# ACOPLAMENTO ITERATIVO MEC-MEF PARA SUBDOMÍNIOS COM MALHAS NÃO COINCIDENTES POR MEIO DE MULTIPLICADORES DE LAGRANGE LOCALIZADOS

Pablo Enrique Oyarzún Higuera

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientador: Webe João Mansur

Rio de Janeiro
Julho de 2014

ACOPLAMENTO ITERATIVO MEC-MEF PARA SUBDOMÍNIOS COM MALHAS NÃO COINCIDENTES POR MEIO DE MULTIPLICADORES DE LAGRANGE LOCALIZADOS

Pablo Enrique Oyarzún Higuera

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Examinada por:

Prof. Webe João Mansur, Ph.D.

Prof. José Antonio Fontes Santiago, D.Sc.

Prof. Eduardo Gomes Dutra do Carmo, D.Sc.

Prof. Felipe dos Santos Loureiro, D.Sc.

Prof. Carlos Alexandre Bastos de Vasconcellos, D.Sc.

Prof. Luiz Alkimin de Lacerda, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JULHO DE 2014

Oyarzún Higuera, Pablo Enrique

Acoplamento iterativo MEC-MEF para subdomínios com malhas não coincidentes por meio de multiplicadores de Lagrange localizados / Pablo Enrique Oyarzún Higuera. - Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 2014.

XXXIII, 192 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Webe João Mansur

Tese (Doutorado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Civil, 2014.

Referências Bibliográficas: p. 178-192.

1. Acoplamento iterativo. 2. MEF-MEC. 3. Propagação de ondas. 4. Multiplicadores de Lagrange localizados. 5. Interface não conforme. I. Mansur, Webe João. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

*A Paola, minha esposa,*

*e ao nosso filho, Diego.*

# Agradecimentos

*Agradeço a Deus, minha esposa Paola e meu filho Diego pela inspiração, minha irmã Ivanna e meus pais pelo amor e apoio incondicional. O apoio dos meus pais ao longo dos anos tornou-se um pilar fundamental, bem como também no combustível necessário para perseverar frente às diversas dificuldades e manter a fé nas minhas atitudes, com tal de alcançar o objetivo final.*

*Agradeço ao meu orientador, o professor Webe João Mansur, pelos conselhos, paciência e a confiança que em mim depositou durante o desenvolvimento até a finalização do trabalho, não tenho palavras para retribui-lhe; à Ivone pela amizade, qualidade humana e ajuda em todo o momento, minha dívida com ela é muito grande; aos professores do Departamento pelo apoio e amizade, especialmente aos senhores José Antonio Fontes Santiago, Eduardo Gomes Dutra do Carmo e Luiz Fernando Taborda Garcia, tanto na parte acadêmica quanto humana. Desenvolver o trabalho em um ambiente favorável, desde o ponto de vista integral, tem sido essencial na consecução do objetivo.*

*Aos meus colegas do LAMEC e do LAMEMO pela amizade, alegria, apoio e experiência de trabalho, constituindo a semente para iniciar uma vida de pesquisa na companhia de verdadeiros amigos.*

*Á CAPES e a FAPERJ, que forneceram o suporte financeiro para a realização deste trabalho e à própria PETROBRAS.*

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

# ACOPLAMENTO ITERATIVO MEC-MEF PARA SUBDOMÍNIOS COM MALHAS NÃO COINCIDENTES POR MEIO DE MULTIPLICADORES DE LAGRANGE LOCALIZADOS

Pablo Enrique Oyarzún Higuera

Julho/2014

Orientador: Webe João Mansur
Programa: Engenharia Civil

Os problemas numéricos baseados no acoplamento iterativo entre o MEC e o MEF, seja o acoplamento de caráter sequencial ou em paralelo, admitem diversas técnicas para a imposição das condições na interface. Um conjunto importante destas técnicas são os enfoques do tipo *Schwarz*, mediante os quais ditas condições são estabelecidas de forma sistemática e direta, até se obter um ponto de convergência. Tais técnicas são perfeitamente adaptáveis à escolha de diferentes passos de tempo na análise de cada sub-região. No caso de existirem malhas não coincidentes na interface, diversas metodologias possibilitam a imposição das mencionadas condições de forma aproximada, ou seja, enfraquecendo-as. Por exemplo, modelando as forças de contato na interface, representando-as matematicamente mediante multiplicadores de *Lagrange* localizados, as equações de compatibilidade garantem unicidade na solução, porém surge o requerimento de definir uma pseudo-estrutura de interface, conhecida como *linha-esqueleto*, ao longo da qual são estabelecidas novas incógnitas. Os esquemas de caráter sequencial implicam a necessidade de eliminar ditas incógnitas a partir das equações de compatibilidade na interface, sendo isto possível por meio do cálculo do espaço nulo das matrizes de forma, obtendo-se uma relação explícita que permite transformar diretamente grandezas desde uma sub-região para a outra, através da interface.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

ITERATIVE COUPLING BEM-FEM FOR SUBDOMAINS WITH NON-MATCHING MESHES BY LOCALIZED LAGRANGE MULTIPLIERS

Pablo Enrique Oyarzún Higuera

July/2014

Advisor: Webe João Mansur
Department: Civil Engineering

Several techniques can be applied to numerical problems based on iterative coupling between different domain decomposition methods (BEM and FEM), both sequential and parallel, by imposing the compatibility and equilibrium conditions at interface. Some of these techniques systematically establish these conditions in a strong way until convergence is reached, as *Schwarz* methods. Such techniques are perfectly adapted to consider different time step on analysis of each one of sub-regions. In case of non-conforming meshes, various devices have been implemented by imposing these interface conditions approximately, or rather in a weak form. In representing the interface contact forces by means of localized *Lagrange* multipliers uniqueness solution is warranted by the compatibility equations, however, the definition of additional unknowns on a pseudo-structure (*skeleton line*) at interface is required. On the other hand, elimination of these unknowns is necessary since sequential schemes of iterative coupling are used. This issue is avoided by obtaining the null space of shape functions matrices, at interface points, by computing explicit relations between local unknowns on this interface.

Índice


1. Introdução ..... 1

1.1 Considerações preliminares ..... 2

1.2 Revisão bibliográfica ..... 5

1.3 Objetivos e conteúdo do presente trabalho ..... 16

2. Formulação do método dos elementos de contorno ..... 20

2.1 Formulação TDMEC para a equação escalar da onda em 2D ..... 21

2.2 Implementação numérica do TDMEC ..... 25

2.3 Método $\theta$ linear na formulação do TDMEC ..... 29

2.4 Formulação DMEC para a equação escalar da onda ..... 31

2.5 Métodos de marcha no tempo, aplicados no DMEC ..... 33

*2.5.1 Método de Houbolt* ..... 33

*2.5.2 Método de Newmark* ..... 34

*2.5.3 Método da aproximação de Green explícita* ..... 35

3. Formulação do método dos elementos finitos ..... 38

3.1 Formulação para a equação escalar da onda ..... 39

3.2 Formulação para a equação da elasto-dinâmica ..... 40

3.3 Elementos transformados e integração numérica ..... 42

3.4 Método da aproximação de *Green* explícita ..... 44

*3.4.1 Formulação* ..... 44

*3.4.2 Método ExGA Runge-Kutta* ..... 47

*3.4.3 Método ExGAH diferença central* ..... 48

4. Técnicas de acoplamento iterativo MEC-MEF ..... 50

4.1 Introdução ..... 51

4.2 Descrição das técnicas de acoplamento iterativo MEC-MEF ..... 52

*4.2.1 Critério Schwarz Neumann-Neumann em paralelo* ..... 56

*4.2.2 Critério Schwarz Dirichlet-Neumann em paralelo* ..... 58

*4.2.3 Critério Schwarz Dirichlet-Neumann sequencial* ..... 60

*4.2.4 Critério sequencial baseado na superposição das sub-regiões (overlapping)* ..... 61
4.3 Análise de convergência das técnicas de acoplamento iterativo MEC-MEF ..... 65
*4.3.1 Condições para a convergência no critério Schwarz Neumann-Neumann em paralelo* ..... 65
*4.3.2 Condições para a convergência no critério Schwarz Dirichlet-Neumann em paralelo* ..... 69
*4.3.3 Condições para a convergência no critério Schwarz Dirichlet-Neumann sequencial* ..... 72
*4.3.4 Condições para a convergência do critério Schwarz Dirichlet-Neumann sequencial com superposição de sub-regiões* ..... 75
4.4 Imposição de condições na interface usando o método do gradiente conjugado ..... 77
*4.4.1 Introdução* ..... 77
*4.4.2 Equilíbrio e compatibilidade na interface* ..... 77
*4.4.3 Condensação* ..... 78
*4.4.4 Imposição das condições na interface mediante uso do método dos gradientes conjugados* ..... 79
5. Multiplicadores de Lagrange no acoplamento MEC-MEF ..... 83
5.1 Introdução ..... 84
5.2 Formulação clássica do método dos multiplicadores de *Lagrange* ..... 85
5.3 Formulação localizada do método dos multiplicadores de *Lagrange* ..... 90
5.4 Multiplicadores de *Lagrange* localizados, aplicados no acoplamento MEC-MEF ..... 93
*5.4.1 Trabalho virtual na sub-região modelada pelo MEC* ..... 95
*5.4.2 Trabalho virtual da sub-região modelada pelo MEF* ..... 95

*5.4.3 Trabalho virtual nos pontos ao longo da linha-esqueleto* ..... 97

*5.4.4 Relação entre a força de contato* $\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}$ *e o fluxo ou força por unidade de superfície* $\mathbf{p}_I^{(MEC)}$ ..... 99

*5.4.5 Sistema de equações resultante para o sistema acoplado MEC-MEF* ..... 101

5.5 Teste de contato na interface, na definição da localização dos pontos ao longo da *linha-esqueleto* ..... 102

*5.5.1 Expressão geral para as funções de forma* $L_C$ *e* $L_F$ ..... 103

*5.5.2 Determinação das forças de contato sob condição de esforço constante através do elemento de interface* (*teste de contato na interface*) ..... 104

*5.5.3 Localização dos nós de interface ao longo da linha-esqueleto (condição de auto equilíbrio na pseudo-estrutura de interface)* ..... 105

*5.5.4 Exemplos na obtenção da localização dos pontos ao longo da pseudo-estrutura de interface* ..... 111

6. Implementação e resultados ..... 118

6.1 Descrição do código e fluxograma ..... 119

*6.1.1 Descrição geral do código* ..... 119

*6.1.2 Fluxograma* ..... 120

*6.1.3 Tratamento dos nós duplos na análise MEC* ..... 122

*6.1.4 Blocos nas matrizes de elementos finitos* ..... 123

*6.1.5 Correção dos indicadores de valor prescrito na interface* ..... 124

*6.1.6 Implementação dos métodos de Green para a marcha no tempo* ..... 125

*6.1.7 Processo de marcha no tempo, no esquema de acoplamento MEC-MEF* ..... 126

*6.1.7.1 Cálculo da matriz que transforma forças de superfície em forças nodais* ..... 128

*6.1.7.2 Cálculo do vetor normal ao contorno MEC na interface* ..... 130
*6.1.7.3 Loop no tempo* ..... 131
*6.1.7.4 Loop iterativo* ..... 134
6.2 Análise de resultados ..... 135
*6.2.1 Exemplo de barra carregada axialmente com nós coincidentes na interface* ..... 135
*6.2.2 Exemplo de barra carregada axialmente com nós não coincidentes na interface* ..... 141
7. Conclusões e sugestões para trabalhos futuros ..... 149
7.1 Conclusões ..... 150
7.2 Sugestões para trabalhos futuros ..... 152

Anexos ..... 154
A Integração analítica dos termos resultantes da discretização do domínio em células, no TDMEC ..... 155
*A.1 Contribuições* $R_{li}^{\alpha n}$ *e* $T_{li}^{\alpha n}$ ..... 155
*A.2 Derivadas das contribuições* $R_{li}^{\alpha n}$ *e* $T_{li}^{\alpha n}$ ..... 158
B Critério *Schwarz Dirichlet-Dirichlet* de caráter sequencial para acoplamento acústico-elástico ..... 162
*B.1 Introdução* ..... 162
*B.1 Descrição do algoritmo* ..... 163
C Método dos gradientes conjugados ..... 166
*C.1 Introdução* ..... 166
*C.2 Método do descenso íngreme (steepest descent method)* ..... 166
*C.3 Método das direções conjugadas* ..... 167
*C.4 Conjugação de Gram-Schmidt* ..... 169
*C.5 Método dos gradientes conjugados* ..... 169
D Descrição dos processos encomendados às diferentes unidades de programa ..... 172

Referências bibliográficas ..... 177

Índice de figuras


Figura 2.1: Geometria do continuo de domínio Ω e contorno Γ ..... 21

Figura 2.2: Significado geométrico do termo $\overline{c}(\xi)$ ..... 24

Figura 2.3: Esquema para função de interpolação linear no tempo ..... 27

Figura 2.4: Esquema para função de interpolação constante no tempo ..... 28

Figura 2.5: Esquema para função de interpolação linear no espaço ..... 28

Figura 3.1: Elemento quadrilateral isoparamétrico ..... 43

Figura 3.2: Esquema geométrico referente à aproximação da integral de convolução (3.38) ..... 46

Figura 4.1: Análise da sub-região MEC, acoplamento iterativo sem superposição de sub-regiões ..... 53

Figura 4.2: Análise da sub-região MEF, acoplamento iterativo sem superposição de sub-regiões ..... 53

Figura 4.3: Análise da sub-região MEC, acoplamento iterativo com superposição de sub-regiões ..... 62

Figura 4.4: Análise da sub-região MEF, acoplamento iterativo com superposição de sub-regiões ..... 62

Figura 4.5: Autovalores $\lambda_1$ e $\lambda_2$ versus o parâmetro de relaxação $\kappa$ ..... 68

Figura 5.1: Dois esquemas alternativos para o uso de multiplicadores de *Lagrange* com malhas não coincidentes na interface (a) Multiplicadores de *Lagrange* na sua forma clássica (b) Multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada ..... 85

Figura 5.2: Esquema discreto simplificado para um sistema conformado por quatro sub-regiões; multiplicadores de *Lagrange* na sua forma clássica ..... 86

Figura 5.3: Exemplo de sistema conformado por quatro elementos; formulação clássica. a) Todos os vínculos possíveis. b) Vínculos linearmente independentes considerando a opção 1. c) Vínculos linearmente independentes considerando a opção 2 ..... 88

Figura 5.4: Esquema discreto simplificado para um sistema conformado por quatro sub-regiões; multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada ..... 90
Figura 5.5: Exemplo do sistema conformado por quatro elementos; formulação localizada ..... 92
Figura 5.6: Diagrama esquemático no acoplamento de duas sub-regiões, cujas malhas não coincidem na interface. Variáveis envolvidas e discretização da *linha-esqueleto* ..... 94
Figura 5.7: Esquema de discretização em torno da *linha-esqueleto*. Forças de contato representadas por multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada ..... 97
Figura 5.8: Esquema da relação existente entre fluxo ou trações de superfície e os valores nodais das forças de contato (multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada) ..... 100
Figura 5.9: Esquema de discretização baseado em elementos triangulares, na interface, para a determinação das forças de contato sob aplicação de esforço constante ..... 104
Figura 5.10: Forças de contato na localização dos pontos ao longo da *linha-esqueleto*, conforme o teste de contato na interface $\Gamma^{int}$ (a) Forças de contato provenientes dos nós locais de cada sub-região (b) Forças de contato sobre a *linha-esqueleto*, na imposição da condição de *auto-equilíbrio* (c) Força transversal e momento flexionante para a localização de tais pontos ..... 106
Figura 5.11: Exemplo para malhas com nós coincidentes na interface $\Gamma^{int}$, funções de interpolação de diferente ordem de aproximação (a) Forças de contato aplicadas nos nós locais de $\Omega^{MEC}$ e $\Omega^{MEF}$, na interface (b) Forças de contato aplicadas ao longo da *linha-esqueleto* (c) Diagrama de momento flexionante e localização dos pontos associados a momento nulo ..... 112

Figura 5.12: Exemplo para malhas com nós não coincidentes na interface $\Gamma^{int}$, funções de interpolação de diferente ordem de aproximação (a) Forças de contato aplicadas nos nós locais de $\Omega^{MEC}$ e $\Omega^{MEF}$, na interface (b) Forças de contato aplicadas ao longo da *linha-esqueleto* (c) Diagrama de momento flexionante e localização dos pontos associados a momento nulo ..... 115

Figura 6.1: Fluxograma simplificado ..... 121

Figura 6.2: Esquema de discretização do eixo temporal para as análises MEC e MEF ..... 127

Figura 6.3: Descrição esquemática do processo iterativo, no caso $\Delta t_C > \Delta t_F$ ..... 127

Figura 6.4: Esquema de transformação do fluxo (ou forças de superfície) em forças nodais de contato equivalentes ..... 129

Figura 6.5: Esquema de ordenamento dos pontos e dos elementos no no contorno da sub-região $\Omega^{MEC}$, na consideração das expressões (6.9) ..... 130

Figura 6.6: Esquema para o reaproveitamento das matrizes $\mathbf{G}_{nm}$ e $\mathbf{H}_{nm}$, onde $m = n - k$, nos instantes subsequentes ..... 132

Figura 6.7: Instantes de tempo referenciais para a análise MEF, mediante o programa ..... 133

Figura 6.8: Diagrama esquemático para o problema da barra engastada em um extremo, submetida a um carregamento tipo *Heaviside* na sua extremidade livre ..... 136

Figura 6.9: Esquemas de discretização para malhas coincidentes na interface (a) Malha n°1, conformada por 20 nós e 16 elementos para $\Omega^{MEC}$, 25 nós e 16 elementos para $\Omega^{MEF}$ (b) Malha n°2, conformada por 68 nós e 64 elementos para $\Omega^{MEC}$, 289 nós e 256 elementos para $\Omega^{MEF}$ ..... 137

Figura 6.10: Valor da pressão acústica em "*B*" para $r_{\Delta t} = 2$ (malha n°1) ..... 138

Figura 6.11: Valor da pressão acústica em "*B*" para $r_{\Delta t} = 4$ (malha n°1) ..... 138

Figura 6.12: Valor da pressão acústica em "*B*" para $r_{\Delta t} = 8$ (malha n°1) ..... 139

Figura 6.13: Valor da pressão acústica em "*B*" para $r_{\Delta t} = 2$ (malha n°2) ..... 139

Figura 6.14: Valor da pressão acústica em "*B*" para $r_{\Delta t} = 4$ (malha n°2) ..... 140

Figura 6.15: Valor da pressão acústica em "*B*" para $r_{\Delta t} = 8$ (malha n°2) ..... 140

Figura 6.16: Valor da pressão acústica em "*A*" para $r_{\Delta t} = 8$ (malha n°1) ..... 141

Figura 6.17: Valor da pressão acústica em "*A*" para $r_{\Delta t} = 8$ (malha n°2) ..... 141

Figura 6.18: Esquemas de discretização para malhas não coincidentes na interface (a) Esquema de malha n°3: conformada por 24 nós e 20 elementos para $\Omega^{MEC}$, 25 nós e 16 elementos para $\Omega^{MEF}$; 6 nós locais de interface em $\Omega^{MEC}$ contra 5 em $\Omega^{MEF}$ (b) Esquema de malha n°4: conformada por 52 nós e 48 elementos para $\Omega^{MEC}$, 81 nós e 64 elementos para $\Omega^{MEF}$; 13 nós locais de interface em $\Omega^{MEC}$ contra 9 em $\Omega^{MEF}$ (c) Esquema de malha n°5, conformada por 52 nós e 48 elementos para $\Omega^{MEC}$, 121 nós e 100 elementos para $\Omega^{MEF}$; 13 nós locais de interface em $\Omega^{MEC}$ contra 11 em $\Omega^{MEF}$ ..... 142

Figura 6.19: Valor da pressão acústica em "A" para $r_{\Delta t} = 4$ (configuração de malha n°3) ..... 143

Figura 6.20: Esquema de pontos sob a condição de "momento nulo", detectados para uma variação linear da condição essencial em ambas as sub-regiões, considerando 6 nós locais MEC e 5 nós locais MEF ..... 144

Figura 6.21: Valor da pressão acústica em "A" para $r_{\Delta t} = 4$ (configuração de malha n°4) ..... 145

Figura 6.22: Esquema de pontos sob a condição de "momento nulo", detectados para uma variação linear da condição essencial em ambas as sub-regiões, considerando 13 nós locais MEC e 9 nós locais MEF ..... 146

Figura 6.23: Valor da pressão acústica em "$A$" para $\delta = 0.45$ e $r_{\Delta t} = 4$, considerando diferentes níveis de aproximação para os elementos de interface no cálculo das matrizes $L_C$ e $L_F$ (configuração de malha n°4) ..... 146

Figura 6.24: Valor da pressão acústica em "A" para $r_{\Delta t} = 4$ (configuração de malha n°5) ..... 147

Figura 6.25: Esquema de pontos sob a condição de "momento nulo", detectados para uma variação linear da condição essencial em ambas as sub-regiões, considerando 13 nós locais MEC e 11 nós locais MEF ..... 148

Figura A.1: Coordenadas de área e valores do potencial *u* e velocidade *v* ..... 156

Figura A.2: Coordenadas absolutas e relativas ao nó *i* ..... 157

Figura A.3: Conceito geométrico do $r_t^i(\theta)$ ..... 158

Índice de símbolos

Símbolos romanos:

| | |
|---|---|
| $\mathbf{A}$ | Matriz de amplificação, nas análises de convergência dos processos iterativos de acoplamento |
| $\mathbf{A}_\Gamma$ | Matriz que permite efetuar a montagem do vetor global de força nodal $\mathbf{f}_\Gamma$ considerando a totalidade dos nós de interface na sub-região |
| $A_1,\ A_2,\ A_3$ | Coordenadas de área nas células do domínio |
| $\mathbf{b}$ | Vetor contendo as componentes da força de volume |
| $\mathbf{B}$ | Matriz *Booleana* que filtra as equações de condição / matriz contendo as relações entre deformação unitária e deslocamento, produto da aplicação do operador diferencial gradiente, $\nabla$, sobre as funções de interpolação $\mathbf{N}_f$ de acordo com o MEF, para elasticidade bidimensional |
| $\mathbf{B}^{(e)}(\mathbf{0})$ | Matriz $\mathbf{B}$ referida ao elemento "*e*" e avaliada no centro geométrico de dito elemento |
| $c$ | Velocidade de propagação da onda no meio |
| $\overline{c}$ | Coeficiente adimensional na equação integral do MEC, dado pelo quociente entre o ângulo interno do contorno $\alpha$ e "$2\pi$" |
| $cl$ | Subíndice para as forças de contato $\lambda$ referidas à formulação clássica do método dos multiplicadores de *Lagrange* |
| $\mathbf{c}_C$ | Vetor contendo valores prescritos no contorno, para a sub-região $\Omega^{MEC}$, na análise de convergência dos critérios *Schwarz* para acoplamento iterativo |
| $\mathbf{c}_F$ | Vetor contendo valores prescritos no contorno, para sub-região $\Omega^{MEF}$, na análise de convergência dos critérios *Schwarz* para acoplamento iterativo |
| $C_\alpha,\ D_\alpha$ | Funções em base às coordenadas de área, referidas a um sistema polar de coordenadas, na consideração das condições iniciais para a análise MEC |
| $\mathbf{C}_{cl}$ | Matriz de compatibilidade, contendo os núcleos das equações de condição na interface, válida para o uso de multiplicadores de *Lagrange* na sua forma clássica |

$\mathbf{C}_l$ Matriz de compatibilidade, contendo os núcleos das equações de condição na interface, válida para o uso de multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada

$\mathbf{d}^{(i)}$ Vetor correspondente à "*i*"-ésima direção de busca, no método dos gradientes conjugados

$\mathbf{D}$ Matriz constitutiva contendo informação referente às propriedades mecânicas da elasticidade

$e_C$ Elemento tipo, referente à discretização da sub-região $\Omega^{MEC}$

$e_F$ Elemento tipo, referente à discretização da sub-região $\Omega^{MEF}$

$e_I$ Elemento tipo, referente à discretização da *linha-esqueleto* na interface $\Gamma^{int}$

$\mathbf{e}^{(i)}$ Vetor contendo valores de erro na "*i*"-ésima aproximação, a respeito da solução exata, no método dos gradientes conjugados

$\mathbf{f}$ Vetor contendo o produto $\mathbf{G}\,\mathbf{p}$ no DMEC / vetor das forças / vetor de carga, nas análises de convergência dos processos iterativos de acoplamento

$\tilde{\mathbf{f}}$ Vetor $\mathbf{f} = \mathbf{G}\,\mathbf{p}$ condensado / conjunto de vetores de força nodal para cada um dos elementos de interface, pertencentes a $\Omega^{MEF}$ (ou $\Omega^{MEC}$)

$\mathbf{f}^{(e)}$ Vetor de força nodal referente aos nós do elemento "*e*"

$\mathbf{f}_\lambda$ Vetor contendo as forças netas de contato, no método dos multiplicadores de *Lagrange*

$\mathbf{f}_\Gamma$ Vetor global de força nodal, considerando a totalidade dos nós de interface, na sub-região $\Omega^{MEF}$ (ou $\Omega^{MEC}$)

$\mathbf{f}_F^{(i)}$ Vetor contendo valores de força nodal *f*, referidas à sub-região discretizada pelo método dos elementos finitos, com exceção da interface, no instante de tempo *i*

$\mathbf{f}_I^{(i),MEF}$ Vetor contendo valores de força nodal *f*, referidas à interface $\Gamma^{int}$, no instante de tempo *i* e determinadas mediante a análise MEF

$\mathbf{f}_{I,k}^{(i),MEF}$ Vetor $\mathbf{f}_I^{(i),MEF}$ na "*k*"-ésima iteração

| | |
|---|---|
| $F_i^n$ | Contribuição referente ao nó *i* das condições iniciais nos pontos que conformam as células, para o instante de tempo *n* |
| $\mathbf{G}$ | Matriz de influência no MEC multiplicando o vetor que contém valores da pressão acústica *u* |
| $\tilde{\mathbf{G}}$ | Matriz $\mathbf{G}$ condensada |
| $\mathbf{G}_r$ | Matriz da função de *Green* correspondente à *resposta impulsiva* do sistema |
| $G_{ij}^{nm}$ | Coeficiente da matriz de influência *G*, gerada a partir da discretização do contínuo pelo MEC para as contribuições do fluxo *p*, associado à resposta avaliada em um ponto campo *j*, para o instante de tempo *m*, correspondente a uma fonte impulsiva de valor unitário sendo aplicada no ponto fonte *i*, para o instante de tempo *n* |
| H | Função *Heaviside* |
| $H_{ij}^{nm}$ | Coeficiente da matriz de influência *H*, gerada a partir da discretização do contínuo pelo MEC para as contribuições do potencial *u*, associado à resposta avaliada em um ponto campo *j*, para o instante de tempo *m*, correspondente a uma fonte impulsiva de valor unitário sendo aplicada no ponto fonte *i*, para o instante de tempo *n* |
| $\mathbf{H}$ | Matriz de influência no MEC multiplicando o vetor que contém valores do fluxo *p* |
| $\tilde{\mathbf{H}}$ | Matriz $\mathbf{H}$ condensada |
| $\mathcal{H}$ | Matriz da *função de transferência*, dada pela transformada de *Laplace* da função de *Green* |
| $\mathbf{H}_r$ | Matriz da função de *Green* correspondente à *resposta degrau* do sistema |
| $I_R$ | Integrando na expressão $R_{li}^{\alpha n}$, no cálculo das contribuições das condições iniciais para a análise MEC |
| $I_T$ | Integrando na expressão $T_{li}^{\alpha n}$, no cálculo das contribuições das condições iniciais para a análise MEC |
| $\mathbf{I}_C$ | matriz identidade |
| $\mathbf{I}_F$ | matriz identidade |
| $J$ | Número de elementos de contorno na discretização do contínuo |

$\mathbf{J}$ Matriz *Jacobiana*

$K$ Número de células na discretização do domínio, para o cálculo dos termos das condições iniciais no TDMEC ou da contribuição da aceleração no caso do DMEC

$\mathbf{K}$ Matriz de rigidez do sistema

$\mathbf{K}^{\{e\}}$ Matriz de rigidez a nível do elemento "*e*"

$l$ Subíndice para as forças de contato $\lambda$ referidas à formulação localizada do método dos multiplicadores de *Lagrange*

$l_C$ Tamanho médio do elemento, na discretização da sub-região $\Omega^{MEC}$

$l_i$ Comprimento do elemento "*i*", pertencente à sub-região $\Omega^{MEC}$

$\mathbf{L}$ Matriz *Booleana* que extrai unicamente os graus de liberdade da *linha-esqueleto* que contribuem na determinação de cada uma das forças de contato

$\mathbf{L}_C$ Matriz de funções de forma que permitem avaliar as funções de interpolação $\mathbf{N}_v$, na aproximação dos deslocamentos $\mathbf{v}$ dos pontos da *linha-esqueleto*, para os nós de interface pertencentes à sub-região $\Omega^{MEC}$ / matriz *Booleana* $\mathbf{L}$ que extrai os graus de liberdade referentes aos nós de interface, na sub-região $\Omega^{MEC}$

$\mathbf{L}_{CF}$ Matriz *Booleana* que permite transformar valores de condição essencial a partir dos nós locais de $\Omega^{MEC}$ para os nós locais de $\Omega^{MEF}$, na formulação clássica do método dos multiplicadores de *Lagrange*

$\mathbf{L}_F$ Matriz de funções de forma que permitem avaliar as funções de interpolação $\mathbf{N}_v$, na aproximação dos deslocamentos $\mathbf{v}$ dos pontos da *linha-esqueleto*, para os nós de interface pertencentes à sub-região $\Omega^{MEF}$ / matriz *Booleana* $\mathbf{L}$ que extrai os graus de liberdade referentes aos nós de interface, na sub-região $\Omega^{MEF}$

$\mathbf{L}_{FC}$ Matriz *Booleana* que permite transformar valores de condição essencial a partir dos nós locais de $\Omega^{MEF}$ para os nós locais de $\Omega^{MEC}$, na formulação clássica do método dos multiplicadores de *Lagrange*

$\mathbf{L}_{FC}^{MQ}$ Matriz *Booleana* que permite transformar valores de condição essencial a partir dos nós locais de $\Omega^{MEF}$ para os nós locais de $\Omega^{MEC}$, após ser feita a transformação por mínimos quadrados, na formulação clássica do método dos multiplicadores de *Lagrange*

$\mathbf{m}_j$ Vetor contendo as componentes do momento flexionante no ponto "*j*" da discretização da *linha- esqueleto*, como se tratando de uma viga submetida a cargas pontuais

$M_{ij}$ Coeficiente da matriz de influência **M**, correspondente aos termos da aceleração na equação integral do DMEC

**M** Matriz de influência no MEC multiplicando o vetor que contém valores de aceleração $\ddot{u}$ / matriz de massa do sistema

$\tilde{\mathbf{M}}$ Matriz **M** condensada (MEC)

$\mathbf{M}^{\{e\}}$ Matriz de massa a nível do elemento "*e*"

*n* Coordenada na direção da normal exterior ao elemento de contorno

*nn2* Número de equações que são consideradas na resolução do sistema de equações MEC na análise da sub-região $\Omega^{MEC}$

*nn* Número de nós na discretização do contorno de $\Omega^{MEC}$

*nnd* Número de nós *escravos* (duplos), na discretização do contorno de $\Omega^{MEC}$

$n_i$ Componente do vetor normal unitário $\hat{\mathbf{n}}$ na direção *i*, considerando sistema de coordenadas cartesianas

$n_{iter}$ Número máximo de iterações

$n_s$ Número de subpasso de tempo para o cálculo da *função de Green*

$\mathbf{n}_j$ Vetor contendo as componentes da força cortante no ponto "*j*" da discretização da *linha- esqueleto*, como se tratando de uma viga submetida a cargas pontuais

$\hat{\mathbf{n}}$ Vetor normal unitário, ortogonal ao contorno $\Gamma$ e apontando para o exterior

*N* Número total de instantes de tempo na análise

$N_i$ Função de interpolação em referência ao nó "*i*" pertencente ao elemento "*e*"

$N_f^{(i)}$ Função de interpolação ao nível do elemento, na sub-região $\Omega^{MEF}$, referida ao nó "*i*" do elemento "*e*"

$\mathbf{N}_{c,u}$ Matriz de funções de interpolação a nível de elemento para a pressão acústica *u*, na sub-região $\Omega^{MEC}$

$\mathbf{N}_{c,p}$ Matriz de funções de interpolação a nível de elemento para o fluxo (ou tração de superfície) *p*, na sub-região $\Omega^{MEC}$

$\mathbf{N}_f$ Matriz de funções de interpolação a nível de elemento, na sub-região $\Omega^{MEF}$

$\mathbf{N}_v$ Matriz de funções de interpolação para a pressão acústica (na elasticidade, o deslocamento) *v* nos pontos definidos ao longo da *linha-esqueleto*

$\mathbf{NS}_C$ Submatriz de $\mathbf{NS}_{CF}$ que multiplica $\mathbf{L}_C$, na determinação do espaço nulo de $\mathbf{L}_C$ e $\mathbf{L}_F$

$\mathbf{NS}_F$ Submatriz de $\mathbf{NS}_{CF}$ que multiplica $\mathbf{L}_F$, na determinação do espaço nulo de $\mathbf{L}_C$ e $\mathbf{L}_F$

$\mathbf{NS}_{CF}$ Espaço nulo da matriz conformada por $\mathbf{L}_C$ e $\mathbf{L}_F$

*nmec* Número de nós locais de interface que compõem o elemento $e_C$, na sub-região $\Omega^{MEC}$

*nmef* Número de nós locais de interface que compõem o elemento $e_F$, na sub-região $\Omega^{MEF}$

*nv* Número total de elementos que constituem a *linha-esqueleto*, na interface $\Gamma^{int}$

$nt^{(MEC)}$ Número de instantes de tempo para a análise da sub-região $\Omega^{MEC}$

$nt^{(MEF)}$ Número de instantes de tempo para a análise da sub-região $\Omega^{MEF}$

*nv* Número de nós definidos na *linha-esqueleto*

$O_l$ "*l*"-ésima célula na prescrição das condições iniciais pelo método dos elementos de contorno

*p* Fluxo; derivada da pressão acústica *u* em relação à coordenada na direção da normal unitária exterior

$p^*$ Fluxo na equação escalar da onda correspondente à *solução fundamental*

$p_i^n$ Valor do fluxo referente ao nó *i*, avaliado no instante de tempo *n*

$\overline{p}$ Valor prescrito de *p* (condição natural ou de *Neumann*, prescrita ao longo do contorno $\Gamma_p$)

$\mathbf{p}$ Vetor contendo os valores do fluxo *p*

$\overline{\mathbf{p}}$ Vetor contendo valores prescritos do fluxo no contorno $\Gamma_p$

$\overline{\mathbf{p}}_{\{i\}}$ Vetor contendo as componentes prescritas do valor do fluxo, referente a alguma localização dentro do elemento "*e*", para efeitos de integração em problemas da elasticidade

$\mathbf{p}_C^{(i)}$ Vetor contendo valores do fluxo *p*, referidos à sub-região discretizada pelo método dos elementos de contorno, com exceção da interface, no instante de tempo *i*

$\mathbf{p}_I^{(i),MEC}$ Vetor contendo valores do fluxo *p*, referidos à interface $\Gamma^{int}$, no instante de tempo *i* e determinados mediante a análise MEC

$\mathbf{p}_{I,k}^{(i),MEC}$ Vetor $\mathbf{p}_I^{(i),MEC}$ na "*k*"-ésima iteração

$\mathbf{p}_{\Gamma_j}^{(MEC)}$ Vetor contendo valores nodais do fluxo *p* nos nós do elemento $\Gamma^j$, pertencente à sub-região $\Omega^{MEC}$

$\overline{\mathbf{q}}_C^{(n)}$ Vetor contendo as contribuições dos instantes de tempo anteriores a *n*, relativas ao contorno de $\Omega^{MEC}$

$\overline{\mathbf{q}}_I^{(n)}$ Vetor contendo as contribuições dos instantes de tempo anteriores a *n*, relativas à interface $\Gamma^{int}$ entre $\Omega^{MEC}$ e $\Omega^{MEF}$, no sistema de equações para a análise da sub-região $\Omega^{MEC}$

$r$ distância entre o *ponto fonte* $\xi$ e o *ponto de campo X* / módulo do vetor que denota o vetor posição do *ponto de campo* em referência ao *ponto fonte*

$r_{\Delta t}$ Quociente entre passos de tempo para análise MEC e análise MEF

$R_{li}^{\alpha n}$ Contribuição discreta dos coeficientes de influência para os termos de velocidade inicial $v_0$, referente ao nó fonte "*i*" (instante de tempo *n*) e o nó $\alpha$ na célula $O_l$

$\mathbf{r}_{I,k}$ Vetor correspondente ao "*i*"-ésimo resíduo no método dos gradientes conjugados

$\mathbf{r}_n$ Vetor contendo os valores de contribuição das fontes, condições iniciais e das condições anteriores, na equação MEC

$S_i^n$ Contribuição referente ao nó *i* das fontes concentradas (pontuais), para o instante de tempo *n*

$t$ Variável representando o tempo / instante de tempo em que a resposta é medida, para a aplicação de uma fonte impulsiva de amplitude unitária, a respeito da função de *Green*

$t_0$ Instante de tempo inicial para consideração das contribuições das condições iniciais no MEC

$t_n$ Instante de tempo de análise ("*n*"-ésimo instante)

$T_{li}^{\alpha n}$ Contribuição discreta dos coeficientes de influência para os termos de pressão acústica inicial $u_0$, referente ao nó fonte "*i*" (instante de tempo *n*) e o nó $\alpha$ na célula $O_l$

$\mathbf{T}$ Tensor de tensões

$\mathbf{T}_c$ Tensor de tensões constante

$\mathbf{T}_l$ Matriz que relaciona as forças de contato (ou multiplicadores de *Lagrange* localizados) ao longo da interface $\Gamma^{int}$ com a força cortante e o momento flexionante em cada ponto "*j*" desta linha, como se tratando de uma viga submetida a cargas pontuais

$\mathbf{T}_{\Gamma_j}$ Matriz de transformação que relaciona o fluxo (ou trações de superfície) $\mathbf{p}$ com as forças nodais $\mathbf{f}$ na interface $\Gamma^{int}$, ao longo do elemento $\Gamma^j$, pertencente à sub-região $\Omega^{MEC}$

$\mathbf{T}_{\Gamma^{int}}$ Matriz de transformação do vetor de fluxo (ou trações de superfície) $\mathbf{p}$ para o vetor de forças nodais $\mathbf{f}$ na interface $\Gamma^{int}$

$u$ Potencial ou pressão acústica, na equação escalar da onda (na elasticidade, o deslocamento)

$u_0$ Pressão acústica (na elasticidade, o deslocamento) *u* inicial, avaliada no instante de tempo $t = t_0$

$u_{0\alpha}$ Pressão acústica *u* inicial, avaliada no instante de tempo $t = t_0$ e referente ao nó $\alpha$ que conforma as células (MEC)

$u^*$ Potencial ou pressão acústica na equação escalar da onda, correspondente à *solução fundamental*

$u_i^n$ Potencial ou pressão acústica (na elasticidade, o deslocamento) *u*, referente ao nó *i* e avaliado no instante de tempo *n*

$u_0^*$ Potencial ou pressão acústica *u* inicial, correspondente à *solução fundamental* avaliada no instante de tempo $t = t_0$

$\dot{u}$, $\ddot{u}$ Primeira e segunda derivadas no tempo de *u*, denotando velocidade e aceleração, respectivamente

$\overline{u}$ Valor prescrito de *u* (condição essencial ou de *Dirichlet*, prescrita ao longo do contorno $\Gamma_u$)

$\mathbf{u}$ Vetor contendo valores de pressão acústica (ou deslocamento) *u*

$\mathbf{u}^{\{e\}}$ Vetor contendo valores de pressão acústica (ou deslocamento) *u*, a nível de elemento

$\mathbf{u}_C^{(i)}$ Vetor contendo valores de pressão acústica (ou deslocamento) *u*, referidos à sub-região discretizada pelo MEC, com exceção da interface, no instante de tempo *n*

$\mathbf{u}_F^{(i)}$ Vetor contendo valores de pressão acústica (ou deslocamento) *u*, referidos à sub-região discretizada pelo MEF, com exceção da interface, no instante de tempo *i*

$\mathbf{u}_{\{i\}}^{(MEF)}$ Vetor contendo as componentes do valor prescrito do deslocamento, referente a alguma localização dentro do elemento "*e*", para efeitos de integração em problemas da elasticidade

$\mathbf{u}_I^{(i),MEC}$ Vetor contendo valores de pressão acústica *u*, referidos à interface $\Gamma^{int}$, no instante de tempo *i* e determinados mediante a análise MEC

$\mathbf{u}_{I,k}^{(i),MEC}$ Vetor $\mathbf{u}_I^{(i),MEC}$ na "*k*"-ésima iteração

$\mathbf{u}_{I\{i\}}^{(MEC)}$ Vetor contendo as componentes da pressão acústica em uma determinada localização ao longo da *linha-esqueleto*, na interface $\Gamma^{int}$, referida à sub-região $\Omega^{MEC}$

$\mathbf{u}_{I\{i\}}^{(MEF)}$ Vetor contendo as componentes da pressão acústica (na elasticidade; do deslocamento) em uma determinada localização ao longo da *linha-esqueleto*, na interface $\Gamma^{int}$, referida à sub-região $\Omega^{MEC}$

$\mathbf{u}_{\Gamma_j}^{(MEC)}$ Vetor contendo valores nodais da pressão acústica *u* referentes aos nós "*j*1" e "*j*2" do elemento de interface $\Gamma^j$, pertencente à sub-região $\Omega^{MEC}$

$v$ Velocidade (primeira derivada no tempo de *u*)

$v_0$ Velocidade *v* inicial, no instante de tempo $t = t_0$

$v_{0\alpha}$ Velocidade *v* inicial, no instante de tempo $t = t_0$ e referente ao nó $\alpha$ que conforma as células

$v^*$ Velocidade correspondente à *solução fundamental* da equação escalar da onda

$v_0^*$ Velocidade *v* inicial, correspondente à *solução fundamental* da equação escalar da onda, avaliada no instante de tempo $t = t_0$

$\mathbf{v}$ Vetor contendo os valores de pressão acústica (na elasticidade, de deslocamento) nos pontos ao longo da *linha-esqueleto*, para acoplamento MEC-MEF com malhas não coincidentes na interface

$\mathbf{v}_{\{i\}}$ Vetor contendo valores de pressão acústica (na elasticidade, de deslocamento) em alguma localização ao longo da *linha-esqueleto*, na interface $\Gamma^{int}$

$V$ Tamanho do elemento (comprimento, área ou volume)

$V_1$, $V_2$, $V_3$ Funções para o cálculo das contribuições das condições iniciais no MEC

$w$ Função de ponderação ou peso

$\mathbf{w}_{I,k}$ Vetor correspondente à "*i*"-ésima direção de busca, na iteração "*k*", sendo usado também como valores adotados para o fluxo na interface $\Gamma^{int}$, durante o processo iterativo no método do gradiente conjugado, aplicado ao acoplamento iterativo MEC-MEF na imposição das condições na interface

$W$ Trabalho virtual

$x_i$, $y_i$ coordenadas cartesianas

$\breve{x}_\alpha$, $\breve{y}_\alpha$ Coordenadas cartesianas do nó $\alpha$ das células (MEC), situando a origem no ponto de coordenadas $x_i$ e $y_i$

$X$ Coordenada representativa do *ponto de campo*, ou seja, onde a resposta é medida considerando a aplicação de uma fonte impulsiva de amplitude unitária, aplicada no *ponto fonte* $\xi$, em referência à solução fundamental ou função de *Green*

$\mathbf{x}_C$ Vetor contendo as incógnitas relativas ao contorno da sub-região $\Omega^{MEC}$, para a análise de convergência conforme os critérios *Schwarz* para acoplamento iterativo

$\mathbf{x}_C^{(MEC)}$ Vetor contendo as incógnitas relativas ao contorno da sub-região $\Omega^{MEC}$, com exceção dos pontos da interface, para a análise de convergência conforme os critérios *Schwarz* para acoplamento iterativo

$\mathbf{x}_I^{(MEC)}$ Vetor contendo as incógnitas relativas à interface $\Gamma^{int}$, referidas à sub-região $\Omega^{MEC}$ para a análise de convergência conforme os critérios *Schwarz* para acoplamento iterativo

$\mathbf{x}_F^{(MEF)}$ Vetor contendo as incógnitas relativas aos pontos da malha de elementos finitos, na sub-região $\Omega^{MEF}$ com exceção dos pontos da interface, para a análise de convergência conforme os critérios *Schwarz* para acoplamento iterativo

$\mathbf{x}_I^{(MEF)}$ Vetor contendo as incógnitas relativas à interface $\Gamma^{int}$, referidas à sub-região $\Omega^{MEF}$ para a análise de convergência conforme os critérios *Schwarz* para acoplamento iterativo

$\mathbf{x}^{\{e\}}$ Matriz das coordenadas dos nós do elemento "*e*", contendo as coordenadas em "*x*" na primeira coluna, enquanto que as coordenadas em "*y*" na segunda coluna

Símbolos gregos:

$\alpha^{(i)}$ Parâmetro para o método dos gradientes conjugados

$\beta$ Parâmetro para o método de *Newmark*

$\beta^{(i)}$ Parâmetro para o método dos gradientes conjugados

| | |
|---|---|
| $\gamma$ | Intensidade da fonte; geralmente sendo função das coordenadas espaciais $x$ e $y$ e do tempo $t$ / parâmetro no método de *Newmark* |
| $\delta$ | Número de *Courant-Friedrich-Levy* |
| $\Gamma$ | Contorno do domínio $\Omega$ |
| $\Gamma_i$ | Elemento tipo, pertencente à sub-região $\Omega^{MEC}$ |
| $\Gamma_u$ | Parcela do contorno onde a condição essencial (*Dirichlet*) é prescrita |
| $\Gamma_p$ | Parcela do contorno onde a condição natural (*Neumann*) é prescrita |
| $\Gamma^{int}$ | Interface localizada entre as sub-regiões $\Omega^{MEC}$ e $\Omega^{MEF}$ |
| $\Gamma_1^{int}$ | Interface localizada entre as sub-regiões $\Omega^{MEF}$ e $\Omega^{C/F}$, no acoplamento iterativo com superposição de subdomínios (*overlapping*) |
| $\Gamma_2^{int}$ | Interface localizada entre as sub-regiões $\Omega^{C/F}$ e $\Omega^{MEC}$, no acoplamento iterativo com superposição de subdomínios (*overlapping*) |
| $\Gamma_p^{(e)}$ | Contorno do elemento "*e*" (MEF) onde a condição natural (*Neumann*) é prescrita |
| $\delta\mathbf{u}_{I,k}$ | Vetor contendo valores de erro na condição essencial para a iteração "*k*", válido na interface $\Gamma^{int}$ para o método dos gradientes conjugados aplicado no acoplamento MEC-MEF |
| $\delta\Pi$ | Primeira variação do funcional de energia total do sistema |
| $\delta\pi^{int}$ | Primeira variação da contribuição da *pseudo-estrutura* de interface ou *linha-esqueleto* dentro do funcional de energia total |
| $\delta\pi^{lump}$ | Primeira variação da contribuição no funcional de energia total devida ao efeito *lumping*, na determinação da relação entre a força de contato MEC (multiplicador de *Lagrange* na sua forma localizada), $\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}$, e o fluxo ou tração de superfície, $\mathbf{p}^{(MEC)}$, para todos os pontos da interface $\Gamma^{int}$ pertencentes à sub-região $\Omega^{MEC}$ |
| $\delta\pi_{\Gamma_j}^{lump}$ | Primeira variação da contribuição devida ao efeito *lumping* dentro do funcional de energia total, naquela porção de interface $\Gamma_j$ contida no elemento "*j*" |
| $\delta\pi^{MEC}$ | Primeira variação da contribuição da sub-região $\Omega^{MEC}$ dentro do funcional de energia total |

| | |
|---|---|
| $\delta\pi^{MEF}$ | Primeira variação da contribuição da sub-região $\Omega^{MEF}$ dentro do funcional de energia total |
| $\Delta t$ | Passo de tempo |
| $\Delta t_C$ | Passo de tempo a ser usado na análise dinâmica da sub-região $\Omega^{MEC}$ |
| $\Delta t_F$ | Passo de tempo a ser usado na análise dinâmica da sub-região $\Omega^{MEF}$ |
| $\boldsymbol{\varepsilon}$ | Tensor de deformação unitária |
| $\zeta_j$ | Função de interpolação espacial referente ao nó *j*, na aproximação do fluxo *p* na análise TDMEC |
| $\theta$ | Parâmetro do método $\theta$ linear / ângulo de inclinação do raio *r* indicando a posição relativa do ponto de integração, no cálculo das contribuições das condições iniciais para a análise MEC |
| $\theta_k$ | Autovalor da matriz **R,** ou **Ψ**, na análise de convergência do critério *Schwarz Dirichlet-Neumann* em paralelo, ou sequencial, respectivamente, para acoplamento iterativo |
| $\theta^m$ | Função de interpolação temporal referente ao "*m*"-ésimo instante de tempo, na aproximação do fluxo *p* na análise TDMEC |
| $\kappa$ | Parâmetro de relaxação, no acoplamento iterativo MEC-MEF, considerando o critério *Schwartz Neumann-Neumann* em paralelo |
| $\lambda$ | Autovalor da equação característica, na análise de convergência dos critérios *Schwarz* para acoplamento iterativo / forças de contato ou conexão entre corpos no método dos multiplicadores de *Lagrange* |
| $\boldsymbol{\lambda}_{cl}$ | Vetor contendo multiplicadores de *Lagrange* (forças de contato) na sua forma clássica |
| $\boldsymbol{\lambda}_l$ | Vetor contendo multiplicadores de *Lagrange* (forças de contato na interface) na sua forma localizada |
| $\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}$ | Vetor contendo valores nodais das forças de contato (multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada), referidos aos nós locais da sub-região $\Omega^{MEC}$ |
| $\boldsymbol{\lambda}^{(MEF)}$ | Vetor contendo valores nodais das forças de contato (multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada), referidos aos nós locais da sub-região $\Omega^{MEF}$ |

$\boldsymbol{\lambda}_{\Gamma_j}^{(MEC)}$ Vetor contendo valores nodais da força de contato $\boldsymbol{\lambda}$ associados aos nós de interface do elemento $\Gamma^j$, pertencente à sub-região $\Omega^{MEC}$

$\boldsymbol{\lambda}_{(e_C)}^{(MEC)}$ Vetor contendo valores nodais da força de contato (multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada) nos nós de interface do elemento $e_C$, na sub-região $\Omega^{MEC}$

$\boldsymbol{\lambda}_{(e_F)}^{(MEF)}$ Vetor contendo valores nodais da força de contato (multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada) nos nós de interface do elemento $e_F$, na sub-região $\Omega^{MEF}$

$\boldsymbol{\lambda}_{\{i\}}^{(MEC)}$ Vetor contendo as componentes da força de contato (multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada) em uma determinada localização ao longo da *linha-esqueleto*, na interface $\Gamma^{int}$ e referida à sub-região $\Omega^{MEC}$, para efeitos de integração

$\boldsymbol{\lambda}_{\{i\}}^{(MEF)}$ Vetor contendo as componentes da força de contato (multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada) em uma determinada localização ao longo da *linha-esqueleto*, na interface $\Gamma^{int}$ e referida à sub-região $\Omega^{MEF}$, para efeitos de integração

$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{\{i\}}^{(MEC)}$ Vetor contendo as componentes da força distribuída de contato (multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada) em uma determinada localização ao longo da *linha-esqueleto*, na interface $\Gamma^{int}$ e referida à sub-região $\Omega^{MEC}$, para efeitos de integração

$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{\{i\}}^{(MEF)}$ Vetor contendo as componentes da força distribuída de contato (multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada) em uma determinada localização ao longo da *linha-esqueleto*, na interface $\Gamma^{int}$ e referida à sub-região $\Omega^{MEF}$, para efeitos de integração

$\mu_\alpha$ Função de interpolação referida ao nó $\alpha$ que conforma a célula $O_l$, expressa em coordenadas polares, na aproximação da pressão acústica no interior da célula (MEC para condições iniciais)

$\boldsymbol{\mu}_{I,k}$ Vetor contendo os parâmetros do erro na interface $\Gamma^{int}$, para a análise de convergência do método dos gradientes conjugados na imposição das condições na interface, na iteração "*k*"

$\xi$ Coordenada do *ponto fonte*, onde uma fonte impulsiva de amplitude unitária está sendo aplicada, em referência à solução fundamental ou função de *Green* / coordenada natural ou intrínseca

$\boldsymbol{\xi}_C$ Vetor contendo as coordenadas intrínsecas, válidas na interface $\Gamma^{int}$ e referidas à sub-região $\Omega^{MEC}$

$\boldsymbol{\xi}_{Cj}$ Vetor contendo as coordenadas intrínsecas nodais do "*j*"-ésimo nó de interface pertencente ao elemento $e_C$, na sub-região $\Omega^{MEC}$

$\boldsymbol{\xi}_F$ Vetor contendo as coordenadas intrínsecas, válidas na interface $\Gamma^{int}$ e referidas à sub-região $\Omega^{MEF}$

$\boldsymbol{\xi}_{Fj}$ Vetor contendo as coordenadas intrínsecas nodais do "*j*"-ésimo nó de interface pertencente ao elemento $e_F$, na sub-região $\Omega^{MEF}$

$\pi_{cl}$ Contribuição dos termos de interface no funcional de energia do sistema, considerando multiplicadores de *Lagrange* na sua forma clássica

$\pi_l$ Contribuição dos termos de interface no funcional de energia do sistema, considerando multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada

$\Pi$ Funcional de energia total do sistema

$\pi^{MEC}$ Contribuição da sub-região $\Omega^{MEC}$ no funcional de energia total

$\pi^{MEF}$ Contribuição da sub-região $\Omega^{MEF}$ no funcional de energia total

$\pi^{int}$ Contribuição da *pseudo-estrutura* de interface ou *linha-esqueleto* dentro do funcional de energia total

$\rho$ Densidade do meio

$\boldsymbol{\sigma}$ Vetor de tensões

$\tau$ Instante de tempo de aplicação de uma fonte impulsiva de amplitude unitária, em referência à solução fundamental ou função de *Green n*

$\phi^m$ Função de interpolação temporal referente ao "*m*"-ésimo instante de tempo, na aproximação tanto da pressão acústica *u* como da velocidade *v*, na análise TDMEC

| | |
|---|---|
| $\varphi_j$ | Função de interpolação espacial referente ao nó *j*, na aproximação tanto da pressão acústica *u* como da velocidade *v*, na análise TDMEC |
| $\omega$ | Parâmetro de relaxação, no acoplamento iterativo MEC-MEF, usando o critério *Schwartz Dirichlet-Neumann* (em paralelo ou sequencial) na avaliação das condições na interface |
| $\Omega$ | Domínio de análise, representando a um contínuo homogêneo e isotrópico |
| $\Omega^{(e)}$ | Sub-região do domínio que abrange o elemento "*e*" |
| $\Omega^{MEC}$ | Sub-região do domínio discretizada pelo método dos elementos de contorno (MEC) |
| $\Omega^{MEF}$ | Sub-região do domínio discretizada pelo método dos elementos finitos (MEF) |

Outros símbolos:

| | |
|---|---|
| $\nabla$ | Operador de gradiente |
| $\mathbf{\nabla}$ | Matriz do operador de gradiente |
| $\partial$ | Operador que denota a execução de derivada parcial |
| $\mathscr{L}[\ldots]$ | Transformada de *Laplace* |

# 1

# Introdução

## 1.1. Considerações preliminares

Atualmente é frequente o uso de técnicas de acoplamento iterativo entre o método dos elementos de contorno (MEC) e o método dos elementos finitos (MEF). No entanto, as técnicas de acoplamento direto foram amplamente utilizadas, onde as matrizes obtidas a partir da discretização espacial de um subdomínio (por exemplo, o MEC) são transformadas em matrizes equivalentes conforme o método de discretização do outro subdomínio (no próprio exemplo, o MEF), gerando-se apenas um sistema final de equações, contendo as incógnitas de todas as sub-regiões que conformam o contínuo.

A principal desvantagem de tais técnicas está relacionada à dificuldade na formulação das matrizes de elemento equivalente, tanto na própria transformação como na interpretação física destes termos, se for comparado com a resolução usual de cada método de discretização de domínio. Além disso, em muitas situações existe dificuldade na adaptação dos códigos computacionais que contêm os algoritmos de resolução, precisando-se de compatibilizar as variáveis provenientes das rotinas de análise do MEC e do MEF, bem como também a impossibilidade de considerar diferentes passos de tempo para cada método, na resolução de problemas dinâmicos.

Por outro lado, as técnicas iterativas de acoplamento permitem escolher diferentes passos de tempo para a análise de cada subdomínio. Assumindo inicialmente o valor de alguma condição na interface (por exemplo, a condição essencial do problema) efetuam-se interpolações, ou extrapolações, ao longo do eixo temporal, devido à prescrição de diferentes passos de tempo, possibilitando a compatibilização entre variáveis de distintas sub-regiões, associadas ao mesmo ponto da interface e sendo avaliadas no mesmo instante de referência. Nos procedimentos de acoplamento iterativo, uma vez que são efetuados os cálculos relativos às condições na interface para cada subdomínio, os valores obtidos são comparados com os correspondentes valores determinados a partir da iteração anterior (ou inicialmente assumidos).

A convergência é avaliada utilizando-se parâmetros de relaxação, por meio dos quais o valor de condição na interface, válido para a próxima iteração, é dado por uma combinação linear entre o valor inicialmente assumido e o recentemente obtido. O procedimento é repetido até que seja atingido o nível de acurácia desejado, de acordo com o critério de convergência adotado e o valor de tolerância inicialmente definido.

No acoplamento iterativo, os cálculos relativos a cada subdomínio são feitos independentemente, de forma *sequencial* ou *em paralelo*, enquanto as condições de

compatibilidade e equilíbrio na interface podem ser impostas ponto por ponto (colocação) ou de forma aproximada (relaxação). Nos esquemas de acoplamento *sequencial*, as condições de interface são determinadas a partir de uma sub-região e os valores obtidos são utilizados na análise da outra sub-região, sendo ambas as sub-regiões analisadas de forma alternada, enquanto nos esquemas *em paralelo* ditas sub-regiões são analisadas de forma independente, sendo as condições de interface avaliadas de forma simultânea para cada subdomínio.

Em determinadas situações resulta vantajoso representar as condições de compatibilidade nas interfaces de forma aproximada; por exemplo, estabelecendo-as a partir de alguma expressão de resíduos ponderados, de forma a se obter uma *relaxação* de tais condições. Uma técnica que permite incorporar naturalmente a mencionada "condição relaxada" consiste em incorporar os métodos baseados em multiplicadores de *Lagrange*, introduzindo relações aproximadas tanto para a condição essencial como para a força de contato na interface, sendo que os pontos de ambas as malhas não coincidem.

A versão clássica do método surgiu a partir da ideia de *Lagrange* de derivar as equações de equilíbrio para sistemas de corpos rígidos interconectados, considerando cada um dos elementos presentes na configuração do sistema como se tratando de um corpo livre. Posteriormente ele identificou as *equações de condição*, ou de compatibilidade na interface, estabelecendo vínculos entre os diferentes corpos através de variáveis cinemáticas (equações geralmente expressas em função da diferença de deslocamentos em pontos sobre a mesma interface, porém referidos a diferentes sub-regiões). As equações de condição são definidas a partir do produto entre a diferença dos valores de condição essencial e multiplicada por um coeficiente representando fisicamente à força de contato, estabelecendo-se uma nova contribuição dentro da expressão do trabalho virtual do sistema. O mencionado coeficiente é conhecido como *multiplicador de Lagrange*.

Em algumas situações, tais como em problemas de estruturas com elementos de tipo barra ou em sólidos tridimensionais, uma interface é definida por um conjunto de pontos onde convergem mais de dois subdomínios, a partir do processo de discretização espacial, não existindo uma única forma de serem estabelecidos vínculos cinemáticos linearmente independentes, surgindo com frequência equações de condição redundantes. A consideração de todas e cada uma destas equações de vínculo, tanto as linearmente

independentes quanto as que não o são, traz consigo um inconveniente relacionado ao surgimento de singularidades no sistema de equações.

Por meio do *método dos multiplicadores de Lagrange na sua forma localizada* (*localized Lagrange multipliers method*, LLM *method*) é obtido um único conjunto de equações de vínculo (também chamadas de *equações de condição*) linearmente independentes, conjunto que envolve a consideração de uma *pseudoestrutura* de interface ou *linha-esqueleto*, a qual é discretizada a partir da definição de pontos que incorporam incógnitas adicionais dentro do sistema de equações a ser resolvido. Tais multiplicadores de *Lagrange* localizados correspondem fisicamente às forças de contato estabelecendo interação entre pontos localizados ao longo da própria *linha-esqueleto* e os nós locais de interface, ou seja, pontos gerados a partir da discretização espacial de cada uma das sub-regiões (sendo os multiplicadores de *Lagrange* definidos localmente, estes fazem referência a apenas uma sub-região).

A definição deste tipo de vínculos na interface garante uma forma única de serem estabelecidos os vínculos cinemáticos, permitindo a geração de equações de condição linearmente independentes e possuindo a propriedade de diminuir o erro numérico causado por propriedades constitutivas de materiais radicalmente diferentes. Finalmente, a simplicidade com a qual são gerados os vínculos *esqueleto*-subdomínio facilita o processo de implementação computacional, bem como também a execução dos cálculos computacionais relativos a cada sub-região de forma independente.

A incorporação de multiplicadores de *Lagrange* na formulação do acoplamento iterativo permite relaxar as condições de compatibilidade na interface entre duas ou mais sub-regiões. A condição essencial (por exemplo, os deslocamentos em problemas da elasticidade) nos pontos ao longo da estrutura de interface, ou *linha-esqueleto*, é aproximada mediante funções de interpolação, surgindo matrizes de vínculo *esqueleto-subdomínio*, ou seja, expressões que relacionam grandezas referentes a graus de liberdade associados a pontos da *linha-esqueleto* e os correspondentes valores referidos aos graus de liberdade dos nós locais, inerentes a cada sub-região. Vale frisar que a ordem de aproximação da condição essencial nos pontos da *linha-esqueleto* não depende da ordem de aproximação escolhida para a variável associada aos nós locais.

A presente tese propõe um esquema de acoplamento iterativo de caráter sequencial para problemas dinâmicos bidimensionais no domínio do tempo, do tipo acústico-acústico e acústico-elástico, envolvendo o MEC (com solução fundamental dinâmica) e o MEF usando diversos esquemas usuais de marcha no tempo,

incorporando o método dos multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada com a finalidade de serem modeladas as forças de contato na interface, sendo que os nós locais das diferentes sub-regiões não coincidem ao longo da interface. O esquema de acoplamento iterativo proposto admite a escolha de diferente passo de tempo associado à marcha no tempo de cada sub-região. O caráter iterativo e sequencial do esquema de acoplamento requer que as variáveis envolvendo a condição essencial nos pontos da *linha-esqueleto* sejam eliminadas, pois na formulação localizada dos multiplicadores de *Lagrange* as equações de vínculo são expressas na forma *esqueleto-subdomínio*. A eliminação de tais variáveis é materializada mediante a determinação do espaço nulo das matrizes de vínculo, de forma a se ter transformações explícitas entre grandezas referidas a pontos locais de cada sub-região.

## 1.2. Revisão bibliográfica

Dentre os esquemas de acoplamento numérico existentes na literatura, entre o método dos elementos de contorno (WROBEL [1], MANSUR [2], BREBBIA *et al*. [3], DOMINGUEZ [4], GAUL *et al*. [5]) e o método dos elementos finitos (HUGHES [6], CRISFIELD [7], BATHE [8], ZIENKIEWICZ [9]), destacam três tipologias; o primeiro tipo, aquele onde os termos referidos ao subdomínio discretizado por elementos de contorno são transformados em matrizes compatíveis com a formulação de elementos finitos (*FEM hosted*), enquanto o segundo tipo corresponde ao contrário (*BEM hosted*). Nesses dois tipos é obtido um só sistema final de equações, obtendo-se as incógnitas de todas e cada uma das sub-regiões em forma simultânea (métodos de *acoplamento direto*). Os primeiros trabalhos relativos à utilização de métodos de *acoplamento direto* entre o MEC e o MEF são atribuídos a ZIENKIEWICZ *et al*. [10] e BREBBIA & GEORGION [11]. Por exemplo, HARTMANN [12] desenvolveu expressões de matrizes de rigidez equivalentes, obtendo-as a partir da equação integral para problemas de placas elásticas, enquanto VARADARAJAN *et al*. [13] propuseram um esquema de acoplamento estudando as diferenças significativas nas propriedades mecânicas bem como a sua influência na acurácia dos resultados e tempo de processamento, e BEER & SWOBODA [14] que estudaram problemas da geomecânica também por meio de um esquema de acoplamento direto.

Um terceiro tipo considera todos os esquemas que não se classificam dentro de alguma das duas tipologias acima mencionadas. Os esquemas de *acoplamento iterativo*

são um exemplo dentro desta terceira tipologia; no acoplamento iterativo de *caráter sequencial* prescreve-se um valor para uma determinada condição na interface (por exemplo, a condição essencial em um problema de elasticidade), e após serem feitos os cálculos relativos a cada subdomínio, de forma alternada, um novo valor é determinado e posteriormente comparado com o inicialmente assumido, reiterando-se o processo até ser satisfeito algum teste para obter-se a convergência.

As primeiras pesquisas referidas a esquemas de acoplamento iterativo MEC-MEF efetuando cálculos referentes a cada sub-região *em paralelo*, são os trabalhos de LAI [15], KAMIYA *et al.* [16] para acoplamento MEC-MEC com a equação de *Laplace*, atualizando as condições na interface fazendo uso dos métodos de *Uzawa* e impondo os critérios definidos por SCHWARZ [17]. KAMIYA *et al*. [18] impuseram as condições na interface de acordo com os critérios *Schwarz*, para acoplamento MEC-MEF, e KAMIYA & IWASE [19] atualizando as condições na interface por meio do método do gradiente conjugado, incorporando a condensação dos graus de liberdade correspondentes ao contorno externo, resultando em um sistema de equações para cada subdomínio, consistentes unicamente em incógnitas referidas aos termos da interface.

De forma alternativa, em lugar de serem impostas as condições de compatibilidade na interface ponto a ponto após cada iteração, é possível aproximá-las mediante uma expressão de *aceleração de convergência*. Diferentes expressões foram estudadas e apresentadas por ELLEITHY & TANAKA [20], para acoplamento iterativo MEF-MEC e MEC-MEC, em cuja pesquisa dois tipos de problemas de decomposição de domínio são estudados; com superposição de sub-regiões e sem ela, estabelecendo diferentes esquemas de aceleração de convergência por meio da definição de *parâmetros*, conforme cada uma das metodologias apresentadas, com o objetivo de garantir e acelerar a convergência. Os diferentes esquemas do tipo *Schwarz*, propostos naquela pesquisa, são nomeados de acordo com o tipo de condição avaliada iterativamente na interface (*Dirichlet*, *Neumann* ou *Robin*), bem como estabelecer-se claramente o caráter do processo iterativo (*sequencial* ou *em paralelo*).

LIN *et al.* [21] já tinham proposto o esquema sequencial *Schwarz Dirichlet-Neumann*, estudando o comportamento do parâmetro de relaxação, obtendo-se também uma expressão explícita (quase analítica) para o valor ótimo deste parâmetro, por meio da minimização do erro quadrático, correspondendo a uma máxima aceleração de convergência ao serem comparados os valores da condição essencial obtidos em duas iterações consecutivas. Além disso, menciona-se a necessidade de se efetuar a

transformação de forcas de superfície do MEC em forças nodais do MEF, por meio de uma matriz de transformação estabelecida aplicando o princípio do trabalho virtual na interface, transformação formalmente apresentada por AOUR *et al*. [22].

EL-GEBEILY *et al*. [23] estudaram as condições para se obter convergência nos diferentes esquemas de acoplamento iterativo incorporando os critérios *Schwarz*, para acoplamento MEC-MEF, obtendo-se que a convergência depende diretamente dos autovalores das submatrizes obtidas no processo de condensação estática, a partir das matrizes constitutivas de ambas as formulações. Naquela pesquisa é proposta uma análise unificada de convergência para as diferentes metodologias estudadas, estabelecendo-se intervalos para a escolha adequada do parâmetro de relaxação, de acordo com o método utilizado, bem como a determinação do valor ótimo nos diferentes exemplos apresentados.

ELLEITHY *et al*. [24] aplicaram o critério *Schwarz Dirichlet-Neumann* para problemas da elasto-estática, estabelecendo as condições para se obter convergência mediante determinação do valor ótimo do parâmetro de relaxação estudado por LIN *et al*. [21], focando a pesquisa no estudo da influência de diferentes fatores na escolha deste parâmetro, tais como a relação entre constantes elásticas dos materiais de cada sub-região, a relação de tamanho entre as sub-regiões, as condições de contorno prescritas e a densidade relativa de discretização das malhas utilizadas.

Uma técnica algo diferente, que também utiliza o critério *Schwarz Dirichlet-Neumann* para serem avaliadas as condições na interface, foi proposta por ELLEITHY & AL-GAHTANI [25] definindo uma interface de tal forma que as sub-regiões se superponham parcialmente, ou seja, estabelecendo uma zona que é comum a ambos os subdomínios, discretizada tanto pelo MEC quanto pelo MEF. O enfoque é adequado principalmente para problemas estáticos, onde a maioria dos esquemas do tipo *Schwarz* falha quando apenas condição do tipo *Neumann* é prescrita nos pontos da sub-região MEF.

SOARES, VON ESTORFF & MANSUR [26] desenvolveram um esquema de acoplamento iterativo onde a sub-região discretizada pelo MEC é modelada utilizando a formulação para elastodinâmica, sendo que a parcela discretizada pelo MEF admite não linearidade física; as condições de compatibilidade e de equilíbrio na interface também foram impostas de acordo com o critério *Schwarz Dirichlet-Neumann*, avaliando-se a convergência das iterações a cada instante de tempo. O esquema apresentado permite

também a escolha de diferentes passos de tempo na discretização do eixo temporal de cada subdomínio.

Outro método de discretização de domínio que pode ser considerado no esquema de acoplamento, de equação resultante similar àquela obtida pelo método dos elementos finitos, é o DMEC. SOARES, CARRER & MANSUR [27] apresentaram um esquema iterativo de acoplamento entre as formulações MEC com solução fundamental estática, DMEC (*domain boundary element method*, *DBEM*), e com solução fundamental dinâmica, TDMEC (*time-domain boundary element method*, *TDBEM*). O método DMEC, fazendo uso solução da fundamental estática (CARRER, MANSUR & VANZUIT [28] e CARRER & MANSUR [29]), gera um sistema de equações onde as incógnitas correspondem à condição essencial do problema (pressão no problema da acústica e deslocamento na elastodinâmica), o fluxo (ou trações de superfície) e a segunda derivada temporal da condição essencial (acelerações) presente em uma integral de domínio, sendo necessário efetuar a discretização de dito domínio mediante células. O sistema resultante, ao ser similar àquele gerado mediante elementos finitos, permite o uso de métodos usuais para marcha no tempo, tais como *Houbolt* (HOUBOLT, [30]), *Newmark* (NEWMARK, [31]), etc.

O método DMEC já tinha sido utilizado com sucesso na resolução do problema dinâmico transiente da elastodinâmica (CARRER & TELLES [32,33]). De forma alternativa, o método da dupla reciprocidade DRMEC (*dual reciprocity boundary element method*, *DRBEM*) também permite a utilização da solução fundamental estática, porém a integral de domínio é substituída por aproximações de contorno. A teoria foi apresentada nas pesquisas desenvolvidas por NARDINI & BREBBIA [34,35], PARTRIDGE & BREBBIA [36] e PARTRIDGE *et al*. [37].

VON ESTORFF & HAGEN [38] apresentaram um esquema de acoplamento iterativo MEC-MEF, aplicado na resolução do problema da elastodinâmica no espaço, de caráter sequencial, inspirado na metodologia *Schwarz Dirichlet-Neumann*, impondo dois critérios para obter-se a convergência, cada um destes sendo testado mediante seu correspondente parâmetro de relaxação, admitindo a escolha de diferentes passos de tempo para cada subdomínio.

WARSZAWSKI, SOARES & MANSUR [39] e WARSZAWSKI [40] aplicaram um esquema de acoplamento iterativo de caráter sequencial no estudo da propagação de ondas em problemas axissimétricos, tanto na interação do tipo acústico-acústica como acústico-elástica, fazendo uso da técnica *theta-up* na estabilização dos resultados da

marcha no tempo para a sub-região MEC. A aplicação da técnica *theta-up* na equação integral do TDMEC, tinha sido apresentada por YU *et al*. [41] para a equação escalar da onda e por ARAÚJO, MANSUR & NISHIKAVA [42] na elastodinâmica, com a finalidade de aproximar o fluxo e as forças de superfície, respectivamente, mediante variação linear no tempo sem apresentar resultados espúrios. A técnica foi aplicada com sucesso no acoplamento direto MEC-MEF (YU *et al*. [43]), desenvolvendo a expressão integral do MEC levada para o instante $t+\Delta t$, ao invés do $t+\theta\,\Delta t$. Algumas outras técnicas adotadas, na estabilização dos resultados obtidos pelo MEC, aplicado a problemas dinâmicos, foram desenvolvidas por YU *et al*. [44] e YU & MANSUR [45], referentes a técnicas do tipo *Galerkin*, e SOARES & MANSUR [46] no que diz respeito com modificar o vetor resultante do processo de convolução incorporando aproximações nas contribuições mais distantes da convolução, acarretando em um menor custo computacional.

Na utilização de esquemas de acoplamento no caso de malhas de discretização não coincidentes ao longo da interface, têm sido desenvolvidos os *métodos de relaxação* ou *de contato*, onde uma aproximação é feita para se obter alguma relação entre variáveis associadas a pontos localizados ao longo da interface, porém pertencentes a diferentes sub-regiões, tanto para as equações de compatibilidade quanto para as equações de equilíbrio. Alguns dos métodos propostos são: o método da alternância de *Schwartz*, o método da penalidade, o método de *Nitsche*, o método de interpolação *meshless*, o método baseado em multiplicadores de *Lagrange*, entre outros.

LIONS [47] apresentou o método da alternância de *Schwartz*, desenvolvido por SCHWARTZ [48], aplicando-o a problemas modelados por equações diferenciais parciais não lineares, requerendo da existência de uma zona de superposição contendo ambas as sub-regiões.

O método da penalidade consiste em definir uma *função objetiva* contendo um *parâmetro de penalidade*, cuja escolha é quase arbitrária. No entanto, a solução do problema original pode resultar sensível a dito parâmetro, sendo que a solução de um conjunto de problemas, sem as restrições outorgadas pelas condições de contorno, convirja até a solução do problema original restringido. BABUŠKA [49] desenvolveu o método da penalidade, a partir da aplicação de princípios variacionais a espaços de funções cujas condições de contorno não necessariamente são satisfeitas. Na sua pesquisa, o método foi aplicado ao problema da equação de *Poisson* com condições de contorno de *Dirichlet* homogêneas. BOILLAT [50] propôs um esquema mediante o

método da penalidade, comparável com o método de *Nitsche*, porém prescindindo dos termos de consistência, obtendo uma convergência quase ótima, assumindo o parâmetro de penalidade sendo proporcional ao tamanho do elemento da malha, ao invés de escolhê-lo proporcional ao quadrado de dito tamanho. O autor obteve um condicionamento melhorado na matriz de rigidez, incluindo o parâmetro de penalidade dentro do processo da integração numérica, sem perda de acurácia.

O método proposto por NITSCHE [51] consiste em uma técnica variacional que impõe as condições de contorno de *Dirichlet*, similarmente ao método dos multiplicadores de *Lagrange*, porém com melhores propriedades de convergência e garantindo unicidade na solução; o funcional proposto pelo autor contém um termo conhecido como *forma bi-linear de Nitsche*, escolhendo-se uma constante tal que a forma bi-linear se torne elíptica. BECKER, HANSBO & STEMBERG [52] aplicaram o método de *Nitsche* na aproximação das condições de contorno de *Dirichlet* para problemas elípticos autoadjuntos, modelados com a equação de *Poisson*, enquanto HANSBO, HANSBO & LARSON [53] estudaram a aplicabilidade do método para equações elípticas, de segunda ordem, no plano e no espaço, considerando conjuntos de malhas não coincidentes e irregulares. Outra pesquisa referente a aplicações do método de *Nitsche* em problemas de decomposição de domínio, com diferentes tipologias de não conformidade de malhas, foi desenvolvida por HANSBO [54].

Em relação aos métodos *meshless*, LI & LIU [55] estudaram a aplicação de três técnicas *mesh-free* que geraram, posteriormente, o desenvolvimento dos métodos *meshless*: hidrodinâmica da partícula suavizada (*smoothed particle hydrodynamics*, *SPH*), métodos de *Galerkin* sem malha (*mesh-free Galerkin methods*) e dinâmica molecular (*molecular dynamics*, *MD*). SCHABACK & WENDLAND [56] pesquisaram acerca da aplicabilidade e importância dos *kernels* na análise numérica, focada na obtenção da aproximação, mediante interpolação, na aplicação dos métodos *meshless* para a resolução de equações diferenciais parciais. CHO *et al*. [57] e CHO & IM [58] desenvolveram o elemento de nó variável, baseado na técnica de mínimos quadrados móveis (*moving least-squares*, *MLS*) para malhas não conformes na interface, técnica inspirada no método do elemento de interface (*interface element method*, *IEM*), permitindo identificar o "elemento mestre" mediante interpolação MLS. A respeito da eleição das funções *mesh-free*, tais funções podem ser de caráter *interpolativo* ou *aproximativo*. Em relação às *funções interpolativas*; WU [59] e WENDLAND [60] desenvolveram o método da função de base radial com suporte compacto (*compactly*

*supported radial basis function method*, *CS-RBF*), WANG & LIU [61] apresentaram o método de interpolação por pontos (sem malha) mediante uso das funções de base radial (*radial point interpolation method*, *RPIM*), GU & LIU [62] propuseram uma nova formulação para o método de interpolação local por ponto (*local point interpolation method*, *LPIM*), baseado no enfoque *meshless* de *Petrov-Galerkin* e aplicado à análise de quarta ordem, para problemas de valor inicial e de valor de contorno, na estática e na dinâmica, enquanto GU [63] apresentou uma formulação *Galerkin* do tipo *meshless* (*element-free Galerkin method*, *EFG*), usando interpolação do tipo *kriging*, com a finalidade de evitar os inconvenientes na obtenção de aproximações de acurácia insatisfatória para as condições essenciais. TIAN & YAGAWA [64] aplicaram um esquema de interpolação *meshless* apresentando um "algoritmo de colagem" (*gluing algorithm*) por meio de funções de prova (*trial functions*) e funções de análise (*test functions*), com o objetivo de serem estabelecidas as condições de continuidade na interface, resultando em um melhor desempenho comparado com o método de multiplicadores de *Lagrange*, devido principalmente à facilidade na sua implementação, bem como na obtenção de sistemas de matrizes definidas positivas, tornando-se mais adequado para problemas a grande escala.

Dentre as numerosas pesquisas incorporando técnicas *meshless* na discretização de sub-regiões em esquemas de acoplamento iterativo; GODINHO & SOARES [65] acoplaram o método das soluções fundamentais com o método de *Kansas*, no esquema de acoplamento iterativo para interação acústico-elástica no domínio da frequência, sem o requerimento de malhas conformes na interface, enquanto GODINHO & SOARES [66] acoplaram iterativamente o método de elementos finitos por colocação e aproximação sem malha do método local de *Petrov-Galerkin* para o mesmo problema. FONTES, E. [67] acoplou problemas de elasticidade mediante o método das soluções fundamentais (com superposição da função de *Green* e usando regularização de *Tikhonov* na resolução do sistema de equações) e o método local de *Petrov-Galerkin*.

Acerca do método dos multiplicadores de *Lagrange*, o próprio LAGRANGE [68] derivou as equações de equilíbrio de sistemas de corpos rígidos interconectados, analisando-os como "*corpos livres*", estabelecendo os vínculos entre ditos corpos por meio de *equações de condição* (de vínculo ou de compatibilidade), em termos de variáveis cinemáticas e expressas em função da diferença entre valores de condição essencial, sendo o resultado multiplicado por um coeficiente a ser posteriormente determinado, cuja expressão resultante é inclusa dentro do trabalho virtual do sistema. O

coeficiente constitui fisicamente a força de contato na interface identificada como *multiplicador de Lagrange*.

BABUŠKA [69] foi o primeiro a aplicar o método dos multiplicadores de *Lagrange* na imposição de condições essenciais a problemas governados por equações diferenciais parciais, envolvendo corpos discretizados espacialmente pelo método dos elementos finitos. Vale frisar que a partir que os diferentes subsistemas são acoplados, as forças de interação são eliminadas devido ao princípio da ação-reação. LANCZOS [70] e MACH [71] focaram suas pesquisas na obtenção de equações linearmente independentes, conformando o sistema de equações por meio da eliminação dos coeficientes indeterminados. No entanto, LIKINS [72] e HAUG [73] estudaram a forma de manter os multiplicadores de *Lagrange* como incógnitas adicionais do sistema, na dinâmica de múltiplos corpos, similarmente a FARHAT & ROUX [74,75] na computação paralela e PARK, REICH & ALVIN [76] em problemas inversos aplicados a estruturas.

PARK, FELIPPA & GUMASTE [77] apresentaram a versão clássica do método, posteriormente propondo uma técnica diferente, apresentada como *método dos multiplicadores de Lagrange na sua forma localizada* (*localized Lagrange multipliers method*, LLM), a qual soluciona vários inconvenientes inerentes à versão clássica, garantindo, por exemplo, a unicidade na geração das equações de vínculo mediante definição de uma pseudoestrutura de interface ou interconexão denominada *linha-esqueleto*, incorporando graus de liberdade adicionais no problema.

PARK, FELIPPA & REBEL [78,79] estabeleceram um critério baseado na estática, sob a condição de carregamento baseada na aplicação de esforço constante através da interface (*interface patch test*), com a finalidade de ser definida a localização dos nós ao longo da *linha-esqueleto*, ideia proposta por TAYLOR & PAPADOPOULOS [80] e CRISFIELD [81], obtendo-se um funcional de energia resultante de uma formulação baseada em quatro campos de variáveis (PARK & FELIPPA [82,83]), incluindo a condição de "*auto equilíbrio*" ao longo desta *linha-esqueleto*. Nesta pesquisa se conclui que, a partir do funcional de energia incluindo dois campos ou conjuntos de variáveis, surge a formulação clássica do método dos multiplicadores de *Lagrange*, sendo que a partir da formulação de três campos de variáveis são geradas formulações do tipo *mortar*, técnica que foi apresentada e descrita por BERNARDI, MADAY & PATERA [84] e BELGACEM [85].

PARK, FELIPPA & OHAYON [86] desenvolveram a formulação do problema dinâmico de interação fluido-estrutura, usando multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada, aproximando as condições de compatibilidade na interface e discretizando espacialmente as sub-regiões pelo método dos elementos finitos, incluindo aplicações para análise transiente e de vibrações. O método proposto resolve primeiramente as forças de contato (multiplicadores de *Lagrange*), para posteriormente serem obtidos os deslocamentos no sólido ou estrutura e a pressão no fluido.

GONZALEZ, PARK & FELIPPA [87] aplicaram a formulação localizada no acoplamento direto MEF-MEC para problemas estáticos na elasticidade, desenvolvendo expressões para o trabalho virtual de estruturas modeladas pelo MEC e pelo MEF, estabelecendo uma relação direta entre as forças de contato na interface (multiplicadores de *Lagrange* localizados) e as forças de superfície da sub-região MEC. As incógnitas resultantes na geração do sistema de equações são os deslocamentos e as reações de apoio na sub-região MEF, bem como os deslocamentos e forças por unidade de superfície na sub-região MEC, os deslocamentos nos pontos da pseudoestrutura de interface (*linha-esqueleto*) e as forças de interconexão ou contato (multiplicadores de *Lagrange* localizados).

GONZALEZ *et al.* [88] aplicaram também a formulação no acoplamento direto MEC-MEF para problemas de contato no espaço, considerando a força de atrito na interface conforme a teoria de *Coulomb* e a força normal de contato determinada usando funções de penalidade; na pesquisa é apresentada a formulação variacional do problema, sendo posteriormente mostradas as equações discretas para condições de interface MEF-MEF e MEF-MEC.

RÜBERG & SCHANZ [89] e RÜBERG [90] aplicaram a formulação localizada dos multiplicadores de *Lagrange* no acoplamento direto MEC-MEF, usando malhas não coincidentes na interface para problemas da elasticidade tanto na estática quanto na dinâmica. Com a finalidade de automatizar o algoritmo computacional, facilitando a resolução em paralelo e considerando múltiplas sub-regiões, independentemente do tipo de condição prescrita na interface, foi implementado um mapeamento *Dirichlet-to-Neumann* por meio do operador *Steklov-Poincaré*, aplicado em conjunto com o método FETI (*finite element tearing and interconnecting*).

A técnica FETI, inicialmente proposta por FARHAT [91] e FARHAT & ROUX [92], constitui um esquema de decomposição de domínio para a solução em paralelo de problemas de elementos finitos considerando múltiplas sub-regiões, onde um problema

de *Neumann* é resolvido paralelamente para cada sub-região, a cada iteração, sem pré-condicionamento (na versão mais simples) ou com pré-condicionamento diagonal. O custo computacional normalmente resulta ser proporcional ao número de sub-regiões, porém o número de condição aumenta de forma polinomial conforme o número de elementos discretos que conformam o subdomínio. Na versão com pré-condicionamento, um problema de *Dirichlet* é resolvido a cada iteração, em cada sub-região, sendo que o número de condição aumenta polilogaritmicamente de acordo com o número de elementos discretos que constituem a sub-região. Usualmente o método gera melhores resultados no acoplamento MEF-MEF, comparado com o acoplamento MEC-MEC, enquanto os resultados do acoplamento MEC-MEF são mais acurados do que o acoplamento MEF-MEF.

Critérios para convergência do método FETI foram propostos por MANDEL & TEZAUR [93], enquanto LANGER & STEINBACH [94] usaram a ideia do FETI aplicando-a em conjunto com o método dos elementos de contorno, gerando o método BETI (*boundary element tearing and interconnecting*). Combinando ambas as metodologias foi estabeleceu o acoplamento BETI/FETI, conforme exposto nas pesquisas de LANGER & STEINBACH [95,96].

Por outro lado, a respeito dos métodos de marcha no tempo, o uso destas técnicas tem evoluído ao longo das últimas décadas. ZIENKIEWICZ [97] propôs uma família de métodos, a partir dos algoritmos de *Newmark* e *Houbolt*, obtendo novas aproximações ainda mais acuradas, derivando expressões recursivas que consideram três ou quatro conjuntos consecutivos de deslocamentos, usando uma expressão adequada de resíduos ponderados. CHUNG & HULBERT [98] apresentaram o método $\alpha$-generalizado, onde o amortecimento numérico é controlado pelo usuário, obtendo-se dissipação nas frequências mais altas e minimizando o amortecimento numérico dos modos mais baixos. HILBER, HUGHES & TAYLOR [99] desenvolveram o método HHT, método implícito de passo único criado com a finalidade de proporcionar amortecimento numérico, mas mantendo o nível de acurácia, onde são utilizadas as mesmas aproximações do método *Newmark*, porém a equação dinâmica discreta é diferente.

FUNG [100] propôs algoritmos de integração incondicionalmente estáveis, levando o método de *Newmark* de segunda ordem para terceira, quarta ou ordem ainda maior, combinando linearmente resultados avaliados em diferentes instantes ao longo do eixo temporal (*sub-stepping*), eliminando o erro de truncamento na série de *Taylor* e

controlando as características de estabilidade. Escolhendo um passo de tempo complexo FUNG [101] conseguiu gerar algoritmos de maior precisão controlando, ou até eliminando, o amortecimento numérico. Posteriormente, FUNG [102] aplicou pós-integração na geração de algoritmos de integração passo a passo, de alta ordem de acurácia, desenvolvendo um algoritmo para sistemas de equações de primeira ordem, escolhendo o parâmetro logarítmico de forma a se obter *A*-estabilidade incondicional para problemas lineares, destacando a correspondência com o método de *Runge-Kutta* e finalmente desenvolvendo o algoritmo para sistemas de equações de segunda ordem. O método permite estabelecer as condições iniciais em forma aproximada ou exata.

ZHONG & WILLIAMS [103] e ZHONG, ZHU & ZHONG [104] propuseram um método denominado "*precise time step integration method*", onde uma equação de primeira ordem é resolvida em função de uma matriz exponencial, truncando sua expressão equivalente em série de *Taylor*, ainda propondo uma eficiente forma recursiva na determinação da matriz exponencial. A técnica pode ser aplicada a equações de segunda ordem, transformando a equação para uma de primeira ordem, porém o método perde precisão para problemas não homogêneos, sendo melhormente aplicado a equações de primeira ordem, pois o processo de transformar a equação de segunda ordem é caro computacionalmente.

Posteriormente, ZHONG, JIANING & ZHONG [105], combinaram a alta precisão do método acima descrito com a eficiência computacional do método das diferenças finitas, reduzindo a análise para um número pequeno de equações no sistema, gerando um ágil método de integração passo a passo aplicado a sub-regiões (*subdomain precise time step integration method*).

A respeito dos métodos de *Green*, FUNG [106] desenvolveu uma família de eficientes métodos de integração passo a passo no tempo. A técnica é baseada na obtenção da resposta transiente em função da resposta estacionária, as condições iniciais e as matrizes contendo a *resposta degrau* e a *resposta impulsiva* do sistema. A equação diferencial de segunda ordem que rege o problema é modificada, sem necessidade de transformá-la para uma equação de primeira ordem ou de ser usada decomposição modal. A respeito da inclusão da parte não homogênea da solução, SOARES & MANSUR [107] estabeleceram novos algoritmos de integração no tempo, obtendo uma aproximação implícita da função de *Green* (*Implicit Green Approach*, *ImGA*), enquanto SOARES [108] aplicou dita técnica a problemas discretizados pelo DMEC.

LOUREIRO [109,110] e DORS [111] obtiveram aproximações explícitas das funções de *Green*, aplicando-as na resolução de problemas mediante elementos finitos, originando o método da aproximação explícita de *Green* (*Explicit Green Aproach*, *ExGA*). Ditas aproximações são calculadas numericamente usando métodos usuais para a marcha no tempo, tais como *Runge-Kutta* de quarta ordem e diferença central. No caso de escolher-se o método da diferença central, é proposto o esquema *ExGAH*, onde a matriz degrau **H** substitui a primeira derivada temporal da matriz impulsiva **G**, com a finalidade de melhorar as propriedades de estabilidade.

MANSUR *et al*. [112] calcularam aproximações explícitas de *Green* considerando sub-regiões de influência (submalhas), conforme as características da frente da onda, aplicando-a na resolução de problemas mediante diferenças finitas, enquanto OYARZUN *et al*. [113] implementaram a técnica de calcular a aproximação explicita sendo aplicada em conjunto com o método de discretização de domínio DMEC.

## 1.3. Objetivo e conteúdo do presente trabalho

Os multiplicadores de *Lagrange* constituem uma das ferramentas frequentemente utilizadas em conjunto com os métodos de discretização de domínio, tais como elementos finitos e elementos de contorno, na resolução de problemas envolvendo acoplamento de sub-regiões cujas malhas de discretização não coincidem ao longo da interface, sendo que as forças de contato, matematicamente representadas pelos multiplicadores de *Lagrange*, incorporam incógnitas adicionais no sistema de equações resultante.

Por outro lado, por meio de multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada, os valores de condição essencial associados a pontos ao longo da pseudoestrutura de interface (*linha-esqueleto*) aumentam ainda mais o número de incógnitas do sistema, porém garantindo unicidade na definição dos termos linearmente independentes nas equações de condição.

O presente trabalho propõe a viabilização da forma localizada dos multiplicadores de *Lagrange* dentro de um esquema de modelagem baseado no acoplamento iterativo de caráter sequencial MEC-MEF (acústico-acústico e acústico-elástico) com malhas não coincidentes na interface, para problemas dinâmicos e

transientes, sendo as condições na interface impostas sistematicamente, resolvendo-se um sistema de equações associado a cada sub-região.

Por causa da sequencialidade do esquema iterativo de acoplamento, tanto as *equações de condição* (de vínculo ou de compatibilidade) como as equações de equilíbrio na interface são levadas à obtenção de expressões modificadas, de forma a se ter transformações explícitas que possibilitem a análise de sub-regiões de forma alternada, bem como a transformação direta de grandezas através da interface.

As equações de condição geradas são linearmente independentes e garantem solução única na conformação dos vínculos *esqueleto-subdomínio*, relacionando valores de condição essencial entre os pontos locais na interface (inerentes a cada sub-região) e os pontos ao longo da *linha-esqueleto*, por meio de matrizes de vínculo associadas a cada sub-região. Assim, o esquema para a obtenção das transformações explícitas anteriormente mencionadas também devia corresponder-se com o mesmo conjunto de vínculos linearmente independentes.

Os nós locais de interface são definidos a partir da discretização de cada subdomínio, conforme o MEC ou o MEF, enquanto os nós da *linha-esqueleto* são localizados, no presente trabalho, por meio de um critério baseado na estática, imposta sobre a *pseudoestrutura* de interface ou *linha-esqueleto*, de forma a se ter momento igual a zero nestes pontos (condição de *auto equilíbrio*), considerando a *linha-esqueleto* como se tratando de uma viga submetida a cargas transversais (pontuais) originadas por uma distribuição de esforço constante ao longo desta linha. O valor destas forças de contato depende do grau de aproximação das funções de interpolação usadas nos elementos de interface de cada subdomínio.

Devido ao caráter sequencial do esquema de acoplamento iterativo, a estrutura das equações de condição, baseada em vínculos do tipo *esqueleto-subdomínio* considerando formulação localizada dos multiplicadores de *Lagrange*, precisa da eliminação das incógnitas de condição essencial (pressão acústica ou deslocamento) associada a pontos ao longo da *linha-esqueleto*. Na presente tese é determinado o espaço nulo das matrizes de vínculo, obtendo-se uma relação direta entre nós locais de ambas as sub-regiões envolvidas, resultando na eliminação da variável que representa a condição essencial nos pontos da *linha-esqueleto*.

A análise MEC utilizada considera uso da solução fundamental dinâmica da equação escalar da onda (TDMEC), envolvendo uma fonte impulsiva e sendo a resposta medida em um ponto campo a partir de um determinado instante de tempo distinto

àquele da aplicação da fonte, utilizando funções de interpolação linear na discretização espacial da sub-região, função de interpolação linear no tempo para a pressão acústica (condição essencial) e funções constante e linear para a discretização temporal do fluxo.

Com a finalidade de evitar resultados espúrios, a respeito do uso de função de interpolação linear no tempo para o fluxo, recorre-se ao método $\theta$-linear (*theta-up method*). O esquema de interpolação linear dos elementos de contorno implica a definição de nós duplos, assunto que requer de especial cuidado, tanto na montagem das matrizes constitutivas como na transferência de variáveis na interface, desde um subdomínio para o outro. Por exemplo, a matriz **H** contendo os coeficientes da pressão acústica precisa ser condensada, somando os coeficientes de cada fila associados aos nós mestre e duplo, descartando em **G** e **H** as equações referidas aos nós duplos, sendo o "nó mestre" aquele cuja incógnita associada será determinada mediante resolução direta do sistema de equações.

A sub-região MEF é modelada por meio de elementos quadrilaterais lineares, utilizando coordenadas intrínsecas na formulação das matrizes de elemento. Os métodos utilizados para a marcha no tempo são *Houbolt*, *Newmark* e técnicas baseadas na aproximacão explícita de *Green* e suas derivadas no tempo; métodos ExGA-*Runge Kutta* e ExGA-diferença central.

O esquema de acoplamento proposto admite a prescrição de diferentes passos de tempo para cada sub-região, portanto precisando-se de sucessivas interpolações e/ou extrapolações fazendo parte do processo iterativo, com a finalidade de permitir a avaliação e comparação entre grandezas pertencentes às diferentes sub-regiões, ao longo da interface, avaliadas no mesmo instante de referência.

Nos capítulos dois e três da presente tese são abordadas sucintamente as formulações de elementos de contorno e elementos finitos que são utilizadas no esquema de acoplamento iterativo, mediante as quais são modeladas as diferentes sub-regiões incluindo equação integral, funções de interpolação, coordenadas intrínsecas, matrizes constitutivas, etc.

No quarto capítulo são apresentados diferentes critérios para serem avaliadas as condições de compatibilidade e de equilíbrio na interface, sendo descritos os diferentes critérios do tipo *Schwarz* presentes na literatura, tanto sequenciais como em paralelo, expondo uma breve resenha acerca da convergência em cada caso; posteriormente é apresentado um esquema alternativo para avaliação sistemática das condições na interface, baseado no método dos gradientes conjugados.

No quinto capítulo é descrito o problema geral de acoplamento com malhas não conformes na interface, sendo apresentado o método dos multiplicadores de *Lagrange* nas suas formas clássica e localizada, aplicação da forma localizada no problema do acoplamento MEC-MEF, obtendo as expressões das diferentes contribuições no trabalho virtual do sistema, descrição do teste de contato na interface (*interface patch test*), o qual estabelece um critério baseado na estática para localizar os pontos ao longo da *linha de esqueleto* que incluirão novas incógnitas no problema, a serem posteriormente eliminadas por conta do espaço nulo das matrizes de vínculo.

No sexto capítulo são descritos alguns detalhes da implementação computacional e resultados, enquanto no sétimo capítulo são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

# 2

# Formulação do método dos elementos de contorno

## 2.1. Formulação TDMEC para a equação escalar da onda em 2D

Seja o domínio Ω, correspondendo a um contínuo homogêneo e isotrópico, cujo contorno é representado por Γ (figura 2.1), denotando por $\Gamma_u$ aquela parte do contorno onde a condição essencial é prescrita e sendo $\Gamma_p$ a parcela com condição natural prescrita, a equação escalar da onda é dada por:

$$\nabla^2 u(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\gamma(x,t) \tag{2.1}$$

na qual $x$ denota um ponto pertencente a Ω, $u$ é o potencial (em problemas da acústica representando a pressão no fluido acústico), $c$ é a velocidade de propagação da onda no meio, $\gamma$ denota uma distribuição de fonte e $t$ representa a variável tempo.

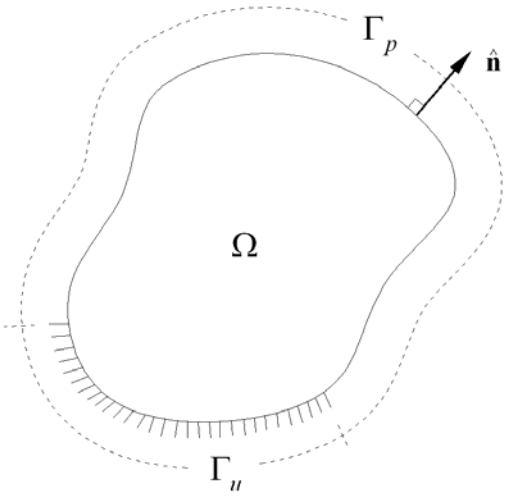


Figura 2.1: Geometria do continuo de domínio Ω e contorno Γ.

A equação integral no tempo e no espaço é obtida a partir da equação (2.1), substituindo $x$ por $X$ (a maiúscula denota um ponto localizado sobre o contorno Γ) e avaliando a expressão em $t = \tau$, levando a mencionada equação para a sua forma inversa, integrando por partes, resulta em [2,4]:

$$u(\xi,t)=\frac{1}{4\pi}\left(\int_0^{t^+}\left\{\int_\Gamma u^*(X,t;\xi,\tau)\,p(X,\tau)\,d\Gamma(X)\right\}d\tau\right.$$
$$-\int_0^{t^+}\left\{\int_\Gamma p^*(X,t;\xi,\tau)\,u(X,\tau)\,d\Gamma(X)\right\}d\tau$$
$$-\frac{1}{c^2}\int_\Omega v_0^*(X,t;\xi)\,u_0(X)\,d\Omega(X)$$
$$+\frac{1}{c^2}\int_\Omega u_0^*(X,t;\xi)\,v_0(X)\,d\Omega(X)$$
$$\left.+\int_0^{t^+}\left\{\int_\Omega u^*(X,t;\xi,\tau)\,\gamma(X,\tau)\,d\Omega(X)\right\}d\tau\right. \qquad (2.2)$$

expressão válida para a resposta em qualquer ponto $\xi$, localizado no interior do domínio Ω, no instante de tempo *t*. Na equação anterior, *p* representa o fluxo, isto é a derivada do potencial em relação à coordenada na direção da normal unitária $\hat{\mathbf{n}}$, na direção normal ao contorno e apontando para o exterior. Os caracteres $\xi$ e *X* denotam o *ponto fonte* e o *ponto campo*, respectivamente, enquanto $u^*$ representa a *solução fundamental* da equação escalar da onda e $p^*$ sua derivada normal ao contorno. Matematicamente, $u^*(X,t;\xi,\tau)$ constitui a resposta medida no *ponto de campo X*, no instante de tempo *t*, sendo a solução da equação (2.1) válida para um domínio infinito, homogêneo, isotrópico e com velocidade *c* de propagação da onda, sob a aplicação de uma fonte impulsiva de amplitude unitária, aplicada no ponto $\xi$ e no instante de tempo $\tau$, ou seja, solução da equação mostrada a seguir:

$$\nabla^2 u^*(X,t;\xi,\tau)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u^*(X,t;\xi,\tau)}{\partial\tau^2}=-\gamma^*=-4\pi\cdot\delta(X-\xi)\delta(t-\tau) \qquad (2.3)$$

Na equação (2.2) $u_0$ representa o valor inicial do potencial *u* e $v_0$ o valor inicial da velocidade *v*, denotando por $t_0$ o instante inicial, ou seja,

$$\begin{aligned} u(X,t_0)&=u_0(X)\\ v(X,t_0)&=\dot{u}(X,t_0)=v_0(X)\end{aligned} \qquad (2.4)$$

As condições de contorno do problema, em notação indicial, são dadas por:

$$\begin{aligned} u &= \overline{u} && \text{em } \Gamma_u \\ p &= u_{,i} n_i = \frac{\partial u}{\partial n} = \overline{p} && \text{em } \Gamma_p \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde $n_i$ representa o cosseno diretor do vetor unitário normal (figura 2.1) na direção da coordenada *i*, sendo que a vírgula no subíndice denota diferenciação e $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$.

A solução de (2.3), considerando o problema bidimensional, é dada por [2-4]:

$$u^*(X,t;\xi,\tau) = \frac{2c}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \mathrm{H}\left[c(t-\tau) - r\right] \tag{2.6}$$

$$p^*(X,t;\xi,\tau) = \frac{\partial u^*(X,t;\xi,\tau)}{\partial n} = \frac{\partial u^*(X,t;\xi,\tau)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} \tag{2.7}$$

Nas expressões acima mostradas, *r* denota a distância entre o *ponto fonte* $\xi$ e o *ponto de campo X*, sendo H a função *Heaviside*.

A equação (2.2) para pontos $\xi$ localizados no contorno $\Gamma$ é dada por [2,4]:

$$\begin{aligned} \overline{c}(\xi)\, u(\xi,t) = \frac{1}{4\pi} \Bigg( & \int_0^{t^+} \left\{ \int_\Gamma u^*(X,t;\xi,\tau)\, p(X,\tau)\, d\Gamma(X) \right\} d\tau \\ & - \int_0^{t^+} \left\{ \int_\Gamma p^*(X,t;\xi,\tau)\, u(X,\tau)\, d\Gamma(X) \right\} d\tau \\ & - \frac{1}{c^2} \int_\Omega v_0^*(X,t;\xi)\, u_0(X)\, d\Omega(X) \\ & + \frac{1}{c^2} \int_\Omega u_0^*(X,t;\xi)\, v_0(X)\, d\Omega(X) \\ & + \int_0^{t^+} \left\{ \int_\Omega u^*(X,t;\xi,\tau)\, \gamma(X,\tau)\, d\Omega(X) \right\} d\tau \Bigg) \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde o termo $\overline{c}(\xi)$ é definido pela geometria do contorno na vizinhança do ponto $\xi$, sendo o seu valor dado pelo quociente entre o ângulo interno $\alpha$ e "$2\pi$" (figura 2.2).

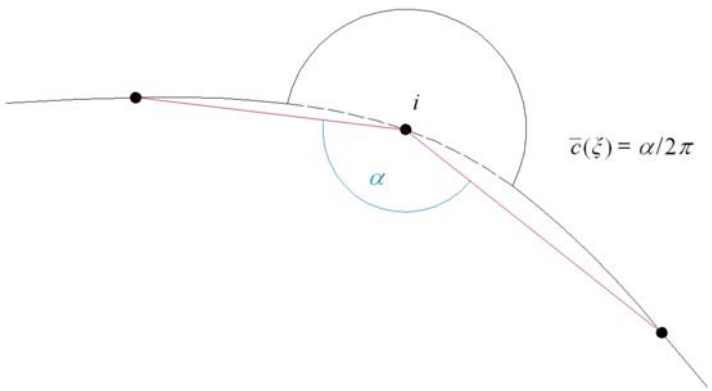


Figura 2.2: Significado geométrico do termo $\overline{c}(\xi)$.

Após vários desenvolvimentos [2], deduzindo a expressão para $p^*$ em (2.7), a partir de (2.6), substituindo (2.6) e (2.7) em (2.8) e desenvolvendo a expressão para o potencial *u* nos pontos do contorno, obtém-se:

$$\begin{aligned}\overline{c}(\xi)u(\xi,t) = \frac{1}{4\pi}\Bigg( & \int_0^{t^+}\left\{\int_\Gamma \left(u^* p\right)\, d\Gamma\right\} d\tau + \int_0^{t^+}\left\{\int_\Gamma \frac{\partial r}{\partial n}\left(B^* u + u^*\frac{v}{c}\right) d\Gamma\right\} d\tau \\ & + \frac{1}{c^2}\int_\Omega \left(u_0^* v_0\right)\, d\Omega + \frac{1}{c}\int_\Omega \left(-B_0^* u_0 + u_0^*\frac{\partial u_0}{\partial r} + u_0^*\frac{u_0}{r}\right) d\Omega \\ & + \int_0^{t^+}\left\{\int_\Omega \left(u^*\gamma\right)\, d\Omega\right\} d\tau\Bigg)\end{aligned} \tag{2.9}$$

expressão onde foi adotada notação simplificada nos integrandos, e

$$B^* = B^*\left(X,t;\xi,\tau\right) = \frac{2c\left[c\left(t-\tau\right)-r\right]}{\sqrt{\left[c^2\left(t-\tau\right)^2 - r^2\right]^3}}\,\mathrm{H}\left[c\left(t-\tau\right)-r\right] \tag{2.10}$$

$$B_0^* = B_0^*\left(X,t;\xi\right) = B^*\left(X,t;\xi,t_0\right) \tag{2.11}$$

$$u_0^* = u^*\left(X,t,\xi,t_0\right) \qquad v_0^* = v^*\left(X,t,\xi,t_0\right) \tag{2.12}$$

## 2.2. Implementação numérica do TDMEC

Após serem obtidas as equações integrais do MEC, equação (2.2) para pontos pertencentes ao interior do domínio Ω e equação (2.9) para pontos no contorno Γ, as expressões para o potencial *u*, a velocidade *v* e o fluxo *p* podem ser aproximadas usando funções de interpolação no espaço e no tempo, em função dos valores nodais nos pontos gerados a partir da discretização do contorno, ou seja:

$$u(X,\tau) = \sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{m=1}^{N} \phi^m(\tau)\ \varphi_j(X)\ u_j^m\right) \tag{2.13}$$

$$v(X,\tau) = \sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{m=1}^{N} \frac{d\phi^m(\tau)}{d\tau}\ \varphi_j(X)\ u_j^m\right) \tag{2.14}$$

$$p(X,\tau) = \sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{m=1}^{N} \theta^m(\tau)\ \zeta_j(X)\ p_j^m\right) \tag{2.15}$$

expressões onde supõe-se o contorno dividido em *J* elementos e o eixo do tempo em *N* instantes. Os valores nodais nos pontos $X_j$, referentes a cada um dos instantes de tempo *m*, ou seja, são denotados por:

$$\begin{aligned} u_j^m &= u\left(X_j, t_m\right) \\ p_j^m &= p\left(X_j, t_m\right) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Substituindo as aproximações (2.13), (2.14) e (2.15) na equação (2.9), resulta para o nó *i* do contorno [2]:

$$\overline{c}\left(\xi_i\right)u_i^n + \frac{1}{4\pi}\sum_{m=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{J} H_{ij}^{nm}\ u_j^m\right) = \frac{1}{4\pi}\left\{\sum_{m=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{J} G_{ij}^{nm}\ p_j^m\right) + F_i^n + S_i^n\right\} \tag{2.17}$$

onde se tem:

$$H_{ij}^{nm} = -\int_{\Gamma} \frac{\partial r(\xi_i, X)}{\partial n(X)}\ \varphi_j(X) \left\{ \int_0^{t_n} \left[ \phi^m(\tau)\ B^*(X, t_n; \xi_i, \tau) + \frac{1}{c} \frac{d\phi^m(\tau)}{d\tau}\ u^*(X, t_n; \xi_i, \tau) \right] d\tau \right\} d\Gamma(X) \tag{2.18}$$

$$G_{ij}^{nm} = \int_{\Gamma} \zeta_j(X) \left\{ \int_0^{t_n} \theta^m(\tau)\ u^*(X, t_n; \xi_i, \tau)\ d\tau \right\} d\Gamma(X) \tag{2.19}$$

$$F_i^n = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} u_0^*(X, t_n; \xi_i)\ v_0(X)\ d\Omega(X) + \frac{1}{c} \int_{\Omega} u_0^*(X, t_n; \xi_i)\ \frac{\partial u_0(X)}{\partial r(\xi_i, X)}\ d\Omega(X) + (t_n - t_0) \int_{\Omega} \frac{1}{r(\xi_i, X)}\ B_0^*(X, t_n; \xi_i)\ u_0(X)\ d\Omega(X) \tag{2.20}$$

$$S_i^n = \int_0^{t_n} \left\{ \int_{\Omega} u^*(X, t_n; \xi_i, \tau)\ \gamma(X, \tau)\ d\Omega(X) \right\} d\tau \tag{2.21}$$

Nas expressões (2.20) e (2.21), $F_i^n$ e $S_i^n$ denotam as contribuições dos *termos* referidos ao nó *i* devidas às condições iniciais e às fontes, respectivamente, no instante de tempo *n*.

Vale frisar que tanto $G_{ij}^{nm}$ como $H_{ij}^{nm}$ são nulos se $c(t_n - t_m + \Delta t_m) < r_{ij}$, denotando por $r_{ij}$ a distância entre os pontos *i* e *j*, e $\Delta t_m = t_{m+1} - t_m$. Assumindo $\Delta t_m = \Delta t$, valor constante, se percebe que, devido à propriedade de causalidade, tem-se:

$$\phi^m(t) = \phi^{m+k}(t + k\Delta t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} H_{ij}^{nm}(t) = H_{ij}^{(n+k)(m+k)} \\ G_{ij}^{nm}(t) = G_{ij}^{(n+k)(m+k)} \end{cases} \tag{2.22}$$

Portanto, esforço computacional pode ser poupado na obtenção de tais coeficientes. Logo, a equação (2.17) pode ser resolvida sequencialmente para cada instante $n = 1, 2, \ldots, N$. Reescrevendo a equação (2.17) para cada nó *i*, em cada instante

de tempo $t_n$, reordenando os termos correspondentes aos instantes de tempo anteriores, chega-se ao sistema de equações mostrado a seguir [3]:

$$\left(\bar{\mathbf{C}}+\mathbf{H}_{nn}\right)\mathbf{u}_n=\mathbf{G}_{nn}\,\mathbf{p}_n+\mathbf{f}_n+\mathbf{s}_n+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\mathbf{G}_{nk}\,\mathbf{p}_{n-k}-\mathbf{H}_{nk}\,\mathbf{u}_{n-k}\right) \tag{2.23}$$

Na equação anterior, os indicadores de instante de tempo são mostrados no subíndice de cada termo, para maior simplicidade na notação.

Ao longo do trabalho são usadas funções de interpolação constante e linear no tempo, bem como funções de interpolação lineares no espaço. As funções $\phi^m(\tau)$ e $\theta^m(\tau)$, quando lineares, são dadas por (figura 2.3):

$$\phi^m(\tau)=\theta^m(\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta t}\left(\tau-t_{m-1}\right) & ,\ t_{m-1}<\tau<t_m\\ \dfrac{1}{\Delta t}\left(t_{m+1}-\tau\right) & ,\ t_m<\tau<t_{m+1}\\ 0 & ,\ \text{em outro caso}\end{cases} \tag{2.24}$$

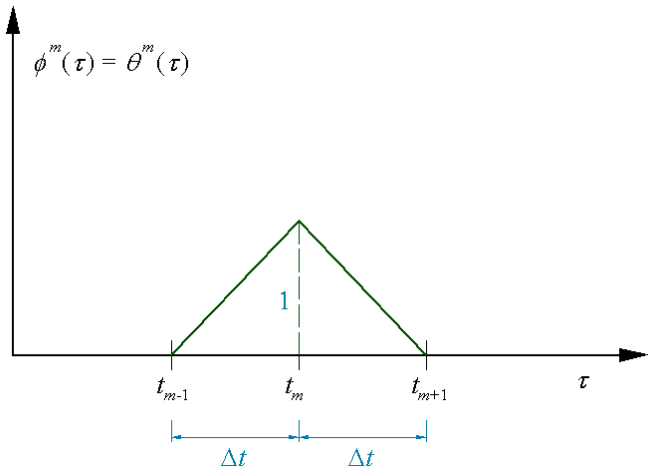


Figura 2.3: Esquema para função de interpolação linear no tempo.

Para $\theta^m(\tau)$ constante, a função é dada por (figura 2.4):

$$\theta^m(\tau) = \begin{cases} 1 & , \ t_{m-1} < \tau < t_m \\ \\ 0 & , \ \text{em outro caso} \end{cases} \tag{2.25}$$

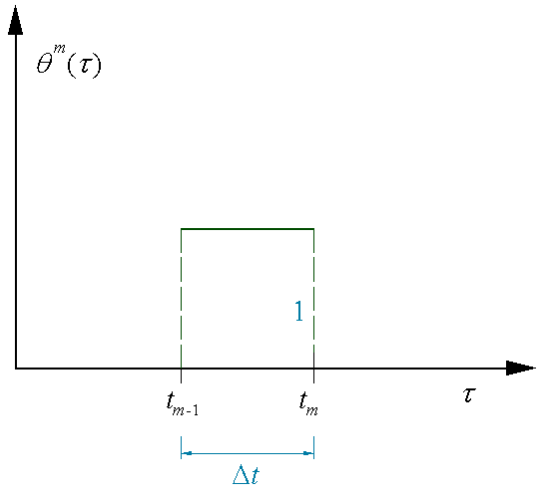


Figura 2.4: Esquema para função de interpolação constante no tempo.

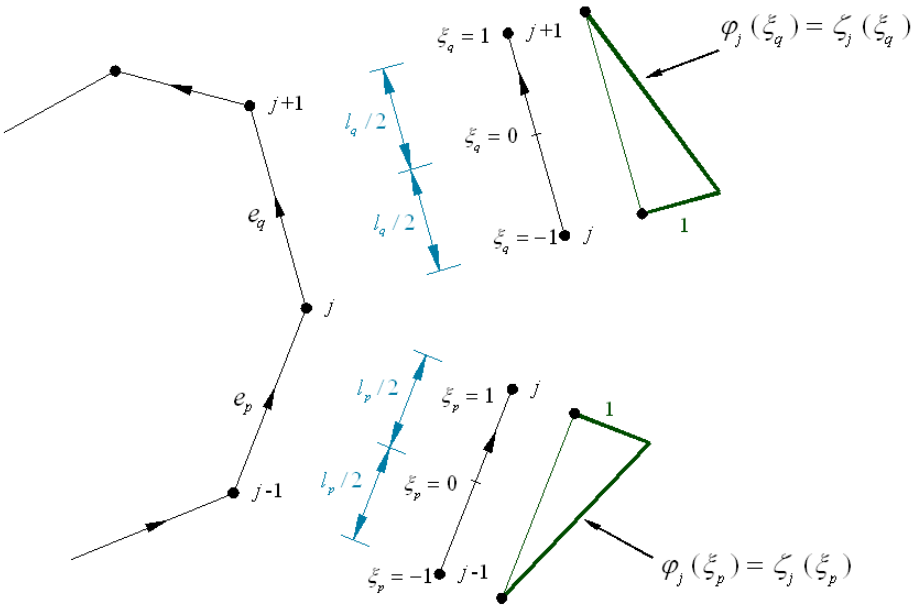


Figura 2.5: Esquema para função de interpolação linear no espaço.

Enquanto isso, a expressão para as funções de interpolação linear no espaço [2] é dada a seguir (figura 2.5):

$$\varphi_j(\xi) = \zeta_j(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\xi_p) & \text{se } X \in e_p \\ \frac{1}{2}(1-\xi_q) & \text{se } X \in e_q \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.26}$$

## 2.3. Método $\theta$ linear na formulação do TDMEC

O método $\theta$ linear [41-43] é utilizado com o objetivo de melhorar as propriedades de estabilidade em determinados problemas modelados espacialmente pelo método dos elementos de contorno, ao ser escolhida função de interpolação linear no tempo para aproximar o fluxo *p*. As incógnitas *u* e *p* são avaliadas no instante de tempo $t_{n+\theta}$, ao invés de $t_{n+1}$, sendo que:

$$t_{n+\theta} = t_n + \theta \cdot \Delta t \tag{2.27}$$

Posteriormente *u* e *p* são interpolados linearmente de forma a se ter:

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{\theta} u_i^{n+\theta} + \frac{\theta - 1}{\theta} u_i^n \tag{2.28}$$

$$p_i^{n+1} = \frac{1}{\theta} p_i^{n+\theta} + \frac{\theta - 1}{\theta} p_i^n \tag{2.29}$$

Finalmente, a equação (2.17) é expressa para o instante $t_{n+\theta}$, obtendo-se:

$$\overline{c}\left(S_i\right)\ u_i^{n+\theta}+\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}H_{ij}^{(n+\theta)(n+\theta)}\ u_j^{(n+\theta)}$$

$$-\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}G_{ij}^{(n+\theta)(n+\theta)}\ p_j^{(n+\theta)}+\frac{1}{4\pi}\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{J}H_{ij}^{(n+\theta)m}\ u_j^m\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left\{\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{J}G_{ij}^{(n+\theta)m}\ p_j^m\right)+F_i^{(n+\theta)}+S_i^{(n+\theta)}\right\} \tag{2.30}$$

onde

$$H_{ij}^{(n+\theta)m}=-\int_{\Gamma}\frac{\partial r\left(S_i,Q\right)}{\partial n\left(Q\right)}\ \varphi_j\left(Q\right)\left\{\int_0^{t_{n+\theta}}\left[\phi^m\left(\tau\right)\ B^*\left(Q,t_{n+\theta};S_i,\tau\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{c}\frac{d\phi^m\left(\tau\right)}{d\tau}\ u^*\left(Q,t_{n+\theta};S_i,\tau\right)\right]d\tau\right\}\ d\Gamma\left(Q\right) \tag{2.31}$$

$$G_{ij}^{(n+\theta)m}=\int_{\Gamma}\zeta_j\left(Q\right)\left\{\int_0^{t_{n+\theta}}\theta^m\left(\tau\right)\ u^*\left(Q,t_{n+\theta};S_i,\tau\right)\ d\tau\right\}\ d\Gamma\left(Q\right) \tag{2.32}$$

$$F_i^{n+\theta}=\frac{1}{c^2}\int_{\Omega}u_0^*\left(q,t_{n+\theta};S_i\right)\ v_0\left(q\right)\ d\Omega\left(q\right)$$

$$+\frac{1}{c}\int_{\Omega}u_0^*\left(q,t_{n+\theta};S_i\right)\ \frac{\partial u_0\left(q\right)}{\partial r\left(S_i,q\right)}\ d\Omega\left(q\right)$$

$$+\left(t_{n+\theta}-t_0\right)\int_{\Omega}\frac{1}{r\left(S_i,q\right)}\ B_0^*\left(q,t_{n+\theta};S_i\right)\ u_0\left(q\right)\ d\Omega\left(q\right) \tag{2.33}$$

$$S_i^{n+\theta}=\int_0^{t_{n+\theta}}\left\{\int_{\Omega}u^*\left(q,t_{n+\theta};S_i,\tau\right)\ \gamma\left(q,\tau\right)\ d\Omega\left(q\right)\right\}\ d\tau \tag{2.34}$$

Assim, $u_i^{n+\theta}$ e $p_i^{n+\theta}$ são obtidos resolvendo os valores de contorno mediante o sistema gerado pela equação (2.30), sendo que $u_i^{n+1}$ e $p_i^{n+1}$ são posteriormente computados por meio de interpolação a partir das relações (2.28) e (2.29).

## 2.4. Formulação DMEC para a equação escalar da onda

De forma alternativa, a equação integral de elementos de contorno pode ser expressa usando a *solução fundamental* estática [3,5], ou seja, fazendo $\ddot{u} = \partial^2 u / \partial t^2 = 0$ em (2.3) e aplicando a função *delta de Dirac* somente no espaço. A partir de resíduos ponderados, obtendo-se a forma inversa de (2.1) integrando somente no espaço, a equação resultante, sem ser considerada a contribuição das fontes por simplicidade, resulta ser [28]:

$$\overline{c}(\xi)u(\xi,t)+\int_{\Gamma} p^*(\xi,X)u(X,t)d\Gamma(X)=\int_{\Gamma} u^*(\xi,X)\,p(X,t)d\Gamma(X) - \frac{1}{c^2}\int_{\Omega} u^*(\xi,X)\ddot{u}(X,t)d\Gamma(X) \qquad (2.35)$$

onde a *solução fundamental*, ao invés das expressões (2.6) e (2.7), é dada por [3,5]

$$u^*(\xi,X)=\frac{1}{2\pi}\ln(1/r) \qquad (2.36)$$

$$p^*(\xi,X)=\frac{\partial u^*(\xi,X)}{\partial n}=\frac{\partial u^*(\xi,X)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n} \qquad (2.37)$$

A qual consiste na resposta estática obtida no *ponto de campo X*, devido a um *carregamento* estático de amplitude unitária, sendo este aplicado no ponto fonte $\xi$.

A equação (2.35), diferentemente da (2.8), é caracterizada pela ausência dos termos envolvendo as condições iniciais e as fontes, destacando a integral do domínio envolvendo a aceleração $\ddot{u}$. Na literatura, diferentes formulações têm sido estudadas para resolver a integral gerada por tais termos; os enfoques mais difundidos são a *dupla reciprocidade* DRMEC [34-37] e aquele que será descrito na próxima seção, a formulação DMEC [28,29], que consiste em computar de forma aproximada a integral do domínio em (2.35), discretizando o domínio mediante *células* (Anexo I).

Considerando um contínuo Ω discretizado em *J* elementos de contorno e *K* pontos conformando as células, tem-se:

$$u(X,t) = \sum_{j=1}^{J} \varphi_j(X)\, u_j(t) \tag{2.38}$$

$$p(X,t) = \sum_{j=1}^{J} \zeta_j(X)\, p_j(t) \tag{2.39}$$

$$\ddot{u}(X,t) = \sum_{k=1}^{K} \psi_j(X)\, \ddot{u}_j(t) \tag{2.40}$$

expressões que, após serem introduzidas na equação (2.35), chega-se a:

$$\overline{c}(\xi)u(t) + \sum_{j=1}^{J} H_{ij}\, u_j(t) = \sum_{j=1}^{J} G_{ij}\, p_j(t) - \frac{1}{c^2} \sum_{k=1}^{K} M_{ik}\, \ddot{u}_k(t) \tag{2.41}$$

onde

$$H_{ij} = \int_{\Gamma} \varphi_j(X)\, p^*(\xi_i, X)\, d\Gamma(X) \tag{2.42}$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma} \zeta_j(X)\, u^*(\xi_i, X)\, d\Gamma(X) \tag{2.43}$$

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \psi_j(X)\, u^*(\xi_i, X)\, d\Omega(X) \tag{2.44}$$

Reordenando os termos relativos ao contorno e o domínio, é obtido sistema mostrado a seguir [28]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{bb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{db} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b^{n+1}(t) \\ \mathbf{u}_d^{n+1}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{bb} \\ \mathbf{G}_{db} \end{bmatrix} \left\{ \mathbf{p}_b^{n+1}(t) \right\} - \frac{1}{c^2} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bd} \\ \mathbf{M}_{db} & \mathbf{M}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_b^{n+1}(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}_d^{n+1}(t) \end{Bmatrix} \tag{2.45}$$

ou, simplesmente:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{H}\,\mathbf{u}(t) = \mathbf{G}\,\mathbf{p}(t) \tag{2.46}$$

Os índices *b* e *d* denotam os termos relativos ao contorno Γ e o domínio Ω, respectivamente. A equação (2.46) pode ser resolvida usando algum dos métodos usuais de marcha no tempo [30,31,98,99,109-111], alguns dos quais são descritos na próxima seção.

## 2.5. Métodos de marcha no tempo

Dentre os inúmeros métodos de marcha no tempo presentes na literatura, que podem ser utilizados na resolução da equação (2.46), se encontram os métodos de *Houbolt*, *Newmark*, diferenças centrais, *Hilbert-α* e os métodos de *Green*. Inicialmente, a equação (2.46) expressa no instante $t_{n+1}$ resulta ser:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}(t) + \mathbf{H}\,\mathbf{u}_{n+1}(t) = \mathbf{G}\,\mathbf{p}_{n+1}(t) \tag{2.47}$$

### *2.5.1 Método de Houbolt*

Adotando as aproximações mostradas a seguir [30], para a velocidade e a aceleração no instante "$n+1$",

$$\dot{u}_{n+1} = \frac{1}{6\,\Delta t}\left\{11\,u_{n+1} - 18\,u_n + 9\,u_{n-1} - 2\,u_{n-2}\right\} \tag{2.48}$$

$$\ddot{u}_{n+1} = \frac{1}{\Delta t^2}\left\{2\,u_{n+1} - 5\,u_n + 4\,u_{n-1} - u_{n-2}\right\} \tag{2.49}$$

após substituí-las na equação (2.45) obtém-se [28]:

$$\begin{bmatrix} \left(c^2\Delta t^2\right)\mathbf{H}_{bb} + 2\mathbf{M}_{bb} & 2\mathbf{M}_{bd} \\ \left(c^2\Delta t^2\right)\mathbf{H}_{db} + 2\mathbf{M}_{db} & \left(c^2\Delta t^2\right)\mathbf{I} + 2\mathbf{M}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b^{n+1} \\ \mathbf{u}_d^{n+1} \end{Bmatrix} = \left(c^2\Delta t^2\right) \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{bb} \\ \mathbf{G}^{db} \end{bmatrix} \left\{\mathbf{p}_b^{n+1}(t)\right\}$$
$$- \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bd} \\ \mathbf{M}_{db} & \mathbf{M}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -5\mathbf{u}_b^n + 4\mathbf{u}_b^{n-1} - \mathbf{u}_b^{n-2} \\ -5\mathbf{u}_d^n + 4\mathbf{u}_d^{n-1} - \mathbf{u}_d^{n-2} \end{Bmatrix} \tag{2.50}$$

Assim que são conhecidos os valores de *u* nos instantes "*n*", "$n-1$" e "$n-2$" é possível determinar *u* no instante "$n+1$" diretamente a partir de (2.50), tanto no

contorno quanto no interior do domínio, e posteriormente $\dot{u}$ e $\ddot{u}$ a partir de (2.48) e (2.49), respectivamente.

Além das condições iniciais, é preciso o fornecimento tanto de $u_{-1}$ quanto de $u_{-2}$, permitindo a obtenção da resposta para o primeiro instante de tempo. Tais valores podem ser computados por meio de aproximações em base a diferenças finitas [28], obtendo-se, por exemplo:

$$\begin{aligned} u_{-1} &= u_0 - \Delta t\, \dot{u}_0 \\ u_{-2} &= 2\, u_{-1} - u_0 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Tais valores, sendo substituídos em (2.50), é determinada a resposta no primeiro instante de tempo.

### *2.5.2 Método de Newmark*

A seguir, são apresentadas as aproximações para a velocidade e a aceleração, conforme a implementação por acelerações [28,31]:

$$\dot{u}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta\, \Delta t}\left[u_{n+1} - u_n\right] + \frac{\left(\beta - \gamma\right)}{\beta}\dot{u}_n - \frac{\left(\gamma - 2\beta\right)}{2\beta}\Delta t\, \ddot{u}_n \tag{2.52}$$

$$\ddot{u}_{n+1} = \frac{1}{\beta\, \Delta t^2}\left[u_{n+1} - u_n\right] - \frac{1}{\beta\, \Delta t}\dot{u}_n - \frac{\left(1 - 2\beta\right)}{2\beta}\ddot{u}_n \tag{2.53}$$

Após serem introduzidas (2.52) e (2.53) em (2.45), chega-se a:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \beta\left(c^2\Delta t^2\right)\mathbf{H}_{bb} + \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bd} \\ \beta\left(c^2\Delta t^2\right)\mathbf{H}_{db} + \mathbf{M}_{db} & \beta\left(c^2\Delta t^2\right)\mathbf{I} + \mathbf{M}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b^{n+1} \\ \mathbf{u}_d^{n+1} \end{Bmatrix} = \beta\left(c^2\Delta t^2\right)\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{bb} \\ \mathbf{G}_{db} \end{bmatrix}\left\{\mathbf{p}_b^{n+1}\left(t\right)\right\} \\ &\qquad + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bd} \\ \mathbf{M}_{db} & \mathbf{M}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b^n + \Delta t\, \dot{\mathbf{u}}_b^n + \dfrac{\left(1 - 2\beta\right)}{2}\left(\Delta t\right)^2\, \ddot{\mathbf{u}}_b^n \\ \mathbf{u}_d^n + \Delta t\, \dot{\mathbf{u}}_d^n + \dfrac{\left(1 - 2\beta\right)}{2}\left(\Delta t\right)^2\, \ddot{\mathbf{u}}_d^n \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{2.54}$$

A prescrição das condições iniciais permite resolver a equação anterior, porém o termo $\ddot{u}_n$ precisa ser eliminado. Por exemplo, aproximando por diferenças finitas [28]:

$$\ddot{u}_0 = \frac{\dot{u}_1 - \dot{u}_0}{\Delta t} \tag{2.55}$$

Resolvendo para $\dot{u}_1$ e substituindo em (2.52), obtém-se:

$$\ddot{u}_0 = \frac{2}{\Delta t^2}\left[u_1 - u_0\right] - \frac{2}{\Delta t}\dot{u}_0 \tag{2.56}$$

Substituindo agora (2.56) em (2.53) chega-se a:

$$\ddot{u}_1 = \frac{2}{\Delta t^2}\left[u_1 - u_0\right] - \frac{2}{\Delta t}\dot{u}_0 \tag{2.57}$$

Levando em consideração a expressão anterior, reordenando termos na equação (2.54) e exprimindo-a para o primeiro instante de tempo, resulta

$$\begin{bmatrix} \left(c^2\Delta t^2\right)\mathbf{H}^{bb} + 2\mathbf{M}^{bb} & 2\mathbf{M}^{bd} \\ \left(c^2\Delta t^2\right)\mathbf{H}^{db} + 2\mathbf{M}^{db} & \left(c^2\Delta t^2\right)\mathbf{I} + 2\mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^b \\ \mathbf{u}_1^d \end{Bmatrix} = \left(c^2\Delta t^2\right) \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{bb} \\ \mathbf{G}^{db} \end{bmatrix} \left\{\mathbf{p}_1^b\left(t\right)\right\}$$
$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{bb} & \mathbf{M}^{bd} \\ \mathbf{M}^{db} & \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2\left(\mathbf{u}_0^b + \Delta t\, \dot{\mathbf{u}}_0^b\right) \\ 2\left(\mathbf{u}_0^d + \Delta t\, \dot{\mathbf{u}}_0^d\right) \end{Bmatrix} \tag{2.58}$$

### *2.5.3 Método da aproximação de Green explícita*

Mediante o método da aproximação de *Green* é usual utilizar passos de tempo pequenos apenas para o cálculo das matrizes contendo aproximações da *função de Green* do problema, escolhendo-se um número $n_s$ de subpassos de tempo, de forma a se obter $\mathbf{G}_r\left(\Delta t\right)$ em função de $\mathbf{G}_r\left(\Delta t/n_s\right)$, onde $n_s$ é inteiro positivo [107-113]. Assim, procura-se achar a solução correspondente ao domínio sob a ação de solicitações de tipo impulsivas, de amplitude unitária, sendo estas últimas aplicadas em cada um dos pontos

onde a solução precisa ser calculada. Posteriormente, a *função de Green*, avaliada no instante $t = \Delta t$, é usada dentro de uma relação recursiva que permite determinar o valor da incógnita, bem como as suas derivadas no tempo, no instante $t + \Delta t$, em função da resposta no instante $t$, já conhecida, por meio de integrais de convolução que são computadas de forma aproximada para maior eficiência computacional.

No presente trabalho tanto a *função de Green* como as suas derivadas no tempo são calculadas numericamente, devido ao qual o método de marcha no tempo é baseado na obtenção das aproximações da *função de Green* na sua forma explícita, ou seja, usando o enfoque *ExGA* (*Explicit Green Approach*). A formulação do método é descrita suscintamente nesta seção e, de forma mais aprofundada, descrita no próximo capítulo.

Sejam $\overline{u}$ os valores prescritos de $u$ em $\Gamma_u$ e $\overline{p}$ os valores prescritos de $p$ ao longo de $\Gamma_p$, logo é possível reordenar as equações e incógnitas no sistema (2.46) de forma a se ter [108,113]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{\mathbf{u}}_1(t) \\ \mathbf{u}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1(t) \\ \overline{\mathbf{p}}_2(t) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{\ddot{\mathbf{u}}}_1(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}_2(t) \end{Bmatrix} \tag{2.59}$$

Após ser eliminado $\mathbf{p}_1$ do primeiro conjunto de equações, substituindo-o no segundo conjunto e reordenando, chega-se a:

$$\tilde{\mathbf{H}}\,\mathbf{u}_2(t) + \tilde{\mathbf{M}}\,\ddot{\mathbf{u}}_2(t) = \tilde{\mathbf{f}}(t) \tag{2.60}$$

onde:

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_{22} - \mathbf{G}_{21}\,\mathbf{G}_{11}^{-1}\,\mathbf{H}_{12} \tag{2.61}$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_{22} - \mathbf{G}_{21}\,\mathbf{G}_{11}^{-1}\,\mathbf{M}_{12} \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}(t) = {} & \left(\mathbf{G}_{22} - \mathbf{G}_{21}\,\mathbf{G}_{11}^{-1}\,\mathbf{G}_{12}\right)\overline{\mathbf{p}}_2(t) \\ & - \left(\mathbf{H}_{21} - \mathbf{G}_{21}\,\mathbf{G}_{11}^{-1}\,\mathbf{H}_{11}\right)\overline{\mathbf{u}}_1(t) \\ & - \left(\mathbf{M}_{21} - \mathbf{G}_{21}\,\mathbf{G}_{11}^{-1}\,\mathbf{M}_{11}\right)\overline{\ddot{\mathbf{u}}}_1(t) \end{aligned} \tag{2.63}$$

Logo após serem obtidas as componentes dos vetores $\mathbf{u}_2$ e $\ddot{\mathbf{u}}_2$, substituindo-os no primeiro conjunto de equações (2.59), obtém-se finalmente:

$$\mathbf{p}_1(t) = \mathbf{G}_{11}^{-1}\left(\mathbf{M}_{11}\,\overline{\ddot{\mathbf{u}}}_1(t) + \mathbf{M}_{12}\,\ddot{\mathbf{u}}_2(t) + \mathbf{H}_{11}\,\overline{\mathbf{u}}_1(t) + \mathbf{H}_{12}\,\mathbf{u}_2(t) - \mathbf{G}_{12}\,\overline{\mathbf{p}}_2(t)\right) \quad (2.64)$$

A relação recursiva para a marcha no tempo, em função das matrizes contendo as aproximações de *Green* e suas derivadas no tempo, é obtida a partir das expressões mostradas a seguir [109-111]:

$$\mathbf{u}_2(t) = \dot{\mathbf{G}}_r(t)\tilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{u}_2(0) + \mathbf{G}_r(t)\tilde{\mathbf{M}}\,\dot{\mathbf{u}}_2(0) + \int_0^t \mathbf{G}_r(t-\tau)\tilde{\mathbf{f}}(t)\,d\tau \quad (2.65)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_2(t) = \ddot{\mathbf{G}}_r(t)\tilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{u}_2(0) + \dot{\mathbf{G}}_r(t)\tilde{\mathbf{M}}\,\dot{\mathbf{u}}_2(0) + \int_0^t \dot{\mathbf{G}}_r(t-\tau)\tilde{\mathbf{f}}(t)\,d\tau \quad (2.66)$$

Entretanto, a *aproximação da função de Green* pode ser determinada por qualquer dos métodos de marcha no tempo existentes na literatura, considerando o conjunto de problemas de valor inicial dados por [107-113]:

$$\tilde{\mathbf{M}}\,\ddot{\mathbf{G}}_r(t) + \tilde{\mathbf{H}}\,\mathbf{G}_r(t) = \mathbf{0} \quad (2.67)$$

com condições iniciais seguintes:

$$\mathbf{G}_r(0) = \mathbf{0} \quad (2.68)$$

$$\dot{\mathbf{G}}_r(0) = \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \quad (2.69)$$

Alguns detalhes adicionais acerca da obtenção das expressões (2.65) e (2.66), bem como da resolução dos problemas de valor inicial (2.67)-(2.69), são expostos na seção 3.3 do próximo capítulo.

# 3

# Formulação do método dos elementos finitos

## 3.1. Formulação para a equação escalar da onda

Seja a equação (2.1); aplicando resíduos ponderados no espaço tem-se:

$$\int_{\Omega}\left(\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma\right) w \, d\Omega = 0 \tag{3.1}$$

A *forma fraca* [6-9], resultante da aplicação de integração por partes na equação anterior e avaliação das condições de contorno, é dada por:

$$\int_{\Omega}\left(\nabla u \cdot \nabla w\right)\, d\Omega + \int_{\Omega}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} w\right)\, d\Omega = \int_{\Gamma_p}\left(\overline{p}\; w\right)\, d\Gamma + \int_{\Omega}\left(\gamma\; w\right)\, d\Omega \tag{3.2}$$

onde *w* denota a função de ponderação. Usando as mesmas funções de interpolação representando a variação espacial de *u* e *w* (método de *Galerkin*) a nível do elemento, é gerado o sistema de equações mostrado a seguir, expresso de forma matricial:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{3.3}$$

onde as matrizes de massa e rigidez, $\mathbf{M}$ e $\mathbf{K}$ respectivamente, são obtidas após efetuar-se a montagem das matrizes correspondentes a nível de elemento:

$$\mathbf{K}^{\{e\}} = \int_{\Omega^{\{e\}}}\left(\nabla \mathbf{N}_f\right)^T\left(\nabla \mathbf{N}_f\right) d\Omega \tag{3.4}$$

$$\mathbf{M}^{\{e\}} = \int_{\Omega^{\{e\}}}\frac{1}{c^2}\left(\mathbf{N}_f\right)^T\, \mathbf{N}_f \, d\Omega \tag{3.5}$$

$$\mathbf{f}^{\{e\}} = \int_{\Gamma_p^{\{e\}}}\left(\mathbf{N}_f\right)^T\, \mathbf{p}\, d\Gamma + \int_{\Omega^{\{e\}}}\left(\mathbf{N}_f\right)^T\, \boldsymbol{\gamma}\, d\Omega \tag{3.6}$$

Nas expressões acima mostradas, $\mathbf{N}_f$ é a matriz de funções de interpolação associadas ao elemento "*e*", enquanto $\mathbf{K}^{\{e\}}$ e $\mathbf{M}^{\{e\}}$ são as matrizes de rigidez e de massa do elemento, respectivamente, e a matriz do operador de gradiente é dada por:

$$\boldsymbol{\nabla} = \left[\partial/\partial x \quad \partial/\partial y\right]^T \tag{3.7}$$

## 3.2. Formulação para a equação da elasto-dinâmica

A representação da segunda lei de *Newton* na análise do contínuo elástico é dada por:

$$\boldsymbol{\nabla}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho\, \ddot{\mathbf{u}} \tag{3.8}$$

onde $\mathbf{b} = \left[b_x \quad b_y\right]^T$ é o vetor contendo as forças de volume, $\boldsymbol{\sigma} = \left[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\right]^T$ o vetor de tensões, $\rho$ a densidade e $\mathbf{u}$ o vetor deslocamento. Na elasticidade plana, o operador gradiente resulta ser:

$$\boldsymbol{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}^T \tag{3.9}$$

As condições de contorno, as relações constitutivas e de compatibilidade são representadas por:

$$\mathbf{T}\,\hat{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{t}} \qquad \text{em } \Gamma_p \text{ (condição de contorno natural)} \tag{3.10}$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \qquad \text{em } \Gamma_u \text{ (condição de contorno essencial)} \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\,\boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.12}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla}^T \mathbf{u} \tag{3.13}$$

Na equação (3.10) $\mathbf{T}$ representa o tensor de tensões e $\hat{\mathbf{n}}$ o vetor unitário normal, sendo que em (3.13) $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}^T$ denota o vetor de deformações e a matriz constitutiva, tanto para estado plano de deformações como para o estado plano de tensões, respectivamente, é dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2/(1-\nu) \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

A formulação variacional, aplicando resíduos ponderados na equação (3.8) e integrando por partes (formulação fraca), resulta:

$$\int_\Omega (\nabla \mathbf{w})^T \, \mathbf{D} \, \nabla \mathbf{u} \; d\Omega + \int_\Omega \rho \, \ddot{\mathbf{u}}^T \mathbf{w} \; d\Omega = \int_\Omega \mathbf{b}^T \mathbf{w} \; d\Omega + \int_{\Gamma_p} \overline{\mathbf{t}}^T \mathbf{w} \; d\Omega \tag{3.16}$$

Definindo o espaço de funções admissíveis para $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ de forma a se ter $\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ em $\Gamma_u$, escolhendo-se as mesmas funções de interpolação, tal que:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \sum_j \mathbf{N}_j \, \mathbf{u}_j \\ \mathbf{w} = \sum_i \mathbf{N}_i \, \mathbf{w}_i \end{cases} \quad , \qquad \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

sob uma escolha adequada dos $\mathbf{w}_i$ chega-se à equação seguinte:

$$\sum_j \left( \mathbf{m}_{ij} \ddot{\mathbf{u}}_j + \mathbf{k}_{ij} \mathbf{u}_j \right) = \mathbf{f}_i \tag{3.18}$$

onde

$$\mathbf{m}_{ij} = \int_{\Omega} \rho \left( \mathbf{N}_i \right)^T \mathbf{N}_j \, d\Omega \tag{3.19}$$

$$\mathbf{k}_{ij} = \int_{\Omega} \left( \mathbf{B}_i \right)^T \mathbf{D} \, \mathbf{B}_j \, d\Omega \tag{3.20}$$

$$\mathbf{f}_i = \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \mathbf{N}_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_p} \overline{\mathbf{t}}^T \mathbf{N}_i \, d\Omega \tag{3.21}$$

$$\mathbf{B}_i = \nabla \mathbf{N}_i \, . \tag{3.22}$$

## 3.3. Elementos transformados e integração numérica

No presente trabalho foi implementado o elemento quadrilateral bilinear, utilizando transformação para coordenada intrínseca isoparamétrica. Assumindo uma aproximação referida ao elemento "*e*" na variável *u*, tem-se:

$$u\left(x, y\right) = \mathbf{N}_f \, \mathbf{u}^{\{e\}} \tag{3.23}$$

onde o vetor $\mathbf{u}^{\{e\}}$ contém os valores nodais de *u* referidos ao elemento "*e*". No caso da elasticidade plana é importante frisar que o lado esquerdo de (3.23) se torna $\mathbf{u}\left(x, y\right) = \begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix}^T$. Desta forma, mudando o esquema de notação usado na seção anterior, a matriz de funções de interpolação para a equação escalar da onda e para elasticidade, respectivamente, é representada por:

$$\mathbf{N}_f = \begin{bmatrix} N_f^{(1)} & N_f^{(2)} & N_f^{(3)} & N_f^{(4)} \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

$$\mathbf{N}_f = \begin{bmatrix} N_f^{(1)} & 0 & N_f^{(2)} & 0 & N_f^{(3)} & 0 & N_f^{(4)} & 0 \\ 0 & N_f^{(1)} & 0 & N_f^{(2)} & 0 & N_f^{(3)} & 0 & N_f^{(4)} \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

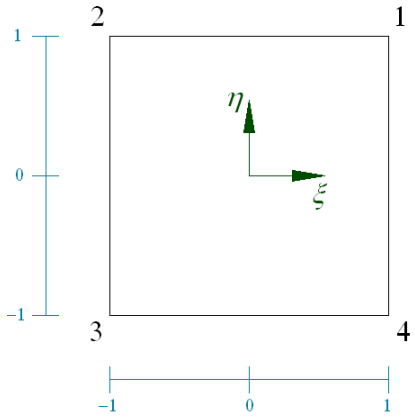


Figura 3.1: Elemento quadrilateral isoparamétrico.

As funções de interpolação $N_f^{(i)}$ (onde $i=1,...,4$) expressas em função das coordenadas naturais $(\xi,\eta)$, usando-se o elemento quadrilateral mostrado na figura 3.1, são dadas por [6-9]:

$$\begin{aligned} N_f^{(1)} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_f^{(2)} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\ N_f^{(3)} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_f^{(4)} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \end{aligned} \tag{3.26}$$

Cabe frisar que a equação (3.4) requer a obtenção das derivadas das expressões (3.26) em relação às coordenadas absolutas *x* e *y*. No entanto, pode ser usada a regra da cadeia, matricialmente, conforme se segue:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_f^{(i)}}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_f^{(i)}}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_f^{(i)}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_f^{(i)}}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{3.27}$$

onde **J** é conhecida como a *matriz Jacobiana* da transformação.

Por meio da inversão da matriz *Jacobiana* podem ser determinadas as derivadas de $N_f^{(i)}$ em função das coordenadas absolutas *x* e *y*, sendo posteriormente substituídas nas expressões (3.4)-(3.6) para o cálculo das matrizes de elemento. Usualmente as integrais envolvendo os coeficientes destas matrizes são computadas de forma aproximada mediante integração numérica, sendo a metodologia adotada no presente trabalho, baseada no esquema de integração *gaussiana* unidimensional. O determinante da matriz *Jacobiana* também precisa ser considerado na integração dos coeficientes de influencia das matrizes de elemento, pois o elemento diferencial de área se torna:

$$dx\,dy = \det\left(\mathbf{J}\right) d\xi\, d\eta \tag{3.28}$$

## 3.4. Método da aproximação de *Green* explícita

Na presente seção se apresentam alguns detalhes adicionais acerca da formulação, além do que foi apresentado no capítulo anterior.

### *3.4.1 Formulação*

Aplicando a transformada de *Laplace* na equação discreta de elementos finitos (3.3), resolvendo para **u**, no domínio transformado $\left(\mathscr{L}\left[\mathbf{u}\right]\right)$, chega-se a [109-111]

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\mathbf{u}(t)\right] = \mathcal{H}(s)\Big(s\,\mathbf{M}\,\mathbf{u}(0) + \mathbf{M}\,\dot{\mathbf{u}}(0)\Big)\\ +\mathcal{H}(s)\,\mathscr{L}\left[\mathbf{f}(t)\right]\end{aligned} \tag{3.29}$$

onde $\mathcal{H}(s)$ representa a matriz da *função de transferência*, dada por:

$$\mathcal{H}(s) = \left(s^2\,\mathbf{M} + \mathbf{K}\right)^{-1} \tag{3.30}$$

Aplicando a inversa da transformada de *Laplace* em (3.29), levando em consideração (3.30), além do teorema da convolução, é obtida uma expressão para a incógnita **u** e sua primeira derivada no tempo:

$$\mathbf{u}(t) = \dot{\mathbf{G}}_r\,\mathbf{M}\,\mathbf{u}(0) + \mathbf{G}_r\,\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{u}}(0) + \int_0^t \mathbf{G}_r(t-\tau)\,\mathbf{f}(\tau)\,d\tau \tag{3.31}$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \ddot{\mathbf{G}}_r\,\mathbf{M}\,\mathbf{u}(0) + \dot{\mathbf{G}}_r\,\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{u}}(0) + \int_0^t \dot{\mathbf{G}}_r(t-\tau)\,\mathbf{f}(\tau)\,d\tau \tag{3.32}$$

Nas equações acima mostradas, $\mathbf{G}_r$ denota a *função de Green* ou *resposta impulsiva* do sistema, dada por:

$$\mathbf{G}_r(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\mathscr{H}(s)\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\left(s^2\,\mathbf{M} + \mathbf{K}\right)^{-1}\right] \tag{3.33}$$

É possível demonstrar [109-111] que $\mathbf{G_r}(t)$ é solução do conjunto de problemas de valor inicial mostrado a seguir:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{G}}_r(t) + \mathbf{K}\,\mathbf{G}_r(t) = \mathbf{0} \tag{3.34}$$

onde cada coluna de $\mathbf{G}_r$ constitui um vetor de incógnitas. O conjunto de condições iniciais é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_r(0) &= \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{G}}_r(0) &= \mathbf{M}^{-1} \end{aligned} \tag{3.35}$$

Assumindo $t = \Delta t$ em (3.31) e (3.32), é possível definir uma relação recursiva estabelecendo o esquema passo a passo da marcha no tempo, obtendo-se:

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{G}}_r\left(\Delta t\right)\mathbf{M}\,\mathbf{u}_t + \mathbf{G}_r\left(\Delta t\right)\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{u}}_t + \int_0^{\Delta t} \mathbf{G}_r\left(\Delta t-\tau\right)\mathbf{f}\left(t+\tau\right)d\tau \tag{3.36}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \ddot{\mathbf{G}}_r\left(\Delta t\right)\mathbf{M}\,\mathbf{u}_t + \dot{\mathbf{G}}_r\left(\Delta t\right)\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{u}}_t + \int_0^{\Delta t} \dot{\mathbf{G}}_r\left(\Delta t-\tau\right)\mathbf{f}\left(t+\tau\right)d\tau \tag{3.37}$$

As integrais de convolução presentes em (3.36) e (3.37) podem ser aproximadas fazendo [109-111], por exemplo, o seguinte:

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{G}_r\left(\Delta t-\tau\right)\mathbf{f}\left(t+\tau\right)d\tau \approx \sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{\psi}_1\left(j\right)\mathbf{f}_t + \sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{\psi}_2\left(j\right)\mathbf{f}_{t+\Delta t} \tag{3.38}$$

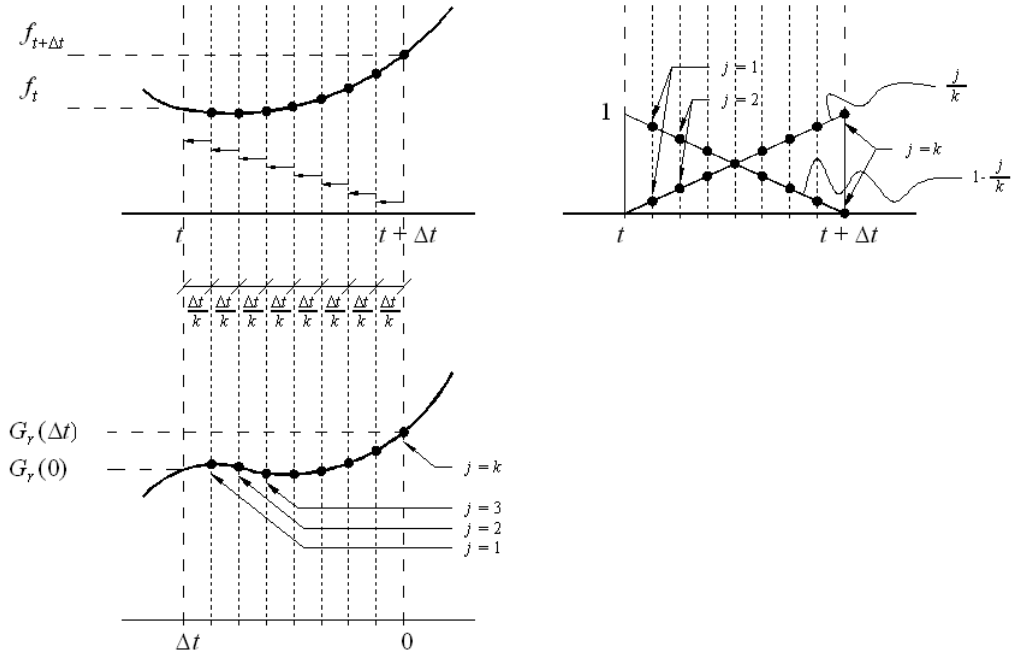


Figura 3.2: Esquema geométrico referente à aproximação da integral de convolução (3.38).

onde (figura 3.2):

$$\boldsymbol{\psi}_1(j) = \frac{\Delta t}{k}\mathbf{G}_r\left(\Delta t - j\frac{\Delta t}{k}\right)\left(1-\frac{j}{k}\right)$$
$$\boldsymbol{\psi}_2(j) = \frac{\Delta t}{k}\mathbf{G}_r\left(\Delta t - j\frac{\Delta t}{k}\right)\frac{j}{k} \tag{3.39}$$

Nas equações (3.39), $\boldsymbol{\psi}_1$ e $\boldsymbol{\psi}_2$ são supostas constantes dentro de cada subpasso de tempo $\Delta t/k$.

### *3.4.2 Método ExGA Runge-Kutta*

Por meio do método *Runge-Kutta* de quarta ordem, é possível efetuar o cálculo das matrizes contendo a *função de Green* de forma recursiva [109-111], obtendo-se $\mathbf{G}_r$ no instante "$\Delta t$" conforme o esquema mostrado a seguir, sem considerar amortecimento:

$$\mathbf{G}_r^{\,t+\Delta t/n_s} = \mathbf{G}_r^{\,t} + \frac{\Delta t}{n_s}\dot{\mathbf{G}}_r^{\,t} + \frac{1}{6}\frac{\Delta t^2}{n_s^{\,2}}\left(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 + \mathbf{W}_3\right) \tag{3.40}$$

$$\dot{\mathbf{G}}_r^{\,t+\Delta t/n_s} = \dot{\mathbf{G}}_r^{\,t} + \frac{1}{6}\frac{\Delta t}{n_s}\left(\mathbf{W}_1 + 2\mathbf{W}_2 + 2\mathbf{W}_3 + \mathbf{W}_4\right) \tag{3.41}$$

onde $n_s$ denota o número de subpassos de tempo, e:

$$\mathbf{W}_1 = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{H}\,\mathbf{G}_r^{\,t} \tag{3.42}$$

$$\mathbf{W}_2 = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{H}\left(\mathbf{G}_r^{\,t} + \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{n_s}\dot{\mathbf{G}}_r^{\,t}\right) \tag{3.43}$$

$$\mathbf{W}_3 = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{H}\left(\mathbf{G}_r^{\,t} + \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{n_s}\dot{\mathbf{G}}_r^{\,t} + \frac{1}{4}\frac{\Delta t^2}{n_s^{\,2}}\mathbf{W}_1\right) \tag{3.44}$$

$$\mathbf{W}_4 = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{H}\left(\mathbf{G}_r^{\,t} + \frac{\Delta t}{n_s}\dot{\mathbf{G}}_r^{\,t} + \frac{1}{2}\frac{\Delta t^2}{n_s^{\,2}}\mathbf{W}_2\right) \tag{3.45}$$

A segunda derivada $\ddot{\mathbf{G}}_r$ pode ser obtida substituindo a solução $\mathbf{G}_r$ dentro da equação de equilíbrio dinâmico considerando $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, ou seja, na equação homogênea (3.34), resultando:

$$\ddot{\mathbf{G}}_r^{\,t+\Delta t/n_s} = -\mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{H}\,\mathbf{G}_r^{\,t+\Delta t/n_s} \tag{3.46}$$

As relações (3.40)-(3.46) podem ser usadas a partir do instante $t = 0$, até se obter $\mathbf{G}_r(\Delta t)$, $\dot{\mathbf{G}}_r(\Delta t)$ e $\ddot{\mathbf{G}}_r(\Delta t)$ que, posteriormente, deverão ser substituídas em (3.36) e (3.37) para iniciar-se a marcha no tempo.

### *3.4.3 Método ExGAH diferença central*

Na determinação da matriz contendo a função de *Green*, bem como as suas derivadas no tempo, pelo método da diferença central, o método resulta ser incondicionalmente instável [109], sendo necessário efetuar uma modificação dentro das equações (3.36) e (3.37), tornando o método condicionalmente estável. A metodologia consiste em calcular outra matriz, chamada de *resposta degrau* $\mathbf{H}_r$, contendo as funções de *Green* do seguinte conjunto de problemas de condição inicial:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{H}}_r(t) + \mathbf{K}\,\mathbf{H}_r(t) = \mathbf{0} \tag{3.47}$$

dessa vez com as condições iniciais conforme se segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_r(0) &= \mathbf{M}^{-1} \\ \dot{\mathbf{H}}_r(0) &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.48}$$

Assim, o algoritmo *ExGAH* envolvendo o método da diferença central, sem amortecimento, é utilizado para se achar tanto $\mathbf{G}_r$ e $\dot{\mathbf{G}}_r$ como $\mathbf{H}_r$ e $\dot{\mathbf{H}}_r$. Por exemplo, aplicando-o na determinação de $\mathbf{G}_r$ e suas derivadas no tempo, tem-se:

$$\left(\frac{n_s^{\,2}}{\Delta t^2}\right)\mathbf{M}\,\mathbf{G}_r^{\,t+\frac{\Delta t}{n_s}} = \left(\frac{2n_s^{\,2}}{\Delta t^2}\mathbf{M}-\mathbf{K}\right)\mathbf{G}_r^{\,t} - \left(\frac{n_s^{\,2}}{\Delta t^2}\right)\mathbf{M}\,\mathbf{G}_r^{\,t-\frac{\Delta t}{n_s}} \tag{3.49}$$

onde, para o primeiro instante de tempo, tem-se:

$$\mathbf{G}_r^{\,-\Delta t/n_s} = \mathbf{G}_{\mathbf{r}}^{\,0} - \frac{\Delta t}{n_s}\dot{\mathbf{G}}_r^{\,0} + \frac{\Delta t^2}{2\,n_s^{\,2}}\ddot{\mathbf{G}}_r^{\,0} \tag{3.50}$$

$$\ddot{\mathbf{G}}_r^{\,0} = -\mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{K}\,\mathbf{G}_r^{\,0} \tag{3.51}$$

Determinando-se $\mathbf{G}_r\left(\Delta t\right)$, as derivadas são computadas de acordo com:

$$\dot{\mathbf{G}}_r^{\,\Delta t} = \frac{n_s}{2\,\Delta t}\left\{\mathbf{G}_r^{\,(1+1/n_s)\Delta t} - \mathbf{G}_r^{\,(1-1/n_s)\Delta t}\right\} \tag{3.52}$$

$$\ddot{\mathbf{G}}_r^{\,\Delta t} = \frac{n_s^{\,2}}{\Delta t^2}\left\{\mathbf{G}_r^{\,(1+1/n_s)\Delta t} - 2\,\mathbf{G}_r^{\,\Delta t} + \mathbf{G}_r^{\,(1-1/n_s)\Delta t}\right\} \tag{3.53}$$

Finalmente, aplicando as relações acima mostradas para o cálculo do $\mathbf{G}_r$ e $\dot{\mathbf{G}}_r$, com condições iniciais (3.35), e também para $\mathbf{H}_r$ e $\dot{\mathbf{H}}_r$, com condições iniciais (3.48), as relações recursivas para a marcha no tempo, resultam ser:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{t+\Delta t} &= \mathbf{H}_r\left(\Delta t\right)\mathbf{M}\,\mathbf{u}_t + \mathbf{G}_r\left(\Delta t\right)\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{u}}_t \\ &\quad + \int_0^{\Delta t}\mathbf{G}_r\left(\Delta t-\tau\right)\mathbf{f}\left(t+\tau\right)d\tau\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{H}}_r\left(\Delta t\right)\mathbf{M}\,\mathbf{u}_t + \dot{\mathbf{G}}_r\left(\Delta t\right)\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{u}}_t \\ &\quad + \int_0^{\Delta t}\dot{\mathbf{G}}_r\left(\Delta t-\tau\right)\mathbf{f}\left(t+\tau\right)d\tau\end{aligned} \tag{3.55}$$

# 4

# Técnicas de acoplamento iterativo MEC-MEF

## 4.1. Introdução

Os esquemas de acoplamento iterativo, frequentemente utilizados na análise numérica em problemas da mecânica e da engenharia, permitem escolher o método de discretização de domínio mais conveniente na análise de cada sub-região, desde o ponto de vista da eficiência computacional, permitindo um melhor aproveitamento das vantagens que cada método possui individualmente, de acordo com as características de cada subdomínio.

Tais esquemas podem ser classificados em *sequenciais* ou *em paralelo*, de acordo com a forma em que são avaliadas as condições na interface, sendo os enfoques ou critérios *Schwarz* as técnicas mais recorrentes, consistindo na avaliação ponto a ponto destas condições. E usual incorporar expressões para aceleração de convergência, por meio da introdução de um parâmetro de relaxação, gerando uma combinação linear entre o valor de condição obtido e aquele prescrito inicialmente.

Nos esquemas *em paralelo*, é fornecido o valor de alguma condição na interface, em cada subdomínio, sendo que estas sub-regiões são analisadas de forma independente (até de forma simultânea). O novo valor obtido para a condição de interface é comparado com aquele inicialmente prescrito (ou obtido a partir da iteração anterior). O processo se repete até se obter convergência. Os esquemas *em paralelo* podem resultar mais apropriados quando o acoplamento envolve múltiplas (mais de duas) sub-regiões, até possibilitando o uso de *clusters* para as diferentes análises.

Pelo contrário, nos esquemas *sequenciais*, a condição inicialmente prescrita na interface é válida apenas para a análise de uma sub-região, sendo que os subdomínios são analisados de forma alternada e o valor obtido da incógnita na interface é utilizado como condição prescrita para análise da outra sub-região.

O esquema de acoplamento MEC-MEF proposto é do tipo *iterativo sequencial*, baseado no uso de critérios *Schwarz* para a imposição das condições na interface. No caso do acoplamento acústico-acústico, é prescrito inicialmente um valor para a condição essencial na interface (potencial ou pressão acústica, na equação escalar da onda), válido para a análise na sub-região $\Omega^{MEC}$. Os valores do fluxo (ou *forças de superfície*) são obtidos por meio desta análise, sendo posteriormente transformados em *forças nodais* equivalentes. Estas forças são usadas como condição prescrita na interface para a análise da sub-região $\Omega^{MEF}$, sendo determinados novos valores para a condição

essencial, os quais são comparados com os inicialmente prescritos. Sendo que a condição essencial é fornecida para a análise da sub-região $\Omega^{MEC}$ enquanto a condição natural é prescrita na análise da sub-região $\Omega^{MEF}$, o critério usado para serem avaliadas as condições na interface é chamado de *Schwarz Dirichlet-Neumann.*

Nos esquemas de acoplamento iterativo é usual utilizar diferente passo de tempo na análise de cada sub-região, devido ao qual são necessárias interpolações e/ou extrapolações ao longo do eixo temporal, com a finalidade de serem comparadas grandezas na interface associadas a diferentes sub-regiões, porém avaliadas no mesmo instante de referência.

No presente capítulo são apresentados os esquemas de acoplamento iterativo adotando diferentes critérios *Schwarz*, bem como as condições para garantir a convergência do processo iterativo, incluindo um esquema sequencial baseado na definição de uma região discretizada tanto mediante o MEC como mediante o MEF (*overlapping*). Este método possui uma importante vantagem, comparado com as restantes técnicas tipo *Schwarz*, principalmente no que diz relação aos problemas estáticos, permitindo a prescrição de apenas condição natural na sub-região $\Omega^{MEF}$.

Finalmente, um enfoque alternativo aos formulados por *Schwarz* é apresentado, baseada no método dos gradientes conjugados [19], obtendo-se uma convergência ainda mais rápida, conforme destaca o autor.

## 4.2. Descrição das técnicas de acoplamento iterativo MEC-MEF

Na presente seção são descritos os diferentes critérios *Schwarz* aplicáveis no acoplamento iterativo acústico-acústico. Os principais aspectos a serem levados em consideração para a implementação do acoplamento acústico-elástico são apresentados no anexo B. No final do capítulo é descrita a técnica de imposição de condições na interface mediante o método do gradiente conjugado.

Com a finalidade de facilitar a compreensão dos diferentes critérios *Schwarz*, aplicáveis nos esquemas de acoplamento iterativo MEC-MEF, o sistema de equações resultante para a análise de cada sub-região é apresentado a seguir. Sejam os índices *F*, *C* e *I* denotando as variáveis referidas à região discretizada por elementos finitos $\Omega^{MEF}$, à região discretizada por meio de elementos de contorno $\Omega^{MEC}$ e à interface $\Gamma^{int}$, respectivamente (figuras 4.1 e 4.2).

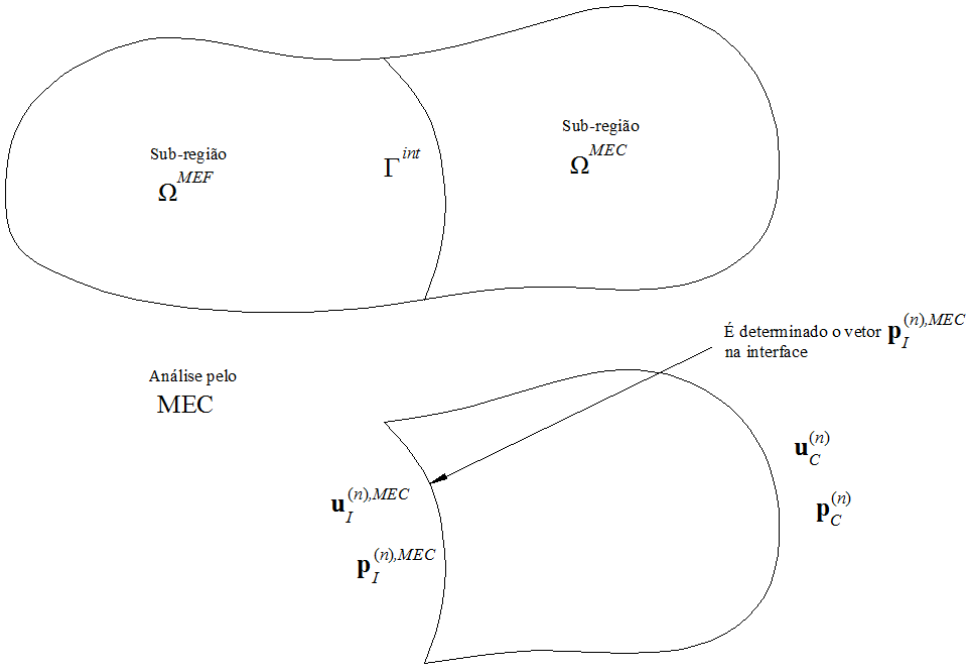


Figura 4.1: Análise da sub-região MEC, acoplamento iterativo sem superposição de sub-regiões.

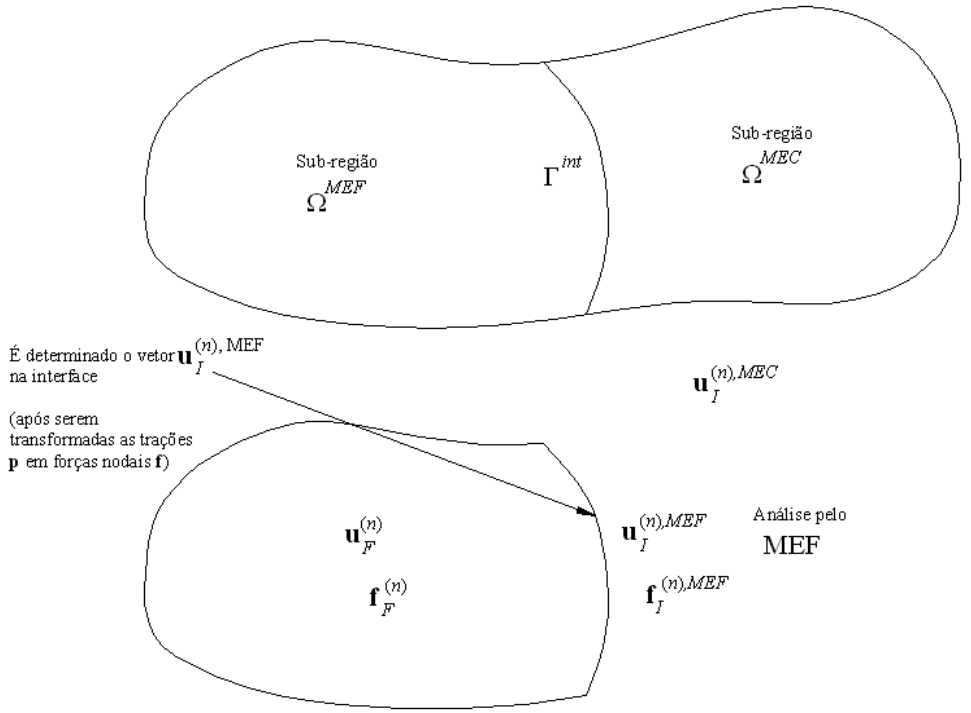


Figura 4.2: Análise da sub-região MEF, acoplamento iterativo sem superposição de sub-regiões.

O sistema de equações válido para o instante de tempo "*n*", obtido usando solução fundamental dinâmica de acordo com o TDMEC, é dado pela equação matricial mostrada a seguir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{CC}^{(n)} & \mathbf{H}_{CI}^{(n)} \\ \mathbf{H}_{IC}^{(n)} & \mathbf{H}_{II}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{C}^{(n)} \\ \mathbf{u}_{I}^{(n),MEC} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{CC}^{(n)} & \mathbf{G}_{CI}^{(n)} \\ \mathbf{G}_{IC}^{(n)} & \mathbf{G}_{II}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_{C}^{(n)} \\ \mathbf{p}_{I}^{(n),MEC} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{C}^{(n)} \\ \mathbf{q}_{I}^{(n)} \end{Bmatrix} \tag{4.1}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{C}^{(n)} &= \sum_{i=1}^{n-1} \left( \left[ \mathbf{G}_{CC}^{(n-i)} \ \mathbf{p}_{C}^{(i)} + \mathbf{G}_{CI}^{(n-i)} \ \mathbf{p}_{I}^{(i),MEC} \right] - \left[ \mathbf{H}_{CC}^{(n-i)} \ \mathbf{u}_{C}^{(i)} + \mathbf{H}_{CI}^{(n-i)} \ \mathbf{u}_{I}^{(i),MEC} \right] \right) \\ \mathbf{q}_{I}^{(n)} &= \sum_{i=1}^{n-1} \left( \left[ \mathbf{G}_{IC}^{(n-i)} \ \mathbf{p}_{C}^{(i)} + \mathbf{G}_{II}^{(n-i)} \ \mathbf{p}_{I}^{(i),MEC} \right] - \left[ \mathbf{H}_{IC}^{(n-i)} \ \mathbf{u}_{C}^{(i)} + \mathbf{H}_{II}^{(n-i)} \ \mathbf{u}_{I}^{(i),MEC} \right] \right) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Na equação (4.1), $\mathbf{q}_{C}^{(n)}$ e $\mathbf{q}_{I}^{(n)}$ representam as contribuições do contorno e da interface, respectivamente, correspondentes à convolução dos instantes de tempo anteriores a *n*, enquanto $\mathbf{u}_{I}^{(i),MEC}$ e $\mathbf{p}_{I}^{(i),MEC}$ denotam os vetores contendo valores de pressão acústica (condição essencial) e o fluxo (condição natural), respectivamente, na interface $\Gamma^{int}$ considerando o instante de tempo *i* (de acordo com a figura 4.1). $\mathbf{u}_{C}^{(i),MEC}$ e $\mathbf{p}_{C}^{(i),MEC}$ denotam os vetores contendo valores de pressão acústica e fluxo no instante *i*, respectivamente, sobre o contorno da sub-região $\Omega^{MEC}$, com exceção da interface $\Gamma^{int}$.

Uma vez determinado $\mathbf{p}_{I}^{(n),MEC}$ na interface, pela equação (4.1), havendo prescrito inicialmente $\mathbf{u}_{I}^{(n),MEC} = \overline{\mathbf{u}}_{I}$, a pressão acústica nos pontos internos pode ser obtida aplicando a equação seguinte, tendo previamente resolvido e reordenado os termos relativos ao contorno e à interface:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{G}}_{CC}^{(n)} & \overline{\mathbf{G}}_{CI}^{(n)} \\ \overline{\mathbf{G}}_{IC}^{(n)} & \overline{\mathbf{G}}_{II}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_{C}^{(n)} \\ \mathbf{p}_{I}^{(n),MEC} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{H}}_{CC}^{(n)} & \overline{\mathbf{H}}_{CI}^{(n)} \\ \overline{\mathbf{H}}_{IC}^{(n)} & \overline{\mathbf{H}}_{II}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{C}^{(n)} \\ \mathbf{u}_{I}^{(n),MEC} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \overline{\mathbf{q}}_{C}^{(n)} \\ \overline{\mathbf{q}}_{I}^{(n)} \end{Bmatrix} \tag{4.3}$$

Na equação anterior, os coeficientes de $\overline{\mathbf{G}}$ e $\overline{\mathbf{H}}$ (bem como também os coeficientes de $\overline{\mathbf{q}}_C$ e do $\overline{\mathbf{q}}_I$) são calculados de forma similar a $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$, porém mediante o uso da solução fundamental referida ao ponto fonte $\xi$ pertencendo ao interior da sub-região $\Omega^{MEC}$. A expressão (4.3) é utilizada na descrição do esquema sequencial com superposição de sub-regiões.

O sistema de equações resultante na sub-região $\Omega^{MEF}$, sem ser considerado o amortecimento, é dado por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{FF}^{(n)} & \mathbf{M}_{FI}^{(n)} \\ \mathbf{M}_{IF}^{(n)} & \mathbf{M}_{II}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_F^{(n)} \\ \ddot{\mathbf{u}}_I^{(n),MEF} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{FF}^{(n)} & \mathbf{K}_{FI}^{(n)} \\ \mathbf{K}_{IF}^{(n)} & \mathbf{K}_{II}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_F^{(n)} \\ \mathbf{u}_I^{(n),MEF} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_F^{(n)} \\ \mathbf{f}_I^{(n)} \end{Bmatrix} \tag{4.4}$$

O sistema de equações acima mostrado pode ser resolvido no tempo usando-se qualquer um dos métodos de integração direta existentes na literatura, ao se efetuar a marcha no tempo.

Na figura 4.2 é representada a região $\Omega^{MEF}$, a ser modelada por elementos finitos, denotando por $\mathbf{u}_I^{(n),MEF}$ e $\mathbf{f}_I^{(n),MEF}$ os vetores contendo valores de pressão acústica e força nodal na interface $\Gamma^{int}$, respectivamente, para o instante de tempo *n*. Portanto, $\mathbf{u}_F^{(n)}$ e $\mathbf{f}_F^{(n)}$ correspondem aos vetores contendo valores de pressão acústica e força nodal, respectivamente, nos pontos da sub-região $\Omega^{MEF}$, com exceção da interface $\Gamma^{int}$.

As condições de compatibilidade e equilíbrio na interface podem ser impostas ponto por ponto; no caso do acoplamento acústico-acústico resulta em:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_I^{(n),MEC} = \mathbf{u}_I^{(n),MEF} \\ &\mathbf{f}_I^{(n),MEF} + \mathbf{T}\,\mathbf{p}_I^{(n),MEC} = \mathbf{0} \end{aligned} \qquad \text{em } \Gamma^{int},\ \text{para } i = 1,...,n \tag{4.5}$$

onde $\mathbf{T}$ é identificada como a *matriz de conversão*, cuja função é transformar o vetor de forças de superfície, inerentes à análise MEC, no vetor de forças nodais, na interface. Dita matriz de conversão é função de $\mathbf{N}_{c,p}$, contendo as funções de interpolação para aproximar o fluxo *p* nos elementos de interface, pertencentes à sub-região $\Omega^{MEC}$.

É possível se obter uma expressão explícita para a *matriz de conversão* a partir do princípio dos trabalhos virtuais [22], assumindo um vetor contendo valores virtuais e

infinitesimais de pressão acústica (na elasticidade; deslocamento) $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}^{\{e\}}$, na interface associado a cada elemento *e*, resultando na seguinte expressão:

$$\left(\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}^{\{e\}}\right)^T \mathbf{f}^{\{e\}} = \left\{\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}^{\{e\}}\right\}^T \underbrace{\left(\int \left(\mathbf{N}_{c,p}\right)^T \mathbf{N}_{c,p}\, ds\right)}_{\mathbf{T}} \mathbf{p}^{\{e\}} \tag{4.6}$$

As equações recentemente apresentadas constituem o que é necessário, nos cálculos relativos a cada sub-região e na avaliação das condições de compatibilidade e equilíbrio na interface, para a compreensão dos critérios do tipo *Schwarz* a serem descritos nas próximas subseções.

Na notação, as variáveis relativas aos nós de qualquer sub-região, com exceção dos termos da interface, não possuem número de iteração, com a finalidade de outorgar maior notoriedade aos termos de interface; por exemplo, se mostra $\mathbf{u}_C^{(i)}$ ao invés de $\mathbf{u}_{C,k}^{(i)}$.

### *4.2.1 Critério Schwarz Neumann-Neumann em paralelo*

O processo inicia-se com a prescrição da condição natural na interface $\Gamma^{int}$ válida para a análise de ambos os subdomínios, desta forma prescrevendo valores aproximados tanto para o fluxo na sub-região $\Omega^{MEC}$ quanto para a força nodal na sub-região $\Omega^{MEF}$. Assim, os cálculos relativos a cada subdomínio são executados de forma simultânea (em paralelo), conforme é descrito no algoritmo mostrado a seguir:

- *Loop* para cada instante de tempo, $i = 1, 2, \ldots, nt^{(MEC)}$;
- São fornecidos valores aproximados para $\mathbf{p}_{I,k}^{(i),MEC}$ e $\mathbf{f}_{I,k}^{(i),MEF}$ na interface, considerando $k = 0$ antes da primeira iteração, ou seja:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{I,0}^{(i),MEC} &= \overline{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{f}}_{I,0}^{(i),MEF} &= -\mathbf{T}\, \mathbf{p}_{I,0}^{(i),MEC} \end{aligned} \tag{4.7}$$

- *Loop* para cada iteração, $k = 1, 2, \ldots, n_{iter}$ :

  → Resolve-se o sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{CC}^{(i)} & \mathbf{H}_{CI}^{(i)} \\ \mathbf{H}_{IC}^{(i)} & \mathbf{H}_{II}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{C}^{(i)} \\ \mathbf{u}_{I,k}^{(i),MEC} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{CC}^{(i)} & \mathbf{G}_{CI}^{(i)} \\ \mathbf{G}_{IC}^{(i)} & \mathbf{G}_{II}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_{C}^{(i)} \\ \mathbf{p}_{I,k-1}^{(i),MEC} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{C}^{(i)} \\ \mathbf{q}_{I}^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

  obtendo-se $\mathbf{u}_{I,k}^{(i),MEC}$ ;

  → Simultaneamente, as componentes do vetor $\tilde{\mathbf{f}}_{I,k-1}^{(i),MEF}$ são interpoladas no tempo, determinando-se $\mathbf{f}_{I,k-1}^{(j),MEF}$ para depois resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{FF} & \mathbf{M}_{FI} \\ \mathbf{M}_{IF} & \mathbf{M}_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{F}^{(j)} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{I,k}^{(j),MEF} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{FF} & \mathbf{K}_{FI} \\ \mathbf{K}_{IF} & \mathbf{K}_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{F}^{(j)} \\ \mathbf{u}_{I,k}^{(j),MEF} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{F}^{(j)} \\ \mathbf{f}_{I,k-1}^{(j),MEF} \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

  obtendo-se $\mathbf{u}_{I,k}^{(j),MEF}$ , onde *j* depende da localização do instante atual no eixo temporal da análise MEF, bem como do $\Delta t_C$ e do $\Delta t_F$ escolhidos;

  → $\mathbf{u}_{I,k}^{(j),MEF}$ é extrapolado, obtendo-se $\tilde{\mathbf{u}}_{I,k}^{(i),MEF}$ ;

  → Com a finalidade de acelerar o processo de convergência, adota-se um valor adequado para o parâmetro de aceleração de convergência $\kappa$, de forma tal que um novo vetor $\mathbf{p}_{I,k}^{(i),MEC}$ seja determinado, válido para a iteração *k*, a partir da expressão seguinte:

$$\mathbf{p}_{I,k}^{(i),MEC} = \mathbf{p}_{I,k-1}^{(i),MEC} + \kappa\left(\tilde{\mathbf{u}}_{I,k}^{(i),MEF} - \mathbf{u}_{I,k}^{(i),MEC}\right) \quad (4.10)$$

  → Efetua-se o teste de convergência de acordo com a norma euclidiana do resíduo e um valor de tolerância $\varepsilon$ pré-definido, tendo que cumprir-se:

$$\frac{\left\| \tilde{\mathbf{u}}_{I,k}^{(i),MEF} - \mathbf{u}_{I,k}^{(i),MEC} \right\|_2}{\left\| \tilde{\mathbf{u}}_{I,k}^{(i),MEF} \right\|_2} < \varepsilon \tag{4.11}$$

→ Caso não seja satisfeito o teste dado por (4.11), se assume:

$$\mathbf{f}_{I,k}^{i,(MEF)} = -\mathbf{T}\,\mathbf{p}_{I,k}^{i,(MEC)} \tag{4.12}$$

e o *loop* iterativo continua.

→ Caso o teste de convergência for satisfeito, então se efetua a saída do *loop* iterativo, passando o controle de execução para o próximo instante de tempo;

- Fim do *loop* iterativo;
- Fim do *loop* no tempo.

O método anteriormente exposto possui o inconveniente de não ser aplicável a problemas da estática, onde apenas condição natural seja prescrita no contorno, em qualquer uma das sub-regiões, $\Omega^{MEC}$ e/ou $\Omega^{MEF}$, além da necessidade de se escolher um valor apropriado para o parâmetro de relaxação $\kappa$, pois dito parâmetro não é adimensional.

### *4.2.2 Critério Schwarz Dirichlet-Neumann em paralelo*

O algoritmo é iniciado com a prescrição de valores aproximados na interface $\Gamma^{int}$, tanto para a condição essencial na sub-região $\Omega^{MEC}$ como para a condição natural na sub-região $\Omega^{MEF}$. Os cálculos referentes a cada subdomínio podem efetuar-se de forma simultânea.

- *Loop* para cada instante de tempo, $i = 1, 2, \ldots, nt^{(MEC)}$;
- São fornecidos valores aproximados para $\mathbf{u}_{I,k}^{(i),MEC}$ e $\mathbf{f}_{I,k}^{(i),MEF}$ na interface, considerando $k = 0$ antes da primeira iteração, ou seja:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{I,0}^{(i),MEC} &= \overline{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{f}}_{I,0}^{(i),MEF} &= \overline{\mathbf{f}}\end{aligned} \tag{4.13}$$

- *Loop* para cada iteração, $k = 1, 2, \ldots, n_{iter}$ :

  → Resolve-se o sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{CC}^{(i)} & \mathbf{H}_{CI}^{(i)} \\ \mathbf{H}_{IC}^{(i)} & \mathbf{H}_{\mathrm{II}}^{i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{C}^{(i)} \\ \mathbf{u}_{I,k-1}^{(i),MEC} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{CC}^{(i)} & \mathbf{G}_{CI}^{(i)} \\ \mathbf{G}_{IC}^{(i)} & \mathbf{G}_{II}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_{C}^{(i)} \\ \mathbf{p}_{I,k}^{(i),MEC} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{C}^{(i)} \\ \mathbf{q}_{I}^{(i)} \end{Bmatrix} \tag{4.14}$$

  obtendo-se $\mathbf{p}_{I,k}^{(i),MEC}$;

  → Paralelamente, as componentes do vetor $\tilde{\mathbf{f}}_{I,k-1}^{(i),MEF}$ são interpoladas determinando-se $\mathbf{f}_{I,k-1}^{(j),MEF}$, posteriormente resolvendo (4.9) com a finalidade de se obter $\mathbf{u}_{I,k}^{(j),MEF}$;

  → $\mathbf{u}_{I,k}^{(j),MEF}$ é extrapolado, obtendo-se $\tilde{\mathbf{u}}_{I,k}^{(i),MEF}$;

  → Adota-se um valor adequado para o parâmetro de aceleração de convergência $\omega$, de forma tal que um novo vetor $\mathbf{u}_{I,k}^{(i),MEC}$, válido na iteração $k$, seja determinado a partir da expressão seguinte:

$$\mathbf{u}_{I,k}^{(i),MEC} = (1-\omega)\, \mathbf{u}_{I,k-1}^{(i),MEC} + \omega\, \tilde{\mathbf{u}}_{I,k}^{(i),MEF} \tag{4.15}$$

  → Efetua-se o teste de convergência

$$\frac{\left\| \mathbf{u}_{I,k}^{(i),MEC} - \mathbf{u}_{I,k-1}^{(i),MEC} \right\|_2}{\left\| \mathbf{u}_{I,k}^{(i),MEC} \right\|_2} < \varepsilon \tag{4.16}$$

  → Caso não seja satisfeito o teste dado por (4.16), continua o *loop* iterativo, calculando-se $\mathbf{f}_{I,k}^{(i),MEF}$ por meio de (4.12).

Caso o teste de convergência for satisfeito, então se efetua a saída do *loop* iterativo, passando o controle de execução para o próximo instante de tempo;

- Fim do *loop* iterativo;
- Fim do *loop* no tempo.

O presente método possui o inconveniente de não ser aplicável a problemas estáticos se apenas condição natural é prescrita na sub-região $\Omega^{MEF}$.

### *4.2.3 Critério Schwarz Dirichlet-Neumann sequencial*

Os critérios sequenciais são caracterizados pela execução das análises de cada sub-região de forma alternada. No critério sequencial *Schwarz Dirichlet-Neumann* valores iniciais aproximados são assumidos para a condição essencial, válidos para a análise da sub-região $\Omega^{MEC}$. O algoritmo é apresentado conforme se segue:

- *Loop* para cada instante de tempo, $i = 1, 2, \ldots, nt^{MEC}$;
- São fornecidos valores aproximados para $\mathbf{u}_{I,k}^{(i),MEC}$ na interface, considerando $k = 0$ antes da primeira iteração, ou seja:

$$\mathbf{u}_{I,0}^{(i),MEC} = \overline{\mathbf{u}} \tag{4.17}$$

- *Loop* para cada iteração, $k = 1, 2, \ldots, n_{iter}$ :
  - → Resolve-se o sistema (4.14), obtendo-se $\mathbf{p}_{I,k}^{(i),MEC}$;
  - → $\tilde{\mathbf{f}}_{I,k}^{(i),MEF}$ é determinado por meio de $\tilde{\mathbf{f}}_{I,k}^{(i),MEF} = -\mathbf{T}\,\mathbf{p}_{I,k}^{(i),MEC}$, logo interpolando para se obter $\mathbf{f}_{I,k}^{(j),MEF}$;
  - → Resolve-se o sistema (4.9), substituindo $\mathbf{f}_{I,k-1}^{(j),MEF}$ por $\mathbf{f}_{I,k}^{(j),MEF}$, com a finalidade de se obter $\mathbf{u}_{I,k}^{(j),MEF}$;
  - → $\mathbf{u}_{I,k}^{(j),MEF}$ é extrapolado, obtendo-se $\tilde{\mathbf{u}}_{I,k}^{(i),MEF}$;

→ Adota-se um valor adequado para o parâmetro de relaxação $\omega$, de forma tal que um novo vetor $\mathbf{u}_{I,k}^{(i),MEC}$, válido na iteração $k$, seja determinado a partir da expressão (4.15);

→ Efetua-se o teste de convergência (4.16);

→ Caso não seja satisfeito o teste dado por (4.16), continua o *loop* iterativo.

Caso o teste de convergência for satisfeito, então se efetua a saída do *loop* iterativo, passando o controle de execução para o próximo instante de tempo;

- Fim do *loop* iterativo;
- Fim do *loop* no tempo.

O método possui o mesmo inconveniente da técnica descrita no parágrafo anterior. Um algoritmo sequencial bastante similar é proposto para o acoplamento acústico-elástico, aproximando a condição de *Dirichlet* na análise de ambos os subdomínios, técnica que é sucintamente apresentada no anexo B.

### *4.2.4 Critério sequencial baseado na superposição das sub-regiões (overlapping)*

A técnica foi proposta com a finalidade de superar alguns inconvenientes que poderiam se apresentar no uso das técnicas anteriormente descritas, principalmente na resolução de problemas estáticos de acoplamento. A principal questão consiste em possibilitar a resolução do problema de acoplamento envolvendo sub-regiões quando só a condição natural é prescrita na interface.

Mediante o enfoque de superposição, o domínio do problema é dividido em três setores ou sub-regiões; $\Omega^{MEC}$ discretizada pelo MEC, $\Omega^{MEF}$ modelada usando o MEF e $\Omega^{C/F}$ discretizada usando tanto o MEC como o MEF (figuras 4.3 e 4.4).

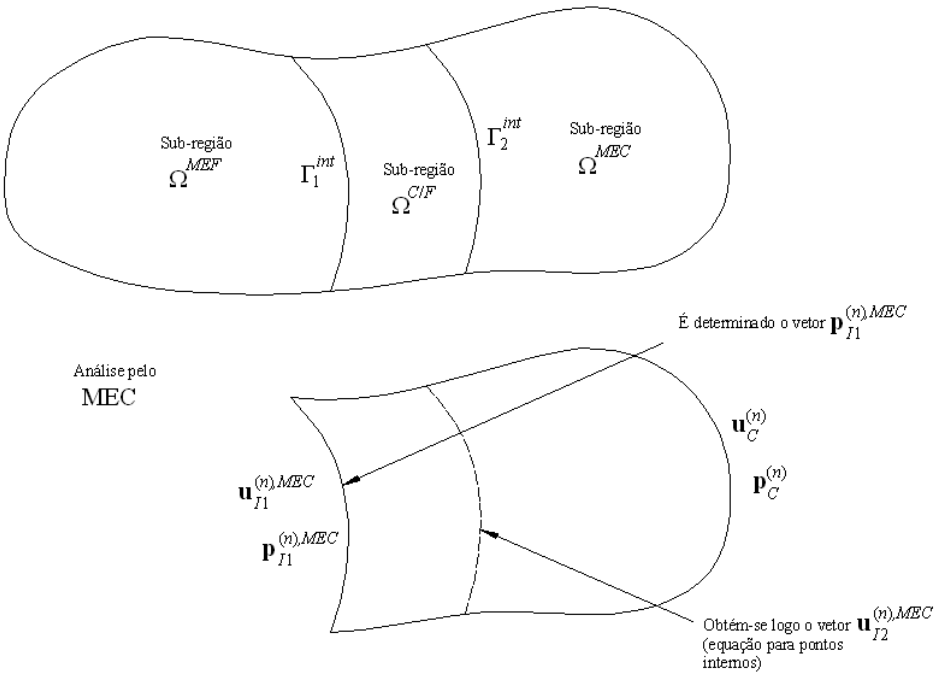


Figura 4.3: Análise da sub-região MEC, acoplamento iterativo com superposição de sub-regiões.

.

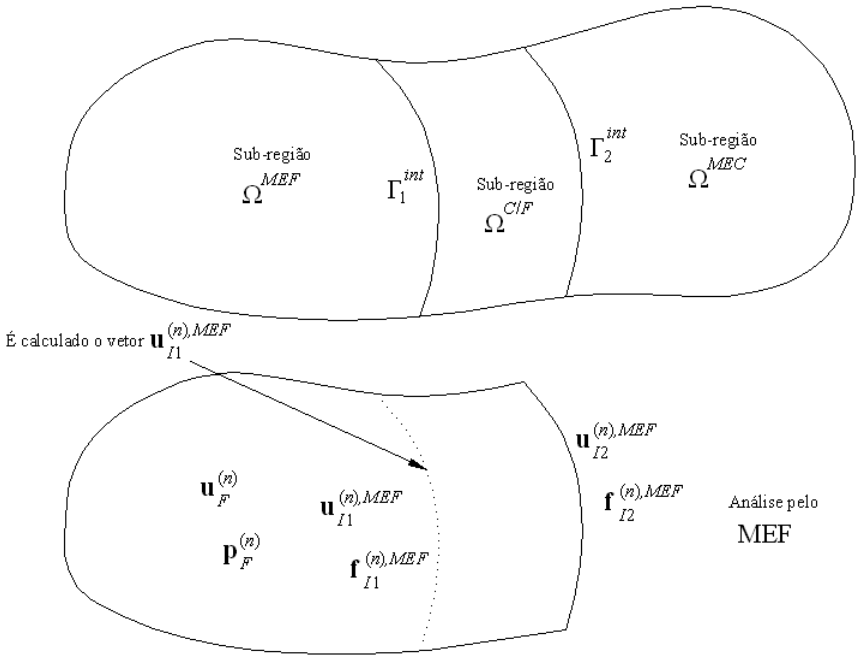


Figura 4.4: Análise da sub-região MEF, acoplamento iterativo com superposição de sub-regiões.

A partir das figuras 4.3 e 4.4 são definidas duas interfaces, $\Gamma_1^{int}$ e $\Gamma_2^{int}$. Um valor inicial arbitrário é estabelecido para as componentes do vetor contendo valores de pressão acústica $\mathbf{u}_{I1}^{(n),MEC}$, na interface $\Gamma_1^{int}$ para a análise da sub-região $\Omega^{MEC}$,

possibilitando o cálculo do fluxo ou *forças de superfície*, $\mathbf{p}_{I1}^{(n),MEC}$, posteriormente obtendo-se o vetor $\mathbf{u}_{I2}^{(n),MEC}$, contendo valores de pressão acústica na interface $\Gamma_2^{int}$, por meio da equação (4.3) para pontos internos (ver figura 4.3). Os pontos ao longo da interface $\Gamma_2^{int}$ sendo considerados como pontos internos da sub-região $\Omega^{MEC}$, e também como nós de fronteira da sub-região $\Omega^{MEF}$, constitui a questão crucial que permite formular o esquema de resolução do problema. Diversos testes revelam que pontos internos localizados a uma distância da interface igual ao tamanho do elemento é suficiente para garantir a aplicação do método [25].

Mediante o algoritmo de cálculo descrito a seguir é possível perceber que o problema do acoplamento pode ser resolvido no caso em que só condição natural seja prescrita no problema original para sub-região $\Omega^{MEF}$. Além disso, usando este critério não é necessário efetuar a transformação das *trações de superfície* MEC para *forças nodais* MEF por meio da *matriz de conversão* [22,25].

- *Loop* para cada instante de tempo, $i = 1, 2, \ldots, nt^{MEC}$;
- São fornecidos valores aproximados para $\mathbf{u}_{I1,k}^{(i),MEC}$ na interface $\Gamma_1^{int}$, considerando $k = 0$ antes da primeira iteração, ou seja:

$$\mathbf{u}_{I1,0}^{(i),MEC} = \overline{\mathbf{u}} \tag{4.18}$$

- *Loop* para cada iteração, $k = 1, 2, \ldots, n_{iter}$:

  → Resolve-se o sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{CC}^{(i)} & \mathbf{H}_{C\cdot I1}^{(i)} \\ \mathbf{H}_{I1\cdot C}^{(i)} & \mathbf{H}_{I1\cdot I1}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{C}^{(i)} \\ \mathbf{u}_{I1,k-1}^{(i),MEC} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{CC}^{(i)} & \mathbf{G}_{C\cdot I1}^{(i)} \\ \mathbf{G}_{I1\cdot C}^{(i)} & \mathbf{G}_{I1\cdot I1}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_{C}^{(i)} \\ \mathbf{p}_{I1,k}^{(i),MEC} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{C}^{(i)} \\ \mathbf{q}_{I1}^{(i)} \end{Bmatrix} \tag{4.19}$$

  obtendo-se $\mathbf{p}_{I1,k}^{i_{(BEM)}}$;

  → $\mathbf{u}_{I2,k}^{(i),MEC}$ é computado com o sistema de equações MEC para pontos internos:

$$\mathbf{u}_{I2,k}^{(i),MEC} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{G}}_{CC}^{(i)} & \overline{\mathbf{G}}_{C\cdot I1}^{(i)} \\ \overline{\mathbf{G}}_{I1\cdot C}^{(i)} & \overline{\mathbf{G}}_{I1\cdot I1}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_{C}^{(i)} \\ \mathbf{p}_{I1,k}^{(i),MEC} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{H}}_{CC}^{(i)} & \overline{\mathbf{H}}_{C\cdot I1}^{(i)} \\ \overline{\mathbf{H}}_{I1\cdot C}^{(i)} & \overline{\mathbf{H}}_{I1\cdot I1}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{C}^{(i)} \\ \mathbf{u}_{I1,k-1}^{(i),MEC} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \overline{\mathbf{q}}_{C}^{(i)} \\ \overline{\mathbf{q}}_{I1}^{(i)} \end{Bmatrix} \tag{4.20}$$

→ $\mathbf{u}_{I2,k}^{(i),MEC}$ é interpolado, obtendo-se $\mathbf{u}_{I2,k}^{(j),MEF}$;

→ Resolve-se o sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{FF}^{(j)} & \mathbf{M}_{F\cdot I1}^{(j)} & \mathbf{M}_{F\cdot I2}^{(j)} \\ \mathbf{M}_{I1\cdot F}^{(j)} & \mathbf{M}_{I1\cdot I1}^{(j)} & \mathbf{M}_{I1\cdot I2}^{(j)} \\ \mathbf{M}_{I2\cdot F}^{(j)} & \mathbf{M}_{I2\cdot I1}^{(j)} & \mathbf{M}_{I2\cdot I2}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{\mathrm{F}}^{j} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{I1,k}^{(j),MEF} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{I2,k}^{(j),MEF} \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{F\cdot F}^{(j)} & \mathbf{K}_{F\cdot I1}^{(j)} & \mathbf{K}_{F\cdot I2}^{(j)} \\ \mathbf{K}_{I1\cdot F}^{(j)} & \mathbf{K}_{I1\cdot I1}^{(j)} & \mathbf{K}_{I1\cdot I2}^{(j)} \\ \mathbf{K}_{I2\cdot F}^{(j)} & \mathbf{K}_{I2\cdot I1}^{(j)} & \mathbf{K}_{I2\cdot I2}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{F}^{(j)} \\ \mathbf{u}_{I1,k}^{(j),MEF} \\ \mathbf{u}_{I2,k}^{(j),MEF} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{F}^{(j)} \\ \mathbf{f}_{I1,k}^{(j),MEF} \\ \mathbf{f}_{I2,k}^{(j),MEF} \end{Bmatrix} \tag{4.21}$$

obtendo-se $\mathbf{u}_{I1,k}^{(j),MEF}$;

→ $\mathbf{u}_{I1,k}^{(j),MEF}$ é extrapolado, determinando-se $\tilde{\mathbf{u}}_{I1,k}^{(i),MEF}$

→ Adota-se um valor adequado para o parâmetro de relaxação $\omega$, de forma tal que um novo vetor $\mathbf{u}_{I1,k}^{(i),MEC}$, válido na iteração $k$, seja determinado a partir de:

$$\mathbf{u}_{I1,k}^{(i),MEC} = (1-\omega)\, \mathbf{u}_{I1,k-1}^{(i),MEC} + \omega\, \tilde{\mathbf{u}}_{I1,k}^{(i),MEF} \tag{4.22}$$

→ Efetua-se o teste de convergência dado por:

$$\frac{\left\| \mathbf{u}_{I1,k}^{(i),MEC} - \mathbf{u}_{I1,k-1}^{(i),MEC} \right\|_2}{\left\| \mathbf{u}_{I1,k}^{(i),MEC} \right\|_2} < \varepsilon \tag{4.23}$$

→ Caso não seja satisfeito o teste dado por (4.23), o *loop* iterativo continua.

Caso o teste de convergência for satisfeito, então se efetua a saída do *loop* iterativo, passando o controle de execução para o próximo instante de tempo;

- Fim do *loop* iterativo;
- Fim do *loop* no tempo.

O algoritmo, tal como foi anteriormente mencionado, permite a resolução do problema do acoplamento onde é prescrita a condição natural na sub-região $\Omega^{MEF}$; isto é possível já que no esquema é imposta a condição essencial na interface $\Gamma_2^{int}$, pois as componentes do vetor $\mathbf{u}_{I2,k}^{(i),MEC}$ foram determinadas por meio da equação MEC para pontos internos, não apresentando, portanto, os inconvenientes dos critérios *Schwarz* precedentes.

## 4.3. Análise de convergência das técnicas de acoplamento iterativo MEC-MEF

As análises de convergência, a serem detalhadas na presente seção, são principalmente focadas na escolha do parâmetro de aceleração de convergência, cujo valor é incorporado dentro da expressão correspondente, de acordo com cada critério *Schwarz*, para a obtenção de uma aceleração de convergência favorável.

### *4.3.1 Condições para a convergência no critério Schwarz Neumann-Neumann em paralelo*

As condições necessárias para a convergência [23] são estudadas desconsiderando alguns termos, supondo o caso estático em virtude de maior simplicidade, ou seja, fazendo $\mathbf{q}_C^{(n)} = \mathbf{q}_I^{(n)} = \mathbf{0}$ na equação (4.1) e $\ddot{\mathbf{u}}_F^{(n)} = \ddot{\mathbf{u}}_I^{(n),MEF} = \mathbf{0}$ na equação (4.4).

Incorporando as condições de contorno dentro da equação (4.8), na análise da sub-região $\Omega^{MEC}$, reordenando os termos, na iteração *k* chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_C \\ \mathbf{p}_{I,k-1}^{(MEC)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{c}_C \\ \mathbf{u}_{I,k}^{(MEC)} \end{Bmatrix} \tag{4.24}$$

onde $\mathbf{x}_C$ representa as incógnitas no contorno (com exceção da interface), quanto $\mathbf{c}_C$ incorpora os valores prescritos de $\mathbf{u}_{I,k}^{(MEC)}$ e $\mathbf{p}_{I,k}^{(MEC)}$ nessa parte do contorno.

De forma similar, a equação de elementos finitos (4.9), na análise da sub-região $\Omega^{MEF}$, após serem substituídas as condições prescritas e reordenando, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_F \\ \mathbf{u}_{I,k}^{(MEF)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{c}_F \\ -\mathbf{T}\,\mathbf{p}_{I,k-1}^{(MEC)} \end{Bmatrix} \tag{4.25}$$

onde $\mathbf{c}_F$ contém valores prescritos, quanto $\mathbf{u}_F$ incorpora as incógnitas de pressão acústica nos pontos da malha de elementos finitos, com exceção da interface.

Eliminando $\mathbf{p}_{I,k-1}^{(MEC)}$ a partir do segundo conjunto de equações, no sistema (4.24), substituindo-o no segundo conjunto de equações (4.25), resulta:

$$\mathbf{p}_{I,k-1}^{(MEC)} = \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{c}_C + \mathbf{A}_{22}\,\mathbf{u}_{I,k}^{(MEC)} \tag{4.26}$$

$$\mathbf{u}_{I,k}^{(MEF)} = \mathbf{F}_{21}\,\mathbf{c}_F - \mathbf{F}_{22}\,\mathbf{T}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{c}_C - \mathbf{F}_{22}\,\mathbf{T}\,\mathbf{A}_{22}\,\mathbf{u}_{I,k-1}^{(MEC)} \tag{4.27}$$

Vale frisar que na expressão (4.27) $\mathbf{u}_{I,k}^{(MEC)}$ foi substituído por $\mathbf{u}_{I,k-1}^{(MEC)}$, devido a que, por tratar-se de uma análise em paralelo (análises simultâneas de $\Omega^{MEC}$ e $\Omega^{MEF}$), $\mathbf{u}_{I,k}^{(MEF)}$ não depende do valor de $\mathbf{u}_I^{(MEC)}$ na mesma iteração.

Substituindo na equação (4.10) as expressões (4.26) e (4.27), considerando (4.26) expressa tanto para $\mathbf{p}_{I,k-1}^{(MEC)}$ como para $\mathbf{p}_{I,k}^{(MEC)}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \cancel{\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{c}_C} + \mathbf{A}_{22}\,\mathbf{u}_{I,k+1}^{(MEC)} &= \cancel{\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{c}_C} + \mathbf{A}_{22}\,\mathbf{u}_{I,k}^{(MEC)} \\ &+ \kappa \left( \underbrace{\mathbf{F}_{21}\,\mathbf{c}_F - \mathbf{F}_{22}\,\mathbf{T}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{c}_C - \mathbf{F}_{22}\,\mathbf{T}\,\mathbf{A}_{22}\,\mathbf{u}_{I,k-1}^{(MEC)}}_{\tilde{\mathbf{u}}_{I,k}^{(MEF)}} - \mathbf{u}_{I,k}^{(MEC)} \right) \end{aligned} \tag{4.28}$$

Reordenando termos, chega-se finalmente a:

$$\mathbf{u}_{I,k+1}^{(MEC)} = \left(\mathbf{I} - \kappa\,\mathbf{C}\right)\mathbf{u}_{I,k}^{(MEC)} - \kappa\,\mathbf{D}\,\mathbf{u}_{I,k-1}^{(MEC)} + \kappa\,\mathbf{e} \tag{4.29}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \mathbf{A}_{22}{}^{-1} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{A}_{22}{}^{-1}\,\mathbf{F}_{22}\,\mathbf{T}\,\mathbf{A}_{22} \\ \mathbf{e} &= \mathbf{A}_{22}{}^{-1}\,\mathbf{F}_{21}\,\mathbf{c}_F - \mathbf{A}_{22}{}^{-1}\,\mathbf{F}_{22}\,\mathbf{T}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{c}_C\end{aligned} \tag{4.30}$$

A equação (4.29) pode ser reescrita em forma matricial:

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{v}_{k+1} \\ \mathbf{w}_{k+1}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\kappa\,\mathbf{D} & \mathbf{I}-\kappa\,\mathbf{C}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{v}_k \\ \mathbf{w}_k\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mathbf{0} \\ \kappa\,\mathbf{e}\end{Bmatrix} \tag{4.31}$$

onde $\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_{k-1}$ e $\mathbf{w}_k = \mathbf{u}_k$, ou simplesmente:

$$\boldsymbol{\xi}_{k+1} = \mathbf{A}(\kappa)\,\boldsymbol{\xi}_k + \mathbf{f}(\kappa) \tag{4.32}$$

sendo:

$$\mathbf{A}(\kappa) = \begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\kappa\,\mathbf{D} & \mathbf{I}-\kappa\,\mathbf{C}\end{bmatrix} \quad , \qquad \boldsymbol{\xi}_k = \begin{Bmatrix}\mathbf{v}_k \\ \mathbf{w}_k\end{Bmatrix} \quad , \qquad \mathbf{f}(\kappa) = \begin{Bmatrix}\mathbf{0} \\ \kappa\,\mathbf{e}\end{Bmatrix} \tag{4.33}$$

Os autovalores $\lambda$ da matriz $\mathbf{A}(\kappa)$, na expressão (4.32), são dados pela equação característica mostrada a seguir:

$$\det\left(\lambda(\lambda-1)\mathbf{I} + \lambda\,\kappa\,\mathbf{C} + \kappa\,\mathbf{D}\right) = 0 \tag{4.34}$$

Por exemplo, considerando apenas o caso unidimensional, onde $C, D > 0$ na equação característica, esta última se torna:

$$\lambda^2 - (1-\kappa C)\lambda + \kappa D = 0 \tag{4.35}$$

As raízes da equação mostrada são dadas por:

$$\lambda_1 = \frac{(1-\kappa C)+\sqrt{(1-\kappa C)^2 - 4\kappa D}}{2}$$
$$\lambda_2 = \frac{(1-\kappa C)-\sqrt{(1-\kappa C)^2 - 4\kappa D}}{2} \qquad (4.36)$$

A variação de $\lambda_1$ e $\lambda_2$ é ilustrada na figura 4.5 (representada para $C = 7$ e $D = 0.8$), em função do parâmetro de relaxação $\kappa$. Os valores de $\kappa$ para os quais $(1-\kappa C)^2 - 4\kappa D = 0$ são denotados por $\kappa_1$ e $\kappa_2$. Portanto, é possível demonstrar que:

$$\kappa_1 = \left(\frac{\sqrt{C+D}-\sqrt{D}}{C}\right)^2 \quad , \quad \kappa_2 = \left(\frac{\sqrt{C+D}+\sqrt{D}}{C}\right)^2 \qquad (4.37)$$

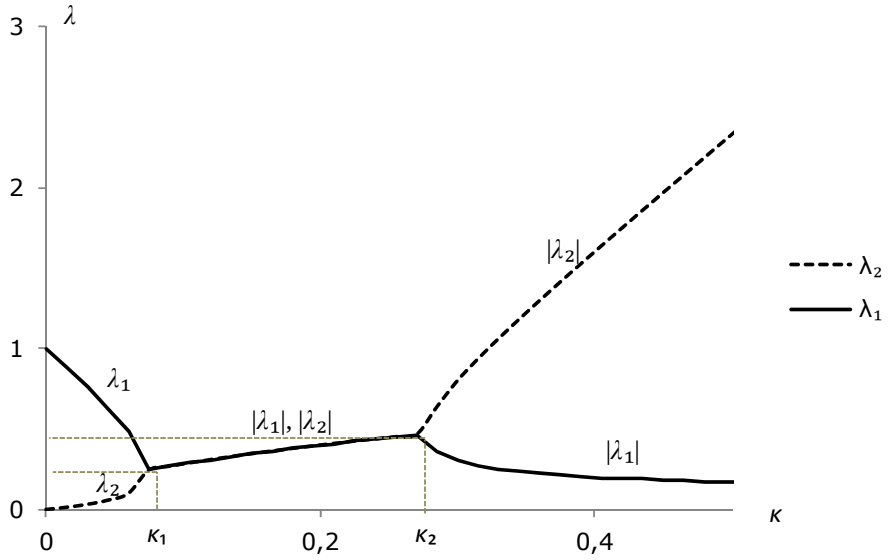


Figura 4.5: Autovalores $\lambda_1$ e $\lambda_2$ versus o parâmetro de relaxação $\kappa$.

A partir da figura, levando em consideração a quantidade subradical presente nas expressões (4.36), é possível inferir que:

$$1 > \frac{(1-\kappa_1 C)}{2} = \frac{\sqrt{D}\sqrt{C+D}-\sqrt{D}}{C} > 0$$
$$\frac{(1-\kappa_2 C)}{2} = -\frac{\sqrt{D}\sqrt{C+D}+\sqrt{D}}{C} < 0 \tag{4.38}$$

portanto, obtendo-se:

$$\left|1-\kappa_2 C\right| > (1-\kappa_1 C) \tag{4.39}$$

Em consequência, $(1-\kappa_1 C)/2$ corresponde ao menor raio espectral $\rho$, válido na condição $\kappa = \kappa_1$ . Portanto, pode ser concluído que $\rho(\mathbf{A}(\kappa_1)) < 1$, sendo que $\kappa = \kappa_1$ implica uma maior velocidade de convergência. Assim, $\kappa \to \infty \Rightarrow |\lambda_2| \to \infty$ existindo, portanto, um valor de $\kappa$ para o qual existe um raio espectral igual à unidade, constituindo o valor limite para obter-se convergência usando o critério *Schwarz Neumann-Neumann* em paralelo.

### *4.3.2 Condições para a convergência no critério Schwarz Dirichlet-Neumann em paralelo*

Estudando mais uma vez o caso estático, incorporando as condições de contorno em (4.14) para a sub-região $\Omega^{MEC}$ , reordenando termos, na iteração *k* chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_C \\ \mathbf{p}_{I,k}^{(MEC)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{c}_C \\ \mathbf{u}_{I,k-1}^{(MEC)} \end{Bmatrix} \tag{4.40}$$

Logo, impondo as condições prescritas nos pontos da malha de elementos finitos, dentro da equação (4.9), logo fazendo $\mathbf{f}_{I,k-1}^{(MEF)} = -\mathbf{T}\,\mathbf{p}_{I,k-1}^{(MEC)}$, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_F \\ \mathbf{u}_{I,k}^{(MEF)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{c}_F \\ -\mathbf{T}\,\mathbf{p}_{I,k-1}^{(MEC)} \end{Bmatrix} \tag{4.41}$$

Substituindo o segundo conjunto de equações (4.40) dentro do segundo conjunto de equações (4.41), este último expresso em função de $\mathbf{u}_{I,k+1}^{(MEF)}$, ao invés de $\mathbf{u}_{I,k}^{(MEF)}$, obtém-se:

$$\mathbf{p}_{I,k}^{(MEC)} = \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{c}_C + \mathbf{A}_{22}\,\mathbf{u}_{I,k-1}^{(MEF)} \tag{4.42}$$

$$\mathbf{u}_{I,k+1}^{(MEF)} = \mathbf{F}_{21}\,\mathbf{c}_F - \mathbf{F}_{22}\,\mathbf{T}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{c}_C - \mathbf{F}_{22}\,\mathbf{T}\,\mathbf{A}_{22}\,\mathbf{u}_{I,k-1}^{(MEF)} \tag{4.43}$$

Incorporando a equação (4.43) dentro da expressão (4.15), esta última expressa em função de $\mathbf{u}_{I,k+1}^{(MEC)}$, obtém-se:

$$\mathbf{u}_{I,k+1}^{(MEC)} = (1-\omega)\,\mathbf{u}_{I,k}^{(MEC)} - \omega\mathbf{R}\,\mathbf{u}_{I,k-1}^{(MEC)} + \omega\mathbf{s} \tag{4.44}$$

onde

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_{22}\,\mathbf{T}\,\mathbf{A}_{22} \qquad\qquad \mathbf{s} = \mathbf{F}_{21}\,\mathbf{c}_F - \mathbf{F}_{22}\,\mathbf{T}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{c}_C \tag{4.45}$$

Fazendo $\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_{k-1}$ e $\mathbf{w}_k = \mathbf{u}_k$, levando para a forma matricial chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{v}_{k+1} \\ \mathbf{w}_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\omega\mathbf{R} & (1-\omega)\,\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_k \\ \mathbf{w}_k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \omega\mathbf{s} \end{Bmatrix} \tag{4.46}$$

Os autovalores do sistema (4.46) são dados pela equação característica seguinte:

$$\lambda^2 - (1-\omega)\lambda + \omega\theta_k = 0 \qquad , \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{4.47}$$

expressão na qual $\theta_k$ ($k$ = 1, 2,..., $n$) denota os autovalores da matriz **R**. A solução da equação característica é dada por:

$$\lambda_k^{\pm} = \frac{(1-\omega) \pm \sqrt{(1-\omega)^2 - 4\omega\theta_k}}{2} \qquad , \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{4.48}$$

Com a finalidade de ser testada a convergência, é possível demonstrar que se $\mathrm{Re}(\theta_k) > -1 \Rightarrow$ existe $\omega_c > 0$ de modo que $\left|\lambda_k^{\pm}\right| < 1, \ \forall \omega \in [0, \omega_c]$, pois sendo que $\lambda_k^{-}(0) = 0$, então se tem $\left|\lambda_k^{-}(\omega)\right| < 1$ dentro do intervalo $[0, \omega_c]$.

Conferindo agora para $\lambda_k^{+}(\omega)$; sejam $\lambda_k^{+} = r + is$ e $\theta_k = r_k + is_k$, substituindo tais expressões na equação característica (4.47), a parte real e a parte imaginária da equação resultante, respectivamente, resultam ser:

$$\begin{cases} r^2 - s^2 - (1-\omega)r + \omega r_k = 0 \\ 2rs - (1-\omega)s + \omega s_k = 0 \end{cases} \tag{4.49}$$

Além disso, diferenciando $\left|\lambda_k^{+}\right| = \sqrt{r^2 + s^2}$, tem-se:

$$\left.\frac{d\left|\lambda_k^{+}\right|}{d\omega}\right|_{\omega=0} = \left.\frac{2rr' + 2ss'}{2\sqrt{r^2 + s^2}}\right|_{\omega=0} \tag{4.50}$$

No caso de ter-se $r(0) = 1$ e $s(0) = 0$, logo a derivada (4.50) e $r'(0)$ possuem o mesmo sinal. Diferenciando agora a primeira das equações (4.49), e avaliando a expressão resultante para $\omega = 0$, chega-se a:

$$r'(0) = -1 - r_k \tag{4.51}$$

Assim, $r_k > -1$ implica $r'(0) < 0$ e logo $\left|\lambda_k^{+}\right|$ é decrescente, desde que o parâmetro de relaxação seja escolhido dentro de um intervalo desde zero até um determinado valor positivo $\omega_c$. Assim, $\left|\lambda_k^{\pm}(\omega)\right| < 1$ e, portanto, o método converge no intervalo $\omega \in [0, \omega_c]$.

De forma similar, $r_k < -1$ implica que $\left|\lambda_k^{+}\right|$ é crescente e, portanto, $\left|\lambda_k^{+}(0)\right| = 1$; logo $\left|\lambda_k^{+}(\omega)\right| > 1$ em uma vizinhança à direita do valor zero, resultando o método divergente. Finalmente é possível demonstrar que para $r_k = -1$ o método também diverge [23].

### *4.3.3 Condições para a convergência no critério Schwarz Dirichlet-Neumann sequencial*

Mais uma vez no caso estático, após serem aplicadas as condições de contorno na equação (4.14), para a análise da sub-região $\Omega^{MEC}$, reordenando termos, na iteração *k* tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_C \\ \mathbf{p}_{I,k}^{(MEC)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{c}_C \\ \mathbf{u}_{I,k-1}^{(MEC)} \end{Bmatrix} \tag{4.52}$$

Similarmente, o sistema (4.9) para a análise da sub-região $\Omega^{MEF}$, após ter sido feito o reordenamento, substituindo $\mathbf{f}_{I,k-1}^{(MEF)}$ por $\mathbf{f}_{I,k}^{(MEF)}$ (sendo que $\mathbf{f}_{I,k}^{(MEF)} = -\mathbf{T}\,\mathbf{p}_{I,k}^{(MEC)}$), chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_F \\ \mathbf{u}_{I,k}^{(MEF)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{c}_F \\ -\mathbf{T}\,\mathbf{p}_{I,k}^{(MEC)} \end{Bmatrix} \tag{4.53}$$

Eliminando $\mathbf{p}_{I,k}^{(MEC)}$, a partir do segundo conjunto de equações (4.52), substituindo-o dentro do segundo conjunto de equações (4.53), obtém-se:

$$\mathbf{p}_{I,k}^{(MEC)} = \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{c}_C + \mathbf{A}_{22}\,\mathbf{u}_{I,k-1}^{(MEC)} \tag{4.54}$$

$$\mathbf{u}_{I,k}^{(MEF)} = \mathbf{F}_{21}\,\mathbf{c}_F - \mathbf{F}_{22}\,\mathbf{T}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{c}_C - \mathbf{F}_{22}\,\mathbf{T}\,\mathbf{A}_{22}\,\mathbf{u}_{I,k-1}^{(MEC)} \tag{4.55}$$

Substituindo a última expressão dentro da equação (4.15), chega-se a:

$$\mathbf{u}_{I,k}^{(MEC)} = \underbrace{\left[(1-\omega)\mathbf{I} + \omega\boldsymbol{\Psi}\right]}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{u}_{I,k-1}^{(MEC)} + \omega\,\mathbf{t} \tag{4.56}$$

onde

$$\boldsymbol{\Psi} = -\mathbf{F}_{22}\,\mathbf{T}\,\mathbf{A}_{22} \qquad\qquad \mathbf{t} = \mathbf{F}_{21}\,\mathbf{c}_F - \mathbf{F}_{22}\,\mathbf{T}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{c}_C \tag{4.57}$$

Os autovalores da matriz de amplificação **A**, na equação (4.56), são dados pela equação característica mostrada a seguir:

$$\lambda_k = (1-\omega) + \omega\,\theta_k \tag{4.58}$$

onde $\theta_k$ denota os autovalores de **Ψ**, com $k = 1, 2, \ldots, n$.

Mais uma vez é possível demonstrar que $|\lambda_k| < 1$ se e somente se $\mathrm{Re}(\theta_k) < 1$. Para uma escolha adequada do parâmetro $\omega$, considerando $\theta_k = x_k + i\,y_k$ e a partir de (4.58), chega-se a:

$$\frac{|\lambda_k|^2}{\omega^2} = \left[x_k - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)\right]^2 + {y_k}^2 < \frac{1}{\omega^2} \tag{4.59}$$

expressão na qual, após serem reordenados os termos, torna-se:

$$(1-x_k)^2 + {y_k}^2 < \frac{2(1-x_k)}{\omega} \tag{4.60}$$

A desigualdade anterior implica necessariamente

$$\omega < \min_{1\le k\le n}\left\{\frac{2(1-x_k)}{(1-x_k)^2 + {y_k}^2}\right\} \tag{4.61}$$

Pode se demonstrar que é possível efetuar-se a escolha do parâmetro $\omega$ de forma a se ter um raio espectral mínimo da matriz de amplificação **A,** em (4.56). Com a finalidade de se obter o valor ótimo do parâmetro, tem-se:

$$\|\lambda_k\|_\infty = \max_{1\le k\le n}\left|(1-\omega) + \omega\,\theta_k\right| \tag{4.62}$$

Devido que a norma $\|\bullet\|_\infty$ não é diferenciável, se faz uso da propriedade mostrada a seguir:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\bullet\|_2 \le \|\bullet\|_\infty \le \|\bullet\|_2 \tag{4.63}$$

Definindo o funcional baseado na norma $\|\bullet\|_2$, ou seja:

$$F(\omega) = \left(\|\lambda_k\|_2\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left[\left(1-\omega+\omega x_k\right)^2 + \left(\omega y_k\right)^2\right] \tag{4.64}$$

Desenvolvendo e diferenciando, resulta:

$$\begin{aligned} F'(\omega) &= \sum_{k=1}^{n}\left[2\omega\left(1-2x_k+x_k{}^2+y_k{}^2\right)+2\left(x_k-1\right)\right] \\ &= 2\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\left(\theta_k-1\right)+2\omega\sum_{k=1}^{n}\left|\theta_k-1\right|^2 \end{aligned} \tag{4.65}$$

Diferenciando mais uma vez, tem-se:

$$F''(\omega) = 2\sum_{k=1}^{n}\left|\theta_k-1\right|^2 > 0 \tag{4.66}$$

tendo-se, portanto, um mínimo para o funcional. Dito valor mínimo é obtido a partir de:

$$\bar{\omega} = -\frac{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\left(\theta_k-1\right)}{\sum_{k=1}^{n}\left|\theta_k-1\right|^2} \tag{4.67}$$

Assim, o valor mínimo do funcional é dado por:

$$F_{\min} = F\left(\overline{\omega}\right) = n - \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\left(\theta_k - 1\right)\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} \left|\theta_k - 1\right|^2} \tag{4.68}$$

Finalmente, se $F_{\min} < 1$ então o raio espectral $\rho\left(\left(1-\omega\right)\mathbf{I} + \omega\boldsymbol{\Psi}\right) < 1$ e a convergência é garantida.

### *4.3.4 Condições para a convergência do critério Schwarz Dirichlet-Neumann sequencial com superposição de sub-regiões*

Aplicando as condições de contorno e reordenando termos, após serem fusionadas as equações (4.19) e (4.20), eliminando-se o termo $\mathbf{p}_{I1,k}^{(MEC)}$ de ambas as equações e supondo $\mathbf{q}_C^{(i)} = \mathbf{q}_{I1}^{(i)} = \overline{\mathbf{q}}_C^{(i)} = \overline{\mathbf{q}}_{I1}^{(i)} = \mathbf{0}$ na sub-região $\Omega^{MEC}$, para a iteração *k* tem-se:

$$\mathbf{u}_{I2,k}^{(MEC)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{c}_C \\ \mathbf{u}_{I1,k-1}^{(MEC)} \end{Bmatrix} \tag{4.69}$$

Enquanto isso, impondo as condições de contorno na equação (4.21), para a sub-região $\Omega^{MEF}$, chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_F \\ \mathbf{u}_{I1,k}^{(MEF)} \\ \mathbf{u}_{I2,k}^{(MEF)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} & \mathbf{F}_{13} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} & \mathbf{F}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{c}_F \\ \mathbf{c}_{I1} \\ \mathbf{u}_{I2,k}^{(MEC)} \end{Bmatrix} \tag{4.70}$$

sendo $\mathbf{c}_C$, $\mathbf{c}_F$ e $\mathbf{c}_{I1}$ vetores contendo valores prescritos referidos às sub-regiões $\Omega^{MEC}$, $\Omega^{MEF}$ e da interface $\Gamma_1^{int}$, respectivamente (figuras 4.3 y 4.4). Eliminando-se o termo

$\mathbf{u}_{I2,k}^{(MEC)}$ do segundo conjunto de equações (4.70), substituindo-o na equação (4.69), obtém-se:

$$\mathbf{u}_{I1,k}^{(MEF)} = \mathbf{C}\,\mathbf{u}_{I1,k-1}^{(MEC)} + \mathbf{b} \tag{4.71}$$

expressão na qual:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}_{23}\,\mathbf{A}_{12} \tag{4.72}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}_{21}\,\mathbf{c}_F + \mathbf{F}_{22}\,\mathbf{c}_{I1} + \mathbf{F}_{23}\,\mathbf{A}_{11}\,\mathbf{c}_C \tag{4.73}$$

Substituindo $\mathbf{u}_{I1,k}^{(MEF)}$, a partir da equação (4.71), dentro da expressão iterativa para a aceleração de convergência (4.22), chega-se finalmente a:

$$\mathbf{u}_{I1,k}^{(MEC)} = \underbrace{\left[(1-\omega)\,\mathbf{I} + \omega\,\mathbf{C}\right]}_{\mathbf{A}} u_{I1,k-1}^{(MEC)} + \omega\,\mathbf{b} \tag{4.74}$$

A relação acima mostrada representa uma expressão recursiva na determinação de um novo vetor $\mathbf{u}_{I1}^{(MEC)}$, similar àquelas expressões das análises anteriormente descritas, onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade, quanto a matriz de amplificação $\mathbf{A}$ é dada por:

$$\mathbf{A} = (1-\omega)\,\mathbf{I} + \omega\,\mathbf{C} \tag{4.75}$$

Sendo $\theta_k$ o "*k*"-ésimo autovalor de **C**. Assim, a obtenção de convergência é condicionada por (4.61), onde $\theta_k = x_k + i\,y_k$, quanto o valor ótimo do parâmetro de relaxação $\omega$ é obtido por meio da expressão (4.67).

## 4.4. Imposição de condições na interface usando o método dos gradientes conjugados

### *4.4.1 Introdução*

Uma característica comum nos critérios tipo *Schwarz* consiste na necessidade de fornecer um valor adequado para o parâmetro de relaxação, na avaliação das condições de compatibilidade e/ou equilíbrio na interface, com a finalidade de ser garantida e acelerada a convergência do processo iterativo. Assim, quanto maior o número de sub-regiões, maior será o número de interfaces e, portanto, de parâmetros a serem considerados. Devido a isto, os critérios *Schwarz* têm sido utilizados em conjunto com o método dos gradientes conjugados [19], sendo atualizadas as condições na interface de forma mais automatizada, sem necessidade da prescrição de parâmetros de ajuste.

Além disso, é possível efetuar um processo de condensação de graus de liberdade, envolvendo as incógnitas inerentes a cada sub-região, com exceção da interface, reduzindo o número de incógnitas e, portanto, sendo otimizado o processo iterativo. A seguir será descrito o processo de condensação, bem como a imposição de condições na interface por meio do método dos gradientes conjugados, sendo combinado com o critério *Schwarz Neumann-Neumann* em paralelo.

### *4.4.2 Equilíbrio e compatibilidade na interface*

As condições de equilíbrio e compatibilidade são condicionadas pela equação (4.5), ou seja:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_I^{(n),MEC} &= \mathbf{u}_I^{(n),MEF} \\ \mathbf{f}_I^{(n),MEF} &+ \mathbf{T}\,\mathbf{p}_I^{(n),MEC} = \mathbf{0} \end{aligned} \qquad \text{em } \Gamma^{int},\ \text{para } i = 1,...,n \qquad (4.76)$$

desde que os nós locais de ambas as sub-regiões coincidam na interface e ditas condições de equilíbrio e compatibilidade sejam impostas ponto por ponto.

### *4.4.3 Condensação*

O processo de condensação, aplicado no acoplamento numérico para problemas de decomposição do domínio, usualmente é chamado de *subestruturação* ou *método do superelemento*. O método consiste na eliminação das incógnitas que não possuem vínculo com a interface, com o objetivo de otimizar a fase iterativa. Assim, o sistema de equações resultante é conformado apenas por incógnitas referidas à interface. Os passos são descritos a seguir

Seja o sistema de equações resultante da análise na sub-região $\Omega^{MEC}$, impondo-se as condições de contorno, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{CC} & \mathbf{A}_{CI} \\ \mathbf{A}_{IC} & \mathbf{A}_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_C^{(MEC)} \\ \mathbf{x}_I^{(MEC)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_C \\ \mathbf{b}_I \end{Bmatrix} \tag{4.77}$$

denotando por $\mathbf{x}_I^{(MEC)}$ as incógnitas na interface $\Gamma^{int}$, enquanto $\mathbf{x}_C^{(MEC)}$ constitui as incógnitas nos pontos restantes. Eliminando o termo $\mathbf{x}_C^{(MEC)}$ no sistema acima mostrado, resulta:

$$\overline{\mathbf{A}}_{II}\, \mathbf{x}_I^{(MEC)} = \overline{\mathbf{b}}_I \tag{4.78}$$

onde

$$\overline{\mathbf{A}}_{II} = \mathbf{A}_{II} - \mathbf{A}_{IC}\mathbf{A}_{CC}{}^{-1}\mathbf{A}_{CI} \tag{4.79}$$

$$\overline{\mathbf{b}}_I = \mathbf{b}_I - \mathbf{A}_{IC}\mathbf{A}_{CC}{}^{-1}\mathbf{b}_C \tag{4.80}$$

Assim, impondo as condições prescritas de forma similar na sub-região $\Omega^{MEF}$, obtém-se o sistema mostrado a seguir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{FF} & \mathbf{K}_{FI} \\ \mathbf{K}_{IF} & \mathbf{K}_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_F^{(MEF)} \\ \mathbf{x}_I^{(MEF)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_F \\ \mathbf{f}_I \end{Bmatrix} \tag{4.81}$$

Eliminando agora as incógnitas contidas no vetor $\mathbf{x}_F^{(MEF)}$, referentes aos pontos da malha de elementos finitos que não pertencem à interface, resulta:

$$\bar{\mathbf{K}}_{II}\,\mathbf{x}_I^{(MEF)} = \bar{\mathbf{f}}_I \tag{4.82}$$

onde

$$\bar{\mathbf{K}}_{II} = \mathbf{K}_{II} - \mathbf{K}_{IF}\mathbf{K}_{FF}{}^{-1}\mathbf{K}_{FI} \tag{4.83}$$

$$\bar{\mathbf{f}}_I = \mathbf{f}_I - \mathbf{K}_{IF}\mathbf{K}_{FF}{}^{-1}\mathbf{f}_F \tag{4.84}$$

Podendo ser aproveitada a propriedade de simetria da matriz $\mathbf{K}$, a resolução do sistema de equações representativo da sub-região $\Omega^{MEF}$ pode programar-se, por exemplo, implementando o algoritmo de fatorização de *Cholesky*.

Finalmente, a análise das diferentes sub-regiões pode se efetuar em paralelo, após serem resolvidas as incógnitas da interface mediante resolução dos sistemas de equações (4.78) e (4.82).

### *4.4.4 Imposição das condições na interface mediante uso do método dos gradientes conjugados*

O uso do método do gradiente conjugado, em conjunto com os critérios *Schwarz*, evita a prescrição de parâmetros de ajuste, tais como os parâmetros de relaxação anteriormente vistos. Apesar de o método ser aplicável na resolução de sistemas de equações com matriz de coeficientes simétrica e definida positiva, a sua utilização não prejudica a acurácia do processo iterativo, na avaliação das condições na interface [19], pois o método do gradiente conjugado especial, para sistemas com matriz de coeficientes não simétrica, possui uma alta complexidade, resultando em ser pouco apropriado desde o ponto de vista prático.

O esquema consta de duas etapas; o pré-condicionamento e o processo iterativo. O pré-condicionamento consiste em uma série de etapas com a finalidade de garantir um processo iterativo mais eficiente. Dentre as etapas do pré-condicionamento podem ser citadas:

- Cálculo dos coeficientes das matrizes de influência.
- Decomposição LU da matriz do sistema MEC e de *Cholesky* para a matriz do sistema MEF.
- Processo de condensação dos graus de liberdade, descrito na subseção 4.4.3.
- Prescrição de um valor inicial a ser adotado no parâmetro do método dos gradientes conjugados.

O processo iterativo consiste principalmente na avaliação da solução, a atualização das condições na interface e o teste de convergência.

O algoritmo dos gradientes conjugados para a resolução de sistemas de equações lineares é descrito no Anexo C, sendo que o próprio método aplicado na imposição de condições na interface, para o problema do acoplamento iterativo, é apresentado logo a seguir.

*Pré-condicionamento*:

- São computados os coeficientes das matrizes constitutivas e condensadas as incógnitas de ambos os sistemas de equações. Posteriormente se sugere efetuar a fatorização LU da matriz do sistema MEC e de *Cholesky* para a matriz do sistema MEF, com a finalidade de otimizar a fase iterativa de resolução.

*Processo iterativo*:

- Valores iniciais são prescritos para as componentes do vetor que constitui a direção de busca, no método do gradiente conjugado. Tanto o vetor resíduo como o vetor de parâmetros para a análise do erro $\mu$ adotam tais valores iniciais, ou seja:

$$\boldsymbol{\mu}_{I,0} = \mathbf{r}_{I,0} = \mathbf{w}_0 = \bar{\mathbf{w}}_0 \tag{4.85}$$

- Conforme o critério *Schwarz Neumann-Neumann*, são proporcionados valores iniciais para as componentes do vetor fluxo na interface $\Gamma^{int}$, valores dados pela aproximação inicial dos outros dois vetores, ou seja:

$$\mathbf{p}_{I,0}^{(MEC)} = -\mathbf{p}_{I,0}^{(MEF)} = \mathbf{w}_0 \tag{4.86}$$

- Começa o loop iterativo, para $k = 1, \ldots, n_{iter}$;

  a) Resolução em paralelo dos sistemas MEC e MEF, achando-se tanto $\mathbf{u}_{I,k}^{(MEC)}$ quanto $\mathbf{u}_{I,k}^{(MEF)}$. Logo é determinado $\delta\mathbf{u}_{I,k}$ conforme se segue:

$$\delta\mathbf{u}_{I,k} = \mathbf{u}_{I,k}^{(MEC)} - \mathbf{u}_{I,k}^{(MEF)} \tag{4.87}$$

  b) É obtido o coeficiente $\alpha_k$, do método do gradiente conjugado, e posteriormente calculado um novo resíduo:

$$\alpha_k = \frac{\left(\mathbf{r}_{I,k-1}\right)^T \mathbf{r}_{I,k-1}}{\left(\mathbf{w}_{I,k-1}\right)^T \delta\mathbf{u}_{I,k}} \tag{4.88}$$

$$\mathbf{r}_{I,k} = \mathbf{r}_{I,k-1} - \alpha_k \, \delta\mathbf{u}_{I,k} \tag{4.89}$$

  c) É determinado o parâmetro $\beta_k$;

$$\beta_k = \frac{\left(\mathbf{r}_{I,k}\right)^T \mathbf{r}_{I,k}}{\left(\mathbf{r}_{I,k-1}\right)^T \mathbf{r}_{I,k-1}} \tag{4.90}$$

d) Obtém-se uma nova direção de busca, correspondendo a um novo valor de fluxo na interface, ou seja:

$$\mathbf{w}_{I,k} = \mathbf{r}_{I,k} + \beta_k \, \mathbf{w}_{I,k-1} \tag{4.91}$$

$$\mathbf{p}_{I,k}^{(MEC)} = -\mathbf{p}_{I,k}^{(MEF)} = \mathbf{w}_{I,k} \tag{4.92}$$

e) É determinado o parâmetro do erro, sendo logo comparado com aquele inicialmente assumido (ou aquele obtido na iteração anterior), especificando-se um determinado nível de tolerância $\varepsilon$, ou seja:

$$\boldsymbol{\mu}_{I,k} = \boldsymbol{\mu}_{I,k-1} - \alpha_k \, \mathbf{w}_{I,k} \tag{4.93}$$

$$\left| \boldsymbol{\mu}_{I,k} - \boldsymbol{\mu}_{I,k-1} \right| < \varepsilon \tag{4.94}$$

f) Caso não se cumpra a condição (4.94), então o loop iterativo retorna ao item $a)$.

# 5

# Multiplicadores de Lagrange no acoplamento MEC-MEF

## 5.1. Introdução

O método dos multiplicadores de *Lagrange*, frequentemente utilizado na modelagem de vínculos *multiponto* em problemas de contato e impacto, problemas de decomposição de domínio por elementos finitos e em problemas inversos, foi inicialmente formulado por *Lagrange* [68], quem derivou as equações de equilíbrio de sistemas de corpos rígidos considerando-os como corpos livres. Ele obteve uma expressão para a energia total do sistema, por meio do princípio do trabalho virtual, expressa em função das forças de interconexão e identificando as *equações de condição* na interface por meio de relações de compatibilidade.

As *equações de condição* na interface são estabelecidas mediante relações entre variáveis cinemáticas (condicionadas pela diferença entre valores de pressão acústica ou deslocamento), cujo resultado é multiplicado por um coeficiente (multiplicador de *Lagrange*). Este coeficiente corresponde fisicamente à força de contato ou interconexão entre pontos pertencentes a diferentes sub-regiões, na interface, cujos deslocamentos associados são subtraídos na equação de condição correspondente.

A partir da *formulação clássica* do método, dividindo o contínuo em apenas duas sub-regiões, tal como é mostrado na figura 5.1(a), o sistema de equações obtido, tornando estacionário o funcional da energia total, não possui equações redundantes. Isto é devido a que o padrão utilizado na definição dos vínculos de interface é único. Em consequência, as *equações de vínculo* são linearmente independentes. Caso existam pontos na interface vinculando mais de duas sub-regiões, na definição dos vínculos mediante as *equações de condição*, são geradas equações redundantes dentro do sistema de equações, as quais devem ser desconsideradas [77].

No entanto, na *formulação localizada*, uma *linha-esqueleto* ou *pseudo-estrutura* é definida na interface, ao longo da qual se incorporam nós e, portanto, novos graus de liberdade. Assim, os multiplicadores de *Lagrange* constituem forças de contato entre um ponto desta *linha-esqueleto* e um nó local de interface, pertencente a um determinado subdomínio (figura 5.1(b)). Desta forma, o padrão de construção de tais vínculos é único, sem o surgimento de equações de condição redundantes.

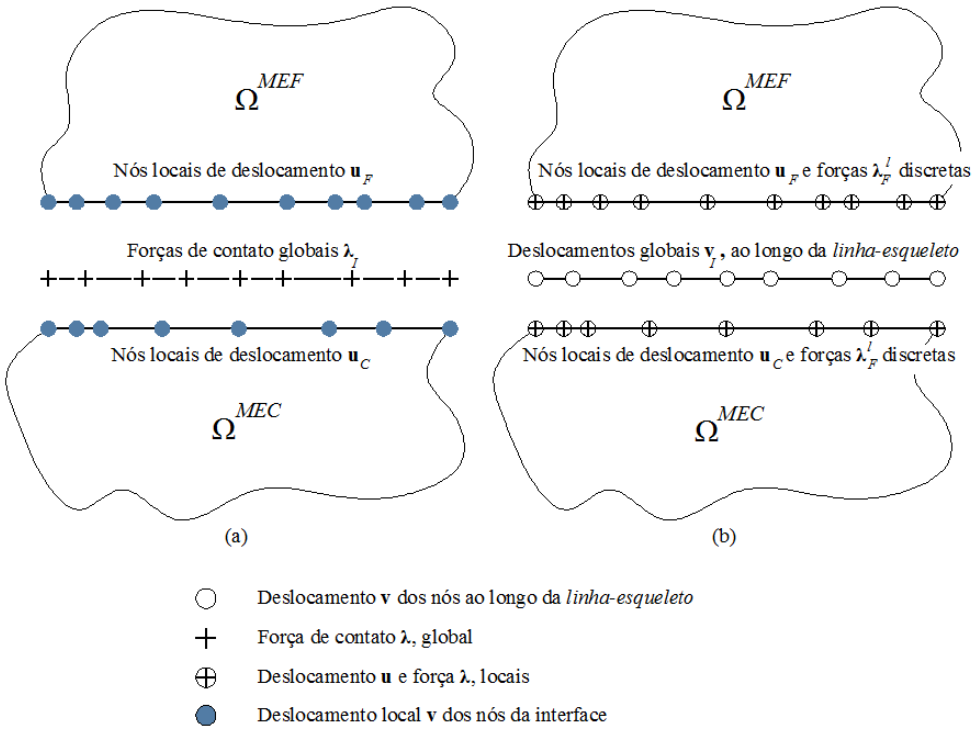


Figura 5.1: Dois esquemas alternativos para o uso de multiplicadores de *Lagrange* com malhas não coincidentes na interface. (a) Multiplicadores de *Lagrange* na sua forma clássica. (b) Multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada.

Os multiplicadores de *Lagrange* são apresentados a seguir para problemas de decomposição do domínio mediante o método dos elementos finitos, posteriormente no acoplamento MEC-MEF. Finalmente, o critério baseado na imposição do *auto-equilíbrio* na estrutura de interface, com o objetivo de ser definida a localização dos nós na *linha*-esqueleto, é descrito no final do capítulo.

## 5.2. Formulação clássica do método dos multiplicadores de *Lagrange*

Considerando o sistema discreto constituído pela união de quatro sub-regiões, simbolicamente representadas pelos traços mostrados na figura 5.2; os vínculos cinemáticos são estabelecidos separando as sub-regiões de uma em uma. Assim, impondo a compatibilidade são obtidas seis *equações de condição*, resultantes da decomposição em corpos livres, obtendo-se algumas equações redundantes, pois não todas são linearmente independentes.

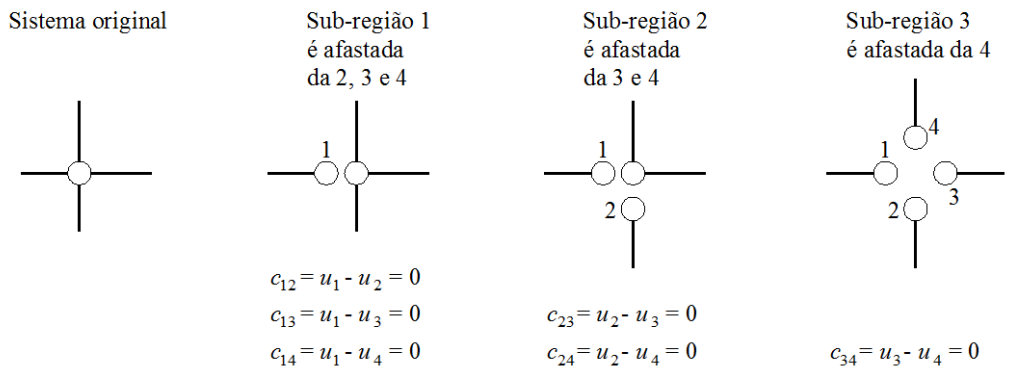


Figura 5.2: Esquema discreto simplificado para um sistema conformado por quatro sub-regiões; multiplicadores de *Lagrange* na sua forma clássica.

A contribuição feita pelo trabalho virtual nos "corpos livres", dentro do funcional de energia, pode ser escrito conforme se segue:

$$W(\mathbf{u}) = W_1(u_1) + W_2(u_2) + W_3(u_3) + W_4(u_4)$$
$$= \sum_{i=1}^{N_s} W_i(u_i) \tag{5.1}$$

A contribuição dos vínculos de interface é dada por:

$$\pi_{cl}(\mathbf{u}, \lambda_{cl}) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j>i}^{m} c_{ij} \lambda_{ij} \tag{5.2}$$

onde o subíndice (*cl*) faz referência à formulação clássica, enquanto $m = 4$ corresponde ao número de sub-regiões interconectadas e o termo $\lambda_{ij}$ denota a força de contato entre os nós locais "*i*" e "*j*", localizados na interface e pertencendo a diferentes sub-regiões (multiplicadores de *Lagrange* são de caráter global). Vale frisar que os coeficientes $c_{ij}$, definindo as equações de condição em (5.2), são sempre funções lineares dos deslocamentos $u_i$ (ver figura 5.2), mesmo se tratando de um problema com lei constitutiva não linear [77].

O funcional da energia total do sistema, a partir das equações (5.1) e (5.2), é dado por:

$$\Pi(\mathbf{u},\lambda_{cl}) = W(\mathbf{u}) + \pi_{cl}(\mathbf{u},\lambda_{cl}) = \sum_{i=1}^{N_s} W_i(u_i) + \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j>i}^{m} c_{ij}\lambda_{ij} \tag{5.3}$$

Em referência à figura 5.2, $c_{23}$, $c_{24}$ e $c_{34}$ fazem parte da expressão (5.3), mas se percebe que $c_{24} - c_{23} = c_{34}$. Portanto, existem vínculos redundantes que devem ser desconsiderados no funcional (5.3). Entretanto, permanecendo unicamente aqueles vínculos linearmente independentes, ter-se-ia, por exemplo:

$$\Pi(\mathbf{u},\lambda_{cl}) = \sum_{i=1}^{N_s} W_i(u_i) + c_{12}\lambda_{12} + c_{13}\lambda_{13} + c_{14}\lambda_{14} \tag{5.4}$$

Naturalmente, na equação anterior é possível escolher diferentes combinações de termos linearmente independentes, a partir das *equações de condição*. O número de combinações possíveis aumenta com o número de subdomínios interconectados, podendo afetar na eficiência computacional conforme seja feita a eleição dos vínculos independentes entre sub-regiões. Por exemplo, a partir de (5.4) os corpos “1” e “2” são vinculados diretamente por meio do coeficiente $c_{12}$, bem como “1” e “3” mediante $c_{13}$ ou “1” e “4” mediante $c_{14}$. No entanto, entre “2” e “4” não existe um vínculo direto.

Os multiplicadores de *Lagrange* $\lambda_{ij}$ na equação (5.4) possuem subíndice duplo, pois são inerentes tanto ao subdomínio “*i*” quanto ao “*j*”, isto é, o multiplicador ou força de contato é de *caráter global*.

Levando a questão para o problema da geração das matrizes mediante discretização por elementos finitos, considerando quatro corpos interconectados conforme se mostra na figura 5.3, a energia total expressa em função dos deslocamentos a das forças de interconexão (multiplicadores de *Lagrange*), escolhendo-se um conjunto de vínculos de compatibilidade linearmente independentes, é dada por:

$$\Pi\left(\mathbf{u},\boldsymbol{\lambda}_{cl}\right)=\mathbf{u}^{T}\left(\frac{1}{2}\mathbf{K}\,\mathbf{u}-\mathbf{f}\right)+\left(\boldsymbol{\lambda}_{cl}\right)^{T}\left(\mathbf{C}_{cl}\right)^{T}\mathbf{u} \tag{5.5}$$

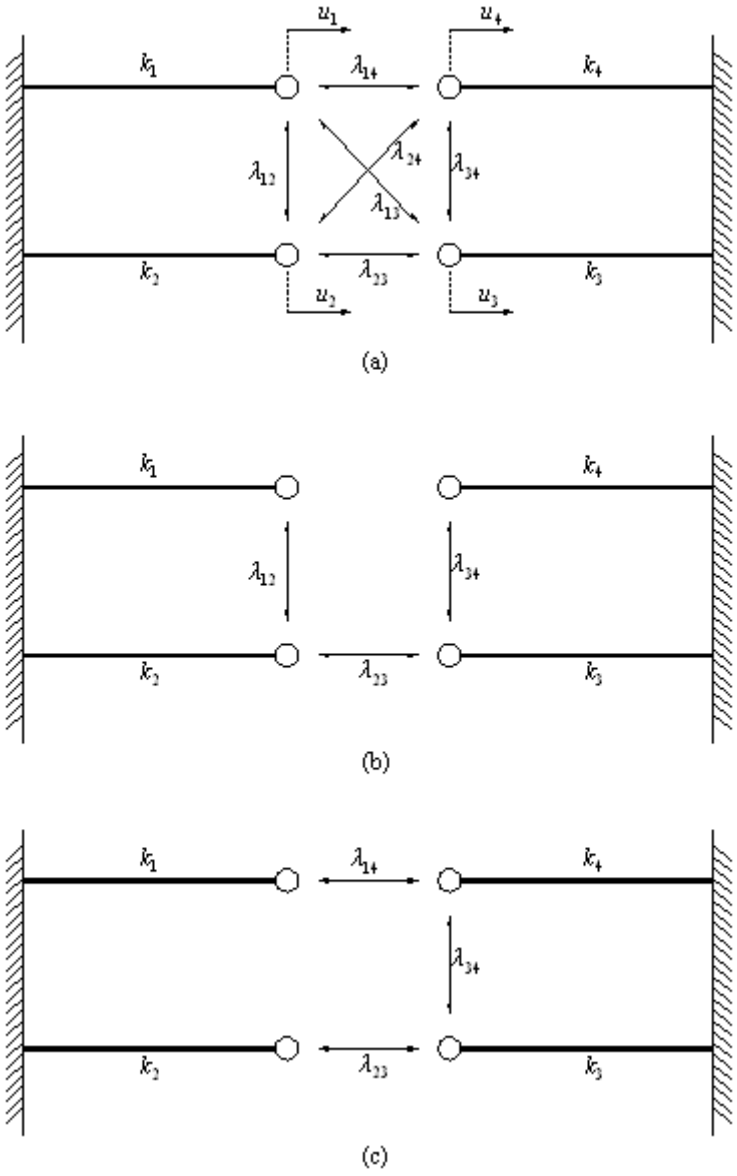


Figura 5.3: Exemplo de sistema conformado por quatro elementos; formulação clássica.
(a) Todos os vínculos possíveis. (b) Vínculos linearmente independentes considerando a opção 1. (c) Vínculos linearmente independentes considerando a opção 2.

expressão na qual $\mathbf{C}_{cl}$ denota a matriz contendo os núcleos das *equações de condição* ou compatibilidade na interface, tendo-se:

$$\boldsymbol{\lambda}_{cl} = \begin{Bmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{23} \\ \lambda_{34} \end{Bmatrix}, \qquad \left(\mathbf{C}_{cl}\right)^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \tag{5.6}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{f} = 0.25 \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \tag{5.7}$$

Nas expressões (5.6) e (5.7) foi considerada a opção “1”, na figura 5.3(b). Fazendo o funcional (5.5) estacionário, em relação tanto a $\mathbf{u}$ quanto a $\boldsymbol{\lambda}_{cl}$, chega-se a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}_{cl} \\ \left(\mathbf{C}_{cl}\right)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda}_{cl} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{5.8}$$

O vetor das forças netas de contato, considerando a opção “1”, é dado por:

$$\mathbf{f}_{\lambda}^{(1)} = \mathbf{C}_{cl}^{(1)}\, \boldsymbol{\lambda}_{cl}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{23} \\ \lambda_{34} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_{12} \\ -\lambda_{12} + \lambda_{23} \\ -\lambda_{23} + \lambda_{34} \\ -\lambda_{34} \end{Bmatrix} \tag{5.9}$$

Se escolhermos a opção “2”, na figura 5.3(c), dito vetor resulta ser:

$$\mathbf{f}_{\lambda}^{(2)} = \mathbf{C}_{cl}^{(2)}\, \boldsymbol{\lambda}_{cl}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{\lambda}_{12} \\ \overline{\lambda}_{23} \\ \overline{\lambda}_{41} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\overline{\lambda}_{41} \\ \overline{\lambda}_{12} \\ -\overline{\lambda}_{12} + \overline{\lambda}_{23} \\ -\overline{\lambda}_{23} + \overline{\lambda}_{41} \end{Bmatrix} \tag{5.10}$$

Apesar do vetor $\mathbf{f}_{\lambda}$ ser invariante, a sua representação depende da escolha feita para os vínculos de interconexão, através da interface. Além isso, a eficiência no fluxo da informação durante a execução dos cálculos em um programa de computador, pode ser afetada usando multiplicadores de *Lagrange* na sua forma clássica, devido às numerosas interconexões que poderiam existir ao longo da interface [77].

## 5.3. Formulação localizada do método dos multiplicadores de *Lagrange*

A partir do esquema mostrado na figura 5.1(b) é definida uma linha imaginária na interface denominada *linha-esqueleto*, ao longo da qual são estabelecidos novos graus de liberdade, de forma tal que as forças de contato sejam referidas a partir destes pontos até os nós locais de interface pertencentes a cada subdomínio. Assim, tais forças de contato são de caráter local, ou seja, referida a apenas uma sub-região. Uma consequência importante, de serem consideradas forças de contato mediante vínculos *esqueleto-subdomínio*, consiste na obtenção de um conjunto único de *equações de condição* linearmente independentes, sem a presença de equações redundantes. Portanto, a *matriz de compatibilidade na interface* $\mathbf{C}_l$ é única (adota-se "*l*" pois os vínculos são estabelecidos por meio de multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada).

No esquema discreto da figura 5.4 o domínio é decomposto em quatro sub-regiões, simbolizadas pelos traços retos. Um nó de referência é definido na interface, denotado por "*v*", adicionando-se um novo grau de liberdade no sistema, de forma tal que cada uma das *equações de condição* inclua o deslocamento $v$, associado a dito nó.

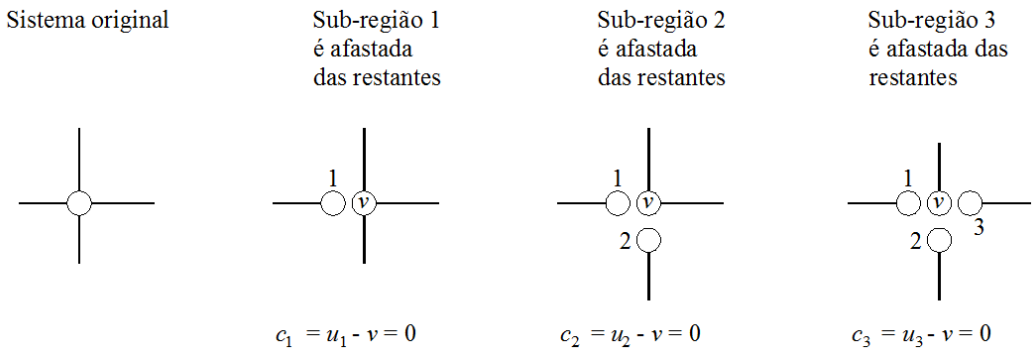


Figura 5.4: Esquema discreto simplificado para um sistema conformado por quatro sub-regiões; multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada.

Decompondo o sistema mediante afastamento sequencial dos corpos "1", "2", "3" e "4", de um por vez (figura 5.4), as *equações de condição* resultam ser:

$$c_1 = u_1 - v \ , \quad c_2 = u_2 - v \ , \quad c_3 = u_3 - v \ , \quad c_4 = u_4 - v \tag{5.11}$$

Os coeficientes $c_i$ possuem apenas um subíndice, devido a que eles são referidos tanto ao esqueleto de interface como a uma única sub-região. A contribuição das expressões (5.11) no funcional de energia é dada por:

$$\pi_l\left(\mathbf{u},\lambda_l,v\right)=\sum_{i=1}^{m}c_i\,\lambda_i \tag{5.12}$$

O funcional da energia total resulta:

$$\begin{aligned}\Pi\left(\mathbf{u},\lambda_l,v\right)&=W\left(\mathbf{u}\right)+\pi_l\left(\mathbf{u},\lambda_l,v\right)\\&=\sum_{i=1}^{N_s}W_i\left(u_i\right)+\sum_{i=1}^{m}c_i\,\lambda_i\end{aligned} \tag{5.13}$$

Voltando o foco para o problema da decomposição de domínio mediante elementos finitos, resolvendo por meio de multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada (figura 5.5), o funcional de energia total do sistema é dado por:

$$\Pi\left(\mathbf{u},\boldsymbol{\lambda}_l,\mathbf{v}\right)=\mathbf{u}^T\left(\frac{1}{2}\mathbf{K}\,\mathbf{u}-\mathbf{f}\right)+\left(\boldsymbol{\lambda}_l\right)^T\mathbf{B}^T\left(\mathbf{u}\text{-}\mathbf{L}\,\mathbf{v}\right) \tag{5.14}$$

onde

$$\mathbf{u}=\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{Bmatrix},\qquad \boldsymbol{\lambda}_l=\begin{Bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{Bmatrix},\qquad \mathbf{f}=0.25\begin{Bmatrix}f_1\\f_2\\f_3\\f_4\end{Bmatrix} \tag{5.15}$$

$$\mathbf{B}^T=\mathbf{I}\left(4\text{x}4\right)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{L}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \tag{5.16}$$

Tornando o funcional de energia estacionário a respeito de $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\lambda}_l$ e $\mathbf{v}$, é obtido um sistema de equações que pode ser escrito conforme se segue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} & -\mathbf{L}_v \\ \mathbf{0} & -(\mathbf{L}_v)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda}_l \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{5.17}$$

onde

$$\mathbf{L}_v = \mathbf{B}^T \mathbf{L} \tag{5.18}$$

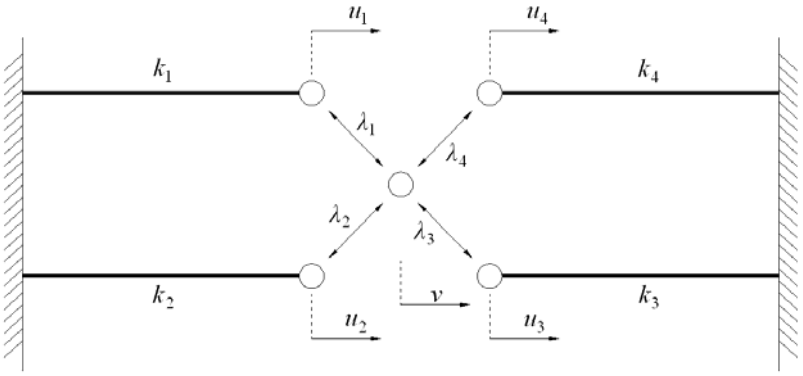


Figura 5.5: Exemplo do sistema conformado por quatro elementos; formulação localizada.

A matriz $\mathbf{B}$, presente no funcional (5.14) e no sistema (5.17), é conhecida como *matriz Booleana*, gerada com o objetivo de filtrar as *equações de condição*, quanto $\mathbf{L}$ corresponde ao *extrator Booleano* dos graus de liberdade da *linha-esqueleto*, na interface.

O sistema de equações (5.17) implica a resolução de três conjuntos de incógnitas, diferentemente do sistema (5.8) mediante a formulação clássica que inclui apenas dois conjuntos. As equações adicionais em (5.17), a respeito de (5.8), são associadas à imposição do equilíbrio da estrutura de interface, como se tratando de um corpo livre, condição que é chamada de *auto-equilíbrio* na interface.

## 5.4. Multiplicadores de *Lagrange* localizados, aplicados no acoplamento MEC-MEF

Os multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada, aplicados a problemas de decomposição de domínio usando acoplamento MEC-MEF, têm sido usados primeiramente em problemas onde os nós de interface, na discretização das diferentes sub-regiões, não coincidem. No entanto, a sua utilização no acoplamento MEC-MEF, considerando discretizações não coincidentes, requer da relaxação das condições na interface, enfraquecendo os requerimentos de equilíbrio e continuidade, de forma a se ter tais condições impostas em um sentido médio, ao longo de um tramo de interface.

A implementação de multiplicadores de *Lagrange* localizados no acoplamento MEC-MEF requer da definição de pontos ao longo da *linha-esqueleto*, cuja localização pode ser estabelecida de forma arbitrária ou conforme algum critério. No presente trabalho ditos pontos são situados de forma a se garantir o equilíbrio rotacional nestes pontos, considerando distribuição constante de esforço normal através da interface, condição que é chamada de *teste de contato na interface* (*interface patch test*), impondo o *auto-equilíbrio* [78]. Dito teste possui sua base na mecânica dos sólidos e das estruturas, e será descrito na seção 5.5.

A seguir será descrita sucintamente a forma variacional, descrevendo a contribuição das diferentes parcelas atuantes no funcional de energia, para o problema do acoplamento MEC-MEF, incluindo os termos que surgem por causa da não conformidade na interface.

Sejam $\Omega^{MEC}$ e $\Omega^{MEF}$ as sub-regiões modeladas pelo MEC e pelo MEF, respectivamente, cuja interface é representada por $\Gamma^{int}$, sendo que as malhas de discretização não coincidem (figura 5.6), é definida uma linha imaginária ao longo da interface $\Gamma^{int}$ denominada *linha-esqueleto*, definindo pontos associados aos graus de liberdade **v** ao longo desta linha.

A primeira variação na expressão do trabalho virtual do sistema é devida à variação das contribuições de cada sub-região, $\delta\pi^{MEC}$ e $\delta\pi^{MEF}$, bem como da parcela referida à *linha-esqueleto*, $\delta\pi^{int}$, ou seja:

$$\delta\Pi^{total} = \delta\pi^{MEC} + \delta\pi^{MEF} + \delta\pi^{int} \tag{5.19}$$

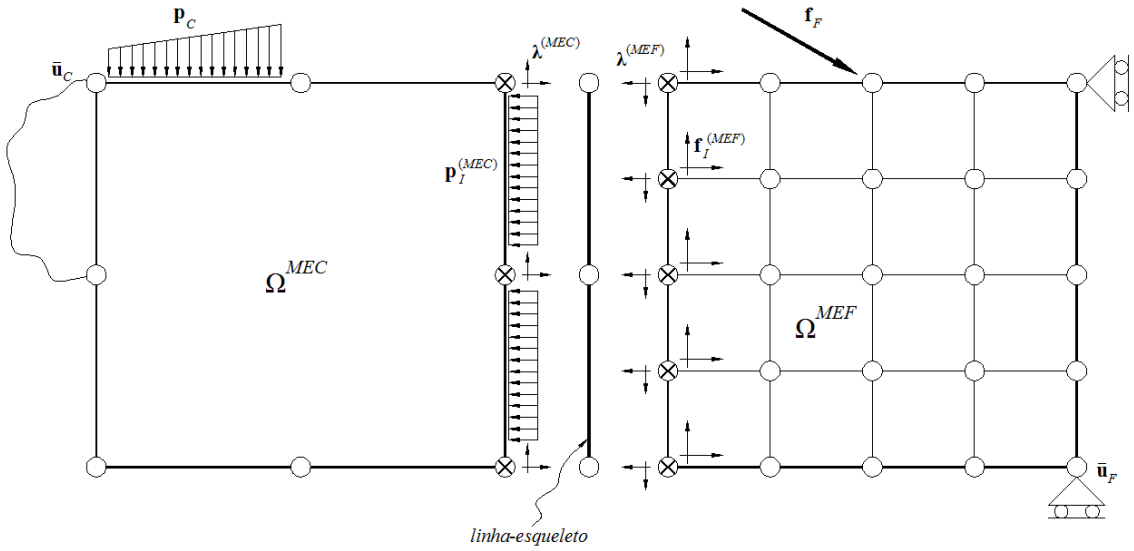


Figura 5.6: Diagrama esquemático no acoplamento de duas sub-regiões, cujas malhas não coincidem na interface. Variáveis envolvidas e discretização da *linha-esqueleto*.

Definindo campos de forças de contato (forças de contato por unidade de comprimento/superfície ao longo da interface), $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{(MEC)}$ e $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{(MEF)}$, a contribuição dos termos da interface $\Gamma^{int}$ no funcional de energia pode se expressar enfraquecendo o requerimento de compatibilidade, isto é [78]:

$$\delta\pi^{int} = \delta\left\{\int_{\Gamma^{int}} \left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{\{i\}}^{(MEC)}\right)^T \left(-\mathbf{v}_{\{i\}} + \mathbf{u}_{I\{i\}}^{(MEC)}\right) d\Gamma^{int}\right\}$$
$$+\delta\left\{\int_{\Gamma^{int}} \left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{\{i\}}^{(MEF)}\right)^T \left(-\mathbf{v}_{\{i\}} + \mathbf{u}_{I\{i\}}^{(MEF)}\right) d\Gamma^{int}\right\} \qquad (5.20)$$

onde $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{\{i\}}^{(MEC)} = \left[\tilde{\lambda}_x^{(MEC)} \quad \tilde{\lambda}_y^{(MEC)}\right]^T$ e $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{\{i\}}^{(MEF)} = \left[\tilde{\lambda}_x^{(MEF)} \quad \tilde{\lambda}_y^{(MEF)}\right]^T$ denotam o valor da força distribuída de contato, nas direções "*x*" e "*y*", em algum ponto de $\Omega^{MEC}$ e $\Omega^{MEF}$, respectivamente, ao longo da interface $\Gamma^{int}$ (símbolo $\{i\}$ para efeitos de integração). A variável $\mathbf{v}_{\{i\}}$ armazena valores de condição essencial (pressão acústica na equação escalar da onda, deslocamento na elasticidade) naquela posição, porém referente à *linha-esqueleto*, sendo que $\mathbf{u}_{I\{i\}}^{(MEC)}$ e $\mathbf{u}_{I\{i\}}^{(MEF)}$ constituem a própria condição essencial nos nós locais de $\Omega^{MEC}$ e $\Omega^{MEF}$, respectivamente, na interface. As variáveis contendo o

subíndice $\{i\}$ na equação (5.20) são funções contínuas e, portanto, os valores associados devem ser interpolados.

As diferentes contribuições envolvidas na expressão para a primeira variação da energia total (5.19) são analisadas a seguir, nas próximas subseções.

### *5.4.1 Trabalho virtual na sub-região modelada pelo MEC*

Após ser feita a discretização do subdomínio $\Omega^{MEC}$, o sistema de equações para os nós do contorno resulta ser:

$$\mathbf{H}\,\mathbf{u}^{(MEC)} - \mathbf{G}\,\mathbf{p}^{(MEC)} = \mathbf{q} \tag{5.21}$$

onde $\mathbf{q}$ representa as contribuições dos instantes anteriores, sendo que $\mathbf{u}^{(MEC)}$ e $\mathbf{p}^{(MEC)}$ denotam os valores nodais da pressão acústica *u* e do fluxo *p* no contorno, respectivamente. O índice *n*, indicando o instante de tempo, foi omitido por simplicidade.

A partir de (5.21), em base ao princípio de *D'Alembert*, onde o termo $\mathbf{H}\,\mathbf{u}^{(MEC)}$ representa a parcela de condição essencial e a força de inércia é associada com a aplicação de forças externas (fluxo), pode-se escrever a contribuição de $\Omega^{MEC}$ no funcional de energia, em termos do trabalho virtual complementar [87]:

$$\delta\pi^{MEC} = \left(\delta\mathbf{p}^{(MEC)}\right)^{T}\left\{\mathbf{H}\,\mathbf{u}^{(MEC)} - \mathbf{G}\,\mathbf{p}^{(MEC)} - \mathbf{q}\right\} \tag{5.22}$$

Vale destacar que, por exemplo, o vetor $\mathbf{p}^{(MEC)}$ contém valores nodais do fluxo tanto no contorno externo, $\mathbf{p}_C^{(MEC)}$, quanto na interface, $\mathbf{p}_I^{(MEC)}$.

### *5.4.2 Trabalho virtual na sub-região modelada pelo MEF*

A contribuição no funcional de energia total para o problema da elasticidade, devida ao elemento "*e*", pertencente à sub-região $\Omega^{MEF}$, é dada por:

$$\pi_{(e)}^{MEF} = \frac{1}{2}\int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{T})^T\, \boldsymbol{\varepsilon}\, d\Omega^{(e)} - \int_{\Omega^{(e)}} \left(\mathbf{u}_{\{i\}}^{(MEF)}\right)^T \mathbf{b}\, d\Omega^{(e)} - \int_{\Gamma^{(e)}} \left(\mathbf{u}_{\{i\}}^{(MEF)}\right)^T \overline{\mathbf{p}}_{\{i\}}\, d\Gamma^{(e)} \qquad (5.23)$$

onde $\mathbf{T}$ denota o tensor de tensões, $\boldsymbol{\varepsilon}$ o tensor de deformação unitária e $\mathbf{b}$ o vetor contendo as componentes da força por unidade de volume. Além disso, $\overline{\mathbf{p}}_{\{i\}}$ constitui o vetor contendo as componentes prescritas do fluxo (ou tração de superfície) e $\mathbf{u}_{\{i\}}^{(MEF)}$ as componentes do deslocamento, referentes a alguma localização dentro do elemento "*e*", para efeitos de integração.

Introduzindo as relações tensão-deformação $\mathbf{T} = \mathbf{D}\,\boldsymbol{\varepsilon}$, de compatibilidade $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla\,\mathbf{u}$ ($\nabla$ é dado por (3.7) ou (3.9)), além da aproximação de elemento finito $\mathbf{u} = \mathbf{N}_f\,\mathbf{u}^{(e)}$ para um determinado elemento "*e*", chega-se à seguinte expressão para a primeira variação da energia total [87], ao nível do elemento "*e*", em função dos valores nodais de $\mathbf{u}$, $\ddot{\mathbf{u}}$ e $\mathbf{f}$:

$$\delta\pi_{(e)}^{MEF} = \left(\delta\mathbf{u}_{(e)}^{(MEF)}\right)^T \left\{\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}_{(e)}^{(MEF)} + \mathbf{K}\,\mathbf{u}_{(e)}^{(MEF)} - \mathbf{f}_{(e)}^{(MEF)}\right\} \qquad (5.24)$$

expressão onde as forças de inércia têm sido incorporadas como forças externas, a partir da segunda integral em (5.23) e usando o princípio de *D'Alembert*, obtendo-se:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{B})^T\, \mathbf{D}\,\mathbf{B}\, d\Omega^{(e)} \qquad (5.25)$$

$$\mathbf{M} = \rho\int_{\Omega^{(e)}} \left(\mathbf{N}_f\right)^T \mathbf{N}_f\, d\Omega^{(e)} \qquad (5.26)$$

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega^{(e)}} \left(\mathbf{N}_f\right)^T \mathbf{b}\, d\Omega^{(e)} + \int_{\Gamma^{(e)}} \left(\mathbf{N}_f\right)^T \overline{\mathbf{p}}\, d\Gamma^{(e)} \qquad (5.27)$$

onde $\mathbf{B} = \nabla\,\mathbf{N}_f$ e $\mathbf{D}$ é a matriz constitutiva do material contendo a informação das propriedades mecânicas. Na expressão (5.26) $\rho$ denota a densidade do meio elástico.

Considerando o trabalho virtual na totalidade da sub-região $\Omega^{MEF}$, em função dos valores nodais de todos os pontos da malha de elementos finitos, resulta finalmente:

$$\delta\pi^{MEF} = \left(\delta\mathbf{u}^{(MEF)}\right)^T \left\{\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}^{(MEF)} + \mathbf{K}\,\mathbf{u}^{(MEF)} - \mathbf{f}^{(MEF)}\right\} \tag{5.28}$$

### *5.4.3 Trabalho virtual nos pontos ao longo da linha-esqueleto*

Seja $\mathbf{v}$ o vetor contendo os valores de pressão acústica (na elasticidade, de deslocamento) nos pontos localizados ao longo da *linha-esqueleto*, conforme se mostra na figura 5.7. O valor interpolado $\mathbf{v}_{\{i\}}$ em algum ponto desta linha é dado por:

$$\mathbf{v}_{\{i\}} = v = \mathbf{N}_v\,\mathbf{v} = \left[\, N_v^{(1)}(\xi_1) \quad \ldots \quad N_v^{(nv)}(\xi_{nv}) \,\right] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{nv} \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

sendo $nv$ o número de nós definidos na *pseudo-estrutura* de interface, $v_j$ os valores nodais de pressão acústica (ou deslocamento) ao longo desta linha e $N_v^{(j)}$ as funções de interpolação, onde $j = 1, \ldots, nv$.

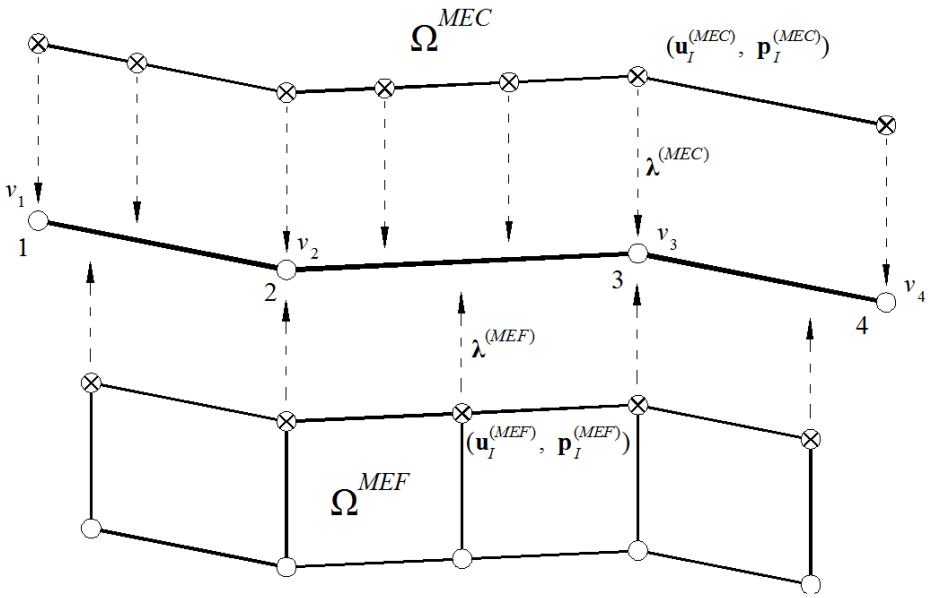


Figura 5.7: Esquema de discretização em torno da *linha-esqueleto*. Forças de contato representadas por multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada.

Incorporando aproximações mediante funções de interpolação, ao nível do elemento $e_C$ para $\Omega^{MEC}$, $e_F$ para $\Omega^{MEF}$ e $e_I$ para a *linha-esqueleto*, tem-se:

$$\mathbf{u}_{\{i\}}^{(MEC)} = \mathbf{N}_{c,u}\, \mathbf{u}_{(e_C)}^{(MEC)} \tag{5.30}$$

$$\mathbf{p}_{\{i\}}^{(MEC)} = \mathbf{N}_{c,p}\, \mathbf{p}_{(e_C)}^{(MEC)} \tag{5.31}$$

$$\mathbf{u}_{\{i\}}^{(MEF)} = \mathbf{N}_{f}\, \mathbf{u}_{(e_F)}^{(MEF)} \tag{5.32}$$

$$v_{\{i\}} = \mathbf{N}_{v}\, \mathbf{v}_{(e_I)} \tag{5.33}$$

As forças de contato na interface, representadas matematicamente por meio de multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada, podem ser aproximadas, por exemplo, mediante colocação no contorno, assumindo-as como forças concentradas (pontuais). Denotando os vetores que contêm as componentes de tais forças por $\boldsymbol{\lambda}_{\{i\}}^{(MEC)}$ e $\boldsymbol{\lambda}_{\{i\}}^{(MEF)}$ em alguma posição ao longo da interface, bem como seus valores nodais associados nos nós locais, $\left(\boldsymbol{\lambda}_{(e_C)}^{(MEC)}\right)_j$ e $\left(\boldsymbol{\lambda}_{(e_F)}^{(MEF)}\right)_j$, em referência aos elementos $e_C$ e $e_F$, respectivamente, a seguir são expressas as suas aproximações por colocação mediante funções *delta de Dirac*:

$$\boldsymbol{\lambda}_{\{i\}}^{(MEC)}(\boldsymbol{\xi}_C) = \sum_{j=1}^{nmec} \delta\left(\boldsymbol{\xi}_C - \boldsymbol{\xi}_{Cj}\right) \left(\boldsymbol{\lambda}_{(e_C)}^{(MEC)}\right)_j \tag{5.34}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{\{i\}}^{(MEF)}(\boldsymbol{\xi}_F) = \sum_{j=1}^{nmef} \delta\left(\boldsymbol{\xi}_F - \boldsymbol{\xi}_{Fj}\right) \left(\boldsymbol{\lambda}_{(e_F)}^{(MEF)}\right)_j \tag{5.35}$$

onde as coordenadas intrínsecas são dadas por $\boldsymbol{\xi}_C = \left(\xi_C^x, \xi_C^y\right)$ e $\boldsymbol{\xi}_F = \left(\xi_F^x, \xi_F^y\right)$, denotando por *nmec* e *nmef* o número de nós de interface nos elementos $e_C$ e $e_F$, respectivamente, sendo $\boldsymbol{\xi}_{Cj}$ e $\boldsymbol{\xi}_{Fj}$ as coordenadas nodais intrínsecas.

Substituindo (5.34) e (5.35) dentro da expressão (5.20), válida para todos os pontos ao longo da *linha-esqueleto*, chega-se à expressão para a primeira variação da contribuição da *linha-esqueleto* no funcional de energia mostrada a seguir [87], em função dos valores nodais de $\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}$, $\boldsymbol{\lambda}^{(MEF)}$, $\mathbf{u}_I^{(MEC)}$, $\mathbf{u}_I^{(MEF)}$ e $\mathbf{v}$:

$$\delta\pi^{int} = \delta\left\{\left(\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}\right)^T\left(\mathbf{u}_I^{(MEC)} - \mathbf{L}_C\,\mathbf{v}\right)\right\} + \delta\left\{\left(\boldsymbol{\lambda}^{(MEF)}\right)^T\left(\mathbf{u}_I^{(MEF)} - \mathbf{L}_F\,\mathbf{v}\right)\right\} \tag{5.36}$$

onde:

$$\mathbf{L}_C = \int_{\Gamma_{int}} \delta\left(\xi_C - \xi_{Ci}\right)\mathbf{N}_v\, d\Gamma_{int} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_C = \mathbf{N}_v\left(\xi_{Ci}\right) \tag{5.37}$$

$$\mathbf{L}_F = \int_{\Gamma_{int}} \delta\left(\xi_F - \xi_{Fi}\right)\mathbf{N}_v\, d\Gamma_{int} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_F = \mathbf{N}_v\left(\xi_{Fi}\right) \tag{5.38}$$

denotam as *funções de forma* ao longo da *linha-esqueleto*, avaliadas nos nós de interface $\Gamma^{int}$ pertencentes às sub-regiões $\Omega^{MEC}$ e $\Omega^{MEF}$, respectivamente.

É importante ressaltar que uma aproximação de ordem superior para as forças de contato na interface incorpora maior cumplicidade nas integrais (5.37) e (5.38), implicando em uma maior acurácia.

### *5.4.4 Relação entre a força de contato $\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}$ e o fluxo ou força por unidade de superfície $\mathbf{p}_I^{(MEC)}$*

As incógnitas no sistema de equações resultante do MEC são o potencial ou pressão acústica $\mathbf{u}^{(MEC)}$ e o fluxo $\mathbf{p}^{(MEC)}$, enquanto a contribuição dos pontos da *linha-esqueleto* na expressão da energia total tem sido expressa em termos de $\mathbf{u}^{(MEC)}$ e a força de contato $\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}$ na interface, além de $\mathbf{u}^{(MEF)}$, $\boldsymbol{\lambda}^{(MEF)}$ e $\mathbf{v}$.

De acordo com a figura 5.8, levando em consideração (5.30) e (5.31), além de ser transformada a carga distribuída em forças pontuais equivalentes (*lumping*), nos nós "*j*1" e "*j*2" do elemento de interface "*j*", na sub-região $\Omega^{MEC}$, é possível se obter uma relação entre $\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}$ e $\mathbf{p}_I^{(MEC)}$ no elemento "*j*" [87], mediante a incorporação de uma

parcela adicional dentro da primeira variação da energia total do sistema, conforme se segue:

$$\delta\pi_{\Gamma_j}^{lump} = \int_{\Gamma_j} \left(\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{\{i\}}^{(MEC)}\right)^T \mathbf{p}_{\{i\}}^{(MEC)}\, d\Gamma_j - \left(\delta\mathbf{u}_{\Gamma_j}^{(MEC)}\right)^T \boldsymbol{\lambda}_{\Gamma_j}^{(MEC)}$$

$$= \left(\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{\Gamma_j}^{(MEC)}\right)^T \left\{ \left( \int_{\Gamma_j} \left(\mathbf{N}_{c,p}\right)^T \mathbf{N}_{c,p}\, d\Gamma_j \right) \mathbf{p}_{\Gamma_j}^{(MEC)} - \boldsymbol{\lambda}_{\Gamma_j}^{(MEC)} \right\}$$

$$= \left(\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{\Gamma_j}^{(MEC)}\right)^T \left\{ \mathbf{T}_{\Gamma_j}\, \mathbf{p}_{\Gamma_j}^{(MEC)} - \boldsymbol{\lambda}_{\Gamma_j}^{(MEC)} \right\} \qquad (5.39)$$

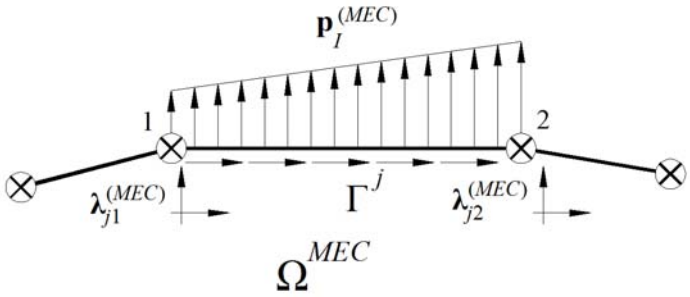


Figura 5.8: Esquema da relação existente entre fluxo ou trações de superfície e os valores nodais das forças de contato (multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada).

Na expressão (5.39) tem-se $\mathbf{u}_{\Gamma_j}^{(MEC)} = \left\{ \left(\mathbf{u}_{j1}^{(MEC)}\right)^T \quad \left(\mathbf{u}_{j2}^{(MEC)}\right)^T \right\}^T$, obtendo-se expressões similares para $\mathbf{p}_{\Gamma_j}^{(MEC)}$ e $\boldsymbol{\lambda}_{\Gamma_j}^{(MEC)}$, sendo que $\mathbf{N}_{c,p}$ denota a matriz contendo as funções de interpolação para o fluxo ou trações de superfície *p*, onde a matriz $\mathbf{T}_{\Gamma_j}$ é dada por:

$$\mathbf{T}_{\Gamma_j} = \int_{\Gamma_j} \left(\mathbf{N}_{c,p}\right)^T \mathbf{N}_{c,p}\, d\Gamma_j \qquad (5.40)$$

Aplicando para a totalidade dos nós de interface (na sub-região $\Omega^{MEC}$), tem-se:

$$\delta\pi^{lump} = \left(\delta\mathbf{u}_I^{(MEC)}\right)^T \left\{ \mathbf{T}_{\Gamma^{int}}\, \mathbf{p}_I^{(MEC)} - \boldsymbol{\lambda}^{(MEC)} \right\} \qquad (5.41)$$

sendo $\mathbf{T}_{\Gamma^{int}}$ a matriz que possibilita a transformação de valores do fluxo ou forças de superfície, $\mathbf{p}_I^{(MEC)}$, em forças de contato inerentes aos vínculos *esqueleto-subdomínio*, $\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}$ (multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada), similarmente àquela apresentada em (4.5) e (4.6).

### *5.4.5 Sistema de equações resultante para o sistema acoplado MEC-MEF*

O trabalho virtual do sistema acoplado, considerando as contribuições das sub-regiões $\Omega^{MEC}$ e $\Omega^{MEF}$, da *linha-esqueleto* ao longo da interface $\Gamma^{int}$ e aquela devida ao efeito do *lumping*, é dado por:

$$\begin{aligned}
\delta\Pi^{total} &= \delta\pi^{MEC} + \delta\pi^{MEF} + \delta\pi^{int} + \delta\pi^{lump} \\
&= \left(\delta\mathbf{p}^{(MEC)}\right)^T \left\{\mathbf{H}\,\mathbf{u}^{(MEC)} - \mathbf{G}\,\mathbf{p}^{(MEC)} - \mathbf{q}\right\} + \left(\delta\mathbf{u}_I^{(MEC)}\right)^T \left\{\mathbf{T}\,\mathbf{p}_I^{(MEC)} - \boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}\right\} \\
&\quad + \left(\delta\mathbf{u}^{(MEF)}\right)^T \left\{\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}^{(MEF)} + \mathbf{K}\,\mathbf{u}^{(MEF)} - \mathbf{f}^{(MEF)}\right\} \\
&\quad + \delta\left(\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}\right)^T \left(\mathbf{u}_I^{(MEC)} - \mathbf{L}_C\,\mathbf{v}\right) + \delta\left(\boldsymbol{\lambda}^{(MEF)}\right)^T \left(\mathbf{u}_I^{(MEF)} - \mathbf{L}_F\,\mathbf{v}\right) \\
&\quad + \delta\left(\mathbf{v}\right)^T \left(-\left(\mathbf{L}_C\right)^T \boldsymbol{\lambda}^{(MEC)} - \left(\mathbf{L}_F\right)^T \boldsymbol{\lambda}^{(MEF)}\right)
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Tornando o funcional estacionário, chega-se a:

$$\mathbf{H}\,\mathbf{u}^{(MEC)} - \mathbf{G}\,\mathbf{p}^{(MEC)} - \mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{5.43}$$

$$\mathbf{T}\,\mathbf{p}_I^{(MEC)} - \boldsymbol{\lambda}^{(MEC)} = \mathbf{0} \tag{5.44}$$

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}^{(MEF)} + \mathbf{K}\,\mathbf{u}^{(MEF)} - \mathbf{f}^{(MEF)} = \mathbf{0} \tag{5.45}$$

$$\mathbf{u}_I^{(MEC)} - \mathbf{L}_C\,\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{5.46}$$

$$\mathbf{u}_I^{(MEF)} - \mathbf{L}_F\,\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{5.47}$$

$$\left(\mathbf{L}_C\right)^T \boldsymbol{\lambda}^{(MEC)} + \left(\mathbf{L}_F\right)^T \boldsymbol{\lambda}^{(MEF)} = \mathbf{0} \tag{5.48}$$

As equações acima obtidas são referidas a:

- Equação (5.43); equação que rege o problema na sub-região $\Omega^{MEC}$.
- Equação (5.44); transforma fluxo, ou forças de superfície, em forças pontuais de contato inerentes aos vínculos *esqueleto-subdomínio* (multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada) na interface $\Gamma^{int}$.
- Equação (5.45); equação que rege o problema na sub-região $\Omega^{MEF}$.
- Equação (5.46); impõe a compatibilidade de forma aproximada, entre a condição essencial nos pontos locais de interface, pertencentes à sub-região $\Omega^{MEC}$, e os correspondentes valores nos pontos definidos sobre a *linha-esqueleto*.
- Equação (5.47); impõe a compatibilidade de forma aproximada, entre a condição essencial nos pontos locais de interface, pertencentes à sub-região $\Omega^{MEF}$, e os correspondentes valores nos pontos definidos sobre a *linha-esqueleto*.
- Equação (5.48); estabelece a condição de *auto-equilíbrio* na interface, considerando a *linha-esqueleto* como se tratando de um corpo livre, envolvendo as forças de contato definidas localmente em relação a cada subdomínio.

Como forma alternativa, a eliminação do termo $\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}$ é possível a partir de (5.44) e (5.48), resultando em:

$$\left(\mathbf{L}_C\right)^T \mathbf{T}\,\mathbf{p}_I^{(MEC)} + \left(\mathbf{L}_F\right)^T \boldsymbol{\lambda}^{(MEF)} = \mathbf{0} \qquad (5.49)$$

## 5.5. Teste de contato na interface, na definição da localização dos pontos ao longo da *linha-esqueleto*

O teste de contato na interface foi inicialmente concebido na resolução de problemas de contato/impacto [80,81]. No presente trabalho tem sido usado no estabelecimento de um critério para ser definida a localização dos pontos ao longo da estrutura de interface, ou *linha-esqueleto*, em conjunto com um determinado esquema de acoplamento iterativo, procedimento que será descrito na presente seção. A técnica se fundamenta em princípios da mecânica e da análise de estruturas, onde a *linha-esqueleto* ou *pseudo-estrutura* de interface é idealizada em forma de uma viga, sob ação das forças de contato (multiplicadores de *Lagrange* localizados) consistentes em cargas

pontuais aplicadas no sentido transverso (cisalhe) à *pseudo-estrutura*, de forma a se ter momento nulo nestes pontos, considerando uma distribuição de esforço constante através dos elementos de interface, tanto de $\Omega^{MEC}$ como de $\Omega^{MEF}$.

### *5.5.1 Expressão geral para as funções de forma $L_C$ e $L_F$*

Em referência à equação (5.48), tal como foi mencionado anteriormente, as forças de contato podem ser determinadas considerando aproximações diferentes daquelas expressões de colocação descritas em (5.34) e (5.35). Além disso, vale frisar que os valores nodais destas forças (multiplicadores de *Lagrange* localizados), $\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}$ e $\boldsymbol{\lambda}^{(MEF)}$, são atribuídos aos nós locais de interface de $\Omega^{MEC}$ e $\Omega^{MEF}$, enquanto os valores nodais de pressão acústica (na elasticidade, de deslocamento) $\mathbf{v}$ são referidos aos pontos definidos sobre a *linha-esqueleto*, os quais geralmente não coincidem com os nós locais.

Assim, o cálculo de expressões do tipo (5.20) requer da integração do produto entre os esquemas de interpolação para $\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}$ (e/ou $\boldsymbol{\lambda}^{(MEF)}$) e para $\mathbf{v}$. Por exemplo, assumindo funções de interpolação $\mathbf{N}_{\lambda}^{(MEC)}$ ao nível do elemento $e_C$ e $\mathbf{N}_{\lambda}^{(MEF)}$ no elemento $e_F$, as forças de contato podem ser representadas conforme se segue:

$$\boldsymbol{\lambda}_{\{i\}}^{(MEC)} = \mathbf{N}_{\lambda}^{(MEC)}\, \boldsymbol{\lambda}_{(e_C)}^{(MEC)} \tag{5.50}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{\{i\}}^{(MEF)} = \mathbf{N}_{\lambda}^{(MEF)}\, \boldsymbol{\lambda}_{(e_F)}^{(MEC)} \tag{5.51}$$

Incorporando tais aproximações, em conjunto com (5.30) a (5.33), dentro de (5.20), generalizando para todos os pontos sobre a *linha-esqueleto*, obtém-se:

$$\mathbf{L}_C = \int_{\Gamma^{int}} \left(\mathbf{N}_{\lambda}^{(MEC)}\right)^T \mathbf{N}_v \, d\Gamma^{int} \tag{5.52}$$

$$\mathbf{L}_F = \int_{\Gamma^{int}} \left(\mathbf{N}_{\lambda}^{(MEF)}\right)^T \mathbf{N}_v \, d\Gamma^{int} \tag{5.53}$$

### 5.5.2 *Determinação das forças de contato sob condição de esforço constante através do elemento de interface* (*teste de contato na interface*)

A primeira etapa, na definição da localização dos pontos ao longo da *linha-esqueleto* (figura 5.9), consiste na determinação das forças de contato $\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}$ e $\boldsymbol{\lambda}^{(MEF)}$ nos nós locais de interface, referentes a cada sub-região, correspondentes a uma distribuição de esforço constante através dos elementos de interface, garantindo a condição de *auto-equilíbrio* desta *linha-esqueleto*.

As forças de contato são obtidas mediante a relação de compatibilidade entre deformação unitária e deslocamento, avaliando-a no centro geométrico do elemento de interface "*e*", obtendo-se $\mathbf{B}^{(e)}(\mathbf{0})$.

Assim, o vetor de força nodal referente ao elemento "*e*", considerando a condição de esforço constante $\mathbf{T}_c$, é dado por:

$$\mathbf{f}^{(e)} = V\left[\mathbf{B}^{(e)}(\mathbf{0})\right]^T \mathbf{T}_c \tag{5.54}$$

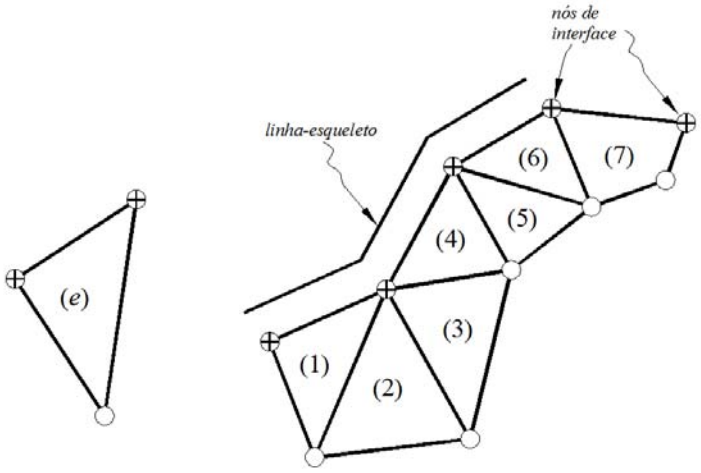


Figura 5.9: Esquema de discretização baseado em elementos triangulares, na interface, para a determinação das forças de contato sob aplicação de esforço constante.

onde *V* denota o tamanho do elemento (comprimento, área ou volume). A partir da expressão resultante para $\mathbf{f}^{(e)}$, calculando para os *nv* elementos que conformam a *linha-esqueleto*, na interface $\Gamma^{int}$, as forças de contato (multiplicadores de *Lagrange* na sua

forma localizada), deduzidas a partir da condição de esforço constante, $\boldsymbol{\lambda}_l(\mathbf{T}_c)$, são obtidas conforme se segue:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \left[ \left(\mathbf{f}^{(1)}\right)^T \quad \left(\mathbf{f}^{(2)}\right)^T \quad \ldots \quad \left(\mathbf{f}^{(nv)}\right)^T \right]^T \tag{5.55}$$

$$\mathbf{f}_\Gamma = \left(\mathbf{A}_\Gamma\right)^T \tilde{\mathbf{f}} \tag{5.56}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_l(\mathbf{T}_c) = \mathbf{L}^T \mathbf{f}_\Gamma \tag{5.57}$$

Nas equações mostradas acima $\tilde{\mathbf{f}}$ constitui o conjunto de vetores de força nodal para cada elemento de interface pertencente a $\Omega^{MEF}$ (ou $\Omega^{MEC}$) e $\mathbf{A}_\Gamma$ representa a matriz que permite efetuar a montagem destes vetores para o vetor global de força nodal $\mathbf{f}_\Gamma$, considerando a totalidade dos nós de interface na sub-região. Enquanto isso, $\mathbf{L}$ corresponde à matriz *Booleana* que extrai unicamente aqueles graus de liberdade que contribuem na determinação de cada força de contato. Se os pontos ao longo da *linha-esqueleto* coincidem com os nós locais de interface, então $\mathbf{L}$ é igual à matriz identidade.

### *5.5.3 Localização dos nós de interface ao longo da linha-esqueleto (condição de auto-equilíbrio na pseudo-estrutura de interface)*

Na figura 5.10(a) são representadas as forças de contato $\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}$ e $\boldsymbol{\lambda}^{(MEF)}$ (multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada) na interface $\Gamma^{int}$ e na figura 5.10(b) é esquematizada a *linha-esqueleto* como se tratando de um corpo livre, supondo-a em estado de *auto-equilíbrio*, incluindo as forças de contato provenientes de ambas as sub-regiões $\Omega^{MEC}$ e $\Omega^{MEF}$.

Na figura 5.10(c) são mostrados os vetores contendo as componentes da força interna $\mathbf{n}_j$ e do momento interno $\mathbf{m}_j$, ambos associados ao equilíbrio de translação e rotação em torno ao ponto "*j*", respectivamente, na seção da *linha-esqueleto* que está sendo analisada. Estabelecendo as forças e momentos internos, bem como sua condição essencial associada, para cada nó "*j*" ao longo da *linha-esqueleto*, tem-se:

$$\boldsymbol{\lambda}_j = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}_j \\ \mathbf{m}_j \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{v}_j = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_{xj} \\ \mathbf{v}_{\theta j} \end{Bmatrix} \tag{5.58}$$

Supondo $M$ o número de nós a serem localizados ao longo da *pseudo-estrutura* de interface, a primeira variação da contribuição na expressão da energia total de tais forças e momentos internos, $\mathbf{n}_j$ e $\mathbf{m}_j$, em cada ponto "*j*" de coordenadas $\mathbf{x}_j$ ( $j = 1, \ldots, M$ ), a partir da expressão (5.20) na sua forma discreta, é dada por:

$$\delta\pi^{int}(\boldsymbol{\lambda}, \delta\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{M} \left(\boldsymbol{\lambda}_j\right)^T \delta\mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{M} \left(\mathbf{n}_j\right)^T \delta\mathbf{v}_{xj} + \sum_{j=1}^{M} \left(\mathbf{m}_j\right)^T \delta\mathbf{v}_{\theta j} = 0 \tag{5.59}$$

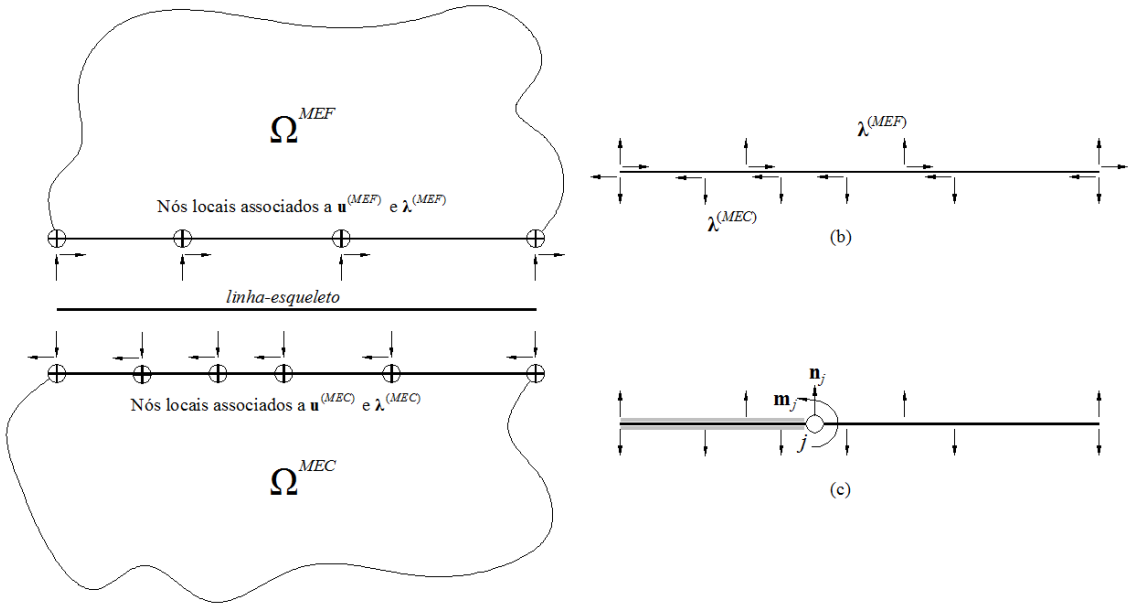


Figura 5.10: Forças de contato na localização dos pontos ao longo da *linha-esqueleto*, conforme o teste de contato na interface $\Gamma^{int}$
(a) Forças de contato provenientes dos nós locais de cada sub-região
(b) Forças de contato sobre a *linha-esqueleto*, na imposição da condição de *auto-equilíbrio*
(c) Força transversal e momento flexionante para a localização de tais pontos.

A imposição do equilíbrio na *pseudo-estrutura* de interface, tornando o funcional da energia estacionário, implica igualar ao zero a expressão (5.59). Assim, as forças de contato $\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}$ e $\boldsymbol{\lambda}^{(MEF)}$, obtidas assumindo a condição de esforço constante através dos elementos de interface, condicionam a definição do número de pontos, bem como a sua localização ao longo desta linha.

Cabe frisar que, ao ser imposta a condição de *auto-equilíbrio* na *pseudo-estrutura* de interface, o equilíbrio nas sub-regiões é garantido, incorporando as próprias forças de contato correspondentes ($\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}$ e $\boldsymbol{\lambda}^{(MEF)}$) de acordo com o princípio da ação-reação. Esta hipótese, com base na estática de sistemas de corpos livres interconectados, é crucial para se estabelecer a localização dos pontos impondo o *auto-equilíbrio* ao longo desta *linha-esqueleto*.

Na dedução do funcional da energia total, resulta conveniente decompor a condição essencial (pressão acústica na equação escalar da onda, deslocamento na elasticidade) em modos de deformação e em movimentos de corpo rígido, resultando em um funcional dependente de quatro campos de variáveis [78]. É possível deduzir que a contribuição (5.36), no funcional da energia total, não gera mudanças na energia de deformação quando as sub-regiões são assembladas; porém, os únicos valores de pressão acústica (na elasticidade, de deslocamento) que não mudam a energia de deformação, na análise da *linha-esqueleto* como corpo livre, são os movimentos de corpo rígido [78]. Portanto, os únicos valores linearmente independentes de condição essencial a serem considerados em (5.59) são:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^r_{x1} &= \mathbf{v}^r_{x1} = \ldots = \mathbf{v}^r_{xM} = \boldsymbol{\alpha}_x \\ \mathbf{v}^r_{\theta 1} &= \mathbf{v}^r_{\theta 1} = \ldots = \mathbf{v}^r_{\theta M} = \boldsymbol{\alpha}_\theta \end{aligned} \tag{5.60}$$

Em consequência, a expressão (5.59) torna-se:

$$\delta\pi^{int}\left(\boldsymbol{\lambda}, \delta\mathbf{v}\right) = \left[\sum_{j=1}^{M}\left(\mathbf{n}_j\right)^T\right]\delta\boldsymbol{\alpha}_x + \left[\sum_{j=1}^{M}\left(\mathbf{m}_j\right)^T\right]\delta\boldsymbol{\alpha}_\theta = 0 \tag{5.61}$$

Sendo que, a partir da figura 5.10c, as forças internas $\mathbf{n}_j$ e os momentos internos $\mathbf{m}_j$ são expressos em função das forças de contato (multiplicadores de *Lagrange* localizados), a localização dos pontos "*j*" ainda não se conhece. Portanto, resulta conveniente efetuar um ordenamento destas forças, $\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}$ e $\boldsymbol{\lambda}^{(MEF)}$, estabelecendo uma coordenada "*x*" de referência para os nós locais, onde tais forças estão sendo aplicadas, fazendo uma busca a partir do $\min(x)$ até o $\max(x)$, com a finalidade de serem

obtidas expressões válidas para $\mathbf{n}_j\left(x_j\right)$ e $\mathbf{m}_j\left(x_j\right)$, achando-se a coordenada $x_j$ daqueles pontos "*j*" ( $j=1,\ldots,M$ ) de forma a se ter $\mathbf{m}_j\left(x_j\right)=\mathbf{0}$. Por exemplo, da esquerda à direita, no setor escurecido da *linha-esqueleto* da figura 5.10(c), representando cada corte ou seção de análise na *linha-esqueleto*, ter-se-ia para todos os pontos "*j*":

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{n}\\ \mathbf{m}\end{Bmatrix}=\mathbf{T}_l\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}\\ \boldsymbol{\lambda}^{(MEF)}\end{Bmatrix} \tag{5.62}$$

Cabe frisar que a primeira soma em (5.61) corresponde à condição de equilíbrio translacional na *linha-esqueleto*, condição que é identicamente satisfeita, permitindo apenas o cálculo da força cortante, no *teste de contato na interface*, sem se obter informação acerca da posição destes pontos, como pode ser apreciado nos exemplos na próxima subseção. A expressão resultante para o momento interno, em qualquer ponto da *pseudo-estrutura* de interface, a partir da segunda soma em (5.61), resulta ser função linear das coordenadas dos pontos locais, onde a forças de contato $\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}$ e $\boldsymbol{\lambda}^{(MEF)}$ são aplicadas. Assim, será suficiente considerar aproximação linear como função de interpolação para a condição essencial $\mathbf{v}$ nos pontos da *linha-esqueleto*.

Devido a que o número de pontos *M*, na *pseudo-estrutura* de interface, não se conhece, formular a expressão resultante de (5.61) como sistema de equações não possui sentido. Portanto, se prefere efetuar um processo de varredura para serem achados ditos pontos, obtendo-se o número *M* após concluído dito processo.

Lembrando que a contribuição da *linha-esqueleto*, dentro da expressão variacional do funcional da energia, é dada pela expressão (5.20), ou seja:

$$\begin{aligned}\delta\pi^{int}=&\,\delta\left\{\int_{\Gamma^{int}}\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{\{i\}}^{(MEC)}\right)^T\left(-\mathbf{v}_{\{i\}}+\mathbf{u}_{I\{i\}}^{(MEC)}\right)d\Gamma^{int}\right\}\\ &+\delta\left\{\int_{\Gamma^{int}}\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{\{i\}}^{(MEF)}\right)^T\left(-\mathbf{v}_{\{i\}}+\mathbf{u}_{I\{i\}}^{(MEF)}\right)d\Gamma^{int}\right\}\end{aligned} \tag{5.20}$$

e devido a que as forças de contato são representadas mediante colocação (expressões (5.34) e (5.35)), em referência aos nós locais de $\Omega^{MEC}$ e $\Omega^{MEF}$, na expressão anterior tem-se:

$$\delta\left\{\int_{\Gamma^{int}}\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{\{i\}}^{(MEC)}\right)^T\mathbf{u}_{I\{i\}}^{(MEC)}\,d\Gamma^{int}\right\}=\delta\left\{\left(\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}\right)^T\mathbf{u}_I^{(MEC)}\right\} \tag{5.63}$$

$$\delta\left\{\int_{\Gamma^{int}}\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{\{i\}}^{(MEF)}\right)^T\mathbf{u}_{I\{i\}}^{(MEF)}\,d\Gamma^{int}\right\}=\delta\left\{\left(\boldsymbol{\lambda}^{(MEF)}\right)^T\mathbf{u}_I^{(MEF)}\right\} \tag{5.64}$$

Portanto, a representação das forças de contato $\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}$ e $\boldsymbol{\lambda}^{(MEF)}$ mediante colocação reduz as integrais envolvendo os deslocamentos $\mathbf{v}$ conforme se segue:

$$\delta\left\{\int_{\Gamma^{int}}\left(\boldsymbol{\lambda}_{\{i\}}^{(MEC)}\right)^T\mathbf{v}_{\{i\}}\,d\Gamma^{int}\right\}=\delta\left\{\left(\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}\right)^T\mathbf{L}_C\,\mathbf{v}\right\} \tag{5.65}$$

$$\delta\left\{\int_{\Gamma^{int}}\left(\boldsymbol{\lambda}_{\{i\}}^{(MEF)}\right)^T\mathbf{v}_{\{i\}}\,d\Gamma^{int}\right\}=\delta\left\{\left(\boldsymbol{\lambda}^{(MEF)}\right)^T\mathbf{L}_F\,\mathbf{v}\right\} \tag{5.66}$$

onde as matrizes $\mathbf{L}_C$ e $\mathbf{L}_F$ constituem os interpoladores de condição essencial $\mathbf{v}$ para os nós da *linha-esqueleto*, sendo dita condição avaliada nos nós locais de $\Omega^{MEC}$ e $\Omega^{MEF}$, respectivamente, na interface. Assim, substituindo (5.63), (5.64), (5.65) e (5.66) na expressão (5.20), tornando o funcional estacionário, chega-se a:

$$\begin{aligned}\delta\pi^{int}=&\begin{Bmatrix}\delta\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}\\ \delta\boldsymbol{\lambda}^{(MEF)}\end{Bmatrix}^T\left(\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_I^{(MEC)}\\ \mathbf{u}_I^{(MEF)}\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{L}_C\\ \mathbf{L}_F\end{bmatrix}\mathbf{v}\right)\\ &+\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}\\ \boldsymbol{\lambda}^{(MEF)}\end{Bmatrix}^T\left(\begin{Bmatrix}\delta\mathbf{u}_I^{(MEC)}\\ \delta\mathbf{u}_I^{(MEF)}\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{L}_C\\ \mathbf{L}_F\end{bmatrix}\delta\mathbf{v}\right)=0\end{aligned} \tag{5.67}$$

O anterior implica que:

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_I^{(MEC)}\\ \mathbf{u}_I^{(MEF)}\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{L}_C\\ \mathbf{L}_F\end{bmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0}\qquad\qquad\begin{bmatrix}\left(\mathbf{L}_C\right)^T & \left(\mathbf{L}_F\right)^T\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}\\ \boldsymbol{\lambda}^{(MEF)}\end{Bmatrix}=\mathbf{0} \tag{5.68}$$

O primeiro conjunto de equações (5.68) impõe a compatibilidade de valores de condição essencial, entre os nós locais de cada sub-região e os pontos definidos ao longo da *linha-esqueleto*, de acordo com o *teste de contato de interface*, enquanto o segundo conjunto constitui a condição de equilíbrio na interface.

Cabe frisar que os termos envolvendo $\delta\mathbf{u}_I^{(MEC)}$ e $\delta\mathbf{u}_I^{(MEF)}$, na equação (5.67), não aparecem em (5.68), pois tais termos são diretamente incorporados dentro das equações de equilíbrio de cada sub-região, ou seja, nas contribuições (5.22) e (5.28) para $\delta\pi^{MEC}$ e $\delta\pi^{MEF}$, respectivamente.

Devido a que o esquema de acoplamento desenvolvido no presente trabalho é de caráter iterativo, as incógnitas $\mathbf{v}$ precisam ser eliminadas do primeiro conjunto de equações (5.68). Pode se demonstrar que a utilização de multiplicadores de *Lagrange* na sua *forma clássica* levaria à obtenção de uma expressão direta de $\mathbf{u}_I^{(MEC)}$ em função de $\mathbf{u}_I^{(MEF)}$, ou vice-versa, porém não existe uma única forma de serem estabelecidos tais vínculos, implicando que a solução não seja única. Devido a isto, normalmente se adota um procedimento de redução por meio de mínimos quadrados, de forma a se ter:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_I^{(MEC)} = \mathbf{L}_{FC}\mathbf{u}_I^{(MEF)} \\ \mathbf{u}_I^{(MEF)} = \mathbf{L}_{CF}\mathbf{u}_I^{(MEC)} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \mathbf{I}_C \\ \mathbf{L}_{FC} \end{bmatrix} \mathbf{u}_I^{(MEC)} - \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{CF} \\ \mathbf{I}_F \end{bmatrix} \mathbf{u}_I^{(MEF)} = \mathbf{0} \tag{5.69}$$

onde $\mathbf{I}_C$ e $\mathbf{I}_F$ denotam matrizes identidade. O anterior implicaria [78]:

$$\mathbf{u}_I^{(MEC)} = \mathbf{L}_{FC}^{MQ}\, \mathbf{u}_I^{(MEF)} \tag{5.70}$$

onde:

$$\mathbf{L}_{CF}^{MQ} = \left[ \mathbf{I}_C + \left(\mathbf{L}_{FC}\right)^T \mathbf{L}_{FC} \right]^{-1} - \left[ \mathbf{L}_{CF} + \left(\mathbf{L}_{FC}\right)^T \right] \tag{5.71}$$

Um desenvolvimento similar pode ser efetuado com a finalidade de expressar $\mathbf{u}_I^{(MEF)}$ em função de $\mathbf{u}_I^{(MEC)}$.

No entanto, usando multiplicadores de *Lagrange* na sua *forma localizada* também é possível se efetuar algumas transformações, com o objetivo de ser eliminada

a variável $\mathbf{v}$ dentro do primeiro conjunto de equações (5.68). A partir do espaço nulo das matrizes $\mathbf{L}_C$ e $\mathbf{L}_F$, ter-se-ia:

$$\mathbf{NS}_{CF} = \begin{bmatrix} \mathbf{NS}_C & \mathbf{NS}_F \end{bmatrix} = \text{null} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_C \\ \mathbf{L}_F \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{NS}_{CF} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_C \\ \mathbf{L}_F \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{5.72}$$

A matriz $\mathbf{NS}_{CF}$, contendo o espaço nulo de $\mathbf{L}_C$ e $\mathbf{L}_F$, ao multiplicar-se pela esquerda na primeira das expressões (5.68), chega-se a:

$$\mathbf{NS}_{CF} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_I^{(MEC)} \\ \mathbf{u}_I^{(MEF)} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{NS}_C \, \mathbf{u}_I^{(MEC)} = -\mathbf{NS}_F \, \mathbf{u}_I^{(MEF)} \tag{5.73}$$

As matrizes $\mathbf{NS}_C$ e $\mathbf{NS}_F$ usualmente não são invertíveis, na obtenção de $\mathbf{u}_I^{(MEC)}$ em função de $\mathbf{u}_I^{(MEF)}$, ou vice-versa, porém o procedimento usual na determinação de $\mathbf{NS}_{CF}$ consiste na resolução de (5.72) mediante eliminação *gaussiana*, adotando valores arbitrários e convenientes para as variáveis redundantes de forma a se ter vetores linearmente independentes conformando dito espaço nulo. Tais valores arbitrários podem ser fornecidos com a finalidade de facilitar a obtenção de uma transformação direta de $\mathbf{u}_I^{(MEC)}$ para $\mathbf{u}_I^{(MEF)}$, ou vice-versa, tal como será visto nos exemplos mostrados a seguir.

### *5.5.4 Exemplos na obtenção da localização dos pontos ao longo da pseudo-estrutura de interface*

A seguir são apresentados alguns exemplos de implementação considerando diferentes ordens de aproximação da incógnita, bem como o caso de discretizações não coincidentes, para os elementos de interface de cada sub-região, incluindo a obtenção da localização dos pontos sobre a *linha-esqueleto* conforme o critério estabelecido pelo *teste de contato na interface*, descrito anteriormente.

Na figura 5.11 ilustra-se o primeiro exemplo; a sub-região $\Omega^{MEC}$ é discretizada por meio de elementos quadráticos e a sub-região $\Omega^{MEF}$ é modelada usando-se

elementos lineares. Apesar dos nós locais de $\Omega^{MEC}$ e $\Omega^{MEF}$ coincidirem na interface, as correspondentes funções de interpolação possuem diferentes ordens de aproximação. Portanto, pretende-se mostrar a influência que aquele fato tem no processo de localizar os pontos ao longo da *pseudo-estrutura* de interface.

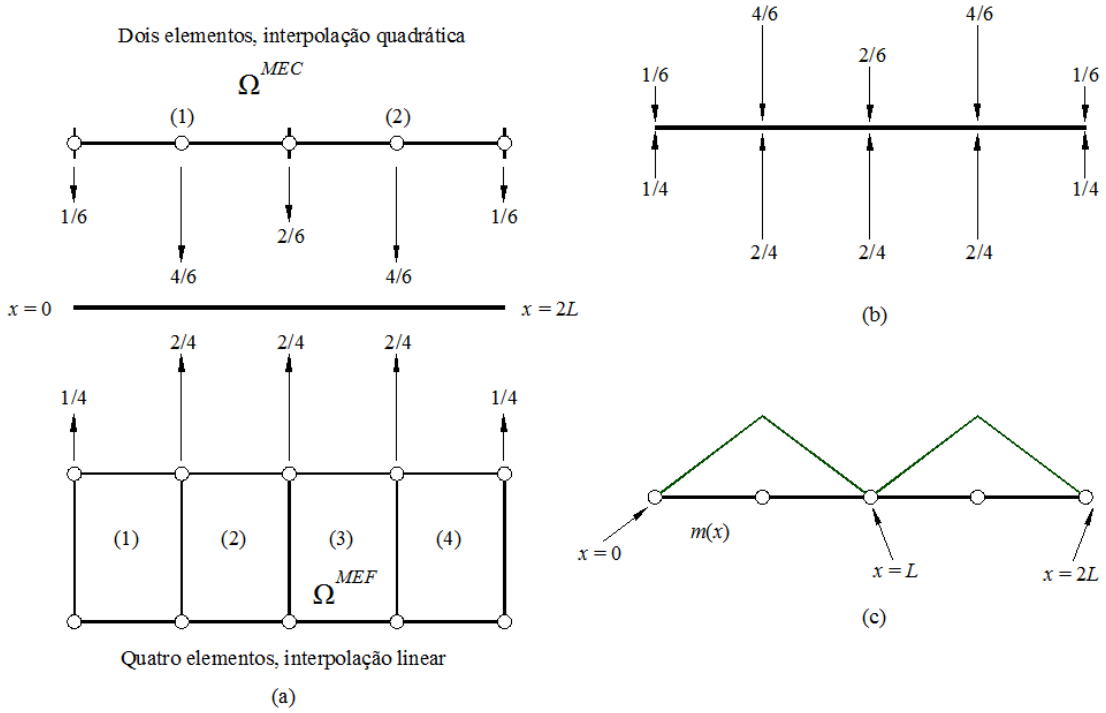


Figura 5.11: Exemplo para malhas com nós coincidentes na interface $\Gamma^{int}$, funções de interpolação de diferente ordem de aproximação (a) Forças de contato aplicadas nos nós locais de $\Omega^{MEC}$ e $\Omega^{MEF}$, na interface (b) Forças de contato aplicadas ao longo da *linha-esqueleto* (c) Diagrama de momento flexionante e localização dos pontos associados a momento nulo.

Na figura 5.11(a) são representadas as forças de contato $\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}$ e $\boldsymbol{\lambda}^{(MEF)}$, obtidas para a condição de esforço constante $\sigma_{yy}$, através dos elementos de interface de $\Omega^{MEC}$ e $\Omega^{MEF}$, respectivamente. Posteriormente, na figura 5.11(b), as forças são aplicadas sobre a *linha-esqueleto* de acordo com o princípio da ação-reação. Finalmente é traçado o diagrama de momento flexionante, na figura 5.11(c), considerando a *pseudo-estrutura* como sendo uma viga submetida a cargas transversais. As seções de análise para a construção de dito diagrama de momento foram consideradas sequencialmente da esquerda à direita, conforme esquematizado na figura 5.11(b).

A partir do diagrama de momento flexionante, percebe-se claramente acerca da existência de três pontos ao longo da *linha-esqueleto* onde o momento é nulo; em $x = 0$, $x = L$ $x = 2L$. Portanto, tais pontos são os escolhidos para se definir o esquema de discretização na *pseudo-estrutura* de interface.

Conforme descrito na subseção anterior, aproximação linear é suficiente para representar a condição essencial $\mathbf{v}$ nos pontos da *linha-esqueleto*. Assim, denotando os seus valores nodais por $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(x=0)$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}(x=L)$ e $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}(x=2L)$, a aproximação pode ser representada por:

$$\mathbf{v} = \begin{cases} (1 - x/L)\,\mathbf{v}_1 + (x/L)\,\mathbf{v}_2 & , \quad 0 \le x \le L \\ (1 - [x-L]/L)\,\mathbf{v}_2 + ([x-L]/L)\,\mathbf{v}_3 & , \quad L \le x \le 2L \end{cases} \tag{5.74}$$

onde os vetores locais $\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)}$, $\boldsymbol{\lambda}^{(MEF)}$, $\mathbf{u}_I^{(MEC)}$ e $\mathbf{u}_I^{(MEF)}$, no presente exemplo, são dados por:

$$\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)} = \begin{Bmatrix} \lambda_{(1)} \\ \lambda_{(2)} \\ \lambda_{(3)} \\ \lambda_{(4)} \\ \lambda_{(5)} \end{Bmatrix}^{(MEC)} \quad \boldsymbol{\lambda}^{(MEF)} = \begin{Bmatrix} \lambda_{(1)} \\ \lambda_{(2)} \\ \lambda_{(3)} \\ \lambda_{(4)} \\ \lambda_{(5)} \end{Bmatrix}^{(MEF)} \quad \mathbf{u}_I^{(MEC)} = \begin{Bmatrix} u_{(1)} \\ u_{(2)} \\ u_{(3)} \\ u_{(4)} \\ u_{(5)} \end{Bmatrix}^{(MEC)} \quad \mathbf{u}_I^{(MEF)} = \begin{Bmatrix} u_{(1)} \\ u_{(2)} \\ u_{(3)} \\ u_{(4)} \\ u_{(5)} \end{Bmatrix}^{(MEF)} \tag{5.75}$$

e as matrizes contendo os interpoladores de interface, junto com o vetor condição essencial nos pontos da *linha-esqueleto*, resultam ser:

$$\mathbf{L}_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \tag{5.76}$$

Determinando-se o espaço nulo das matrizes $\mathbf{L}_C$ e $\mathbf{L}_F$, resolvendo o sistema (5.72) mediante eliminação *gaussiana*, fornecendo tanto valores "0" quanto "1" nas variáveis redundantes durante a construção dos vetores, chega-se a:

$$\mathbf{NS}_{CF} = \left[\begin{array}{cccccccccc} & & & & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\mathbf{NS}_C} & & & & & \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\mathbf{NS}_F} & & & & \end{array}\right] \tag{5.77}$$

Por exemplo, desconsiderando as duas primeiras linhas, incorporando apenas as últimas cinco linhas de ambas submatrizes dentro do sistema (5.73), é possível se obter uma expressão de $\mathbf{u}_I^{(MEF)}$ em função de $\mathbf{u}_I^{(MEC)}$, para posteriormente ser usada no processo de transferência de variáveis de condição essencial na interface, no esquema de acoplamento iterativo:

$$\mathbf{u}_I^{(MEF)} = -\mathbf{NS}_C^{red}\ \mathbf{u}_I^{(MEC)} \tag{5.78}$$

onde

$$\mathbf{NS}_C^{red} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.79}$$

constitui a matriz $\mathbf{NS}_C$ reduzida.

O segundo exemplo é apresentado na figura 5.12, onde o esquema de discretização é gerado utilizando-se diferentes ordens de aproximação e, além disso, os nós locais de interface de ambas as sub-regiões, não coincidem. Na figura 5.12(a) são

mostradas as forças de contato aplicadas nos pontos locais de cada sub-região e na figura 5.12(b) tais forças são transmitidas à *pseudo-estrutura* de interface, de acordo com o princípio da ação-reação. Na figura 5.12(c) é traçado o diagrama de momento resultante incluindo os pontos onde o momento é igual ao zero.

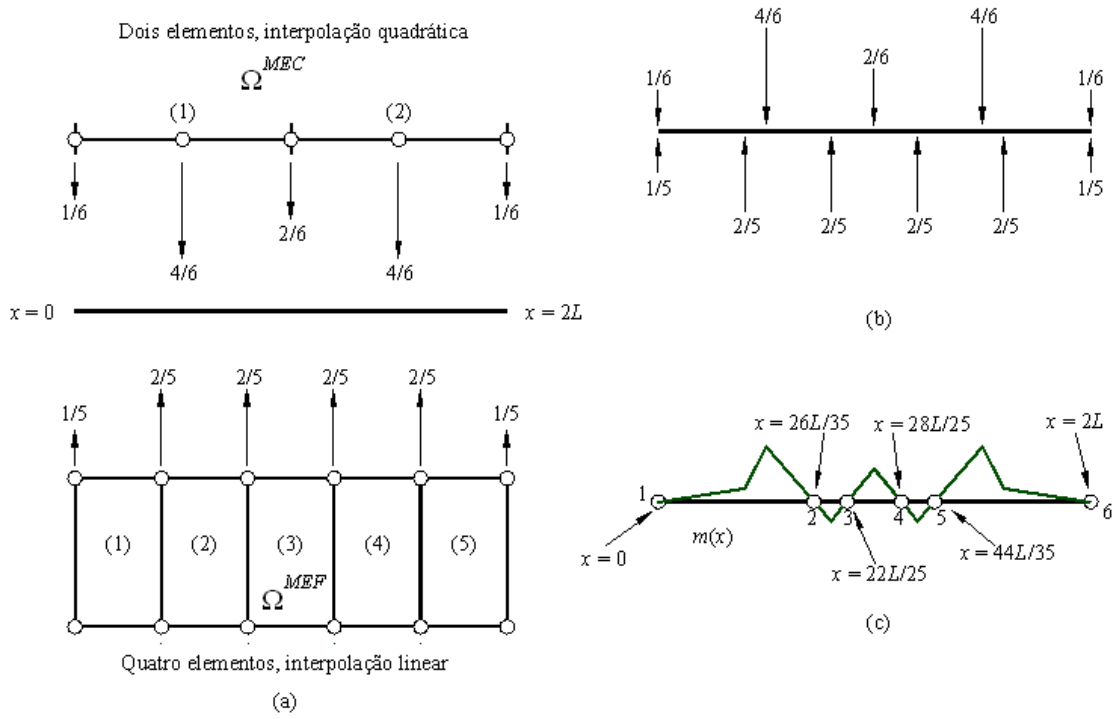


Figura 5.12: Exemplo para malhas com nós não coincidentes na interface $\Gamma^{int}$, funções de interpolação de diferente ordem de aproximação (a) Forças de contato aplicadas nos nós locais de $\Omega^{MEC}$ e $\Omega^{MEF}$, na interface (b) Forças de contato aplicadas ao longo da *linha-esqueleto* (c) Diagrama de momento flexionante e localização dos pontos associados a momento nulo

A sub-região $\Omega^{MEC}$ é discretizada mediante elementos quadráticos e $\Omega^{MEF}$ usando elementos lineares, conforme é mostrado na figura 5.12(a) para a análise de dois elementos quadráticos e cinco elementos lineares, percebendo-se claramente que os nós de interface de ambas as sub-regiões não coincidem.

Os seis pontos de inflexão, no diagrama de momento flexionante, definem os nós que representarão a variação dos deslocamentos $\mathbf{v}$ ao longo da *linha-esqueleto*. As matrizes contendo os interpoladores de condição essencial na interface são dadas por:

$$\mathbf{L}_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6/13 & 7/13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7/12 & 5/12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/12 & 7/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7/13 & 6/13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 17/52 & 35/52 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 35/52 & 17/52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.80}$$

sendo, dessa vez, $\mathbf{v} = \{v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5 \quad v_6\}^T$. Os vetores locais resultam ser:

$$\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)} = \begin{Bmatrix} \lambda_{(1)} \\ \lambda_{(2)} \\ \lambda_{(3)} \\ \lambda_{(4)} \\ \lambda_{(5)} \end{Bmatrix}^{(MEC)} \qquad \boldsymbol{\lambda}^{(MEF)} = \begin{Bmatrix} \lambda_{(1)} \\ \lambda_{(2)} \\ \lambda_{(3)} \\ \lambda_{(4)} \\ \lambda_{(5)} \\ \lambda_{(6)} \end{Bmatrix}^{(MEF)} \qquad \mathbf{u}_I^{(MEC)} = \begin{Bmatrix} u_{(1)} \\ u_{(2)} \\ u_{(3)} \\ u_{(4)} \\ u_{(5)} \end{Bmatrix}^{(MEC)} \qquad \mathbf{u}_I^{(MEF)} = \begin{Bmatrix} u_{(1)} \\ u_{(2)} \\ u_{(3)} \\ u_{(4)} \\ u_{(5)} \\ u_{(6)} \end{Bmatrix}^{(MEF)} \tag{5.81}$$

Portanto, a matriz contendo o espaço nulo das matrizes $\mathbf{L}_C$ e $\mathbf{L}_F$ é dada por:

$$\mathbf{NS}_{CF} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & -5/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3/5 & 13/10 & -6/5 & -6/5 & 13/10 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}}_{\mathbf{NS}_C} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{NS}_F} \end{bmatrix}$$

cujas submatrizes, após serem introduzidas em (5.73), geram novamente uma expressão para $\mathbf{u}_I^{(MEF)}$ em função de $\mathbf{u}_I^{(MEC)}$:

$$\mathbf{u}_I^{(MEF)} = -\mathbf{NS}_C^{red}\ \mathbf{u}_I^{(MEC)} \tag{5.82}$$

onde

$$\mathbf{NS}_C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & -5/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3/5 & 13/10 & -6/5 & -6/5 & 13/10 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{5.83}$$

Resumindo, sendo dadas a geometria de discretização das sub-regiões e a ordem de aproximação da condição essencial e das forças de contato na interface, é possível deduzir a posição dos pontos ao longo da estrutura de interface (*linha-esqueleto*), mediante o *teste de contato*, baseado em considerações da estática assumindo distribuição de esforço constante através dos elementos de interface. Posteriormente é possível se obter as matrizes de interpolação referentes aos vínculos de condição essencial na interface. A determinação do espaço nulo destas matrizes permite efetuar a eliminação da variável correspondente à condição essencial nos pontos da *linha-esqueleto*, possibilitando a utilização do método dos multiplicadores de *Lagrange* na sua *forma localizada* em conjunto com esquemas de acoplamento iterativo-sequencial, entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos.

Finalmente, resta lembrar que as transformações necessárias nas relações de compatibilidade na interface implicam maior esforço do que as equivalentes transformações usando-se multiplicadores de *Lagrange* na sua *forma clássica*, porém a unicidade na solução é garantida no primeiro caso, devido ao estabelecimento de vínculos provenientes de equações de condição linearmente independentes.

# 6

# Implementação e resultados

## 6.1. Descrição do código e fluxograma

### *6.1.1 Descrição geral do código*

O programa MEC-MEF foi gerado no projeto nomeado TDBEM-FEM V1.2, no entorno Microsoft Visual Studio 2010 em linguagem FORTRAN, sendo implementado com a finalidade da modelação numérica do fenômeno da propagação de ondas mediante um algoritmo de acoplamento iterativo MEC-MEF de caráter sequencial, considerando nós locais de ambas as sub-regiões coincidentes ou não coincidentes na interface, permitindo a escolha de diferentes passos de tempo na análise dinâmica de cada sub-região.

No esquema de acoplamento MEC-MEF, a sub-região $\Omega^{MEC}$ foi modelada pelo MEC, incorporando a *solução fundamental* dinâmica (formulação TDMEC) da equação escalar da onda, estabelecendo-se a geometria do contorno de acordo com funções de interpolação lineares, com inclusão de nós duplos, enquanto a sub-região $\Omega^{MEF}$ foi analisada mediante o MEF de acordo com a formulação por colocação para problemas lineares e elásticos, considerando elementos triangulares ou quadrilaterais lineares, segundo a escolha feita pelo usuário.

A respeito da análise do subdomínio $\Omega^{MEC}$, o eixo do tempo é discretizado usando funções de interpolação constante e linear para aproximar o fluxo (derivada normal da pressão acústica, no contorno), incorporando o método $\theta$-linear (*theta-up*) no último caso. Enquanto isso, diferentes métodos de marcha no tempo foram testados na análise da sub-região $\Omega^{MEF}$, tais como *Houbolt*, *Newmark* e o método da função de *Green* explícita (ExGA-*Runge Kutta*, ExGA-diferença central).

A entrada de dados é fornecida de forma separada, mediante um arquivo de dados para cada sub-região, além de um terceiro arquivo contendo a informação referente à correspondência de graus de liberdade na interface. O nome de cada um destes três arquivos deve ser fornecido através da tela, durante a execução. Na pasta principal do programa existem outras pastas indicando armazenamento dos distintos arquivos de entrada de dados e de saída dos resultados. As pastas são as seguintes:

INPUT_MEC: Armazena o arquivo contendo os dados da sub-região modelada pelo MEC, $\Omega^{MEC}$;

INPUT_MEC-MEF: Armazena o arquivo contendo os dados da compatibilidade entre os nós locais de ambas as sub-regiões na interface, incluindo alguns dados do processo iterativo;

INPUT_MEF: Armazena o arquivo contendo os dados da sub-região modelada pelo MEF, $\Omega^{MEF}$ ;

OUTPUT_MEC: Armazena o arquivo gerado durante a execução do programa, contendo a informação de saída referida aos resultados na sub-região $\Omega^{MEC}$ ;

OUTPUT_MEF: Armazena o arquivo gerado durante a execução do programa, contendo a informação de saída referida aos resultados na sub-região $\Omega^{MEF}$ ;

Os arquivos de dados e de resultados são reconhecidos pelo programa mediante o identificador ou nome, possuindo, no máximo, 25 caracteres incluindo a sua extensão, sugerindo-se preferentemente o uso de extensões “TXT” ou “DAT”.

### *6.1.2 Fluxograma*

Uma etapa necessária na descrição dos programas consiste em definir o diagrama de fluxo ou fluxograma; isto com a finalidade de proporcionar uma ideia geral acerca da sequência de execução das múltiplas tarefas inclusas nas diferentes unidades de programa. O fluxograma simplificado é mostrado a seguir (figura 6.1), enquanto que os diferentes processos envolvidos pelas unidades de programa mais relevantes são expostos no anexo D.

A partir da figura 6.1 se visualiza que a unidade de programa principal MEC-MEF é a encarregada de encomendar as principais etapas do cálculo às diferentes sub-rotinas, tais como a leitura dos dados gerais da geometria, da marcha no tempo, das condições de contorno e iniciais, bem como o cálculo das matrizes de elemento, montagem das matrizes globais, numeração das equações de cada sistema de equações resultante, condensação de matrizes, etc. No entanto, a unidade de programa principal é também a encarregada de efetuar tanto o *loop* da marcha no tempo do esquema de acoplamento quanto o *loop* do processo iterativo, além de outras tarefas.

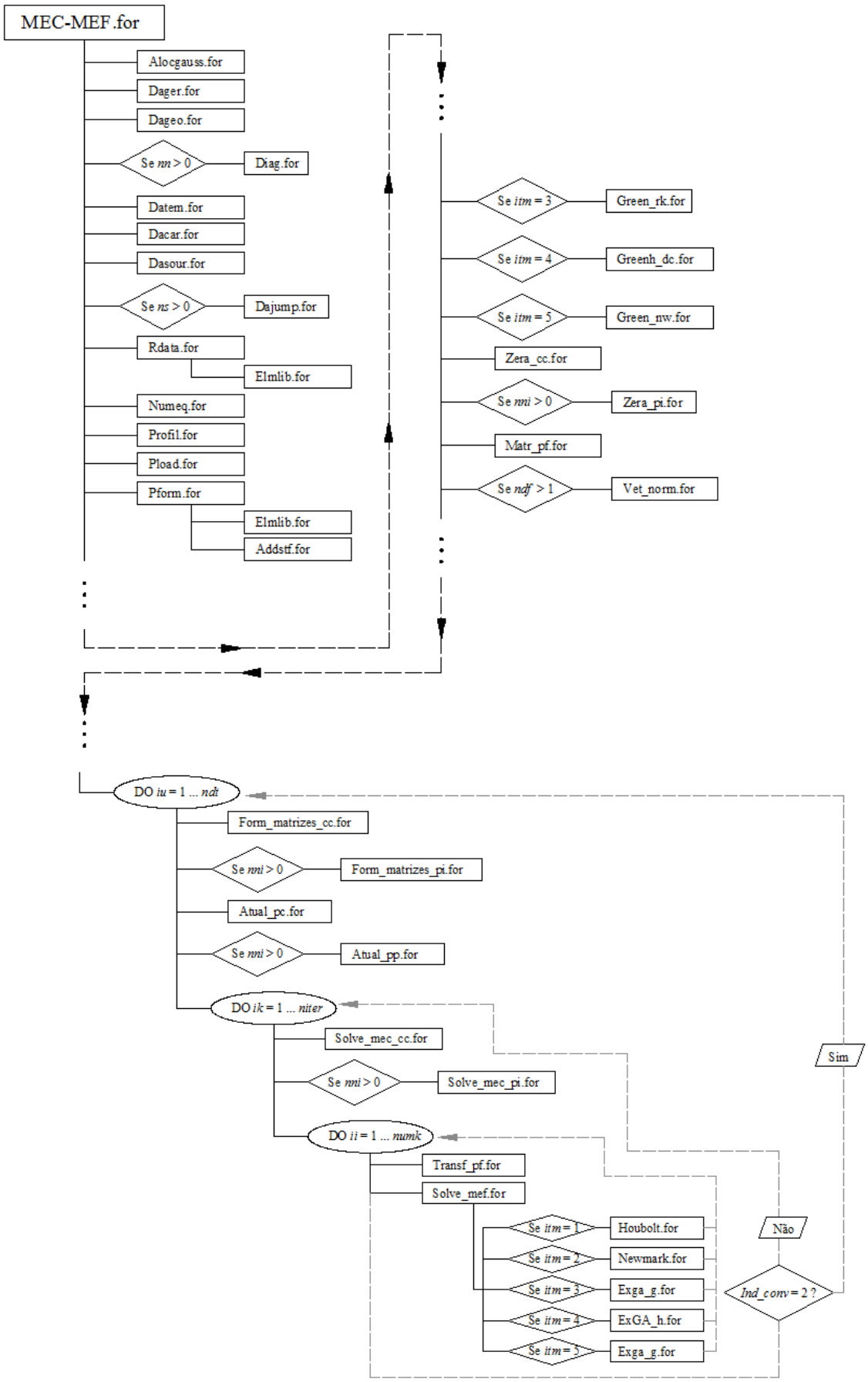


Figura 6.1: Fluxograma simplificado

Nas próximas subseções são descritos os principais processos executados pela unidade de programa principal, “MEC-MEF”.

### *6.1.3 Tratamento dos nós duplos na análise MEC*

A respeito das variáveis no sistema de equações resultante para a sub-região $\Omega^{MEC}$, é feito um reordenamento das incógnitas consistente em separar as equações referidas aos nós duplos, os quais não são definidos de forma recíproca senão que considerando um nó de referência, ou *mestre*, e o seu duplo, também chamado de *escravo*. Assim, as equações referidas aos nós *escravos* são as únicas a serem desconsideradas na geração do sistema de equações. Dito sistema reduzido é logo condensado, fusionando mediante soma os coeficientes $H_{ij}^{nm}$ correspondentes a cada nó *mestre* com seu correspondente nó *escravo*, pois ambos possuem o mesmo valor associado de condição essencial em cada equação.

Sendo “*nn*” o número de nós do contorno e “*nnd*” o número de nós *escravos* (duplos), monta-se o sistema reduzido consistente de “*nn*2” equações com “*nn*2” incógnitas, onde $nn2 = nn - nnd$. Os vetores de componentes inteiras “$nod1(nn)$” e “$nod2(nn)$” incluem a informação necessária para se efetuar o reordenamento das equações e das incógnitas em cada uma delas, deixando aquelas equações referentes aos nós *escravos* (duplos) conformando as últimas linhas nas matrizes do sistema.

Portanto, cada nó duplo presente na sub-região $\Omega^{MEC}$ reduz a dimensão das matrizes $\mathbf{H}_{ij}$, bem como também o número de linhas das matrizes $\mathbf{G}_{ij}$, no sistema de equações (2.23), devido a que um nó e o seu duplo possuem o mesmo valor de condição essencial, porém diferentes valores de fluxo (condição natural). Assim, a dimensão das matrizes e o sistema podem ser representados por:

$$\underbrace{\left[\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{H}_{nn}\right]}_{(nn2 \times nn2)} \underbrace{\left\{\mathbf{u}_n\right\}}_{(nn2 \times 1)} = \underbrace{\left[\mathbf{G}_{nn}\right]}_{(nn2 \times nn)} \underbrace{\left\{\mathbf{p}_n\right\}}_{(nn2 \times 1)} + \underbrace{\left\{\mathbf{r}_n\right\}}_{(nn2 \times 1)} \tag{6.1}$$

Onde $\mathbf{r}_n$ constitui o vetor contendo as contribuições das fontes, das condições iniciais e dos instantes anteriores.

### *6.1.4 Blocos nas matrizes de elementos finitos*

No caso de requerer-se o valor das reações nos apoios, ou inclusive a prescrição de condição essencial variável no tempo, as matrizes de rigidez e de massa têm sido decompostas em blocos, conforme é mostrado a seguir:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{SM} & \mathbf{SM0} \\ \mathbf{SMGLR} & \mathbf{SM1} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{SK} & \mathbf{SK0} \\ \mathbf{SKGLR} & \mathbf{SK1} \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

Os blocos ou submatrizes são descritos seguir:

- **SM** , **SK** : matriz de massa e de rigidez, respectivamente, do sistema; tais matrizes são armazenadas como vetores *skyline* contendo "*ncs*" componentes cada um. O número "*ncs*" é determinado durante a execução do programa de acordo com os dados da conectividade, número de nós por elemento e número de graus de liberdade por nó.
- **SMGLR** , **SKGLR** : matrizes de massa e de rigidez, respectivamente, armazenando os coeficientes de influência necessários para o cálculo das reações de apoio (condição natural é a incógnita, sendo prescrita a condição essencial nestes pontos).
- **SM0** , **SK0** : matrizes de massa e de rigidez, respectivamente, referentes aos graus de liberdade com condição essencial prescrita e variável no tempo; tais matrizes são utilizadas na correção do vetor das forças nodais, a cada instante de tempo, no cálculo das incógnitas cinemáticas.
- **SM1** , **SK1** : matrizes de massa e de rigidez, respectivamente, referentes aos graus de liberdade com condição essencial prescrita e variável no tempo; tais matrizes são utilizadas na correção do vetor das forças nodais, a cada instante de tempo, no cálculo das reações de apoio (a condição natural é a incógnita, sendo prescrita a condição essencial).

Similarmente, o vetor das forças é dividido considerando os termos **f** e **fglr** , levando em consideração valores de forças nodais prescritas e incógnitas correspondentes às reações de apoio, respectivamente.

### *6.1.5 Correção dos indicadores de valor prescrito na interface*

O esquema de acoplamento iterativo adotado assume determinado tipo de condição prescrita na interface; no esquema *Dirichlet-Neumann* sequencial para acoplamento acústico-acústico, a condição essencial é prescrita nos nós locais de $\Omega^{MEC}$ na interface, a cada instante de tempo, enquanto que a condição natural é determinada e avaliada nos nós locais de $\Omega^{MEF}$ na interface, para posteriormente ser calculada a condição essencial nestes pontos. Assim, independentemente da condição fornecida para os pontos da interface, a partir dos arquivos de dados, o programa a corrige automaticamente, assumindo condição essencial prescrita em $\Omega^{MEC}$ e condição natural prescrita em $\Omega^{MEF}$, na interface.

No esquema de acoplamento acústico-elástico (MEC-MEF) a condição natural é assumida nos nós locais de $\Omega^{MEC}$ na interface, determinando-se os valores de condição essencial nestes pontos mediante a análise MEC, posteriormente transformando-a em condição natural para os nós locais de $\Omega^{MEF}$ na interface pelo princípio da ação-reação (ver anexo B). Assim, independentemente dos dados fornecidos nos arquivos de entrada, a respeito da prescrição de condições nos pontos da malha de elementos finitos, o programa corrige automaticamente assumindo condição natural prescrita nos nós locais tanto de $\Omega^{MEC}$ quanto de $\Omega^{MEF}$, na interface.

A respeito da numeração das incógnitas na sub-região $\Omega^{MEF}$ (sub-rotina NUMEQ), no programa são estabelecidos três tipos de incógnita, associados a cada grau de liberdade mediante indicadores armazenados em forma de componentes da matriz “IDF”. O valor “0” especifica grau de liberdade livre, onde a condição natural variável no tempo é prescrita (exemplo na elasticidade, um nó de estrutura sendo submetido a um carregamento). O valor “1” representa grau de liberdade restringido, prescrevendo-se um valor fixo, representativo da condição essencial (exemplo na elasticidade, apoio fixo ou fundação submetida a um recalque). Um terceiro tipo de indicador é incorporado indiretamente mediante as componentes da matriz “IGLD”, onde um valor diferente de “0” indica grau de liberdade onde é prescrita a condição essencial variável no tempo (exemplo na elasticidade, prescrição de deslocamento, velocidade e aceleração, para cada instante de tempo).

Posteriormente, os valores de indicador iguais a “1” são transformados para “0”, na sub-rotina NUMEQ, enquanto que os valores de indicador iguais a “0” são

numerados de forma crescente, a partir do valor “1”, “2”, e assim por diante, constituindo as incógnitas cinemáticas no sistema de equações a ser resolvido, representado por:

$$\mathbf{SM}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{SK}\,\mathbf{u} = \mathbf{f} - \mathbf{SM0}\,\bar{\ddot{\mathbf{u}}} - \mathbf{SK0}\,\bar{\mathbf{u}} \tag{6.3}$$

onde $\bar{\mathbf{u}}$ e $\bar{\ddot{\mathbf{u}}}$ denotam os valores prescritos de condição essencial e da sua segunda derivada no tempo (aceleração), respectivamente. Os valores diferentes de “0”, nas componentes da matriz “IGLD”, são transformados para “-1”, “-2”, “-3”, ate “-NGLD”, representando “NGLD” o número de valores prescritos de condição essencial variável no tempo ($\bar{\mathbf{u}}(t)$ e $\bar{\ddot{\mathbf{u}}}(t)$). “NGLD” constitui também o número de colunas das matrizes “**SM0**” e “**SK0**” no sistema (6.3), constituindo os corretores do vetor de força nodal, a cada instante de tempo.

Assim que for resolvido o sistema (6.3), podem ser determinadas as reações nos apoios, **fglr**, desde que sejam requeridas pelo usuário. O sistema de “NGLR” equações e bem similar a respeito de (6.3), sendo representado por:

$$\left[\mathbf{SMGLR} \quad \mathbf{SM1}\right]\left\{\begin{matrix}\ddot{\mathbf{u}}\\ \bar{\ddot{\mathbf{u}}}\end{matrix}\right\} + \left[\mathbf{SKGLR} \quad \mathbf{SK1}\right]\left\{\begin{matrix}\mathbf{u}\\ \bar{\mathbf{u}}\end{matrix}\right\} = \mathbf{fglr} \tag{6.4}$$

### *6.1.6 Implementação dos métodos de Green para a marcha no tempo*

Previamente à análise dinâmica é preciso determinar as matrizes de *Green* avaliadas no primeiro instante de tempo, ou seja, $\mathbf{G}_r(\Delta t)$, $\dot{\mathbf{G}}_r(\Delta t)$ e $\ddot{\mathbf{G}}_r(\Delta t)$, para serem usadas na formulação *ExGA* (equações (3.36) e (3.37)), ou, de forma alternativa, $\mathbf{G}_r(\Delta t)$, $\dot{\mathbf{G}}_r(\Delta t)$, $\mathbf{H}_r(\Delta t)$ e $\dot{\mathbf{H}}_r(\Delta t)$ sendo utilizadas na formulação *ExGA-H* (equações (3.54) e (3.55)). Na obtenção de tais matrizes são utilizadas as sub-rotinas GREEN_RK, GREEN_NW e GREENH_DC para *ExGA Runge-Kutta*, *ExGA Newmark* e *ExGA-H diferença central*, respectivamente, em conjunto com as sub-rotinas EXGA_G e EXGA_H, conforme seja o caso.

As integrais de convolução nas expressões recursivas são determinadas mediante implementação de sub-rotinas para o cálculo de funções reais, nomeadas conforme se segue:

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{G}_r\left(\Delta t-\tau\right)\mathbf{f}\left(t+\tau\right)d\tau \approx \sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{\psi}_1\left(j\right)\mathbf{f}_t + \sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{\psi}_2\left(j\right)\mathbf{f}_{t+\Delta t}$$

$$= \mathbf{S0FI1}\,\mathbf{f1} + \mathbf{S0FI2}\,\mathbf{f2} \tag{6.5}$$

$$\int_0^{\Delta t} \dot{\mathbf{G}}_r\left(\Delta t-\tau\right)\mathbf{f}\left(t+\tau\right)d\tau \approx \mathbf{S1FI1}\,\mathbf{f1} + \mathbf{S1FI2}\,\mathbf{f2} \tag{6.6}$$

### *6.1.7 Processo de marcha no tempo, no esquema de acoplamento MEC-MEF*

No esquema iterativo de acoplamento as sub-regiões são analisadas de forma sequencial, portanto precisando-se do fornecimento de apenas um conjunto de valores prescritos na interface; a condição essencial nos nós locais da sub-região $\Omega^{MEC}$, em cada iteração e para cada instante de tempo.

O processo de marcha combinada no tempo foi implementado considerando a possibilidade de se escolher passos de tempo diferentes na análise dinâmica de cada subdomínio, conforme é representado na figura 6.2. A respeito da figura, devido ao processo sequencial, é necessário se escolher alguma das duas linhas de tempo como referência. Para tais efeitos, na definição do algoritmo foi escolhido o eixo temporal da sub-região $\Omega^{MEC}$. No final de cada iteração precisam ser comparadas variáveis equivalentes, na interface, provenientes da análise de ambos os subdomínios, por exemplo, $\mathbf{u}_I^{(MEC)}$ e $\mathbf{u}_I^{(MEF)}$, no mesmo instante de referencia. No entanto, faz-se necessário implementar múltiplos processos de interpolação e/ou extrapolação, devido a que normalmente os instantes atuais das análises MEC e MEF, no cálculo de ditas variáveis, não coincidem.

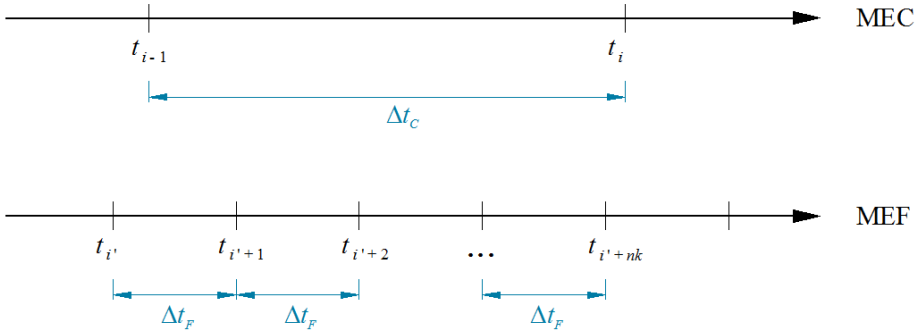


Figura 6.2: Esquema de discretização do eixo temporal para as análises MEC e MEF.

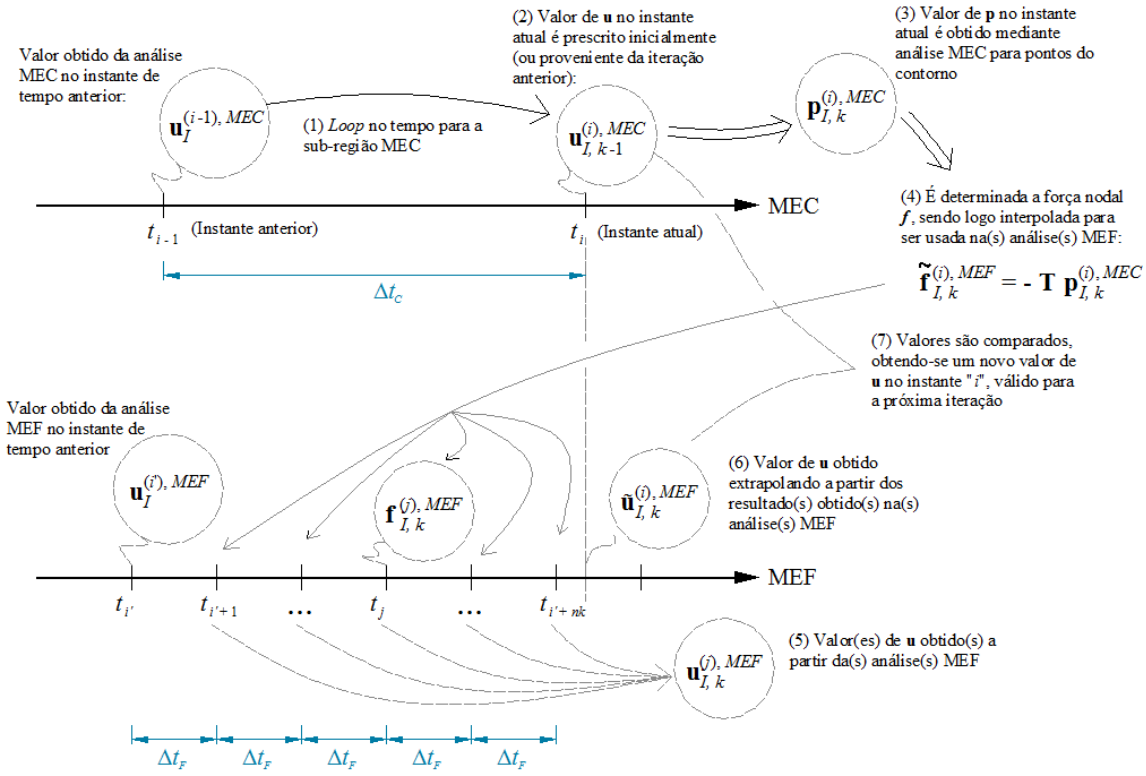


Figura 6.3: Descrição esquemática do processo iterativo, no caso $\Delta t_C > \Delta t_F$.

Na figura 6.3 é esquematizada a sequência de etapas no processo iterativo implementado, supondo o caso $\Delta t_C > \Delta t_F$ e malhas coincidentes na interface. A partir dos valores de $\mathbf{u}^{(MEC)}$ e $\mathbf{u}^{(MEF)}$ nos seus correspondentes instantes anteriores, "$i-1$" e "$i'$", respectivamente, são obtidos $\mathbf{u}^{(MEC)}$ e $\mathbf{u}^{(MEF)}$ no instante de referência "$i$", sendo posteriormente comparados. O vetor $\mathbf{u}_I^{(i),MEC}$, a ser usado na próxima iteração "$k$", é obtido mediante a expressão (4.15), envolvendo o parâmetro de relaxação $\omega$,

além do valor inicialmente prescrito e o valor recentemente calculado, ou seja, os vetores representados nas etapas (2) e (6) da figura 6.3:

O valor adotado para o parâmetro de relaxação é de $\omega = 0.4$, resultando em uma escolha razoável de acordo com dados obtidos na literatura, tanto a respeito do número de iterações quanto da acurácia na convergência do processo iterativo. O esquema da figura 6.3 consiste essencialmente no algoritmo de *Dirichlet-Neumann* para acoplamento iterativo sequencial, do tipo acústico-acústico aplicado a problemas dinâmicos, o qual será descrito nas subseções 6.1.7.3 e 6.1.7.4 de forma algo mais detalhada, referindo-se às principais etapas referidas ao *loop* no tempo e ao *loop* iterativo, respectivamente.

### *6.1.7.1 Cálculo da matriz que transforma forças de superfície em forças nodais*

O procedimento é encomendado à sub-rotina MATR_PF, onde a matriz dada pela expressão (5.40) é obtida a partir das funções de interpolação $\mathbf{N}_{c,p}$, na aproximação das forças de contato (multiplicadores de *Lagrange* na sua *forma localizada*) em função dos valores de fluxo (derivada da pressão acústica em relação à coordenada normal ao contorno). Na figura 6.4 se apresenta o esquema de cálculo desta matriz, considerando que tais funções são lineares, para posteriormente ser aplicada na transformação seguinte:

$$\boldsymbol{\lambda}^{(MEC)} = \mathbf{T}_{\Gamma^{int}}\, \mathbf{p}_I^{(MEC)} \tag{6.7}$$

onde

$$\mathbf{T}_{\Gamma^{int}} = \int_{\Gamma^{int}} \left(\mathbf{N}_{c,p}\right)^T \mathbf{N}_{c,p}\, d\Gamma^{int} \tag{6.8}$$

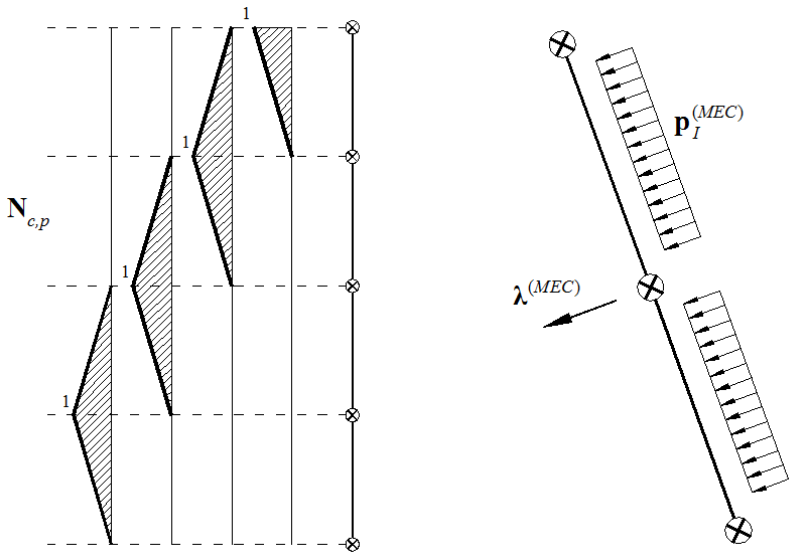


Figura 6.4: Esquema de transformação do fluxo (ou forças de superfície) em forças nodais de contato equivalentes.

Devido à linearidade das funções $\mathbf{N}_{c,p}$, pode se demonstrar que as integrais do tipo (6.8) resultam ser da forma:

$$T_{ij} = \int_{\Gamma^{int}} N_i \, N_j \, d\Gamma^{int} = \begin{cases} \dfrac{1}{6} l_{i-1} & \text{se } j = i-1 \\ \dfrac{1}{6} l_i & \text{se } j = i+1 \\ \dfrac{1}{3}\left(l_{i-1} + l_i\right) & \text{se } j = i \\ 0 & \text{em qualquer outro caso} \end{cases} \tag{6.9}$$

onde $l_i$ denota o comprimento do elemento $\Gamma_i$, de acordo com o padrão de ordenamento dos pontos e dos elementos (figura 6.5). Assim, a matriz $\mathbf{T}_{\Gamma^{int}}$ possui apenas uma diagonal principal, uma diagonal superior e outra inferior.

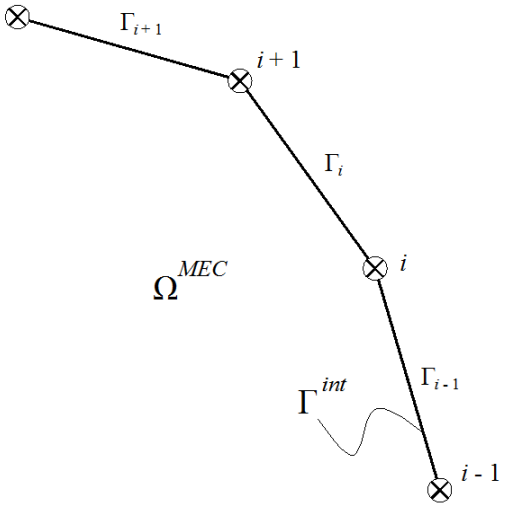


Figura 6.5: Esquema de ordenamento dos pontos e dos elementos no contorno da sub-região $\Omega^{MEC}$, na consideração das expressões (6.9).

No tratamento dos pontos onde há descontinuidade de força de superfície, a sub-rotina considera a disposição de nós duplos em referência à informação contida nas matrizes “NO” e “ID”, indicando a conectividade e a informação referente aos nós *escravos* (duplos), respectivamente. A consideração de nós duplos nesta fase é importante a partir da etapa (4) do diagrama esquemático da figura 6.3, com a finalidade de serem usados os valores adequados de $\mathbf{f}_{I,k}^{(j),MEF}$ na etapa (5) do mencionado esquema.

Uma vez calculada a matriz $\mathbf{T}_{\Gamma^{int}}$, a sub-rotina TRANSF_PF é a encarregada de efetuar a transformação mediante o produto matriz-vetor em (6.7).

### *6.1.7.2 Cálculo do vetor normal ao contorno MEC na interface*

A sub-rotina VET_NORM foi criada com a finalidade de serem determinadas as componentes do vetor normal ao longo de cada traço reto na interface; isto com a finalidade de se estabelecer tanto a compatibilidade quanto o equilíbrio no acoplamento do tipo acústico-elástico, pois a componente normal da tensão, na sub-região $\Omega^{MEF}$, é vinculada com o valor da pressão acústica em $\Omega^{MEC}$, por conta do princípio da ação-reação, enquanto que a componente normal da aceleração, na sub-região $\Omega^{MEF}$, é relacionada com o valor do fluxo na sub-região $\Omega^{MEC}$ mediante a aplicação da segunda lei de *Newton*.

Cada vetor normal é determinado em função da geometria do correspondente traço reto, dados que são automaticamente detectados pelo programa de acordo com a informação dos nós extremos do seu primeiro. Assim que for detectada a existência de um novo tramo, por meio da informação dos nós duplos, as componentes do novo vetor normal são calculadas de acordo com a geometria do primeiro elemento do traço seguinte, fazendo uso das coordenadas dos seus nós inicial e final. A sequência correta dos pontos MEC na interface é dada pelo sentido anti-horário, de forma similar com a convenção do MEC utilizada para serem definidos os pontos do contorno.

#### *6.1.7.3 Loop no tempo*

A cada instante de análise são desenvolvidas diferentes tarefas, onde as mais relevantes serão descritas na presente subseção. Conforme dito anteriormente, $\Delta t_C$ é considerado o passo de tempo de referência no processo combinado de marcha no tempo, sendo determinado, para cada instante de tempo, o número "NK" de análises MEF necessárias (etapa (4) no esquema da figura 6.3) com o objetivo de serem comparados $\mathbf{u}_I^{(MEC)}$ e $\mathbf{u}_I^{(MEF)}$ no mesmo instante de referência (etapa (7) no esquema da figura 6.3).

Em relação aos coeficientes $G_{ij}^{nm}$ e $H_{ij}^{nm}$ das matrizes de influência $\mathbf{G}_{nm}$ e $\mathbf{H}_{nm}$, (expressões (2.19) e (2.18), respectivamente), "*n*" denota o instante atual enquanto que "*m*" representa cada um dos instantes anteriores. Os coeficientes localizados na diagonal da matriz $\mathbf{H}_{nn}$ são determinados em função da geometria do contorno, por meio da sub-rotina DIAG, pois os coeficientes restantes desta matriz são nulos [2]. Enquanto isso, as matrizes $\mathbf{G}_{nm}$ e $\mathbf{H}_{nm}$, onde $n > m$, são calculadas e logo reaproveitadas nos instantes subsequentes "*k*", onde $m = n - k$, conforme é mostrado na figura 6.6 para a variação das funções de interpolação $\phi^m(\tau)$ e $\theta^m(\tau)$, definidas a partir da equação (2.24) e a figura 2.3.

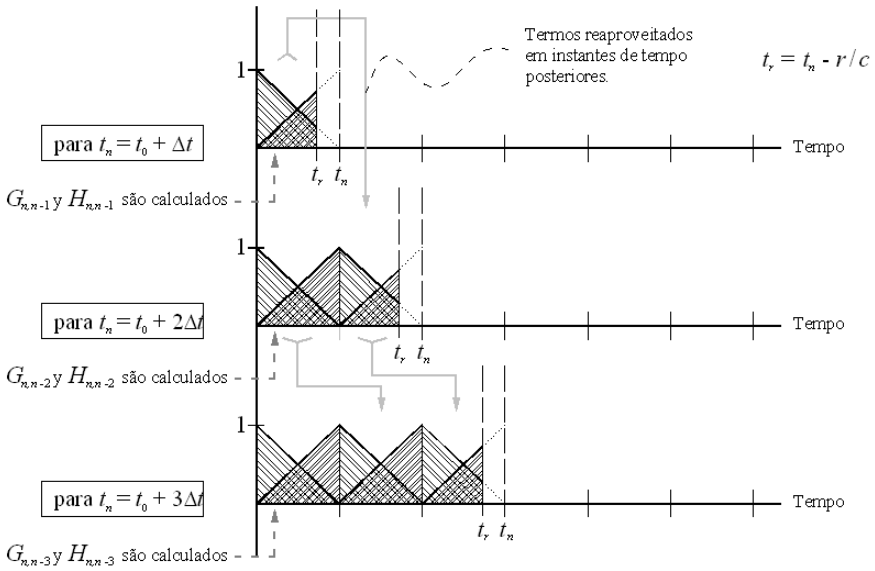


Figura 6.6: Esquema para o reaproveitamento das matrizes $\mathbf{G}_{nm}$ e $\mathbf{H}_{nm}$, onde $m = n - k$, nos instantes subsequentes.

As matrizes $\mathbf{G}_{nn}$ e $\mathbf{H}_{nn}$ são armazenadas em arranjos bidimensionais; “GC” e “HC” no sistema de equações para pontos do contorno, enquanto que “GP” e “HP” no sistema de equações para pontos internos. No entanto, os conjuntos de matrizes $\mathbf{G}_{nm}$ e $\mathbf{H}_{nm}$, para $n \neq m$, são armazenados em arranjos tridimensionais, os quais contêm os coeficientes das matrizes de influência para cada instante de tempo anterior a “*n*”. Assim, os arranjos “DC” e “EC” são usados para o armazenamento dos coeficientes dos conjuntos de matrizes $\mathbf{G}_{nm}$ e $\mathbf{H}_{nm}$, respectivamente, para pontos no contorno, enquanto que “DP” e “EP” armazenam informação similar referente ao sistema de equações para pontos internos. As sub-rotinas encarregadas do cálculo e armazenamento dos coeficientes das matrizes de influência são FORM_MATRIZES_CC para pontos do contorno e FORM_MATRIZES_PI para pontos internos.

As variáveis vetoriais de referência “PC_REF”, “PP_REF”, “PX_REF”, “PY_REF” e “PT_REF” são utilizadas como *backup* para serem armazenadas as contribuições invariantes no cálculo da incógnita *u* e suas derivadas no espaço e no tempo, ao longo do processo iterativo; isto é, contribuições referentes às condições iniciais, as fontes e os instantes de tempo anteriores. As sub-rotinas encarregadas de efetuar o cálculo de cada uma destas contribuições, respectivamente, são VEZ_C, PROS_C e MULT_C para pontos do contorno e VEZ_I, PROS_I e MULT_I para

pontos internos. O vetor “PC_REF” salva as mencionadas contribuições para o cálculo da pressão acústica e do fluxo em pontos do contorno (sub-rotina ATUAL_PC), enquanto que as variáveis “PP_REF”, “PX_REF”, “PY_REF” e “PT_REF” são utilizadas no cálculo da pressão acústica e das suas derivadas em “*x*”, “*y*” e no tempo “*t*”, respectivamente, para os pontos internos (sub-rotina ATUAL_PP). A unidade de programa ATUAL_PC é também a encarregada de reordenar os coeficientes de $\mathbf{G}_{nn}$ e $\mathbf{H}_{nn}$ no sistema de equações, por conta do tipo de condição prescrita, bem como de inverter a matriz de coeficientes resultante.

Após serem atualizados alguns instantes de tempo referenciais “TBEM0”, “TBEM1”, “TBEM2” e “TFEM0” (figura 6.7) é determinado o número “NK” de análises MEF requeridas entre os instantes de tempo “TBEM0” e “TBEM2”.

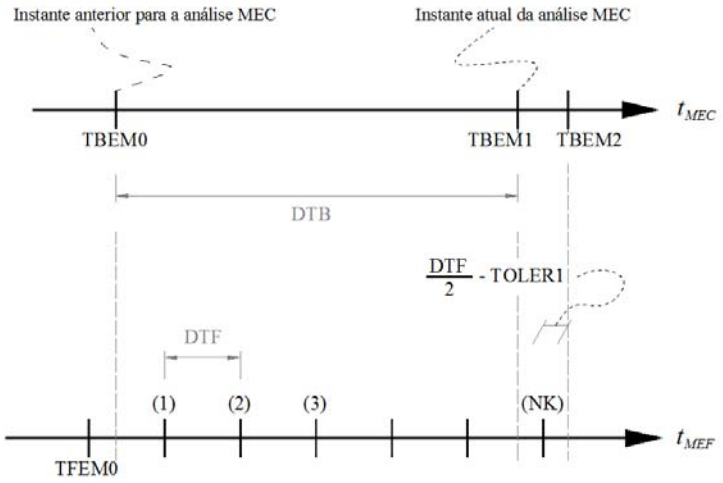


Figura 6.7: Instantes de tempo referenciais para a análise MEF, mediante o programa.

Antes de iniciar-se o *loop* iterativo são atualizadas algumas variáveis referentes à interface, por exemplo, o valor atual da incógnita $\mathbf{u}_I^{(MEF)}$, bem como as suas derivadas primeira e segunda, no tempo, referidas no instante “TFEM0”. Os correspondentes valores são armazenados dentro da variável matricial “VALREF”. O processo de atualização de variáveis de interface, em ambas as sub-regiões, é feito dependendo de se o esquema de acoplamento for definido pela interação acústico-acústica ou acústico-elástica. Finalmente, é determinado o número de análises MEF necessárias como consequência da escolha de diferentes passos de tempo para $\Omega^{MEC}$ e $\Omega^{MEF}$ (variável “NK”, na figura 6.7)

*6.1.7.4 Loop iterativo*

No início do *loop* iterativo são atualizadas algumas variáveis de interface mediante uma expressão adequada para aceleração de convergência (expressão (4.15) para interação acústico-acústica ou (B.7) para acústico-elástica) em função do parâmetro de relaxação e dos valores da incógnita correspondentes à iteração anterior. Dependendo do tipo de interação, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{I,k}^{(i),MEC} &= (1-\omega)\,\mathbf{u}_{I,k-1}^{(i),MEC} + \omega\,\tilde{\mathbf{u}}_{I,k}^{(i),MEF} \quad \rightarrow \quad \text{acústico-acústico} \\ \mathbf{p}_{I,k}^{(i),MEC} &= (1-\omega)\,\mathbf{p}_{I,k-1}^{(i),MEC} + \omega\,\tilde{\mathbf{p}}_{I,k}^{(i),MEF} \quad \rightarrow \quad \text{acústico-elástico} \end{aligned} \tag{6.10}$$

Em referência ao esquema iterativo sequencial adotado no presente trabalho, após serem fornecidos valores aproximados para a pressão acústica $\mathbf{u}_I^{MEC}$ no instante de tempo atual (“TBEM1”, na figura 6.7), de acordo com a etapa (2) da figura 6.3, os valores do fluxo $\mathbf{p}_I^{MEC}$ são determinados efetuando-se a análise MEC (etapa (3), na figura 6.3) na sub-região $\Omega^{MEC}$. A sub-rotina SOLVE_MEC_CC permite resolver as incógnitas para pontos do contorno e SOLVE_MEC_PI faz o mesmo para os pontos internos.

Posteriormente, é iniciado o *loop* para serem efetuadas as múltiplas análises MEF. Para cada instante de análise MEF ((1), (2), (3), etc. na figura 6.7) é interpolado o valor do fluxo, sendo logo transformado para força nodal equivalente (sub-rotina TRANF_PF), na interface conforme a etapa (4) da figura 6.3, com a finalidade de ser determinado $\mathbf{u}_I^{(MEF)}$ em cada um desses instantes (etapa (5)). Cabe frisar que na transformação de fluxo para força nodal, depois de feita a interpolação no tempo, é efetuada a aproximação das forças de contato mediante colocação, no caso de nós não coincidentes na interface.

A condição essencial $\mathbf{u}_I^{(MEF)}$ no instante “NK” (figura 6.7), obtida por meio de análise MEF, é interpolada/extrapolada no tempo para o instante “TBEM1” (de acordo com a etapa (6), na figura 6.3), com a finalidade de serem comparados $\mathbf{u}_I^{(MEC)}$ e $\mathbf{u}_I^{(MEF)}$ no mesmo instante de referência (etapa (7)). É importante ressaltar que, no

caso de malhas não coincidentes na interface, é necessário interpolar dita condição essencial também no espaço, envolvendo uma matriz similar àquelas mostradas nas expressões (5.78) e (5.82), só que se efetuando o processo inverso, ou seja, achando-se o espaço nulo de $\mathbf{L}_F$ e $\mathbf{L}_C$ (matrizes (5.52) e (5.53)) de forma tal que seja obtida uma expressão que permita transformar diretamente a condição essencial $\mathbf{u}_I^{(MEF)}$ para $\mathbf{u}_I^{(MEC)}$, na interface.

No caso de interação acústico-elástica, é utilizada a informação referente às componentes do vetor normal em cada traço reto da interface, com o objetivo de orientar os valores do fluxo na direção normal a dito contorno, obtendo-se forças de contato nessa direção.

A sub-rotina SOLVE_MEF administra as análises MEF na sub-região $\Omega^{MEF}$, efetuando a chamada de sub-rotina de acordo com algum dos métodos de marcha no tempo, conforme a informação fornecida no arquivo de dados correspondente.

Posteriormente, o *loop* das múltiplas análises MEF é finalizado e as condições na interface são avaliadas novamente, porém dessa vez a compatibilidade da condição essencial, no caso de interação acústico-acústica, ou a segunda lei de *Newton* em conjunto com o princípio da ação-reação (anexo D), no caso acústico-elástico.

## 6.2. Análise de resultados

Na presente seção são descritos os resultados das análises para o exemplo de uma barra retangular, considerada bidimensional e disposição de carregamento unidimensional na direção do seu eixo principal, primeiramente considerando malhas coincidentes na interface. Posteriormente são comentados os correspondentes resultados para nós locais de interface não coincidentes, utilizando multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada.

### *6.2.1 Exemplo de barra carregada axialmente com nós coincidentes na interface*

O diagrama esquemático do problema bidimensional é apresentado na figura 6.8; na extremidade engastada são prescritos valores nulos de pressão acústica, enquanto um carregamento tipo *Heaviside* é aplicado no extremo livre. Os esquemas de discretização espacial são mostrados na figura 6.9, onde para a malha n°1 (figura

6.9(a)) a sub-região $\Omega^{MEC}$ foi discretizada considerando 20 nós do contorno (incluindo nós duplos) e 16 elementos, sendo que a sub-região $\Omega^{MEF}$ foi modelada definindo 25 nós na conformação de 16 elementos finitos. Os pontos "*A*" e "*B*" constituem as referências para interpretação dos resultados obtidos. Enquanto isso, na figura 6.9(b) é apresentado um esquema de malha mais refinado, conformando a malha n°2, constituída por 68 nós e 64 elementos de contorno em $\Omega^{MEC}$, bem como 289 nós na definição de 256 elementos finitos em $\Omega^{MEF}$.

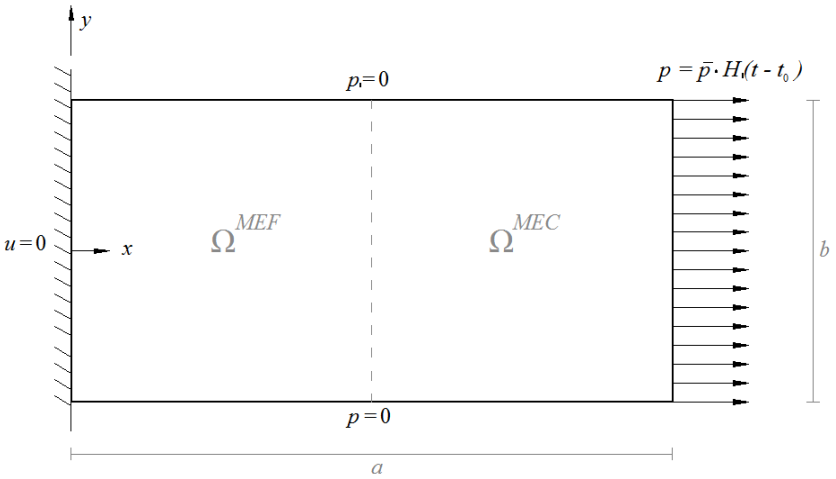


Figura 6.8: Diagrama esquemático para o problema da barra engastada em um extremo, submetida a um carregamento tipo *Heaviside* na sua extremidade livre.

No subdomínio modelado por elementos de contorno, $\Omega^{MEC}$, a velocidade de propagação da onda foi considerada igual a 1. Enquanto isso, na sub-região $\Omega^{MEF}$ foi fornecida a compressibilidade igual a 1.

Na figura 6.9, o passo de tempo e o tamanho do elemento da sub-região MEC foram escolhidos de forma a se ter o número do *Courant-Friedrich-Levy* seguinte:

$$\delta = \frac{c\,\Delta t_C}{l_C} = 0.6 \tag{6.11}$$

em ambas as malhas, onde $c$ é a velocidade de propagação da onda no meio, $\Delta t_C$ o passo de tempo escolhido na análise dinâmica inerente ao MEC e $l_C$ o tamanho médio dos elementos na sub-região $\Omega^{MEC}$. Além disso, em ambos os casos escolheu-se $a = 12$ e $b = 6$ (figura 6.8).

Por exemplo, na malha n°1 da figura 6.9(a) o tamanho do elemento é igual a $l_C = 1.5$ e, portanto, tem-se $\Delta t_C = 0.9$. Na malha n°2 foi considerado $l_C = 0.375$ e $\Delta t_C = 0.225$.

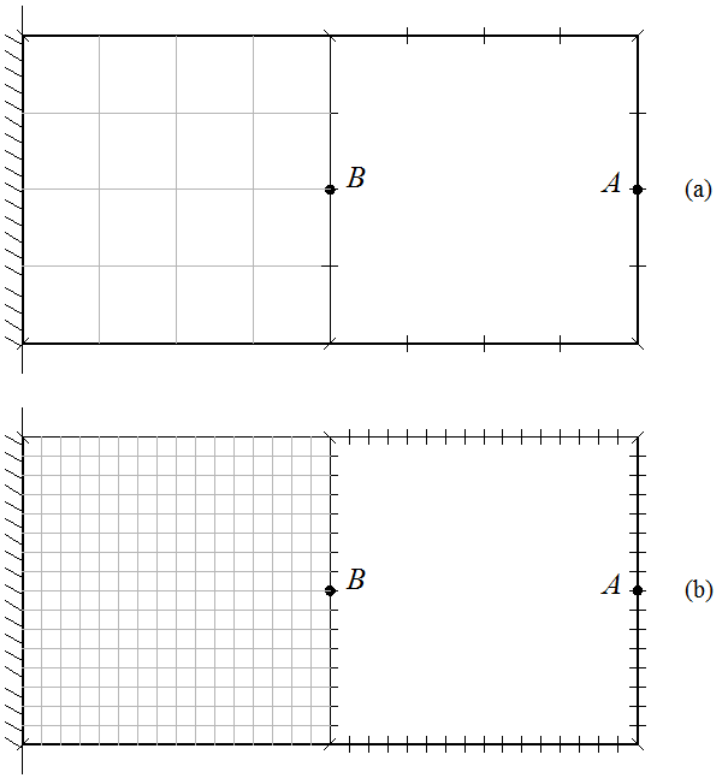


Figura 6.9: Esquemas de discretização para malhas coincidentes na interface
(a) Malha n°1, conformada por 20 nós e 16 elementos para $\Omega^{MEC}$, 25 nós
e 16 elementos para $\Omega^{MEF}$ (b) Malha n°2, conformada por 68 nós
e 64 elementos para $\Omega^{MEC}$, 289 nós e 256 elementos para $\Omega^{MEF}$.

Os resultados foram gerados considerando $r_{\Delta t} = 2,\ 4,\ 8$, onde $r_{\Delta t}$ denota o quociente entre passos de tempo escolhidos para análise MEC e a análise MEF, ou seja:

$$r_{\Delta t} = \frac{\Delta t_C}{\Delta t_F} \tag{6.12}$$

Nas figuras 6.10, 6.11 e 6.12 são apresentados os resultados para a pressão acústica no ponto "*B*", considerando na malha n°1 diferentes métodos para a marcha no tempo MEF e relação de passos de tempo igual a 2, 4 e 8, respectivamente. Os

correspondentes resultados com a malha n°2 são mostrados nas figuras 6.13, 6.14 e 6.15.

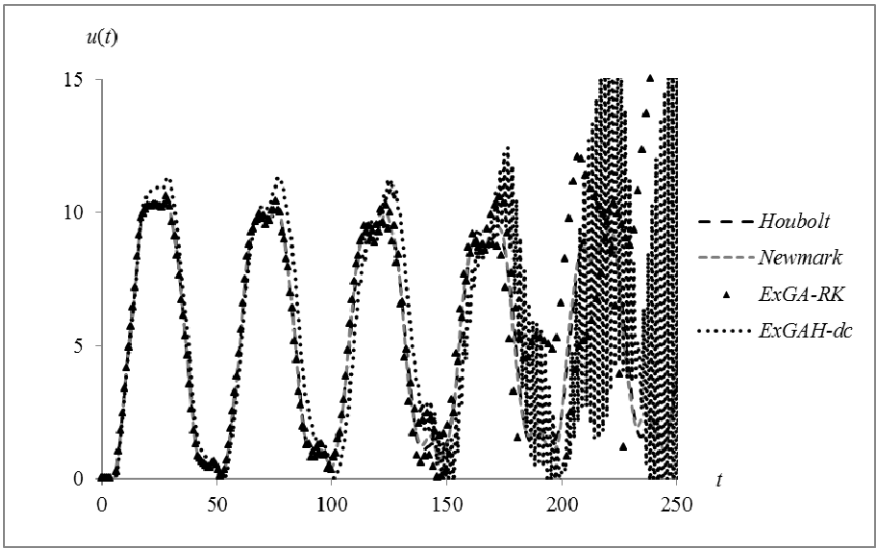


Figura 6.10: Valor da pressão acústica em "*B*" para $r_{\Delta t} = 2$ (malha n°1).

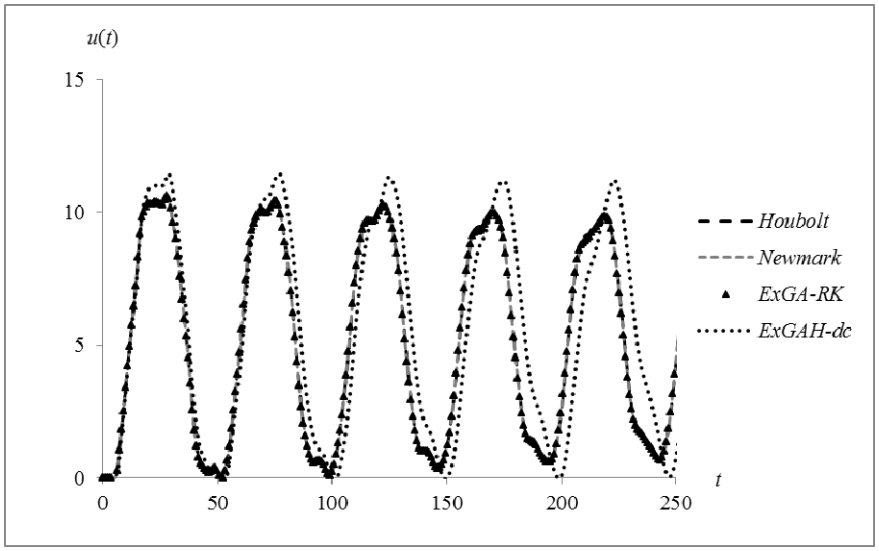


Figura 6.11: Valor da pressão acústica em "*B*" para $r_{\Delta t} = 4$ (malha n°1).

Pode se apreciar, a partir das figuras e dos cálculos referentes à estrutura, que para $r_{\Delta t} = 2$ (figuras 6.10 e 6.13) o passo de tempo $\Delta t_F$ é maior do que o seu valor crítico, obtendo-se resultados espúrios nos métodos implícitos.

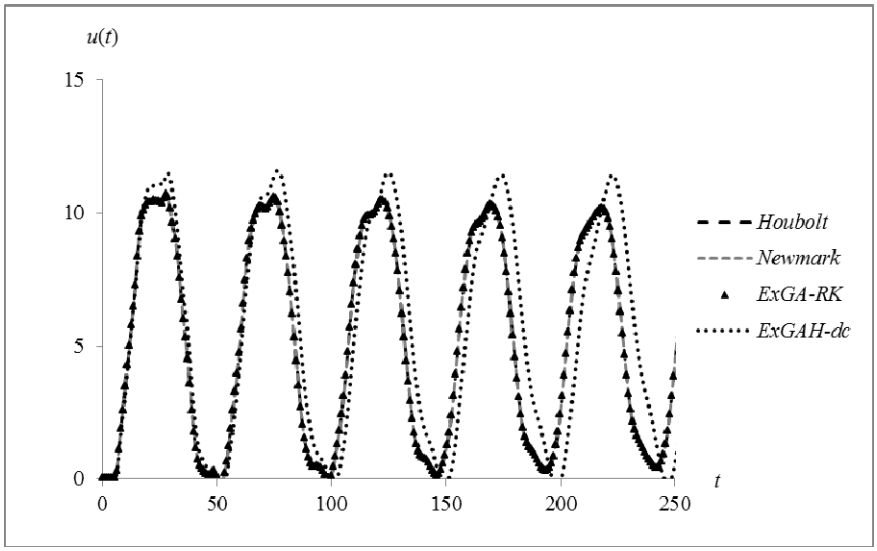


Figura 6.12: Valor da pressão acústica em "*B*" para $r_{\Delta t} = 8$ (malha n°1).

Em todos os gráficos os resultados obtidos com o método *ExGA* diferença central, na marcha no tempo MEF, se afastam dos resultados restantes. A situação é similar para a pressão acústica no ponto "*A*", na figura 6.16 para a malha n°1 e 6.17 para a malha n°2.

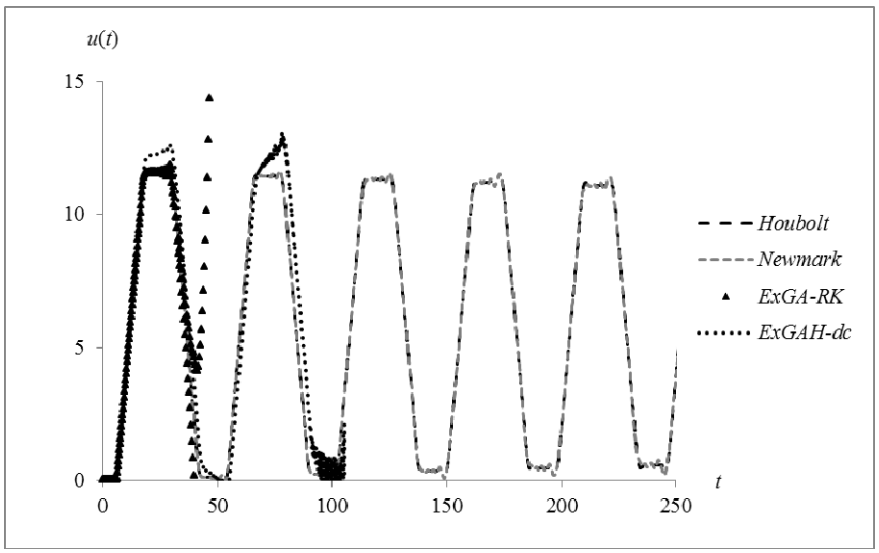


Figura 6.13: Valor da pressão acústica em "*B*" para $r_{\Delta t} = 2$ (malha n°2).

Na próxima subseção são apresentados os resultados do exemplo da barra considerando processos de discretização envolvendo nós locais não coincidentes na interface, mediante implementação de um processo que considera matrizes de

interpolação obtidas a partir da formulação de multiplicadores de *Lagrange* na sua forma localizada.

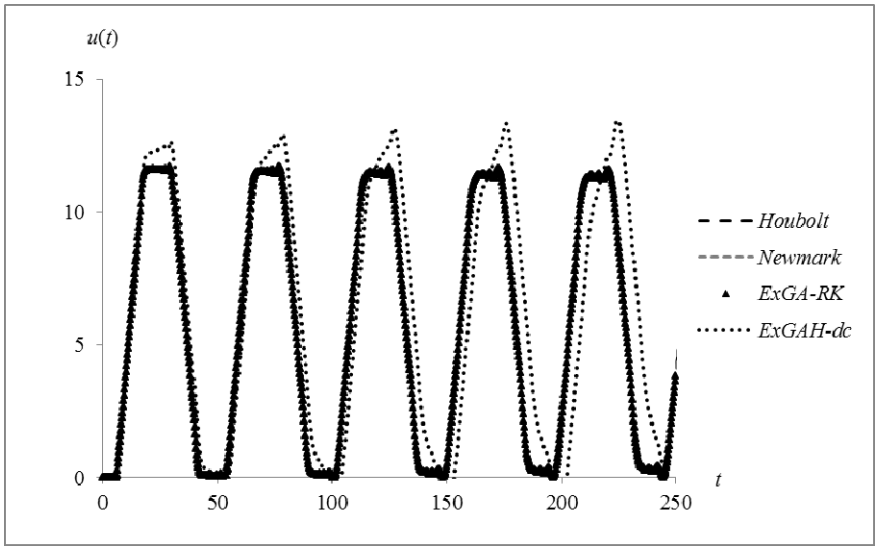


Figura 6.14: Valor da pressão acústica em "*B*" para $r_{\Delta t} = 4$ (malha n°2).

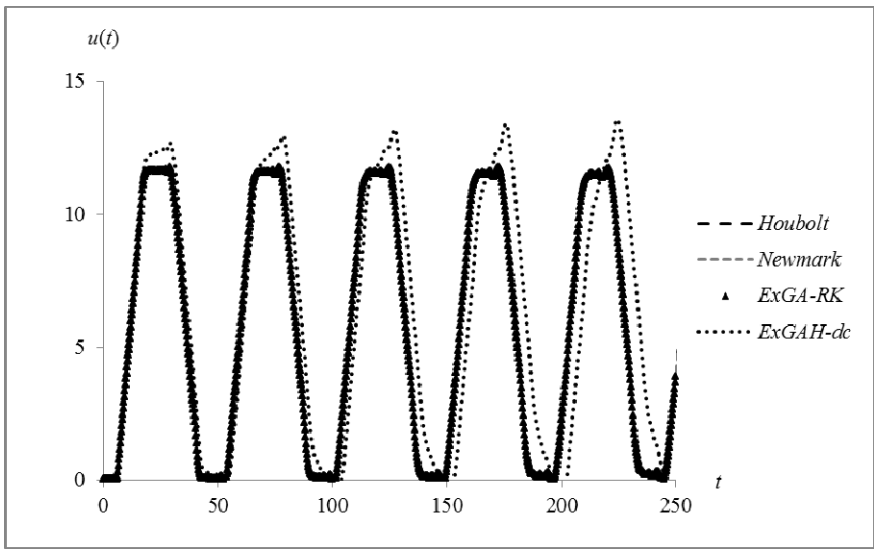


Figura 6.15: Valor da pressão acústica em "*B*" para $r_{\Delta t} = 8$ (malha n°2).

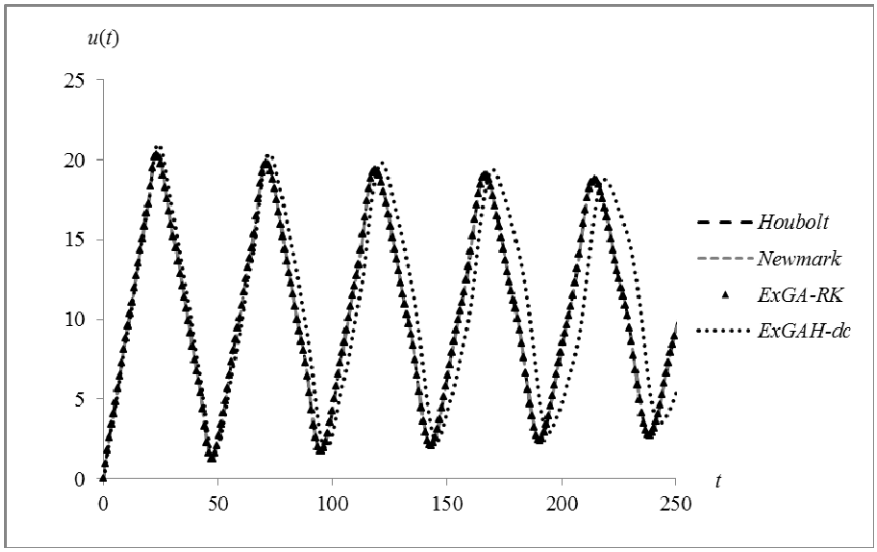


Figura 6.16: Valor da pressão acústica em "*A*" para $r_{\Delta t} = 8$ (malha n°1).

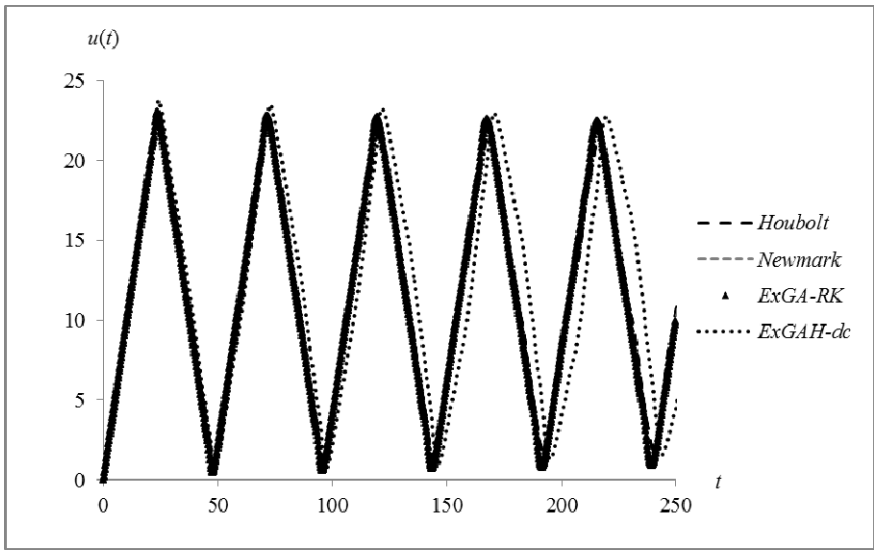


Figura 6.17: Valor da pressão acústica em "*A*" para $r_{\Delta t} = 8$ (malha n°2).

### *6.2.2 Exemplo de barra carregada axialmente com nós não coincidentes na interface*

A mesma barra, com as propriedades geométricas e físicas previamente utilizadas, é agora analisada considerando malhas não coincidentes na interface; isto é que os nós locais sobre a interface não possuem as mesmas coordenadas. Na figura 6.18 se apresentam três configurações estudadas.

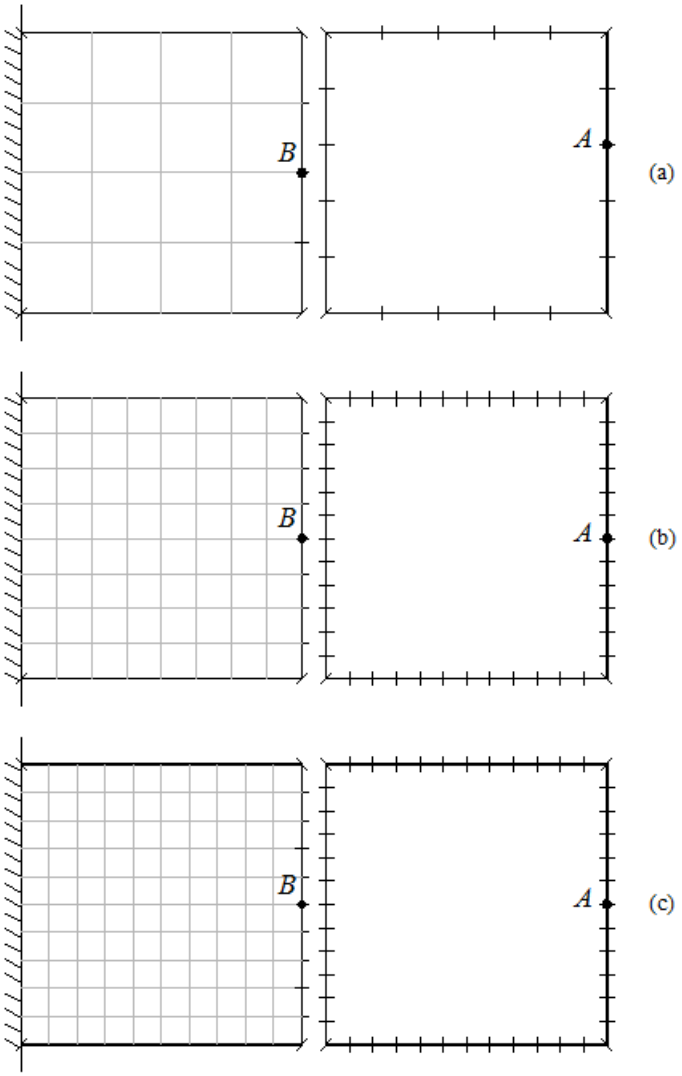


Figura 6.18: Esquemas de discretização para malhas não coincidentes na interface

(a) Esquema de malha n°3: conformada por 24 nós e 20 elementos para $\Omega^{MEC}$,

25 nós e 16 elementos para $\Omega^{MEF}$; 6 nós locais de interface em $\Omega^{MEC}$ contra 5 em $\Omega^{MEF}$

(b) Esquema de malha n°4: conformada por 52 nós e 48 elementos para $\Omega^{MEC}$,

81 nós e 64 elementos para $\Omega^{MEF}$; 13 nós locais de interface em $\Omega^{MEC}$ contra 9 em $\Omega^{MEF}$

(c) Esquema de malha n°5, conformada por 52 nós e 48 elementos para $\Omega^{MEC}$,

121 nós e 100 elementos para $\Omega^{MEF}$; 13 nós locais de interface em $\Omega^{MEC}$ contra 11 em $\Omega^{MEF}$.

Na configuração n°3 (figura 6.18(a)) foi definido um esquema de malhado relativamente pobre, onde a relação entre o número de nós locais de ambas as sub-regiões não é muito alta, em uma relação de 6/5. Na figura 6.19 são mostrados os resultados correspondentes à pressão acústica no ponto "*A*", considerando número de *Courant-Friedrich-Levy* $\delta$ igual a 0.6 e 0.45 para uma relação de passos de tempo $r_{\Delta t} = 4$; isto é, para um tamanho de elemento $l = 1.2$, o passo de tempo $\Delta t_C = 0.72$ e

$\Delta t_C = 0.54$ na sub-região MEC, para $\delta = 0.6$ e $\delta = 0.45$, respectivamente. O método de *Newmark* foi utilizado na marcha no tempo na análise da sub-região MEF.

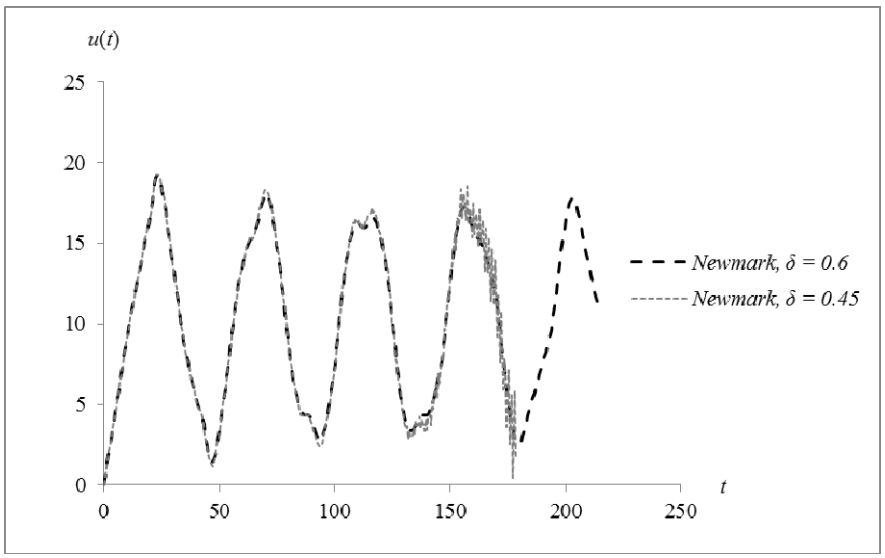


Figura 6.19: Valor da pressão acústica em "*A*" para $r_{\Delta t} = 4$ (configuração de malha n°3).

Percebe-se que a solução perde precisão de forma notável, sendo que a consideração do menor valor do número de *Courant-Friedrich-Levy* gerou resultados instáveis. Em ambas as aproximações, no cálculo das forças nos nós locais para o teste de contato na interface, assumiu-se variação linear da pressão acústica em ambas as sub-regiões (na transferência de valores "MEF→MEC"), enquanto que colocação por pontos foi utilizada na aproximação dos valores de fluxo ou trações de superfície (na transferência de valores "MEC→MEF").

Na avaliação da condição de "momento nulo" na interface se acharam oito pontos; efetuando-se uma análise ao longo de um segmento idealizado de comprimento igual a $l_\Gamma = 6$ (figura 6.20). Na eliminação das incógnitas de condição essencial nestes pontos, com a finalidade de se obter uma relação explícita entre valores de condição essencial, associados aos nós locais de diferentes sub-regiões, é necessário desconsiderar alguns destes pontos. O número mínimo de pontos a serem desconsiderados, $np_{desc}$, é dado pela relação seguinte:

$$np_{desc} = nc_{loc} + nf_{loc} - np_{nul} \tag{6.13}$$

onde

$np_{desc}$: Número mínimo de pontos a serem desconsiderados.

$nc_{loc}$: Número de nós locais na sub-região $\Omega^{MEC}$.

$nf_{loc}$: Número de nós locais na sub-região $\Omega^{MEF}$.

$np_{nul}$: Número total de pontos detectados com "momento zero".

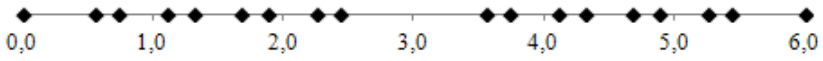


Figura 6.20: Esquema de pontos sob a condição de "momento nulo", detectados para uma variação linear da condição essencial em ambas as sub-regiões, considerando 6 nós locais MEC e 5 nós locais MEF.

A consideração de um número maior de pontos da *linha-esqueleto* a serem tirados gerou resultados instáveis e ainda menos acurados, conforme foram efetuados vários testes.

Na configuração de malha n°4 (figura 6.18(b)) foram estudados esquemas de discretização mais refinados, porém o quociente entre o número de pontos de interface em cada sub-região é algo maior, na ordem de 13/9. Na figura 6.21 são representados novamente valores da pressão acústica no ponto "*A*", para $\delta = 0.6$ e $\delta = 0.45$ considerando-se uma relação de passos de tempo $r_{\Delta t} = 4$; isto é, para um tamanho de elemento $l = 0.5$, dessa vez passos de tempo na sub-região $\Omega^{MEC}$ iguais a $\Delta t_C = 0.3$ e $\Delta t_C = 0.225$, respectivamente.

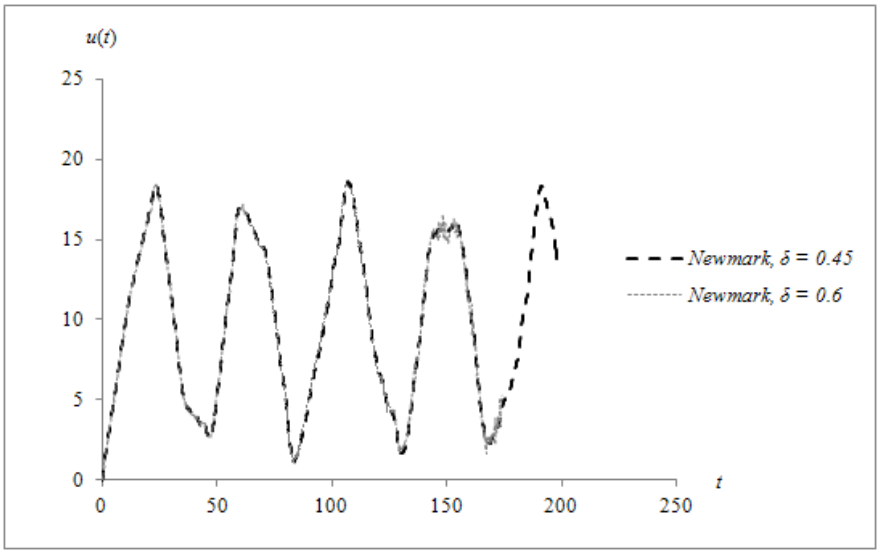


Figura 6.21: Valor da pressão acústica em "*A*" para $r_{\Delta t} = 4$ (configuração de malha n°4).

Apesar de serem consideradas malhas mais refinadas, um maior valor da relação entre o número de pontos MEC e o número de pontos MEF, na interface, não parece contribuir em favor da acurácia dos resultados. Além disso, o número $\delta = 0.6$ forneceu dessa vez resultados instáveis.

Na determinação das matrizes de vínculo $L_C$ e $L_F$ na interface, bem como do espaço nulo destas e da relação explícita entre valores locais de condição essencial, se obteve um total de dez pontos satisfazendo a condição de "momento nulo" (figura 6.22), a partir do teste de contato na interface, sendo necessário eliminar alguns destes pontos, conforme a expressão (6.13), optando-se por eliminar apenas um ponto. Devido à proximidade de vários pares de pontos optou-se por testar distintas escolhas, tanto mediante simples eliminação ou determinando-se a média entre pares de pontos que se acham próximos entre si. Dentre as distintas alternativas testadas, não foi observada diferença apreciável nos resultados, sendo que efetuar a escolha de um número de pontos maior a $np_{desc}$ deu sempre resultados menos acurados e ainda instáveis. Finalmente se determinou fusionar um par de pontos qualquer, computando-se a localização média entre os dois.

Na configuração da figura 6.18(b) também foi testada a mudança na ordem de aproximação para o cálculo das matrizes de vínculo $L_C$ e $L_F$, conforme o teste de contato na interface mesmo que a ordem dos elementos seja linear, a partir da fase de modelagem, resultados que são apresentados na figura 6.23 para um passo de tempo

MEC $\Delta t_b = 0.225$, tamanho de elemento $l = 0.5$, número de *Courant-Friedrich-Levy* $\delta = 0.45$ e razão de passos de tempo $r_{\Delta t} = 4$. A consideração de elementos quadráticos na sub-região $\Omega^{MEC}$ e lineares na sub-região $\Omega^{MEF}$, para transferência de valores de pressão acústica "MEF→MEC", não contribui a melhorar a acurácia dos resultados, enquanto que a escolha de elementos lineares em ambos os subdomínios, tanto para a pressão acústica quanto para o fluxo, na interface, ao invés de se usar colocação por pontos para este último, deu resultados instáveis.

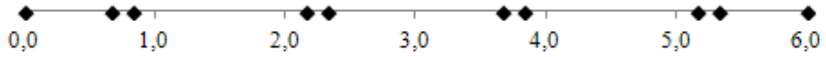


Figura 6.22: Esquema de pontos sob a condição de "momento nulo", detectados para uma variação linear da condição essencial em ambas as sub-regiões, considerando 13 nós locais MEC e 9 nós locais MEF.

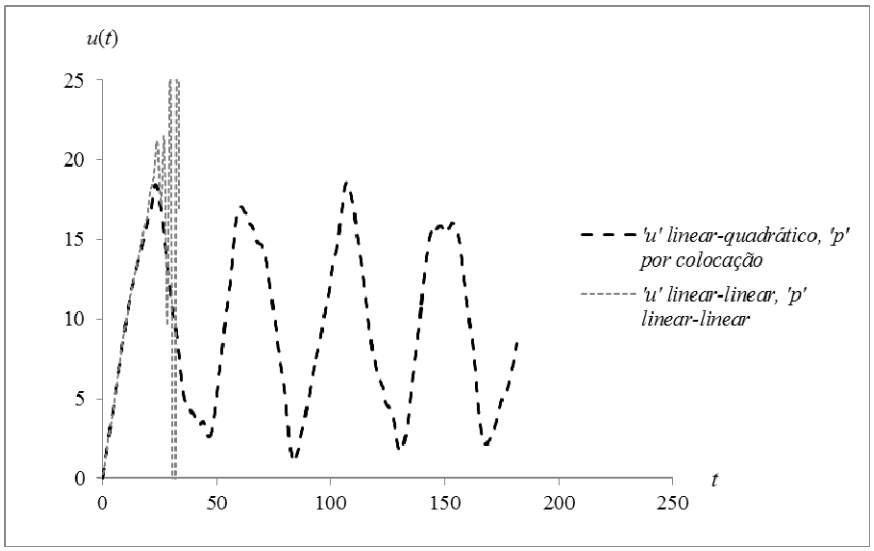


Figura 6.23: Valor da pressão acústica em "*A*" para $\delta = 0.45$ e $r_{\Delta t} = 4$, considerando diferentes níveis de aproximação para os elementos de interface no cálculo das matrizes $L_C$ e $L_F$ (configuração de malha n°4).

Finalmente a configuração de malha n°5, de acordo com a figura 6.18(c), foi testada considerando tamanho de elemento $l = 0.5$, razão de passos de tempo $r_{\Delta t} = 4$,

$\Delta t_C = 0.225$ e $\Delta t_C = 0.3$ (para $\delta = 0.45$ e $\delta = 0.6$, respectivamente), cujos resultados são apresentados na figura 6.24. No gráfico pode se observar que novamente a opção $\delta = 0.6$ outorga resultados instáveis, usando-se o método de *Newmark* para a marcha no tempo MEF. O esquema de discretização é bem similar a respeito da configuração n°4, sendo que dessa vez o número de pontos locais de ambas as regiões é bem similar, na razão de 13/11.

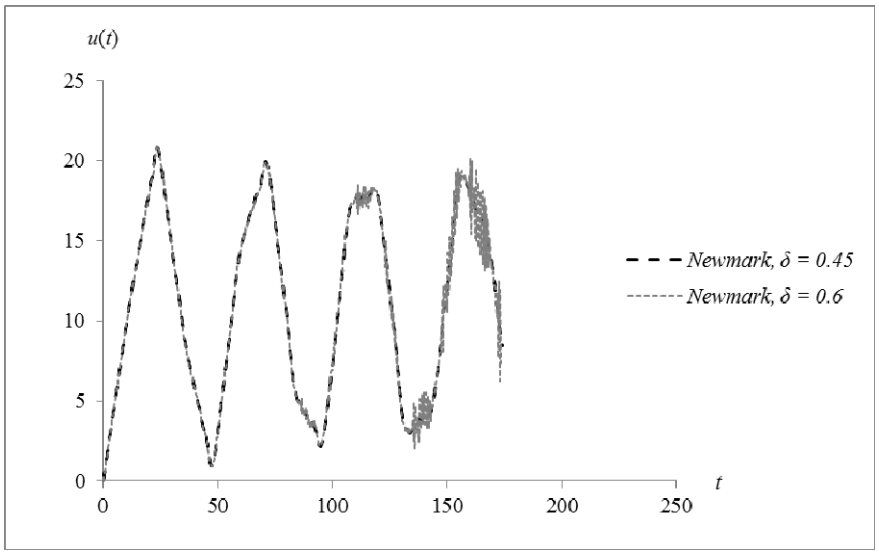


Figura 6.24: Valor da pressão acústica em "*A*" para $r_{\Delta t} = 4$ (configuração de malha n°5).

Nesta configuração o teste de contato na interface detectou um total de 18 pontos satisfazendo a condição de "momento nulo". Portanto, de acordo com a expressão (6.13) precisam ser eliminados sete pontos e, devido à proximidade entre vários pares de pontos (figura 6.25), se determina a localização média de sete dos oito pares próximos entre si, determinando-se a localização média do ponto comum que substituirá cada par de pontos.

Alguns testes foram efetuados mudando o número de dígitos decimais dos coeficientes das matrizes de vínculo direto na interface, $\mathbf{NS}_C^{red}$ e $\mathbf{NS}_F^{red}$ a partir da determinação do espaço nulo de $L_C$ e $L_F$, obtendo-se diferenças substanciais tanto na precisão como na estabilidade dos resultados. Assim, o processo de acoplamento iterativo com malhas não conformes é altamente sensível ao cálculo destes coeficientes, sendo necessário otimizar o processo de cálculo destes coeficientes.

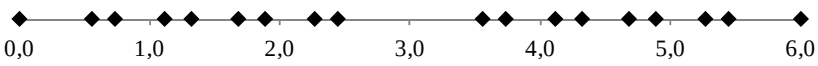


Figura 6.25: Esquema de pontos sob a condição de “momento nulo”, detectados para uma variação linear da condição essencial em ambas as sub-regiões, considerando 13 nós locais MEC e 11 nós locais MEF.

# 7

# Conclusões e sugestões para trabalhos futuros

## 7.1. Conclusões

No presente trabalho foi desenvolvido o estudo e implementação de multiplicadores de *Lagrange* na sua *forma localizada*, dentro de um esquema sequencial de acoplamento iterativo entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos, o qual admite a escolha de diferentes passos de tempo para a análise dinâmica de cada sub-região, bem como a consideração de malhas não coincidentes na interface. A seguir são apresentadas as principais conclusões de tal estudo.

- O fornecimento da geometria do problema, no processo de discretização de ambas as sub-regiões, bem como as condições de contorno e a ordem de aproximação das incógnitas nos elementos de cada subdomínio permitem deduzir o posicionamento de pontos ao longo de uma *pseudo-estrutura* na interface (*linha-esqueleto*), determinando-se as forças de contato entre tais pontos e os nós locais de cada sub-região, de forma única e de acordo com o *teste de contato na interface*, consistente na aplicação de esforço constante através dos elementos de interface, obtendo-se a localização dos pontos onde o momento flexionante seja igual ao zero, idealizando a *linha-esqueleto* como se tratando de uma viga submetida a cargas pontuais em sentido transverso a dita estrutura de interface.
- Em referência à contribuição da *linha-esqueleto* na expressão variacional da energia total, as forças de contato são referidas aos nós locais de cada sub-região supondo as distribuições de tais forças em base à colocação por pontos, enquanto que os nós onde se prescreve a condição essencial sobre a *pseudo-estrutura* de interface, geralmente, não coincidem com os mencionados nós locais. Devido a isto, surgem matrizes contendo interpoladores chamados de *funções de forma de interface*, com a finalidade de ser avaliada dita condição essencial, associada aos graus de liberdade da *linha-esqueleto*, em função da posição dos nós locais de ambas as sub-regiões, na interface.
- A determinação do espaço nulo das matrizes contendo os interpoladores de condição essencial, na interface, constitui uma etapa crucial que permite eliminar a variável correspondente à condição essencial nos pontos da *linha-esqueleto*, possibilitando a implementação de um esquema sequencial de acoplamento MEC-MEF mediante a obtenção de relações explícitas entre

valores de condição essencial, apenas em função das incógnitas dos nós locais de cada sub-região. A obtenção de ditas relações é condicionada pela técnica adotada na obtenção do espaço nulo, fornecendo valores arbitrários, porém convenientes, para os termos redundantes na conformação dos vetores abrangendo dito espaço. A técnica utilizada consistiu no processo de eliminação *gaussiana* e na prescrição de valores 1 e 0 nas colunas contendo os termos redundantes linearmente independentes, na geração de dito espaço.

- As transformações envolvidas na obtenção das relações de compatibilidade na interface implicam um maior esforço de implementação no caso de multiplicadores de *Lagrange* na sua *forma localizada*, a respeito das transformações equivalentes usando-se multiplicadores de *Lagrange* na sua *forma clássica*, porém a unicidade na solução é garantida no primeiro caso, devido ao estabelecimento de vínculos provenientes de equações de condição linearmente independentes.
- A escolha de diferentes passos de tempo para a análise dinâmica de cada sub-região influi na acurácia da solução obtida, obtendo-se maior precisão quanto maior é o valor do parâmetro $r_{\Delta t}$.
- O número de pontos de momento zero ao longo da *linha-esqueleto*, de acordo com o *teste de contato na interface*, depende do número e localização dos nós locais de cada sub-região, bem como do grau de aproximação da função de forma dos elementos envolvidos. Na prática, o número de pontos achados pode resultar maior do que o número de nós locais de cada sub-região, sendo que um número excessivo de pontos requer da desconsideração de alguns destes pontos, com a finalidade de possibilitar a obtenção de expressões explícitas para cada uma das incógnitas de um subdomínio em função das incógnitas da outra sub-região.
- A seleção dos pontos a serem desconsiderados dependerá do critério escolhido pelo usuário, tanto acerca da decisão do número de pontos a serem eliminados quanto a respeito de quais serão estes pontos e se eles serão simplesmente eliminados ou será calculada a média das coordenadas de pares de pontos relativamente próximos entre si. Os exemplos mostraram que quanto menor o número de pontos a serem desconsiderados, ao longo da *linha-esqueleto*, mais estáveis são os resultados.

- O acoplamento iterativo com malhas não coincidentes outorga resultados algo mais acurados quanto mais fina seja a discretização das sub-regiões. No entanto, a precisão é afetada sensivelmente se o número de nós locais das sub-regiões for muito diferente entre si. Para números similares de pontos locais observa-se uma melhora na precisão dos resultados.
- A metodologia de obtenção das relações explícitas de compatibilidade na interface, mediante determinação do espaço nulo, é ainda frágil em relação aos critérios de tratamento e manipulação das distintas equações obtidas, outorgando incerteza acerca da estabilidade e perda na acurácia da solução obtida. Portanto, a técnica precisa ser depurada matematicamente.

## 7.2. Sugestões para trabalhos futuros

Os esquemas de acoplamento numérico dependem de numerosas variáveis, tais como a geometria, as condições iniciais e de contorno do problema, a geometria de discretização e as ordens de aproximação no nível de elemento, etc. A necessidade de serem calibrados os programas, bem como a implementação de esquemas de acoplamento iterativo aplicando-os a distintos problemas de valores de contorno, constituem as principais questões a serem resolvidas em futuras pesquisas:

- Testar a acurácia do esquema sequencial de acoplamento para interação do tipo elástico-elástica, implementando a formulação do método de elementos de contorno para elasticidade plana, bem como aplicar o mencionado esquema de acoplamento para elasticidade tridimensional. Isto último implicaria um estudo aprofundado acerca da acurácia da solução versus a não conformidade de elementos de superfície na interface.
- A implementação dos esquemas acima mencionados possibilitaria o estudo de problemas transientes de interação solo-estrutura, tais como aquele onde se prescreve o histórico de acelerações em algum ponto do meio semi-infinito, estabelecendo conclusões acerca das características necessárias para uma ótima estruturação, bem como a influencia da topografia da superfície do solo e da localização do hipocentro em um terremoto.

- Implementação de esquemas *em paralelo* para acoplamento iterativo, possibilitando a interação de múltiplas sub-regiões, por exemplo, interação fluido-solo-estrutura.
- Automatização do processo de cálculo das matrizes de vínculo na interface, incluindo um processo automático para desconsideração de pontos da *linha-esqueleto* e incorporação dentro do algoritmo que constitui o esquema sequencial de acoplamento.
- Aprofundar o estudo da influencia de diferentes ordens de aproximação para os elementos de interface de cada sub-região, a respeito da acurácia da solução, do número de pontos com momento zero, da sua localização ao longo da *linha-esqueleto*, na determinação das matrizes de vínculo e na obtenção do espaço nulo destas matrizes.
- Aperfeiçoar o cálculo das matrizes de vínculo explícito, bem como estudar diferentes formas de computá-las, com a finalidade de gerar resultados mais confiáveis no algoritmo de acoplamento iterativo.

# Anexos

## A. Integração analítica dos termos resultantes de discretizar o domínio em células, no TDMEC

### *A.1. Contribuições $R_{li}^{\alpha n}$ e $T_{li}^{\alpha n}$*

As expressões incluindo a contribuição das condições iniciais no TDMEC são a terceira e quarta integrais presentes na expressão (2.2) ou, de forma alternativa, na equação (2.9). No presente anexo é avaliada a expressão (2.20) para $F_i^n$, ou seja, a contribuição das condições iniciais para o cálculo da resposta *u* no instante de tempo "*n*". Na equação discretizada (2.23), a componente "*i*" do termo $\mathbf{f}_n$ pode ser escrita conforme se segue:

$$F_i^n = \sum_{l=1}^{L} \left( R_{li}^{\alpha n} \; v_{0\alpha} + T_{li}^{\alpha n} \; u_{0\alpha} \right) \tag{A.1}$$

onde $u_{0\alpha}$ e $v_{0\alpha}$ representam os valores nodais do potencial ou condição essencial (a pressão acústica, na equação escalar da onda) e da velocidade (primeira derivada no tempo da pressão acústica), respectivamente, para uma célula triangular, tal como aquela representada na figura A.1. Os coeficientes $R_{li}^{\alpha n}$ e $T_{li}^{\alpha n}$ são obtidos supondo $u_0$ e $v_0$ variando conforme as funções de interpolação $\mu_\alpha$, em base a coordenadas de área (figura A.1):

$$u_0 = u_{0\alpha} \mu_\alpha \tag{A.2}$$

$$v_0 = v_{0\alpha} \mu_\alpha \tag{A.3}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial r} = u_{0\alpha} \frac{\partial \mu_\alpha}{\partial r} \tag{A.4}$$

e tais coeficientes são dados por [2]:

$$R_{li}^{\alpha n} = \frac{1}{c}\sum_{t=1}^{3}\int_{\theta_u}^{\theta_v}\left\{2\,C_\alpha\left(c\left(t_n - t_0\right) - V_1\,V_2\right)\right\}\,d\theta$$

$$+\frac{1}{c}\sum_{t=1}^{3}\int_{\theta_u}^{\theta_v} D_\alpha\left(\theta\right)\left[-g_t^i\left(\theta\right)\,V_1\,V_2 + c^2\left(t_n - t_0\right)^2\,V_3\right]\,d\theta \qquad \text{(A.5)}$$

$$T_{li}^{\alpha n} = \sum_{t=1}^{3}\int_{\theta_u}^{\theta_v}\left\{2\,C_\alpha\left(1-\frac{V_1}{V_2}\right)\right\}\,d\theta$$

$$+\sum_{t=1}^{3}\int_{\theta_u}^{\theta_v}\left\{2D_\alpha\left(\theta\right)\left(c\left(t_n - t_0\right)\left[V_3 + \frac{V_1}{V_2}\right] - V_1\,V_2\right)\right\}\,d\theta \qquad \text{(A.6)}$$

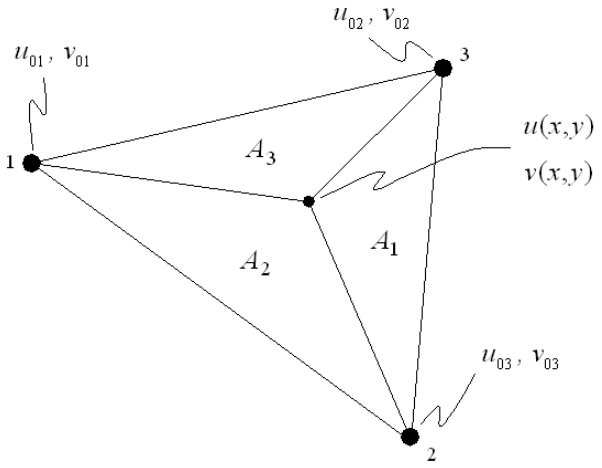


Figura A.1: Coordenadas de área e valores do potencial *u* e velocidade *v*.

onde *c* é a velocidade de propagação da onda no meio, $t_0$ o instante de tempo inicial e:

$$V_1 = \sqrt{c\left(t_n - t_0\right) - g_t^i\left(\theta\right)} \qquad \text{(A.7)}$$

$$V_2 = \sqrt{c\left(t_n - t_0\right) + g_t^i\left(\theta\right)} \qquad \text{(A.8)}$$

$$V_3 = arcsen\left(\frac{g_t^i\left(\theta\right)}{c\left(t_n - t_0\right)}\right) \qquad \text{(A.9)}$$

A função de interpolação em coordenadas polares resulta ser:

$$\mu_\alpha = C_\alpha + D_\alpha(\theta)\, r \quad \text{, com} \begin{cases} C_\alpha = \dfrac{A_\alpha}{A} \\ D_\alpha(\theta) = \dfrac{1}{2A}\left(b_\alpha \cos(\theta) + a_\alpha\, sen(\theta)\right) \end{cases} \tag{A.10}$$

onde:

$$a_\alpha = \breve{x}_\gamma - \breve{x}_\beta \qquad b_\alpha = \breve{y}_\beta - \breve{y}_\gamma \tag{A.11}$$

$$2A_\alpha = \breve{x}_\beta \breve{y}_\gamma - \breve{x}_\gamma \breve{y}_\beta \qquad A = \frac{1}{2}\left(b_\alpha\, a_\beta - b_\beta\, a_\alpha\right) \tag{A.12}$$

$$\alpha = 1,2,3 \qquad \beta = 2,3,1 \qquad \gamma = 3,1,2 \tag{A.13}$$

Enquanto isso, $\breve{x}_\alpha$ e $\breve{y}_\alpha$ representam as coordenadas relativas, de acordo com o esquema da figura A.2:

$$x = x_i + \breve{x} = x_i + r\, \cos(\theta) \tag{A.14}$$

$$y = y_i + \breve{y} = y_i + r\, sen(\theta) \tag{A.15}$$

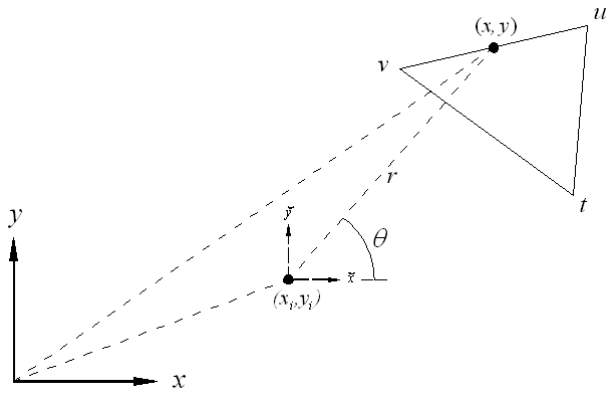


Figura A.2: Coordenadas absolutas e relativas ao nó *i*.

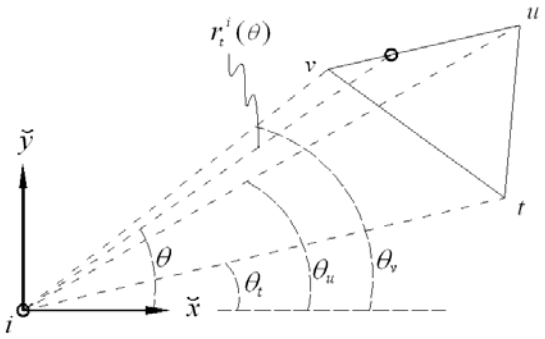


Figura A.3: Conceito geométrico do $r_t^i(\theta)$.

Finalmente, sendo $t=1,2,3$, $u=2,3,1$ e $v=3,1,2$ (figura A.3), tem-se:

$$g_t^i(\theta)=\begin{cases} r_t^i(\theta) & r_t^i(\theta)<c\,(t_n-t_0) \\ c\,(t_n-t_0) & r_t^i(\theta)>c\,(t_n-t_0) \end{cases} \tag{A.16}$$

$$r_t^i(\theta)=\frac{-2A_t}{b_t\cos(\theta)+a_t\,sen(\theta)} \tag{A.17}$$

## *A.2. Derivadas das contribuições $R_{li}^{\alpha n}$ e $T_{li}^{\alpha n}$*

No cálculo das derivadas do potencial (ou deslocamento) para pontos internos, especialmente as espaciais, é necessário o uso da regra de *Leibniz*, pois os limites de integração, $\theta_u$ e $\theta_v$, são funções das variáveis *x* e *y*.

Expressando os coeficientes $R_{li}^{\alpha n}$ e $T_{li}^{\alpha n}$, das equações (A.5) e (A.6), na forma:

$$R_{li}^{\alpha n}=\sum_{t=1}^{3}\int_{\theta_u}^{\theta_v} I_R(\theta,x_i,y_i)\,d\theta \tag{A.18}$$

$$T_{li}^{\alpha n}=\sum_{t=1}^{3}\int_{\theta_u}^{\theta_v} I_T(\theta,x_i,y_i)\,d\theta \tag{A.19}$$

usando a regra de derivação de *Leibniz*, as derivadas são dadas por:

$$\frac{\partial R_{li}^{\alpha n}}{\partial x_i} = \sum_{t=1}^{3} \left\{ \int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial \left\{ I_R(\theta, x_i, y_i) \right\}}{\partial x_i} d\theta - I_R(\theta_u, x_i, y_i) \frac{\partial \theta_u}{\partial x_i} + I_R(\theta_v, x_i, y_i) \frac{\partial \theta_v}{\partial x_i} \right\} \tag{A.20}$$

$$\frac{\partial R_{li}^{\alpha n}}{\partial y_i} = \sum_{t=1}^{3} \left\{ \int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial \left\{ I_R(\theta, x_i, y_i) \right\}}{\partial y_i} d\theta - I_R(\theta_u, x_i, y_i) \frac{\partial \theta_u}{\partial y_i} + I_R(\theta_v, x_i, y_i) \frac{\partial \theta_v}{\partial y_i} \right\} \tag{A.21}$$

$$\frac{\partial T_{li}^{\alpha n}}{\partial x_i} = \sum_{t=1}^{3} \left\{ \int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial \left\{ I_T(\theta, x_i, y_i) \right\}}{\partial x_i} d\theta - I_T(\theta_u, x_i, y_i) \frac{\partial \theta_u}{\partial x_i} + I_T(\theta_v, x_i, y_i) \frac{\partial \theta_v}{\partial x_i} \right\} \tag{A.22}$$

$$\frac{\partial T_{li}^{\alpha n}}{\partial y_i} = \sum_{t=1}^{3} \left\{ \int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial \left\{ I_T(\theta, x_i, y_i) \right\}}{\partial y_i} d\theta - I_T(\theta_u, x_i, y_i) \frac{\partial \theta_u}{\partial y_i} + I_T(\theta_v, x_i, y_i) \frac{\partial \theta_v}{\partial y_i} \right\} \tag{A.23}$$

Entretanto, fazendo uso do teorema fundamental do cálculo, para as derivadas temporais obtém-se:

$$\frac{\partial R_{li}^{\alpha n}}{\partial t_n} = \sum_{t=1}^{3} \int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial \left\{ I_R(\theta, x_i, y_i) \right\}}{\partial t_n} d\theta \tag{A.24}$$

$$\frac{\partial T_{li}^{\alpha n}}{\partial t_n} = \sum_{t=1}^{3} \int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial \left\{ I_T(\theta, x_i, y_i) \right\}}{\partial t_n} d\theta \tag{A.25}$$

Desenvolvendo, chega-se a:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_i} = \frac{sen(\theta)}{r_t^i(\theta)} \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y_i} = -\frac{\cos(\theta)}{r_t^i(\theta)} \tag{A.26}$$

Fazendo uso da regra da cadeia, por exemplo, para $R_{li}^{\alpha n}$:

$$\left(R_{li}^{\alpha n}\right)_{\int x} = \sum_{t=1}^{3}\int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial\left\{I_R(\theta, x_i, y_i)\right\}}{\partial x_i}\, d\theta = \sum_{t=1}^{3}\int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial(I_R)}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\, d\theta \tag{A.27}$$

$$\left(R_{li}^{\alpha n}\right)_{\int y} = \sum_{t=1}^{3}\int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial\left\{I_R(\theta, x_i, y_i)\right\}}{\partial y_i}\, d\theta = \sum_{t=1}^{3}\int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial(I_R)}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y_i}\, d\theta \tag{A.28}$$

obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(I_R)}{\partial\theta} = &+\frac{2}{c}\frac{\partial g_t^i(\theta)}{\partial\theta}\frac{g_t^i(\theta)}{V_1\cdot V_2}\left\{C_\alpha + D_\alpha(\theta)\; g_t^i(\theta)\right\} \\ &+\frac{1}{c}\;\frac{1}{2A}\left\{-b_\alpha\; sen(\theta) + a_\alpha\cos(\theta)\right\} \\ &\left\{-g_t^i(\theta)\; V_1\; V_2 + c^2\left(t_n - t_i\right)^2 V_3\right\}\end{aligned} \tag{A.29}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(I_T)}{\partial\theta} = &\,2\frac{\partial g_t^i(\theta)}{\partial\theta}\left\{\frac{c(t_n - t_i)\left(C_\alpha + D_\alpha(\theta)\left[g_t^i(\theta)\right]\right)}{V_1\;(V_2)^3} + \frac{D_\alpha(\theta)\left[g_t^i(\theta)\right]}{V_1\; V_2}\right\} \\ &+\left[\frac{1}{A}\left\{-b_\alpha\; sen(\theta) + a_\alpha\cos(\theta)\right\}\right]\left(c(t_n - t_i)\left[V_3 + \frac{V_1}{V_2}\right] - V_1\; V_2\right)\end{aligned} \tag{A.30}$$

Desenvolvendo agora (A.20) até a (A.23) obtém-se finalmente:

$$\frac{\partial R_{li}^{\alpha n}}{\partial t_n} = \frac{2}{c}\sum_{t=1}^{3}\int_{\theta_u}^{\theta_v}\left\{\frac{\partial g_t^i(\theta)}{\partial t_n}\left[g_t^i(\theta)\left(\frac{C_\alpha + D_\alpha(\theta)\left[g_t^i(\theta)\right]}{V_1\ V_2}\right)\right]\right\} d\theta$$

$$+2\sum_{t=1}^{3}\int_{\theta_u}^{\theta_v}\left\{C_\alpha\left[1-\frac{c(t_n-t_i)}{V_1\ V_2}\right]+c(t_n-t_i)\ D_\alpha(\theta)\left[V_3-\frac{g_t^i(\theta)}{V_1\ V_2}\right]\right\} \qquad \text{(A.31)}$$

$$\frac{\partial T_{li}^{\alpha n}}{\partial t_n} = 2\sum_{t=1}^{3}\int_{\theta_u}^{\theta_v}\frac{\partial g_t^i(\theta)}{\partial t_n}\left\{\frac{c(t_n-t_i)}{V_1\ (V_2)^3}\left(C_\alpha + D_\alpha(\theta)\left[g_t^i(\theta)\right]\right)\right.$$

$$\left.+D_\alpha(\theta)\frac{g_t^i(\theta)}{V_1\ V_2}\right\} d\theta$$

$$+2c\sum_{t=1}^{3}\int_{\theta_u}^{\theta_v}\left\{D_\alpha(\theta)\ V_3-\frac{g_t^i(\theta)}{V_1\ (V_2)^3}\left(C_\alpha + D_\alpha(\theta)\left[g_t^i(\theta)\right]\right)\right.$$

$$\left.-D_\alpha(\theta)\frac{g_t^i(\theta)}{V_1\ V_2}\right\} d\theta \qquad \text{(A.32)}$$

## B. Critério *Schwarz Dirichlet-Dirichlet* de caráter sequencial para acoplamento acústico-elástico

### *B.1 Introdução*

O esquema iterativo é similar ao *Schwarz Dirichlet-Neumann* sequencial para acoplamento acústico-acústico, sendo a principal diferença devida a que a imposição de condição natural nos pontos da sub-região $\Omega^{MEF}$, na interface, equivale a prescrever condição essencial para a sub-região $\Omega^{MEC}$ nestes pontos, pois as incógnitas no problema governado pela equação escalar da onda são a pressão acústica e o fluxo de pressões, enquanto que na elasticidade são o deslocamento e a força nodal (tração ou força por unidade de superfície, no caso do MEC).

A consideração de incógnitas de diferente natureza em ambas as sub-regiões define a forma em que serão impostas as condições na interface. Em esquemas de acoplamento acústico-acústico é estabelecida uma igualdade entre valores de condição essencial, em ambas as sub-regiões (a primeira das equações (4.5)). Logo, é imposto o princípio da ação-reação (terceira lei de *Newton*) referido ao fluxo de pressões no meio acústico, transformando ditas trações de superfície em forças nodais equivalentes, de acordo com a segunda equação (4.5). No entanto, em esquemas de acoplamento acústico-elástico é imposto o próprio princípio da ação-reação, desta vez considerando que a pressão acústica nos pontos de interface da sub-região $\Omega^{MEC}$ (condição essencial) é correspondente com a componente normal da força nodal referida à sub-região $\Omega^{MEF}$ nestes pontos, ou seja:

$$\mathbf{f}_I^{MEF} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\left( \left\| \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_I^{MEC} \right\|_2 \right) \tag{B.1}$$

A segunda condição a ser testada na interface, no caso do acoplamento acústico-elástico, é estabelecida mediante a equação dinâmica (segunda lei de *Newton*) expressa na sua forma diferencial, em conjunto com o princípio da ação-reação, supondo a componente normal, por exemplo, na direção "*x*", ao longo de um volume diferencial de elemento de interface pertencente à sub-região $\Omega^{MEF}$, através das facetas $dydz$:

$$\sum df = \ddot{u}\, dm$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\left[\cancel{\sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx\right] - \cancel{\sigma}\right) \cancel{dy}\, \cancel{dz} = \ddot{u}\left(\rho dx \cancel{dy}\, \cancel{dz}\right) \qquad \Big/ \frac{1}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{dx}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} dx\right) = \ddot{u}\frac{1}{dx}\left(\rho dx \cancel{dy}\, \cancel{dz}\right)$$

$$\therefore \quad p_I^{(MEC)} = -\frac{\partial \sigma}{\partial x} = -\rho\, \ddot{u}_I^{(MEF)} \tag{B.2}$$

## *B.2 Descrição do algoritmo*

A seguir é descrito sucintamente um algoritmo que permite resolver sequencialmente o problema do acoplamento acústico-elástico de forma iterativa.

- *Loop* para cada instante de tempo, $i = 1, 2, \ldots, nt^{MEC}$;
- É fornecida uma aproximação para o fluxo de pressões na interface, $\mathbf{p}_{I,k}^{(i),MEC}$, fazendo $k = 0$ antes da primeira iteração, ou seja:

$$\mathbf{p}_{I,0}^{(i),MEC} = \bar{\mathbf{p}} \tag{B.3}$$

- *Loop* para cada iteração, $k = 1, 2, \ldots, n_{iter}$ :

  → Resolve-se o sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{CC}^{(i)} & \mathbf{H}_{CI}^{(i)} \\ \mathbf{H}_{IC}^{(i)} & \mathbf{H}_{II}^{i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_C^{(i)} \\ \mathbf{u}_{I,k}^{(i),MEC} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{CC}^{(i)} & \mathbf{G}_{CI}^{(i)} \\ \mathbf{G}_{IC}^{(i)} & \mathbf{G}_{II}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_C^{(i)} \\ \mathbf{p}_{I,k-1}^{(i),MEC} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_C^{(i)} \\ \mathbf{q}_I^{(i)} \end{Bmatrix} \tag{B.4}$$

  obtendo-se a pressão acústica $\mathbf{u}_{I,k}^{(i),MEC}$ na interface;

→ A força nodal no meio elástico $\tilde{\mathbf{f}}_{I,k}^{(i),MEF}$, na interface, é determinada a partir da pressão $\mathbf{u}_{I,k}^{(i),MEC}$ no meio acústico, fazendo $\left(\tilde{\mathbf{f}}_{I,k}^{(i),MEF}\right)_n = -\mathbf{T}\,\mathbf{u}_{I,k}^{(i),MEC}$ e $\left(\tilde{\mathbf{f}}_{I,k}^{(i),MEF}\right)_t = 0$, onde $(\ )_n$ e $(\ )_t$ denotam as componentes normal e tangencial, respectivamente. Logo, interpolando no tempo é obtida a força nodal $\mathbf{f}_{I,k}^{(j),MEF}$;

→ Resolve-se o sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{FF} & \mathbf{M}_{FI} \\ \mathbf{M}_{IF} & \mathbf{M}_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_F^{(j)} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{I,k}^{(j),MEF} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{FF} & \mathbf{K}_{FI} \\ \mathbf{K}_{IF} & \mathbf{K}_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_F^{(j)} \\ \mathbf{u}_{I,k}^{(j),MEF} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_F^{(j)} \\ \mathbf{f}_{I,k}^{(j),MEF} \end{Bmatrix} \quad \text{(B.5)}$$

com a finalidade de se obter, na interface, o deslocamento e a aceleração no meio elástico, $\mathbf{u}_{I,k}^{(j),MEF}$ e $\ddot{\mathbf{u}}_{I,k}^{(j),MEF}$, respectivamente;

→ $\mathbf{u}_{I,k}^{(j),MEF}$ e $\ddot{\mathbf{u}}_{I,k}^{(j),MEF}$ são extrapolados no tempo, obtendo-se $\tilde{\mathbf{u}}_{I,k}^{(i),MEF}$ e $\tilde{\ddot{\mathbf{u}}}_{I,k}^{(i),MEF}$;

→ Um novo valor para o fluxo de pressões, no meio acústico, e obtido mediante a componente normal da aceleração no meio elástico, por meio da relação mostrada a seguir:

$$\tilde{\mathbf{p}}_{I,k}^{(i),MEC} = -\rho\left(\tilde{\ddot{\mathbf{u}}}_{I,k}^{(i),MEF}\right)_n \quad \text{(B.6)}$$

→ Adota-se um valor adequado para o parâmetro de relaxação $\omega$, determinando-se um novo vetor $\mathbf{p}_{I,k}^{(i),MEC}$, válido na iteração $k$, a partir da expressão seguinte:

$$\mathbf{p}_{I,k}^{(i),MEC} = (1-\omega)\,\mathbf{p}_{I,k-1}^{(i),MEC} + \omega\,\tilde{\mathbf{p}}_{I,k}^{(i),MEC} \quad \text{(B.7)}$$

→ Efetua-se o teste de convergência

$$\frac{\left\| \mathbf{p}_{I,k}^{(i),MEC} - \mathbf{p}_{I,k-1}^{(i),MEC} \right\|_2}{\left\| \mathbf{p}_{I,k}^{(i),MEC} \right\|_2} < \varepsilon \tag{B.8}$$

→ Caso não seja satisfeito o teste dado por (B.8), o *loop* iterativo continua.

Caso o teste de convergência for satisfeito, então se efetua a saída do *loop* iterativo, passando o controle de execução para o próximo instante de tempo;

- Fim do *loop* iterativo;
- Fim do *loop* no tempo.

## C. Método dos gradientes conjugados

### *C.1 Introdução*

O método foi concebido inicialmente para a resolução de sistemas lineares de equações, na forma:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{C.1}$$

minimizando a forma quadrática seguinte:

$$f(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}^T\mathbf{K}\,\mathbf{u}\right) - \mathbf{u}^T\mathbf{f} \tag{C.2}$$

A equivalência entre as duas formas pode ser demonstrada facilmente calculando-se o gradiente do funcional (C.2).

### *C.2 Método do descenso íngreme (steepest descent method)*

Consiste em um método iterativo para a resolução de sistemas de equações lineares, onde um vetor, cujas componentes são inicialmente assumidas (aproximadas), vai se tornando em uma melhor aproximação do vetor solução, de forma tal que o funcional (C.2) decresça o mais rapidamente possível em cada iteração. A direção de decrescimento é dada pelo vetor resíduo $\mathbf{r}$. Portanto, após efetuar-se a "*i*"-ésima iteração, tem-se:

$$\mathbf{r}^{(i)} = -f'\left(\mathbf{u}^{(i)}\right) = \mathbf{f} - \mathbf{K}\,\mathbf{u}^{(i)} \tag{C.3}$$

Vale frisar que, assim que o resíduo $\mathbf{r}$ quantifique a medida na qual $\mathbf{K}\,\mathbf{u}^{(i)}$ se aproxima do vetor $\mathbf{f}$, então o erro $\mathbf{e}\left(\mathbf{u}^{(i)}\right) = \mathbf{u}^{(i)} - \mathbf{u}$ estabelece quão próximo da solução $\mathbf{u}$ se encontra o vetor $\mathbf{u}^{(i)}$. Enquanto isso, $\mathbf{r}^{(i)} = -\mathbf{K}\,\mathbf{e}^{(i)}$ implica $\mathbf{r}^{(i)} = -f'\left(\mathbf{u}^{(i)}\right)$, correspondendo ao descenso mais acelerado (ou íngreme) até o vetor solução.

Assim, o problema é focado em ser achado o coeficiente $\alpha$ na expressão recursiva mostrada a seguir:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(0)} + \alpha\, \mathbf{r}^{(0)} \tag{C.4}$$

de forma tal que a derivada direcional do funcional *f*, em relação a dito coeficiente, seja nula, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f\left(\mathbf{u}^{(1)}\right) = \left[ f'\left(\mathbf{u}^{(1)}\right)\right]^T \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\mathbf{u}^{(1)}\right) = \left[ f'\left(\mathbf{u}^{(1)}\right)\right]^T \mathbf{r}^{(0)} = 0 \tag{C.5}$$

Desenvolvendo (C.5), levando em consideração as expressões (C.3) e (C.4), chega-se a:

$$\alpha = \frac{\left(\mathbf{r}^{(0)}\right)^T \mathbf{r}^{(0)}}{\left(\mathbf{r}^{(0)}\right)^T \mathbf{K}\, \mathbf{r}^{(0)}} \tag{C.6}$$

Finalmente, o algoritmo pode ser resumido em três etapas: cálculo do resíduo $\mathbf{r}^{(i)}$, dedução do coeficiente $\alpha^{(i)}$ e obtenção da nova aproximação para o vetor solução, conforme se segue:

$$\mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{f} - \mathbf{K}\, \mathbf{u}^{(i)} \tag{C.7}$$

$$\alpha^{(i)} = \frac{\left(\mathbf{r}^{(i)}\right)^T \mathbf{r}^{(i)}}{\left(\mathbf{r}^{(i)}\right)^T \mathbf{K}\, \mathbf{r}^{(i)}} \tag{C.8}$$

$$\mathbf{u}^{(i+1)} = \mathbf{u}^{(i)} + \alpha^{(i)}\, \mathbf{r}^{(i)} \tag{C.9}$$

### *C.3 Método das direções conjugadas*

O principal propósito deste método foi depurar o procedimento anteriormente descrito, no que diz respeito com a utilização da mesma direção de busca em diferentes iterações. Por tal motivo, tornando o processo mais eficiente, o método das direções

conjugadas estabelece um critério de busca procurando direções mutuamente ortogonais.

Sejam $\mathbf{d}^{(0)}$, $\mathbf{d}^{(1)}$,…, $\mathbf{d}^{(n-1)}$ tais direções de busca, supondo que uma nova aproximação do vetor solução é dada por:

$$\mathbf{u}^{(i+1)} = \mathbf{u}^{(i)} + \alpha^{(i)}\, \mathbf{d}^{(i)} \tag{C.10}$$

Escolhendo-se $\alpha^{(i)}$ de forma a se ter o erro $\mathbf{e}^{(i+1)}$ ortogonal com a direção de busca $\mathbf{d}^{(i)}$, resulta:

$$\alpha^{(i)} = -\frac{\left(\mathbf{d}^{(i)}\right)^T \mathbf{e}^{(i)}}{\left(\mathbf{d}^{(i)}\right)^T \mathbf{d}^{(i)}} \tag{C.11}$$

No entanto, o erro $\mathbf{e}^{(i)}$ não se conhece na prática, devido ao qual se prefere que as direções $\mathbf{d}^{(i)}$ sejam ortogonais a respeito da matriz **K** (**K**-*ortogonais*), ou seja:

$$\left(\mathbf{d}^{(i)}\right)^T \mathbf{K}\, \mathbf{d}^{(j)} = 0 \qquad , \qquad i \neq j \tag{C.12}$$

A relação anterior implica escolher o erro $\mathbf{e}^{(i+1)}$ como sendo **K**-*ortogonal* à direção de busca $\mathbf{d}^{(i)}$. Isto é:

$$\left(\mathbf{d}^{(i)}\right)^T \mathbf{K}\, \mathbf{e}^{(i+1)} = 0 \tag{C.13}$$

obtendo-se finalmente:

$$\alpha^{(i)} = -\frac{\left(\mathbf{d}^{(i)}\right)^T \mathbf{r}^{(i)}}{\left(\mathbf{d}^{(i)}\right)^T \mathbf{K}\, \mathbf{d}^{(i)}} \tag{C.14}$$

## *C.4 Conjugação de Gram-Schmidt*

A conjugação de *Gram-Schmidt* permite obter uma sequencia de vetores de direção de busca $\mathbf{d}^{(i)}$ mutuamente ortogonais com respeito da matriz **K** (**K**-*ortogonais*).

Sejam $\mathbf{x}^{(0)}$, $\mathbf{x}^{(1)}$,..., $\mathbf{x}^{(n-1)}$ vetores linearmente independentes; então os vetores $\mathbf{d}^{(i)}$ são obtidos extraindo, a partir dos $\mathbf{x}^{(i)}$, o subespaço contendo as direções $\mathbf{d}$ previamente achadas. Assim, determinando-se os parâmetros $\beta_{ik}$, onde $i > k$, as direções de busca são expressas mediante a relação mostrada a seguir:

$$\mathbf{d}^{(i)} = \mathbf{x}^{(i)} + \sum_{k=0}^{i-1} \beta_{ik}\, \mathbf{d}^{(k)} \tag{C.15}$$

Aplicando a transposta de (C.15), pós-multiplicando por $\mathbf{K}\,\mathbf{d}^{(j)}$ e aplicando a propriedade de ortogonalidade, chega-se a:

$$\beta_{ij} = -\frac{\left(\mathbf{x}^{(i)}\right)^T \mathbf{K}\,\mathbf{d}^{(j)}}{\left(\mathbf{d}^{(j)}\right)^T \mathbf{K}\,\mathbf{d}^{(j)}} \tag{C.16}$$

## *C.5 Método dos gradientes conjugados*

O método dos gradientes conjugados permite implementar um procedimento para a obtenção de direções de busca mutuamente ortogonais, porém com uma maior economia computacional que o método das direções conjugadas, pois este último requer do fornecimento de uma base de vetores linearmente independentes, com tal de serem achados os vetores de direção de busca, além da reserva de espaço de memória necessária para armazenamento de cada uma das direções de busca previamente determinadas.

Uma propriedade interessante, no método dos gradientes conjugados, consiste em perceber que os vetores de resíduo $\mathbf{r}^{(i)}$ são linearmente independentes, podendo constituir a base de vetores $\mathbf{x}^{(i)}$ e, além disso, cada um destes vetores de resíduo são **K**-*ortogonais* respeito dos vetores de direção de busca, não sendo necessário efetuar o

armazenamento dos vetores de direção de busca anteriormente achados. Portanto, $\mathbf{r}^{(i)}$ é ortogonal a $\mathbf{d}^{(k)}$, $\forall k < i$, tendo-se:

$$\mathbf{d}^{(i)} = \mathbf{x}^{(i)} + \sum_{k=0}^{i-1} \beta_{ik}\ \mathbf{d}^{(k)}\ = \mathbf{r}^{(i)} + \beta_k\ \mathbf{d}^{(k)} \tag{C.17}$$

onde $\beta_{ik}$ com $i = k$ tem sido substituído por $\beta_k$. Enquanto isso:

$$\beta_{ij} = -\frac{\left(\mathbf{r}^{(i)}\right)^T \mathbf{K}\ \mathbf{d}^{(j)}}{\left(\mathbf{d}^{(j)}\right)^T \mathbf{K}\ \mathbf{d}^{(j)}} \tag{C.18}$$

Logo, é possível demonstrar que tais coeficientes podem ser computados mediante uma expressão ainda mais simples, ou seja:

$$\beta_{ij} \rightarrow \beta_i = \frac{\left(\mathbf{r}^{(i)}\right)^T \mathbf{r}^{(i)}}{\left(\mathbf{r}^{(i-1)}\right)^T \mathbf{r}^{(i-1)}} \tag{C.19}$$

Assim, pode ser estabelecido o algoritmo de resolução mediante a sequência de cálculos apresentados a seguir:

- Inicialmente se assume a direção de busca como sendo igual ao resíduo, ou seja:

$$\mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{f} - \mathbf{K}\ \mathbf{u}^{(0)} \tag{C.20}$$

- Inicia-se o processo iterativo, fazendo $i = 1,\ n_{iter}$:

  - É obtido o coeficiente $\alpha^{(i)}$,

$$\alpha^{(i)} = \frac{\left(\mathbf{r}^{(i-1)}\right)^T \mathbf{r}^{(i-1)}}{\left(\mathbf{d}^{(i-1)}\right)^T \mathbf{K}\ \mathbf{d}^{(i-1)}} \tag{C.21}$$

- É obtida uma nova aproximação para o vetor solução,

$$\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{u}^{(i-1)} + \alpha^{(i)}\ \mathbf{d}^{(i-1)} \tag{C.22}$$

- É computado um novo vetor resíduo $\mathbf{r}^{(i)}$, sendo logo comparado com o resíduo obtido na iteração anterior, de acordo com um nível de tolerância especificado $\varepsilon$:

$$\mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{r}^{(i-1)} - \alpha^{(i)}\mathbf{K}\ \mathbf{d}^{(i-1)} \tag{C.23}$$

$$\frac{\left|\mathbf{r}^{(i)} - \mathbf{r}^{(i-1)}\right|}{\left|\mathbf{r}^{(i-1)}\right|} < \varepsilon \tag{C.24}$$

- Caso não seja satisfeito o teste (C.24), é calculado o coeficiente $\beta^{(i)}$, bem como a nova direção de busca, $\mathbf{d}^{(i)}$:

$$\beta^{(i)} = \frac{\left(\mathbf{r}^{(i)}\right)^T \mathbf{r}^{(i)}}{\left(\mathbf{r}^{(i-1)}\right)^T \mathbf{r}^{(i-1)}} \tag{C.25}$$

$$\mathbf{d}^{(i)} = \mathbf{r}^{(i)} + \beta^{(i)}\ \mathbf{d}^{(i-1)} \tag{C.26}$$

e o controle de execução retorna até (C.21).

## D. Descrição dos processos encomendados às diferentes unidades de programa

A seguir são mencionadas as principais operações efetuadas pelas rotinas mais relevantes do programa (ordenamento alfabético).

MEC_MEF: Programa principal, o qual estabelece o início de todas as operações; incluindo sentências para a leitura do nome dos arquivos de dados e de resultados, dimensionamento de variáveis armazenadas em arranjos (vetores, matrizes, etc.) referentes a dados de ambas as sub-regiões, leitura dos dados gerais referentes à sub-região MEF, definição e atualização do tipo de condição de contorno prescrita na interface, leitura e ordenamento da informação a respeito dos graus de liberdade MEF e funções de fonte MEF, leitura das condições iniciais MEF, impressão dos dados de condição inicial na sub-região MEF, cómputo dos parâmetros para a marcha no tempo MEF, cálculo das matrizes de *Green*, estabelecimento dos instantes de tempo de referência para a marcha no tempo MEC e MEF, execução do loop no tempo para cada instante de análise MEC e o loop iterativo para os "*nk*" instantes MEF (em cada instante de análise MEC) até se obter a precisão desejada.

ADDSTF: Sub-rotina destinada à montagem das matrizes de elemento dentro das matrizes de rigidez e de massa do sistema.

ATUAL_PC: Sub-rotina de controle encomendada a atualizar o vetor livre "*pc*" do sistema de equações para pontos do contorno, em cada passo de tempo, por conta das contribuições dos instantes anteriores, das condições iniciais, das fontes e das descontinuidades das fontes. Também é a unidade de programa encarregada de trocar os coeficientes das matrizes '**G**' e '**H**', conforme os valores prescritos, além de ser invertida a matriz '**H**'.

ATUAL_PP: Sub-rotina de controle encomendada a atualizar o vetor livre "*pp*" do sistema de equações para pontos internos, em cada passo de tempo, por conta das contribuições dos instantes anteriores, das condições iniciais, das fontes e das descontinuidades nas funções de fontes.

DAGER: Sub-rotina que efetua a leitura dos dados gerais referentes à discretização espacial da sub-região MEC.

DAGEO: Sub-rotina que efetua a leitura dos dados armazenados em arranjos, referentes à discretização espacial da sub-região MEC.

DIAG: Sub-rotina que efetua o cálculo do coeficiente "*c*" da matriz '*H*', inerente da formulação do TD-MEC.

DATEM: Sub-rotina que efetua a leitura dos dados gerais relativos à marcha no tempo para a sub-região MEC.

DACAR: Sub-rotina encarregada da leitura e impressão dos dados armazenados em arranjos, referentes à marcha no tempo na sub-região MEC.

DASOUR: Sub-rotina que efetua a leitura dos dados discretos representando as fontes na análise MEC.

DAJUMP: Sub-rotina que efetua a leitura dos dados das discontinuidades das funções representando a aplicação de fontes, na análise MEC.

ELMLIB: Sub-rotina de controle que funciona a modo de controle geral para os diferentes tipologias definidas de elemento finito.

ELMT01: Sub-rotina que determina as matrizes de massa e rigidez para elemento triangular linear, estado plano de deformação.

ELMT02: Sub-rotina que determina as matrizes de massa e rigidez para elemento triangular linear, estado plano de tensão.

ELMT03: Sub-rotina que determina as matrizes de massa e rigidez para elemento quadrilátero linear, estado plano de deformação.

ELMT04: Sub-rotina que determina as matrizes de massa e rigidez para elemento quadrilátero linear, estado plano de tensão.

ELMT05: Sub-rotina que determina as matrizes de massa e rigidez para elemento triangular linear para a equação escalar da onda.

ELMT06: Sub-rotina que determina as matrizes de massa e rigidez para elemento quadrilátero linear para a equação escalar da onda.

EXGA_G: Sub-rotina que computa a resposta na sub-região MEF por meio da função de *Green* explícita, usando-se tanto a matriz '**G**' como sua primeira e segunda derivadas no tempo (método ExGA; *explicit Green approach*). A sub-rotina é utilizada sempre que as matrizes com as funções de *Green* sejam computadas pelo algoritmo de *Runge-Kutta* ou pelo método de *Newmark*.

EXGA_H: Sub-rotina que computa a resposta na sub-região MEF por meio da função de *Green* explícita, usando-se as matrizes '**G**' e '**H**' junto com suas primeiras derivadas no tempo (método ExGAH). A sub-rotina é utilizada sempre que as matrizes contendo as funções de *Green* sejam computadas pelo algoritmo da diferença central.

FORM_MATRIZES_CC: Sub-rotina que efetua o cálculo das matrizes de influência referentes ao sistema de equações resultante para pontos do contorno, na sub-região MEC.

FORM_MATRIZES_PI: Sub-rotina que efetua o cálculo das matrizes de influência referentes ao sistema de equações resultante para os pontos internos, na sub-região MEC.

GREEN_RK: Sub-rotina que calcula explicitamente as matrizes contendo as funções de *Green* pelo método de *Runge-Kutta* de quarta ordem, usando subintervalos.

GREENH_DC: Sub-rotina que calcula explicitamente as matrizes contendo as funções de *Green* pelo método da diferença central, usando subintervalos.

GREEN_NW: Sub-rotina que calcula explicitamente as matrizes contendo as funções de *Green* pelo método de *Newmark*, usando subintervalos.

HOUBOLT: Sub-rotina que computa a resposta na sub-região MEF por meio do algoritmo de *Houbolt* para a marcha no tempo.

MATR_PF: Sub-rotina que computa a matriz que transforma trações de superfície em forças nodais, na sub-região MEC.

MULT_C: Sub-rotina encarregada de atualizar o vetor de constantes "*pc*" do sistema de equações para pontos do contorno, na sub-região MEC, considerando as contribuições dos instantes anteriores ('$t(m) < t(n)$').

MULT_I: Sub-rotina encarregada de atualizar o vetor de constantes "*pp*" do sistema de equações para pontos internos, na sub-região MEC, considerando as contribuições dos instantes anteriores ('$t(m) < t(n)$').

NEWMARK: Sub-rotina que computa a resposta na sub-região MEF por meio do algoritmo de *Newmark* para a marcha no tempo.

NUMEQ: Sub-rotina que enumera as incógnitas da sub-região MEF, conforme o ordenamento dos nós e graus de liberdade de acordo com o tipo de condição prescrita (reconhecendo se o grau de liberdade for considerado como livre ou como restringido).

PROFIL: Estabelece o perfil skyline da matriz de rigidez associada às incógnitas da sub-região MEF, mediante o vetor apontador "*jdiag*", armazenando inicialmente a informação referente à altura de coluna em dito vetor, e posteriormente a posição dos elementos da diagonal.

PLOAD: Sub-rotina que computa o vetor global das forças estáticas, só se for requerido.

PFORM: Sub-rotina que a partir do loop em cada elemento, bem como do loop em cada nó destes elementos, efetua as

chamadas para serem calculadas as matrizes de elemento e para serem montadas as matrizes do sistema, referentes à sub–região MEF.

PROJ_C: Sub-rotina que atualiza o vetor de constantes "*pc*" do sistema de equações para pontos do contorno, considerando as contribuições das descontinuidades das fontes.

PROS_C: Sub-rotina que atualiza o vetor de constantes "*pc*" do sistema de equações para pontos do contorno, considerando as contribuições das funções de fonte.

PROS_I: Sub-rotina que atualiza o vetor de constantes "*pp*" do sistema de equações para pontos internos, considerando as contribuições das funções de fonte.

RDATA: Sub-rotina que efetua a leitura dos dados da sub-região MEF que serão armazenados em arranjos; lê as coordenadas dos nós, os dados da conectividade dos elementos, os dados de condição prescrita em cada grau de liberdade, os graus de liberdade onde requer ser determinada a reação de apoio, os graus de liberdade com condição essencial prescrita e variável no tempo, etc.

SOLVE_MEC_CC: Sub-rotina que resolve as incógnitas na sub-região MEC para pontos do contorno, restitui o ordenamento inicial das incógnitas e finalmente imprime os resultados se o teste de convergência for satisfatório.

SOLVE_MEC_PI: Sub-rotina que resolve as incógnitas na sub-região MEC para pontos internos e imprime os resultados se o teste de convergência for satisfatório.

SOLVE_MEF: Sub-rotina de controle encarregada de efetuar a escolha do método de marcha no tempo a ser usado na análise MEF.

TRANSF_PF: Sub-rotina que transforma trações de superfície, obtidas na interface a partir da análise na sub-região MEC, em forças nodais aplicáveis na mesma interface para a sub-região MEF.

VET_NORM: Sub-rotina que determina as componentes do vetor normal para cada tramo reto ao longo da interface; o vetor normal aponta na direção exterior, em referência à sub-região MEC.

VEZ_C: Sub-rotina que atualiza o vetor de constantes "*pc*" do sistema de equações para pontos do contorno, considerando as contribuições das condições iniciais nas células.

VEZ_I: Sub-rotina que atualiza o vetor de constantes "*pp*" do sistema de equações para pontos internos, considerando as contribuições das condições iniciais nas células.

ZERA_CC: Sub-rotina que fornece valores iniciais nulos para as componentes de vetores, matrizes e arranjos de ordem superior, na resolução das incógnitas associadas a pontos do contorno da sub-região MEC.

ZERA_PI: Sub-rotina que fornece valores iniciais nulos para as componentes de vetores, matrizes e arranjos de ordem superior, na resolução das incógnitas associadas a pontos internos da sub-região MEC.

- Sub-rotinas para o cálculo dos coeficientes de influência nos pontos do contorno, para a sub-região MEC (fluxo com função de interpolação constante no tempo):

  Para o instante de tempo inmediatamente anterior: VETC1, MGC1 (caso o "nó fonte" não coincida com o nó inicial nem com o nó final do elemento a ser integrado), EXAC1 (caso o "nó fonte" sim coincida com o nó inicial ou o nó final do elemento a ser integrado).

  Para o resto dos instantes anteriores; FUNC1.

- Sub-rotinas para o cálculo dos coeficientes de influência nos pontos do contorno, para a sub-região MEC (fluxo com função de interpolação linear no tempo):

  Para o instante de tempo inmediatamente anterior: VETC2, MGC2 (caso o "nó fonte" não coincida com o nó inicial nem com o nó final do elemento a ser integrado), EXAC2 (caso o "nó fonte" sim coincida com o nó inicial ou o nó final do elemento a ser integrado).

  Para o resto dos instantes anteriores; FUNC2.

- Sub-rotinas para o cálculo dos coeficientes de influência nos pontos internos, para a sub-região MEC (fluxo com função de interpolação constante no tempo):

  Para o instante de tempo inmediatamente anterior: VETI1, MGI1.

  Para o resto dos instantes anteriores; FUNI1.

- Sub-rotinas para o cálculo dos coeficientes de influência nos pontos internos, para a sub-região MEC (fluxo com função de interpolação linear no tempo):

  Para o instante de tempo inmediatamente anterior: VETI2, MGI2.

  Para o resto dos instantes anteriores; FUNI2.

# Referências bibliográficas

[1] WROBEL, L.C., *Potential and viscous flow problems using the boundary element method*, Ph.D. dissertation, University of Southampton, Southampton, England, 1981.

[2] MANSUR, W.J., *A time-stepping technique to solve wave propagation problems using the boundary element method*, Ph.D. dissertation, University of Southampton, Southampton, England, 1983.

[3] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C., *Boundary element techniques – Theory and applications in engineering*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1983.

[4] DOMINGUEZ, Z., *Boundary elements in dynamics*, Computational Mechanics Publications, Southampton and Boston, 1993.

[5] GAUL, L., KÖGL, M., WAGNER, M., Boundary element methods for engineering and scientists – An introductory course with advanced topics, Springer-Verlag, Berlin and New York, 2003.

[6] HUGHES, T.J.R., *The finite element method*, Dover Publications INC, New York, 1987.

[7] CRISFIELD, M.A., *Non-linear finite element analysis of solids and structures. Vol. 1: Essencials*, John Wiley & Sons, Chichester, 1991.

[8] BATHE, K.J., *Finite element procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.

[9] ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L., *The finite element method set*, 6 ed., Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005.

[10] ZIENKIEWICZ, O.C., KELLY, D.W., BETTES, P., The coupling of finite element and boundary solution procedures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 11, n. 2, pp. 355-375, 1977.

[11] BREBBIA, C.A., GEORGION, P., "Combination of boundary and finite elements in elastostatics", *Applied Mathematical Modelling*, v. 3, n. 3, pp. 212-220, Jun. 1979.

[12] HARTMANN, F., "The derivation of stiffness matrices from integral equations", In: *Boundary element methods* (edited by Brebbia, C.A.) , pp. 552-566, Springer, Berlin, 1981.

[13] VARADARAJAN, A., SHARMA, K.G., SINCH, R.B., "Some aspects of coupled FEBEM analysis of underground openings", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 9, n. 6, pp. 557-571, 1985.

[14] BEER, G., SWOBODA, G., "Application of advanced boundary element and coupled methods in geomechanics", In: *Advanced Boundary Element Methods* (edited by Cruse, T.A.), pp. 19-28, Springer, Berlin, 1987.

[15] LAI, C.-H., "Diakoptics, domain decomposition and parallel computing", *Computer Journal*, v. 37, n. 10, pp. 840-846, 1994.

[16] KAMIYA, N., IWASE, H., KITA, E., "Parallel implementation of boundary element method with domain decomposition", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 18, n. 3, pp. 209-216, Oct. 1996.

[17] SCHWARZ, H.A., "Uber einige abbildungsaufgaben", *Gesammelete Mathematische Abhandlungen*, v. 11, pp. 65-83, 1896.

[18] KAMIYA, N., IWASE, H., KITA, E., "Parallel computing for the combination method for BEM and FEM", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 18, n. 3, pp. 223-229, Oct. 1996.

[19] KAMIYA, N., IWASE, H., "BEM and FEM combination parallel analysis using conjugate gradient and condensation", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 20, n. 4, pp. 319-326, Dec. 1997.

[20] ELLEITHY, W.M., TANAKA, M., "Interface relaxation algorithms for BEM-BEM coupling and FEM-BEM coupling", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, n. 26-27, pp. 2977-2992, Jul. 2003.

[21] LIN, C.C., LAWTON, E.C., CALIENDO, J.A., ANDERSON, L.R., "An iterative finite element-boundary element algorithm", *Computers and Structures*, v. 59, n. 5, pp. 899-909, Jun. 1996.

[22] AOUR, B., RAHMANI, O., NAIT-ABDELAZIZ, M., "A coupled FEM/BEM approach and its accuracy for solving crack problems in fracture mechanics", *International Journal of Solids and Structures*, v. 44, pp. 2523-2539, Aug. 2006.

[23] EL-GEBEILY, M., ELLEITHY, W.M., AL-GAHTANI, H.J., "Convergence of the domain decomposition finite element-boundary element coupling methods", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, V. 191, n. 43, pp. 4851-4867, Set. 2002.

[24] ELLEITHY, W.M., AL-GAHTANI, H.J., EL-GEBEILY, M., "Iterative coupling of BE and FE methods in elastostatics", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 25, n. 8, pp. 685-695, Apr. 2001.

[25] ELLEITHY, W.M., AL-GAHTANI, H.J., "An Overlapping domain decomposition approach for coupling the finite and boundary element methods", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 24, n. 5, pp. 391-398, Mar. 2000.

[26] SOARES, D., VON ESTORFF, O., MANSUR, W.J., "Iterative coupling of BEM and FEM for nonlinear dynamic analyses", *Computational Mechanics*, v. 34, n. 1, pp. 67-73, Jun. 2004.

[27] SOARES, D., CARRER, J.A.M., MANSUR, W.J., "Non-linear elastodynamic analysis by the BEM: an approach based on the iterative coupling of the D-BEM and TD-BEM formulations", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 29, n. 8, pp. 761-774, Aug. 2005.

[28] CARRER, J.A.M., MANSUR, W.J., VANZUIT, R.J., "Scalar wave equation by the boundary element method: a D-BEM approach with non-homogeneous initial conditions", *Computational Mechanics*; v. 44, n. 1, pp. 31-44, 2009.

[29] CARRER, J. A. M., MANSUR, W. J., "Alternative time-marching schemes for elastodynamic analysis with the domain boundary element method formulation". *Computational Mechanics*; v. 34, n. 5, pp. 387-399, 2004.

[30] HOUBOLT, J. C., "A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft". *Journal of Aeronautical Science*; v. 17, pp. 540-550, 1950.

[31] NEWMARK, N.M., "A method of computation for structural dynamics", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v. 85 EM3, pp. 67-94, 1959.

[32] CARRER, J.A.M., TELLES, J.C.F., "A boundary element formulation to solve transient dynamic elastoplastic problems", *Computers & Structures*, v. 45, n. 4, pp. 707-713, Nov. 1992.

[33] CARRER, J.A.M., TELLES, J.C.F., "Implicit procedures for the solution of elastoplastic problems by the boundary element method", *Mathematical and Computer Modelling*, v. 15, n. 3-5, pp. 303-311, 1991.

[34] NARDINI, D., BREBBIA, C.A., "A new approach to free vibration analysis using boundary elements". In: C.A. Brebbia, Editor, *Boundary element methods in engineering*, *Computational Mechanics Publications*, pp. 312-326, 1983.

[35] NARDINI, D., BREBBIA, C.A., "Transient boundary element elastodynamics using the dual reciprocity method and modal superposition", in Boundary Elements VIII (Ed. Tanaka, M. and Brebbia, C.A.). *Proceedings of the 8th International Conference on Boundary Elements*, Tokyo, Japan. Springer-Verlag, Berlin; v. 1, pp. 435-443, 1986.

[36] PARTRIDGE, P.W., BREBBIA, C.A., "Computer implementation of the BEM dual reciprocity method for the solution of Poisson type equations", *Software Engineering Workstations*; v. 5, pp. 199–206, 1989.

[37] PARTRIDGE, P.W., BREBBIA, C.A., WROBEL, L.C., *The Dual Reciprocity Element Method*. Computational Mechanics Publications, Southampton, Boston, 1992.

[38] VON ESTORFF, O., HAGEN, C., "Iterative coupling of FEM and BEM in 3D transient elastodynamics", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 30, n. 7, pp. 611-622, Jul. 2006.

[39] WARSZAWSKI, A., SOARES, D., MANSUR, W.J., "A FEM-BEM coupling procedure to model the propagation of interacting acoustic-acoustic/acoustic-elastic waves through axisymmetric media". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*; v. 197, n. 45-48, pp. 3828-3835, Aug. 2008.

[40] WARSZAWSKI, A., *Acoplamento MEC-MEF para problemas acústico-elastodinâmicos axissimétricos no domínio do tempo*, Dissertação de M.Sc, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2005.

[41] YU, G., MANSUR, W.J., CARRER, J.A.M., GONG, L., "A linear θ method applied to 2D time-domain BEM", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 14, n. 12, pp. 1171-1179, Dec. 1998.

[42] ARAÚJO, F.C., MANSUR, W.J., NISHIKAVA, L.K., "A linear θ time-marching algorithm in 3D BEM formulation for elastodynamics", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 23, v. 10, pp. 825-833, Dec. 1999.

[43] YU, G., MANSUR, W.J., CARRER, J.A.M., LIE, S.T.I., "A more stable scheme for BEM/FEM coupling applied to two-dimensional elastodynamics", *Computers & Structures*, v. 79, n. 8, pp. 811-823, Mar. 2001.

[44] YU, G., MANSUR, W.J., CARRER, J.A.M., GONG, L., "Time weighting in time domain BEM", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 22, n. 3, pp. Oct. 1998.

[45] YU, G., MANSUR, W.J., "Stability of Galerkin and collocation time domain boundary element methods as applied to the scalar wave equation", *Computers & Structures*, v. 74, n. 4, pp. 495-506, Feb. 2000.

[46] SOARES, D., MANSUR. W.J., "An efficient stabilized boundary element formulation for 2D time-domain acoustics and elastodynamics", *Computational Mechanics*, v. 40, n. 2, pp. 355-365, Jul. 2007.

[47] LIONS, P.L., "On the Schwarz alternating method III: a variant for nonoverlapping subdomains". In the *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Chan, T.F., Glowinski, R., Periaux, J., Widlund, O.B. (eds). SIAM: Philadelphia, PA, 1989; 202-203.

[48] SCHWARTZ, H.A., *Über einige Abbildungsaufgaben. Ges. Math. Abh.*, v. 11, pp. 65-83, 1869.

[49] BABUŠKA, I., "The finite element method with penalty", *Mathematics of Computations*, v. 27, n. 122, pp. 221-228, Apr. 1973.

[50] BOILLAT, E., "Finite element methods on non-conforming grids by penalizing the matching constraint", *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, v. 37, n. 2, pp. 357-372, 2003.

[51] NITSCHE, J., "Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind". *Abhandlungen Aus Dem Mathematischen Seminar Der Universitat Hamburg*, v. 36, pp. 9-15, 1971.

[52] BECKER, R., HANSBO, P., STEMBERG, R., "A finite element method for domain decomposition with non-matching grids", *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, v. 37, n. 2, pp. 209-225, Mar. 2003.

[53] HANSBO, A., HANSBO, P., LARSON, M.G., "A finite element method on composite grids based on Nitsche's method", *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, v. 37, n. 3, pp. 495-514, May 2003.

[54] HANSBO, P., "Nitsche's method for interface problems in computational mechanics", *GAMM-Mit*, v. 28, n. 2, pp.183-206, 2005.

[55] LI, S., LIU, W.K., “Meshfree and particle methods and their applications”, *Applied Mechanics Reviews*, v.55, n. 1, pp. 1-34, Jan. 2002.

[56] SCHABACK R, WENDLAND H., “Kernel techniques: from machine learning to meshless methods”, *Acta Numerica*, v. 15, pp. 543–639, May 2006.

[57] CHO, Y.-S., JUN, S., IM, S., KIM, H.-G., “An improved interface element with variable nodes for non-matching finite element meshes”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 194, n. 27-29, pp. 3022–3046, Jul. 2005.

[58] CHO, Y.-S., IM, S., “MLS-based variable-node elements compatible with quadratic interpolation. Part I: Formulation and application for non-matching meshes”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 65, n. 4, pp. 494–516, Jan. 2006.

[59] WU, Z., “Compactly supported positive definite radial functions”, *Advances in Computational Mathematics*, v. 4, n. 1, pp. 283–292, Dec. 1995.

[60] WENDLAND, H., “Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial basis functions of minimal degree”, *Advances in Computational Mathematics*, v. 4, pp. 389–396, Dec. 2005.

[61] WANG, J.G., LIU, G.R., “A point interpolation meshless method based on radial basis functions”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 54, n. 11, pp. 1623–1648, Aug. 2002.

[62] GU, Y.T., LIU, G.R., “A local point interpolation method for static and dynamic analysis of thin beams”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 42, pp. 5515–5528, Aug. 2001.

[63] GU, L., “Moving kriging interpolation and element-free Galerkin method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 56, n. 1, pp. 1–11, Jan. 2003.

[64] TIAN, R., YAGAWA, G., “Non-matching mesh gluing by meshless interpolation - an alternative to Lagrange multipliers”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 71, n. 4, pp. 473-503, Jul. 2007.

[65] GODINHO, L., SOARES, D., “Frequency domain analysis of fluid-solid interaction problems by means of iteratively coupled meshless approaches”, *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences*, v. 87, n. 4, pp. 327-354, Jul. 2012.

[66] GODINHO, L., SOARES, D., “Frequency domain analysis of interacting acoustic–elastodynamic models taking into account optimized iterative coupling of different numerical methods”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 37, n. 7-8, pp. 1074-1088, Aug. 2013.

[67] FONTES, E., *Técnicas avançadas em métodos verdadeiramente sem malha com aplicações em problemas de elasticidade e mecânica da fratura via superposição da função de Green numérica*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2014.

[68] LAGRANGE, J.L., *Mechanique analytique*, Gauthier-Villars, 4° édition, Paris, 1888.

[69] BABUŠKA, I., “The finite element method with Lagrangian multipliers”, *Numerische Mathematik*, v. 20, n. 3, pp. 179-192, 1973.

[70] LANCZOS, C., *The variational principles of mechanics*, University of Toronto Press, 4th Edition, Toronto, Canada, 1970.

[71] MACH, E., *The science of mechanics*, LaSalle, Open Court Pub. Co., Illinois, 1960.

[72] LIKINS, P.W., *Dynamics and control of flexible space vehicles*, NASA TR-32-1329, 1970.

[73] HAUG, E.J., *Computer aided analysis and optimization of mechanical system dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[74] FARHAT, C., ROUX, F-X., "A method of finite element tearing and interconecting and its parallel solution algorithm", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 32, n. 6, pp. 1205-1227, 1991.

[75] FARHAT, C., ROUX, F-X., "Implicit parallel processing in structural mechanics", *Computational Mechanics Advances*, v. 2, n. 1, pp. 1-124, 1994.

[76] PARK, K.C., REICH, G.W., ALVIN, K.F., "Structural damage detection using localized flexibilities", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v. 9, n. 11, pp. 911-919, Nov. 1998.

[77] PARK, K.C., FELIPPA, C.A., GUMASTE, U.A., "A localized version of the method of Lagrange multipliers and its applications", *Computational Mechanics*, v. 24, n. 6, pp. 476-490, Jan. 2000.

[78] PARK, K.C., FELIPPA, C.A., REBEL, G., "A simple algorithm for localized construction of non-matching structural interfaces", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 53, n. 9, pp. 2117-2142, Mar. 2002.

[79] PARK, K.C., FELIPPA, C.A., REBEL, G., "Interfacing non-matching finite element discretizations: the zero moment rule", *Trends in Computational Mechanics*, Wall, W.A., Bleitzinger, K.-U., Schweizerhof, K. (eds), CIMNE: Barcelona, Spain, pp. 355-367, 2001.

[80] TAYLOR, R.L., PAPADOPOULOS, P., "On a patch test for contact problems in two dimensions", *Computational Methods in Nonlinear Mechanics*, Wriggers, P., Wagner, W., (eds), Springer-Verlag, Berlin, pp. 690–702, 1991.

[81] CRISFIELD, M.A., "Re-visiting the contact patch test", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 48, n. 3, pp. 435–449, May 2000.

[82] PARK, K.C., FELIPPA, C.A., "A variational framework for solution method developments in structural mechanics", *Journal of Applied Mechanics*, v. 65, n. 1, pp. 242-249, Mar. 1998.

[83] PARK, K.C., FELIPPA, C.A., "A variational principle for the formulation of partitioned structural systems", *International Journal for Numerical Methods*, v. 47, n. 1-3, pp. 395-418, Feb. 2000.

[84] BERNARDI, C., MADAY, Y., PATERA, A.T., "Domain decomposition by the mortar element method", *In Asymptotic and Numerical Methods for Partial Differential Equations with Critical Parameters*, Kaper, H.G., Garbey, M., (eds), NATO Advanced Science Institutes (ASI) Series C, Mathematical and Physical Sciences, Kluwer, Dordrecht, v. 384, pp. 269–286, 1993.

[85] BELGACEM, F.B., "The mortar finite element method with Lagrange multipliers", *Numerische Mathematik*, v. 84, n. 2, pp.173–197, Dec. 1999.

[86] PARK, K.C., FELIPPA, C.A., OHAYON, R., "Partitioned formulation of internal fluid-structure interaction problems by localized Lagrange multipliers", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 24-25, pp. 2989-3007, Mar. 2001.

[87] GONZALEZ, J.A., PARK, K.C., FELIPPA, C.A., "FEM and BEM coupling in elastostatics using localized Lagrange multipliers", *International Journal for Numerical Methods*, v. 69, n. 10, pp. 2058-2074, March 2007.

[88] GONZALEZ, J.A., PARK. K.C., FELIPPA, C.A., ABASCAL, R., "A formulation based on localized Lagrange multipliers for BEM-FEM coupling in contact problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 197, n. 6-8, pp. 623-640, Jan. 2008.

[89] RÜBERG, T., SCHANZ, M., "Coupling finite and boundary element methods for static and dynamic elastic problems with non-conforming interfaces", *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 198, n. 3-4, pp. 449-458, Dec. 2008.

[90] RÜBERG, T., *Non-conforming FEM/BEM coupling in time domain*, Monographic Series TU Graz, Computation in Engineering and Science, Volume 3, Graz University of Technology, Graz, Austria, 2008.

[91] FARHAT, C., "A Lagrange multiplier based divide and conquer finite element algorithm", *Computing Systems in Engineering*, v. 2, n. 2-3, pp. 149-156, Feb. 1991.

[92] FARHAT, C., ROUX, F.X., "A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 32, n. 6, pp. 1205-1227, Oct. 1991.

[93] MANDEL, J., TEZAUR, R., "Convergence of a substructuring method with Lagrange multipliers", *Numerische Mathematik*, v. 73, n. 4, pp. 473-487, Jun. 1996.

[94] LANGER, U., STEINBACH, O., "Boundary elements tearing and interconnecting methods", *Computing*, v. 71, n. 3, pp. 205-228, Nov. 2003.

[95] LANGER, U., STEINBACH, O., "Coupled boundary and finite element tearing and interconnecting methods", *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*, Lectures Notes in Computational Science and Engineering, v. 40, pp. 83-97, 2005.

[96] LANGER, U., STEINBACH, O., "Coupled finite and boundary element domain decomposition methods", *Boundary Element Analysis. Mechanical Aspects and Applications*, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, v. 29, pp. 61-95, 2007.

[97] ZIENKIEWICZ, O.C., "A new look at the Newmark, Houbolt, and other time stepping formulas. A weighted residual approach", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 5, n. 4, pp. 413-418, Dec. 1977.

[98] CHUNG, J., HULBERT, J.M., "A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized-$\alpha$ method", *Journal of Applied Mechanics*, v. 60, n. 2, pp. 371-375, Jun. 1993.

[99] HILBER, H.M., HUGHES, T.J.R., TAYLOR, R.L., "Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics", *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, v. 5, n. 3, pp. 283-292, Jul.-Set. 1977.

[100] FUNG, T.C., "Unconditionally stable higher-order Newmark methods by sub-stepping procedure", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 147, n. 1-2, pp. 61-84, Jul. 1997.

[101] FUNG, T.C., "Complex-time-step Newmark methods with controllable numerical dissipation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 41, n. 1, pp. 65-93, Jan. 1998.

[102] FUNG, T.C., "Higher-order accurate time-step-integration algorithms by post-integration techniques", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 53, n. 5, pp. 1175-1193, Feb. 2002.

[103] ZHONG, W.X., WILLIAMS, F.W., "A precise time step integration method", *Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, v. 208, pp. 427-430, 1994.

[104] ZHONG, W.X., ZHU, J.P., ZHONG, X.X., "A precise time integration algorithm for non-linear systems", *Proceeding of Third World Congress on Computational Mechanics*, Chiba, Japan, v. 1, pp. 12-17, 1994.

[105] ZHONG, W., JIANING, Z., ZHONG, X.X., "On a new time integration method for solving time dependent partial differential equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 130, n. 1-2, pp. 163-178, Mar. 1996.

[106] FUNG, T.C., "A precise time-step integration method by step-response and impulsive-response matrices for dynamics problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, n. 24, pp. 4501-4527, Dec. 1997.

[107] SOARES, D., MANSUR, W.J., "A time domain FEM approach based on implicit Green's functions for non-linear dynamic analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 62, n. 5, pp. 664-681, Feb. 2005.

[108] SOARES, D. "A time-marching scheme based on implicit Green's functions for elastodynamic analysis with the domain boundary element method". *Computational Mechanics*; v. 40, n. 5, pp. 827-835, 2007.

[109] LOUREIRO, F.S., *Um Procedimento de Marcha no Tempo Baseado em Função de Green Calculada pelo Método dos Elementos Finitos*, Projeto Final, Escola Politécnica, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2006.

[110] LOUREIRO, F.S., *Métodos de integração temporal baseados no cálculo numérico de funções de Green através do método dos elementos finitos*, Dissertação de M.Sc, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2007.

[111] DORS, C., *Propagação de ondas elásticas utilizando funções de Green numéricas locais em modelos discretizados por elementos finitos*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2007.

[112] MANSUR, W.J., LOUREIRO, F.S., SOARES, D., DORS, C., "Explicit time-domain approaches based on numerical Green's functions computed by finite differences - The ExGA family", *Journal of Computational Physics*, v. 227, pp. 851-870, Nov. 2007.

[113] OYARZÚN, P., LOUREIRO, F.S., CARRER, J.A.M., MANSUR, W.J., "A time-stepping scheme based on numerical Green's functions for the domain boundary element method: The ExGA-DBEM Newmark approach", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 35, n. 3, pp. 533-542, Mar. 2011.