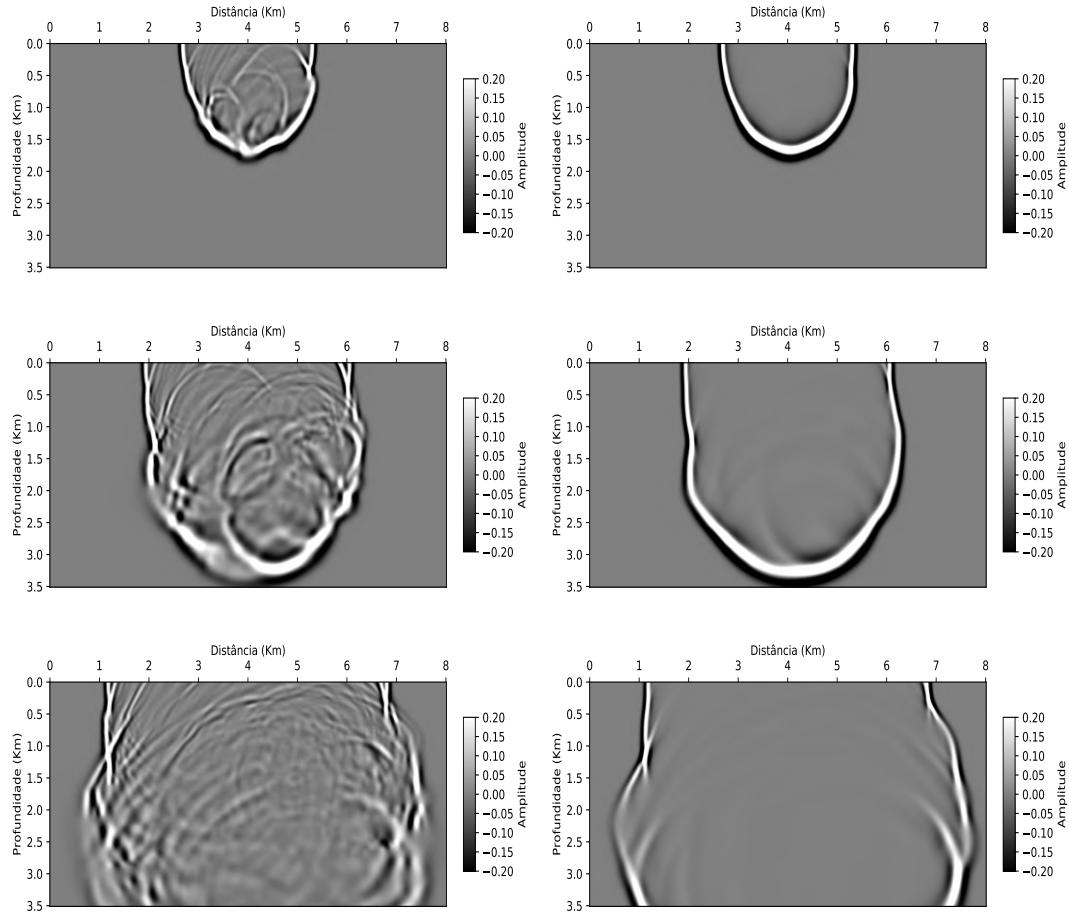


Figura 1.4: Três diferentes instantes de tempo da propagação do campo de onda incidente (1,0s, 1,5s e 2,0s de cima para baixo). À esquerda, modelo rugoso; à direita, modelo suave.

Neste novo esquema, fontes pontuais são substituídas por fontes superficiais. As Famílias de Fontes Superficiais representam o registro do campo de ondas associado às frentes de ondas planas no interior do modelo e são obtidas a partir das convoluções ponderadas entre o operador de síntese e as Famílias de Tiro Comum. O emprego das fontes superficiais permite aumentar a concentração do campo de ondas em subsuperfície, o que favorece a ativação das fontes passivas na região de interesse. Essa ativação depende da combinação da iluminação sísmica e do contraste de propriedade.

Para explorar a ativação das fontes passivas na região de interesse, a FWIAR será empregada considerando três diferentes campos de velocidades iniciais. A principal diferença entre os campos de velocidade reside no número de contrastes.

A partir da análise dos resultados será proposto uma formulação híbrida que realizará a FWIAR empregando campos de velocidades iniciais provenientes da FWI, obtidos com baixas frequências.

1.2 Estrutura da Tese

Nos capítulos seguintes, serão apresentados a fundamentação teórica, os algoritmos em detalhes, as aplicações numéricas no modelo Marmousi-2, além da discussão dos resultados, conclusões, discussão e trabalhos futuros. O trabalho está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 1 são apresentados o estado da arte referente a FWI bem como a contribuição desta tese (FWIAR).

No Capítulo 2, é apresentado o esquema da FWI utilizado para comparação com o novo método FWI de Fontes Superficiais (FWIAR). As estratégias de solução da estimativa do campo de velocidade a partir da FWI são apresentadas descrevendo o problema direto e reverso, diferentes estratégias de minimização e a função objetivo escolhida. A estratégia de otimização escolhida é apresentada para avaliar a importância da baixa frequência para o processo de atualização do modelo de velocidade. Tal contribuição motivou o estudo da influência das estruturas da Terra como fonte natural no processo de propagação do campo de onda.

No Capítulo 3 são descritos os ingredientes do método de Inversão da Forma de Onda Completa de Fontes Superficiais (FWIAR), sua formulação matemática e seu algoritmo.

No Capítulo 4 são apresentados os resultados empregando as fontes superficiais na FWI, utilizando o Marmousi-2. Dois modelos são gerados, o primeiro apresenta a região mais complexa do Marmousi-2 (Modelo-I) e segundo foi extraído da parte mais rasa do Marmousi-2 e apresenta uma baixa complexidade geológica (Modelo-II). Diferentes estratégias de utilização do campo de velocidade inicial são sugeridas e o desempenho da FWIAR é comparado com a FWI utilizando a estratégia de inversão multiescala em frequência para intervalos de frequência que variam de 3 a 30 Hz e 33 a 51 Hz.

Nos Capítulos 5 e 6, são apresentadas as discussões, conclusões e trabalhos futuros.

Capítulo 2

Inversão da Forma de Onda Completa

Neste capítulo, será descrito o esquema FWI utilizado para comparar com o novo método de FWI de Fontes Superficiais.

2.1 Introdução

A Inversão Sísmica é o procedimento para reconstruir as propriedades físicas da Terra em subsuperfície, baseado no registro de dados sísmicos (TARANTOLA, 1987). Esta técnica busca estimar o modelo ¹ de subsuperfície da Terra, por meio de medições sísmicas realizadas em campo. Se a relação entre o dado e o modelo for linear, então a solução do sistema pode ser obtida com base na álgebra matricial. Porém se a relação for altamente não linear, como no caso da FWI, então a busca pela solução pode ser realizada utilizando um processo iterativo a partir de atualizações linearizadas, ou por métodos de otimização global.

Assumindo que a física fundamental pode ser adequadamente compreendida, o dado \mathbf{u} e o modelo de parâmetros \mathbf{v} podem ser relacionados por meio de um sistema de equações chamado de problema direto:

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}(\mathbf{v}), \tag{2.1}$$

em que, \mathbf{M} representa o operador de modelagem. O problema direto consiste em prever \mathbf{u} , a partir de \mathbf{v} . No contexto do imageamento sísmico \mathbf{u} representa o dado observado (sismograma real) e \mathbf{v} é o vetor de parâmetros (velocidade, densidade

¹Segundo SHERIFF (2002) modelo é um conceito, a partir do qual se pode deduzir os efeitos para comparação com as observações: usado para desenvolver uma melhor compreensão das observações. O “modelo” pode ser conceitual, físico ou matemático. No contexto deste trabalho, o termo modelo é uma representação das propriedades da Terra descritas na forma de uma malha regular representada, com base em um vetor $\mathbf{v} \in R^n$, onde n é o número de pontos discretizados na malha.

etc.) utilizado para representar o modelo sísmico geológico. O operador \mathbf{M} descreve a relação entre os modelos de parâmetros e os dados sísmicos registrados.

O problema inverso consiste em encontrar o modelo de parâmetros \mathbf{v} dado \mathbf{u} . Sendo assim, com base no dado sísmico registrado em campo pode-se obter este modelo através do emprego do operador inverso \mathbf{M}^{-1} :

$$\mathbf{v} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{u}). \quad (2.2)$$

No processo de inversão sísmica busca-se reconstruir o modelo da subsuperfície da Terra, por meio de um problema inverso baseado no registro sísmico em superfície, conforme Equação 2.2. No entanto, em muitos casos encontrar o operador inverso \mathbf{M}^{-1} que explica a relação entre \mathbf{u} e \mathbf{v} se torna impraticável. Em problemas de inversão sísmica, uma forma comum de encontrar a solução deste problema consiste em buscar o modelo que minimiza (ou maximiza) uma função objetivo.

Dentro deste contexto, LAILLY (1983) e TARANTOLA (1984) formularam a inversão como um problema de otimização, tendo como objetivo a minimização da diferença entre o dado observado e calculado, através de um método de otimização local. Foi reconhecido que o gradiente do problema inverso poderia ser calculado, através da correlação entre o campo de onda propagado diretamente e a propagação reversa da diferença entre os dados observado e calculado. Foi observado, que a perturbação da velocidade obtida, através da primeira iteração da otimização local era semelhante a imagem migrada obtida pela Migração Reversa no Tempo. A diferença principal consiste no fato que para a migração o campo de onda registrado nos receptores é propagado reversamente no tempo, enquanto na FWI propaga-se a diferença entre o dado observado e calculado.

Uma grande vantagem da FWI em relação aos outros métodos de inversão como, por exemplo, a inversão por Tempo de Trânsito e a Análise de Velocidade por Migração, é que esse método pode recuperar detalhes de alta resolução do modelo de velocidades. Essa recuperação só é possível devido ao fato da técnica utilizar a equação completa da onda, o que permite levar em consideração a amplitude, fase, tempo de trânsito, as ondas convertidas e as reflexões múltiplas, no processo de minimização. Segundo DUVAL e RATCLIFFE (2020), a FWI atualmente é uma ferramenta de construção de modelos de velocidade popular e avançada capaz gerar modelos de velocidades de alta resolução. Semelhante ao impacto que a sísmica de banda larga trouxe para a indústria geofísica na última década. Diferentes casos de estudos mostram que o emprego do campo de velocidade da FWI como parte do fluxo de trabalho torna a interpretação geológica mais simples (ANGELOV *et al.*, 2019; BRETHERTON *et al.*, 2019; DUVAL e RATCLIFFE, 2020; GABRIELLI *et al.*, 2016; XIAO *et al.*, 2018, 2016; ZHANG *et al.*, 2018)

2.2 Solução do Problema Direto

O método sísmico é baseado no estudo de diferentes campos de onda propagados através da subsuperfície da Terra, em que os valores observados dependem das propriedades físicas da rocha. O estudo de dados sísmicos na geofísica consiste principalmente em analisar a resposta sísmica gerada sobre um modelo de propriedades da Terra. A solução do problema direto, também chamado de modelagem, fornece a resposta sísmica através da solução numérica da equação da onda a qual depende do modelo de parâmetros físicos e aquisição

No caso da propagação de ondas sísmicas neste trabalho, o parâmetro físico do modelo representa a velocidade da onda compressional representada por \mathbf{v} . O sismograma sintético é o registro da resposta sísmica calculada ao longo do domínio de observação.

Diversos métodos numéricos são empregados na solução numérica da Equação da Onda, tais como: Método de Elementos Finitos (SMITH, 1975), Método Pseudo Espectral (KOSLOFF e BAYSAL, 1982), Método de Expansão Rápida (PESTANA e STOFFA, 2010) e o Método de Diferenças Finitas (MDF) (KELLY *et al.*, 1976). A escolha do método depende em particular da necessidade de precisão, eficiência em avaliar a solução e a simplicidade de implementação (VIRIEUX *et al.*, 2011). O MDF tem sido a ferramenta mais utilizada pela geofísica para solucionar numericamente o problema direto, devido a sua fácil implementação e sua eficiência em meios heterogêneos (LEVANDER, 1988; VIRIEUX, 1986; ZHANG e YAO, 2013).

Considerando meios acústicos com densidade constante a equação da onda 2D é escrita da seguinte forma:

$$\nabla^2 p_j(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v(\mathbf{r})^2} \frac{\partial^2 p_j(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -s(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (2.3)$$

submetida às condições iniciais:

$$p_j(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial p_j(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0, \quad \text{para } t \leq 0, \quad (2.4)$$

em que $\mathbf{r} = (x, z)$ é o vetor posição, j representa a j -ésima Família de Tiro Comum, $p_j(\mathbf{r}, t)$ é o campo de pressão gerado por uma fonte pontual $s(t)$ posicionada em \mathbf{r}_j , δ é o operador Delta de Dirac e $v(\mathbf{r})$ é a velocidade de propagação da onda compressional no meio.

Neste trabalho, a solução do problema direto é realizada utilizando o MDF, com aproximações das derivadas parciais de segunda ordem no tempo e quarta ordem no espaço, com malhas definidas de forma a evitar dispersão numérica e a garantir estabilidade, conforme descrito no Apêndice B. Além disso, foi utilizado o método de camadas de absorção convolucionais com acoplamento perfeito (CPML -

Convolutional Perfectly Matched Layer - (BERENGER, 1994)).

2.3 FWI para Famílias de Tiro Comum

Geralmente, nos problemas de Geofísica a obtenção do inverso do operador de modelagem direta é impraticável (TARANTOLA, 1984). Uma solução que pode ser usada para resolver o problema é formular a técnica de inversão como um problema de otimização, ou seja, o modelo de parâmetros é estimado, a partir da minimização da distância entre os dados sísmicos observados (adquiridos em campo) e calculados (simulados, sintéticos ou numéricos) (PRATT *et al.*, 1998).

Nesta formulação, o cálculo do modelo \mathbf{v} pode ser realizado através da minimização (ou maximização) de uma função objetivo $\mathbf{E}(\mathbf{v})$. Um estudo empregando diferentes funções objetivos na FWI pode ser encontrado em JEON *et al.* (2014); JIMENEZ TEJERO *et al.* (2014). Neste trabalho, optou-se pela função objetivo de norma L_2 .

2.3.1 Função Objetivo

Neste trabalho, a função objetivo para a FWI de Famílias de Tiro Comum é definida como a distância da norma L_2 (TARANTOLA, 1984):

$$E(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{i=1}^{N_r} \int_0^T [p_j^{obs}(\mathbf{r}_i, t) - p_j^{calc}(\mathbf{r}_i, t; \mathbf{v})]^2 dt, \quad (2.5)$$

onde $p_j^{obs}(\mathbf{r}_i, t)$ e $p_j^{calc}(\mathbf{r}_i, t; \mathbf{v})$ representam, respectivamente, os traços sísmicos observados e calculados registrados nos i -ésimos receptores associados ao j -ésimo ponto de tiro. T representa a duração de registro do traço sísmico (normalmente poucos segundos) e N_s e N_r são respectivamente, o número de pontos de tiro e receptores. Neste caso, considera-se a geometria de aquisição do tipo *spread* fixo.

O dado calculado, $p_j^{calc}(\mathbf{r}, t)$, é determinado a partir da solução da equação da onda utilizando o MDF conforme definido na seção anterior.

2.3.2 Gradiente e Pré-Condicionamento

Utilizando o método do estado adjunto proposto por (LAILLY, 1983; TARANTOLA, 1984), o gradiente associado à Equação 2.5 pode ser calculado a partir da seguinte equação (Apêndice D):

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = - \sum_{j=1}^{N_s} \frac{2}{v(\mathbf{r})^3} \left[\frac{\partial^2 p_j^{calc}(\mathbf{r}, t; \mathbf{v})}{\partial t^2} \otimes p_j^\dagger(\mathbf{r}, t; \mathbf{v}) \right](0), \quad (2.6)$$

na qual " \otimes " representa o operador de correlação.

O campo adjunto associado à j -ésima Família de Tiro Comum, $p_j^\dagger(\mathbf{r}, t)$, é encontrado a partir da solução da equação da onda para o termo fonte dado pela diferença entre os campos de onda calculados e observados na posição dos receptores:

$$\nabla^2 p_j^\dagger(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v(\mathbf{r})^2} \frac{\partial^2 p_j^\dagger(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = - \sum_{i=1}^{N_r} \Delta p_j(\mathbf{r}, t; \mathbf{v}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (2.7)$$

submetidas às seguintes condições finais:

$$p_j^\dagger(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial p_j^\dagger(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0, \quad \text{para } t \geq T. \quad (2.8)$$

Para acelerar a convergência, o gradiente foi pré-condicionado pela diagonal da pseudo-Hessiana, como proposto por (CARNEIRO *et al.*, 2018), i.e.:

$$\tilde{\mathbf{H}}_j^{-1}(\mathbf{r}) \mathbf{g}_j(\mathbf{r}) = - \frac{v(\mathbf{r})^3}{2} \left\{ \int_0^T \left| \frac{\partial^2 p_j^\dagger(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \right|^2 dt \right\}^{-1} \int_0^T p_j^\dagger(\mathbf{r}, t) \frac{\partial^2 p_j^\dagger(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} dt. \quad (2.9)$$

Para encontrar uma solução do problema inverso através de um esquema de otimização local é necessário partir de um modelo de velocidade inicial \mathbf{v}_0 e caminhar de forma guiada no espaço de solução através do gradiente de $E(\mathbf{v})$. Nesta tese, a atualização do campo de velocidade na k -ésima iteração é dada por (NOCEDAL e WRIGHT, 2006):

$$\mathbf{v}_{k+1}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_k(\mathbf{r}) + \alpha_k \boldsymbol{\rho}_k(\mathbf{r}), \quad (2.10)$$

em que o comprimento do passo α_k é determinado seguindo a estratégia encontrada em BARZILAI e BORWEIN (1988) e $\boldsymbol{\rho}_k(\mathbf{r})$ representa a direção do gradiente conjugado e pré-condicionado (Apêndice C.4):

$$\boldsymbol{\rho}_k(\mathbf{r}) = \begin{cases} - \sum_{j=1}^{N_s} \tilde{\mathbf{H}}_{jk}^{-1}(\mathbf{r}) \mathbf{g}_{jk}(\mathbf{r}) & , \text{ se } k = 0 \\ - \sum_{j=1}^{N_s} \tilde{\mathbf{H}}_{jk}^{-1}(\mathbf{r}) \mathbf{g}_{jk}(\mathbf{r}) + \beta_k \boldsymbol{\rho}_{k-1}(\mathbf{r}) & , \text{ se } k \geq 1 \end{cases}, \quad (2.11)$$

onde o fator β_k é calculado pelo método Polak-Ribière (POLAK e RIBIERIE, 1969). Mais informações quanto ao emprego da matriz Hessiana e a diagonal da pseudo-Hessiana como pré-condicionador pode ser encontrado no Apêndice C.3.

2.3.3 Algoritmo FWI para Famílias de Tiro Comum

Para reduzir a possibilidade de convergência ao mínimo local como resultado do salto de ciclo, é realizado o esquema de inversão multiescala proposto por BUNKS *et al.* (1995) no qual os dados são filtrados em intervalos de frequências e invertidos sequencialmente dos intervalos mais baixos para os mais altos. Considerando os intervalos de faixas de frequência, os dados filtrados são invertidos no primeiro intervalo, $[0, f_1]$, a partir do modelo de velocidade inicial ($v_0(\mathbf{r})$), então os dados filtrados no segundo intervalo são invertidos, $[0, f_2]$, tendo como modelo inicial a velocidade obtida na primeira inversão ($v_1(\mathbf{r})$), e assim por diante até a última faixa de frequência, quando finalmente é obtido o modelo de velocidades final ($v_n(\mathbf{r})$). As frequências de limite superior f_1, f_2, \dots, f_n estão em ordem crescente.

A representação do esquema da FWI para um intervalo de frequência para N_s Famílias de Tiro Comum é apresentado no Algoritmo 1. Existem dois critérios de paradas. O primeiro é quando o número de iterações atinge seu valor máximo, N_{it} . O segundo é satisfeito quando a função objetivo é menor do que um parâmetro ϵ , em que é usualmente dado pela raiz da média quadrática do ruído incoerente nos dados. Nos experimentos numéricos livres de ruídos, foi adotado o primeiro critério.

2.3.4 Resultados Numéricos

Nesta seção, são avaliados o desempenho e a precisão da FWI acústica multiescala em frequência no domínio do tempo utilizando as técnicas de otimização e pré-condicionamento apresentadas nas seções anteriores e descritas no Apêndice C.4.

Inicialmente, é escolhido o modelo de velocidade apresentado por MORA (1989)(Figura 2.1). Este modelo possui uma velocidade de fundo de 2000m/s, uma anomalia de 1800m/s no centro do modelo e um refletor na profundidade de 800m apresentado uma velocidade de 2400m/s. A aquisição sísmica é simulada a partir do MDF, conforme Apêndice B, utilizando uma malha regular de espaçamento de 10m. A geometria de aquisição é do tipo *spread* fixo, em que cada receptor permanece no mesmo local e ativo para todas as fontes. O tempo total de registro para cada tiro é de 3s tendo uma amostragem temporal de 1ms. A tabela 2.1 apresenta os parâmetros utilizados no experimento.

O modelo inicial é homogêneo com velocidade de 1800m/s. Nesta aplicação, foi empregada a técnica multiescala utilizando a assinatura da fonte Ricker (Apêndice B.2.1), em que a frequência de corte inicia em 3Hz, variando de 3 em 3Hz até 30Hz. Em cada banda de frequência foram realizadas no máximo 30 iterações utilizando, para fins comparativos, os métodos gradiente descendente e gradiente conjugado para o cálculo da direção de busca e o método Barzilai-Borwein adaptativo para

Algoritmo 1: PSEUDO CÓDIGO FWI DE FAMÍLIA DE TIROS COMUM

```
1 início
2   Entrada:  $\mathbf{p}^{obs}$ ,  $s(t)$  e  $\mathbf{v}_0$ 
3   para  $j = 1, N_s$  faça
4     Carrega  $p_j^{obs}$  e  $s(t)$ 
5     Calcule  $p_j^{cal}(\mathbf{v}_0)$ ,  $\Delta p_j$  e  $E_j(\mathbf{v}_0)$ 
6   fim
7   Calcule  $E(\mathbf{v}_0)$ 
8   se  $E(\mathbf{v}_0) \leq \epsilon$  então
9      $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ 
10    saída
11  fim
12  para  $it = 1, N_{it}$  faça
13    para  $j = 1, N_s$  faça
14      Carrega  $p_j^{cal}(\mathbf{v}_0)$  e  $\Delta p_j$ 
15      Calcule  $p_j^{\ddagger}(\mathbf{v}_0)$  e  $\mathbf{g}_j(\mathbf{v}_0)$ 
16    fim
17    Calcule  $\rho$  e  $\alpha$ 
18    Calcule  $\mathbf{v}_1$ 
19    para  $j = 1, N_s$  faça
20      Carrega  $p_j^{obs}$ 
21      Calcule  $p_j^{cal}(\mathbf{v}_1)$ ,  $\Delta p_j$  e  $E_j(\mathbf{v}_1)$ 
22    fim
23    se  $E(\mathbf{v}_1) \leq \epsilon$  então
24       $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ 
25      saída
26    fim
27     $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1$ 
28  fim
29 fim
```

Tabela 2.1: Parâmetros da Inversão acústica.

Parâmetro	Valor
Espaçamento da malha	10m
Taxa de amostragem temporal	1ms
Tempo total de registro	3s
Espaçamento entre os tiros	140m
Profundidade de registro e dos tiros	3s
Espaçamento entre os receptores	10m
Número de receptores	200
Frequência Inicial	3Hz
Frequência Final	30Hz
Intervalo de Frequência	3Hz
Número de iterações por faixa de frequência	30

a determinação do comprimento do passo inicial (BARZILAI e BORWEIN, 1988; ZHOU *et al.*, 2006). Com relação ao critério de parada também foi utilizado a atualização mínima do parâmetro de velocidade igual a 1m/s. O objetivo principal desta aplicação consiste em avaliar a precisão da FWI frente a utilização do pré-condicionamento da diagonal da pseudo-Hessiana (PH) (CARNEIRO *et al.*, 2018) abordado na Seção 2.3.2 e o pré-condicionamento a partir do campo incidente (P) (SHIN *et al.*, 2001).

O primeiro resultado apresentado na Figura 2.2 consiste na estimativa da velocidade \mathbf{v} obtida a partir da FWI, variando de 3 a 30 Hz considerando os seguintes métodos de otimização: Gradiente Descendente (GD), Gradiente Conjugado (GC), Gradiente Descendente Pré-Condicionado (GD-P), Gradiente Conjugado Pré-Condicionado (GC-P) e Gradiente Conjugado Pré-Condicionado pela aproximação da diagonal da pseudo-Hessiana (GC-PH).

Nestes experimentos, o desafio consiste principalmente em recuperar a anomalia presente no centro do modelo. Esta recuperação está diretamente relacionada aos longos comprimentos de ondas, assim como o preenchimento do refletor na parte mais profunda do modelo. Conforme pode ser observado na Figura 2.2, o resultado que apresentou uma melhor precisão foi o GC-PH. Observa-se na Figura 2.2e um melhor preenchimento da camada mais profunda em relação aos demais resultados, além do melhor preenchimento do modelo.

O comportamento do preenchimento do interior da anomalia pode ser analisado a partir do gradiente gerado para cada intervalo de frequência. Na Figura 2.3, pode-se observar, principalmente para as faixas de frequências mais baixas, a contribuição dos longos comprimentos de onda com relação ao preenchimento do interior da anomalia. Como os longos comprimentos de ondas estão relacionados com as mais baixas frequências, os gradientes referentes aos resultados dos primeiros in-

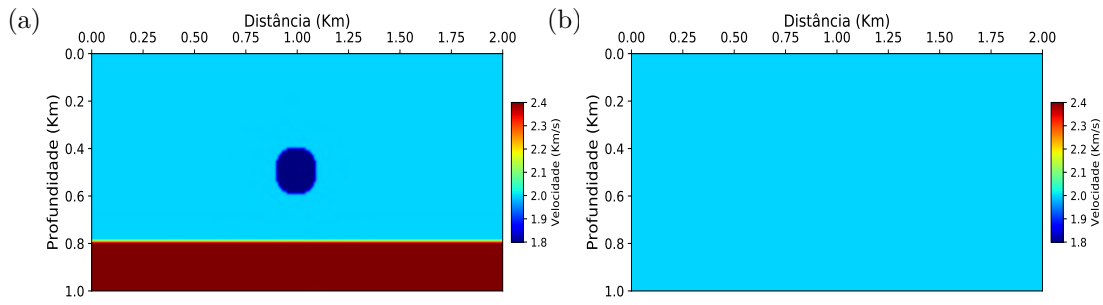


Figura 2.1: a) Modelo verdadeiro I e b) Modelo inicial.

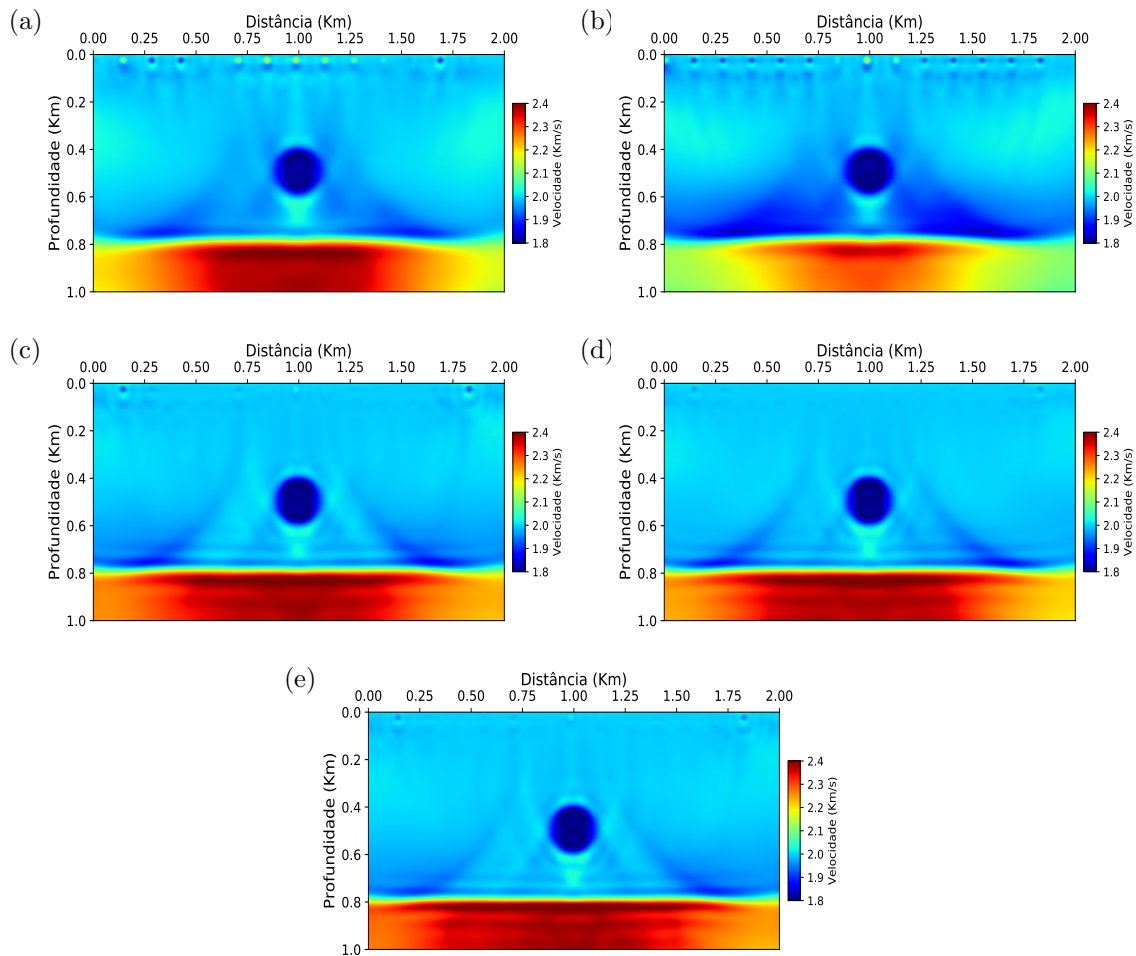


Figura 2.2: Modelo 2D estimado pela FWI utilizando uma frequência máxima de 30 Hz. a) para Gradiente Descendente, b) para gradiente conjugado, c) para gradiente descendente pré condicionado, d) para gradiente conjugado pré-condicionado e e) para gradiente conjugado pré condicionado pela diagonal da pseudo-Hessiana.

tervalos de frequência corroboram mais significativamente com o preenchimento da anomalia, o que proporciona um ajuste da cinemática do problema. Após ocorrer tal preenchimento a cinemática do modelo se torna mais correta o que contribui na precisão da correlação entre o campo de onda direto e o campo adjunto residual.

A fim de reforçar a análise anterior, foi selecionado um perfil vertical de velo-

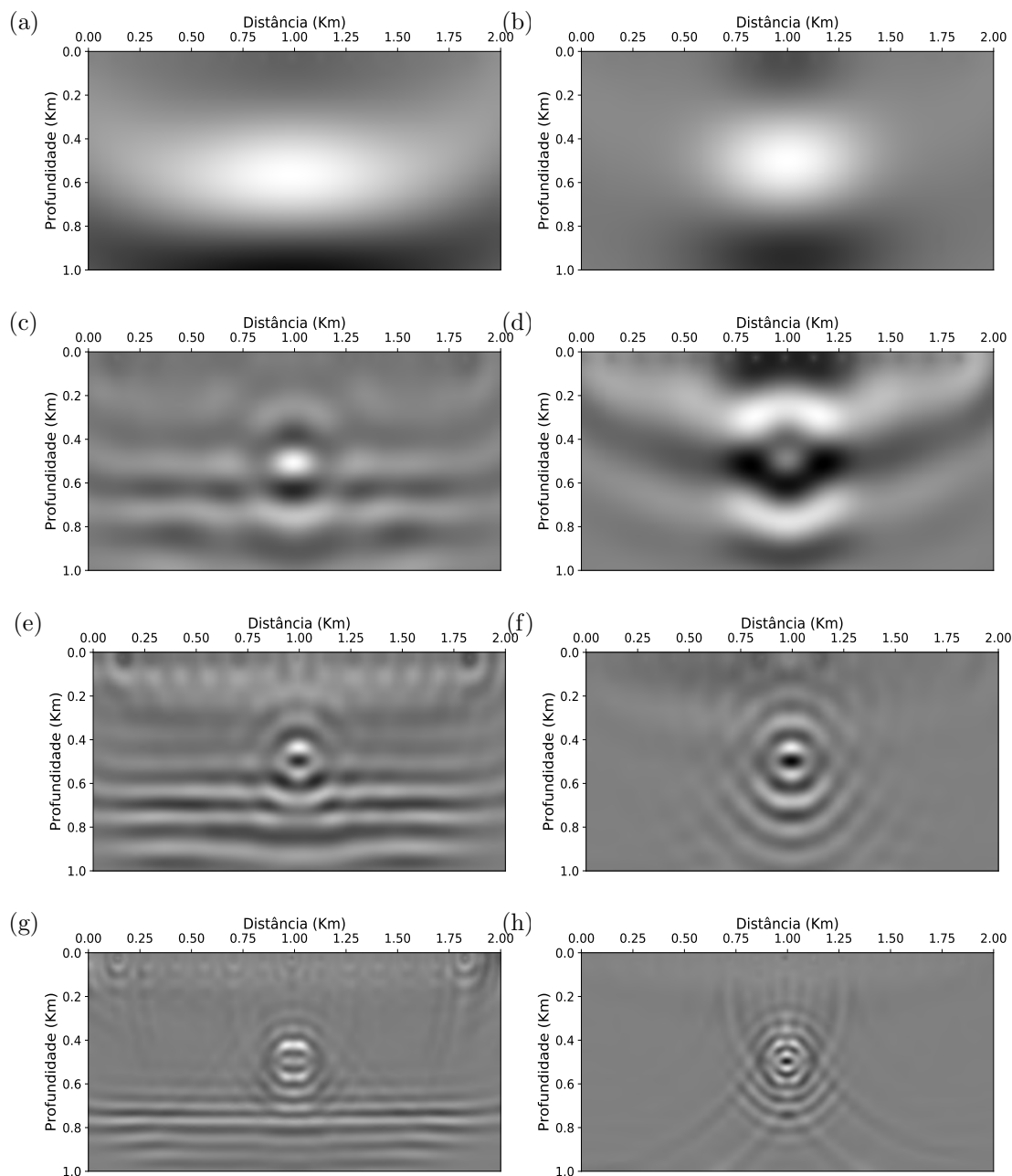


Figura 2.3: Gradiente gerado na primeira iteração considerando 14 tiros, para os intervalos de frequência de: a) e b) [0-3Hz]; c) e d) [0-9Hz]; e) e f) [0-15Hz]; g) e h) [0-30Hz]. À esquerda para o modelo-I e à direita para o modelo-II

cidade posicionado em 1km. Neste perfil, observar-se a melhor precisão do GC-PH em relação aos demais métodos. Além do perfil, a função objetivo é uma ferramenta de avaliação importante e mede a distância euclidiana entre os dados observados e os dados calculados. O comportamento da Função Objetivo em relação aos resultados obtidos para cada iteração para cada faixa de frequência pode ser observado na Figura 2.5. A Figura 2.4(a) apresenta o resultado para as 30 iterações da FWI para 3Hz, a Figura 2.4(b) apresenta os demais resultados para as frequências máximas

de 6 a 30 Hz. Para melhor comparar os resultados com e sem pré-condicionamento, foram geradas as Figuras (2.4(c) e 2.4(d)). Observa-se a melhor precisão do GC em relação ao GD. Já entre os testes realizados após o pré-condicionamento a melhor precisão foi alcançada pelo GC-PH.

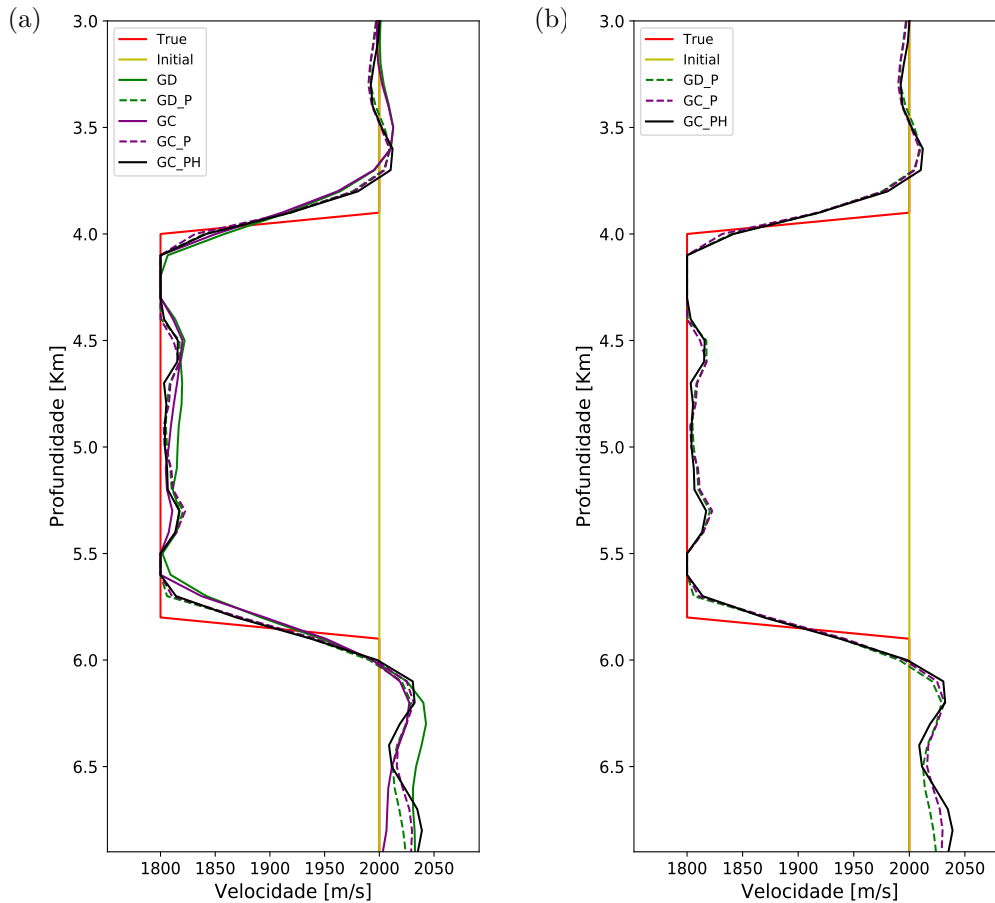


Figura 2.4: Comparações de perfis verticais para diferentes métodos de otimização na posição 1km. a) Todos os experimentos realizados e b) Somente os experimentos com Pré-Condicionamento.

Os resultados anteriores reforçam a importância das baixas frequência para o processo de atualização do modelo de velocidade. Diversos trabalhos vem empregando diferentes ferramentas com intuito de explorar o favorecimento das baixas frequências na FWI ((ALKHALIFAH, 2015; GUO e ALKHALIFAH, 2019; MORA, 1989; WANG *et al.*, 2016)). Tal fato reforça a importância do desenvolvimento de novas ferramentas para explorar os ganhos proporcionados pelos mais longos comprimentos de onda na FWI. Dentro deste contexto, a próxima aplicação visa apresentar o quanto as estruturas da subsuperfície da Terra podem colaborar no processo de atualização dos mais longos comprimentos de ondas.

No resultado presente na Figura 2.6 foi utilizado um modelo verdadeiro com apenas uma anomalia no centro (Figura 2.5(b)), ou seja, foi removido o refletor presente no exemplo anterior para comparar a recuperação da anomalia na ausência e

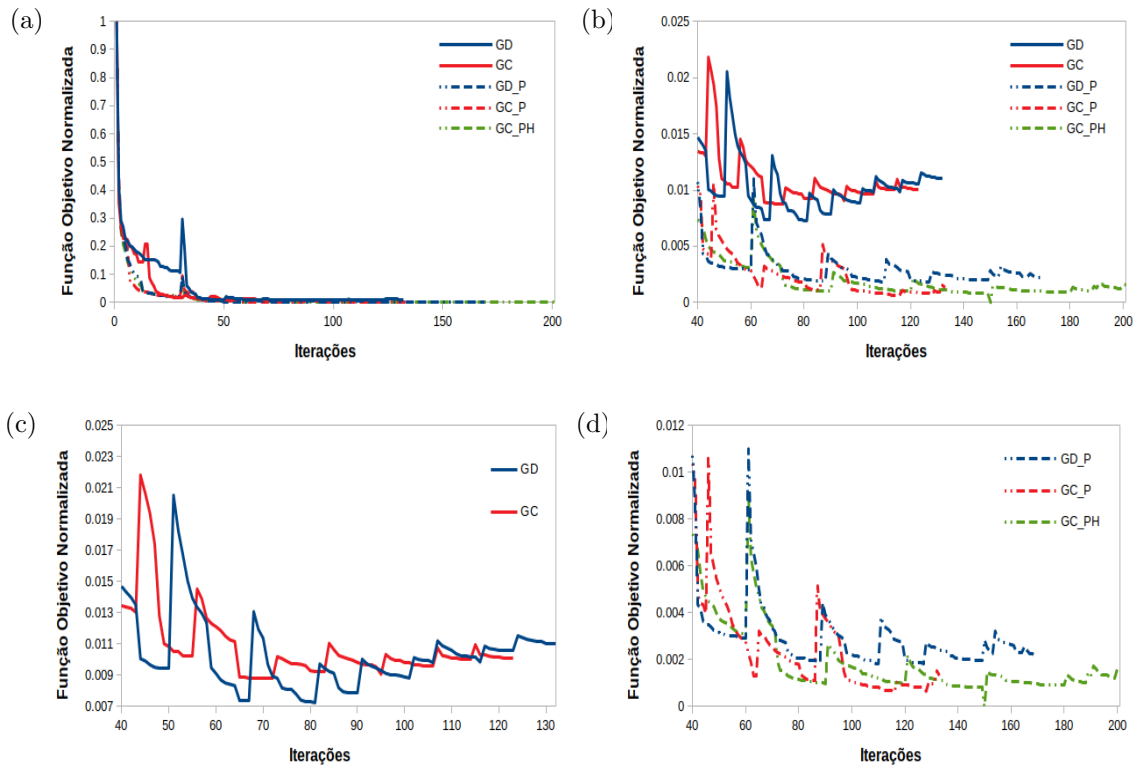


Figura 2.5: Função Objetivo de cada experimento para: a) todas as iterações, b) as últimas iterações, c) a comparação entre o método do Gradiente Descendente (GD) e Conjugado (GC) e d) Comparação entre o Gradiente descendente e conjugado pré-condicionado pelo campo incidente (GC_P) e pela diagonal da pseudo-Hessiana (GC_PH).

na presença do refletor. Avaliando os resultados presentes nas Figuras 2.5(a) e 2.5(d), observa-se que o modelo contendo o refletor apresenta uma melhor recuperação da anomalia, sugerindo a influência das estruturas da Terra como fonte natural no processo de inversão. A Figura 2.7 reforça tal afirmação, pois o perfil de velocidade referente a FWI para o modelo com o refletor (Figura 2.3.4), apresentou melhor resultado em comparação ao perfil referente a FWI aplicada sobre o modelo sem a presença do refletor.

A comparação realizada nesta seção, sugere a influência das estruturas da Terra como fonte passiva natural no processo de imageamento, que consequentemente ao ser explorada de forma a ativar tais fontes, pode proporcionar ganhos tal como apresentado na Figura 2.6.

No próximo capítulo, será apresentado de forma inovadora o emprego de um método capaz de explorar as fontes passivas naturais com o intuito de reduzir o custo da FWI. O novo esquema explora de forma otimizada atualização do campo de velocidade completo, buscando o correto imageamento do campo de onda a partir da atualização do campo de velocidade.

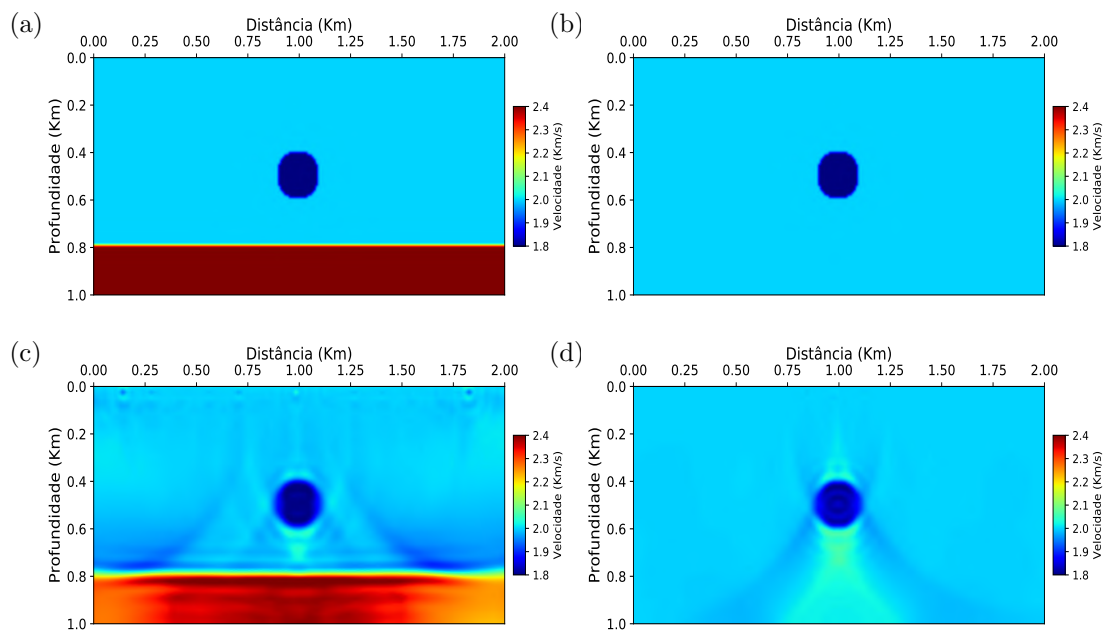


Figura 2.6: a) Modelo-I, b) Modelo-II e c) e d) Resultados da FWI referente à saída para 30 Hz dos respectivos modelos.

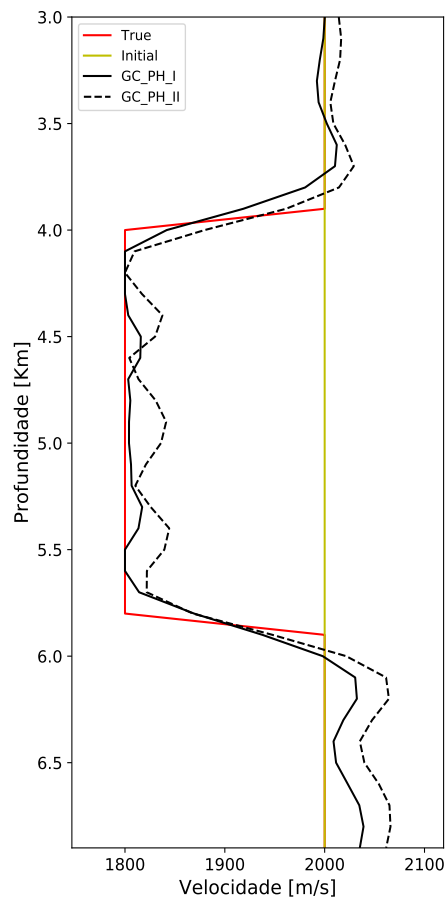


Figura 2.7: Comparação dos perfis de velocidade na posição $x=1,0$ km relativos aos resultados da FWI nos modelos-I e -II, para a frequência final de 30Hz.

Capítulo 3

Inversão da Forma de Onda Completa de Fontes Superficiais

Neste capítulo, serão descritos os ingredientes do método e seu algoritmo. De forma geral, um registro de tiros superficiais é a resposta sísmica de uma distribuição de pontos fontes superficiais (ou linear em aquisições 2D), que sintetiza formas de ondas específicas, por exemplo, frente de ondas planas, na superfície ou em subsuperfície. A formulação matemática de BERKHOUT (1992) é o resultado da aplicação do Operador de Síntese sobre o dado de campo, como será apresentado em detalhes, nesta seção, no domínio do tempo.

O conceito de fontes superficiais foi empregado por RIETVELD e BERKHOUT (1994) no processo de migração em profundidade, com o intuito de reduzir o custo computacional e melhorar a precisão do resultado final da migração. Especificamente realizou-se a migração em profundidade através da técnica de iluminação controlada, objetivando a qualidade em uma área de interesse exploratório. RIETVELD (1995) estendeu a técnica para três dimensões e WANG *et al.* (2001) introduziram o conceito de multi-iluminação controlada. CHEN *et al.* (2004) apresentaram um método de migração por diferenças finitas no domínio da frequência, onde foi utilizado o conceito de iluminação controlada por rotação de superfície. BOECHAT *et al.* (2005a,b) empregaram o conceito de síntese de onda na migração reversa no tempo por fontes superficiais e BOECHAT (2007) estendeu esta estratégia de migração para aplicações 3D.

Com intuito de reduzir a quantidade de Famílias de Tiro Comum a serem migradas (ROMERO *et al.*, 2000) propuseram o método *phase encoding*, que considera atrasos de tempo para compor um super-sismograma. Essa composição foi realizada através da substituição das fontes individuais por um número menor de fontes agrupadas, onde cada agrupamento de fontes representa uma combinação linear ponderada de atrasos individuais.

BAUMSTEIN *et al.* (2011); BEN-HADJ-ALI *et al.* (2011); BOONYASI-

RIWAT e SCHUSTER (2010); KREBS *et al.* (2009) aplicaram o conceito de fonte distribuída no processo de Inversão FWI no domínio do tempo. (KREBS *et al.*, 2009) demonstraram a eficiência da utilização de fontes simultâneas distribuídas sem aumentar o custo computacional. Além disso, foi demonstrado que o ruído gerado a partir do *cross-talk* pode ser quase inteiramente eliminado dos modelos invertidos ao aleatorizar as funções de codificação em cada iteração. Essa conclusão vai ao encontro das análises teóricas apresentadas por (SCHUSTER *et al.*, 2011).

Nos fluxos tradicionais de construção de modelos de velocidades, a primeira etapa busca prever um modelo que honre as informações cinemáticas. De posse da cinemática correta, os dados sísmicos registrados podem ser, por exemplo, propagados reversamente em direção a subsuperfície da Terra e, assim, a partir das técnicas de migração sísmica as amplitudes são posicionadas sobre os refletores, fornecendo as informações de subsuperfície em alta resolução. Combinando as técnicas de tomografia e migração, um largo espectro de número de onda pode ser recuperado, porém teremos uma ausência de preenchimento entre eles (CLAERBOUT, 1985; HU *et al.*, 2018).

Conforme mencionado no capítulo anterior, a FWI preenche não só esta ausência, mas é capaz de trabalhar com todo o espectro presente no dado. Contudo, devido à não linearidade da função objetivo Norma L_2 , se torna necessário, por exemplo, empregar a estratégia multiescala em frequência para realizar a inversão das mais baixas para as mais altas frequências ocasionando, assim, um alto custo computacional. Tal custo está associado principalmente ao número de simulações presentes no cálculo do campo de onda.

Nesta seção, as fontes superficiais serão exploradas na FWI a partir das Sínteses de Onda Plana, buscando reduzir o número de simulações do campo de onda a partir do emprego de um novo esquema chamado Inversão da Forma de Onda Completa de Fontes Superficiais (FWIAR). Este esquema é capaz de reduzir o número de propagação do campo de onda direto e reverso.

3.1 Operador de Síntese

Para determinar o operador que simula o registro de fontes superficiais, resolve-se a equação da onda para fontes virtuais distribuídas ao longo de um plano (ou linha) em subsuperfície, isto é:

$$\nabla^2 \chi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v_{\text{op}}(\mathbf{r})^2} \frac{\partial^2 \chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = - \sum_{h=1}^N w(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_h), \quad (3.1)$$

submetidas às condições iniciais

$$\chi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0, \text{ para } t \geq 0, \quad (3.2)$$

onde modelo de velocidades de fundo, $\mathbf{v}_{\text{op}}(\mathbf{r})$, é o modelo inicial utilizado na inversão para cada faixa de frequência e \mathbf{r}_h representa o vetor posição da h -ésima fonte virtual. Especificamente, a equação diferencial parcial é resolvida através do MDF, cuja malha é determinada por $\mathbf{v}_{\text{op}}(\mathbf{r})$ e os altos valores de frequência são determinados pela $w(t)$, obedecendo as regras de prevenção de instabilidade e dispersão já mencionadas anteriormente.

O Operador de Síntese \mathcal{O} é definido neste trabalho como o campo de onda registrado nos locais das fontes pontuais da aquisição. Em termos matemáticos, este operador é o conjunto de N_s traços sísmicos deconvolvidos expresso da seguinte forma,

$$\mathcal{O}(\mathbf{r}_j, t; \mathbf{v}_{\text{op}}) = \chi_d(\mathbf{r}_j, T_o - t; \mathbf{v}_{\text{op}}), \quad j = 1, \dots, N_s, \quad (3.3)$$

em que o termo subscripto “d”, indica que a assinatura da fonte foi deconvolvida e T_o é o tempo de registro das ondas incidentes na superfície.

Nesta seção, para exemplificar a construção do operador escolheu-se o modelo Marmousi-2 modificado MARTIN *et al.* (2002), Figura 3.1. A Figura 3.1a apresenta o modelo verdadeiro onde a região destacada representa a área de interesse e a Figura 3.1b apresenta o campo de velocidade verdadeiro suavizado a partir de uma média móvel de 30 pontos em ambas as direções. A linha horizontal (pontos pretos) em 2,6km indica a posição de distribuição das fontes virtuais e a linha branca indica a localização dos receptores.

A Figura 3.2 apresenta o registro associado a uma frente de onda horizontal gerada em superfície (Figura 3.2a) e subsuperfície (Figura 3.2b). Observa-se que, para o registro gerado em subsuperfície, além das ondas diretas (primeiras chegadas), há eventos complexos associados a múltiplas e difrações internas que ocorrem quando o campo de onda se propaga sobre o modelo de velocidades de fundo, que pode apresentar altos contrastes de impedância.

Pode-se buscar o direcionamento do campo de onda, de forma controlada, a fim de ativar as fontes passivas independente da focalização. Neste trabalho, o direcionamento do campo de onda tem como objetivo principal aumentar a iluminação sísmica nas regiões de interesse, principalmente em zonas mais profundas, utilizando a combinação dos operadores de síntese e as fontes passivas ativadas. Dentro desse contexto, empregou-se um corte no registro a fim de gerar o operador de síntese de forma a selecionar apenas as informações das primeiras chegadas (eventos). Dessa forma, o operador pode ser representado conforme a Figura 3.3.

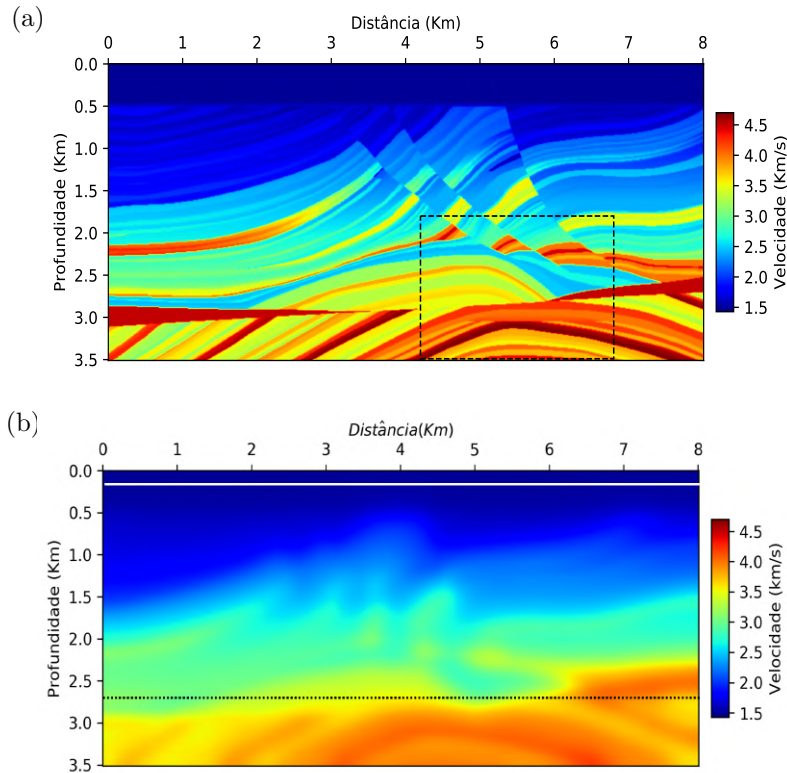


Figura 3.1: Modelo de velocidade Marmousi-2 modificado. a) Modelo de velocidade verdadeiro e b) Modelo de velocidade suavizado (Média Móvel de 30 pontos), com linhas horizontais (pontos pretos) em 2,6km representando os pontos fontes em subsuperfície para criar o operador de síntese. A linha branca indica a posição dos receptores localizados próximos a superfície.

A partir desta representação é possível utilizar a Equação 2.3 para propagar o novo campo fonte (Operador de Síntese), buscando uma melhor cobertura sísmica próximo dos alvos de interesse. A melhoria dessa cobertura está diretamente relacionada com as fontes passivas, que são ativadas a partir do aumento das amplitudes do campo de onda na região de interesse. Essas fontes são espalhamentos promovidos pelo contraste do campo de velocidades, mas em certas regiões, o campo de onda pode apresentar uma baixa amplitude e para que a fonte passiva ocorra de forma significativa é necessário ocorrer a combinação do contraste e o aumento da amplitude. Tal característica torna o emprego do Operador de Síntese fundamental para o aumento da amplitude e conseqüentemente a ativação das fontes passivas, principalmente na região de interesse.

Para estudar o comportamento do campo de onda a partir da propagação reversa do operador, a Figura 3.4 apresenta diferentes instantes de tempo para dois operadores de Síntese gerados, respectivamente, na profundidade de 0,5km (instantes de tempo representado a esquerda) a 2,6km (instantes de tempo representado a direita). Escolhendo a região do reservatório como alvo, podemos observar que o campo de onda propagado reversamente, a partir do operador referente a pro-

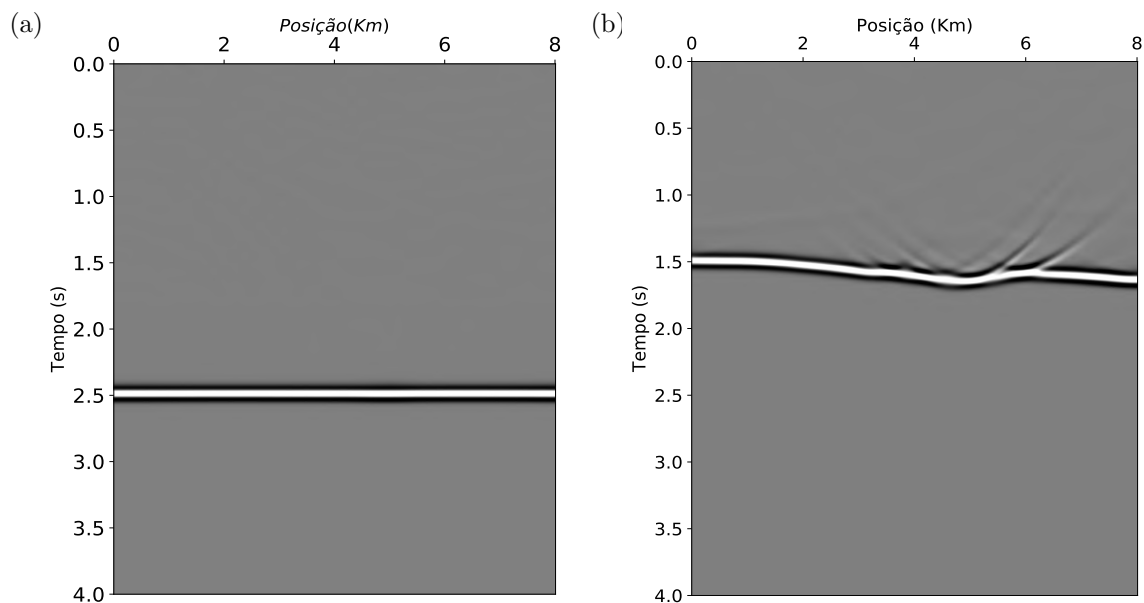


Figura 3.2: Registro do campo de onda (invertido) gerado pelas fontes superficiais para o tempo total de registro de 4s relativo a profundidade em: a) 0,5km e b) 2,6Km.

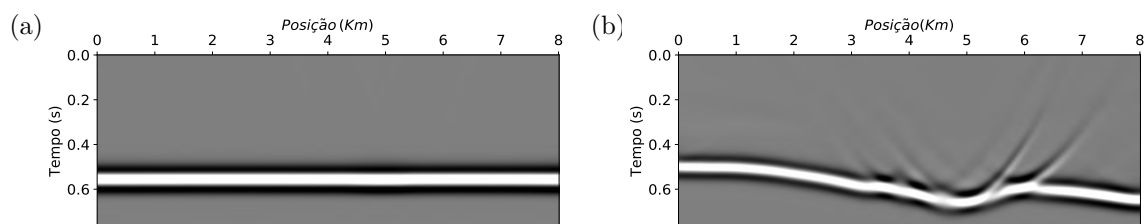


Figura 3.3: Operador de Síntese relativo a linha horizontal em: a) 0,5km e b) 2,6km. A assinatura da fonte não foi deconvolvida.

fundidade de 2,6km, apresenta uma maior concentração de energia (quadrado do campo de pressão) do campo de ondas sobre a região alvo e com isso, tem-se uma maior amplitude presente nas fontes passivas. Para avaliar a maior concentração foi registrada, nas profundidades de 3km e afastamento entre 5 e 6 km, a energia do campo de onda reverso dos operadores gerados na profundidade de 0,5, 3 e 2,6 km. Conforme pode ser observado na Figura 3.5, ocorreu uma maior concentração de energia para o operador gerado na subsuperfície do modelo.

A diferença do comportamento do campo de onda para o operador de onda de superfície e subsuperfície apresenta a importância do emprego do operador de síntese de onda para a ativação da fontes passivas na região alvo. Vale ressaltar que, o operador não está limitado as ondas planas e pode ser gerado a partir de diferentes formas que vão alterar o direcionamento do campo, por exemplo, o topo ou a base de um domo de sal.

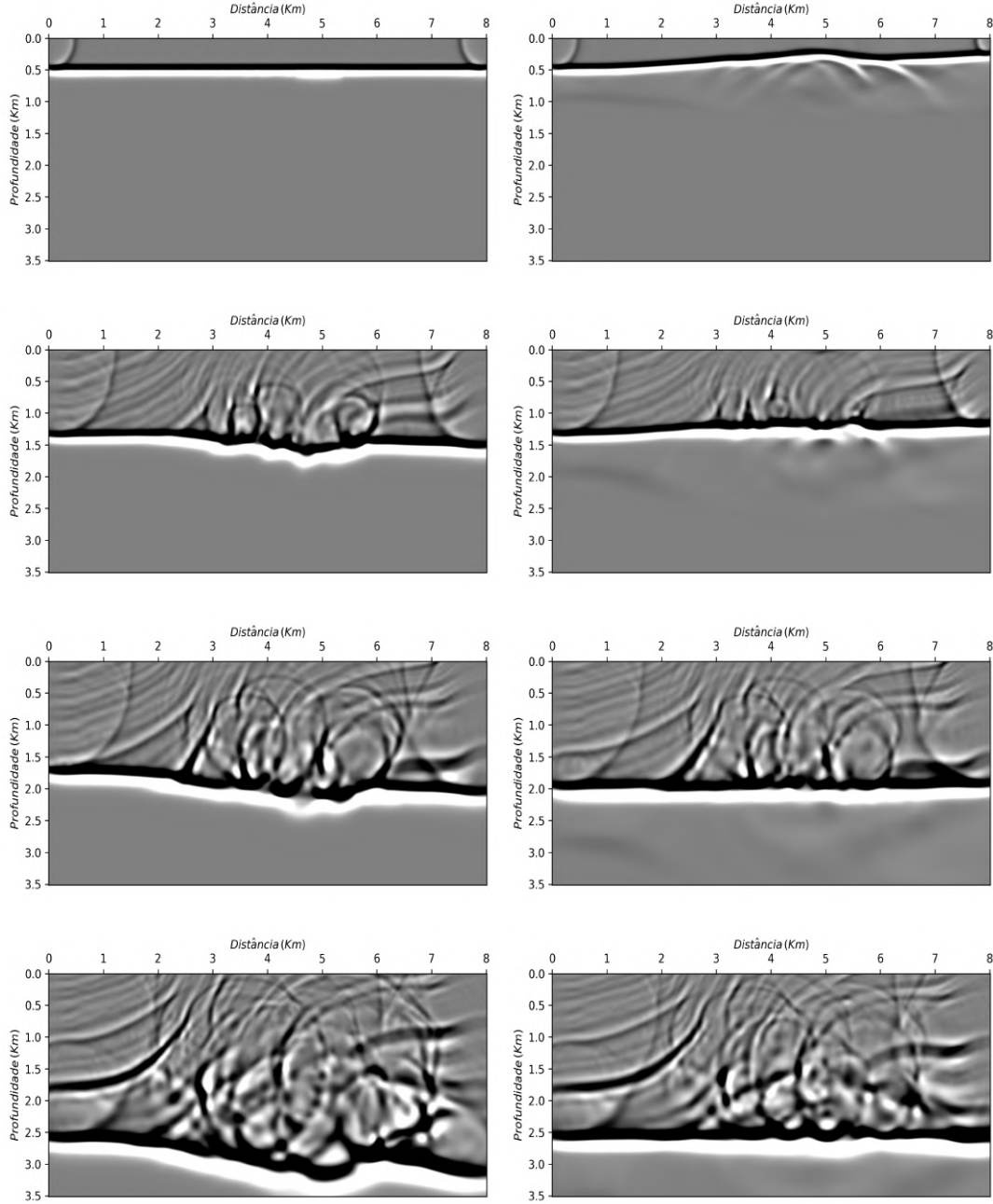


Figura 3.4: Propagação direta do Operador de Síntese sobre o modelo verdadeiro gerado na profundidade de 0,5km representado nas imagens à esquerda e 2,6km representado nas imagens à direita.

3.2 Registro de Tiros Superficiais

Considerando todos os traços registrados no receptor \mathbf{r}_i relativo a todos os pontos fontes ($p_j^{obs}, j = 1, \dots, N_s$), um traço de registro de fontes superficiais localizado na mesma posição de registro \mathbf{r}_i é dado pela soma das convoluções:

$$P_j^{obs}(\mathbf{r}_i, t) = \sum_{j=1}^{N_s} O_j(\mathbf{r}_j, t) * p_j^{obs}(\mathbf{r}_i, t), \quad i = 1, \dots, N_r, \quad (3.4)$$

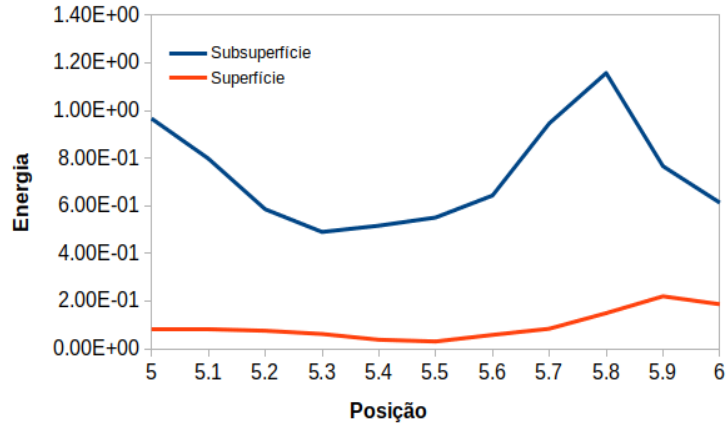


Figura 3.5: Energia registrada na região do reservatório durante a propagação reversa dos operadores de síntese gerados na profundidade de 0,5km (superfície) e 2,6km (subsuperfície).

A Equação 3.4 corresponde, no domínio do tempo, a fórmula empregada em RIETVELD (1995). Quando o modelo de fundo é homogêneo e a frente de onda sintética é plana, a aplicação desta fórmula equivale ao empilhamento de agrupamentos de Família de Tiro Comum com atrasos lineares. Por outro lado, no caso de modelos de fundo complexos e frentes de ondas sintéticas distantes da superfície, os registros de fontes superficiais obtidos com esse procedimento diferem daqueles com atrasos lineares, consideravelmente. A Figura 3.6 apresenta um esquema ilustrativo que visa auxiliar a compreensão da construção da Fonte Superficial.

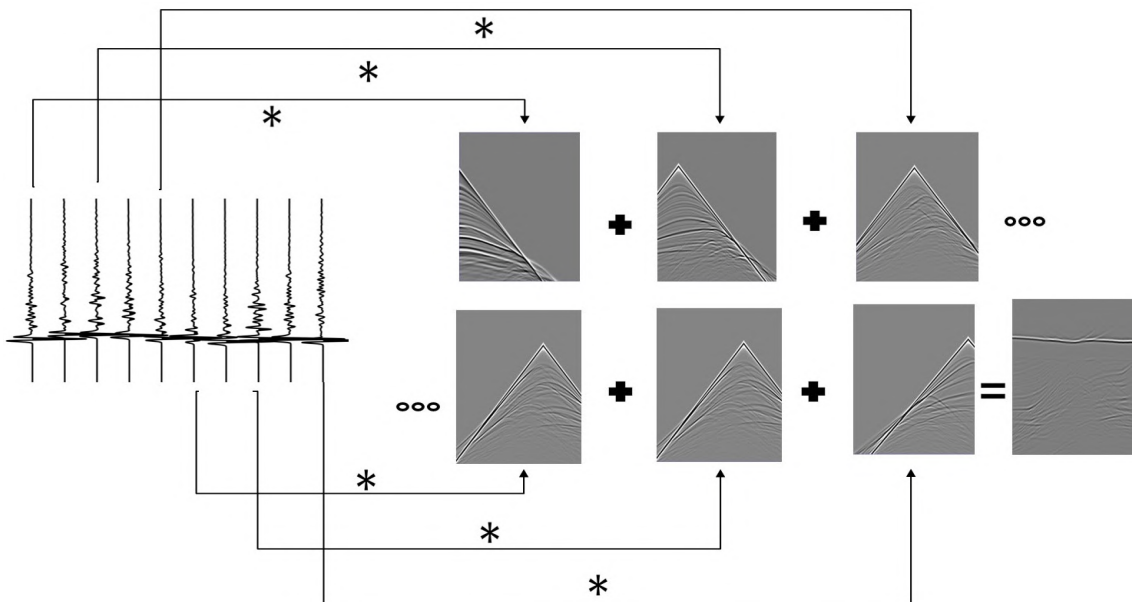


Figura 3.6: Esquema da construção da Fonte Superficial gerada a partir da Equação 3.4.

A Figura 3.7 apresenta o registro de fontes superficiais obtido através da

simulação de registro de tiro comum simulados no modelo verdadeiro Marmousi-2, utilizando o operador de síntese da Figura 3.3. Observa-se a presença do operador nos primeiros 700 milissegundos.

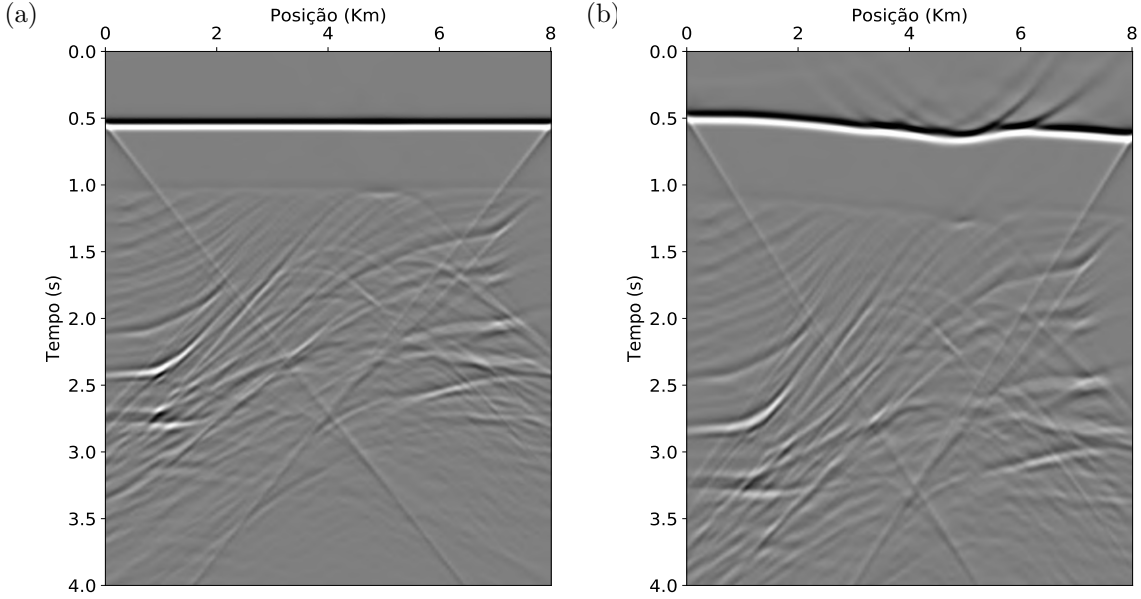


Figura 3.7: Registro de fontes superficiais obtido a partir do empilhamento da convolução entre as Famílias de Tiro Comum e os operadores de síntese associados a: a) Fontes virtuais em superfície e b) Fontes virtuais em subsuperfície. O modelo Marmousi foi utilizado para simular as Famílias de Tiro Comum.

3.3 Inversão da Forma de Onda Completa de Registro de Fontes Superficiais

Nesta seção, serão descritos os ingredientes e o algoritmo no novo método. Em relação a função objetivo, da mesma forma apresentada na Equação 2.5, será utilizada o quadrado da Norma L2:

$$E_{AR}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \sum_{J=1}^{N_{AR}} \sum_{i=1}^{N_r} \int_0^T [P_J^{obs}(\mathbf{r}_i, t) - P_J^{cal}(\mathbf{r}_i, t; \mathbf{v})]^2 dt, \quad (3.5)$$

onde a J -ésima Fonte Superficial é registrada na posição dos receptores sendo encontrada a partir da solução da equação da onda utilizando o J -ésimo operador de síntese convolvido com a assinatura da fonte, ou seja,

$$\nabla^2 P_J^{cal}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v(\mathbf{r})^2} \frac{\partial^2 P_J^{cal}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = - \sum_{j=1}^{N_s} O_j(\mathbf{r}, t) * s(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (3.6)$$

submetidas às seguintes condições iniciais:

$$P_J^{cal}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial P_J^{cal}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0, \quad t \leq 0. \quad (3.7)$$

O gradiente é dado pela soma dos gradientes associados a todas as fontes superficiais,

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = - \sum_{J=1}^{N_{AR}} \frac{2}{v(\mathbf{r})^3} \left[\frac{\partial^2 P_J^{cal}}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t; \mathbf{v}) \otimes P_J^\dagger(\mathbf{r}, t; \mathbf{v}) \right] (0), \quad (3.8)$$

onde P_J^\dagger representa o J -ésimo campo de onda de estado adjunto de fontes superficiais obtido a partir da propagação reversa do campo residual do J -ésimo registro de tiro superficial nos receptores, $\Delta P_J(\mathbf{r}, t; \mathbf{v}) = P_J^{obs}(\mathbf{r}, t) - P_J^{cal}(\mathbf{r}, t; \mathbf{v})$, sendo determinado a partir da solução da equação diferencial parcial com condições finais:

$$\nabla^2 P_J^\dagger(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v(\mathbf{r})^2} \frac{\partial^2 P_J^\dagger(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = - \sum_{i=1}^{N_r} \Delta P_J(\mathbf{r}, t; \mathbf{v}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (3.9)$$

submetidas às seguintes condições finais:

$$P_J^\dagger(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial P_J^\dagger(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0, \quad \text{para } t \geq T. \quad (3.10)$$

Da mesma forma apresentada anteriormente, emprega-se o pré-condicionamento de Polak-Ribière, ou seja,

$$\boldsymbol{\rho}_k(\mathbf{r}) = \begin{cases} - \sum_{J=1}^{N_{AR}} \tilde{\mathbf{H}}_{Jk}^{-1}(\mathbf{r}) \mathbf{G}_{Jk}(\mathbf{r}) & , \text{ se } k = 0 \\ - \sum_{J=1}^{N_{AR}} \tilde{\mathbf{H}}_{Jk}^{-1}(\mathbf{r}) \mathbf{G}_{Jk}(\mathbf{r}) + \beta_k \boldsymbol{\rho}_{k-1}(\mathbf{r}) & , \text{ se } k \geq 1 \end{cases}. \quad (3.11)$$

A distribuição das fontes de Síntese de Onda é realizada neste trabalho a partir da escolha de três profundidades e de cinco ângulos de inclinação, que são escolhidos com o objetivo de melhor iluminar a região de interesse (Figura 3.8). Desta forma, a partir da Equação 3.9 tem-se um gradiente para cada ângulo escolhido. Essa equação, conforme mencionado, depende do registro de tiros superficiais observados e calculados para gerar o campo residual. Para as aplicações sintéticas deste trabalho, o registro observado é gerado sobre o modelo verdadeiro e o calculado sobre o modelo de fundo, que é atualizado em cada iteração.

A Figura 3.9 apresenta o gradiente gerado a partir de 15 Tiros Superficiais considerando uma frequência de corte de 12Hz e o modelo de velocidades verdadeiro e inicial presentes na Figura 3.1. Na FWIAR, a fonte virtual é gerada na subsuperfície e o emprego do pré-condicionamento permite atenuar o campo fonte presente no interior do modelo. Com isso, é possível melhorar a convergência do método tendo

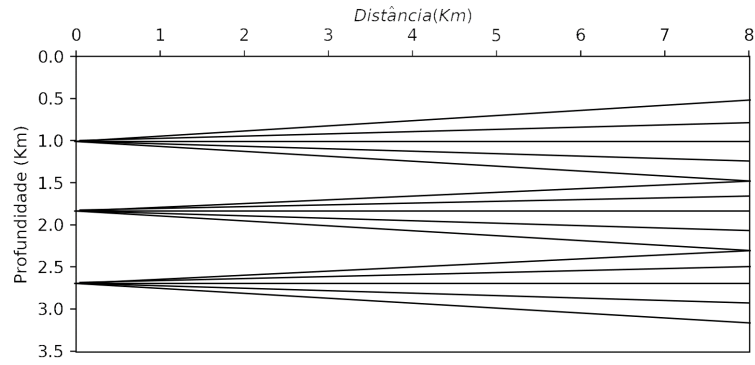


Figura 3.8: Posicionamento das fontes virtuais em subsuperfície.

em vista a presença de diferentes fontes virtuais presente no interior do modelo.

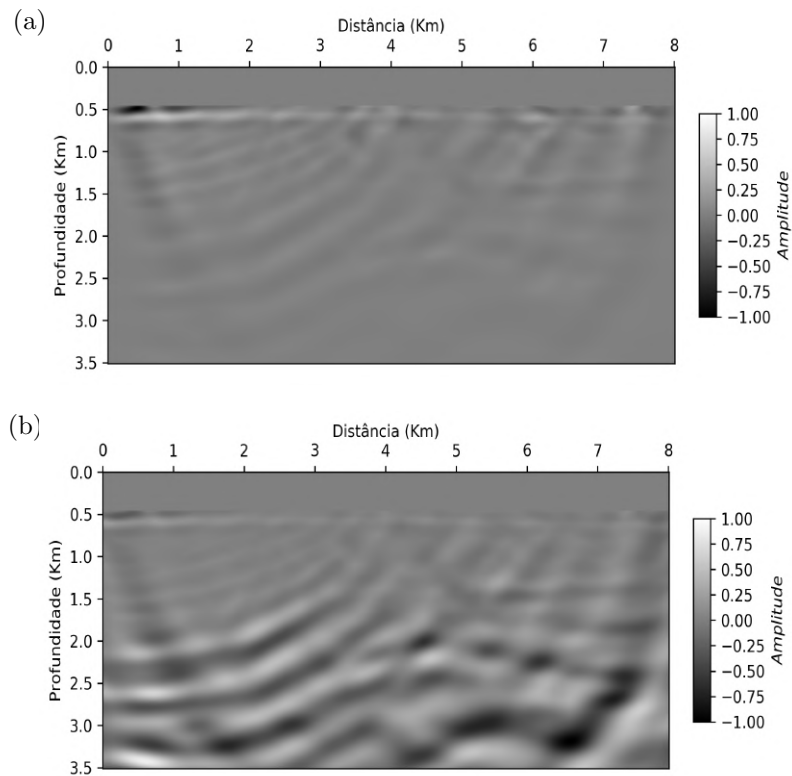


Figura 3.9: Gradiente normalizado gerado a partir de 15 registros de fontes superficiais para a frequência de corte de 12Hz e o modelo de velocidades verdadeiro e inicial: a) Sem o pré-condicionamento e b) com pré-condicionamento.

3.4 Algoritmo para a FWI de Fontes Superficiais - FWIAR

O Algoritmo 2 é utilizado no novo método para a inversão de um intervalo de frequência. Em comparação ao Algoritmo 1, a nova estratégia é aplicada para

fontes superficiais simuladas em vez de Família de Tiro Comum.

Os operadores de síntese são calculados em relação a um número de horizontes previamente escolhido em subsuperfície, utilizando o campo de velocidade inicial do respectivo intervalo de frequência, ou seja, o campo de velocidades utilizado para gerar o operador, não é atualizado com o incremento das iterações. De posse dos operadores, os registros de fontes superficiais observadas é criado a partir do empilhamento das convoluções de acordo com a Equação 3.4 e os dados calculados são determinados a partir da solução da equação diferencial parcial da modelagem direta, Equação 3.4.

De posse do campo residual de fontes superficiais o gradiente é calculado para cada fonte superficial a partir da Equação 3.8. Após o cálculo do gradiente a atualização do modelo é realizada e então o valor da função objetivo é calculada, neste momento, o operador não é atualizado. Caso a função objetivo for menor que a anterior, o processo avançará para a próxima iteração.

Algoritmo 2: PSEUDO CÓDIGO FWIAR PARA UM INTERVALO DE FREQUÊNCIA

```
1 Entrada:  $p^{obs}$ ,  $s(t)$  e  $\mathbf{v}_0$ 
2  $\mathbf{v}_{op} = \mathbf{v}_0$  para  $J=1, N_{AR}$  faça
3   | Carrega  $p^{obs}$  e  $s(t)$ 
4   | Calcule  $O_J(\mathbf{v}_{op})$ 
5   | Calcule  $P_J^{obs}$ 
6 fim
7 para  $J=1, N_{AR}$  faça
8   | Carrega  $O_J(\mathbf{v}_{op})$ 
9   | Calcule  $P_J^{cal}(\mathbf{v}_0)$ 
10  | Calcule  $\Delta P_J$  e  $E_{AR,J}(\mathbf{v}_0)$ 
11 fim
12 Compute  $E_{AR}(\mathbf{v}_0)$  se  $E_{AR}(\mathbf{v}_0) \leq \epsilon$  então
13   |  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ 
14   | saída
15 fim
16 para  $it=1, Nit$  faça
17   | para  $J=1, N_{AR}$  faça
18     | Carrega  $O_J(\mathbf{v}_{op})$ ,  $P_J^{obs}$  e  $P_J^{cal}(\mathbf{v}_0)$ 
19     | Calcule  $P_J^{\ddagger}(\mathbf{v}_0)$  e  $\mathbf{G}_J(\mathbf{v}_0)$ 
20     | fim
21     | Calcule  $\mathbf{G}(\mathbf{v}_0)$ 
22     | Calcule  $\rho$ , e  $\alpha$ 
23     | Calcule  $\mathbf{v}_1$ 
24     | para  $J=1, N_{AR}$  faça
25       | Carrega  $O_J(\mathbf{v}_{op})$  e  $P_J^{obs}$ 
26       | Calcule  $P_J^{cal}(\mathbf{v}_1)$ 
27       | Calcule  $\Delta P_J$  e  $E_{AR,J}(\mathbf{v}_1)$ 
28     | fim
29     | se  $E_{AR}(\mathbf{v}_1) \leq \epsilon$  então
30       |  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ 
31       | saída
32     | fim
33     |  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1$ 
34 fim
```

Capítulo 4

Resultados Numéricos

Para ilustrar a FWI de Fontes Superficiais e comparar seu desempenho computacional em relação a FWI de Família de Tiro Comum, foram realizados experimentos numéricos utilizando o modelo Marmousi-2 (Figura 4.1) (MARTIN *et al.*, 2002). A partir deste *benchmark* foram gerados dois modelos: um bastante estruturado que apresenta altos contrastes de velocidade e outro pouco estruturado (aproximadamente 1D), com baixos contrastes de velocidade. O retângulo tracejado em preto representa o Modelo-I de dimensões de 8 x 3,5km. A Figura 4.2a representa este modelo e a seta indica a região do reservatório (alvo exploratório). A escolha dessa região foi motivada pela presença de alta complexidade estratigráfica e estrutural acima do reservatório.

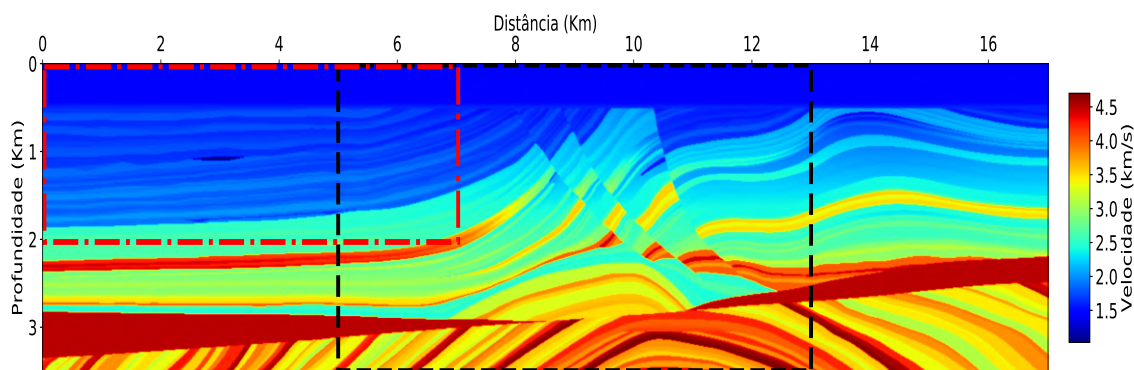


Figura 4.1: Modelo de velocidade Marmousi 2. O retângulo tracejado preto representa o Modelo-I e o vermelho representa o Modelo-II.

Para analisar o desempenho do novo método na presença de baixo contraste de velocidades acima de uma região alvo, foi utilizada a área mais rasa do modelo Marmousi-2, retângulo tracejado em vermelho na Figura 4.1, gerando o Modelo-II, o reservatório está indicado pela seta e representa a região alvo (Figura 4.2b). As dimensões deste modelo são 7 x 2,5 km. Uma extensão de 0,5km de lâmina d'água foi inserida após a seleção do modelo para simular um levantamento em

águas profundas.

Foram realizadas quatro aplicações em cada experimento, uma da FWI de Família de Tiro Comum (referência) e as outras três da FWI de Fontes Superficiais (FWIAR), estas últimas utilizam diferentes campos de velocidades iniciais. Na Figura 4.2, a região alvo de ambos os modelos encontra-se no interior da área traçada, conforme indicado pela seta. Ampliando essas regiões é possível observar o reservatório com mais detalhes, Figuras 4.2b e c.

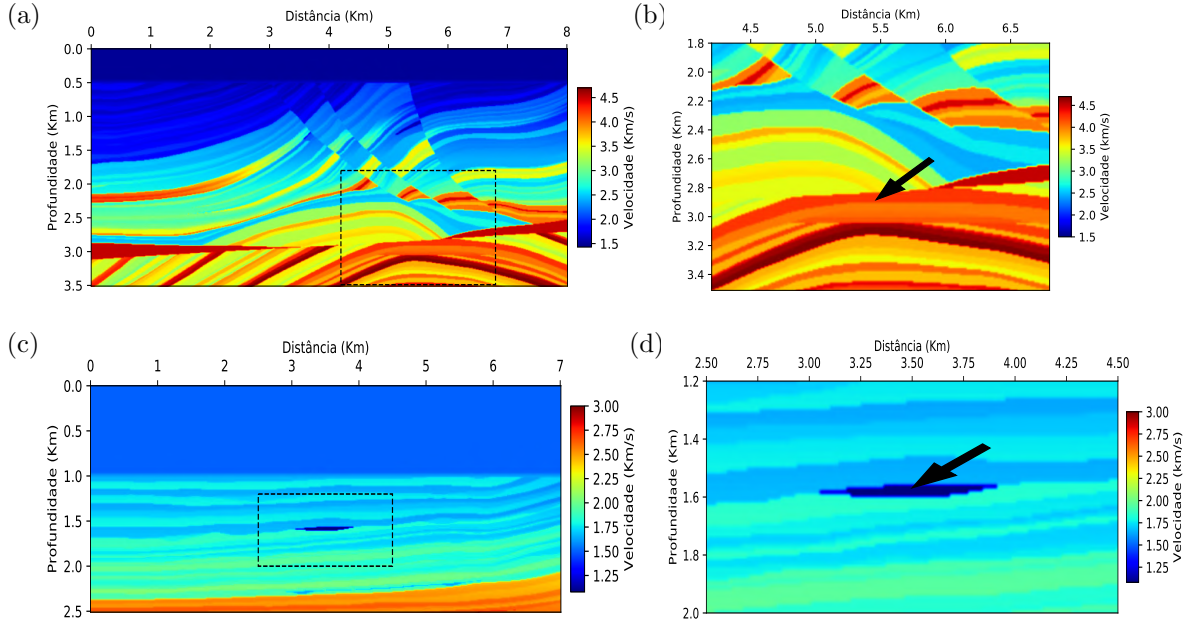


Figura 4.2: a) Modelo-I, altamente estruturado com altos contrastes de propriedade; b) Modelo-II, pouco estruturado e com baixos contrastes de propriedade na região do reservatório; c) Ampliação do Modelo-I na área de interesse; d) Ampliação do Modelo-II na área de interesse.

4.1 FWIAR na presença das mais baixas Frequências - Operadores em Subsuperfície e Assimétrico

4.1.1 Experimento 1 - Estimativa do Modelo-I na presença das frequências mais baixas e intermediárias

Nesta seção, os métodos FWI e FWIAR serão avaliados utilizando o Modelo 1. Os Algoritmos 1 e 2 foram aplicados em um esquema multiescala de frequência, com espectros de dados em dez faixas de frequência $[0, f_c]$, onde $f_c = 3\text{Hz}, 6\text{Hz}, \dots, 30\text{Hz}$.

Para simular os dados de Família de Tiro Comum, foram espalhados 81 fontes com uma distância de 100 m entre os pontos de tiro consecutivo ao longo da superfície (especificamente, em $z = 30\text{m}$) e foi considerado 5s de tempo de registro com taxa de amostragem temporal de 1 ms. Em relação à assinatura da fonte, dez faixas de frequências da fonte Ricker foram utilizadas, com valor de pico de amplitude máximo de 10Hz, que corresponde a faixa de $[0,30\text{Hz}]$. A primeira frequência de corte inicia-se em 3Hz e varia de 3 em 3Hz até 30Hz.

A Equação da Onda foi resolvida a partir do MDF utilizando uma malha regular de 801 x 351 pontos, na qual a distância entre os pontos consecutivos é de 10 m com intervalo de amostragem temporal de 1ms. Esses parâmetros foram suficientes para evitar dispersões e instabilidades numéricas na solução de todas as equações diferenciais parciais em todas as faixas de frequência. A fim de delimitar o limite da inversão, foi utilizado a condição de borda CPML nas bordas laterais, inferior e na superfície, logo o dado é livre de fantasmas e múltiplas de superfície. Os receptores foram posicionados em todos os pontos da malha na profundidade $z = 30\text{m}$. Sendo assim, 801 hidrofones foram posicionados uniformemente no mesmo nível da fonte.

A Figura 4.3a exibe o modelo de velocidades inicial empregado na FWI e na primeira aplicação da FWIAR (FWIAR-1). Este modelo foi criado a partir da extensão lateral e da suavização, utilizando uma média móvel de 30 pontos, na direção x e z do campo de velocidades verdadeiro extraído verticalmente na posição $x = 4$ km. As Figuras 4.3-b e -c apresentam os modelos iniciais das outras duas aplicações da FWIAR, chamadas, respectivamente, de FWIAR-2 e 3. O campo de velocidades inicial empregado na FWIAR-2, advém da FWI para a faixa de frequência $[0-3\text{Hz}]$ e o campo inicial utilizado na FWIAR-3, resulta da FWI multiescala até a faixa de $[0-6\text{Hz}]$.

As quinze linhas pretas presentes na Figura 4.4 representam os locais onde os Operadores de Síntese estão posicionados. Ressalta-se que o arranjo foi escolhido para favorecer a iluminação sísmica do reservatório.

Para todas as faixas de frequência, foram utilizados oitenta e um registros de tiro comum simulados para criar quinze registros de tiro de fontes superficiais observadas para aplicações da FWIAR. Os operadores de síntese variam em função do modelo de velocidades inicial em cada processo multiescala, ou seja, a inversão realizada para cada faixa de frequência utilizará o campo de velocidade inicial da primeira iteração, conforme apresentado no Algoritmo 2.

Para ilustrar a presença de fontes passivas nos três campos de velocidades iniciais, foi extraído o perfil sônico na posição de $x = 5,5\text{km}$ e calculou-se a derivada da propriedade em relação a profundidade ao longo do perfil (Figura 4.5). No caso da FWIAR-3 observar-se pelo perfil sônico e sua derivada uma maior variação de

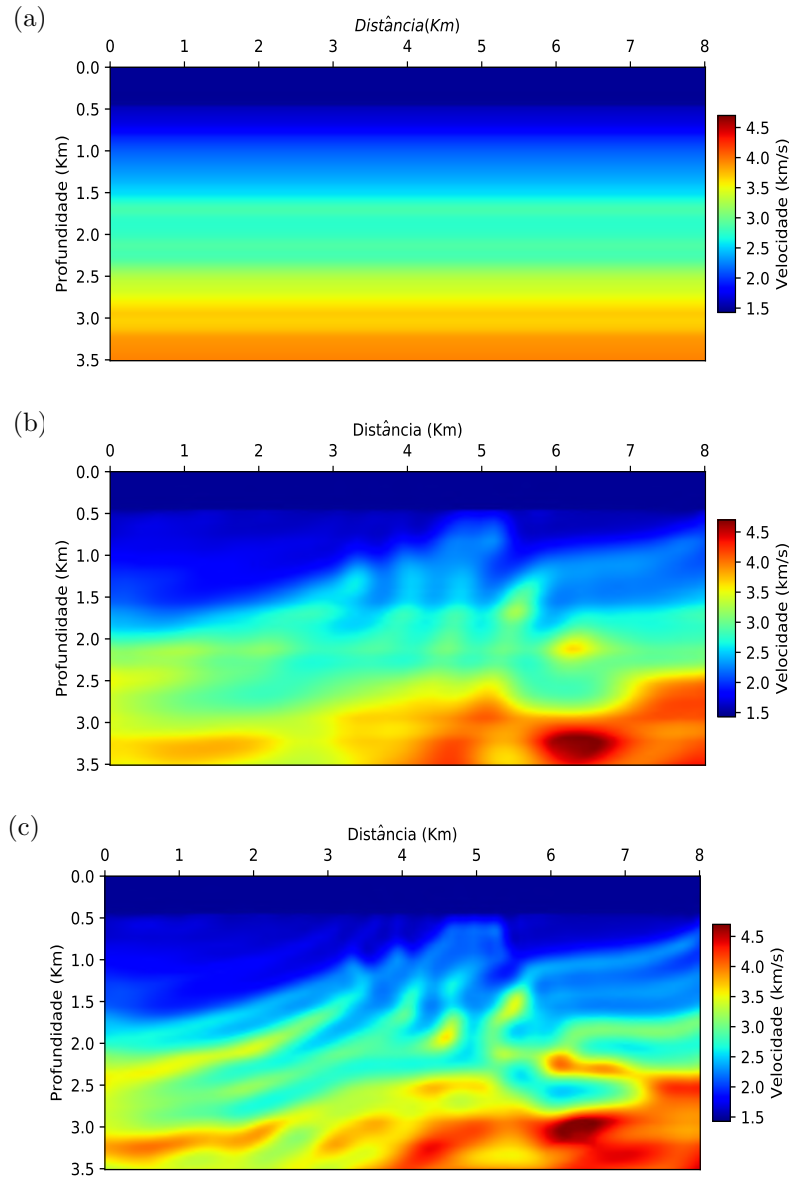


Figura 4.3: a) Modelo de velocidades inicial usado no primeiro intervalo de frequência da FWI e FWIAR-1; (b) modelo de velocidades inicial utilizado no primeiro intervalo de frequência da aplicação FWIAR-2 e c) o modelo inicial utilizado na FWIAR-3.

propriedade na direção z , tal comportamento favorece um número maior de fontes passivas. A Figura 4.6 exhibe a propagação do campo de onda incidente para uma fonte superficial; pode-se observar que os campos de ondas espalhados são mais significativos para o campo de velocidade inicial da FWIAR-3. Por outro lado, para a FWIAR-1 observa-se a presença quase que exclusiva da frente de onda plana incidente. As diferenças entre os três registros são consequência do número e posição das fontes passivas em cada modelo.

A Figura 4.7 apresenta à esquerda os registros de fontes superficiais observadas e à direita as calculadas. Esses registros foram obtidos a partir dos operadores de síntese gerados utilizando os campos de velocidades iniciais empregados nas es-

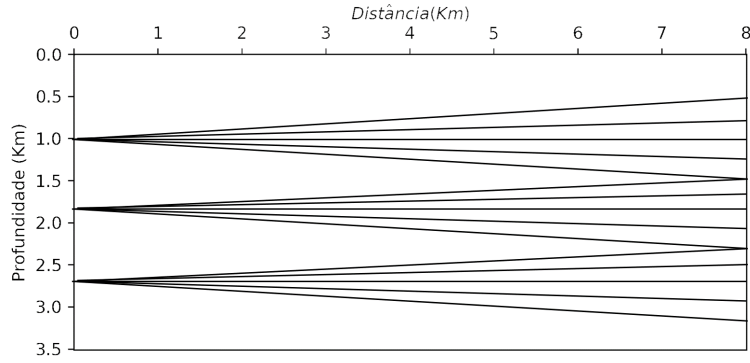


Figura 4.4: Posicionamento das fontes virtuais em subsuperfície nas aplicações da FWIAR do experimento 1.

tratégias da FWIAR-1, 2 e 3, considerando o intervalo de frequência de $[0-9\text{Hz}]$. Pode-se observar que o registro de fonte superficial calculado que mais se aproxima do observado apresenta um maior número de eventos (Figura 4.7f). Em termos do gradiente, gerados a partir dessas fontes, pode-se observar que os mesmos são distintos fato este que reflete as diferenças de complexidade nos registros de fontes superficiais, nas três aplicações FWIAR-1, -2 e -3. (Figura 4.8).

As Figuras 4.9 - 4.12 e a Tabela 4.1 apresentam os resultados da FWI, FWIAR-1, -2 e -3. Ambas as aplicações, FWI e FWIAR, recuperaram as principais características do modelo verdadeiro. A diferença entre os resultados da FWI, FWIAR-2 e FWIAR-3 (Figura 4.9), principalmente entre as duas últimas, não são significativas. No entanto, uma ligeira superioridade da amplitudes na FWI pode ser observada. Na Figura 4.9b, pode-se observar que o resultado da FWIAR-1 apresenta uma distorção significativa na forma das camadas presentes na região de interesse destacada pela região tracejada. A Figura 4.10 representa a ampliação da área de interesse e pode-se observar que o topo do reservatório, indicado pela seta, não é determinado com precisão como nas outras aplicações.

Outro ponto observado diz respeito ao fato do direcionamento do campo de onda realizado para favorecer a iluminação sísmica da área de interesse não ter refletido negativamente na recuperação do modelo de velocidades nas regiões à esquerda do modelo. Para avaliar a precisão da recuperação do campo de velocidade, foi extraído um perfil vertical na posição de 5 km (Figura 4.11) e pode-se observar a diferença significativa do resultado da FWIAR-1, em relação ao modelo verdadeiro, principalmente os valores na região do reservatório.

A Figura 4.12 apresenta os gráficos das funções objetivos normalizadas versus o resíduo do campo de velocidade obtido ao longo do processo iterativo, para todos as bandas de frequências. No que diz respeito as taxas de convergência da FWIAR-2 e 3, o melhor desempenho é observado na FWIAR-3. Diante disso, um modelo mais próximo da solução, acelerou significativamente a convergência em relação a

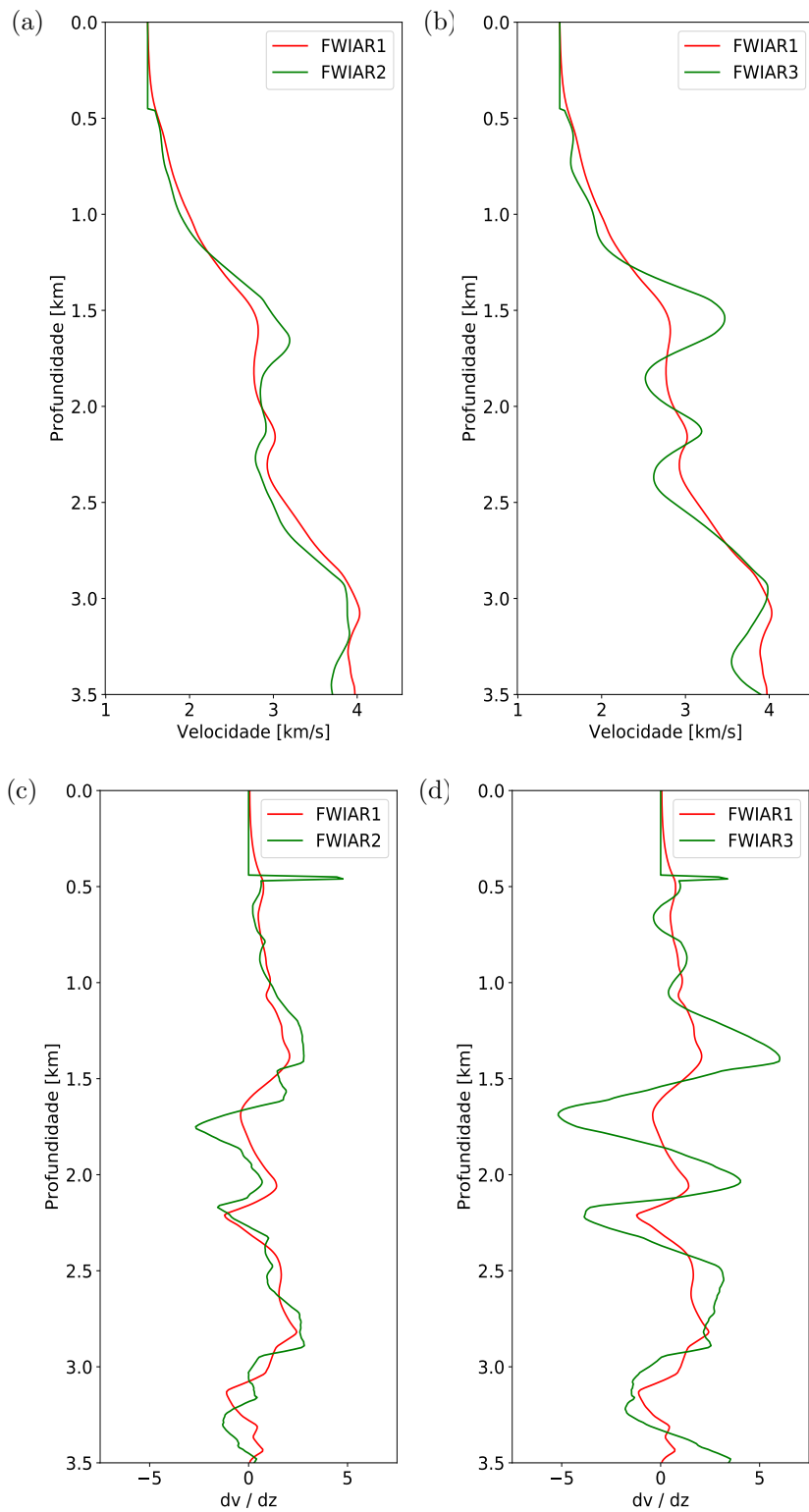
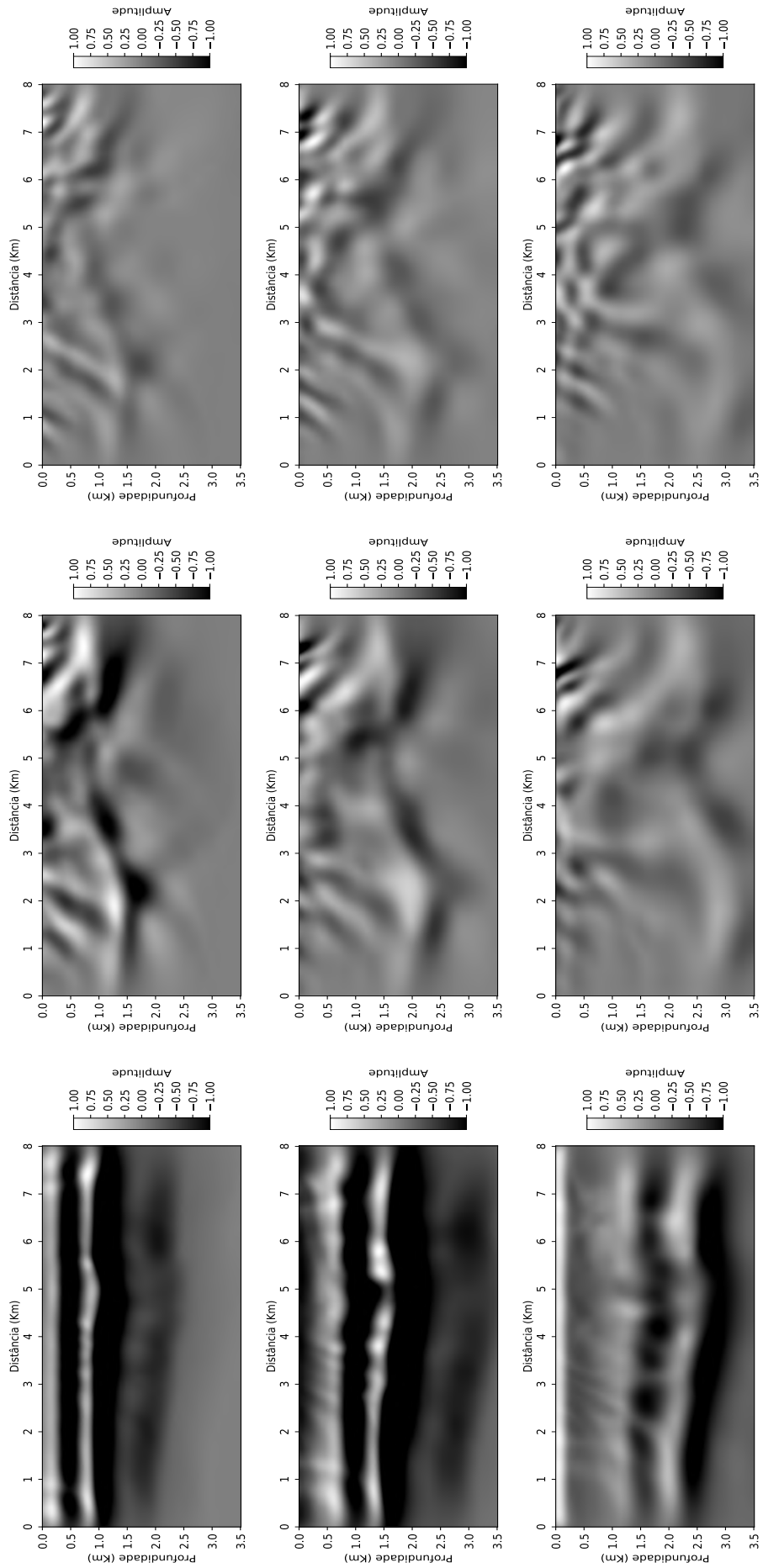


Figura 4.5: a) e b) Perfis de velocidade referentes ao modelo inicial nos experimentos da FWIAR, extraídos na posição de $x=5,5\text{km}$ e seus respectivos perfis da derivada da velocidade em relação a profundidade c) e d).

FWIAR-2.

A Tabela 4.1 apresenta a comparação do custo computacional, em termos



FWIAR-1

FWIAR-2

FWIAR-3

Figura 4.6: Três diferentes instantes de tempo da propagação reversa dos registros de fontes superficiais para a FWIAR-1, 2 e 3 referente ao intervalo de frequência de [0-9Hz]. Para fins de comparação, os valores foram normalizados pelo máximo valor absoluto em cada registro.

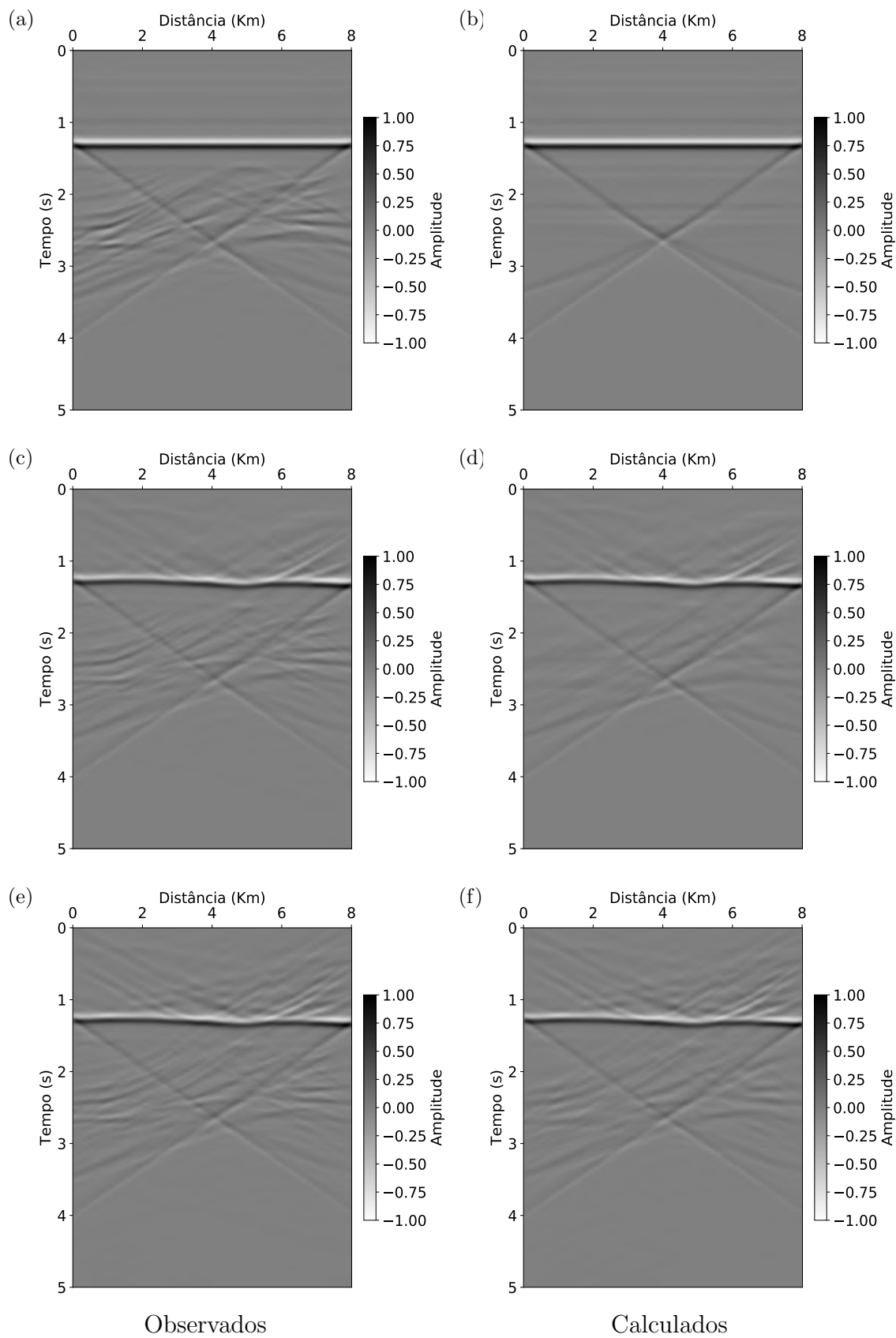


Figura 4.7: Registros de fontes superficiais observados e calculados associados a uma onda plana na profundidade de 2,6km, para o intervalo de frequência de [0-9Hz], relativos a FWIAR-1, FWIAR-2 e FWIAR-3, de cima para baixo, respectivamente.

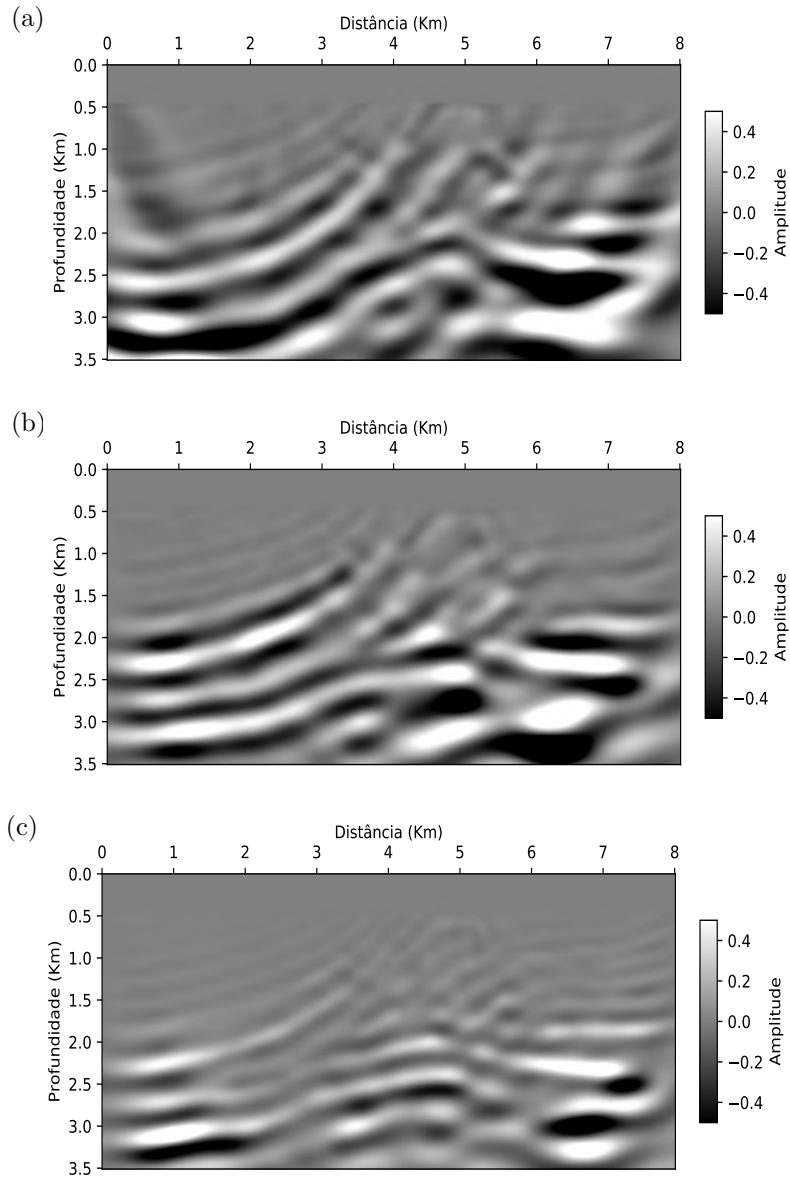


Figura 4.8: Gradientes obtidos para o intervalo de frequência [0-9Hz]. a) FWIAR-1, b) FWIAR-2 e c) FWIAR-3. Os gradientes foram normalizados pelo máximo valor absoluto para fins de comparação.

do número de Equações Diferenciais Parciais (EDPs), para as três aplicações da FWIAR. Vale ressaltar que foi levada em consideração o custo computacional para obter os modelos iniciais utilizados na FWIAR-2 e -3, ou seja, foi considerado o número de EDPs da inversão referente a primeira e segunda banda de frequência da FWI. Conforme apresentado na terceira coluna da tabela, para a FWIAR-2 esse custo foi de 30 iterações e para a FWIAR-3 foi de 44 iterações. Na última coluna, pode-se observar uma redução do custo computacional de até 81% da FWIAR em relação a FWI. Ressalta-se que o custo computacional, para determinar o modelo inicial da FWIAR-3, foi o fator determinante para o maior custo dentre as aplicações da FWIAR. Porém, a FWIAR-3 foi a estratégia que obteve a melhor precisão

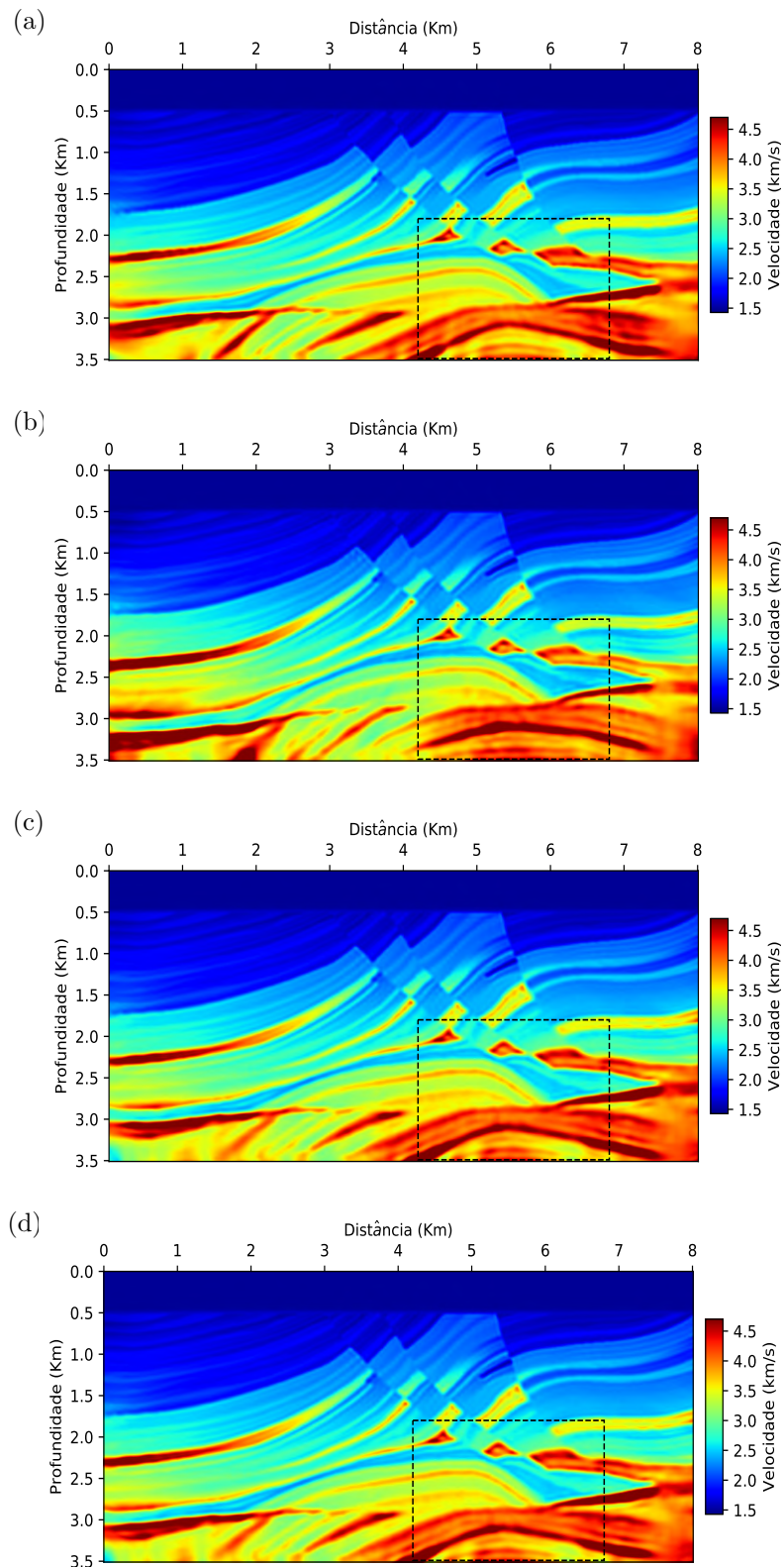


Figura 4.9: Modelo de velocidades obtido para o último intervalo de frequência de inversão das aplicações a) FWI, b) FWIAR-1, c) FWIAR-2 e d) FWIAR-3. O retângulo pontilhado na região direita inferior indica a área de interesse.

apresentando uma redução do custo computacional próxima de 72%. Do ponto de

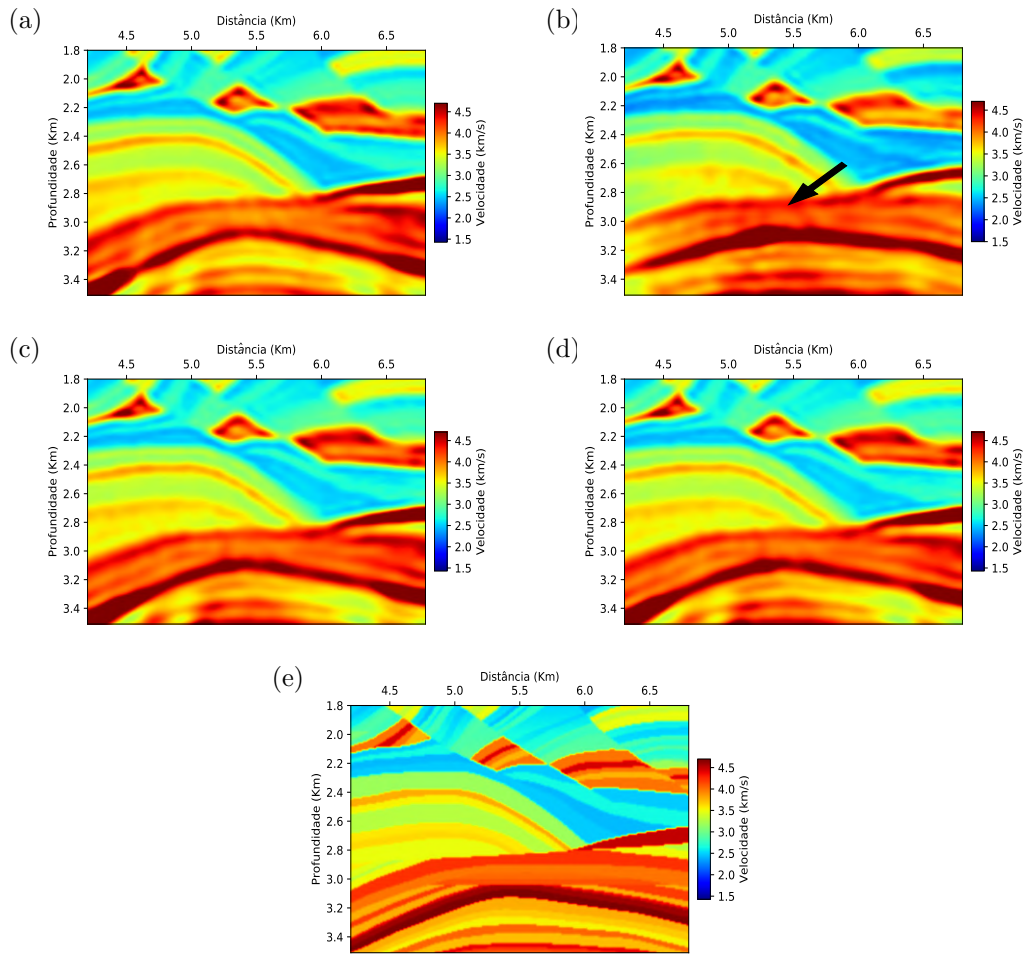


Figura 4.10: Ampliação dos modelos de velocidades na área de interesse obtido na última inversão do intervalo de frequência, respectivamente, nas aplicações a) FWI, b) FWIAR-1, c) FWIAR-2, d) FWIAR-3 e e) Verdadeiro.

vista quantitativo foi gerado o erro relativo para o resultado final de cada estratégia. O erro relativo é calculado da seguinte forma:

$$E_{rel}(\mathbf{r}) = \frac{\left| v_{verdadeiro}(\mathbf{r}) - v_{estimado}(\mathbf{r}) \right|}{v_{verdadeiro}(\mathbf{r})}. \quad (4.1)$$

A Figura 4.13 ilustra os erros relativos entre os campos de velocidades verdadeiros e os obtidos nas inversões, pode-se observar que em geral a FWIAR-1 apresentou o maior erro dentre os resultados da FWIAR, e a FWIAR-3 obteve o resultado mais preciso, alcançando a solução próxima da obtida pela FWI, conforme indicado na Tabela 4.1. As colunas 6 e 7 apresentam o somatório dos erros relativos para o modelo como um todo e para a região de interesse.

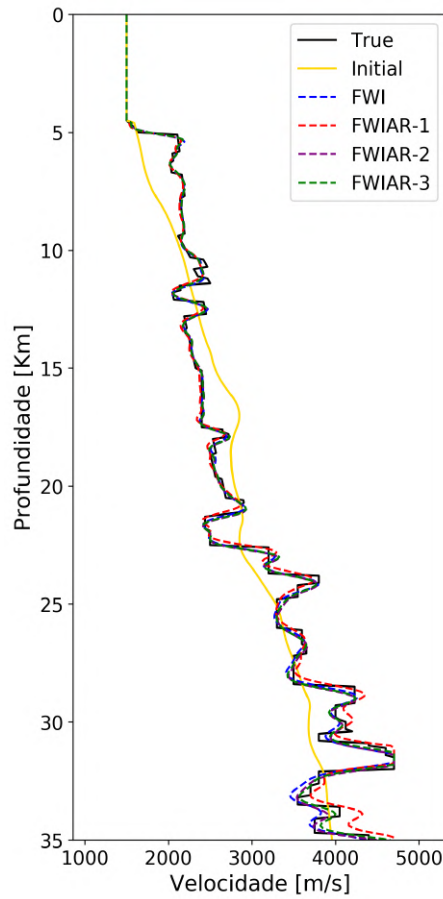


Figura 4.11: Perfil de velocidade em $x = 5$ km do modelo verdadeiro, linha preta; O modelo inicial para aplicações FWI e FWIAR-1, linha amarela; e o modelo de velocidades final obtido, na FWI, FWIAR-1, -2, -3, respectivamente, linha azul, laranja e lilás.

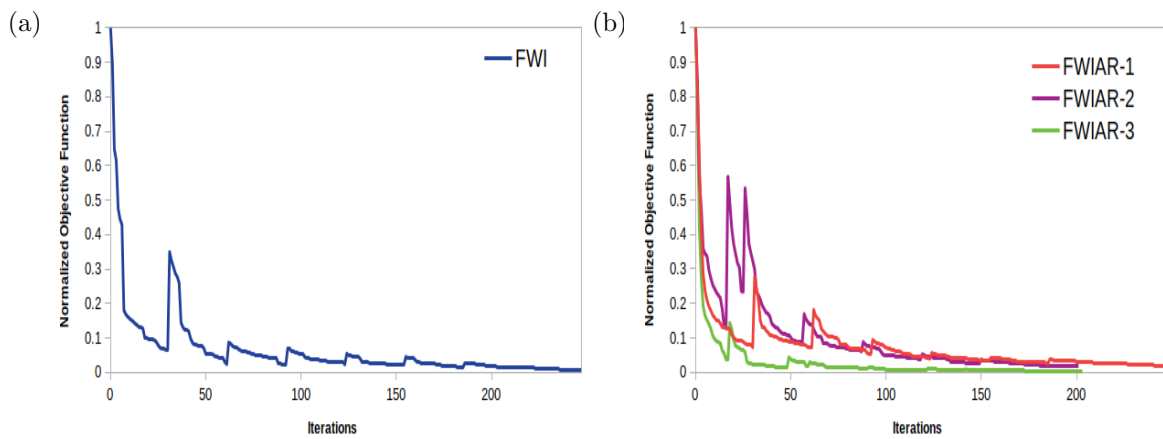


Figura 4.12: Função objetivo normalizada e obtida em cada iteração no esquema multiescala do Experimento 1 para (a) FWI e (b) FWIAR-1, -2 e -3.

Tabela 4.1: Comparação do custo computacional da FWI e FWIAR para o Experimento 1. O número de EDPs resolvidas na obtenção dos modelos iniciais para FWIAR-2 e -3 foi considerado, assim como o número de EDPs na construção dos operadores de síntese (equivalente a 75, 67 e 60 EDPs para FWIAR-1, FWIAR-2 e FWIAR-3, respectivamente). Os erros dizem respeito ao somatório dos erros relativos absolutos globais e locais.

	EDPs	Iterações	EDPs/it	Custo	Erro Global	Erro Local
FWI	94608	292	324;0	1,0	11520	1960
FWIAR-1	17355	288	0 ;60	0,18	18342	2363
FWIAR-2	24091	31 + 233	324;60	0,25	13154	2275
FWIAR-3	26556	44 + 204	324;60	0,28	12743	2267

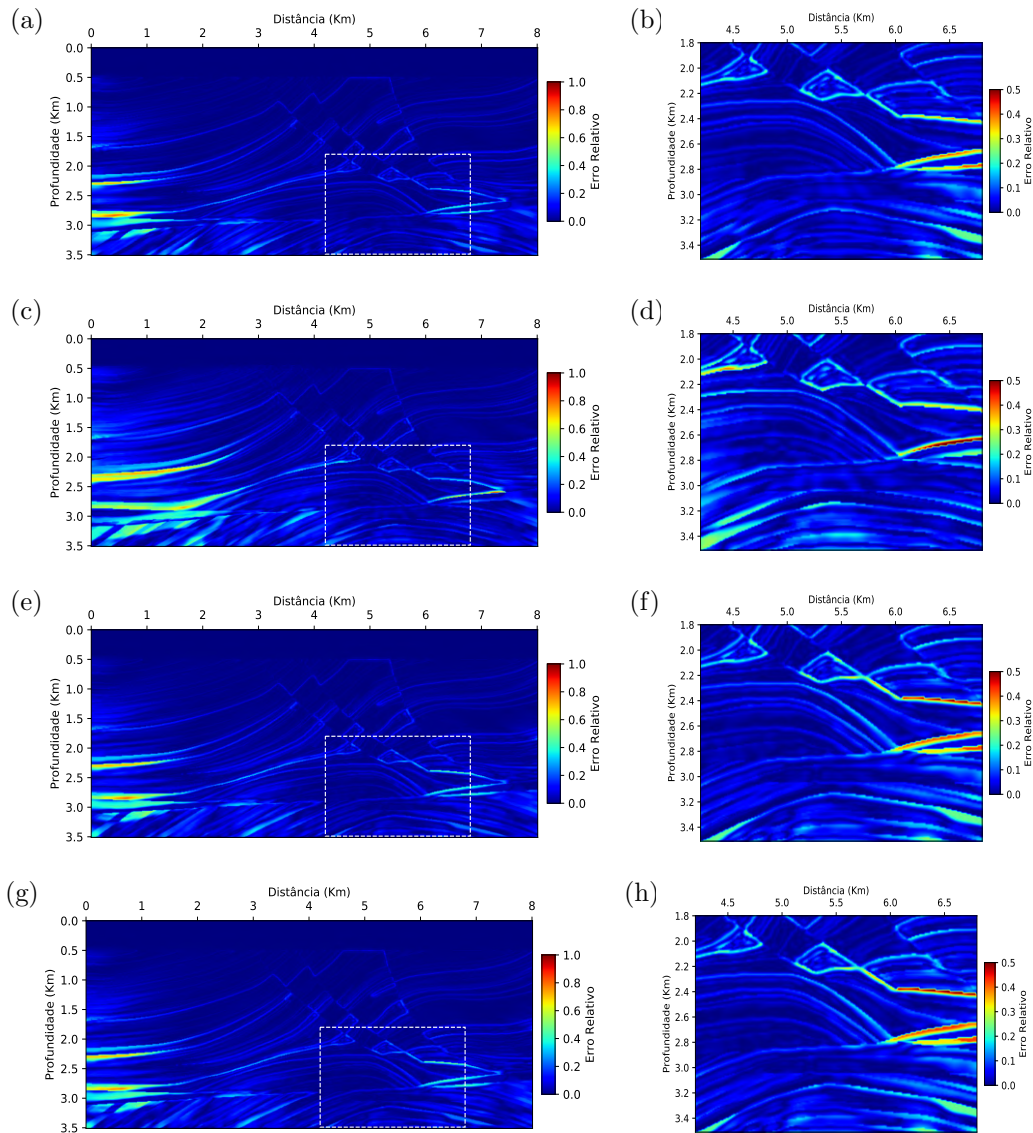


Figura 4.13: Erro relativo do Experimento 1 calculado para o último intervalo de frequência de inversão das aplicações a) FWI, c) FWIAR-1, e) FWIAR-2 e g) FWIAR-3. O retângulo pontilhado indica a área de interesse ampliadas nas aplicações b) FWI, d) FWIAR-1, f) FWIAR-2, e h) FWIAR-3.

4.1.2 Experimento 2 - Estimativa do Modelo-I na presença das mais altas frequências

Com intuito de explorar os ganhos que as frequências temporais mais altas podem proporcionar, o próximo experimento realizou a inversão até a frequência de corte máxima de 51Hz (frequência de pico de 17Hz). Assim, foram considerados como modelo inicial o resultado final obtido no Experimento 1 e os dados que foram invertidos sequencialmente nos intervalos: [0, 33Hz], [0, 36Hz], [0,39Hz], ..., [0, 51Hz]. Para evitar dispersão e instabilidade numérica, foi necessário aumentar a densidade da malha. Para ambos os métodos foram utilizados $h=5m$ e $dt = 0,25ms$.

Para a FWI foram novamente simuladas 81 Famílias de Tiro Comum com tiros espaçados em 100m na mesma profundidade do Experimento 1, os receptores foram localizados em todos os pontos da malha, na mesma profundidade das fontes. Dessa forma, dobramos o número de receptores em relação ao experimento anterior.

Em relação a FWIAR, foram utilizados os campos de velocidades iniciais advindos dos resultados finais obtidos nas aplicações do primeiro experimento realizado no intervalo [0,30Hz]. Os Operadores de Síntese são determinados usando as mesmas quinze linhas de fontes exibidas na Figura 4.4.

As Figuras 4.14, 4.15, 4.16, e a Tabela 4.2 apresentam os resultados das aplicações FWI, FWIAR-1 -2, e -3 obtidos no segundo experimento.

Pode-se observar, claramente, melhorias na resolução em todos os casos. Novamente, a FWI forneceu uma imagem ligeiramente superior no domínio de interesse, no entanto, a FWIAR-2 e a FWIAR-3 também revelaram alguns detalhes sutis que não foram encontrados nos modelos iniciais. Por outro lado, no caso da FWIAR-1, a inversão para frequências temporais mais altas não foi suficiente para reparar o topo da geometria do reservatório.

A Figura 4.16, apresenta os gráficos das funções objetivos normalizadas versus o número de iterações para todas os intervalos de frequência do experimento. A Figura 4.16a ilustra a função objetivo da FWI tendendo a zero quando o número de iterações aumenta. Este fato reflete a concordância quase total entre o modelo final e o verdadeiro. Essa precisão próxima de zero pode ser justificada, por exemplo, pelo fato da ausência de ruídos. Nos casos da FWIAR (Figura 4.16b), todas as funções objetivos não apresentam esse comportamento. Em termos do erro relativo apresentados na Figura 4.17 pode-se observar que a FWIAR-2 e 3 alcançaram maior precisão dentre as estratégias da FWIAR. A FWIAR-1 obteve tons mais verdes, representando assim uma menor precisão ao longo do horizonte que representa o topo do reservatório, corroborado pelo resultados indicados na Tabela 4.2 coluna 6 e 7 onde os resultados do somatório dos erros relativos no modelo e na região de interesse são apresentados.

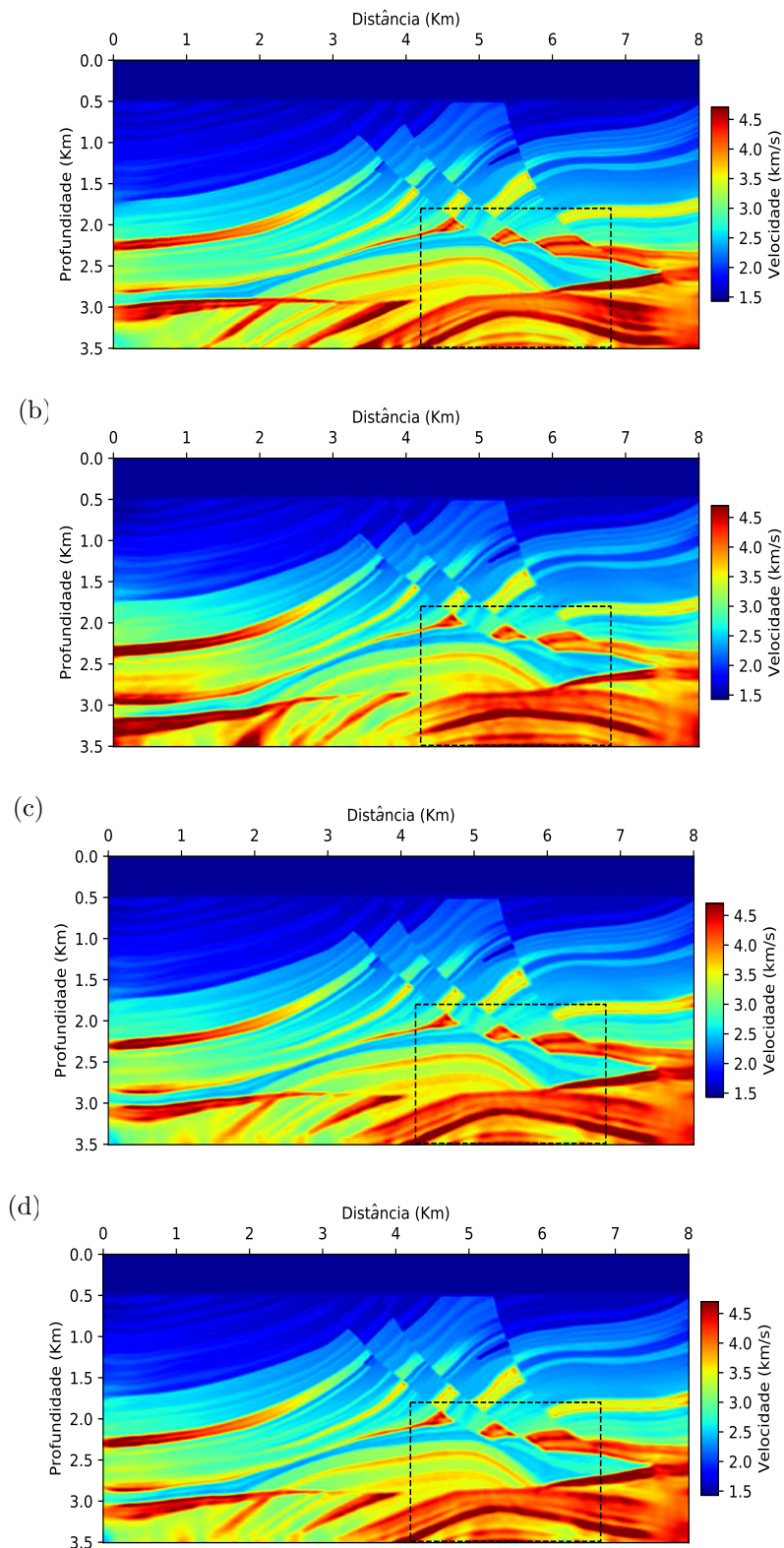


Figura 4.14: Modelos de velocidades obtidos na última inversão do intervalo de frequência do segundo experimento, respectivamente, nas aplicações a) FWI, b) FWIAR-1, c) FWIAR-2 e d) FWIAR-3. O retângulo pontilhado na região direita inferior indica a área de interesse.

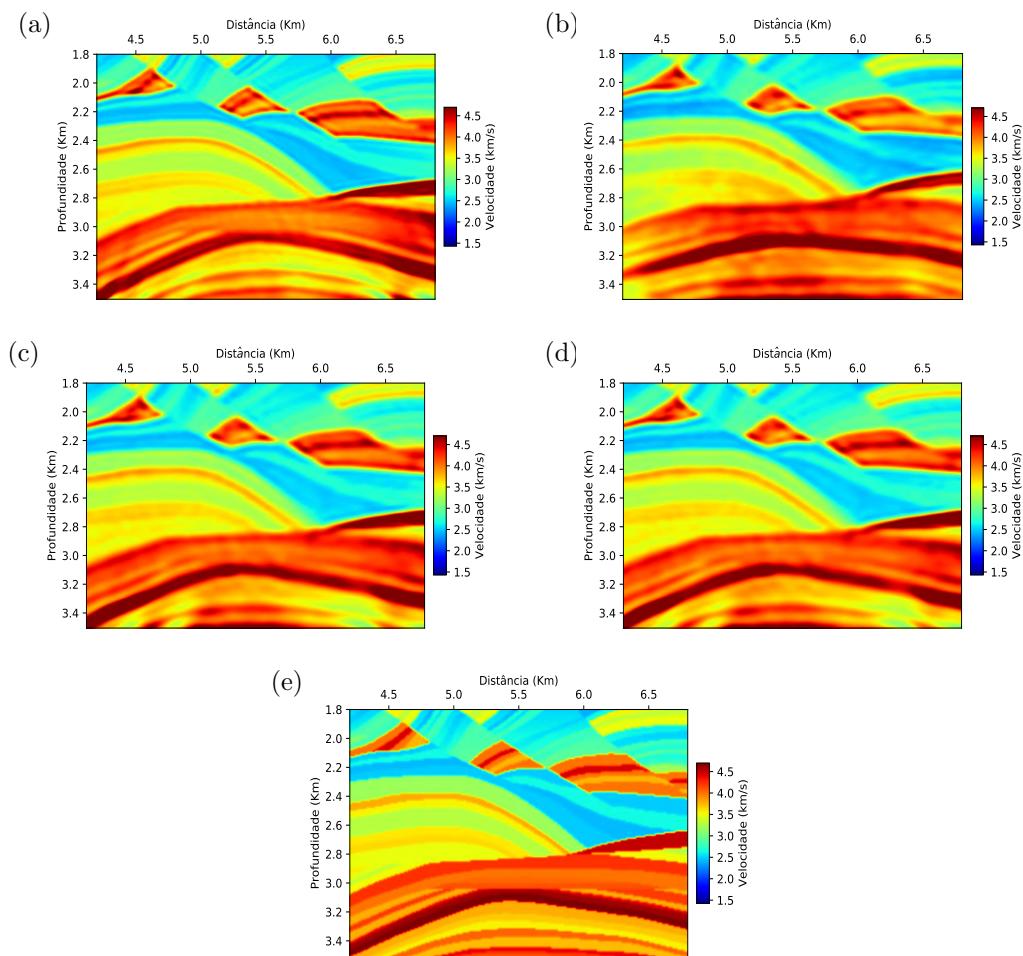


Figura 4.15: Ampliação dos modelos de velocidades na área de interesse obtido na última inversão da faixa de frequência do segundo experimento, respectivamente, nas aplicações a) FWI, b) FWIAR-1, c) FWIAR-2, d) FWIAR-3 e e) Verdadeiro.

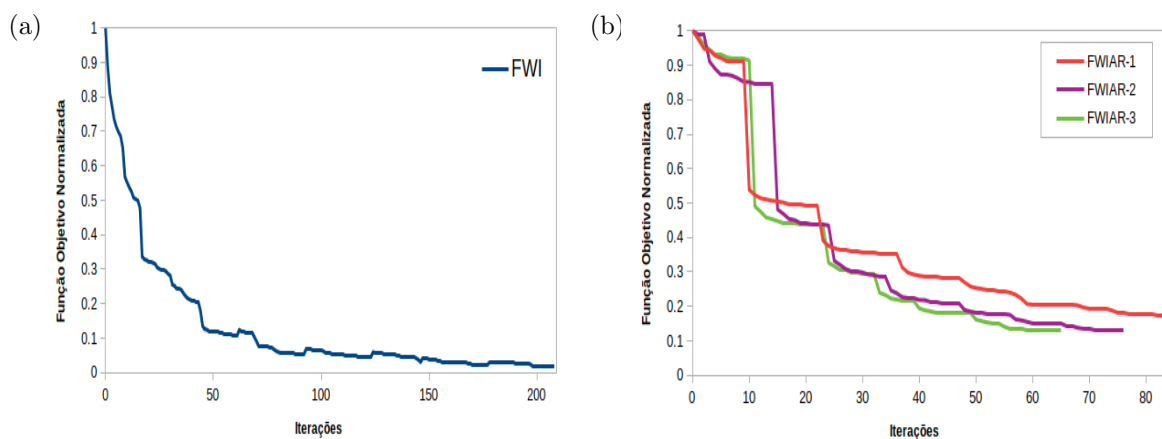


Figura 4.16: Funções objetivas normalizadas referentes aos resultados do Experimento 2 das aplicações a) FWI e b) FWIAR-1, 2 e 3.

A tabela 4.2 exemplifica as vantagens em termos de custo computacional. Ao contrário do primeiro experimento, nesse, não precisamos incluir custos envolvidos na determinação dos modelos iniciais. Então, pode-se observar ganhos de 93% em relação aos resultados da FWI. Sendo assim, em termos de redução do custo computacional e melhor precisão, a FWIAR-3 foi a que obteve melhor resultado neste experimento.

Tabela 4.2: Comparação do custo computacional da FWI e FWIAR para o Experimento 2. O número de EDPs resolvidas na obtenção dos modelos iniciais para FWIAR-2 e -3 foi considerado, assim como o número de EDPs na construção dos operadores de síntese (equivalente a 75, 67 e 60 EDPs para FWIAR-1, FWIAR-2 e FWIAR-3, respectivamente). Os erros dizem respeito ao somatório dos erros relativos absolutos globais e locais.

	No. EDPs	Iterações	EDPs/it	Custo	Erro Global	Erro Local
FWI	64152	198	324	1,0	34479	6418
FWIAR-1	5100	84	60	0,079	71737	9208
FWIAR-2	4680	77	60	0,073	50810	8596
FWIAR-3	4020	66	60	0,063	49139	8502

4.1.3 Experimento 3 - Estimativa do Modelo-II na presença das frequências mais baixas e intermediárias

Nos experimentos anteriores, a estimativa do campo de velocidade foi realizada para as mais baixas e altas frequências dos métodos FWI e FWIAR sobre o Modelo-I. Para analisar o desempenho da FWIAR, na presença de baixos contrastes de velocidades acima do reservatório, foi utilizado o Modelo-II (Figura 4.2). A Figura 4.18 exibe o campo de velocidade inicial utilizado para a FWI e a FWIAR-1, o modelo inicial foi gerado a partir da extensão lateral e da suavização, utilizando uma média móvel na direção x e z, aplicada sobre o campo de velocidade verdadeiro extraído na posição 3,5km (Figura 4.2).

Os receptores foram posicionados uniformemente em todos os pontos da malha na profundidade $z = 30$ m. Na mesma profundidade, foram distribuídas 71 fontes posicionadas com uma distância de 100 m entre pontos de tiro consecutivo. Dessa forma, foram considerados 5 s de tempo de registro com taxa de amostragem de 1 ms e a Ricker, como assinatura da fonte, conforme experimentos anteriores. Com relação a solução da Equação da Onda, os parâmetros empregados no MDF também se mantiveram em relação aos experimentos anteriores.

A Figura 4.19 apresenta o arranjo das fontes virtuais empregadas para gerar os Operadores de Síntese. Pode-se observar que a distribuição dos operadores foi mantida conforme experimento anterior, pois a região de interesse está no centro do modelo.

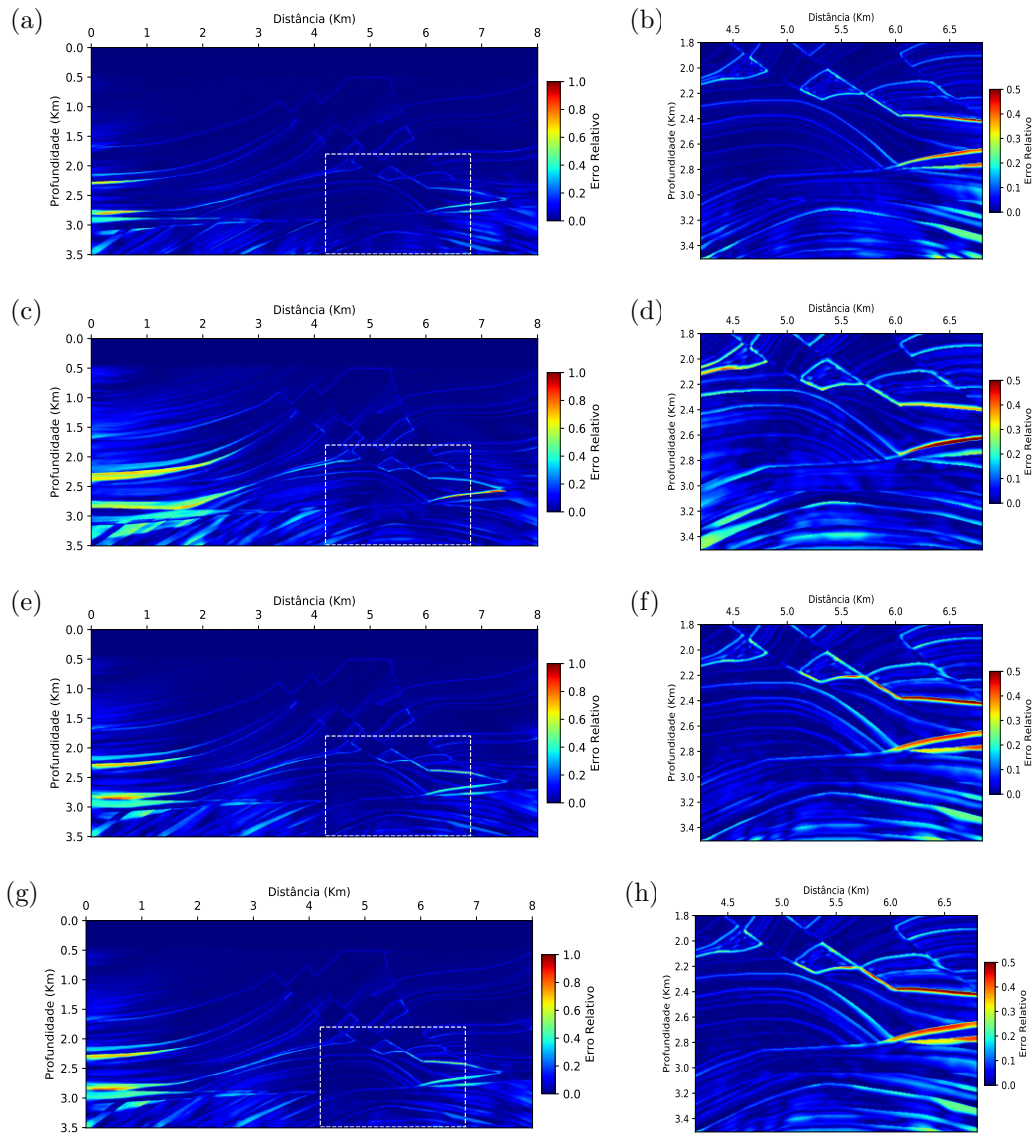


Figura 4.17: Erro relativo do Experimento 2 calculado para o último intervalo de frequência de inversão das aplicações a) FWI, c) FWIAR-1, e) FWIAR-2 e g) FWIAR-3. O retângulo pontilhado indica a área de interesse ampliadas nas aplicações b) FWI, d) FWIAR-1, f) FWIAR-2, e h) FWIAR-3.

Na FWIAR, para todas as faixas de frequências, foram utilizados setenta e um registros de tiro comum simulados para gerar 15 registros de fontes superficiais observadas, conforme a Fórmula 3.4. Os operadores são atualizados em cada variação do intervalo de frequência, sendo invariável durante as iterações. As Figuras 4.20 - 4.26 e a Tabela 4.3 apresentam os resultados da FWI, FWIAR-1, -2 e -3. Novamente, de forma geral, ambas as técnicas recuperaram com precisão as características do modelo verdadeiro. Considerando os resultados da FWI, como referência, em termos de resolução observa-se a superioridade da FWI em comparação a FWIAR-1, Figuras 4.21a e b. Além disso, pode-se dizer que novamente a FWIAR-2 e -3 foram superiores em relação a FWIAR-1. Embora os resultados da

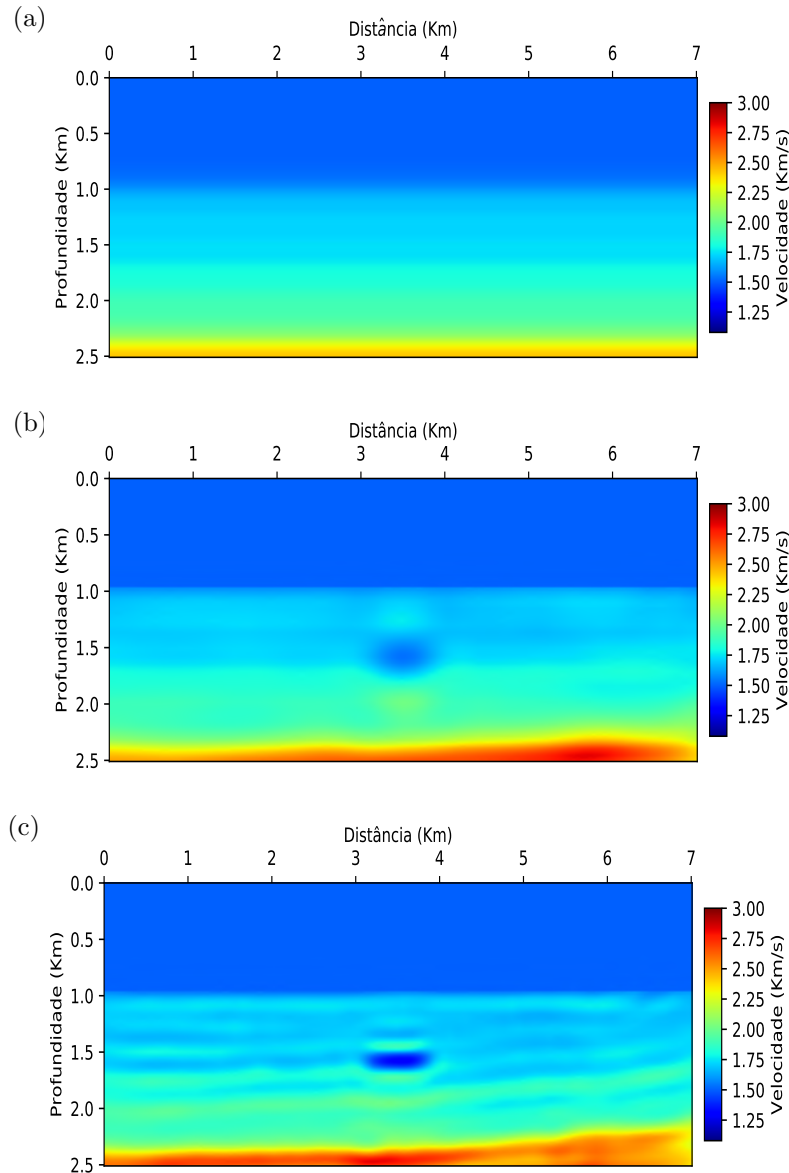


Figura 4.18: Campos de velocidade inicial. a) Modelo de velocidade Marmousi-2 com baixos contrastes de velocidade suavizado a partir da média móvel, b) Campo de velocidade final para a FWI de 3Hz e c) Campo de velocidade final estimado a partir da estratégia multiescala FWI de 3 a 6Hz .

FWIAR-1 tenham sido satisfatórios, o modelo inicial não apresentou características relacionadas ao reservatório, já a FWIAR-2 e -3 apresentaram uma melhor resolução, além de uma melhor precisão no posicionamento das camadas mais profundas.

Com relação as Funções Objetivos, Figura 4.22, a FWI teve uma boa taxa de convergência, uma vez que o resíduo chegou próximo de zero. Em termos de precisão a FWIAR-3 apresentou uma leve superioridade, conforme pode ser observado a partir do erro relativo apresentado na Figura 4.23. Assim, observa-se, que ao utilizar um campo de velocidade mais próximo do campo verdadeiro, a FWIAR-3 obteve uma convergência mais rápida e conforme apresentado na Tabela 4.3 colunas 6 e 7 a partir

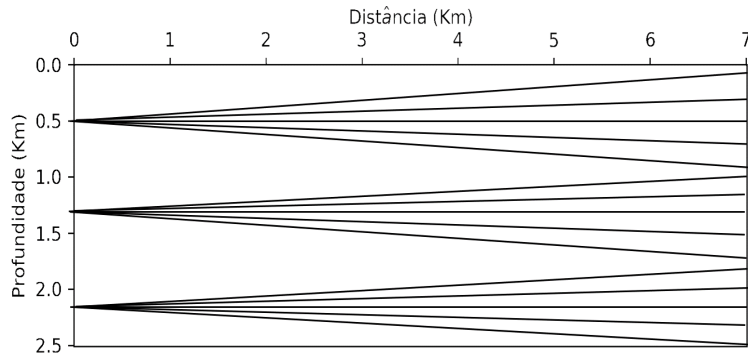


Figura 4.19: Representação da distribuição dos Operadores de Síntese para o Experimento 3.

do erro relativo foi a estratégia da FWIAR que obteve maior precisão. No entanto, conforme apresentado na Tabela 4.3 tal ganho teve um maior custo computacional, pois o campo de velocidade inicial advém da FWI multiescala até a faixa de [0-6Hz] o que implica um maior custo final para a FWIAR. O número de simulações da FWIAR-2 foi significativamente menor que a FWIAR-3 devido ao baixo número de iterações para a FWI de [0-3Hz], neste caso, o menor custo e a melhor precisão ficou para a FWIAR-2 chegando a 89,23%.

Tabela 4.3: Comparação do custo computacional da FWI e FWIAR para o Experimento 3. O número de EDPs resolvidas na obtenção dos modelos iniciais para FWIAR-2 e -3 foi considerado, assim como o número de EDPs na construção dos operadores de síntese (equivalente a 75, 67 e 60 EDPs para FWIAR-1, FWIAR-2 e FWIAR-3, respectivamente). Os erros dizem respeito ao somatório dos erros relativos absolutos globais e locais.

	No. EDPs	Iterações	EDPs/it	Custo	Erro Global	Erro Local
FWI	89100	275	324;0	1,0	1774	238
FWIAR-1	12375	205	0 ;60	0,13	2855	501
FWIAR-2	9667	5 + 133	324;60	0,11	2222	366
FWIAR-3	19224	36 + 125	324;60	0,21	2017	314

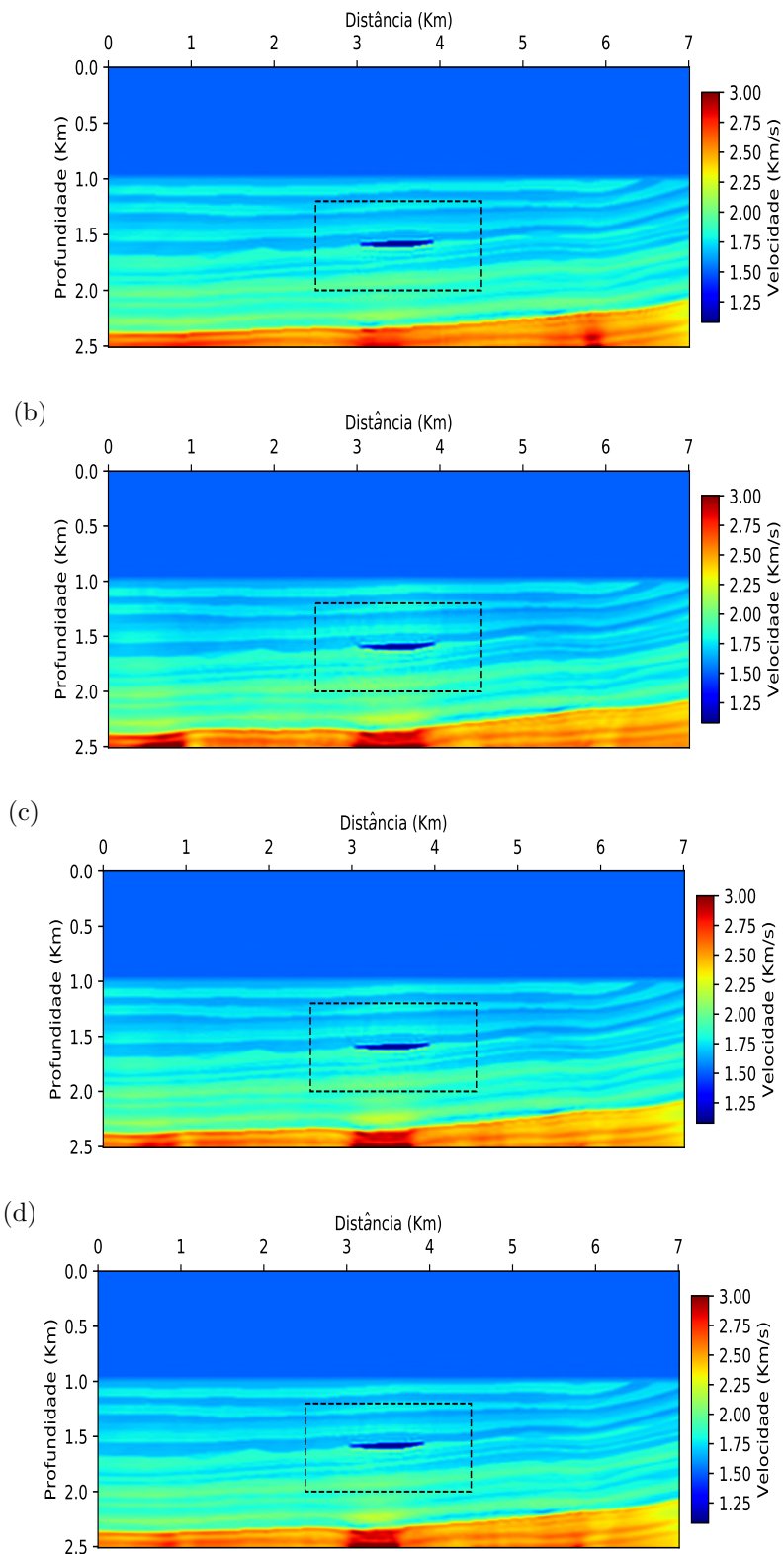


Figura 4.20: Modelos de velocidades obtidos na última inversão do intervalo de frequência do Experimento 3 nas aplicações a) FWI, b) FWIAR-1, c) FWIAR-2 e d) FWIAR-3, respectivamente. O retângulo pontilhado representa a área de interesse.

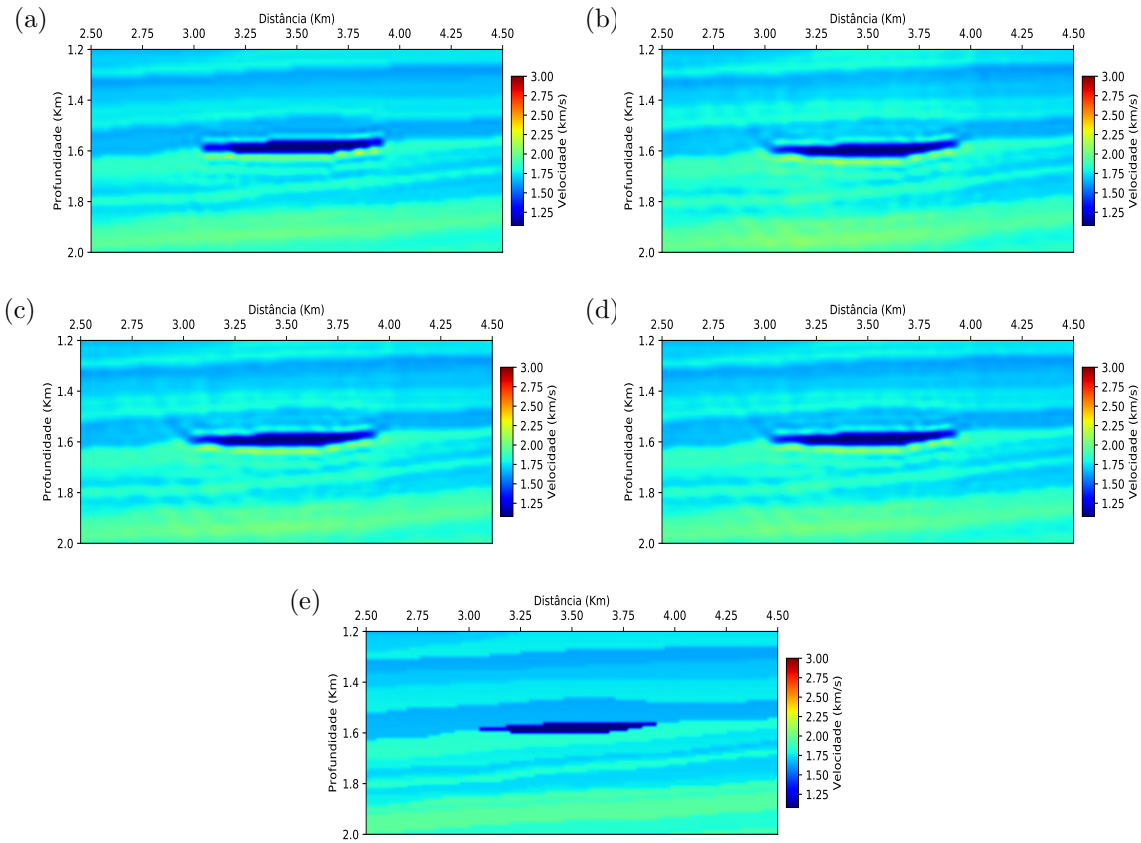


Figura 4.21: Ampliação dos modelos de velocidades na área de interesse obtido na última inversão do intervalo de frequência do Experimento 3, respectivamente, nas aplicações a) FWI, b) FWIAR-1, c) FWIAR-2, d) FWIAR-3 e) Verdadeiro.

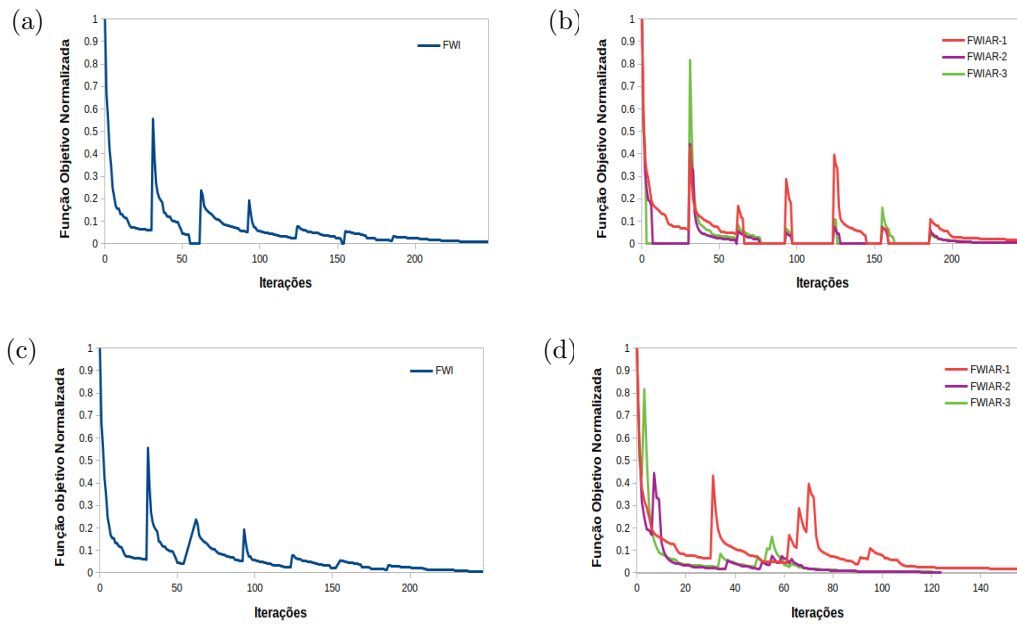


Figura 4.22: Funções objetivas normalizadas referentes aos resultados do Experimento 3 das aplicações a) FWI e b) FWIAR apresentadas por faixa de frequência e c) FWI e d) FWIAR apresentadas por iteração.

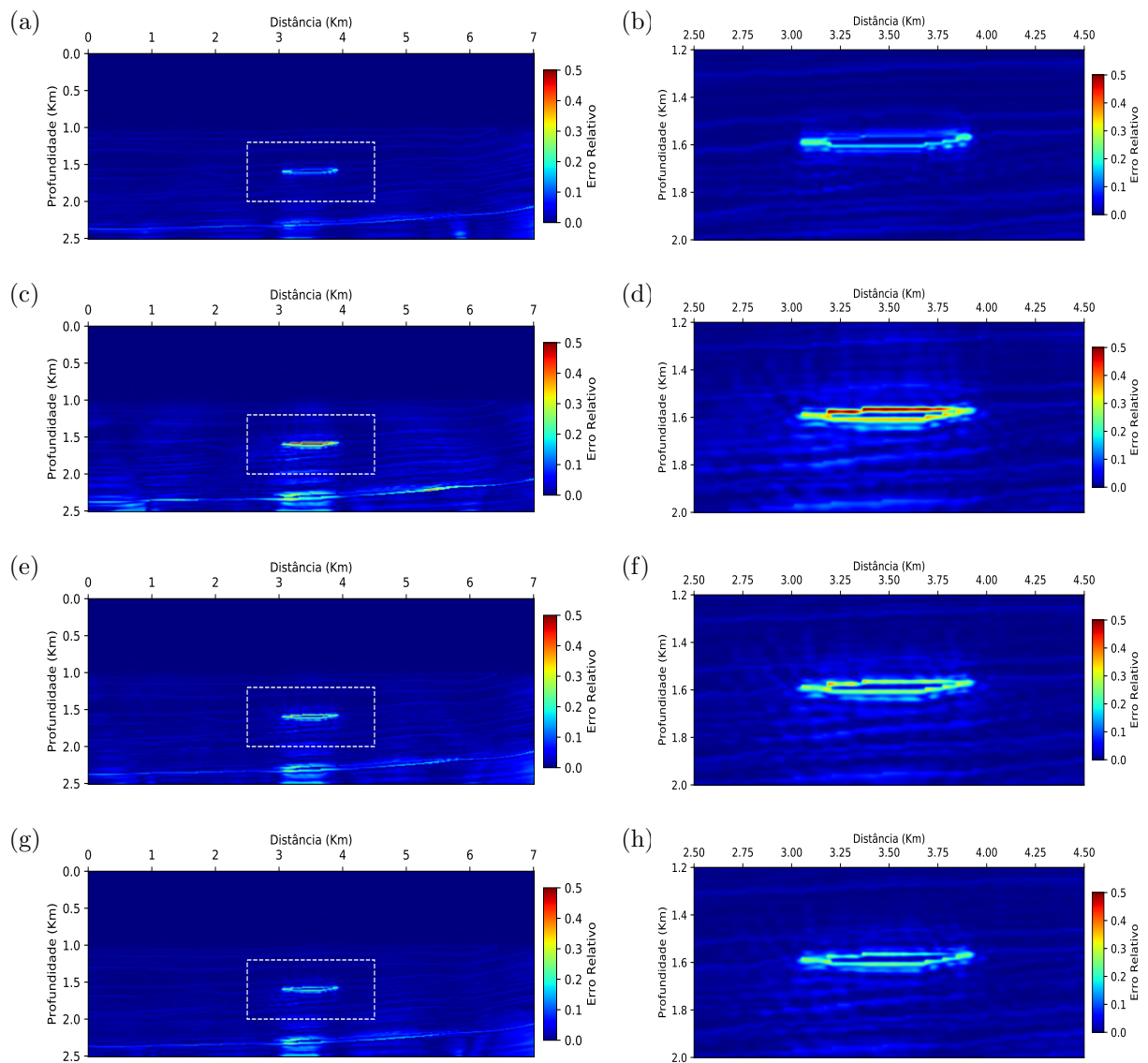


Figura 4.23: Erro relativo do Experimento 2 calculado para o último intervalo de frequência de inversão das aplicações a) FWI, c) FWIAR-1, e) FWIAR-2 e g) FWIAR-3. O retângulo pontilhado indica a área de interesse ampliadas nas aplicações b) FWI, d) FWIAR-1, f) FWIAR-2, e h) FWIAR-3.

4.1.4 Experimento 4 - Estimativa do Modelo-II na presença das mais altas frequências

No Experimento 2 os ganhos das frequências temporais mais altas foram explorados para o modelo I e com isso apresentou melhorias em termos da resolução vertical em todos os casos avaliados. Considerando o fato do Modelo II apresentar baixos contrastes de velocidades, o que implica numa menor ativação das fontes passivas, no Experimento 4 o desempenho da FWIAR será avaliado utilizando o Modelo-II e a FWIAR será empregada em várias escalas de frequência até a frequência de corte máxima de 51Hz.

Os modelos iniciais considerados são os resultados finais obtidos no Experimento 3 e os dados invertidos, sequencialmente, nos intervalos: [0, 33Hz], [0, 36Hz], [0,39Hz], ..., [0, 51Hz]. Novamente, os parâmetros utilizados no MDF são $h=5m$ e $dt=0,25ms$ e para aplicar a FWI, foram simulados 71 Famílias de Tiro Comum utilizando a assinatura da fonte do tipo Ricker, inseridas na profundidade de 30m. Em relação ao Experimento 3, foram dobrados os números de receptores, sendo distribuídos em todos os pontos da malha na mesma profundidade da fonte.

Com respeito a obtenção dos operadores, a geometria utilizada se manteve em relação ao Experimento 3 e também foram empregadas 15 Famílias de Fontes Superficiais. As Figuras 4.24 a 4.26 e a Tabela 4.4, apresentam os resultados do Experimento 4 referente as aplicações da FWI, FWIAR-1, -2, e -3.

Observa-se que em relação ao Experimento 3, todos os resultados obtiveram um ganho de resolução, ocorrendo o melhor delineamento do reservatório. Em termos de estruturas geológicas, pode-se dizer que os resultados para as mais altas frequências foram mais precisos em relação ao modelo de velocidades verdadeiro. Observando a região de interesse, a Figura 4.25, FWIAR-2 e -3 apresentaram uma menor presença de ruídos acima do reservatório em relação a FWIAR-1. E em comparação ao Experimento 3, abaixo do reservatório, observa-se um campo de velocidade mais preciso.

Na Figura, 4.26 observa-se uma melhor convergência da FWIAR-3 em relação a FWIAR-1 e -2 e o erro relativo apresentado na Figura 4.27 e na Tabela 4.4 retratam a qualidade do imageamento do reservatório no caso da FWIAR-3. Os tons mais avermelhados apresentados na região do reservatório nas Figuras 4.27d e f confirmam esse fato. A melhor taxa de convergência refletiu em uma leve superioridade, em termos de custo computacional, conforme, apresentado na Tabela 4.4. Em termos gerais, a FWIAR obteve novamente um campo de velocidade final próximo dos resultados da FWI com uma redução do custo computacional de até 81%. Vale ressaltar que ao avançar a estratégia multiescala para frequências mais altas, deve-se levar em consideração a geologia presente na região de interesse. Esta análise pode

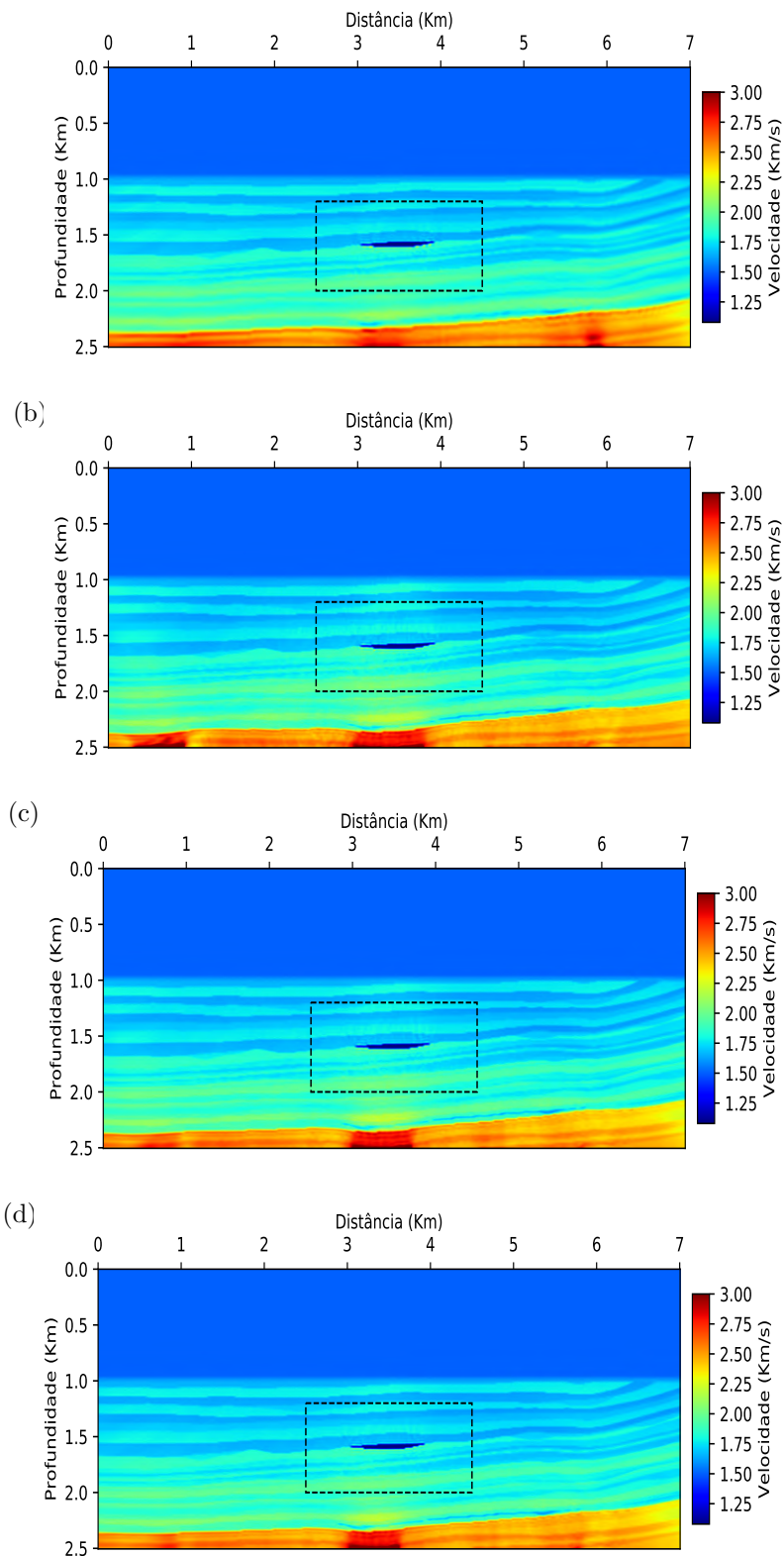


Figura 4.24: Modelos de velocidades obtidos na última inversão do intervalo de frequência referente ao Experimento 4, respectivamente, nas aplicações a) FWI, c) FWIAR-1, b) FWIAR-2 e d) FWIAR-3.

ser avaliada a partir da interpretação do modelo geológico, levando em consideração, por exemplo, a resolução sísmica desejada em termos do modelo geológico.

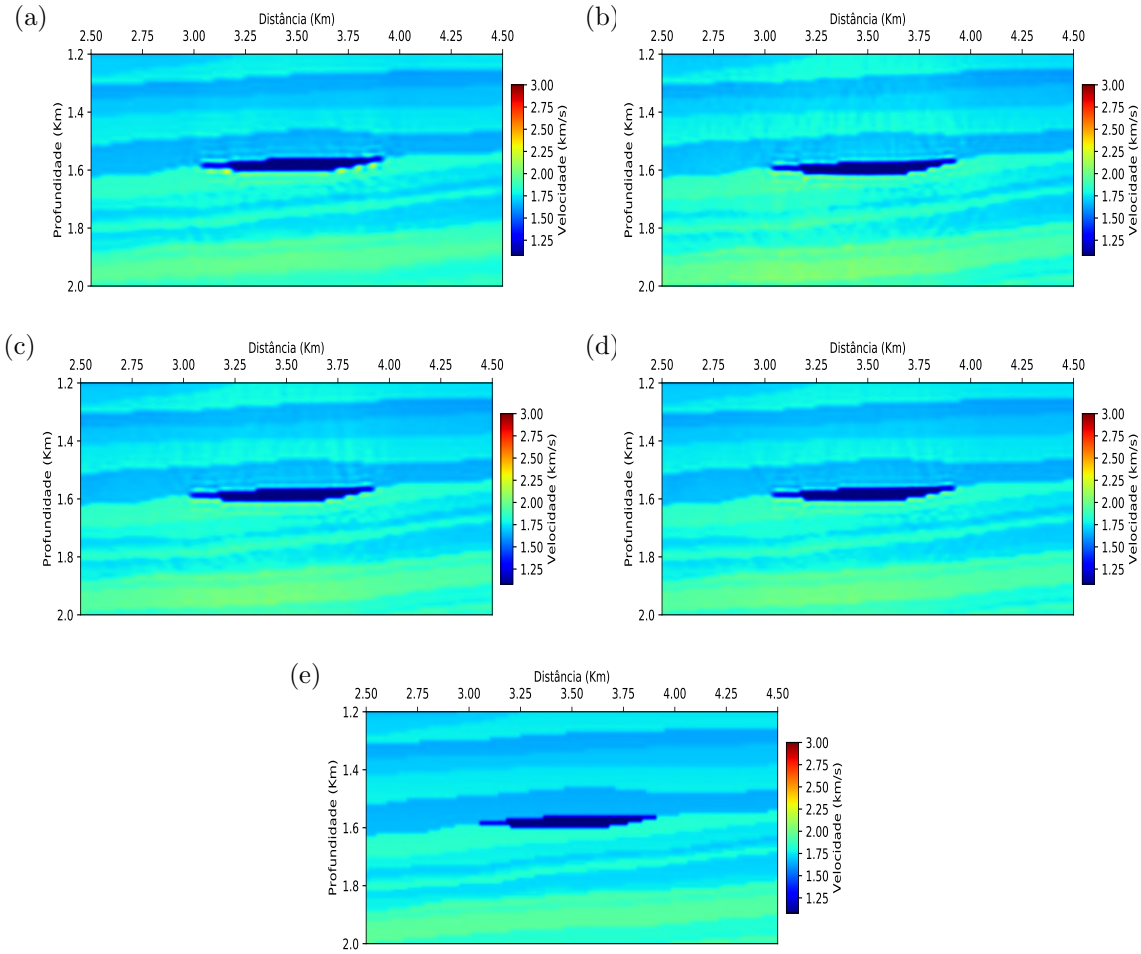


Figura 4.25: Ampliação dos modelos de velocidades na área de interesse obtido na última inversão do intervalo de frequência do Experimento 4, respectivamente, nas aplicações a) FWI, b) FWIAR-1, c) FWIAR-2, d) FWIAR-3 e) Verdadeiro.

Tabela 4.4: Comparação do custo computacional da FWI e FWIAR para o Experimento 4. O número de EDPs resolvidas na obtenção dos modelos iniciais para FWIAR-2 e -3 foi considerado, assim como o número de EDPs na construção dos operadores de síntese (equivalente a 75, 67 e 60 EDPs para FWIAR-1, FWIAR-2 e FWIAR-3, respectivamente). Os erros dizem respeito ao somatório dos erros relativos absolutos globais e locais.

	No. EDPs	Iterações	EDPs/it	Custo	Erro Global	Erro Local
FWI	36288	112	324	1,0	6097	684
FWIAR-1	8880	147	60	0,24	10574	1808
FWIAR-2	6900	114	60	0,19	8505	1222
FWIAR-3	7140	118	60	0,20	6996	975

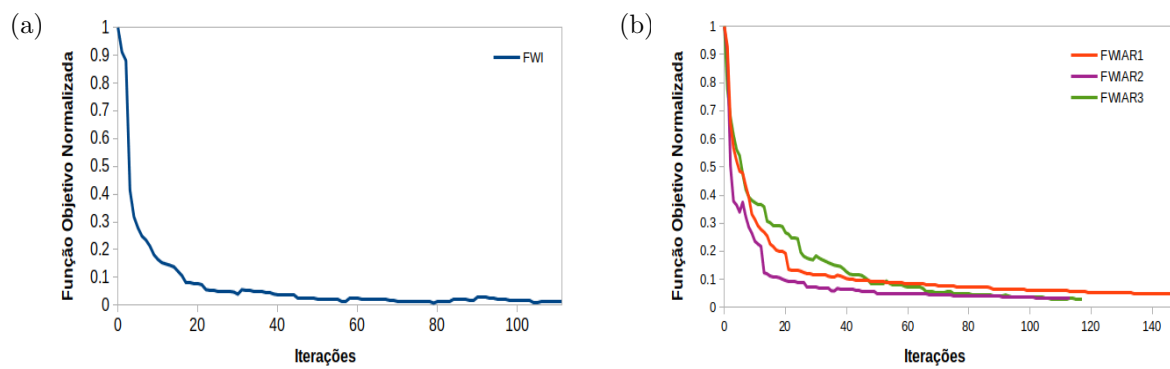


Figura 4.26: Funções objetivos normalizadas referente aos resultados do quarto experimento das aplicações a) FWI e b) FWIAR apresentadas por faixa de frequência e c) FWI e d) FWIAR apresentadas por iteração.

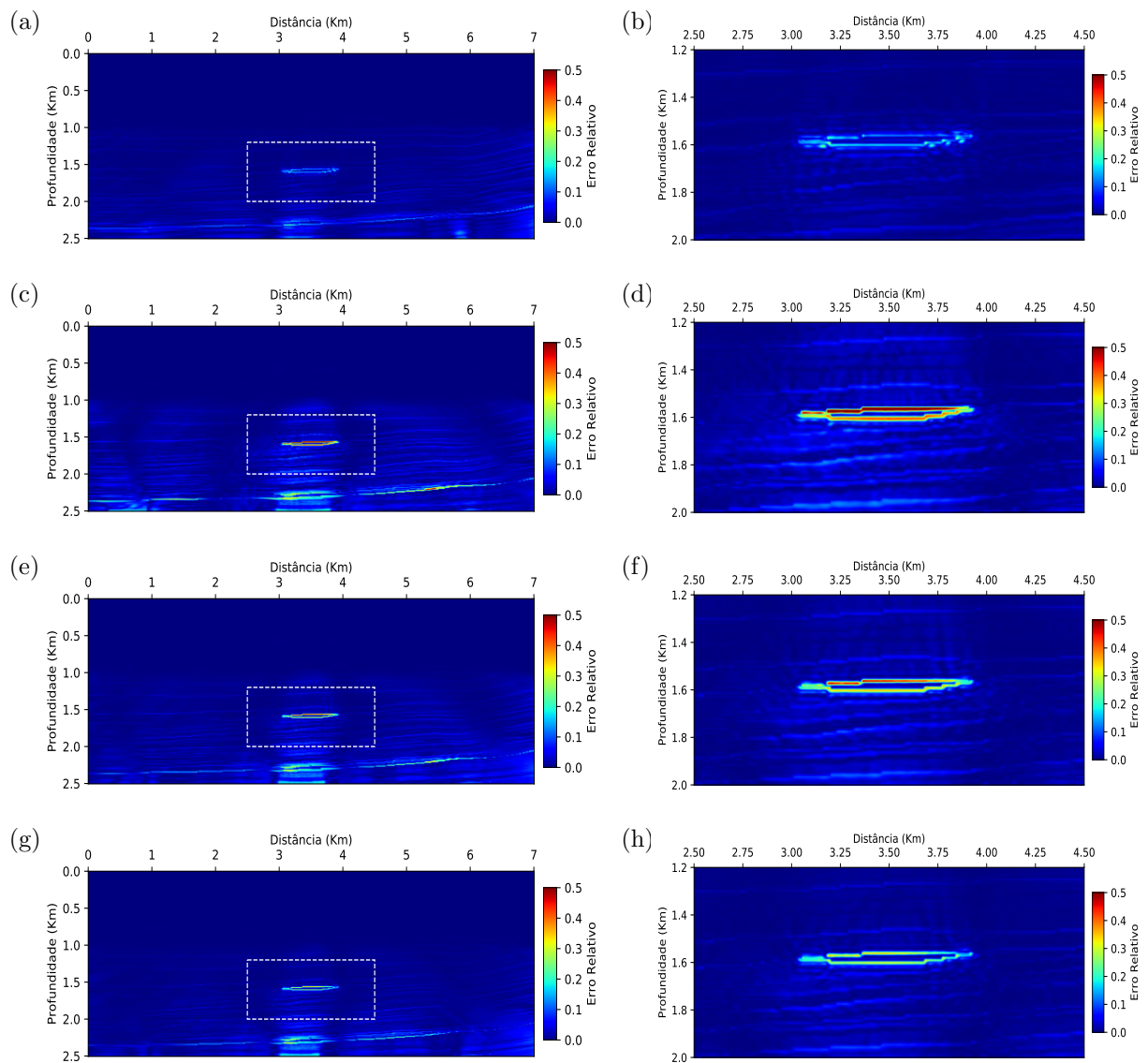


Figura 4.27: Erro relativo do Experimento 4 calculado para o último intervalo de frequência de inversão das aplicações a) FWI, c) FWIAR-1, e) FWIAR-2 e g) FWIAR-3. O retângulo pontilhado indica a área de interesse ampliadas nas aplicações b) FWI, d) FWIAR-1, f) FWIAR-2, e h) FWIAR-3.

4.2 FWIAR na ausência das mais baixas frequências - Operadores em Subsuperfície e Assimétrico

4.2.1 Experimento 5 - Estimativa do Modelo-I na ausência das mais baixas frequências

Nos experimentos 1 e 3, a metodologia de inversão utilizando a FWIAR e o Modelo I, foi avaliada na presença das mais baixas frequências. Nesta seção, a FWIAR é avaliada na ausência das mais baixas frequências, especificamente, as frequências abaixo de 4Hz foram removidas a partir de um filtro corta baixa aplicado sobre a assinatura da fonte, conforme apresentado no Apêndice B.2.1. O modelo de velocidades verdadeiro é o mesmo do Experimento 1, Figura 4.2 e para a simulação dos dados de Família de Tiro Comum, a mesma geometria foi mantida, assim como o tempo de registro, a taxa de amostragem e a profundidade de registro.

O esquema multiescala em frequência, foi empregado com espectro de dados em 9 faixas de frequências $[0, f_c]$, em que $f_c = 6\text{Hz}, 9\text{Hz}, \dots, 30\text{Hz}$. Os parâmetros do MDF e as especificações da modelagem foram mantidas em relação ao Experimento 1. Dessa forma, as avaliações foram divididas em duas aplicações, na primeira a FWI e a FWIAR utilizaram o modelo de velocidades inicial empregado no Experimento 1 (Figura 4.3a) e na segunda, foi utilizado um modelo mais preciso obtido a partir da suavização na vagarosidade do modelo verdadeiro utilizando uma média móvel de 30 pontos. A geometria do operador empregada em ambos os experimentos foram as mesmas do Experimento 1.

A Figura 4.28 apresenta o resultado referente a primeira avaliação da FWI e a FWIAR-1 na ausência das mais baixas frequências, ambos os métodos, utilizaram o modelo inicial presente na Figura 4.3a. Observa-se que os métodos sofreram com o problema de mínimo local devido a combinação de um pobre modelo inicial e a ausência das mais baixas frequências no dado sísmico. Sendo assim, os dois métodos falharam na recuperação da cinemática correta, principalmente, na região mais profunda e complexa do modelo. Além deste fato, uma anomalia de alta velocidade na parte mais rasa foi observada.

De uma forma geral, pode-se dizer que as técnicas falharam em virtude do favorecimento da presença de mínimos locais, devido as características da Norma L_2 e a ausência de um modelo de velocidades inicial que esteja próximo o suficiente do modelo verdadeiro, a fim de evitar a convergência para o mínimo local. Dentro deste contexto, a próxima avaliação utiliza um modelo de velocidades inicial mais próximo do mínimo global, o modelo é obtido a partir da suavização do modelo verdadeiro

utilizando uma média móvel na direção x e z considerando 30 pontos, Figura 4.29a.

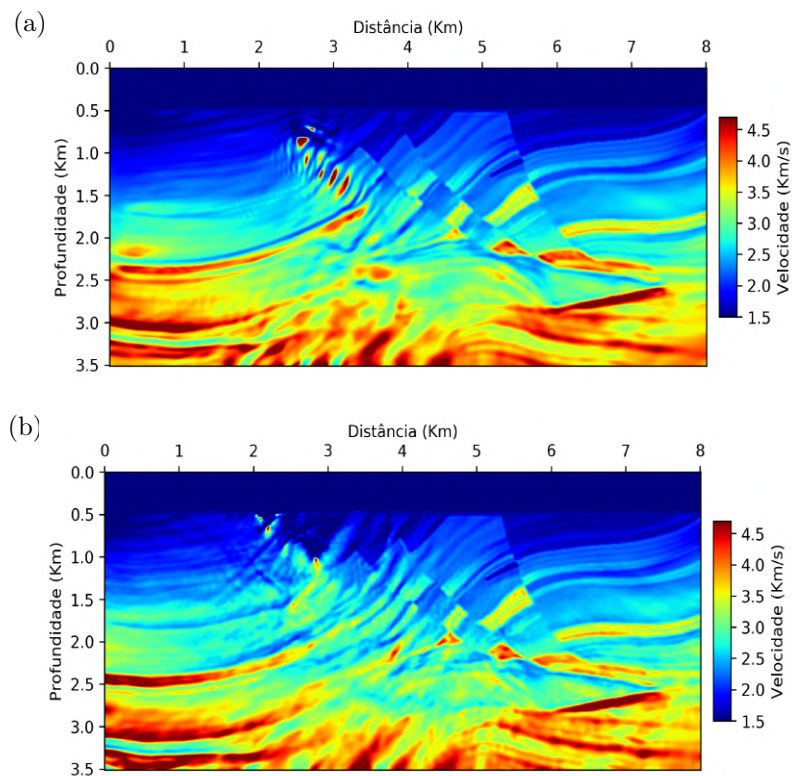


Figura 4.28: Modelos de velocidades obtidos na última inversão do intervalo de frequência do Experimento 5 a) FWI e b) FWIAR-1.

Conforme a avaliação anterior, o esquema multiescala em frequência foi empregado com espectro de dados em 9 faixas de frequências, em que $f_c = 6\text{Hz}$, 9Hz , ..., 30Hz . Os resultados finais da FWI e FWIAR-1 podem ser observados na Figura 4.29 b e c, ambos os métodos, apresentaram uma melhor convergência em relação ao resultado anterior, que utilizou um modelo de velocidade inicial inadequado. Buscando explorar a utilização de modelos iniciais com uma maior presença de contrastes de velocidade, a fim de explorar a ativação das fontes passivas, os próximos experimentos FWIAR-2 e -3 utilizaram, respectivamente, os campos de velocidades obtidos nos resultados finais da FWI para $f_c = 6$ e 9 Hz. Tais resultados, presentes na Figura 4.30 a e c, estão bem próximos dos resultados apresentados pela FWI tendo a FWIAR-2 iniciado na $f_c = 6\text{Hz}$ e a FWIAR-3 na $f_c = 9\text{Hz}$.

Analisando a região do reservatório em detalhes, pode-se observar que os métodos apresentaram resultados semelhantes com uma leve desvantagem para a FWIAR-1 e 2 (Figura 4.31). Com intuito de reduzir essa desvantagem, para a FWIAR-2 foram utilizadas 30 Famílias de Fontes Superficiais proporcionando um resultado final mais preciso, conforme apresentado em Tabela 4.5.

Os resultados dos experimentos na ausência das mais baixas frequências podem ser avaliados a partir das Funções objetivos para a FWI e FWIAR. A Figura

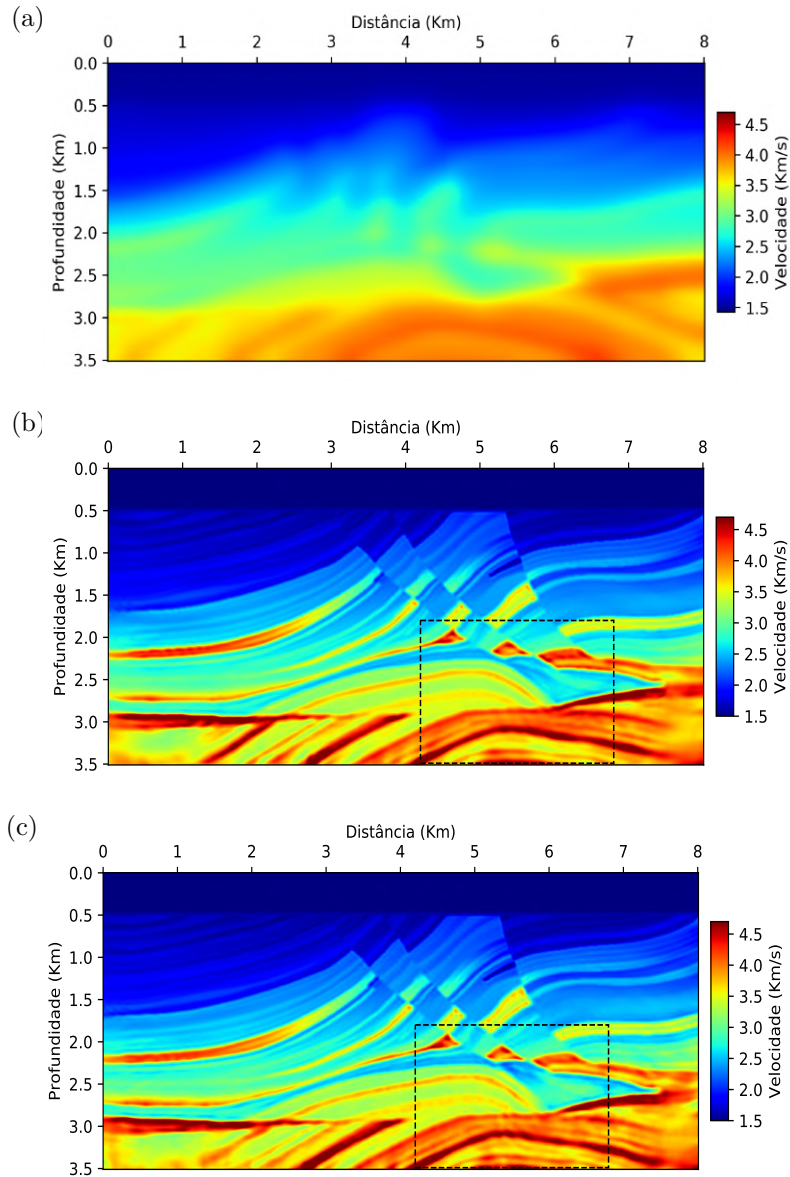


Figura 4.29: Modelos de velocidades obtidos na última inversão do intervalo de frequência do Experimento 5 a) Modelo Inicial, b) FWI e c) FWIAR-1. O retângulo pontilhado na região direita inferior indica a área de interesse.

4.32 apresenta as funções objetivos normalizadas versus o número de iterações para as 9 faixas de frequência, sendo considerado 30 iterações em cada faixa. As Figuras 4.32a - c, apresentam 30 iterações para cada faixa de frequência e caso a iteração não tenha ocorrido o valor zero foi considerado no processo de visualização desta função. Para as Figuras 4.32e - h, tem-se o valor da função por iteração e na comparação das aplicações da FWIAR observa-se uma melhor taxa de convergência para a FWIAR-3.

Com respeito ao aumento do número de fontes, empregando 30 Famílias de Fontes Superficiais, a FWIAR-2 alcançou uma taxa de convergência próxima da FWIAR-3, porém o custo foi demasiadamente superior conforme apresentado na

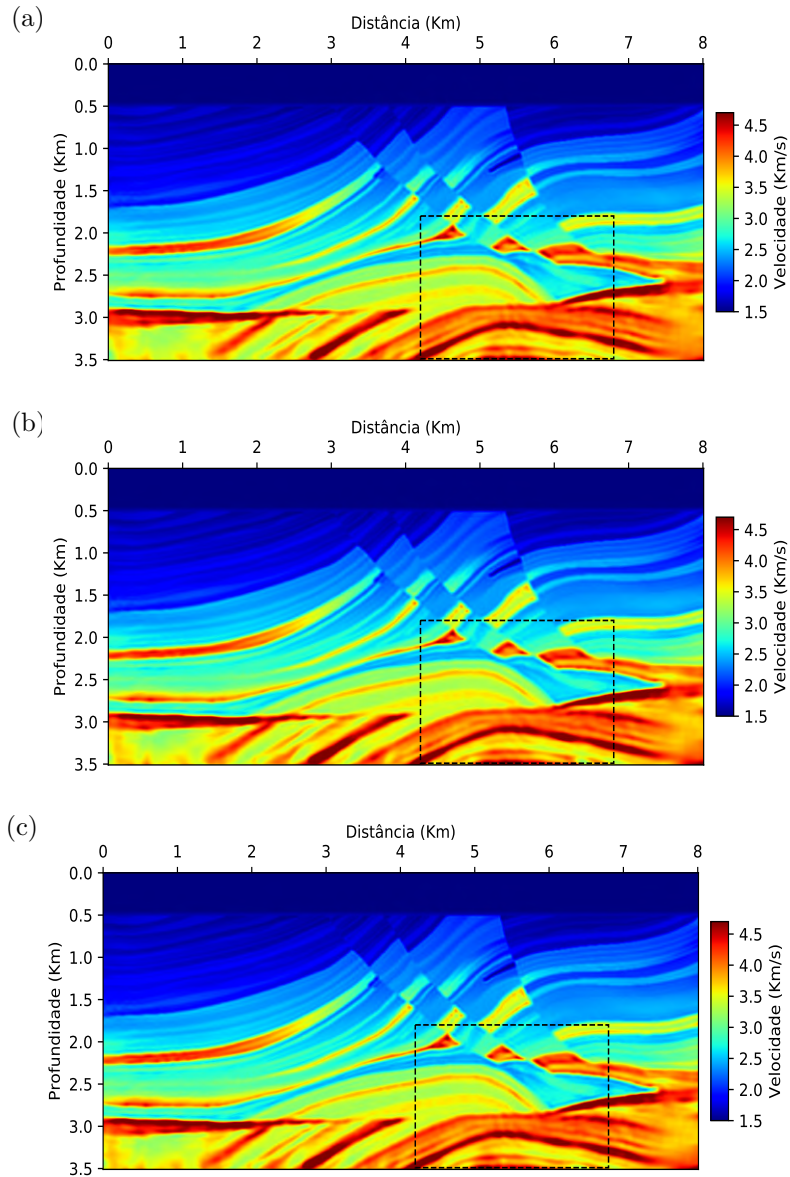


Figura 4.30: Modelos de velocidades obtidos na última inversão do intervalo de frequência do Experimento 5, respectivamente, nas aplicações a) FWIAR-2, b) FWIAR-2-30t e c) FWIAR-3. O retângulo pontilhado na região direita inferior indica a área de interesse.

Tabela 4.5. Além disso, observa-se também um maior desempenho da FWIAR-1 em relação a FWIAR-2 levando em consideração as Famílias de Fontes Superficiais. Este fato sugere que o modelo inicial suavizado apresenta informações de variação de propriedades capaz de ativar as fontes passivas, além do fato que ao empregar a Síntese de Onda na subsuperfície do meio, ocorreu o favorecimento da contribuição das fontes passivas devido ao aumento da amplitude dos pontos de espalhamento presentes na inversão corroborando assim para um resultado final mais preciso.

No que diz respeito a avaliação quantitativa dos resultados, os erros relativos apresentados na Figura 4.33 foram calculados e estão expostos na Tabela 4.5.

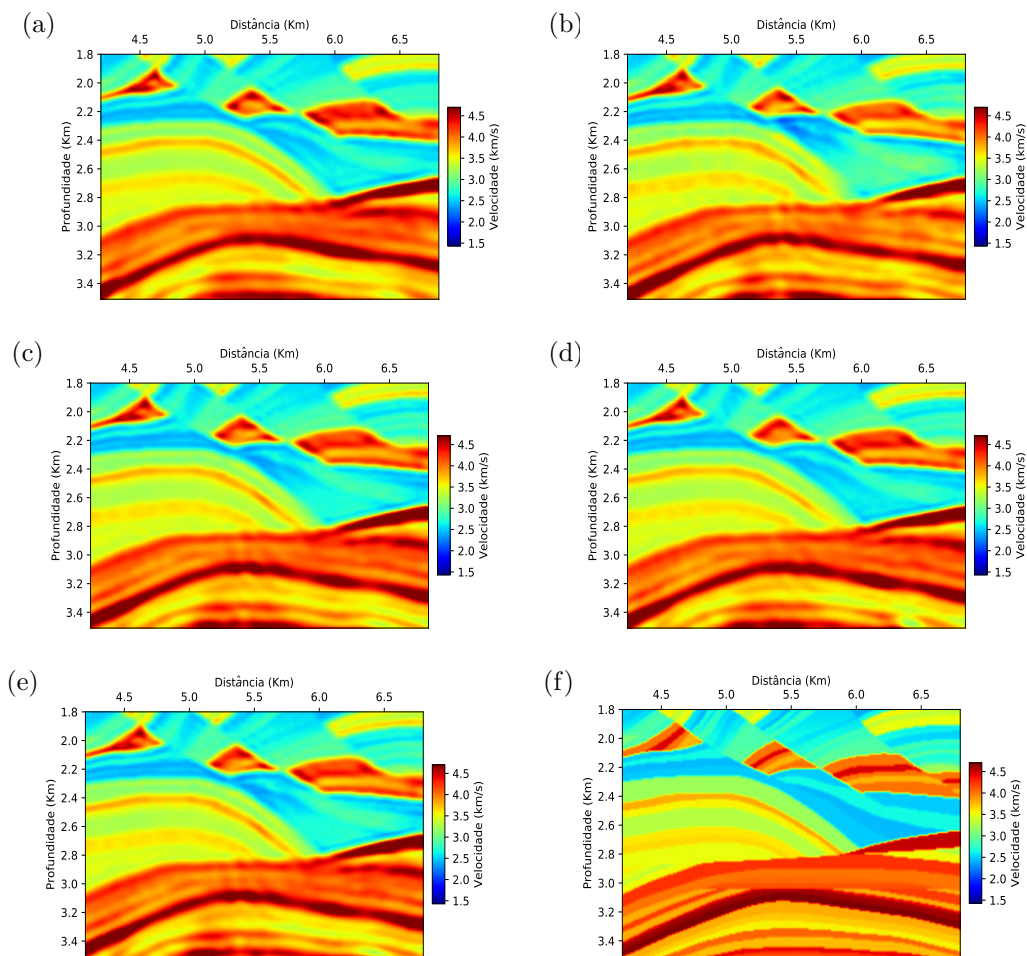


Figura 4.31: Ampliação dos modelos de velocidades na área de interesse obtido na última inversão da faixa de frequência do experimento 5, respectivamente, nas aplicações a) FWI, b) FWIAR-1, c) FWIAR-2, d) FWIAR-2-30t, e) FWIAR-3 e f) Verdadeiro.

Pode-se observar que a FWIAR-1 apresentou erros expressivos conforme indicado na Figura 4.33d. Os resultados da FWIAR2, -3 e a FWIAR-2 para 30 fontes superficiais alcançaram precisões similares.

Nesta seção, os resultados demonstraram a capacidade do método FWIAR em recuperar as informações do modelo verdadeiro na ausência das baixas frequências, a partir da substituição das fontes reais por fontes passivas. A redução do número de equações diferenciais parciais, proporcionou uma significativa redução do custo computacional de até 80% em relação ao FWI, conforme Tabela 4.5. Com respeito a relação de custo e precisão, avaliando a região do reservatório, neste experimento a FWIAR-3 foi a estratégia que mais se aproximou do resultado da FWI e apresentou a metade do custo computacional da FWI.

Tabela 4.5: Comparação do custo computacional da FWI e FWIAR para o Experimento 2. O número de EDPs resolvidas na obtenção dos modelos iniciais para FWIAR-2 e -3 foi considerado, assim como o número de EDPs na construção dos operadores de síntese (equivalente a 75, 67 e 60 EDPs para FWIAR-1, FWIAR-2 e FWIAR-3, respectivamente). Os erros dizem respeito ao somatório dos erros relativos absolutos globais e locais.

	No. EDPs	Iterações	EDPs/it	Custo	Erro Global	Erro Local
FWI	57996	179	324;0	1,0	8497	1743
FWIAR-1	11100	185	0 ;60	0,19	9120	2050
FWIAR-2	19995	30 + 170	324;60	0,34	8653	1833
FWIAR-3	25987	40 + 216	324;60	0,45	8605	1822
FWIAR-2-30t	37380	30 + 230	324;120	0,64	8733	1779

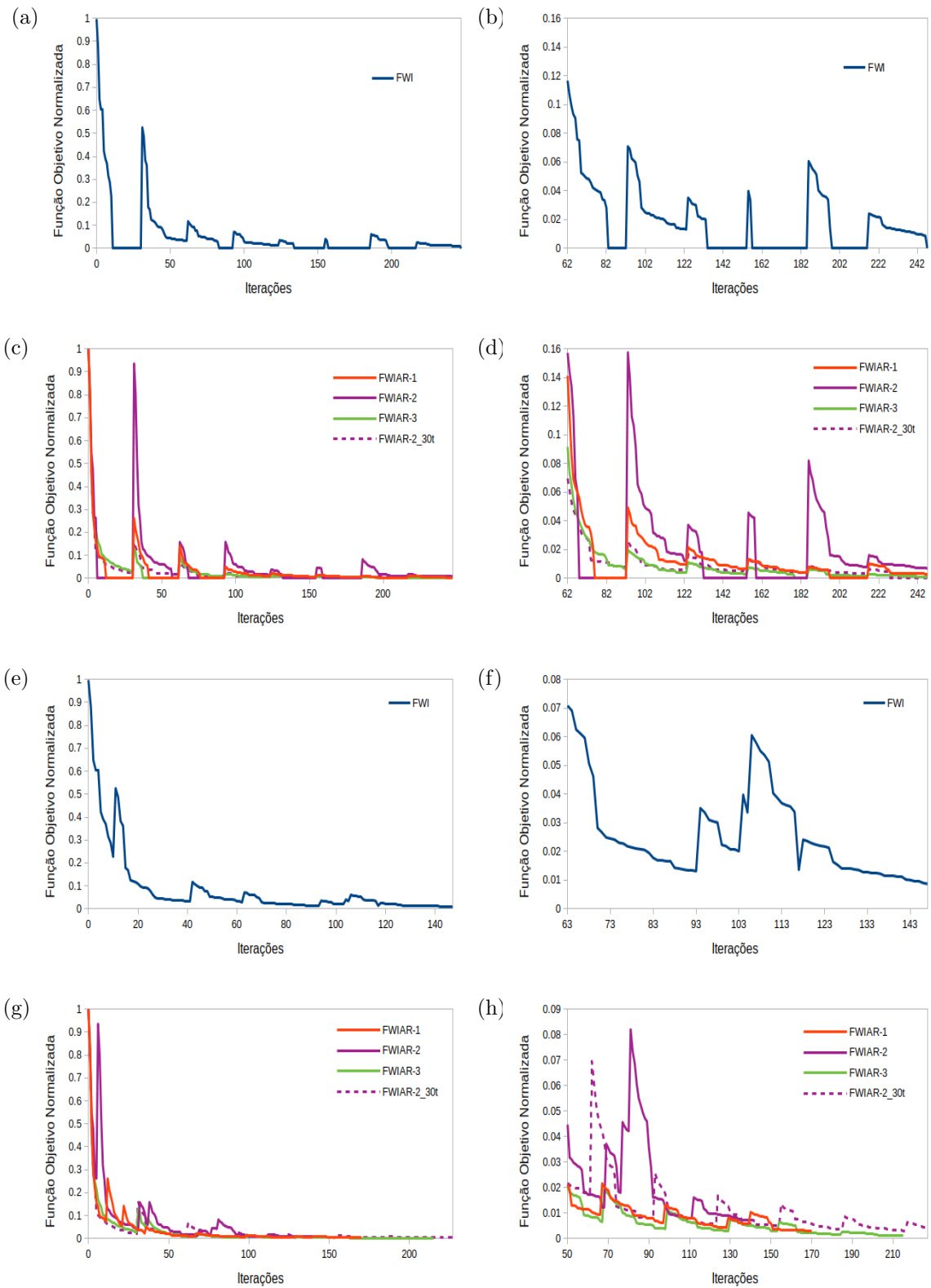


Figura 4.32: Função objetivo normalizada e obtida em cada iteração no esquema multiescala. A esquerda observa-se as funções objetivos para todas as iterações e a direita uma ampliação para melhor representar o comportamento das últimas iterações. As Figuras a) a d) representam a comparação da iteração por faixa de frequência e as Figuras de e) a h) tem-se a representação do valor por iteração.

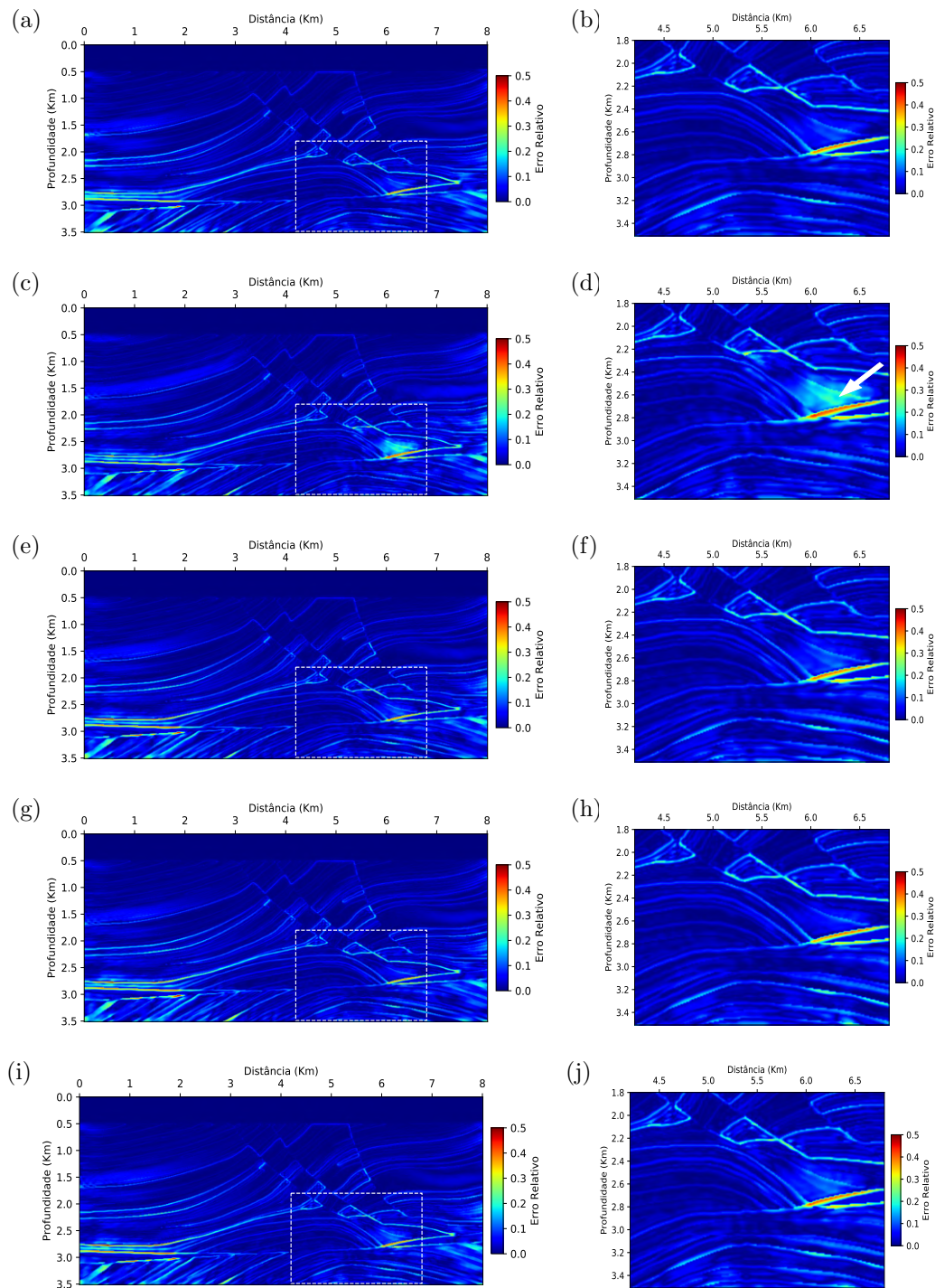


Figura 4.33: Erro relativo do Experimento 5 calculado para o último intervalo de frequência de inversão das aplicações a) FWI, c) FWIAR-1, e) FWIAR-2, g) FWIAR-2-30t e i) FWIAR-3. O retângulo pontilhado indica a área de interesse ampliadas nas aplicações b) FWI, d) FWIAR-1, f) FWIAR-2, h) FWIAR-2_30it e j) FWIAR-3.

4.3 FWIAR na presença das mais baixas frequências - Operadores em Superfície e Assimétrico

4.3.1 Experimento 6 - Operador em Superfície

Nas seções anteriores, a FWIAR foi explorada empregando operadores na subsuperfície do modelo. No Capítulo 3, o método foi descrito e a resposta das fontes superficiais em subsuperfície e superfície foram registradas na superfície de lamina d'água, Figura 3.2. Levando em consideração que a região alvo da inversão é a zona do reservatório, conforme pode-se observar na Figura 3.5, a energia registrada nessa região apresenta uma melhor iluminação quando o operador é gerado em subsuperfície. Porém, o ganho proporcionado pela melhor iluminação ainda não foi avaliada no contexto da inversão.

Nesta seção, serão explorados na FWIAR se os ganhos reais proporcionados pela melhor iluminação através do emprego do operador em subsuperfície, reflete em um melhor campo de velocidade final em relação ao emprego dos operadores em superfície. A Figura 4.34, apresenta a distribuição dos operadores utilizada em ambos os casos. Ressalta-se que o Experimento 1 apresenta os resultados da inversão para os operadores em subsuperfície e serão aqui utilizados para comparação.

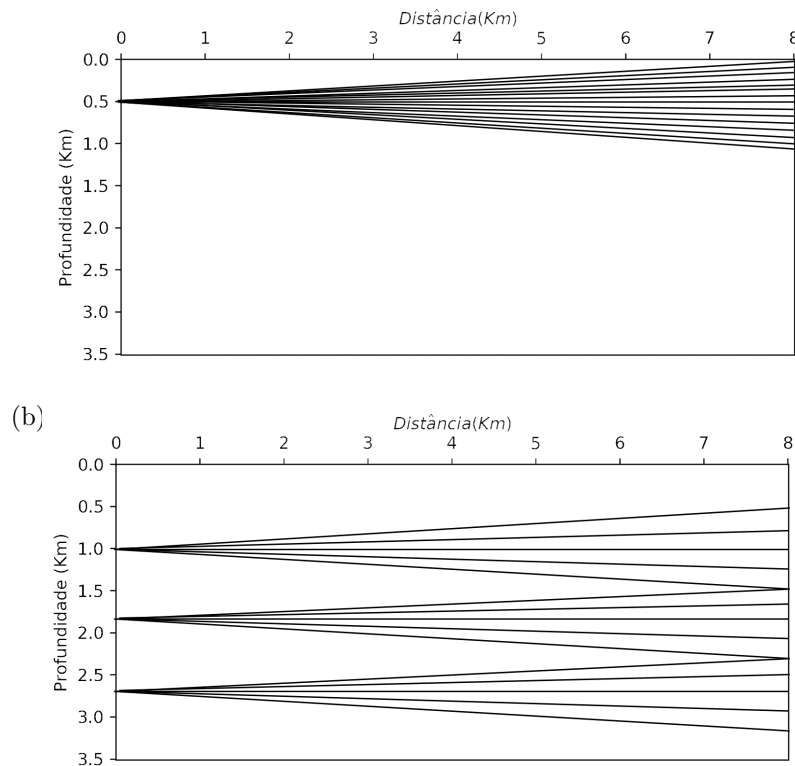


Figura 4.34: Posicionamento das fontes virtuais em: a) Superfície e b) Subsuperfície

Os parâmetros do MDF, o número de operadores e a estratégia multiescala

em frequência foram mantidas em relação ao Experimento 1. De maneira geral, as aplicações da FWIAR, considerando os operadores em superfície, obtiveram uma boa convergência, conforme observado na Figura 4.35. No entanto, em comparação com a FWIAR em subsuperfície, pode-se observar que o resultado do Experimento 6 apresenta uma menor definição das estruturas nas camadas mais profundas e principalmente na região do reservatório, Figura 4.36.

Novamente, conforme o Experimento 1, a FWIAR-1 apresentou uma distorção significativa na forma das camadas mais profundas à direita. Além disso, apresenta uma menor resolução em comparação com a FWI e a FWIAR-1 do Experimento 1.

De uma forma geral, as três estratégias da FWIAR, empregando os operadores na superfície, tiveram o erro residual próximo de zero com destaque para a FWIAR-3, pois teve uma melhor taxa de convergência, Figura 4.37a. No entanto, ao avaliar a comparação das funções objetivo referente aos resultados dos operadores em superfície com os operadores em subsuperfície, pode-se observar que a FWIAR-3 em subsuperfície obteve uma convergência mais rápida Figura 4.37b. Em termos de precisão, a Figura 4.38 ilustra o cálculo do erro relativo de cada resultado do Experimento. Pode-se observar que a o resultado da FWIAR-1, Figura 4.38d apresenta erros expressivos conforme indicado na figura. A FWIAR-2 e -3 também tiveram erros expressivos principalmente em comparação com os resultados do Experimento 1, Figura 4.38. .

Em termos de custo computacional, a FWIAR-1 apresentou um menor custo, porém a maior precisão foi da FWIAR-3 frente a redução do custo de 72,88%. No entanto, a FWIAR-3, empregando os operadores em subsuperfície, apresentou uma maior precisão, tendo um custo computacional de 71,99%, demonstrando ser a melhor estratégia em termos de custo e precisão.

Tabela 4.6: Comparação do custo computacional da FWI e FWIAR para o Experimento 6. O número de EDPs resolvidas na obtenção dos modelos iniciais para FWIAR-2 e -3 foi considerado, assim como o número de EDPs na construção dos operadores de síntese (equivalente a 75, 67 e 60 EDPs para FWIAR-1, FWIAR-2 e FWIAR-3, respectivamente). Os erros dizem respeito ao somatório dos erros relativos absolutos globais e locais.

	No. EDPs	Iterações	EDPs/it	Custo	Erro Global	Erro Local
FWI	94608	292	324; 0	1,0	11520	1960
FWIAR-1	14175	235	0 ; 60	0,15	16796	2372
FWIAR-2	23311	31 + 220	324; 60	0,25	12428	2261
FWIAR-3	25716	44 + 190	324; 60	0,27	12777	2362

A partir do Experimento 6, foi possível avaliar o desempenho da FWIAR empregando operadores em superfície. Em comparação aos resultados do Experimento 1, foi possível constatar que o emprego dos operadores em subsuperfície alcançou

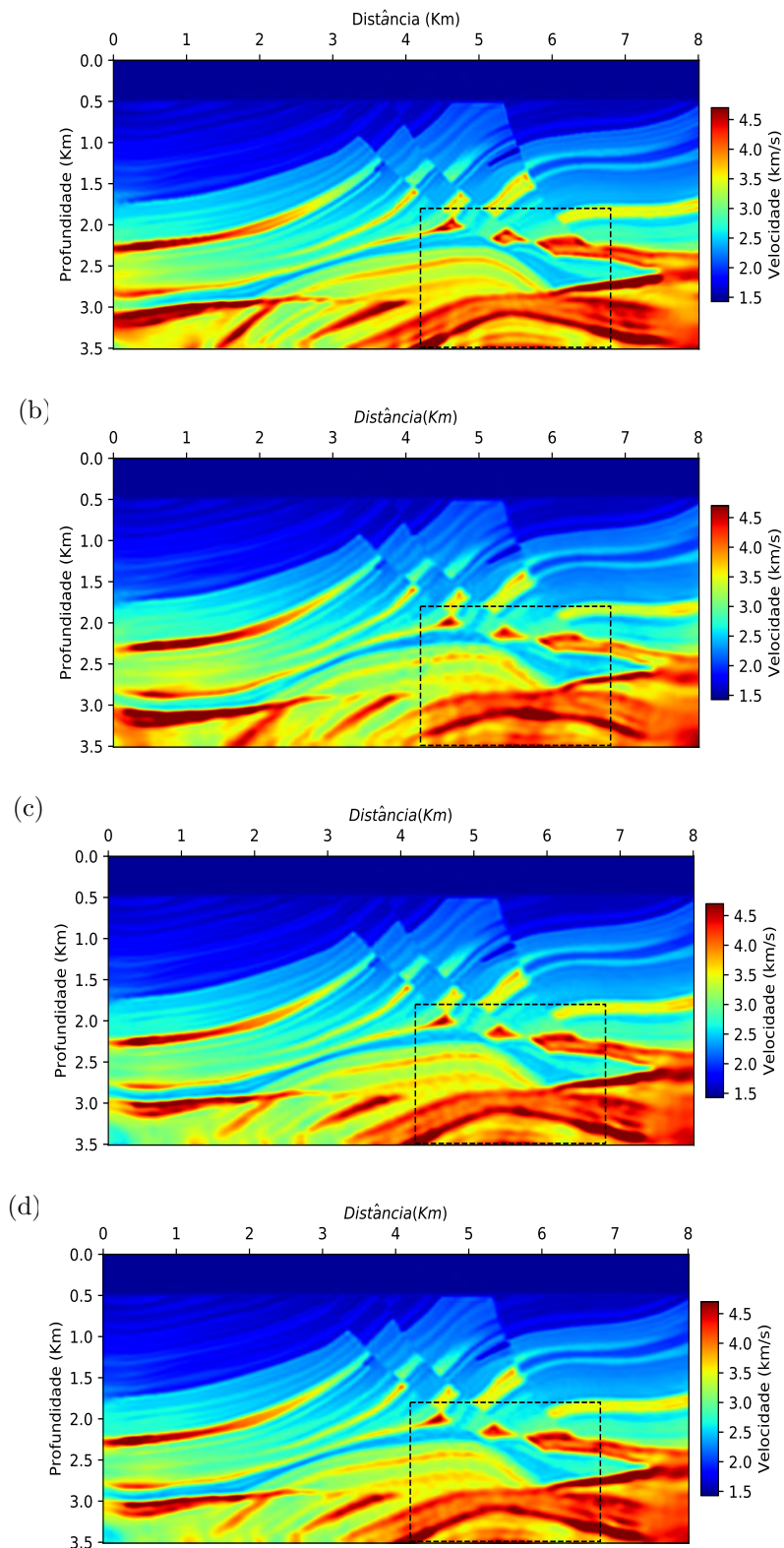


Figura 4.35: Modelos de velocidades obtidos na última inversão do intervalo de frequência do Experimento 6, respectivamente, nas aplicações a) FWI, b) FWIAR-1, c) FWIAR-2 e d) FWIAR-3. O retângulo pontilhado na região direita inferior indica a área de interesse.

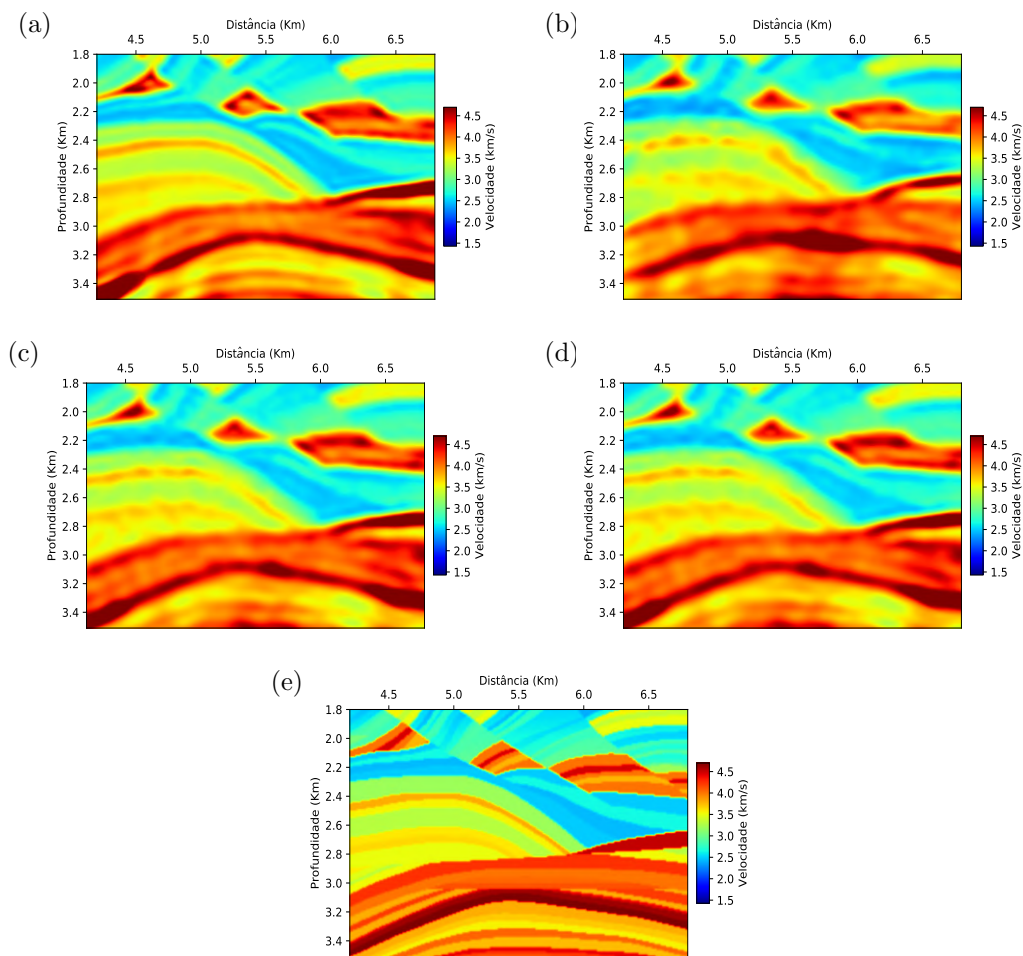


Figura 4.36: Ampliação dos modelos de velocidades na área de interesse obtidos na última inversão do intervalo de frequência do Experimento 6, respectivamente, nas aplicações a) FWI, b) FWIAR-1, c) FWIAR-2, d) FWIAR-3 e e) Verdadeiro.

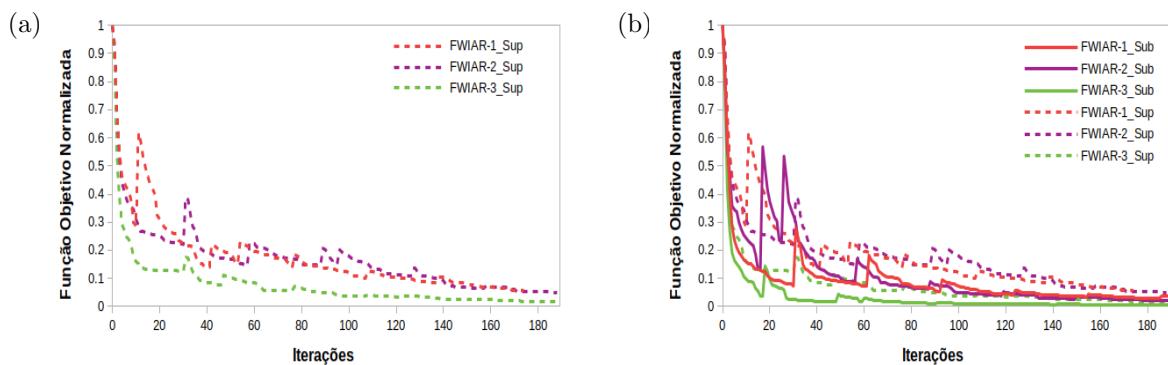


Figura 4.37: Funções objetivas normalizadas referentes aos resultados do sexto Experimento das aplicações a) FWI e b) FWIAR apresentadas por faixa de frequência e c) FWI e d) FWIAR apresentadas por iteração.

um resultado mais preciso com um menor custo computacional apresentando, assim, os ganhos reais da melhoria da iluminação na região alvo para a inversão.

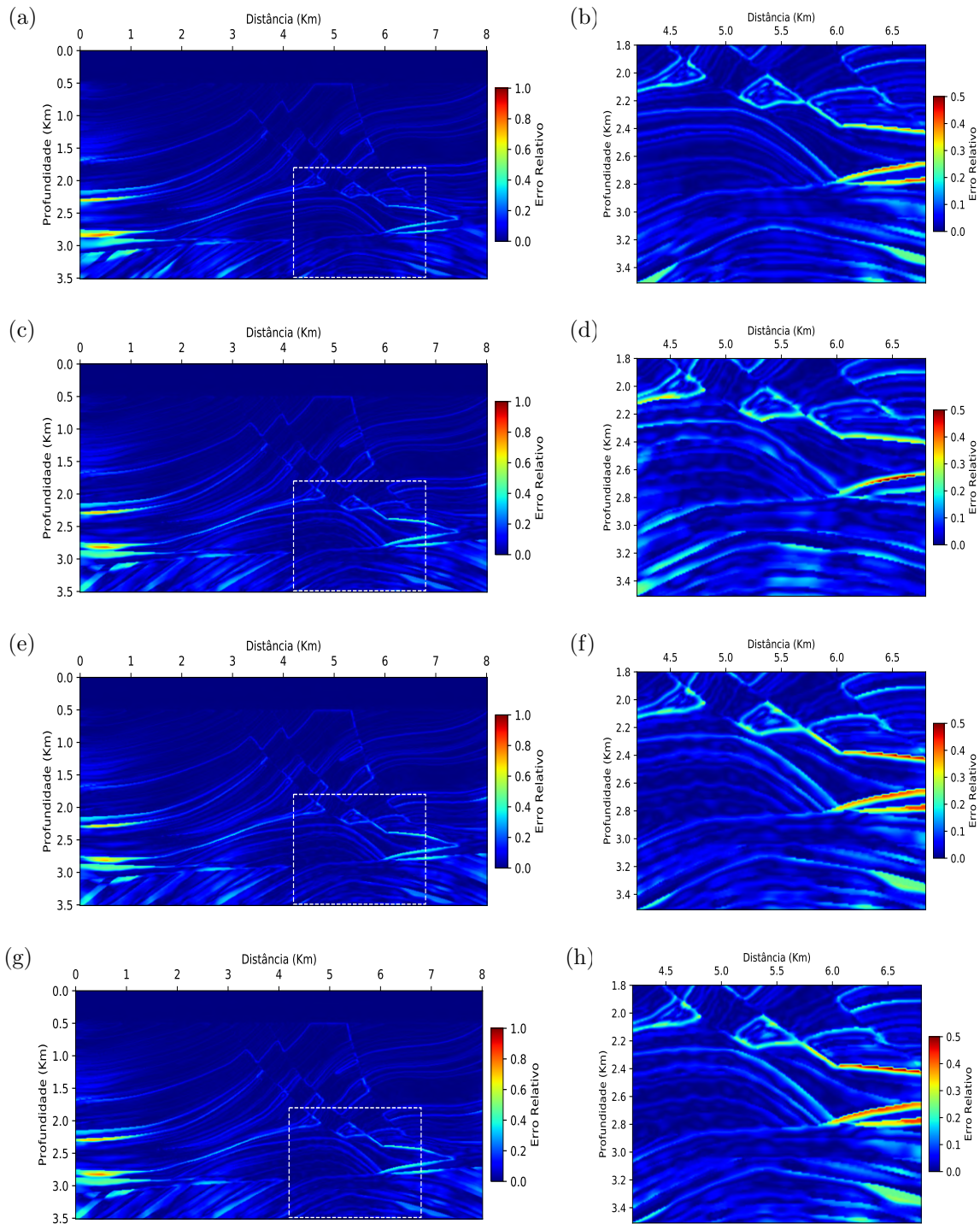


Figura 4.38: Erro relativo do Experimento 6 calculado para o último intervalo de frequência de inversão das aplicações a) FWI, c) FWIAR-1, e) FWIAR-2 e g) FWIAR-3. O retângulo pontilhado indica a área de interesse ampliadas nas aplicações b) FWI, d) FWIAR-1, f) FWIAR-2, e h) FWIAR-3.

4.4 FWIAR na presença das mais baixas frequências - Operadores em Subsuperfície e Simétrico

4.4.1 Experimento 7 - Operador Simétrico

Os resultados até esta seção buscaram direcionar o operador para a região do reservatório, a fim de uma melhor iluminação na zona alvo. No entanto, ao partir de um modelo geológico ainda desconhecido nem sempre a região alvo é conhecida. Nesta seção será empregado uma distribuição simétrica a fim de comparar seu desempenho com os resultados encontrados no Experimento 1. A Figura 4.39 apresenta o arranjo dos operadores de forma simétrica e assimétrica. Portanto, observa-se que o número de operadores foi mantido e empregado sobre a mesma referência de profundidade.

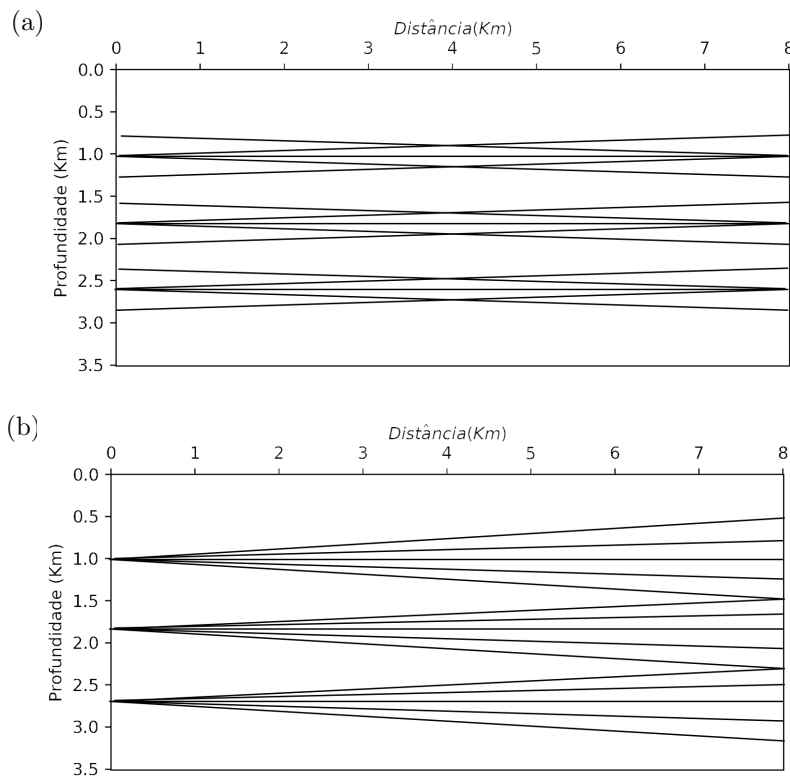


Figura 4.39: Posicionamento das fontes virtuais para: a) Arranjos Simétricos e b) Assimétricos.

Em relação ao Experimento 1, foram mantidos os parâmetros com respeito ao MDF e a geometria dos receptores e das fontes. Neste experimento, são empregados quinze Operadores de Síntese na superfície para gerar as quinze Fontes Superficiais e os campos de velocidade iniciais para a FWI, FWIAR-1, -2 e -3 são os mesmos utilizados no Experimento 1, Figura 4.3.

As Figuras 4.40 a 4.42 e a Tabela 4.7 exibem os resultados da FWI, FWIAR-1, -2 e -3. Conforme pode ser observado na Figura 4.40, a estratégia empregada na FWIAR foi capaz de recuperar as estruturas a partir da aplicação dos operadores simétricos. De maneira geral, os métodos obtiveram um resultado semelhante a FWIAR do Experimento 1. No entanto, neste experimento, a FWIAR-1 apresentou, para a zona alvo, um resultado inferior ao Experimento 1, conforme pode ser observado na Figura 4.41b. Ressalta-se que, os resultados da FWIAR-2 e -3 foram similares ao Experimento 1 como uma leve superioridade para os resultados empregando os operadores assimétricos.

O resultado da FWIAR-3 do Experimento 7 avaliado a partir da Função Objetivo, apresenta um decréscimo mais rápido em relação ao Experimento 1, especialmente para a FWIAR-2 (Figura 4.42)b. Tal fato refletiu no custo final, em termos de simulações, conforme Tabela 4.7. Com relação ao resíduo final, ambas as estratégias alcançaram valores próximos de zero, porém levando em consideração a avaliação qualitativa em torno da região de interesse, Figura 4.41, a estratégia assimétrica do Experimento 1, foi mais precisa. Esta avaliação é reforçada a partir da análise do erro relativo apresentado na Figura 4.43. Avaliando os resultados ampliados referente a área de interesse pode-se observar que principalmente o resultado da FWIAR-1 apresentou um erro maior que o Experimento 1, respectivamente Figura 4.43d e Figura 4.13. Os valores referente ao somatório do erro relativo apresentados nas Tabelas 4.7 e 4.1 reforçam essa afirmação.

Pode-se concluir que no contexto deste experimento a escolha das fontes virtuais nos experimentos anteriores favoreceu o imageamento do reservatório em relação ao Experimento 7. Cabe ressaltar que no futuro serão investigadas técnicas para obtenção de operadores ótimos em função da geometria de aquisição e dos objetivos exploratórios.

Tabela 4.7: Comparação do custo computacional da FWI e FWIAR para o Experimento 7. O número de EDPs resolvidas na obtenção dos modelos iniciais para FWIAR-2 e -3 foi considerado, assim como o número de EDPs na construção dos operadores de síntese (equivalente a 75, 67 e 60 EDPs para FWIAR-1, FWIAR-2 e FWIAR-3, respectivamente). Os erros dizem respeito ao somatório dos erros relativos absolutos globais e locais.

	No. EDPs	Iterações	EDPs/it	Custo	Erro Global	Erro Local
FWI	94608	292	324;0	1,0	11520	1960
FWIAR-1	16335	271	0 ;60	0,17	20034	2621
FWIAR-2	24031	31 + 232	324;60	0,25	13341	2201
FWIAR-3	25956	44 + 144	324;60	0,24	12847	2279

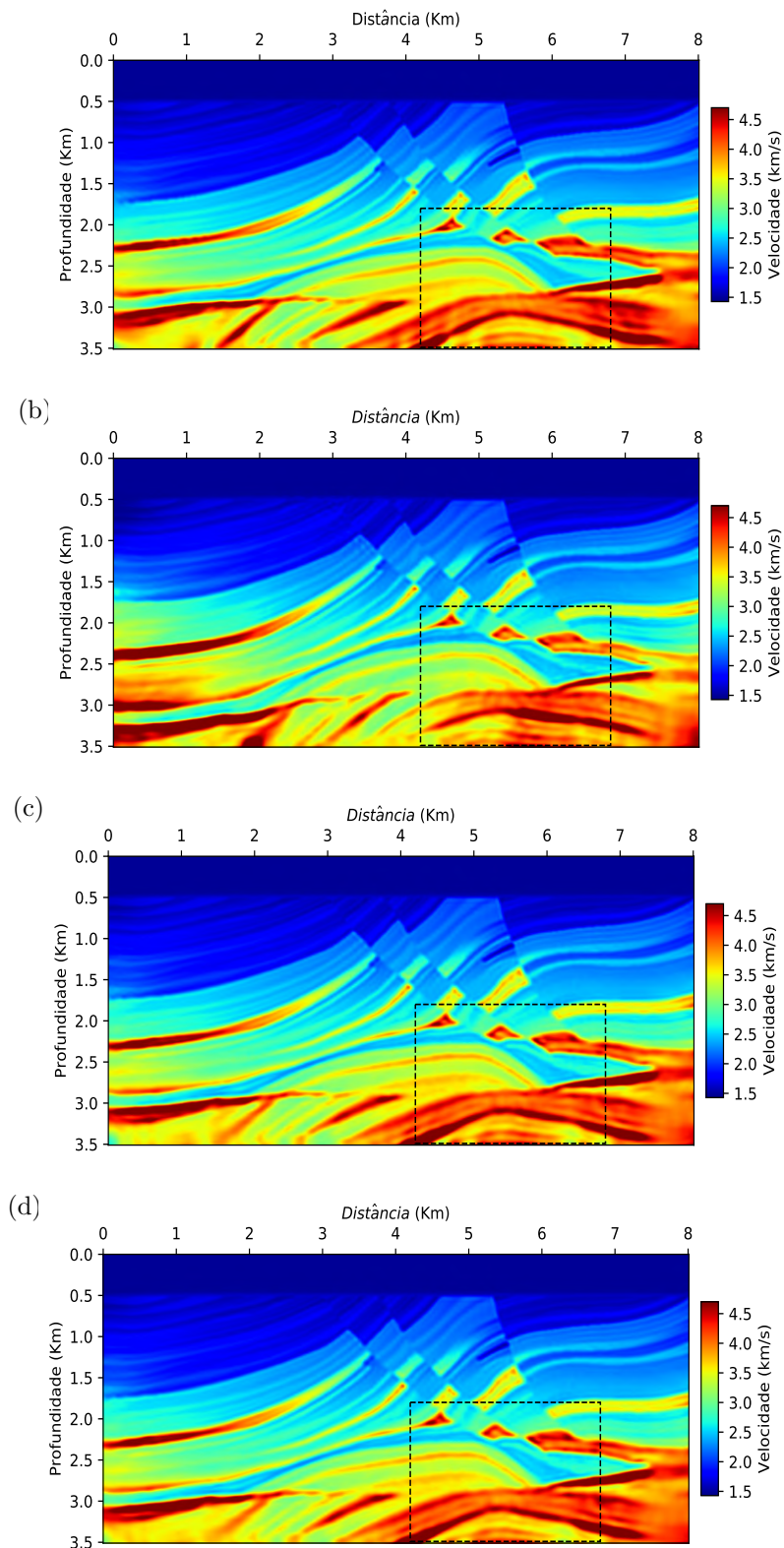


Figura 4.40: Modelos de velocidades obtidos na última inversão do intervalo de frequência do sétimo experimento, respectivamente, nas aplicações a) FWI, b) FWIAR-1 c) FWIAR-2 e d) FWIAR-3. O retângulo pontilhado na região direita inferior indica a área de interesse.

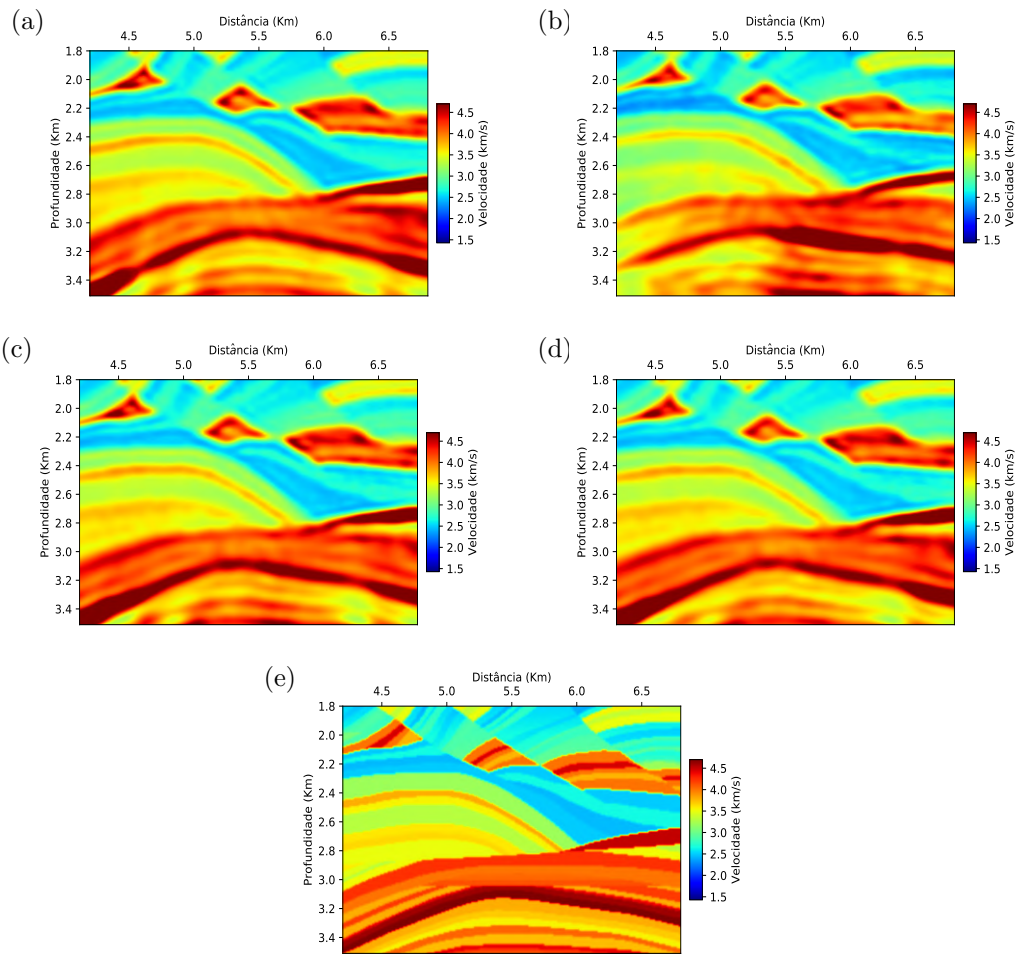


Figura 4.41: Ampliação dos modelos de velocidades na área de interesse obtido na última inversão da faixa de frequência do sétimo experimento, respectivamente, nas aplicações a) FWI, b) FWIAR-1, c) FWIAR-2, d) FWIAR-3 e e) Verdadeiro.

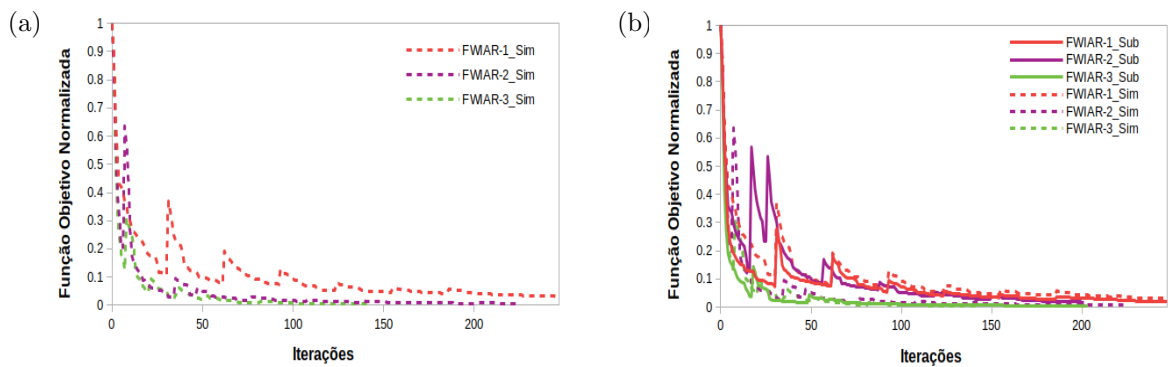


Figura 4.42: Funções objetivas normalizadas referentes aos resultados do sétimo Experimento das aplicações a) FWI e b) FWIAR apresentadas por faixa de frequência e c) FWI e d) FWIAR apresentadas por iteração.

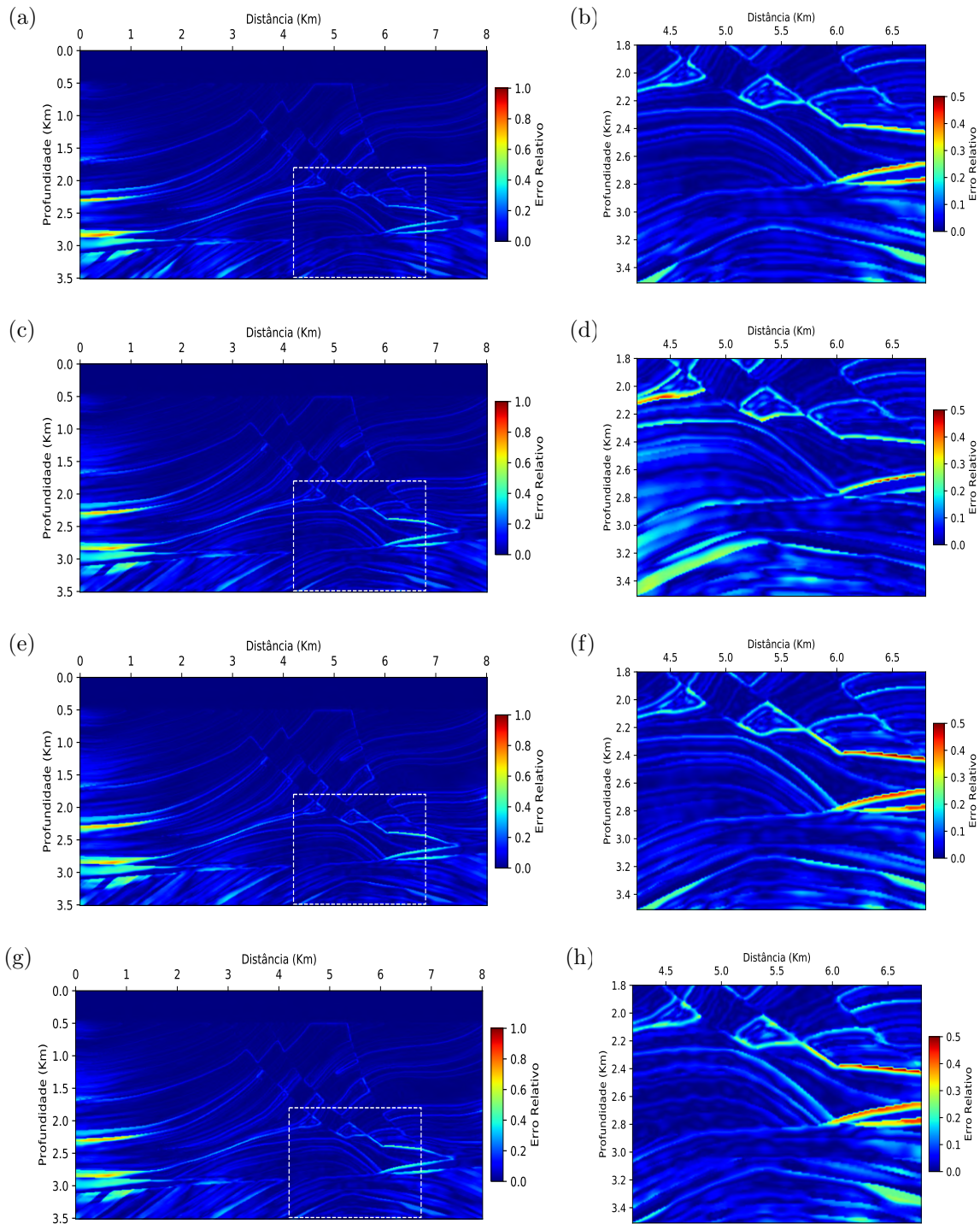


Figura 4.43: Erro relativo do Experimento 7 calculado para o último intervalo de frequência de inversão das aplicações a) FWI, c) FWIAR-1, e) FWIAR-2 e g) FWIAR-3. O retângulo pontilhado indica a área de interesse ampliadas nas aplicações b) FWI, d) FWIAR-1, f) FWIAR-2, e h) FWIAR-3.

Capítulo 5

Discussão e Propostas Futuras

5.1 Discussão

Nos experimentos, quase todas as características do Marmousi-2 foram recuperadas, exceto na aplicação FWIAR-1. Nesta aplicação, foi verificada uma distorção estrutural significativa no topo do reservatório, como consequência direta de um modelo inicial impreciso. Em termos práticos, esse tipo de imprecisão pode prejudicar o delineamento de um campo.

No que se refere a redução dos custos computacionais, esses foram alcançados pela substituição das fontes reais por fontes passivas geradas gradativamente a partir dos pontos de espalhamento presentes na propagação direta e reversa. Como resultado, o número de EDPs diminuiu significativamente, proporcionando uma grande redução no custo computacional.

Mas o que está por trás do sucesso da FWIAR? Na verdade, para diminuir os custos envolvidos na FWI, por exemplo, poderia ser realizado uma decimação dos dados. Assim ao invés de empregar toda a famílias de tiro comum, seria utilizado uma pequena fração de todo o conjunto. De forma geral, isso levaria a uma economia de CPU, GPU e armazenamento de dados. No entanto, infelizmente, este procedimento tem o potencial de diminuir a iluminação sísmica nas áreas de interesse. Técnicas sofisticadas para mitigar esse problema estão sendo propostas como por exemplo a decimação aleatória proposta por DÍAZ e GUITTON (2011).

A alternativa proposta nesse trabalho para a decimação substitui as Famílias de Tiro Comum pelas Famílias de Fonte Superficial. Sendo assim, a partir dos registros de fontes superficiais, tem-se a chance de mitigar o problema de uma pobre iluminação sísmica, que é quase inevitável, quando há um grande número de tiros descartados.

Esses conceitos foram desenvolvidos por BERKHOUT (1992); BOECHAT (2007); CHEN *et al.* (2004); RIETVELD (1995); RIETVELD e BERKHOUT (1994);

ROMERO *et al.* (2000); WANG *et al.* (2001), entre outros no contexto de imagens sísmicas. No universo dos esquemas de inversão não linear, a iluminação sísmica também está relacionada as complexidades apresentadas nos modelos de fundo. Em outras palavras, além dos tiros reais, tem-se as fontes passivas ou de contraste induzidas pela diferença de impedância sísmica presente no próprio modelo de fundo. Quando os campos de onda direto e reverso se propagam, essas fontes passivas são naturalmente ativadas e, sua energia é determinada pelo produto da amplitude do campo de onda e o contraste de impedância para cada ponto de espalhamento.

Com isso, a ativação das fontes passivas está relacionada a complexidade do modelo geológico, sendo esta substituição mais eficiente com o aumento da complexidade geológica. Essas complexidades foram as diferenças fundamentais entre as três aplicações da FWIAR ao empregar diferentes modelos iniciais. No caso da FWIAR-1, foi utilizado o campo de velocidade inicial geologicamente 1-D, o mesmo empregado na aplicação da FWI. Nos casos FWIAR-2 e -3, foram utilizados modelos de velocidades com estruturas geológicas mais complexas obtidas, respectivamente, após as faixas de frequência de 3 e 6Hz da FWI. Portanto, o mesmo modelo de velocidades geologicamente 1-D que era conveniente para a FWI foi inadequado para a FWIAR. Em termos matemáticos, pode-se dizer que o fato de substituir oitenta e um registros de tiros por quinze registros de fontes superficiais aumentou a não linearidade do problema inverso. O domínio de busca para a solução desejada reduziu de alguma maneira e esta é uma vantagem do novo método. Como ponto negativo, é necessário ter as fontes passivas, ativadas em termos do modelo inicial, em comparação com o esquema convencional.

Por outro lado, como indicado pela FWIAR-2 e -3, melhores modelos iniciais podem vir da própria FWI. Nas aplicações, o primeiro ou o segundo intervalo de frequência dos resultados da FWI foram suficientes para fornecer modelos de partida para a FWIAR convergir para a solução desejada. Isso sugere um esquema híbrido para obter o melhor dos métodos. De fato, como pode ser observado nas Tabelas 4.1 e 4.2, o ganho computacional do esquema híbrido, isto é, $HFWI = FWI + FWIAR$, foi até setenta e dois por cento para os experimentos até 30 Hz e de até noventa e três por cento para a aplicação de até 51 Hz.

5.2 Propostas Futuras

O problema enfrentado pelo esquema híbrido consiste em definir a fronteira entre os dois métodos. Nos experimentos ideais deste trabalho onde o modelo verdadeiro era conhecido, não ocorreu esse problema, no entanto, isso é crucial para tornar a FWI de Fontes Superficiais mais realista. Uma possibilidade poderia ser o uso da FWI para intervalos de frequências muito baixa para obter modelos de

velocidade que respeitem os tempos de trânsito dos eventos principais, e o FWI de Fontes Superficiais para frequências baixas e intermediárias e altas para recuperar os comprimentos de onda mais curtos. Mas até quanto a FWI deve ser utilizada?

Para responder tal pergunta um índice de complexidade geológica pode ser empregado no esquema híbrido. A Figura 5.1 foi gerada a partir de um filtro de detecção de borda (pacote skimage - python) aplicado aos três modelos iniciais empregados no Experimento 1, 6 e 7. A Figura 5.1a ilustra o quão longe o modelo inicial está do alvo em termos estruturais, além de apresentar uma baixa complexidade geológica. Ou seja, além de possuírem fontes contrastes fracas, não tem a localização precisa dos horizontes. Por outro lado, observa-se a partir do resultado tradicional da FWI, Figuras 5.1b e c, uma maior complexidade geológica, além de aparentar estar mais próximo do modelo verdadeiro do que o resultado da Figura 5.1a. Portanto são bons modelos iniciais nesse caso.

Então, pode-se dizer que um excelente modelo de velocidade inicial para a FWIAR seria aquele que contivesse fontes passivas nas proximidades dos horizontes sísmicos. Levando em consideração os resultados para a FWIAR, nos casos 2 e 3, e o fato de que os modelos de velocidades iniciais advém da FWI, nos resultados de frequência de 3 e 6 Hz para certos resultados obtidos, pode-se pensar em um método híbrido HFWI automatizado = (FWI para frequências baixas + FWIAR) para frequências intermediárias e altas utilizando um índice de complexidade geológica I_G calculado automaticamente a partir do emprego do atributo Edge Detection em conjunto com as técnicas apresentadas por DE SOUZA *et al.* (2019); SANTOS (2012). Com isso, obtém-se o Algoritmo 3 que, em tese, seria capaz de identificar a fronteira a partir da identificação da presença das fontes passivas que está diretamente associada com a complexidade geológica.

Algoritmo 3: HFWI AUTOMATIZADO

```

1 para  $f=1, N_f$  faça
2   Entrada:  $\mathbf{p}^{obs}$ ,  $\mathbf{s}(t)$  e  $\mathbf{v}_0$ 
3   Compute  $I_G$ 
4   se  $I_G == True$  então
5     | FWI
6   fim
7   senão
8     | FWIAR
9   fim
10 fim

```

O método HFWI e o método HFWI Automatizado oferecem o melhor dos dois métodos, a FWI é capaz de fornecer modelos cinematicamente bons que permite ativar as fontes passivas usando baixas frequências, como é tradicionalmente usado

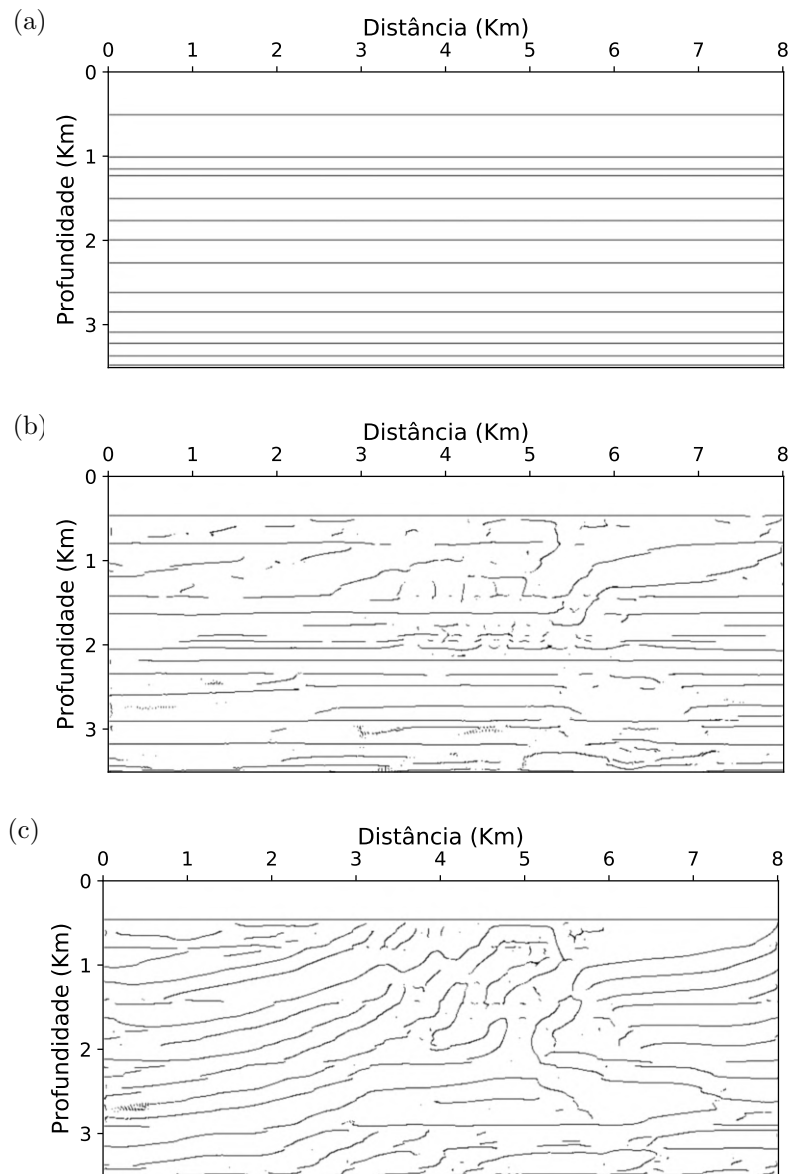


Figura 5.1: Atributo Edge Detection aplicado em: a) Modelo I Inicial, b) FWI de 3 Hz gerado para o modelo I e c) FWI de 6 Hz gerado para o modelo I.

em aplicações reais, e a FWIAR economiza CPU, GPU, RAM e armazenamento de dados trabalhando com frequências intermediárias e altas.

Nos casos ideais deste trabalho, em tese, a FWI teria resultados superiores à FWIAR empregando 15 tiros e uma alta densidade de receptores. Tal fato ocorreria devido a presença de *cross-talk* no gradiente da FWIAR. Em termos matemáticos, a equação do cálculo do gradiente da FWIAR difere da FWI apenas devido a presença do *cross-talk*, ou seja, os gradientes não são iguais.

Então, porque a FWIAR é uma estratégia que deve ser levada em consideração nas aplicações da obtenção do campo de velocidades em problemas reais? Devido ao fato de a mesma aumentar a razão sinal ruído a partir da atenuação dos ruídos coerentes. Todavia, explorar a atenuação desses artefatos e gerar um gradiente mais

limpo e próximo dos obtido na FWI é um tema que deve ser explorado. Um caminho seria utilizar estratégias semelhantes as empregadas por SCHUSTER *et al.* (2011) para Super Tiros.

O conceito de *Phase Encoded* também é uma estratégia que busca mitigar os ruídos *cross-talk*. Outra proposta de inovação seria reunir o conceito de *Phase Encoded* e Fontes Superficiais. Esta estratégia permitiria a concentração de energia ao mesmo tempo que perturbaria o dado. Além disso, testes iniciais demonstraram que essa estratégia favorecem as baixas frequências presentes no gradiente. Resultados similares foram apresentados por GUO e ALKHALIFAH (2019).

Outro tema diz respeito às limitações para aquisições marítima do tipo *streamer*. Os resultados contido nesse trabalho exploraram arranjos de aquisição do tipo *spread* fixo. Outros tipos de arranjos podem ser explorados a fim de permitir sua utilização para levantamentos com arranjos do tipo *streamer* (CHOI e ALKHALIFAH, 2012; ROUTH *et al.*, 2011).

Outro ponto seria estender a FWIAR para casos de inversão elástica. Neste caso, um caminho seria avaliar o padrão de radiação com relação as propriedades invertidas ao utilizar as fontes superficiais para diferentes seleções de afastamento de fonte e receptor (FWIAR Multiparamétrica).

Do ponto de vista do arranjo dos Operadores de Síntese, neste trabalho foi considerado apenas ondas planas, porém cabe ressaltar que a técnica não se limita a operadores de síntese de onda plana. Diferentes arranjos podem ser utilizados inclusive os guiados pela atualização do modelo de fundo. Uma ideia seria utilizar operadores direcionados por horizontes previamente interpretados e atualizados de acordo com a recuperação do campo de velocidade.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho, foi introduzido um novo método baseado nos conceitos de Família de Fontes Superficiais e síntese de ondas, como proposto por Berkhout e Ritveld, especialmente desenvolvido para mitigar os custos computacionais da FWI para frequências temporais intermediárias e altas. Por fim, foi explorado a não linearidade dos operadores para modelagem direta e reversa para substituir fontes reais por fontes passivas, que são difratadas quando o campo de onda, um pouco controlado, atinge heterogeneidades nos modelos de plano de fundo. Essa estratégia compensa naturalmente o pequeno número de EDPs no método. Nos experimentos numéricos realizados no Marmousi-2, foi observado uma economia de recursos computacionais superior a oitenta por cento em comparação com a abordagem tradicional. Isso representa uma redução de dias por horas para os experimentos até 30 Hz de frequência de corte e de semanas para dias no experimento realizado de 33 a 51 Hz. No entanto, também foi percebido a necessidade de melhores modelos iniciais do que os usados na FWI de Famílias de Tiro Comum. Matematicamente, pode-se dizer que ocorreu um estreitamento na região de busca em torno do mínimo global. Por fim, um esquema híbrido com potencial para mitigar esse problema foi sugerido. É uma combinação da FWI e FWIAR, um FWI híbrido. Então, o FWI seria aplicado no final do espectro de baixa frequência para fornecer modelos iniciais para tornar a FWI, de um pequeno número de fontes superficiais eficaz, para frequências temporais mais altas. No entanto, muito trabalho ainda precisa ser realizado para definir a fronteira no algoritmo HFWI.

Referências Bibliográficas

- ABUBAKAR, A., PAN, G., LI, M., et al., 2011, “Three-dimensional seismic full-waveform inversion using the finite-difference contrast source inversion method”, *Geophysical Prospecting*, v. 59, n. 5, pp. 874–888. doi: 10.1111/j.1365-2478.2011.00953.x.
- AGHAMIRY, H., GHOLAMI, A., OPERTO, S., 2020, “Robust Full Waveform Inversion for sparse ultra-long offset OBN data”, v. 2020, n. 1, pp. 1–5. ISSN: 2214-4609. doi: <https://doi.org/10.3997/2214-4609.2020611007>.
- ALKHALIFAH, T., 2014a, *Full Waveform Inversion in an Anisotropic World: Where are the Parameters Hiding?* Education tour series. EAGE Publications. ISBN: 9789073834835.
- ALKHALIFAH, T., 2015, “Conditioning the full-waveform inversion gradient to welcome anisotropy”, *Geophysics*, v. 80, n. 3, pp. R111–R122. doi: 10.1190/GEO2014-0390.1.
- ALKHALIFAH, T., 2014b, “Scattering-angle based filtering of the waveform inversion gradients”, *Geophysical Journal International*, v. 200, n. 1 (11), pp. 363–373. ISSN: 0956-540X. doi: 10.1093/gji/ggu379.
- ALKHALIFAH, T., 2016, “Full-model wavenumber inversion: An emphasis on the appropriate wavenumber continuation”, *GEOPHYSICS*, v. 81, n. 3, pp. R89–R98. doi: 10.1190/geo2015-0537.1.
- ALVES, G. C., 2017, *Elastic Full Waveform Inversion of Multicomponent Data*. Tese de Doutorado, Stanford University, California, June.
- ANGELOV, V., PURCELL, C., LATTER, T., et al., 2019, “Technology Advances in Constructing High Resolution Velocity and Absorption Models over 35,000km² in the North Sea”, v. 2019, n. 1, pp. 1–3. ISSN: 2214-4609. doi: <https://doi.org/10.3997/2214-4609.201900045>.

- BARRAGAN, S., DONNO, D., JOUNO, F., et al., 2019, “Updating velocity models for complex pre-salt targets in Santos basin”. In: *16th International Congress of the Brazilian Geophysical Society*. SBGF, August.
- BARZILAI, J., BORWEIN, J., 1988, “Two-point step size gradient methods”, *IMA Journal of Numerical Analysis*, v. 8, pp. 141–148.
- BAUMSTEIN, A., S. ROSS, W., LEE, S., 2011, “Simultaneous Source Elastic Inversion of Surface Waves”. In: *73rd Annual International Conference and Exhibition*. EAGE, May. doi: <https://doi.org/10.3997/2214-4609.20149055>. Expanded Abstracts.
- BEN-HADJ-ALI, H., OPERTO, S., VIRIEUX, J., 2011, “Fast full-wavefield seismic inversion using encoded sources”, *Geophysics*, v. 79, n. 4, pp. R109–R124.
- BERENGER, J.-P., 1994, “A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves”, *Journal of Computational Physics*, v. 114, n. 2, pp. 185 – 200. ISSN: 0021-9991. doi: <https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1159>.
- BERKHOUT, A. J., 1992, “Areal shot record technology”, *Journal of Seismic Exploration*, v. 1, n. 2, pp. 251–264.
- BOECHAT, J. T. B., 2007, *Migração Reversa no Tempo 3D Orientada ao Alvo por Síntese de Frentes de Onda*. Tese de Doutorado, UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, Junho.
- BOECHAT, J. B., CUNHA, P. E. M., FILHO, D. M. S., et al., 2005a, “Migração RTM orientada ao alvo: experimentos numéricos em modelos envolvendo tectônica salífera”. In: *9th International Congress of the Brazilian Geophysical Society & EXPOGEF, Salvador, Bahia, Brazil, 11-14 September 2005*, pp. 1660–1664, a. doi: 10.1190/sbgef2005-331.
- BOECHAT, J. B., FILHO, D. M. S., CUNHA, P. E. M., et al., 2005b, “Migração RTM orientada ao alvo”. In: *9th International Congress of the Brazilian Geophysical Society & EXPOGEF, Salvador, Bahia, Brazil, 11-14 September 2005*, pp. 1655–1659, b. doi: 10.1190/sbgef2005-330.
- BOONYASIRIWAT, C., SCHUSTER, G. T., 2010, “3D multisource full-waveform inversion using dynamic random phase encoding”. In: *SEG Expanded Abstracts*, pp. 1044–1049. SEG. doi: <https://doi.org/10.1190/1.3513025>. Expanded Abstracts.
- BRETHERTON, S., HAACKE, R., XIAO, B., et al., 2019, “High-Resolution Velocity Model Building and Imaging for Injectites in the Central North Sea”,

v. 2019, n. 1, pp. 1–5. ISSN: 2214-4609. doi: <https://doi.org/10.3997/2214-4609.201901226>.

BULCÃO, A., FILHO, D. M. S., ALVES, G. C., et al., 2011, “Application of blended seismic data in full waveform inversion”. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2011*, pp. 2649–2653. doi: 10.1190/1.3627742.

BUNKS, C., DALECK, F., ZALESKI, M., et al., 1995, “Multiscale seismic waveform inversion”, *Geophysics*, v. 60, n. 5, pp. 1457–1473.

CARNEIRO, M. S. R., DIAS, B. P., SOARES FILHO, D. M., et al., 2018, “On the Scaling of the Update Direction for Multi-parameter Full Waveform Inversion: Applications to 2D Acoustic and Elastic Cases”, *Pure and Applied Geophysics*, v. 175, pp. 217–241. doi: 10.1007/s00024-017-1677-9.

CHAZALNOEL, N., GOMES, A., ZHAO, W., et al., 2017, “Revealing Shallow and Deep Complex Geological Features with FWI - Lessons Learned”, v. 2017, n. 1, pp. 1–5. ISSN: 2214-4609. doi: <https://doi.org/10.3997/2214-4609.201701158>.

CHEN, X. M., WANG, H. Z., CHEN, J. B., et al., 2004, “Prestack depth migration by surface rotation controlled illumination.” *Chinese Journal of Geophysics*, v. 47, pp. 342–349. doi: 10.1002/cjg2.490.

CHOI, Y., ALKHALIFAH, T., 2012, “Application of multi-source waveform inversion to marine streamer data using the global correlation norm”, *Geophysical Prospecting*, v. 60, n. 4, pp. 748–758.

CHU, C., STOFFA, P. L., 2012, “Determination of finite-difference weights using scaled binomial windows”, *Geophysics*, v. 77, pp. 57–67.

CLAERBOUT, J., 1985, *Imaging the earth's interior*. Inc, Blackwell Scientific Publications.

DE SOUZA, R. V. M., PETERS, F. C., MANSUR, W. J., et al., 2019, “GII regularization technique for seismic data inversion”, *Journal of Applied Geophysics*, v. 160 (jan.), pp. 229 – 235. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2018.11.020>.

DÍAZ, E., GUITTON, A., 2011, “Fast full waveform inversion with random shot decimation”. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2011*, pp. 2804–2808. doi: 10.1190/1.3627777.

- DUARTE, F. S., 2012, *Modelagem Acústica no Domínio da Frequência através do emprego de Diferentes Esquemas de Diferenças Finitas*. Tese de Mestrado, UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, Setembro.
- DUVAL, G., RATCLIFFE, A., 2020, “What Can the High-Resolution Velocities from Full-Waveform Inversion Offer for Seismic Interpretation?” v. 2020, n. 1, pp. 1–5. ISSN: 2214-4609. doi: <https://doi.org/10.3997/2214-4609.202012166>.
- FARIA, E. L., 1986, *Migração antes do empilhamento utilizando propagação reversa no tempo*. Tese de Mestrado, UFBA, Salvador-Bahia, Abril.
- FICHMAN, S., 2005, *Modelagem Sísmica em Meios Acústicos, Elásticos e Poroe-lásticos*. Tese de Mestrado, UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, Junho.
- FICHTNER, A., 2011, *Full Seismic Waveform Modelling and Inversion*. Advances in Geophysical and Environmental Mechanics and Mathematics. Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 9783642158070.
- FLETCHER, R., REEVES, C. M., 1964, “Function minimization by conjugate gradients”, *Computer Journal*, v. 7, pp. 149–154.
- GABRIELLI, P., JOUNO, F., XIAO, B., et al., 2016, “Velocity model building offshore Gabon - a vast step into the unknown”. In: *PETEX PESGB Biannual Conference and Exhibition*.
- GUASCH, L., WARNER, M., 2014, “Adaptive Waveform Inversion - FWI Without Cycle Skipping - Applications”. In: *EAGE Extended Abstract*, n. 1, pp. 1–5. doi: <https://doi.org/10.3997/2214-4609.20141093>.
- GUO, Q., ALKHALIFAH, T., 2019, “Datum-based waveform inversion using a subsurface-scattering imaging condition”, *Geophysics*, v. 84, pp. S251–S266. doi: 10.1190/geo2018-0615.1.
- HAFFINGER, P. R., 2013, *Seismic Broadband Full Waveform Inversion*. Tese de Mestrado, Delft University of Technology, London, January.
- HU, W., CHEN, L., ABUBAKAR, A., 2018, “Retrieving Low Wavenumber Information in FWI: An Overview of the Cycle-Skipping Phenomenon and Solutions”, *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 2, pp. 132–141.
- JANG, U., MIN, D. J., SHIN, C., 2009, “Comparison of scaling methods for waveform inversion”, *Geophysical Prospecting*, v. 57, n. 1, pp. 49–59.

- JANNANE, M., BEYDOUN, W., CRASE, E., et al., 1989, “Wavelengths of earth structures that can be resolved from seismic reflection data”, *Geophysics*, v. 51, n. 7, pp. 906–910.
- JEON, S., HA, W., KWON, J., et al., 2014, “Full Waveform Inversion Using the Energy Objective Function”, v. 2014, n. 1, pp. 1–5. ISSN: 2214-4609. doi: <https://doi.org/10.3997/2214-4609.20140701>.
- JIMENEZ TEJERO, C., DAGNINO, D., SALLARES, V., et al., 2014, “Comparison of Objective Functionals in Seismic Full Waveform Inversion”, v. 2014, n. 1, pp. 1–5. ISSN: 2214-4609. doi: <https://doi.org/10.3997/2214-4609.20140851>.
- KELLY, K. R., WARD, R. W., TREITEL, S., et al., 1976, “SYNTHETIC SEISMOGRAMS: A FINITE-DIFFERENCE APPROACH”, *GEOPHYSICS*, v. 41, n. 1, pp. 2–27. doi: 10.1190/1.1440605.
- KOSLOFF, D. D., BAYSAL, E., 1982, “Forward modeling by a Fourier method”, *GEOPHYSICS*, v. 47, n. 10, pp. 1402–1412. doi: 10.1190/1.1441288.
- KREBS, J. R., ANDERSON, J. E., HINKLEY, D., et al., 2009, “Fast full-wavefield seismic inversion using encoded sources”, *Geophysics*, v. 74, n. 6, pp. 1WWC177–WCC188.
- KWON, T., BYUN, J., KIM, B. Y., et al., 2019, “Elastic full waveform inversion using plane-wave”, *Journal of Applied Geophysics*, v. 170, pp. 103826. ISSN: 0926-9851. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2019.103826>.
- LAILLY, P., 1983, “The seismic inverse problem as a sequence of before stack migrations”. In: *Conference on inverser scattering: theory and application*, pp. 206–220, Societe for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- LEVANDER, A. R., 1988, “Fourth-order finite-difference P-SV seismograms”, *Geophysics*, v. 53, pp. 1425–1436.
- LI, Y., ALKHALIFAH, T., ZHANG, Z., 2020, “High-Resolution Regularized Elastic Full Waveform Inversion Assisted by Deep Learning”, v. 2020, n. 1, pp. 1–5. ISSN: 2214-4609. doi: <https://doi.org/10.3997/2214-4609.202010281>.
- LI, Y., LI, Z., ALKHALIFAH, T., et al., 2017, “Elastic reflection waveform inversion with variable density”. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2017*, pp. 1545–1550. doi: 10.1190/segam2017-17723202.1.

- LIU, F., GUASCH, L., MORTON, S. A., et al., 2012, “3-D Time-domain Full Waveform Inversion of a Valhall OBC dataset”. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2012*, pp. 1–5, October. doi: 10.1190/segam2012-1105.1.
- LIU, Y., SEN, Y. M., 2009, “A new time-space domain high-order finite-difference method for the acoustic wave equation”, *Journal of Computational Physics*, v. 228, pp. 8779–8806.
- MARTIN, G. S., MARFURT, K. J., LARSEN, S., 2002, “An Updated Model for the Investigation of AVO in Structurally Complex Area”, *Society of Exploration Geophysics*. doi: 10.1190/1.1817083.
- MATHARU, G., SACCHI, D. M., 2018, “Source encoding in multiparameter full waveform inversion”, *Geophysical Journal International*, v. 214, n. 2 (04), pp. 792–810. doi: 10.1093/gji/ggy157.
- METIVIER, L., BROSSIER, R., MERIGOT, Q., et al., 2016, “An optimal transport approach for seismic tomography: application to 3D full waveform inversion”, *Inverse Problems*, v. 32, n. 11 (sep), pp. 115008. doi: 10.1088/0266-5611/32/11/115008.
- MORA, P. R., 1989, “Inversion = migration + tomography”, *Geophysic*, v. 54, pp. 1575–1586.
- NOCEDAL, J., WRIGHT, S. J., 2006, *Numerical Optimization*. Ney York, Springer.
- NORMAN, R., 1953, “The form and laws of propagation of seismic wavelets”, *Geophysics*, v. 18, n. 1, pp. 10–40.
- PENNA, R., ARAUJO, S., GEISLINGER, A., et al., 2019, “Carbonate and igneous rock characterization through reprocessing, FWI imaging, and elastic inversion of a legacy seismic data set in Brazilian presalt province”, *The Leading Edge*, v. 38, n. 1, pp. 11–19. doi: 10.1190/tle38010011.1.
- PESTANA, R. C., STOFFA, P. L., 2010, “Time evolution of the wave equation using rapid expansion method”, *GEOPHYSICS*, v. 75, n. 4, pp. T121–T131. doi: 10.1190/1.3449091.
- POLAK, E., RIBIERIE, G., 1969, “Note sur la convergence de methodes de directions conjuhuees”, *Revue Francaise d’Informatique et de Recherche Operationnelle*, v. 16, pp. 35–43.

- PRATT, R. G., SHIM, C., HICKS, G. J., 1998, “Gauss-Newton and full Newton methods in frequency-space seismic waveform inversion”, *Geophysics Journal*, v. 133, pp. 341–362.
- RIETVELD, W. E. A., 1995, *Controlled illumination in prestack seismic migration*. Tese de Doutorado, Delft University of Technology, London.
- RIETVELD, W. E. A., BERKHOUT, A. J., 1994, “Controlled illumination in prestack seismic migration”, *Geophysics*, v. 59, pp. 801–809.
- ROMERO, L. A. AND GHIGLIA, D. C., OBER, C. C., MORTON, S., 2000, “Phase encoding of shot records in pre-stack migration”, *Geophysics*, v. 65, pp. 426–436.
- ROUTH, P., KREBS, J., LAZARATOS, S., et al., 2011, “Encoded simultaneous source full wavefield inversion for spectrally shaped marine streamer data”, pp. 2433–2438. doi: 10.1190/1.3627697.
- SANTOS, L. A., 2012, *Inversão Tomográfica Sequencial para o Campo de Velocidades Sísmica Baseada em Difrações e Critérios Geológicos*. Tese de Doutorado, UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, Junho.
- SCHUSTER, G. T., WANG, X., HUANG, Y., et al., 2011, “Theory of multisource crosstalk reduction by phase encoded statics”, *Geophysics Journal International*, v. 184, pp. 1289–1303. doi: 10.1111/j.1365-246X.2010.04906.x.
- SHERIFF, R. E., 2002, *Encyclopedic Dictionary of Applied Geophysics (Geophysical References, V. 13)*. USA, Society of Exploration.
- SHIN, C., JANG, S., MIN, D. J., 2001, “Improved amplitude preservation for prestack depth migration by inverse scattering theory”, *Geophysical Prospecting*, v. 49, pp. 592–606.
- SILVA, B. S., 2014, *Avaliação de Operadores Convolucionais na Solução da Equação Acústica da Onda*. Tese de Mestrado, UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, Março.
- SIRGUE, L., 2003, *Inversion de la forme da onde dans le domain frequentiel de donnees sismiques grand offset*. Tese de Doutorado, Univeriste Paris XI, Paris.
- SIRGUE, L., PRATT, R. G., 2004, “Efficient waveform inversion and imaging: A strategy for selecting temporal frequencies”, *GEOPHYSICS*, v. 69, n. 1, pp. 231–248. doi: 10.1190/1.1649391.

- SMITH, W. D., 1975, “The Application of Finite Element Analysis to Body Wave Propagation Problems”, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, v. 42, n. 2, pp. 747–768. doi: <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1975.tb05890.x>.
- SOARES FILHO, D. M., 2017. “Fundamentos Teóricos da Inversão FWI”. . Notas de aula. COPPE/UFRJ.
- TARANTOLA, A., 1984, “Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation”, *Geophysics*, v. 49, n. 8, pp. 1259–1266.
- TARANTOLA, A., 1987, *Inverse problem theory: methods for data fitting and model parameter estimation*. Ney York, Elsevier.
- VIRIEUX, J., 1986, “SH-wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method”, *Geophysics*, v. 51, pp. 889–901.
- VIRIEUX, J., OPERTO, S., 2009, “An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics”, *Geophysics*, v. 74, pp. WCC1–WCC26. doi: [10.1190/1.3238367](https://doi.org/10.1190/1.3238367).
- VIRIEUX, J., CALANDRA, H., PLESSIX, R.-Ã., 2011, “A review of the spectral, pseudo-spectral, finite-difference and finite-element modelling techniques for geophysical imaging”, *Geophysical Prospecting*, v. 59, n. 5, pp. 794–813. doi: <https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.2011.00967.x>.
- WANG, C., ZHAO, B., ZHANG, G., 2001, “Pre-stack depth migration experiment with multicontrolled illumination”. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2001*, pp. 1127–1130. doi: [10.1190/1.1816283](https://doi.org/10.1190/1.1816283).
- WANG, F., DONNO, D. CHAURIS, H., et al., 2016, “Waveform inversion based on wavefield decomposition”, *Geophysics*, v. 81, pp. R457–R470. doi: [10.1190/geo2015-0340.1](https://doi.org/10.1190/geo2015-0340.1).
- WAPENAAR, K., THORBECKE, J., VAN DER NEUT, J., et al., 2014, “Marchenko Imaging”, *Geophysics*, v. 79, pp. WA39–WA57. doi: [10.1190/geo2013-0302.1](https://doi.org/10.1190/geo2013-0302.1).
- WARNER, M., RATCLIFFE, A., NANGOO, T., et al., 2013, “Anisotropic 3D full-waveform inversion”, *GEOPHYSICS*, v. 78, n. 2, pp. R59–R80. doi: [10.1190/geo2012-0338.1](https://doi.org/10.1190/geo2012-0338.1).
- XIAO, B., RATCLIFFE, A., LATTE, T., et al., 2018, “Inverting Near-Surface Absorption Bodies with Full-Waveform Inversion: a Case Study from the

North Viking Graben in the”, v. 2018, n. 1, pp. 1–5. ISSN: 2214-4609.
doi: <https://doi.org/10.3997/2214-4609.201800681>.

XIAO, B., KOTOVA, N., BRETHERTON, S., et al., 2016, “An offshore Gabon full-waveform inversion case study”, *Interpretation*, v. 4, n. 4, pp. SU25–SU39.
doi: 10.1190/INT-2016-0037.1.

ZHANG, J. H., YAO, Z. X., 2013, “Optimized finite-difference operator for broadband seismic wave modeling”, *Geophysics*, v. 78, pp. 1–6.

ZHANG, Z., MEI, J., LIN, F., et al., 2018, “Correcting for salt misinterpretation with full-waveform inversion”. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2018*, pp. 1143–1147. doi: 10.1190/segam2018-2997711.1.

ZHOU, B., GREENHALGH, S. A., 1992, “Seismic scalar wave equation modeling by a convolutional differentiator”, *Bulletin of the Seismological Society of America*, v. 82, pp. 289–303.

ZHOU, B., GAO, L., DAI, Y.-H., 2006, “Gradient Methods with Adaptive Step-Sizes”, *Computational Optimization and Applications*, v. 35, pp. 69–86.

Apêndice A

Equação Acústica da Onda

A equação acústica da onda é uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem, descrita pelo campo de pressão e o vetor deslocamento da partícula.

A equação da onda pode ser descrita a partir das leis de Newton e de Hooke, que relacionam a pressão e a velocidade.

Pela lei de Hooke tem-se:

$$p = -k \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (\text{A.1})$$

Em que p é o campo de pressão, k o módulo de incompressibilidade e \mathbf{u} é o deslocamento da partícula.

Pela lei de Newton tem-se que:

$$\rho \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\nabla p, \quad (\text{A.2})$$

em que ρ representa a densidade do meio.

Tomando a derivada segunda em relação ao tempo da equação (A.1), supondo k constante e invertendo os operadores de derivação, tem-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} p = -k \left[\nabla \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} \right) \right]. \quad (\text{A.3})$$

Substituindo a segunda lei de Newton (A.2) na equação (A.3), teremos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} p = -k \left[\nabla \cdot \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \right]. \quad (\text{A.4})$$

De acordo com a lei de Leibniz, o gradiente de $\frac{1}{\rho}$ é dado por:

$$\nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{\nabla \rho}{\rho^2}. \quad (\text{A.5})$$

Substituindo a equação (A.5) na equação (A.4), desconsiderando o sinal ne-

gativo da expressão e utilizando as propriedades de divergente, tem-se que:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} p = k \left(-\frac{\nabla \rho}{\rho^2} \cdot \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \nabla p \right) \quad (\text{A.6})$$

Na equação escalar da onda o módulo de elasticidade, sendo v a velocidade do meio, pode ser escrito como:

$$k = \rho v^2 \quad (\text{A.7})$$

Substituindo a equação A.7 em A.6, temos:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} p = \rho v^2 \left(-\frac{\nabla \rho}{\rho^2} \cdot \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \nabla p \right) \quad (\text{A.8})$$

Sendo $\nabla \cdot \nabla p = \nabla^2 p$, podemos substituir na equação (A.6) e reorganizar, de modo a obter:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p = \nabla^2 p - \frac{1}{\rho} \nabla \rho \cdot \nabla p. \quad (\text{A.9})$$

Considerando ρ constante, o segundo termo do lado direito da equação (A.9) torna-se nulo. Sendo assim, obtem-se a equação (A.10), a Equação Acústica da Onda com densidade constante:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p. \quad (\text{A.10})$$

Desenvolvendo o Laplaciano da equação (A.10) em duas dimensões, tem-se então a Equação Acústica da Onda bidimensional com densidade constante:

$$\frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{v(\mathbf{r})^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (\text{A.11})$$

onde $p(\mathbf{r}, t)$ é o campo de pressão da onda, $\mathbf{r} = (x, z)$ é o vetor posição, t é a coordenada temporal.

Para o problema geofísico existe ainda a necessidade de se prescrever o termo fonte, denotado por $f(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$, sendo assim teremos:

$$\frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{v(\mathbf{r})^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + f(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j). \quad (\text{A.12})$$

onde \mathbf{r}_j representa o ponto de aplicação da fonte sísmica e δ o delta de Dirac. Em função da discretização, tem-se as coordenadas discretas:

$$x \longrightarrow i\Delta x,$$

$$z \longrightarrow j\Delta z,$$

$$t \longrightarrow \bar{n}\Delta t.$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) &\longrightarrow p_{i,j}^{\bar{n}} \\ f(t) &\longrightarrow f^{\bar{n}}, \end{aligned}$$

onde $i = 1, 2, \dots, I_{total}$, $j = 1, 2, \dots, J_{total}$ e $\bar{n} = 1, 2, \dots, \bar{N}_{total}$.

e Δx , Δz e Δt são os respectivos espaçamentos da malha na direção x , z e temporal, \bar{N} é número total de passos em tempo. Isto permitirá escrever as derivadas existentes na equação (A.12) de forma discreta através dos operadores de DF.

Destaca-se que no caso da geofísica, as condições iniciais são dadas por:

$$p_{i,j}^0 = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{i,j}^0 = 0, \quad (\text{A.14})$$

enquanto as condições de contorno, as mais comuns em levantamentos sísmicos, são a condição de contorno essencial (Dirichlet), que corresponde a prescrever a pressão

$$p_{i,j}^{\bar{n}} = 0, \quad (\text{A.15})$$

e a condição de contorno natural (Neumann), que consiste em especificar o valor da derivada (ou da taxa de modificação) de p na direção normal ao contorno, dada por:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \eta}\right)_{i,j}^{\bar{n}} = 0, \quad (\text{A.16})$$

onde η corresponde a normal externa ao referido contorno.

A condição de contorno essencial é bastante utilizada na modelagem para simular adequadamente as reflexões na superfície do mar e do solo na geração de dados sísmicos marinhos e terrestres, respectivamente.

Apêndice B

Modelagem Sísmica

Dentre os diversos métodos utilizados no processo de exploração geofísica de Petróleo e Gás, o Método Sísmico é considerado o mais importante. Tal método se baseia na propagação, em subsuperfície, de ondas sísmicas produzidas por fontes artificiais, e tem como principal objetivo delinear as estruturas geológicas da subsuperfície da Terra.

Na sísmica de exploração, um pulso de energia mecânica é gerado por uma fonte artificial que se propaga pelas camadas geológicas onde são refletidas, refratadas e difratadas ao entrarem em contato com diferentes impedâncias acústicas (velocidade da onda sísmica \times densidade), retornando para a superfície onde as informações carregadas por elas são registradas pelos receptores. Os dados são processados por meio de softwares específicos que são apresentados, por exemplo, sob a forma de sismogramas ou seção sísmica.

A modelagem sísmica é uma técnica para simular a propagação da onda no interior da Terra, seu objetivo consiste resumidamente segundo FICHMAN (2005) em:

- Avaliar as possibilidades e limitações do método sísmico;
- Otimizar os parâmetros de aquisição com base no interesse geológico;
- Gerar dados sísmicos sintéticos para a avaliação de novas metodologias de inversão e imageamento;
- Verificar quanto os modelos sintéticos honram os dados sísmicos de campo, na etapa de interpretação.

A simulação numérica da onda tem sido uma ferramenta indispensável para compreensão da propagação de ondas sísmicas em meios geologicamente complexos, fornecendo eficientes soluções do campo de ondas especialmente para a migração e

para Inversão Completa do Campo de Ondas (CHU e STOFFA, 2012). Um método que tem sido largamente usado nesta solução é o MDF, devido a sua fácil implementação e sua eficiência em meios heterogêneos (ZHANG e YAO, 2013).

A discretização da equação acústica da onda transforma o modelo matemático contínuo em um modelo discreto através de uma malha de pontos, para realizar tal discretização será utilizado o MDF. Também será apresentada a formulação para obtenção dos parâmetros de dispersão e estabilidade.

B.1 Fórmula de Modelagem Discreta da Equação Acústica da Onda

A Equação Acústica da Onda pode ser obtida por meio da aplicação da 2ª lei de Newton e uma relação constitutiva adequada (Apêndice A). Ela é responsável por simular a propagação das ondas sísmicas. Tal equação, considerando meios com densidade constante, tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{v(\mathbf{r})^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + f(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (\text{B.1})$$

onde novamente $p(\mathbf{r}, t)$ é o campo de pressão da onda, $\mathbf{r} = (x, z)$ é o vetor posição, t é a coordenada temporal, $v(\mathbf{r})$ é a velocidade de propagação da onda no meio, $f(t)$ é o termo fonte, δ é o operador Delta de Dirac e \mathbf{r}_j representa ponto de aplicação da fonte sísmica.

Representando a Equação (B.1) na sua forma discreta, com Δx^2 , $\Delta z^2, \Delta t^2$, f^n e δ definidos na Apêndice A, sendo $v_{i,j}^2$ a matriz velocidade de propagação do meio e c os coeficientes do MDF, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = & v_{i,j}^2 \left[\frac{1}{\Delta x^2} \sum_{mi=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} c_{mi} p_{i-mi,j}^n + \frac{1}{\Delta z^2} \sum_{mj=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} c_{mj} p_{i,j-mj}^n \right] \\ & - f^n \delta(i - i_f) \delta(j - j_f). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

A derivada em relação ao tempo é discretizada normalmente utilizando o operador de DF convencional de segunda ordem. Incorporando isto à Equação e usando a simetria do diferenciador convolucional do lado direto, tem-se explicita-

mente o campo de ondas da seguinte forma (ZHOU e GREENHALGH, 1992):

$$\begin{aligned}
p_{i,j}^{\bar{n}+1} &= v_{i,j}^2 \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{\Delta x^2} c_{mi=0} + \frac{1}{\Delta z^2} c_{mj=0} \right)_{i,j}^{\bar{n}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Delta x^2} \sum_{mi=1}^{N/2} c_{mi} (p_{i-mi,j}^{\bar{n}} + p_{i+mi,j}^{\bar{n}}) + \frac{1}{\Delta z^2} \sum_{mj=1}^{N/2} c_{mj} (p_{i,j-mj}^{\bar{n}} + p_{i,j+mj}^{\bar{n}}) \right] \\
&\quad + 2p_{i,j}^{\bar{n}} - p_{i,j}^{\bar{n}-1} - f^{\bar{n}} \delta(i - i_f) \delta(j - j_f).
\end{aligned} \tag{B.3}$$

B.2 Análise de Dispersão e Estabilidade

Na discretização da Equação da Onda por meio de operadores de DF, Equação (B.3), ocorrerá um erro na velocidade de fase e de grupo pois ambas passam a depender do espaçamento da malha, da frequência do sinal e do ângulo de propagação, FARIA (1986). No caso da Equação da Onda este erro aparece sobre a forma de dispersão numérica.

Para determinar a relação de dispersão, pode-se considerar a expressão discreta da propagação de uma onda plana harmônica em um meio infinito e homogêneo:

$$p_{x,z}^t = e^{i[k_x(x+ih)+k_z(x+jh)-\omega(t+n\Delta t)]}, \tag{B.4}$$

sendo ω é a frequência angular, $i = \sqrt{-1}$ e k_x, k_z são respectivamente os números de onda nas direções x e z, expressos por:

$$k_x = k \cos \theta \quad e \quad k_z = k \sin \theta. \tag{B.5}$$

onde k é o módulo do vetor número de onda e θ o ângulo entre a direção vertical (eixo z) e a direção da propagação da onda Figura B.1.

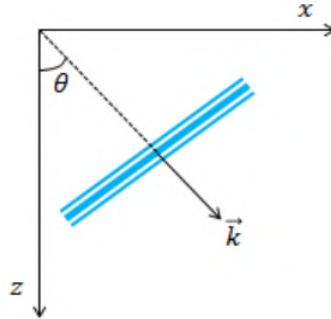


Figura B.1: Direção de Propagação da onda plana. Retirada de DUARTE (2012)

Substituindo a Equação (B.4) na Equação (B.3) e após algumas manipulações

algébricas obtém-se a seguinte relação para a velocidade de fase (LIU e SEN, 2009).

$$\frac{V_{FD}}{V} = \frac{2}{\mu kh} \text{sen}^{-1} \left\{ \mu \sqrt{\sum_{m=1}^{N/2} c_m \left[\text{sen}^2 \left(\frac{m kh \text{sen} \theta}{2} \right) + \text{sen}^2 \left(\frac{m kh \text{cos} \theta}{2} \right) \right]} \right\}, \quad (\text{B.6})$$

em que V é a velocidade da onda no meio contínuo, V_{FD} é a velocidade de fase da onda sobre o meio discretizado, c_m são os coeficientes do *Stencil* do operador DF, N corresponde ao número de expansão da ordem do operador, h é o espaçamento da malha e μ é o número de Courant-Friendrichs-Lewy (CFL).

O valor de μ controla a estabilidade do esquema de DF e pode ser definido pela análise dos autovalores, onde o fator de estabilidade q para modelagem da equação acústica da onda 2D é dado por (LIU e SEN, 2009):

$$\mu \leq q = \frac{1}{\sqrt{2 \sum_{m=1}^{N/2} c_m}}. \quad (\text{B.7})$$

sendo c_m os coeficientes dos operadores de diferenças finitas. Em LIU e SEN (2009) foi demonstrado que a inequação acima é satisfeita para $\mu \leq 1$.

Fixando o valor de μ , a Equação (B.6) permite avaliar o erro da velocidade de fase da onda discretizada. Uma maneira usualmente utilizada para determinar a dispersão relativa a velocidade de fase, consiste em utilizar a função $\frac{1}{D}$ definida como:

$$\frac{1}{D} = \frac{h}{\lambda} = \frac{kh}{2\pi}, \quad (\text{B.8})$$

sendo ele o parâmetro utilizado para examinar a natureza dispersiva da forma da onda considerando a velocidade de fase, o que permite determinar o menor número de pontos por comprimento de onda.

A Equação (B.6) relaciona a velocidade de fase normalizada com o intervalo de espaçamento da malha h através da variável D . Se o processo de discretização fosse analítico, o lado direito da Equação (B.6) seria igual a 1.0 para todos os valores de h . Sendo assim, qualquer desvio de 1.0 se deve ao erro causado pela discretização da equação da onda. Tal erro, conforme mencionado no início da seção, é responsável pela dispersão numérica, para mais detalhes consulte SILVA (2014).

B.2.1 Assinatura da Fonte Sísmica

Neste trabalho foi incorporado um termo fonte a equação da onda na posição \mathbf{x}_f , cujo objetivo é iniciar a propagação no tempo e no espaço. Com o propósito de

simular uma fonte sísmica real, o termo fonte é limitado no domínio do tempo, para simular uma assinatura de fonte sísmica do tipo explosiva.

A assinatura da fonte utilizada neste trabalho, para a geração do sinal sísmico é denominado *wavelet* de Ricker (NORMAN, 1953), cuja forma é escrita como segue:

$$f(t) = \left[1 - 2\pi(\pi f_c t_i)^2\right] e^{-\pi(\pi f_c t_i)^2}, \quad (\text{B.9})$$

onde $t_i = n\Delta t - t_f$ representa uma translação temporal da assinatura no tempo de modo que a *wavelet* inicia na origem, e sendo t_f o período da função Gaussiana, dado por:

$$t_f = \frac{2\sqrt{\pi}}{f_c}, \quad (\text{B.10})$$

e f_c a frequência central da fonte, que é escrita em termos de maior frequência contida no espectro da função fonte, f_{corte} , dada por:

$$f_c = \frac{f_{corte}}{3\sqrt{\pi}}. \quad (\text{B.11})$$

A Figura B.2 ilustra um exemplo da assinatura da fonte no domínio do tempo e seus correspondentes espectros de frequência. Cada assinatura da fonte foi gerada a partir da Equação B.9 para sua respectiva frequência de corte.

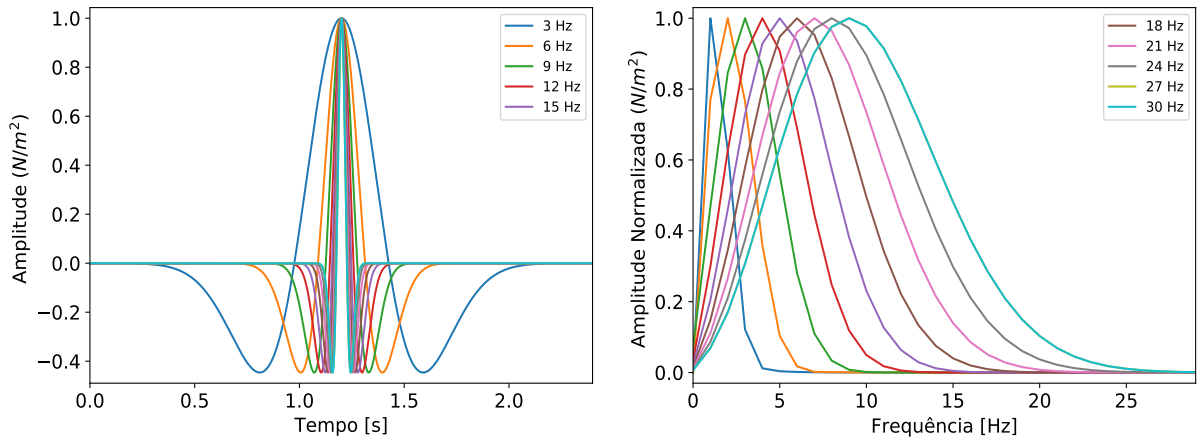


Figura B.2: Assinatura da fonte e seus espectros de frequência para $f_{corte} = 3$ a 30 Hz.

Para o experimento desta tese que utiliza a assinatura da fonte sem a presença das mais baixas frequências, foi empregado um filtro corta baixa onde as frequências abaixo de 4 Hz são removidas. A Figura B.3 apresenta o resultado após o filtro. Ressalta-se que o filtro foi aplicado em cada fonte Ricker gerada e representada na Figura B.2

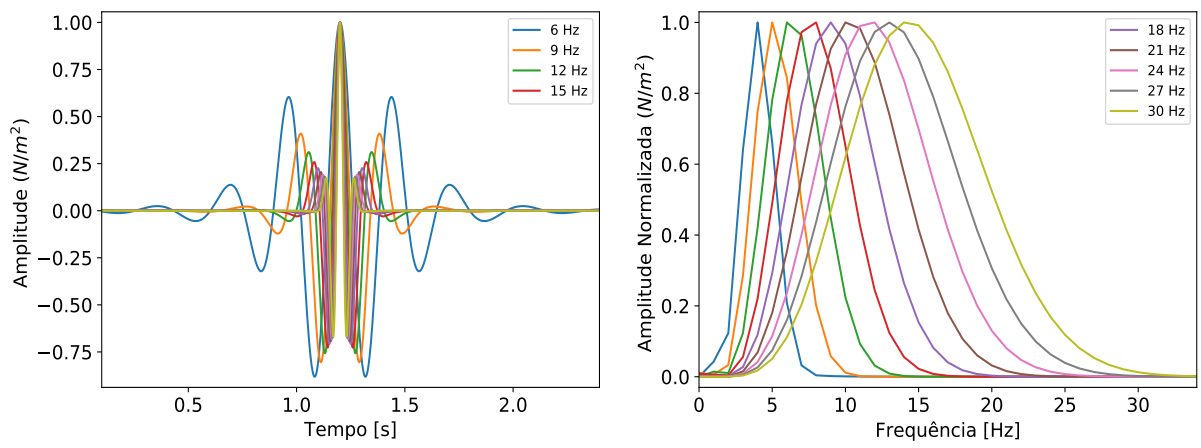


Figura B.3: Assinatura da fonte com filtro corta baixa e seus espectros de frequência para $f_{corte} = 6$ a 30 Hz.

Apêndice C

Tópicos da Inversão da Forma de Onda Completa

C.1 Método de Newton

Os métodos de otimização local objetiva encontrar um mínimo ou máximo da função objetivo em torno de uma vizinhança do modelo inicial \mathbf{v}_0 . Pode-se buscar o mínimo da função objetivo a partir da expansão em série de Taylor da seguinte forma:

$$E(\mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}) = E(\mathbf{v}_0) + \Delta\mathbf{v}^T \mathbf{g}_0 + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{v}^T \mathbf{H}_0 \Delta\mathbf{v} + O(\Delta\mathbf{v}^3), \quad (\text{C.1})$$

onde $\mathbf{g}_0 \equiv \mathbf{g}(\mathbf{v}_0)$ representa a matriz gradiente ($N \times 1$) cujo k -ésimo elemento é dado por $\frac{\partial E(\mathbf{v}_0)}{\partial v}$ e \mathbf{H}_0 representa a matriz Hessiana de dimensões $N \times N$ avaliada em \mathbf{v}_0 com $m = (1, 2, \dots, N)$; $l = (1, 2, \dots, N)$ em que N representa a dimensão do modelo.

A função objetivo atinge seu mínimo, quando sua derivada primeira é igual a zero. Se os termos acima da 2ª ordem forem ignorados na Equação C.1, a aproximação da série de Taylor se torna quadrática em torno de $\Delta\mathbf{v}$ e a minimização da função $E(\mathbf{v}_0)$ pode ser realizada a partir da solução de um conjunto de equações lineares:

$$\Delta\mathbf{v} = -\mathbf{H}_0^{-1} \mathbf{g}_0, \quad (\text{C.2})$$

e assim tem-se o Método de Newton (PRATT *et al.*, 1998):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{H}_0^{-1} \mathbf{g}_0. \quad (\text{C.3})$$

Para problemas lineares, a partir da Equação C.3, o método converge em apenas uma iteração (PRATT *et al.*, 1998). Entretanto, nos casos em que a Função Objetivo não é quadrática, o Método de Newton não converge em uma iteração e o

problema pode ser resolvido de forma iterativa, a fim de compensar a não linearidade do problema. Nesta formulação, a solução iterativa pode ser dada por:

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + \boldsymbol{\rho}_k, \quad (\text{C.4})$$

onde $\boldsymbol{\rho}_k = -\mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{g}_k$, sendo \mathbf{H}_k a matriz Hessiana avaliada em \mathbf{v}_k .

C.2 Cálculo do Gradiente

O gradiente da função objetivo mede a variação do erro entre o dado observado e o dado calculado. Esta medida representa a derivada do campo de ondas com relação a cada um dos parâmetros do modelo correlacionado com o resíduo. Também representa a direção em que a função objetivo decresce mais rapidamente. Para uma família de tiro comum o cálculo do gradiente pode ser interpretado da seguinte forma:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \int_0^T \sum_{i=1}^{N_r} \frac{\partial p(\mathbf{r}_i, t)}{\partial \mathbf{v}_l} \Delta p(\mathbf{r}_i, t) dt = \sum_{i=1}^{N_r} \frac{\partial p(\mathbf{r}_i, t)}{\partial \mathbf{v}_l} \otimes \Delta p(\mathbf{r}_i, t) (0), \quad (\text{C.5})$$

em que $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ é a derivada da função objetivo com relação a velocidade na posição \mathbf{v}_l da malha, sendo $l=(1, 2, \dots, N)$, $\frac{\partial p(\mathbf{r}_i, t)}{\partial \mathbf{v}_l}$ a derivada do campo de pressão na superfície de observação com respeito a velocidade na posição \mathbf{v}_l (Derivada de Fréchet) e $\Delta p(\mathbf{r}_i, t) = p^{obs}(\mathbf{r}_i, t) - p^{cal}(\mathbf{r}_i, t)$ representa o resíduo calculado, a partir da diferença entre o dado observado e o dado calculado na superfície de registro.

Neste caso, a matriz derivada de Fréchet, também chamada de matriz Jacobiana \mathbf{J} , pode ser escrita com relação a propriedade na posição \mathbf{v}_l , da seguinte forma:

$$\mathbf{J}_l = \frac{\partial p(\mathbf{r}_i, t)}{\partial \mathbf{v}_l} = -\frac{2}{\mathbf{v}_l^3} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}_i, t)}{\partial t^2}, \quad (\text{C.6})$$

sendo assim, $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ é igual a soma das correlações de atraso zero entre as componentes da derivada de Fréchet e o campo residual. Este cálculo é realizado para cada observação experimental; O esquema para o cálculo do gradiente para um ponto \mathbf{v}_l específico, utilizando a derivada de Fréchet, pode ser observado no Algoritmo 4.

Para melhor exemplificar tal cálculo, a Figura C.1 ilustra o esquema da interpretação física do gradiente da função objetivo obtido através da derivada de Fréchet para um termo fonte. Uma componente desta derivada é obtida a partir da correlação de atraso zero, na posição \mathbf{r}_i , entre o registro da propagação reversa da fonte virtual e o resíduo. A fonte virtual é calculada a partir da derivada segunda do campo incidente no ponto \mathbf{v}_l .

Neste processo, a obtenção do gradiente da função objetivo através das derivadas de Fréchet necessita de duas modelagens para cada ponto do modelo. A

Algoritmo 4: GRADIENTE UTILIZANDO A DERIVADA DE FRÉCHET PARA UM CERTO EXPERIMENTO DE OBSERVAÇÃO

```

1 início
2   Resolva a EDP (MDF) e registre o campo de pressão em cada ponto  $l$ 
3    $\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v(\mathbf{r})^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t) = f(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_f)$ 
4    $p(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0$ , para  $t = 0$  (CI)
5   2) Resolva a EDP (MDF)
6   para  $l = 1 \in N \times N$  faça
7      $\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v(\mathbf{r})^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t) = -\frac{2}{v(\mathbf{r})^3} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l)$ 
8      $p(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0$ , para  $t = 0$  (CI)
9   fim
10  3) Faça as Correlações
11  para  $l = 1 \in N \times N$  faça
12     $\Delta p(\mathbf{r}, t) = p^{obs}(\mathbf{r}, t) - p^{cal}(\mathbf{r}, t)$ 
13     $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = p_l(\mathbf{r}, t) \otimes \Delta p_l(\mathbf{r}, t)$ 
14  fim
15 fim

```

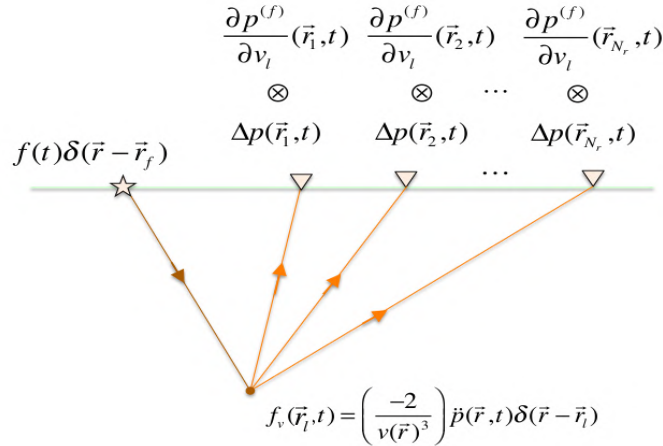


Figura C.1: Esquema da interpretação física do gradiente da função objetivo calculado, através das derivadas de Fréchet (SOARES FILHO, 2017).

primeira é utilizada para o cálculo da fonte virtual e a segunda é utilizada para a propagação desta fonte até o registro na posição dos receptores. Este cálculo é demasiadamente custoso e geralmente não é empregado para largas aplicações.

Cálculo do gradiente através do método adjunto

Em problemas cujo o modelo possui muitos parâmetros a serem invertidos, o elevado custo computacional presente no emprego da derivada de Fréchet para o cálculo do gradiente, pode tornar sua aplicação inviável. Para evitar este custo

computacional, o método adjunto permite calcular o gradiente da função objetivo sem a necessidade de calcular as derivadas para cada ponto do modelo. Utilizando a teoria do método adjunto (LAILLY, 1983; TARANTOLA, 1984), o gradiente associado à Equação 2.5 pode ser obtido a partir da correlação cruzada de peso atraso zero entre a derivada segunda do campo de onda incidente e o campo de onda de estado adjunto (solução reversa no tempo do campo campo de onda residual):

$$g(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_s} -\frac{2}{v(\mathbf{r})^3} \left[\frac{\partial^2 p_j^{cal}(\mathbf{r}, t; \mathbf{v})}{\partial t^2} \otimes p_j^\dagger(\mathbf{r}, t) \right] (0), \quad (C.7)$$

onde o campo de estado adjunto $p_j^\dagger(\mathbf{r}, t)$ associado com j -ésima Família de Tiro Comum é calculado resolvendo a equação da onda para um termo fonte, dado pela soma das diferenças entre o campo de onda calculado e observado no conjunto de receptores, $\Delta p_j(\mathbf{r}, t; \mathbf{v}) = p_j^{obs}(\mathbf{r}, t) - p_j^{cal}(\mathbf{r}, t; \mathbf{v})$, isto é:

$$\nabla^2 p_j^\dagger(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v(\mathbf{r})^2} \frac{\partial^2 p_j^\dagger(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = - \sum_{i=1}^{N_r} \Delta p_j(\mathbf{r}, t; \mathbf{v}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (C.8)$$

submetidas as seguintes condições finais e de contorno:

$$\begin{cases} p_j^\dagger(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial p_j^\dagger(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0, & \text{para } t \geq T \\ p_j^\dagger(\mathbf{r}, t) = 0, & \text{para } \mathbf{r} \in S \end{cases}. \quad (C.9)$$

A partir da Equação C.8, é possível afirmar que $p^\dagger(\mathbf{r}, t)$ é o campo de ondas proveniente da propagação reversa do resíduo $\Delta p(\mathbf{r}, t)$. Este processo é semelhante a Migração Reversa no Tempo, no entanto, na migração ao invés da propagação residual propaga-se o campo de ondas verdadeiro (PRATT *et al.*, 1998). Ressalta-se que, o gradiente obtido após a primeira iteração de uma otimização local é similar a imagem obtida pela Migração Reversa no Tempo.

Para exemplificar tal procedimento, a Figura C.2 apresenta a recuperação das informações do modelo verdadeiro, através do cálculo do gradiente da função objetivo. Considerando a Figura C.1(a) e C.1(b), respectivamente, como modelo verdadeiro e inicial, o cálculo do gradiente tem como objetivo recuperar as informações do modelo verdadeiro que não se fazem presentes no modelo inicial.

A partir da Figura C.3, pode-se observar que, o dado observado contém as respostas referente as variações de propriedade do modelo verdadeiro. No entanto, o dado calculado sobre o modelo inicial não apresenta todas as informações. O processo de inversão busca recuperar as informações ausentes no dado calculado, com base no resíduo gerado através da diferença entre o dados observado e calculado.

Para entender melhor como a recuperação das estruturas ausentes ocorre, basta observar a Figura C.2(c) em que a diferença entre o dado observado e o dado

Algoritmo 5: CÁLCULO DO GRADIENTE EMPREGANDO O MÉTODO ADJUNTO PARA UMA FAMÍLIA DE TIRO COMUM.

1 **início**
2 1) Resolva a EDP (MDF)
3 $\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v(\mathbf{r})^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t) = f(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$
4 $p(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial p}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = 0$, para $t \leq 0$ (CI)
5 2) Resolva a EDP (MDF)
6 $\nabla^2 p^\dagger(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v^2(\mathbf{r})} \frac{\partial^2 p^\dagger}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{N_r} \Delta p(\mathbf{r}, t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$
7 $p^\dagger(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial p^\dagger}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = 0$, para $t \geq T$ (CF)
8 3) Faça as Correlações
9 $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_r} \frac{\partial p(\mathbf{r}_i, t)}{\partial v_i} \otimes \Delta p(\mathbf{r}_i, t) (0)$,
10 **fim**

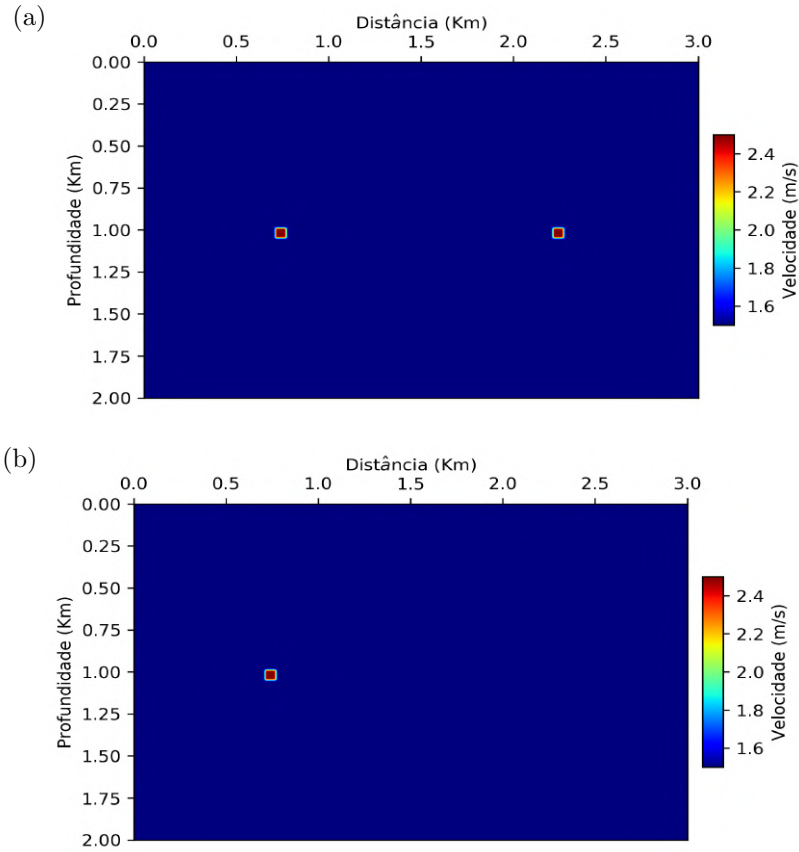


Figura C.2: Modelos de velocidades sintéticos utilizados no cálculo do gradiente da Função Objetivo, através do método adjunto.

calculado traz as informações ausentes no modelo de fundo, porém presentes no gradiente gerado através do método adjunto.

Finalmente, para calcular o gradiente da função objetivo, utilizando o método adjunto basta, inserir o resíduo reversamente no tempo (Figura C.3c) e correlacionar

com a derivada segunda do campo direto propagado, a partir da fonte sísmica. O resultado pode ser observado na Figura C.4.

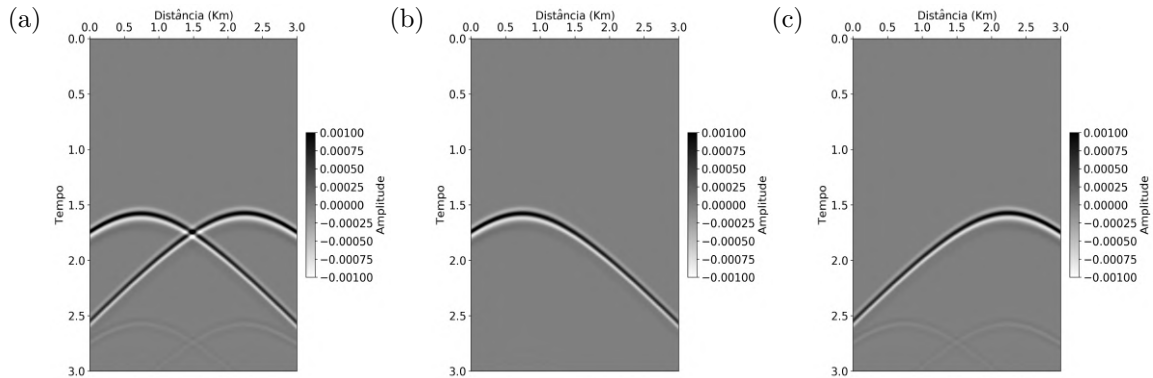


Figura C.3: (a) Dado observado gerado sobre o modelo de velocidades verdadeiro. (b) Dado calculado gerado sobre o modelo de velocidades inicial, (c) Resíduo: diferença entre o dado observado e calculado.

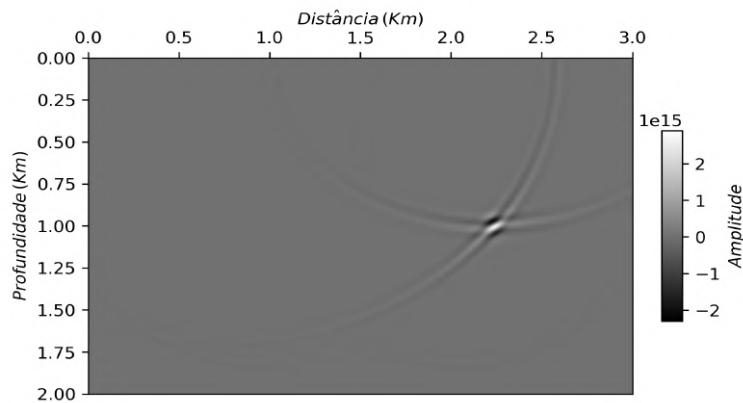


Figura C.4: Gradiente da Função Objetivo calculado, a partir do método adjunto sobre o modelo de velocidades inicial.

O gradiente define a máxima direção de atualização e junto ao processo iterativo recupera parcialmente as estruturas ausentes no modelo inicial. Pode-se perceber que o gradiente é a peça chave dentro do processo de inversão FWI.

C.3 Cálculo da matriz Hessiana

O Método do tipo Newton tem sido utilizado para minimizar a diferença entre os dados observado e calculado. Neste método, a matriz Hessiana é utilizada como um pré-condicionador, para acelerar a convergência e melhorar os resultados da FWI (PRATT *et al.*, 1998). A Hessiana é uma matriz de dimensões $N \times N$ e conforme apresentado na Seção C.1, representa a derivada segunda com relação a

Função Objetivo E e os parâmetros do meio nas posições \mathbf{r}_m e \mathbf{r}_l da malha:

$$\mathbf{H}_{ml} = \frac{\partial^2 E}{\partial v_m \partial v_l} = \int_0^T \sum_{i=1}^{N_r} \frac{\partial p(\mathbf{r}_i, t)}{\partial v_m} \frac{\partial p(\mathbf{r}_i, t)}{\partial v_l} dt + \int_0^T \sum_{i=1}^{N_r} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}_i, t)}{\partial v_m \partial v_l} \Delta p(\mathbf{r}_i, t) dt \quad (\text{C.10})$$

Considerando uma Família de Tiro Comum, a Equação C.10 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{H}_{ml} = \sum_{i=1}^{N_r} \frac{\partial p(\mathbf{r}_i, t)}{\partial v_m} \otimes \frac{\partial p(\mathbf{r}_i, t)}{\partial v_l} (0) + \sum_{i=1}^{N_r} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}_i, t)}{\partial v_m \partial v_l} \otimes \Delta p(\mathbf{r}_i, t) (0). \quad (\text{C.11})$$

Representando de forma matricial, a Equação C.11 pode ser escrita como:

$$\mathbf{H}_{ml} = \mathbf{H}a_{ml} + \mathbf{R}_{ml}, \quad (\text{C.12})$$

sendo

$$\mathbf{H}a_{ml} = \sum_{i=1}^{N_r} \frac{\partial p(\mathbf{r}_i, t)}{\partial v_m} \otimes \frac{\partial p(\mathbf{r}_i, t)}{\partial v_l} (0), \quad (\text{C.13})$$

em que \mathbf{H}_a é a Hessiana aproximada e \mathbf{R}_{ml} é a parte residual.

Geralmente, os métodos de atualização do modelo baseadas na série de Taylor, tal como apresentado na Seção C.1, são divididos em métodos descendentes, que não utilizam a Hessiana clássica, e os Método de Newton, que recai na Hessiana ou suas aproximações. Eles tendem a ser mais eficientes por iteração e mais simples de aplicar, mas sua convergência é mais lenta. Já os métodos de Newton podem modificar a direção do gradiente para melhorar a convergência, fornecendo, a partir da Hessiana uma aproximação quadrática.

A utilização da derivada segunda da Função Objetivo, empregada nos Método de Newton, é capaz de ajustar a direção de atualização de forma a buscar melhor combinação entre um ótimo decréscimo e a curvatura necessária para minimizar a função. Parte desta curvatura é dependente da interação entre espalhamentos múltiplos do campo de onda e está presente na parte residual da Equação C.11.

Contudo, esta parte da Hessiana é crítica, quando o espalhamento duplo tem uma presença relativamente grande nos dados. Neste caso, a Hessiana completa pode alterar o gradiente consideravelmente. Porém, em muitas aplicações da FWI, esta parte da Hessiana é usualmente ignorada, devido ao seu alto custo computacional (ALKHALIFAH, 2014a).

Segundo ALKHALIFAH (2014a), as modificações da direção de busca, presentes nos métodos de busca em linha podem fornecer benefícios para uma melhor convergência, porém, sobre condições específicas. Para funções objetivas altamente

não-lineares, o papel da Hessiana torna-se menos expressiva, pois a expansão generalizada da série de Taylor é menos precisa. O fato da Hessiana fornecer a solução direta para os problemas de Mínimos Quadrado tende a fornecer uma relação similar para a parte da função objetivo, que pode ser aproximada pela sua forma linearizada. Contudo, a utilização desta linearização se torna difícil, a medida que, a Função Objetivo possui um comportamento complexo em relação a não-linearidade. A chave consiste em encontrar um equilíbrio entre a utilização da Hessiana e o custo, considerando o comportamento da função objetivo (ALKHALIFAH, 2014a).

Uma alternativa consiste em utilizar aproximações da pseudo-Hessiana proposta por SHIN *et al.* (2001) para uma melhor preservação da amplitude na migração reversa no tempo e empregada na FWI por JANG *et al.* (2009). Na propagação do campo de onda, as amplitudes atenuadas devido, ao espalhamento geométrico, precisam ser compensadas, se não o gradiente irá focalizar na localização da fonte em virtude das amplitudes referentes ao imageamento das estruturas geológicas serem menos evidentes próximos da fonte. Essa compensação pode ser obtida, a partir do emprego da pseudo-Hessiana gerada através dos somatórios do campo de onda direto. Tal pré-condicionamento proporciona um ganho em relação as amplitudes atenuadas durante a propagação e pode ser escrito da seguinte forma (SHIN *et al.*, 2001):

$$\tilde{\mathbf{H}}_a^{-1}(\mathbf{v}_0) = \left[\int_T p_{inc}^2(\mathbf{r}, t) dt \right]^{-1}. \quad (\text{C.14})$$

A Equação C.14, consiste na aproximação da inversa da Hessiana sem um alto custo computacional. CARNEIRO *et al.* (2018), propôs o emprego da pseudo Hessiana como um pré-condicionador independente da escolha de parametrização, a partir da reparametrização da Hessiana aproximada. A atualização da direção para \mathbf{v} , através da Equação C.14 e C.6 pode ser obtida da seguinte forma :

$$\tilde{\mathbf{H}}_j^{-1}(\mathbf{r})g_j(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{v}(\mathbf{r})^3}{2} \left\{ \int_0^T \left| \frac{\partial^2 p_j^\dagger(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \right|^2 dt \right\}^{-1} \int_0^T p_j^\dagger(\mathbf{r}, t) \frac{\partial^2 p_j^\dagger(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} dt. \quad (\text{C.15})$$

Desta forma, o emprego da pseudo Hessiana, $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\mathbf{r})$, como um pré-condicionador pode proporcionar uma melhor convergência sem modificar significativamente o custo computacional.

C.4 Direção de Busca

Na seção C.1, através do método de Newton, foi apresentada uma direção de busca gerada, a partir da inversa da matriz Hessiana aplicada sobre o gradiente. Porém, devido ao seu alto custo computacional, nesta seção serão apresentados os métodos do tipo gradiente e quasi-Newton como alternativas para o cálculo da direção de busca.

O sucesso dos métodos de otimização depende da escolha da direção $\boldsymbol{\rho}_k$ e do tamanho do passo α_k . A maior parte dos algoritmos de busca linear (Seção C.5) requerem que $\boldsymbol{\rho}_k$ seja uma direção de descida. Sendo assim, a direção deve satisfazer $\boldsymbol{\rho}_k^T \nabla E_k < 0$ para garantir o decréscimo do valor da função E ao longo desta direção. A direção de busca tem a seguinte forma (NOCEDAL e WRIGHT, 2006):

$$\boldsymbol{\rho}_k = -\mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{g}_k \quad (\text{C.16})$$

onde $\mathbf{g}_k = \nabla E_k$ e \mathbf{B}_k é uma matriz simétrica não-singular. No método do gradiente ou método de máxima descida, \mathbf{B}_k é a matriz identidade, no método de Newton \mathbf{B}_k é a Hessiana exata $\nabla^2 E_k$ e no método Quasi-Newton, \mathbf{B}_k é uma aproximação da matriz Hessiana que é atualizada a cada iteração. Quando $\boldsymbol{\rho}_k$ é definida pela Equação C.16 e \mathbf{B}_k é definida positiva, então:

$$\boldsymbol{\rho}_k \nabla E_k = -\nabla E_k^T \mathbf{B}_k^{-1} \nabla E_k < 0, \quad (\text{C.17})$$

e, portanto, $\boldsymbol{\rho}_k$ é uma direção de descida.

Método de Gauss-Newton

O Método de Newton, conforme descrito em C.1 é tido como um método completo, porém, ao desconsiderar os espalhamentos múltiplos no operador de modelagem direta \mathbf{M} , obtém-se o Método de Gauss Newton e a matriz Hessiana assume a seguinte forma:

$$\mathbf{H}_{a_{ml}} = \sum_{i=1}^{N_r} \frac{\partial p(\mathbf{r}_i, t)}{\partial \mathbf{v}_m} \otimes \frac{\partial p(\mathbf{r}_i, t)}{\partial \mathbf{v}_l} (0). \quad (\text{C.18})$$

O cálculo da aproximação da Hessiana representa o maior custo deste método, contudo, proporciona para o Método de Gauss-Newton uma taxa de convergência maior do que o método do gradiente e gradiente conjugado NOCEDAL e WRIGHT (2006). No método de Gauss-Newton, tal como no Método de Newton, o valor de $\alpha = 1$ e o processo iterativo possui a seguinte forma:

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k - \mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{g}_k = \mathbf{v}_k - \mathbf{H}_{a_k}^{-1} \nabla E_k. \quad (\text{C.19})$$

O Método de Newton e Gauss-Newton puro, geralmente, não são utilizados em aplicações de problemas inversos de larga escala, devido ao custo proibitivo relacionado ao cálculo da matriz Hessiana. Uma tentativa para contornar o problema referente ao custo computacional é utilizar os Métodos Quasi-Newton. O algoritmo BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb, e Shanno) e L-BFGS (BFGS de memória limitada) (NOCEDAL e WRIGHT, 2006), estimam a matriz inversa da Hessiana, a partir dos gradientes da função objetivo calculados nas iterações anteriores. Desta forma, ao longo do processo iterativo \mathbf{B}_k chega cada vez mais próximo da matriz Hessiana.

Método do Gradiente

A direção de máxima descida $-\mathbf{g}_k$ é a escolha mais óbvia para a direção de busca do método de busca linear. O método do gradiente é um método de busca linear, que caminha ao longo da direção $\boldsymbol{\rho}_k = -\mathbf{g}_k$ (NOCEDAL e WRIGHT, 2006). Neste método, a Hessiana é um escalar, o que sugere a seguinte solução iterativa:

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k - \alpha_k \mathbf{g}_k, \quad (\text{C.20})$$

onde α é o comprimento do passo (Seção C.5). Este método não necessita da matriz inversa da Hessiana, requerendo apenas o comprimento do passo α e o gradiente. No entanto, sua lenta taxa de convergência linear é uma desvantagem, isto se deve ao fato da direção de busca assumida tender a ser ortogonal à direção de busca da iteração anterior no processo de convergência (NOCEDAL e WRIGHT, 2006). Note que, o caminho para a solução global ao longo das iterações tem um comportamento de zigzag (Figura C.5).

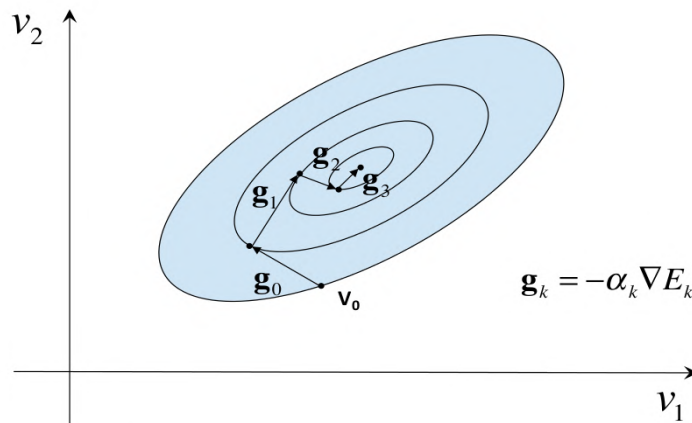


Figura C.5: Convergência do Método do Gradiente (NOCEDAL e WRIGHT, 2006).

Em cada iteração, calcula-se o passo α_k utilizando o algoritmo de busca em linha (NOCEDAL e WRIGHT, 2006), através da minimização da função objetivo

com respeito a α (Seção C.5).

Método do Gradiente Conjugado

A taxa de convergência do método do gradiente pode ser melhorada através do método do gradiente conjugado. Neste método, combina-se o gradiente da iteração corrente com o gradiente da iteração anterior, para acelerar sua convergência (Figura C.6. Neste caso, a busca pela direção $\boldsymbol{\rho}_k$ é determinada por:

$$\boldsymbol{\rho}_k = \begin{cases} -\mathbf{g}_k, & \text{se } k = 0 \\ -\mathbf{g}_k + \beta_k \boldsymbol{\rho}_{k-1}, & \text{se } k \geq 1 \end{cases}, \quad (\text{C.21})$$

Existem diversas formas de determinar β para o método do gradiente-conjugado. As duas principais são as descritas por (FLETCHER e REEVES, 1964), onde $\beta = \beta^{FR}$

$$\beta_k^{FR} = \frac{\mathbf{g}_k^T (\mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1})}{\mathbf{g}_{k-1}^T \mathbf{g}_{k-1}}, \quad (\text{C.22})$$

e POLAK e RIBIERIE (1969), que consiste em escolher o parâmetro $\beta = \beta^{PR}$ como:

$$\beta_k^{PR} = \frac{\mathbf{g}_k^T (\mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1})}{\|\mathbf{g}_{k-1}\|^2}. \quad (\text{C.23})$$

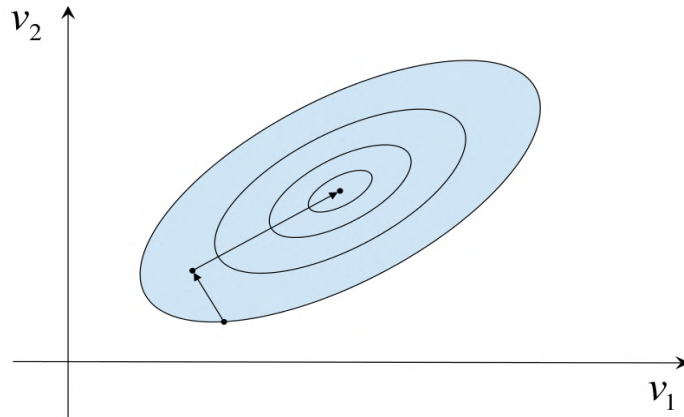


Figura C.6: Convergência do Método do Gradiente Conjugado (NOCEDAL e WRIGHT, 2006).

O método do gradiente conjugado possui melhor taxa de convergência em relação ao método do gradiente descendente (NOCEDAL e WRIGHT, 2006). No entanto, sendo n o número de iterações para uma função objetivo estritamente quadrática e uma Hessiana definida positiva, em problema não-lineares como apresentado nesta tese, o espaço de soluções é tão grande que a minimização é terminada

após um número de iterações muito menor do que n (FICHTNER, 2011). Neste caso, é possível aplicar um pré-condicionador ao gradiente inserindo informações, referente a curvatura da função objetivo, tal como apresentado na Seção C.3. Sendo assim, a Equação C.21 pode ser reescrita como:

$$\mathbf{v}_{k+1}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_k(\mathbf{r}) + \alpha_k \boldsymbol{\rho}_k(\mathbf{r}), \quad (\text{C.24})$$

em que o tamanho do passo α_k é determinado por BARZILAI e BORWEIN (1988) e $\boldsymbol{\rho}_k(\mathbf{r})$ representa a direção do gradiente conjugado Polak-Ribière pré-condicionamento (POLAK e RIBIERIE, 1969):

$$\boldsymbol{\rho}_k(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\sum_{j=1}^{N_s} \tilde{\mathbf{H}}_{jk}^{-1}(\mathbf{r}) \mathbf{g}_{jk}(\mathbf{r}) & , \text{ se } k = 0 \\ -\sum_{j=1}^{N_s} \tilde{\mathbf{H}}_{jk}^{-1}(\mathbf{r}) \mathbf{g}_{jk}(\mathbf{r}) + \beta_k \boldsymbol{\rho}_{k-1}(\mathbf{r}) & , \text{ se } k \geq 1 \end{cases}. \quad (\text{C.25})$$

Neste caso, o gradiente conjugado pré-condicionado é uma forma de regularização que força a solução para o modelo desejado.

C.5 Método de Busca em Linha

Conforme apresentado em NOCEDAL e WRIGHT (2006), o método de busca em linha (*line-search*) consiste em calcular para cada iteração uma direção $\boldsymbol{\rho}_k$, e então, decidir o quanto se deve mover ao longo desta direção.

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + \alpha_k \boldsymbol{\rho}_k, \quad (\text{C.26})$$

onde α_k é um escalar positivo chamado de comprimento do passo.

Comprimento do Passo

Na Seção C.4 foi visto que o sucesso dos métodos de otimização depende fortemente do comprimento do passo (α_k). Para problemas diretos lineares o comprimento deste passo, pode ser calculado da seguinte forma (PRATT *et al.*, 1998):

$$\alpha_k = \frac{\nabla E_k}{\mathbf{J}_k \nabla E_k}. \quad (\text{C.27})$$

No caso em que o problema direto é não-linear, o comprimento do passo pode ser encontrado através de um método de busca linear. O objetivo do algoritmo de busca linear consiste em procurar ao longo da direção $\boldsymbol{\rho}_k$, um passo capaz de proporcionar a redução da função objetivo. Neste caso, uma escolha comum para o

método que consiste em estimar α_k tal que:

$$\Phi(\alpha_k) = E(\mathbf{v}_k + \alpha_k \nabla E_k) \leq E(\mathbf{v}_k), \quad (\text{C.28})$$

porém, como a função objetivo no método FWI apresenta diversos mínimos locais, essa condição para busca do passo exato se torna difícil e custosa do ponto de vista computacional, pois para avaliar a função objetivo necessita-se calcular a modelagem direta para cada tiro. Neste caso, o ideal é o método de busca em linha ser capaz de encontrar um α_k que satisfaça uma determinada condição ou critério pré determinado que garanta o decréscimo de Φ . Existem diversos critérios impostos sobre o valor de α_k , com intuito de avaliar a redução da função objetivo, tais como condição de Armijo e Curvatura, respectivamente, a primeira e a segunda condição de Wolfe, condições de Goldstein e *backtracking* (NOCEDAL e WRIGHT, 2006).

O algoritmo escolhido neste trabalho é o *backtracking*. Este algoritmo utiliza uma condição de decréscimo para finalizar o processo de busca em linha. Em sua forma mais básica, o *backtracking* segue o seguinte pseudo-código (NOCEDAL e WRIGHT, 2006):

Algoritmo 6: BACKTRACKING

```

1 início
2   escolha  $\tilde{\alpha} > 0$ ,  $lim$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ 
3    $\alpha \leftarrow \tilde{\alpha}$  ;  $l = 1$ 
4   enquanto  $E(\mathbf{v}_k + \alpha \rho_k) \leq E(\mathbf{v}_k)$  ou  $l = lim$  faça
5     |    $\alpha \leftarrow \lambda \alpha$ 
6     |    $l = l + 1$ 
7   fim
8 fim
9 retorna  $\alpha_k = \alpha$ 

```

em que α_0 é o valor do passo inicial, λ é o fator de contração. Neste processo, o valor do passo inicial igual a 1 deve ser utilizado na primeira tentativa para o Método de Newton e quasi-Newton, mas em outros algoritmos, tal como gradiente descendente ou conjugado, podem apresentar valores diferentes. Logo, uma estratégia deve ser empregada para buscar uma convergência mais rápida.

Uma boa escolha do passo inicial direcionado para a FWI, refletirá numa mais rápida convergência e conseqüentemente implica na redução do custo computacional, haja vista que para cada verificação da redução da função objetivo é necessário realizar a propagação do campo de onda para cada fonte. Dentro deste contexto, uma estratégia para calcular o valor do passo inicial pode ser obtida, no caso da FWI, com base nos valores de velocidades máxima e mínima que podem ser estimadas a partir das informações geológicas da região em estudo. Sabendo que a direção de

busca é uma direção descendente e com base nas informações geológicas temos que:

$$\alpha_0 = \max \left| \frac{v_{max}}{\rho_k} \right| \quad (C.29)$$

em que v_{max} representa o máximo valor de atualização do parâmetro de velocidade que deseja alcançar. Caso o valor do passo inicial não satisfaça a condição de decréscimo da função objetivo, o fator de atenuação $\lambda = 0.5$ pode ser empregado até que o algoritmo seja satisfeito.

Uma estratégia que pode ser empregada para acelerar a taxa de convergência no método do gradiente, consiste em utilizar as informações da direção de descida anteriores para prever o melhor comprimento. Em 1988, BARZILAI e BORWEIN (1988) apresentaram duas opções interessantes de comprimento de passo:

$$\alpha_k^{BB1} = \frac{\|\mathbf{s}_{k-1}\|_2^2}{\mathbf{s}_{k-1}^T \mathbf{y}_{k-1}}, \quad (C.30)$$

e a segunda:

$$\alpha_k^{BB2} = \frac{\mathbf{s}_{k-1}^T \mathbf{y}_{k-1} - 1}{\|\mathbf{s}_{k-1}\|_2^2}, \quad (C.31)$$

onde $\mathbf{s}_{k-1} = \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{k-1}$ e $\mathbf{y}_{k-1} = \mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1}$.

Posteriormente, ZHOU *et al.* (2006) apresentou uma adaptativa que é obtida a partir de uma formulação híbrida que combina passo α_k^{BB1} e α_k^{BB2} , determinado por:

$$\alpha_k^{ABB} = \begin{cases} \alpha_k^{BB2}, & \text{se } \alpha_k^{BB2} / \alpha_k^{BB1} < \kappa \\ \alpha_k^{BB1}, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (C.32)$$

onde κ é um número entre 0 e 1. Neste trabalho, a formulação adaptativa foi empregada considerando $\kappa = 0.5$.

C.6 Inversão FWI Utilizando o Esquema Multi-escala em Frequência

Com o surgimento de aquisições de afastamentos longos entre a fonte e o receptor, amplos azimutes e fontes de largura de banda alta, a FWI foi reconhecida como uma ferramenta eficiente para a construção de modelos de velocidades (VIRIEUX e OPERTO, 2009).

O sucesso do esquema de inversão FWI empregado, nesta tese, exige que o modelo de velocidades esteja suficientemente próximo do modelo verdadeiro, ou seja, o sucesso da inversão depende da precisão do modelo inicial. As tentativas de linearizar a FWI que recaem sobre a aproximação de *Born* estão limitadas ao

quanto a técnica de inversão pode suportar em relação ao erro do modelo de fundo. Esse limite é dado a partir do critério de meio ciclo (PRATT *et al.*, 1998) e caso o critério não seja satisfeito, a FWI pode sofrer com o efeito de salto de ciclo (do inglês, *cycle-skipping*) e com isso o processo de minimização tende a convergir para um mínimo local (Figura C.7). Este efeito é tido como um dos maiores problema durante o processo de inversão FWI (ALKHALIFAH, 2014a).

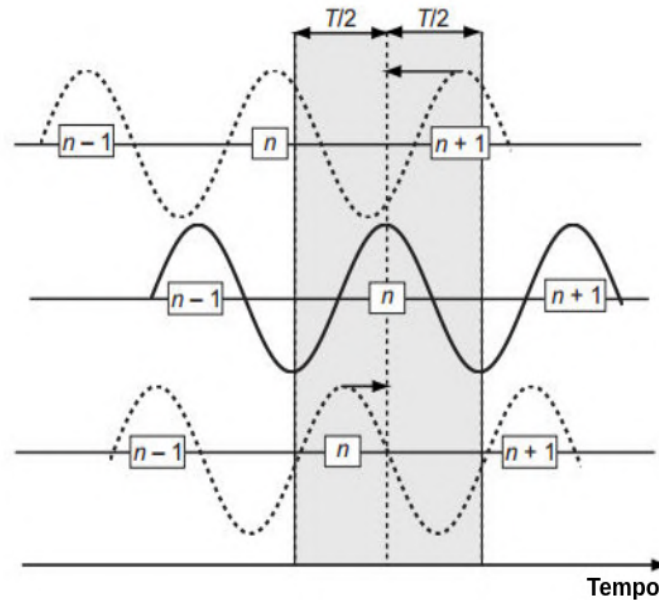


Figura C.7: Princípio do problema de salto de ciclo (VIRIEUX e OPERTO, 2009).

O problema de salto de ciclo está diretamente relacionado, por exemplo, com a natureza não linear da função objetivo Norma L_2 . Com o intuito de mitigar a não-linearidade do problema, diversas estratégias podem ser exploradas. CLAERBOUT (1985); JANNANE *et al.* (1989) foram os primeiros a demonstrarem que as baixas frequências dos dados sísmicos são sensíveis a perturbação da velocidade do modelo de fundo, enquanto as altas frequências são sensíveis a refletividade ou impedância. Para uma mesma geometria de aquisição, na atualização da velocidade, o dado de baixa frequência fornece longos comprimentos de onda e as de altas frequências fornecem curtos comprimentos de onda (SIRGUE, 2003). Baseado nesta ideia, uma estratégia eficiente consiste em iniciar a FWI sobre o regime das baixas frequências, onde a não-convexidade natural da função custo diminuiu devido a menor não linearidade, conforme pode ser observado na Figura C.8.

Com base neste conceito, com o objetivo de mitigar o problema de *cycle-skipping*, BUNKS *et al.* (1995) desenvolveu a estratégia multiescala em frequência. Essa estratégia consiste em realizar o processo de inversão iniciando pelas frequências mais baixas até as mais altas e para alcançar o sucesso, a técnica multiescala requer a presença dos efeitos das componentes de baixa frequência no dado observado. Neste trabalho, o esquema multiescala foi empregado no domínio do tempo.

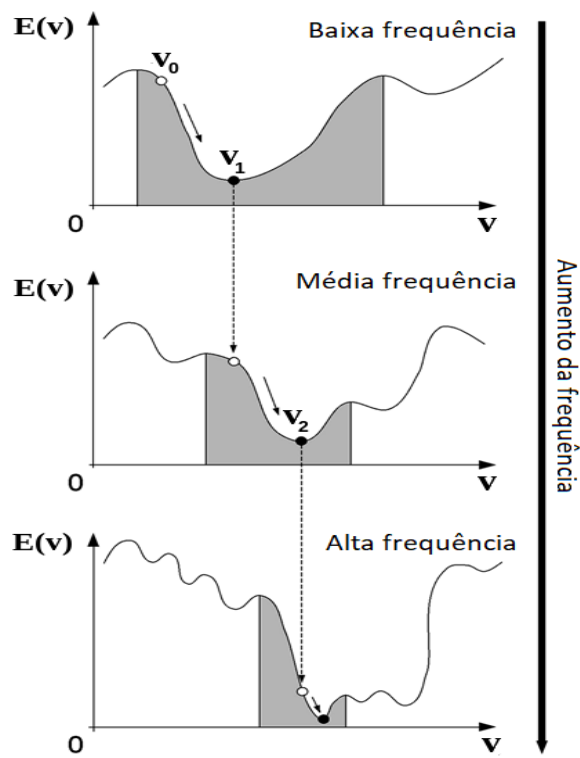


Figura C.8: Ilustração do Esquema Multiescala em frequência para três estágios de inversão (Adaptado de (FICHTNER, 2011)).

Apêndice D

O Método Adjunto Aplicado ao Cálculo dos Elementos do Gradiente

Neste apêndice será deduzido o gradiente pelo método adjunto, sem necessidade dos cálculos das derivadas de Fréchet. Para um par fonte e receptor, considere o funcional objetivo de Norma-L₂ na qual os campos de pressão e velocidade estão vinculados através da equação da onda no domínio de inversão D.1, ou seja,

$$E(p(v)) = \frac{1}{2} \int_V \int_0^T (p(\mathbf{r}, t) - d(\mathbf{r}, t))^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_g) dt dV, \quad (\text{D.1})$$

e

$$\nabla p^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial p}{\partial t^2} - f = 0. \quad (\text{D.2})$$

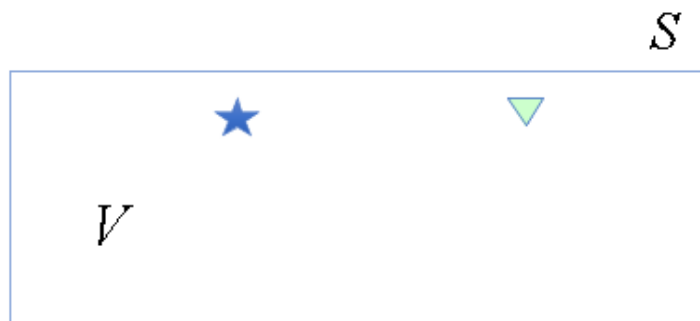


Figura D.1: Domínio de Inversão

Considere o funcional objetivo aumentado:

$$L(p, p^\dagger, v) = \frac{1}{2} \int_V \int_0^T [p(\mathbf{r}, t) - d(\mathbf{r}, t)]^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_g) dt dv - \frac{1}{2} \int_V \int_0^T p^\dagger \left(\nabla_p^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - f \right) dt dV. \quad (\text{D.3})$$

Então,

$$\frac{dE}{dv(\mathbf{r})} = \frac{dL}{dv(\mathbf{r})} = \int_V \int_0^T \frac{\partial L}{\partial p(\mathbf{r}', t)} \frac{\partial p(\mathbf{r}', t; v)}{\partial v(\mathbf{r})} dt dV(\mathbf{r}') + \int_V \int_0^T \frac{\partial L}{\partial p^\dagger(\mathbf{r}', t)} \frac{\partial p^\dagger(\mathbf{r}', t; v)}{\partial v(\mathbf{r})} dt dV(\mathbf{r}') + \frac{\partial L}{\partial v(\mathbf{r})}. \quad (\text{D.4})$$

Sendo,

$$\nabla L \delta p = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L(p + \varepsilon \delta p, v) - L(p, v)}{\varepsilon}, \quad (\text{D.5})$$

então, definindo:

$$A \equiv (p, t)^2 + \varepsilon \delta p(\mathbf{r}, t)^2 + d(\mathbf{r}, t)^2 + 2p(\mathbf{r}, t) \varepsilon p(\mathbf{r}, t) - 2\varepsilon \delta p(\mathbf{r}, t) d(\mathbf{r}, t)$$

e

$$B \equiv 2p(\mathbf{r}, t) d(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{2} \left(p(\mathbf{r}, t)^2 - 2p(\mathbf{r}, t) d(\mathbf{r}, t) + d(\mathbf{r}, t)^2 \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_g) dt dv, \text{ tem-se:}$$

$$\nabla L \delta p = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_V \int_0^T \frac{A - B}{\varepsilon} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_V \int_0^T p^\dagger \left(\nabla^2 p + \varepsilon \delta p \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p + \varepsilon \delta p}{\partial t^2} - f}{\varepsilon} dt dV + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_V \int_0^T p^\dagger \left(\nabla^2 p - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - f \right) dt dV}{\varepsilon}, \quad (\text{D.6})$$

logo,

$$\nabla L \delta p = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \int_V \int_0^T \left(\varepsilon \delta p(\mathbf{r}, t)^2 + 2(p(\mathbf{r}, t) - d(\mathbf{r}, t)) \varepsilon \delta p(\mathbf{r}, t) \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_g) dt dv}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_V \int_0^T p^\dagger \left(\nabla^2 p - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_g) dt dV}{\varepsilon} \quad (\text{D.7})$$

Fazendo $\delta p(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0$ e $\varepsilon \rightarrow 0$, tem-se:

$$\nabla L \delta p = \int_V \int_0^T (p(\mathbf{r}, t) - d(\mathbf{r}, t)) \delta p(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_g) dt dV - \int_V \int_0^T p^\dagger \left(\nabla^2 \delta p - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} \right) dt dV. \quad (\text{D.8})$$

Utilizando a identidade $\nabla \cdot (\mathbf{a}\mathbf{b}) = \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{b}$ então a Equação D.8 torna-se:

$$\begin{aligned} \nabla L \delta p &= \int_V \int_0^T (p(\mathbf{r}, t) - d(\mathbf{r}, t)) \delta p(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_g) dt dV \\ &\quad - \int_V \int_0^T \left\{ \nabla \cdot [p^\dagger (\nabla(\delta p))] - \nabla p^\dagger \cdot (\nabla(\delta p)) \right\} dt dV \\ &\quad + \int_V \int_0^T p^\dagger \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (\delta p)}{\partial t^2} \right) dt dV, \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

então

$$\begin{aligned} \nabla L \delta p &= \int_V \int_0^T (p(\mathbf{r}, t) - d(\mathbf{r}, t)) \delta p(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_g) dt dV \\ &\quad - \int_V \int_0^T \nabla \cdot [p^\dagger (\nabla(\delta p))] dt dV \\ &\quad - \int_V \int_0^T \left\{ \nabla p^\dagger \cdot [\nabla(\delta p)] \right\} dt dV \\ &\quad + \int_V \int_0^T p^\dagger \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (\delta p)}{\partial t^2} \right) dt dV, \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Utilizando o teorema de Gauss

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \cdot dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (\text{D.11})$$

tem-se

$$\begin{aligned} \nabla L \delta p &= \int_V \int_0^T (p(\mathbf{r}, t) - d(\mathbf{r}, t)) \delta p(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_g) dt dV \\ &\quad - \int_0^T \oint_S [p^\dagger (\nabla(\delta p))] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS dt + \int_V \int_0^T \left\{ \nabla p^\dagger \cdot [\nabla(\delta p)] \right\} dt dV \\ &\quad + \int_V \int_0^T p^\dagger \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (\delta p)}{\partial t^2} \right) dt dV, \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Supondo $p^\dagger = 0$ ao longo da superfície S , tem-se:

$$\begin{aligned}
\nabla L \delta p &= \int_V \int_0^T (p(\mathbf{r}, t) - d(\mathbf{r}, t)) \delta p(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_g) dt dV \\
&\quad + \int_V \int_0^T \{ \nabla p^\dagger \cdot [\nabla(\delta p)] \} dt dV \\
&\quad + \int_V \int_0^T p^\dagger \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2(\delta p)}{\partial t^2} \right) dt dV, \quad (\text{D.13})
\end{aligned}$$

utilizando novamente a identidade $\nabla \cdot (\mathbf{a}\mathbf{b}) = \nabla \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{a}\nabla \cdot \mathbf{b}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\nabla L \delta p &= \int_V \int_0^T (p(\mathbf{r}, t) - d(\mathbf{r}, t)) \delta p(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_g) dt dV \\
&\quad - \int_V \int_0^T \nabla^2 p^\dagger \delta p dt dV \\
&\quad + \int_V \int_0^T p^\dagger \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2(\delta p)}{\partial t^2} \right) dt dV, \quad (\text{D.14})
\end{aligned}$$

Aplicando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned}
\nabla L \delta p &= \int_V \int_0^T (p(\mathbf{r}, t) - d(\mathbf{r}, t)) \delta p(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_g) dt dV \\
&\quad - \int_V \int_0^T \nabla^2 p^\dagger \delta p dt dV \\
&\quad + \int_V \int_0^T \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \delta p}{\partial t} \right) p^\dagger \right] dt dV \\
&\quad - \int_V \int_0^T \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial}{\partial t}(\delta p) \right) \frac{\partial p^\dagger}{\partial t} dt dV, \quad (\text{D.15})
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
\nabla L \delta p &= \int_V \int_0^T (p(\mathbf{r}, t) - d(\mathbf{r}, t)) \delta p(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_g) dt dV \\
&\quad - \int_V \int_0^T \nabla^2 p^\dagger \delta p dt dV \\
&\quad + \int_V \frac{1}{v^2} \left[\left(\frac{\partial \delta p}{\partial t} \right) p^\dagger \right]_0^T dt dV \\
&\quad - \int_V \int_0^T \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial}{\partial t}(\delta p) \right) \frac{\partial p^\dagger}{\partial t} dt dV, \quad (\text{D.16})
\end{aligned}$$

Considerando $p^\dagger = 0$ para $t = T$ e $\frac{\partial(\delta p)}{\partial t} = 0$ para $t = 0$ então:

$$\begin{aligned}\nabla L \delta p &= \int_V \int_0^T (p(\mathbf{r}, t) - d(\mathbf{r}, t)) \delta p(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_g) dt dV \\ &\quad - \int_V \int_0^T \nabla^2 p^\dagger \delta p dt dV \\ &\quad - \int_V \int_0^T \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\delta p) \right) \frac{\partial p^\dagger}{\partial t} dt dV, \quad (\text{D.17})\end{aligned}$$

Aplicando novamente a regra da cadeia, tem-se:

$$\begin{aligned}\nabla L \delta p &= \int_V \int_0^T [p(\mathbf{r}, t) - d(\mathbf{r}, t)] \delta p(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_g) dt dV - \int_V \int_0^T \nabla^2 p^\dagger \delta p dt dV \\ &\quad - \left[\int_V \frac{1}{v^2} \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p^\dagger}{\partial t} \delta p \right) dt dV - \int_V \int_0^T \frac{1}{2} \delta p \frac{\partial^2 p^\dagger}{\partial t^2} dt dV \right]. \quad (\text{D.18})\end{aligned}$$

Considerando que $\frac{\partial p^\dagger}{\partial t} = 0$ para $t = T$ e $p^\dagger = 0$ para $t = 0$ então:

$$\begin{aligned}\nabla L \delta p &= \int_V \int_0^T (p(\mathbf{r}, t) - d(\mathbf{r}, t)) \delta p(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_g) dt dV - \int_V \int_0^T \nabla^2 p^\dagger \delta p dt dV \\ &\quad - \int_V \int_0^T \frac{1}{2} \delta p \frac{\partial^2 p^\dagger}{\partial t^2} dt dV. \quad (\text{D.19})\end{aligned}$$

Então:

$$\nabla L \delta p = \int_V \int_0^T \left\{ (p(\mathbf{r}, t) - d(\mathbf{r}, t)) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_g) - \nabla^2 p^\dagger + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p^\dagger}{\partial t^2} \right\} \delta p(\mathbf{r}, t) dt dV, \quad (\text{D.20})$$

e com isso

$$\frac{\partial L}{\partial p(\mathbf{r}, t)} = (p(\mathbf{r}, t) - d(\mathbf{r}, t)) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_g) - \nabla^2 p^\dagger + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p^\dagger}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{D.21})$$

ou seja, a equação do estado adjunto é dada por:

$$\nabla^2 p^\dagger - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p^\dagger}{\partial t^2} = (d(\mathbf{r}, t) - p(\mathbf{r}, t)) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_g), \quad (\text{D.22})$$

e deve ser submetida às condições finais e de contorno:

$$\begin{cases} p^\dagger(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial p^\dagger(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0, & \text{para } t \geq T \\ p^\dagger(\mathbf{r}, t) = 0, & \text{para } \mathbf{r} \in S \end{cases}. \quad (\text{D.23})$$

A derivada do Funcional Objetivo $E(v)$ na direção δv é dada por:

$$\nabla_v E(v) \delta v = \int_0^T \int_V p^\dagger \nabla_v L \delta v dt dV. \quad (D.24)$$

Agora calculando a derivada de L na direção δv , ou seja,

$$\nabla_v L \delta v = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(\nabla^2 p - \frac{1}{(v + \varepsilon \delta v)^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right) \quad (D.25)$$

$$\nabla_v L \delta v = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{(v + \varepsilon \delta v)^2} \right) \right] \quad (D.26)$$

ou

$$\nabla_v L \delta v = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \left(\frac{(v + \varepsilon \delta v)^2 - v^2}{v^2(v + \varepsilon \delta v)^2} \right) \right], \quad (D.27)$$

ou

$$\nabla_v L \delta v = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \left(\frac{v^2 + \varepsilon 2v \delta v + \varepsilon^2 \delta v^2 - v^2}{v^2(v^2 + \varepsilon 2v \delta v + \varepsilon^2 \delta v^2)} \right) \right] \quad (D.28)$$

ou

$$\nabla_v L \delta v = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \frac{2 \delta v}{v^3}. \quad (D.29)$$

Finalmente substituindo esta última equação na Equação D.24, chega-se à:

$$\nabla_v E(v) \delta v = \int_0^T \int_V p^\dagger \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \frac{2}{v^3} \delta v dt dV. \quad (D.30)$$

Portanto o gradiente é dado por:

$$\frac{dE}{dv} = \int_0^T \frac{2}{v^3} p^\dagger \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dt, \quad (D.31)$$

que pode ser expresso por:

$$\frac{dE}{dv} = g(\mathbf{r}) = \frac{2}{v(\mathbf{r})^3} \left[\frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t; \mathbf{v})}{\partial t^2} \otimes p^\dagger(\mathbf{r}, t) \right] (0). \quad (D.32)$$