



COPPE/UFRJ

ANÁLISE DE PROBLEMAS DIFUSIVOS TRANSIENTES UTILIZANDO O
MÉTODO DE APROXIMAÇÃO EXPLÍCITA DE GREEN E O MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO

Newton Jorge Munareto Zambrozuski

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientador: Webe João Mansur

Rio de Janeiro

Março de 2010

ANÁLISE DE PROBLEMAS DIFUSIVOS TRANSIENTES UTILIZANDO O
MÉTODO DE APROXIMAÇÃO EXPLÍCITA DE GREEN E O MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO

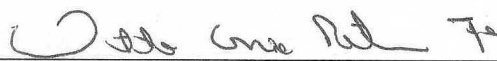
Newton Jorge Munareto Zambrozuski

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

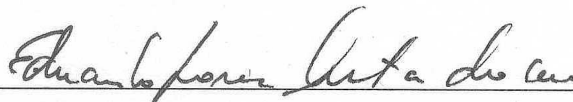
Examinada por:



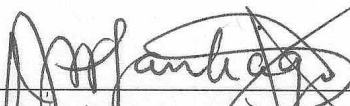
Prof. Webe João Mansur, Ph.D.



Prof. Otto Corrêa Rotunno Filho, Ph.D.



Prof. Eduardo Gomes Dutra do Carmo, D.Sc.



Prof. José Antonio Fontes Santiago, D.Sc.



Prof. Carlos Alexandre Bastos de Vasconcellos, D.Sc.



Prof. Gustavo Benitez Alvarez, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2010

Zambrozuski, Newton Jorge Munareto

Análise de Problemas Difusivos Transientes utilizando o Método de Aproximação Explícita de Green e o Método dos Elementos de Contorno/ Newton Jorge Munareto Zambrozuski. - Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2010.

XXI, 122 p.: Il.; 29,7 cm

Orientador: Webe João Mansur

Tese (doutorado) – UFRJ / COPPE / Programa de Engenharia Civil, 2010.

Referencias Bibliográficas: p. 118-122.

1. Difusão. 2. Águas Subterrâneas. 3. Calor.
4. Método dos Elementos de Contorno. 5. Método de Aproximação Explícita de Green. I. Mansur, Webe João
II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE,
Programa de Engenharia Civil. III. Título.

Ofereço este trabalho
à minha dedicada
esposa **Dezire**,
meu filho **Alexandre**
e minha filha **Luana**.

AGRADECIMENTOS

A DEUS e a todas as pessoas que de alguma forma fizeram de mim um instrumento desta humilde obra.

Ao Professor WEBE JOÃO MANSUR pela sua confiança no meu trabalho, pelas intuições na resolução dos problemas que apareceram e pela grande motivação própria que nos transmite no dia a dia. O Professor WEBE tem qualidades inigualáveis no campo científico e pessoal e sinto-me orgulhoso de ser seu amigo e ter convivido com ele no meu período de Mestrado (1990-1992) e Doutorado (2005-2010).

A Universidade Federal de Roraima - UFRR por ter autorizado minha vinda para fazer este Curso. Aos professores do curso de engenharia da UFRR que deram apoio irrestrito na minha condução ao doutorado. Em especial aos meus amigos Professor LEON TOLSTOI S. FERREIRA e sua esposa Professora KATRI I. I. FERREIRA pelo seu incentivo.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES pela bolsa de estudos concedida durante minha permanência durante mais de seis meses na Universidade de Coimbra, Coimbra, Portugal e pela bolsa PIQDTEC concedida durante 3 anos e 6 meses na UFRJ.

A FRANCISCA S. ROSAS GOMES, tia da minha esposa e minha amiga, residente no Rio de Janeiro, por seu grande apoio e carinho dado a nossa família.

Ao Professor OTTO CORRÊA ROTUNNO FILHO pelas suas importantes orientações.

Ao Prof JOSÉ PAULO SOARES DE AZEVEDO por seu apoio.

Ao Professor EDUARDO GOMES DUTRA DO CARMO por seu exemplo na vibração com a pesquisa e seu apoio na resolução de problemas difíceis.

A Professora BERNADETE RAGONI DANZIGER por ter participado da Banca do exame de Qualificação com excelentes observações.

À minha esposa Deziré e minha filha Luana que tiveram que dividir o tempo de suas vidas com este trabalho durante cinco anos e pelo carinho, atenção e compreensão nos momentos mais difíceis.

Ao meu amigo MARCO AURÉLIO C. FERRO, que foi meu Professor em algumas cadeiras do Doutorado como também um grande incentivador e colaborador no meu aprendizado.

Ao meu amigo CARLOS ALEXANDRE BASTOS DE VASCONCELLOS, que com sua inteligência, dedicação e objetividade colaborou muito no meu aprendizado.

Aos meus colegas de trabalho ANA (Cuba), CID, EDMUNDO, FELIPE, FERNANDA BRENNY, FERNANDA MITTELBAACH, JOÃO, LUIS (Perú),

WELLINGTON, PABLO (Chile) por seu apoio, exemplo e pelos bons momentos que passamos juntos.

Aos funcionários da secretaria do Programa de Engenharia Civil (PEC) e em especial à IVONE SILVA DE ARAUJO por sua capacidade de trabalho, seu dinamismo, seu espírito jovem e esportivo e por procurar manter no ambiente de trabalho um ambiente fraternal.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ANÁLISE DE PROBLEMAS DIFUSIVOS TRANSIENTES UTILIZANDO O
MÉTODO DE APROXIMAÇÃO EXPLÍCITA DE GREEN E O MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO

Newton Jorge Munareto Zambrozuski

Março/2010

Orientador: Webe João Mansur

Programa: Engenharia Civil

O presente trabalho apresenta uma solução de problemas de difusão linear transiente utilizando o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método de Aproximação Explícita de Green com o MEC (MAEG-MEC). O MEC nesta formulação considera que em cada ponto do contorno é conhecido um valor de potencial ou um valor de fluxo ao longo do tempo e o valor do potencial inicial em um ou mais pontos dentro do domínio. A aproximação geométrica usa elementos lineares e nós duplos nos pontos especiais. A aproximação no tempo é realizada com uma função constante unitária. A presença da integral do domínio é mantida na equação tornando obrigatório a discretização do domínio em células internas, sendo adotadas células triangulares. O processo de marcha no tempo com o MEC pode iniciar com valores diferentes de zero. Foi desenvolvido o procedimento do MAEG com o uso do MEC e seus resultados foram comparados com o MEC e com soluções analíticas.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

ANALYSIS OF TRANSIENT DIFFUSION PROBLEMS USING EXPLICIT GREEN
APPROACH METHOD AND THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

Newton Jorge Munareto Zambrozuski

March/2010

Advisor: Webe João Mansur

Department: Civil Engineering

This work presents a solution of linear transient diffusion problems using the Boundary Element Method (BEM) and the Explicit Green Approach Method with BEM (ExGAM-BEM). The BEM in this formulation considers that at each point of the boundary it is known the potential or the flux along the time and the value of the initial potential at one or more points inside of the domain. The BEM approach uses linear elements and double nodes at special points. The approach in the time it is accomplished with an unitary constant function. The presence of the domain integral in this formulation is maintained turning it obligatory the discretization of the domain in internal cells, being adopted triangular cells. The step-time process with the BEM can start with initial condition different from zero. The ExGAM was developed with the use of BEM (ExGAM-BEM) and results were compared with BEM and with analytical results.

ÍNDICE

Índice de Figuras	xiii
Índice de Tabelas	xvii
Índice de Símbolos / Unidades	xix
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Importância da Pesquisa	1
1.1.1 Importância da Exploração da Água Subterrânea	1
1.1.2 Importância da Condução de Calor em Sólidos	3
1.2 Revisão bibliográfica	4
1.3 Objetivo deste Trabalho	8
1.4 Desenvolvimento da Tese	8
2 ÁGUAS SUBTERRÂNEAS	10
2.1 Introdução	10
2.2 Ciclo Hidrológico	10
2.3 Distribuição das águas subterrâneas	11
2.4 Importantes propriedades hidrogeológicas	13
2.4.1 Porosidade	13
2.4.2 Umidade do solo	17
2.4.3 Capilaridade	18
2.4.4 Compressibilidade da água	19
2.4.5 Compressibilidade do terreno	20
2.4.6 Carga hidráulica	20

2.4.7	Armazenamento	22
2.4.8	Permeabilidade intrínseca	24
2.4.9	Viscosidade	25
2.4.10	Gradiente hidráulico	27
2.4.11	Condutividade hidráulica em meios saturados	27
2.4.12	Condutividade hidráulica em meios não saturados	33
2.4.13	Isotropia e Homogeneidade	33
2.5	Aquíferos	36
2.5.1	Definições	36
2.5.2	Suposições de Dupuit-Forchheimer	40
2.5.3	Equações de escoamento	41
2.5.3.1	Equação tridimensional de um aquífero	41
2.5.3.2	Modelo horizontal de escoamento em aquíferos confinados	42
2.5.3.3	Modelo vertical de escoamento em aquíferos confinados	43
2.5.3.4	Modelo horizontal de escoamento em aquíferos não confinados	45
3	CONDUÇÃO DE CALOR EM SÓLIDOS	47
3.1	Introdução	47
3.2	Propriedades térmicas	50
3.2.1	Fluxo de calor	50
3.2.2	Capacidade térmica e calor específico	50

3.2.3	Condutividade térmica	52
3.2.4	Difusividade térmica	55
4	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	56
4.1	Introdução	56
4.2	Integração no tempo	64
4.3	Integração no espaço	66
4.4	Integração da solução fundamental no domínio	68
4.4.1	Integral de Domínio	68
4.4.2	Cálculo de $J_{m=1,\beta=1}$, $J_{m=1,\beta=2}$ e $J_{m=1,\beta=3}$	75
4.4.3	Cálculo de $I_{m=1}$, $I_{m=2}$ e $I_{m=3}$	80
4.4.4	Cálculo da Função $\gamma\left(\frac{3}{2}, x\right)$	80
4.5	O processo de avanço no tempo passo a passo	81
4.6	Exemplo	84
4.6.1	Exemplo 1	84
5	MÉTODO DE APROXIMAÇÃO EXPLÍCITA DE GREEN	90
5.1	Introdução	90
5.2	Solução numérica da integral de convolução	93
5.3	Exemplos	99
5.3.1	Exemplo 1	100
5.3.2	Exemplo 2	105
5.3.3	Exemplo 3	110

6	CONCLUSÃO	115
	Sugestões para trabalhos futuros	116
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	118

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	Gráficos (a) e (b) - Distribuição de água na Terra	3
2.1	Ciclo Hidrológico	11
2.2	Movimento da água no subsolo. Tensão total (σ_t), tensão efetiva (σ_e) e pressão dos poros (P_p).	12
2.3	(a) Esquema representativo de uma amostra de solo e das suas distintas fases. (b) Diagrama de pesos e volumes da amostra de solo ..	14
2.4	Três tipos de graduação de solos.	15
2.5	Capilaridade da água em um tubo estreito de raio r.	18
2.6	Carga hidráulica de um ponto em um aquífero.	21
2.7	Desenho para explicar a viscosidade dinâmica como uma resistência de um fluido a deformação por cisalhamento.	25
2.8	(a) Aparato original usado por Henry Darcy (1856) para sua experiência com manômetro de mercúrio e publicado em “ <i>Les fontaines publiques de la ville de Dijon</i> ” e (b) um aparato equivalente usado com manômetro de água para tornar mais simples o entendimento da experiência.	28
2.9	Condutividade hidráulica para aquíferos multicamadas: (A) fluxo perpendicular as camadas, e (B) fluxo paralelo as camadas.	30
2.10	Heterogeneidade em escoamento subterrâneo.	31
2.11	(a) Direções principais do tensor não coincidem com os eixos cartesianos. (b) Direções principais do tensor coincidem com os eixos cartesianos.	35

2.12	Anisotropia hidráulica em sedimentos formados pela ação das águas.	36
2.13	Anisotropia devido à geração de porosidades secundárias por fratura.	36
2.14	Diversos tipos de aquíferos e poços.	37
2.15	Aquífero confinado horizontalmente. Hipóteses para a modelagem. ...	42
2.16	Aquífero confinado verticalmente. Hipóteses para a modelagem. Piezômetro P1 e P2. Aquífero de dimensão infinita na direção y.	44
2.17	Modelo horizontal de escoamento em aquífero não-confinado.	45
3.1	Ilustração sobre a equação de Fourier: $-dT/dx = q/K$	53
3.2	Balço de energia em um sistema infinitesimal dx, dy, dz.	54
4.1	Domínio 2D: Contorno Γ_q e Γ_U . Ponto fonte ξ e ponto campo x . SI=Sentido de Integração. Normal ao contorno \vec{n} e cossenos diretores \vec{n}_x e \vec{n}_y . Linha tracejada = domínio real.	59
4.2	Sentido de integração em função do domínio adotado	59
4.3	Contorno Γ . Ângulo interno \hat{B}	61
4.4	Figura 4.4 (a) Contorno Γ e a seqüência de integração no elemento linear e (b) representação do potencial ou fluxo nos nós do elemento linear.	62
4.5	Distância d entre o ponto fonte e o elemento ao qual pertence o ponto campo.	64
4.6	Elemento linear no contorno e células no domínio	72
4.7	(a), (b), (c) Células auxiliares para cálculo das integrais no domínio, (d) Ponto fonte ξ como origem do sistema para integração, (e) Sistema de coordenadas triangulares para o ponto x	72
4.8	Troca de colunas nas matrizes $[G_L]$ e $[H_L]$	81

4.9	Condições de contorno sobre o domínio 2D do exemplo 1.	86
4.10	Geometria e discretização do exemplo 1 com 36 elementos no contorno.	86
4.11	Geometria e dados básicos do exemplo 1	87
4.12	Gráfico do exemplo 1. Representação do resultado descrito na Tabela 4.4 para o ponto central $(x,y)=(50\text{ m},40\text{ m})$, obtidos com o método analítico e com o MEC.	88
4.13	Potencial U versus coordenada X, do exemplo 1, para discretização com 72 elementos na coordenada $y = 40\text{ m}$. Esta figura representa os dados da Tabela 4.5.	89
5.1	Funções de aproximação N_1 e N_2 e o particionamento do intervalo de integração.	97
5.2	Geometria, contorno e malha para os exemplos 1 e 3.	99
5.3	Geometria, contorno e malha para o exemplo 2.	100
5.4	Geometria e condições de contorno do exemplo 1.	101
5.5	Temperatura no ponto central (5 m, 4 m) do domínio do exemplo 1, correspondente aos valores da Tabela 5.2 do tempo $t = 0,02\text{ s}$ até $t = 1,0\text{ s}$	102
5.6	Gráfico da solução Analítica, do MEC e do MAEG-MEC para o exemplo 1, com uso de 5 sub-passos no MAEG-MEC. Esta é uma representação da tabela 5.3.	104
5.7	Geometria e condições de contorno do exemplo 2. Condição inicial igual a zero em todos os pontos.	106

5.8	Gráfico dos resultados obtidos com o exemplo 2 com $\Delta x = \Delta y = 1,0\text{ m}$ e $\Delta t = 1,0\text{ s}$. Esta figura representa graficamente os dados da Tabela 5.4.	107
5.9	Gráfico dos resultados obtidos com o exemplo 2 com $\Delta x = \Delta y = 0,5\text{ m}$ e $\Delta t = 0,5\text{ s}$. Esta figura representa os dados da Tabela 5.5.	108
5.10	Gráfico dos resultados obtidos com o exemplo 2 com $\Delta x = \Delta y = 0,1\text{ m}$ e $\Delta t = 0,075\text{ s}$. Esta figura representa os dados da Tabela 5.6.	109
5.11	Geometria e condições de contorno do exemplo 3.	111
5.12	Resultado do exemplo 3 para $\Delta x = \Delta y = 1,0\text{ m}$ e $\Delta t = 0,9\text{ s}$. Este gráfico representa os dados da Tabela 5.7.	112
5.13	Gráfico do exemplo 3, apresentando os dados da Tabela 5.8.	113
5.14	Temperatura no ponto central do domínio no exemplo 3. Este gráfico apresenta os dados da Tabela 5.9.	114

ÍNDICE DE TABELAS

1.1	Distribuição da água no ciclo hidrológico global	2
2.1	Importantes propriedades físicas de rochas e solos.	16
2.2	Alguns valores típicos da condutividade hidráulica.	27
2.3	Sumário das possíveis combinações de homogeneidade, isotropia, heterogeneidade e anisotropia da condutividade hidráulica em um meio poroso.	34
3.1	Comparação da condução de calor com escoamento em meios porosos.	49
4.1	Tabela que relaciona β , γ e λ	71
4.2	Integral J e o valor dos ângulos superior e inferior	74
4.3	Tempo de processamento das matrizes $G_L, H_L, G_{LI}, H_{LI}, M_{IB}$ e M_{ID} , para três exemplos com os nós de contorno (n_c) e internos (n_i) indicados.	84
4.4	Potencial e erros relativos no ponto central do domínio para as discretizações adotadas.	88
4.5	Perfil do potencial nos tempos 50, 100 e 500 minutos do exemplo 1, para as coordenadas horizontais de 0 m a 100 m, e coordenada vertical $y = 40$ m, para uma discretização de 72 elementos e 640 células.	89
5.1	Coeficientes W_j do método de Newton-Cottes usando $n + 1$ pontos	95

5.2	Temperatura e erros (E) relativos no ponto central do domínio para o passo no tempo $\Delta t = 0,1$ s e comprimentos de Δx e Δy iguais à 1,0, 0,5, 0,25 e 0,1 metros, com o uso da solução analítica, do MEC e do MAEG-MEC.	103
5.3	Temperatura e erros (E) relativos no ponto central do domínio para o número de sub-passos igual a cinco	104
5.4	Temperatura e erros (E) relativos no ponto central do domínio para $\Delta x = \Delta y = 1,0$ m e $\Delta t = 1,0$ s.	107
5.5	Temperatura e erros (E) relativos no ponto central do domínio para $\Delta x = \Delta y = 0,5$ m e $\Delta t = 0,5$ s.	108
5.6	Temperatura e erros (E) relativos no ponto central do domínio para $\Delta x = \Delta y = 0,1$ m e $\Delta t = 0,075$ s.	109
5.7	Temperatura e erros (E) relativos no ponto central do domínio para $\Delta x = \Delta y = 1,0$ m e $\Delta t = 0,9$ s.	112
5.8	Temperatura e erros (E) relativos no ponto central do domínio para $\Delta x = \Delta y = 0,5$ m e $\Delta t = 0,225$ s.	113
5.9	Temperatura e erros (E) relativos no ponto central do domínio para $\Delta x = \Delta y = 0,25$ m e $\Delta t = 0,06$ s.	114

LISTA DE SÍMBOLOS / UNIDADES

SIMBOLO	SIGNIFICADO	UNIDADES S.I e outras usuais
c	Calor específico	$\frac{J}{kg \cdot K}$, $\frac{J}{m^3 \cdot K}$ ou $\frac{J}{mol \cdot K}$
dx	Distância horizontal entre dois pontos vizinhos na discretização do domínio/ contorno.	m
dy	Distância vertical entre dois pontos vizinhos na discretização do domínio/ contorno.	m
E	Módulo de compressão	N/m^2
$\{Flu\}$	Vetor de fluxo hidráulico	
g	Aceleração da gravidade	$\approx 9,81 \text{ m/s}^2$
$[Gre]$	Matriz de Green	
$H(x, y, t)$	Potencial hidráulico = Carga hidráulica	<i>m.c.a. = metro de coluna de água</i>
$[I]$	Matriz Identidade	
k	Permeabilidade intrínseca do meio poroso	$m^2(Darcy)$
K	Condutividade hidráulica	m/s ou cm/s
K	Condutividade térmica	$W/(m \cdot K)$
K	Unidade de temperatura absoluta	Kelvin (K)

$[K]$	Tensor de condutividade	
$n(x)$	Normal unitária ao contorno Γ no ponto x , no sentido de dentro para fora do domínio.	
p	Pressão no meio	N/m^2
q	Fluxo hidráulico	m/s
q	Fluxo de calor	W/m^2
q^*	Derivada de U^* em relação a normal	
$r(\zeta, x)$	Distância entre os pontos ζ e x	m
R	Fonte ou sumidouro de água	m/s
Rv	Recarga	l/s
$S = S_s \cdot L$	Coefficiente de armazenamento	adimensional
S_s	Armazenamento específico	l/m
t, τ	Tempo	s
$T_r = K \cdot L$	Transmissividade	m^2/s ou m^2/dia
T	Temperatura, potencial térmico, carga térmica	K (Kelvin) $^{\circ}C$ (grau Celsius)
$U(x, y, t)$	Potencial (hidráulico ou térmico)	
U_0	Potencial prescrito no tempo zero $t = 0$	
U^*	Solução fundamental	
v	Velocidade	m/s
x, y, z	Coordenadas Cartesianas	m
$[]$	Símbolo para matriz	

{ }	Símbolo para vetor	
α	Difusividade térmica	m^2/s ou cm^2/s
β	Compressibilidade de solos, rochas e fluidos	$m^2/N = Pa^{-1}$
Γ	Contorno do domínio	
γ	Peso específico	N/m^3
μ	Viscosidade absoluta (ou dinâmica) do fluido	$N \cdot s/m^2$
ν	Viscosidade cinemática do fluido	m^2/s
τ	Tensão de cisalhamento	N/m^2
ρ	Massa específica	kg/m^3
Ω	Domínio do problema	

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 – IMPORTÂNCIA DA PESQUISA

Este trabalho tem por finalidade desenvolver ferramentas computacionais novas e eficientes que possam auxiliar a modelagem de escoamento de água subterrânea e do fluxo de calor com o uso da equação da difusão transiente, ou seja, criar códigos computacionais que permitam avaliar quantitativamente os fenômenos da difusão que estão subordinados à variável tempo.

1.1.1 – Importância da exploração da água subterrânea

O ser humano depende fundamentalmente da água disponível em nosso planeta. Ela existe em seus três estados físicos, gelo, vapor e líquido, e apresenta variadas composições químicas. A quantidade e proporção de tipos de água disponíveis para o ser humano foi apresentada por GLEICK (1996) (Tabela 1.1).

Pode-se observar na Figura 1.1, uma síntese gráfica da Tabela 1.1, que a água sem utilização direta para o ser humano é de aproximadamente 99 por cento de toda a água existente na Terra (oceanos, mares, baías, geleiras, águas salobras em geral e água atmosférica). Vê-se também, gráfico (b), que até mesmo da fração restante de um por cento, muito disso está fora de alcance.

Considerando que a maior parte da água que é usada na vida cotidiana vem de rios vê-se que o homem só faz uso de uma minúscula porção da água disponível. *Ressalta-se que a maior quantidade de água doce disponível para uso humano é armazenada no solo.*

A água na Terra está em permanente mudança conforme as condições climáticas do ambiente onde se encontra. Nos aquíferos a água escoar de forma muito lenta quando

comparada ao escoamento superficial ou ao atmosférico porque sofre a resistência imposta pelo solo, sendo que o escoamento se dá através dos vazios interconectados.

Tabela 1.1 - Distribuição da água no ciclo hidrológico global.

Fonte de água	Volume de água, em quilômetros cúbicos	Percentagem do volume de água total	Percentagem do volume de água doce
Oceanos, Mares e Baías	1.338.000.000	96,5	--
Capas e Montanhas de Gelo e Neve permanentes	24.064.000	1,74	68,7
Água Subterrânea Doce	10.530.000	0,76	30,1
Água Subterrânea Salobra	12.870.000	0,94	--
Água misturada com o solo	16.500	0,001	0,05
Gelo subterrâneo e Permafrost	300.000	0,022	0,86
Lagos de Água doce	91.000	0,007	0,26
Lagos de Água salobra	85.400	0,006	--
Atmosfera	12.900	0,001	0,04
Pântano	11.470	0,0008	0,03
Rios	2.120	0,0002	0,006
Água Biológica	1.120	0,0001	0,003
Total	1.386.000.000	100,0	100,0

Permafrost = área de terra permanentemente congelada cuja superfície derrete no verão e congela novamente no outono.

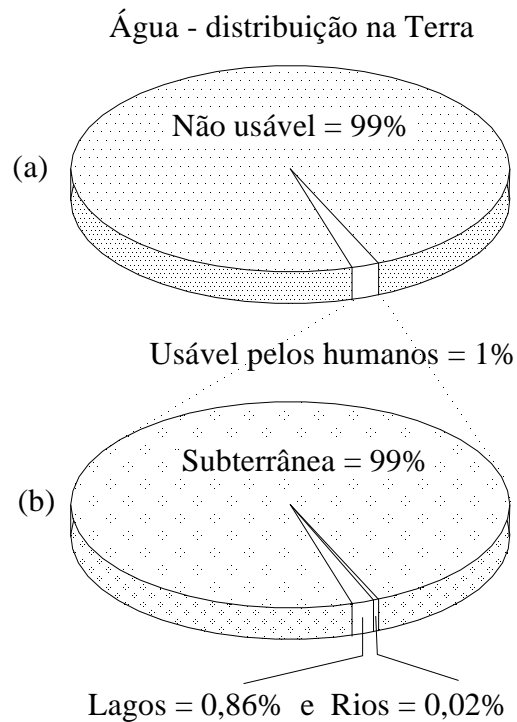


Figura 1.1 – Gráficos (a) e (b) - Distribuição de água na Terra

A modelagem de escoamento subterrâneo tem sido amplamente utilizada para o planejamento e a gestão de recursos hídricos. A necessidade da utilização de modelos para esses fins tem crescido à medida que cresce a demanda desses recursos. As formações geológicas onde é possível a exploração de águas subterrâneas é muito variada e cada vez mais são necessários modelos que melhor representem o movimento dessas águas.

1.1.2 – Importância da condução de calor em sólidos

A condução de calor é relevante em múltiplos problemas de engenharia que transcendem o âmbito da engenharia mecânica, abrangendo também as áreas das engenharias química, nuclear, metalúrgica, eletrotécnica, civil, aeroespacial, ambiente e bioengenharia. As questões concretas que se colocam ao engenheiro que estuda a condução de calor podem ser muito diversas. A título de exemplo, pode citar-se:

O projeto, operação e manutenção de permutadores de calor. Este tipo de equipamento encontra-se, por exemplo, em geradores de vapor de centrais térmicas,

fábricas de processos químicos, instalações de aquecimento de água, ar condicionado, refrigeração, radiadores de veículos motorizados, etc.

Seleção de isolamentos térmicos para minimização da taxa de condução de calor em edifícios, equipamentos térmicos, etc. Essa minimização é geralmente condicionada por constrangimentos de natureza econômica, tal como o custo do isolamento, e geométrica, tal como a espessura ou o volume do isolamento.

Controle da temperatura em equipamentos industriais, mecânicos ou eletrônicos. O controle da temperatura requer, freqüentemente, que a temperatura de uma superfície quente não ultrapasse um determinado valor crítico que pode conduzir à fusão de um material ou à deterioração da resistência mecânica de uma estrutura ou equipamento. É o caso, por exemplo, do núcleo de um reator nuclear e da superfície exterior de veículos aeroespaciais durante a entrada na atmosfera terrestre.

Problemas de condução de calor são encontrados em todos os processos industriais, tais como a produção de energia elétrica a partir de combustíveis fósseis ou com base em energias renováveis (energia solar térmica ou fotovoltaica, geotérmica, biomassa); fornos para produção de aço, alumínio, vidro, cimento e materiais cerâmicos; motores de combustão interna, incluindo turbinas de gás usadas nas indústrias automóvel, naval e aeronáutica; incineradoras usadas na queima de resíduos; sistemas de aquecimento, ar condicionado e refrigeração. A importância do conhecimento aprofundado dos processos de condução de calor e a necessidade de analisá-los quantitativamente têm-se tornado progressivamente mais importantes com o avanço tecnológico. O progresso nesses conhecimentos é possível de ser alcançado devido aos avanços nas técnicas computacionais e na evolução dos equipamentos de informática disponíveis hoje em dia.

1.2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A civilização humana, se desenvolvendo nas regiões áridas ou semi-áridas foi extremamente dependente dos suprimentos de água. Ao mesmo tempo em que o homem aprendeu a domesticar animais, o poço tornou-se a sua mais importante possessão. No capítulo Gênesis da Bíblia Sagrada se encontram as referências primordiais da procura de água, nesse caso, através da escavação manual de poços. Os registros arqueológicos

mostram que a tecnologia de construção de poços de água alcançou um alto grau de sofisticação, milhares de anos antes da Era Cristã. Pinturas pré-históricas anteriores a nossa época de 8000 anos já sugerem a captação de água por poços. Acredita-se que antes do ano 1700 da nossa era, haviam sido perfurados pelos chineses mais de 10000 poços, com profundidades de mais de 500 metros para a produção de sal. Embora o uso desses recursos seja antigo, as leis físicas que permitiam um estudo científico do uso destas águas só surgiram no século XIX.

A lei de DARCY (1856) tornou possível uma avaliação quantitativa dos recursos hídricos. Mais tarde, DUPUIT (1863) verificou que nos escoamentos de água subterrânea a declividade da superfície freática é geralmente muito pequena e o escoamento pode ser considerado como praticamente horizontal. Com isto se reduz uma dimensão do problema e a carga hidráulica torna-se função apenas das coordenadas horizontais do meio poroso.

Allen HAZEN (1892) e Charles S. SLICHTER (1898) (apud SEZER, 2009) contribuíram para o conhecimento da permeabilidade do solo.

O século seguinte pode ser dividido em duas fases, antes e depois da era do computador moderno, 1970. Na primeira fase pode-se salientar a criação do primeiro teste de bombas em um aquífero. Este tem por finalidade bombear água para dentro do aquífero e observar o seu rebaixamento em vários locais ao longo do tempo. THIEM G. (1906) deu este primeiro passo e seus trabalhos deram origem a famosa equação de Thiem. Mais tarde o Engenheiro Civil Charles Vernon THEIS (1935) publicou a primeira análise do teste de bombas transientes criando sua equação para fluxo radial bidimensional (equação de Theis) com o apoio do matemático Clarence RUBIN a partir da literatura usada em condução de calor.

Outro trabalho de destaque é o do Engenheiro de Petróleo Morris MUSKAT (1937) com a publicação do artigo “O Fluxo de Fluidos Homogêneos por Mídia Porosas”. Outra contribuição importante deste período foi a do geólogo Marion King HUBBERT logo depois de seu doutoramento, no ano de 1940, quando então apresentou uma dedução da equação experimental de Darcy, a partir das equações de Navier-Stokes, considerando elementos líquidos e gasosos, ampliando desta forma o uso desta equação. Nesta ocasião introduziu na literatura o conceito de potencial.

Em 1946, CARSLAW e JAEGER lançaram a primeira edição de seu clássico livro “Condução de Calor em Sólidos” que, apesar de tratar de calor, é muito usado pela

comunidade científica de águas subterrâneas por tratar da equação da difusão, fator comum nestas duas áreas.

C. E. JACOB (1946), seguidor de Theis, contribuiu entre outros trabalhos, na explanação das propriedades do armazenamento e elasticidade dos aquíferos artesianos e no método semi-logaritmo de análise de testes em aquíferos.

No campo dos cálculos numéricos aparece o trabalho de R. W. STALLMAN (1956), que representa a primeira tentativa documentada de obter propriedades físicas de aquíferos usando suporte de informática. Ele interpolou valores de potenciais medidos em nós de uma rede de poços discretizados por diferenças finitas e assumiu que os coeficientes de recarga e de armazenamento eram conhecidos e dessa forma pode simular a distribuição de transmissividade na área discretizada.

DE WIEST (1969) apresenta seu trabalho que trata do fluxo em meio poroso que pode ser considerado um clássico.

A segunda fase do século XX, com a popularização do computador, houve muito desenvolvimento de modelos numéricos. Um dos primeiros modelos numéricos que simulava o escoamento de água em meios porosos saturados e não-saturados foi o trabalho de FREEZE (1971).

BEAR (1972, 1979) apresenta dois livros clássicos que tratam da dinâmica dos fluidos em meios porosos e da hidráulica de águas subterrâneas.

TRESCOTT e LARSON (1976) apresentaram um trabalho no qual comparam a eficiência do método “LSOR” (Line Successive OverRelaxation) com o método “2DC” (2-Dimensional Correction) e os iterativos métodos “ADI” (Alternating Direction Implicit) e “SIP” (Strongly Implicit Procedure) para resolver equações em diferenças finitas usados para simular diversos reservatórios subterrâneos.

Herbert F. WANG e Mary P. ANDERSON (1982) publicaram um livro no qual apresentam modelos de escoamento subterrâneo utilizando o método das diferenças finitas (MDF) e o método dos elementos finitos (MEF).

HUYAKORN e PINDER (1983) discutiram diversos métodos computacionais para o escoamento subterrâneo.

José A. CIRILO e Jayme P. CABRAL (1989) apresentam em um livro da Associação Brasileira de Recursos Hídricos um estudo do escoamento subterrâneo e utilizam os métodos das diferenças finitas e dos elementos finitos para modelar o aquífero Beberibe no nordeste brasileiro.

Karlheinz SPITZ e Joanna MORENO (1996) elaboraram um guia prático para modelagem de águas subterrâneas e transporte de contaminantes, abordando em detalhes conceitos importantes do assunto e ensinam como aplicar modelos numéricos e obter desenhos detalhados dos casos aplicados.

LIU et al. (2000) utiliza uma técnica híbrida numérica-analítica que permite tratar diversas situações de modelagem hidrológica (generalized integral transform technique) (GITT) para resolver equações unidimensionais de advecção e dispersão para transporte de poluentes em meios porosos. Outros trabalhos seguiram esta linha tais como os de ROCHA E CRUZ (2001), VASCONCELLOS (2001), VASCONCELLOS et al. (2001) e VASCONCELLOS et al. (2005).

OLIVEIRA (2002) desenvolveu um ferramental de gestão de águas subterrâneas no aquífero de Bauru, cidade de São José do Rio Preto/SP/Brasil, com o uso de um programa baseado no método dos elementos finitos.

VASCONCELLOS (2008) apresentou uma modelagem para águas subterrâneas utilizando o método de aproximação explícita de Green com o uso do MEF.

OLIVEIRA (2009) apresentou um estudo de contaminação em águas subterrâneas na cidade de Salvador/Bahia/Brasil com o uso do programa MODFLOW, que é um programa de domínio público muito utilizado em trabalhos científicos.

Uma preocupação dos órgãos responsáveis pelo gerenciamento da água, em milhares de cidades brasileiras, particularmente naquelas metrópoles de população acima de 250.000 habitantes (em torno de 100), refere-se à proteção e ao uso racional da água subterrânea, principalmente no que tange às áreas de recarga dos aquíferos. Recentemente o Conselho Nacional de Recursos Hídricos – CNRH, com base na resolução nº 22, de 24 de maio de 2002, estabeleceu diretrizes complementares para a elaboração dos planos de recursos hídricos das bacias hidrográficas, as quais devem considerar a caracterização dos aquíferos envolvidos, bem como definir as inter-relações de cada aquífero com os cursos de água superficiais, promovendo assim uma gestão integrada das informações disponíveis nos recursos hídricos. Para dar suporte a estas necessidades e obrigações as autoridades governamentais precisam de um suporte técnico só possível com o apoio de engenheiros, geólogos e outros profissionais desta área com conhecimento em modelagem numérico computacional e auxiliado por equipes de trabalho de campo.

1.3 - OBJETIVO DESTE TRABALHO

A importância do tema escolhido e a revisão bibliográfica realizada foram as molas propulsoras do desenvolvimento da presente pesquisa de tese.

O objetivo desta pesquisa é apresentar uma nova solução numérica para a análise de problemas difusivos transientes utilizando o método de aproximação explícito de Green para marcha no tempo e o método dos elementos de contorno para a discretização espacial.

Note-se que esta tese trata o problema de escoamento das águas subterrâneas e o problema da condução de calor, tendo em vista a natureza similar dos fenômenos físicos aqui referidos, ambos, regidos pela equação de difusão transiente. Assim, sob todos os pontos de vista, o leitor terá oportunidade de acompanhar e avaliar a analogia estabelecida.

Para aplicar os métodos numéricos tanto para a modelagem de fluxo de calor como para a modelagem de águas subterrâneas foi considerado um corpo bidimensional, homogêneo, isotrópico e cuja condutividade é independente do potencial.

1.4 – DESENVOLVIMENTO DA TESE

O desenvolvimento da tese é feito em 6 capítulos. O presente capítulo tratou da importância do assunto e do objetivo desta pesquisa.

O Capítulo 2 apresenta conceitos básicos de águas subterrâneas que são necessários para entender as aplicações realizadas com os métodos propostos.

O Capítulo 3 apresenta conceitos básicos de condução de calor que são úteis para compreensão do desenvolvimento deste trabalho.

O Capítulo 4 apresenta a formulação básica do método dos elementos de contorno para a equação da difusão em regime transiente utilizando solução fundamental dependente do tempo. O procedimento espacial é descrito para elementos lineares e a integração no tempo da solução fundamental e da sua derivada normal são feitas numericamente pelo método da quadratura de Gauss. O domínio é discretizado em células triangulares para que seja calculada uma integral de convolução no domínio, permitindo que o avanço no tempo possa ser iniciado com potencial nulo ou não.

O capítulo 5 mostra o procedimento usado para obter resultados com o método de aproximação explícita de Green com o uso do método dos elementos de contorno.

Os trabalhos apresentados nos capítulos anteriores permitem tirar algumas conclusões. Estas estão no Capítulo 6, onde serão sugeridas possíveis linhas de trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

ÁGUAS SUBTERRÂNEAS

2.1 – INTRODUÇÃO

A água encontrada pelo homem na natureza se renova continuamente através do ciclo hidrológico. Uma parte deste ciclo acontece abaixo da superfície terrestre e merece atenção especial pela quantidade de água potável possível de ser usada pelo ser humano para suas diversas finalidades. É conhecendo esta parte invisível aos olhos humanos que será possível explorar seus tesouros, particularmente com referência aos aquíferos que hoje são considerados ricos patrimônios de cada país.

Para poder explorar essas águas como também para mantê-las longe da contaminação é preciso conhecer as principais propriedades do solo, das rochas, e dos fluidos existentes neste domínio bem como ter condições de aplicá-las usando métodos computacionais para simular situações possíveis de acontecer. Conhecimentos básicos de hidrogeologia serão necessários para reduzir as complexas variáveis da natureza às variáveis representativas que possam fazer parte de equações que simulam o movimento da água nos poros dos aquíferos. Um conjunto de profissionais com conhecimentos de hidrogeologia, programação, engenharia e outros campos precisam se apoiar mutuamente porque esta exploração é muito complexa.

2.2 – CICLO HIDROLÓGICO

O ciclo hidrológico é um fenômeno global de circulação fechada da água entre a superfície terrestre e a atmosfera, impulsionado fundamentalmente pela energia solar associada à gravidade e à rotação terrestre (SILVEIRA, 1993).

Como todo ciclo, o hidrológico não tem princípio nem fim, e sua descrição pode começar em qualquer ponto e envolve as três situações possíveis da água em nosso planeta: água na atmosfera, na superfície e no subsolo. A Figura 2.1 mostra um esboço desta descrição.

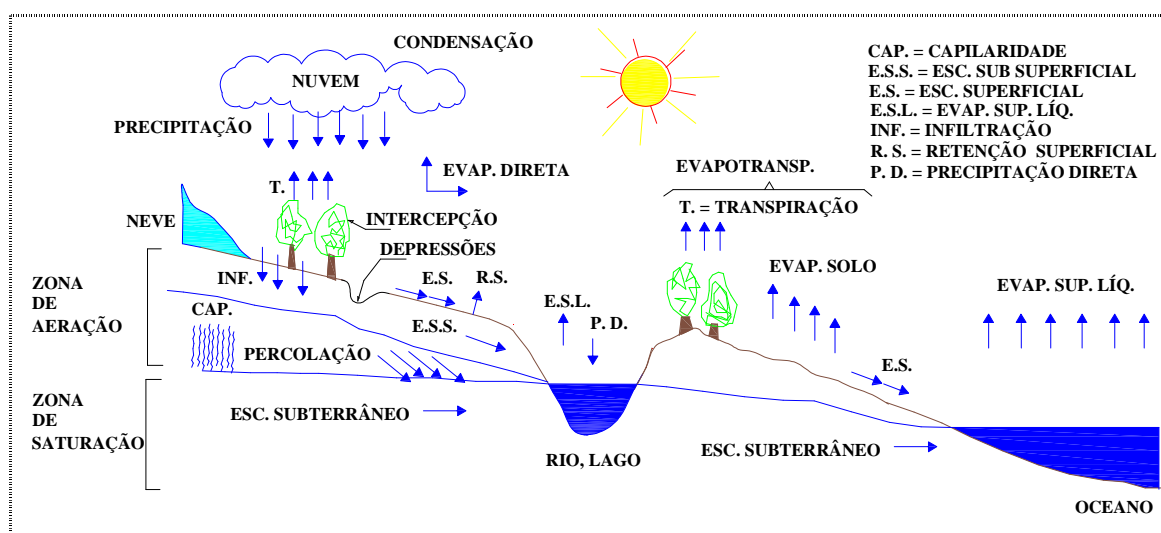


Figura 2.1 – Ciclo Hidrológico

A água que se encontra sobre a superfície terrestre ou muito perto dela se evapora sob o efeito da radiação solar e do vento. O vapor de água, que assim se forma, se eleva e é transportado em formas de nuvens pelo vento até se condensar e cair em direção à terra, sob o efeito da gravidade, em forma de precipitação. Durante seu trajeto em direção à superfície da terra, a água pode voltar a evaporar-se ou ser interceptada por plantas ou construções e depois ela flui pela superfície até os rios ou infiltra-se. A água interceptada e uma parte da água infiltrada e daquela que corre por sobre a superfície se evapora novamente. Da precipitação que chega aos rios uma parte se infiltra e outra chega até os oceanos e outros grandes corpos de água como represas e lagos. Da água infiltrada, uma parte é absorvida pelas plantas e posteriormente é transpirada, quase em sua totalidade, em direção da atmosfera e a outra parte flui sob a superfície da terra em direção aos rios, aos mares e a outros corpos de água, ou dirigem-se a áreas profundas do solo para serem armazenadas em reservatórios subterrâneos e mais tarde irão aparecer em fontes, rios ou mares. O estudo do movimento da água armazenada nesses reservatórios subterrâneos é o motivo deste trabalho.

2.3 - DISTRIBUIÇÃO DAS ÁGUAS SUBTERRÂNEAS

A maior parte das rochas ou solos próximos da superfície terrestre são formadas de sólidos e vazios. Estes vazios, também chamados de poros, são espaços entre os

grãos ou fraturas em rochas densas. Toda a água embaixo da superfície terrestre que existe dentro destes vazios é chamada de água subterrânea. Na figura 2.2 podem ser observadas algumas imagens que representam as definições dadas abaixo.

Águas subterrâneas ocorrem em duas diferentes zonas. Uma zona, localizada imediatamente abaixo da superfície terrestre na maioria das vezes, contém gases, água, ar ou vapor de água nos espaços vazios. Essa zona é referida como uma zona não saturada. Também pode ser chamada de zona de aeração ou zona vadosa. Essa zona possui três zonas. A primeira chamada zona das raízes caracteriza-se por uma quantidade de água suficiente para manter o crescimento das plantas e sua dimensão é

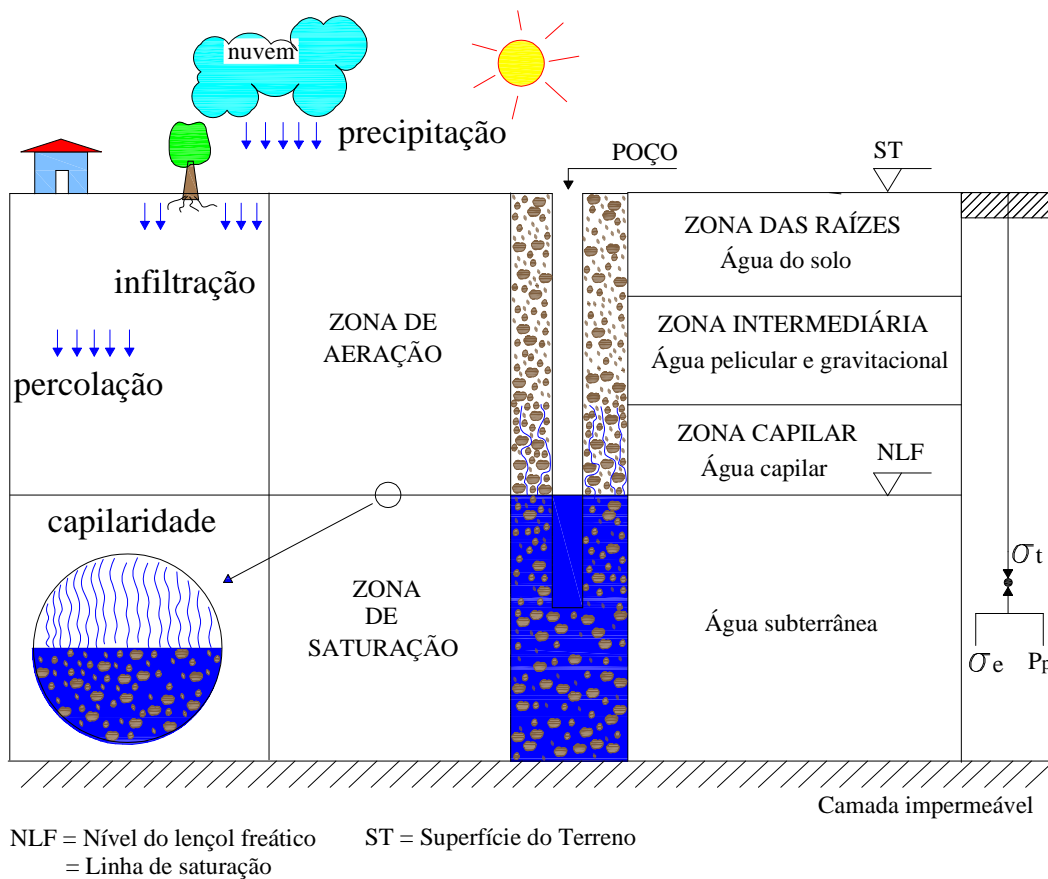


Figura 2.2 – Movimento da água no subsolo. Tensão total (σ_t), tensão efetiva (σ_e) e pressão dos poros (P_p).

determinada pela profundidade que as raízes das plantas conseguem chegar. Está sujeita a grandes alterações em seu conteúdo de água em função dos processos de infiltração,

transpiração das plantas e da evaporação. A segunda, logo abaixo, é a zona intermediária e caracteriza-se por uma menor variação nos níveis de umidade, geralmente encontrando-se com teores próximos à capacidade de campo. A terceira, a zona capilar, se estende da superfície freática até ao limite de ascensão capilar da água. A espessura desta zona depende principalmente da distribuição e tamanho dos poros e da homogeneidade do terreno. Embora esta zona seja saturada ela pertence à zona de aeração devido à sua pressão ser inferior à pressão atmosférica.

A zona não saturada na maioria das vezes está localizada acima de uma segunda zona na qual todos os vazios são preenchidos com água. Essa zona é definida como zona saturada. As águas nas zonas saturadas são referidas como águas subterrâneas e são elas que suprem poços e fontes. A linha de saturação ou nível do lençol freático constitui-se no contorno entre a zona não saturada e a zona saturada. Nela a pressão da água é igual à pressão atmosférica. O nível de água encontrado em poços não sujeitos a bombeamento é o mesmo nível da água não confinada. Esta zona é limitada inferiormente por uma camada impermeável ou quase impermeável (leito rochoso ou camada de solo de baixíssima permeabilidade).

2.4 – IMPORTANTES PROPRIEDADES HIDROGEOLÓGICAS

2.4.1 – Porosidade

Porosidade n é definida como o volume de poros de uma rocha ou solo simples V_v dividido pelo volume total V de ambos os poros e material sólido. Ou seja,

$$n = \frac{V_v}{V} \quad (2.1)$$

Quando uma rocha ou solo é inicialmente formado ele possui uma porosidade inerente que é chamada de porosidade primária. Esta por ações diversas da natureza podem diminuir ou aumentar. Entretanto, as rochas podem fraturar e os solos podem sofrer a ação de raízes, animais e fluidos destrutivos de forma a criarem uma conhecida

porosidade secundária. Então, o total de porosidade de um aquífero será a soma das porosidades primária e secundária. A Figura 2.3 ilustra uma amostra de solo com os elementos que a compõem.

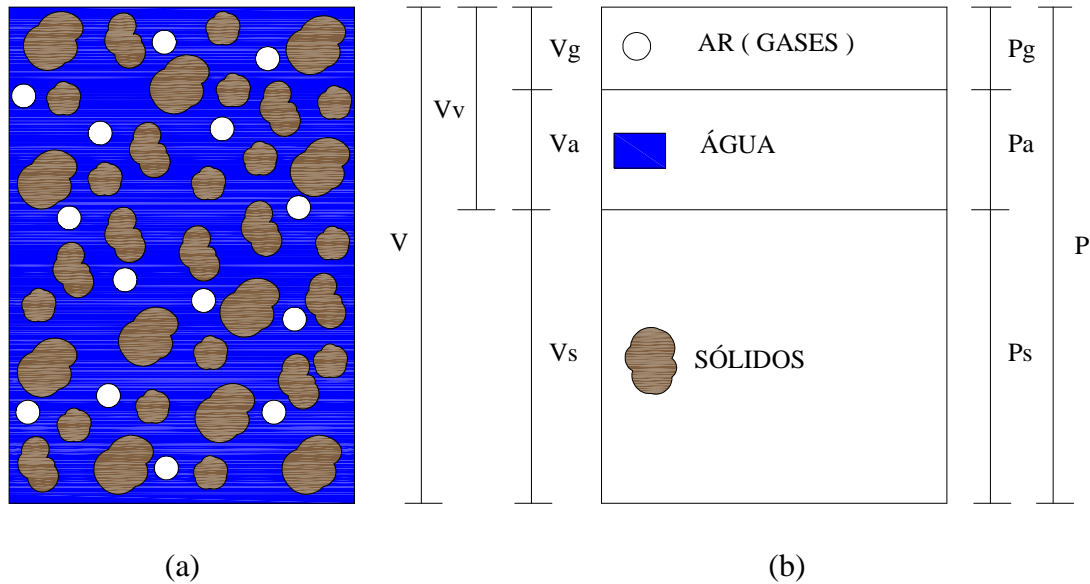


Figura 2.3 – (a) Esquema representativo de uma amostra de solo e das suas distintas fases. (b) Diagrama de pesos e volumes da amostra de solo.

Se nem todos os poros em uma rocha ou solo estão conectados, então somente certa fração dos poros irá permitir a passagem de água, e essa fração é conhecida como porosidade efetiva, n_e . A porosidade de uma rocha ou solo é determinada principalmente pelo arranjo dos seus grãos em um determinado volume e pela uniformidade na distribuição dos seus grãos pequenos, médios e grandes. Se em um corpo pequenos grãos estão situados nos espaços entre grãos grandes então a porosidade irá ser reduzida abaixo daquela que teria somente com os grãos grandes.

Para analisar a porosidade de um solo convém então verificar a textura dos solos. Quanto à textura (distribuição granulométrica) os solos são classificados em grossos e finos. Os solos grossos são aqueles nos quais mais do que 50% dos grãos são visíveis a olho nu; são as areias e os pedregulhos. Os solos finos são aqueles nos quais mais do que 50% das partículas são de tal dimensão, que não são visíveis a olho nu; são as argilas e os siltes.

A experiência indica que para solos granulares há maior interesse no conhecimento do tamanho das partículas, visto que, algumas de suas propriedades estão

relacionadas com os mesmos, o que não ocorre com os solos finos.

Em função da distribuição granulométrica os solos podem ser bem ou mal graduados. Os solos que tem seus grãos variando, preponderantemente, dentro de pequenos intervalos, são considerados solos mal graduados. Em oposição, os solos que tem vários diâmetros diferentes misturados são solos bem graduados. Ver Figura 2.4.



Figura 2.4 – Três tipos de graduação de solos.

Algumas definições são necessárias para tirar informações sobre as curvas granulométricas: Diâmetro efetivo, D_{10} , é o ponto característico da curva granulométrica para medir a finura do solo, que corresponde ao ponto de 10%, tal que 10% das partículas do solo possuem diâmetros inferiores a ele. Da mesma forma que foi definido o diâmetro D_{10} , define-se D_{30} e D_{60} . O Coeficiente de Uniformidade C_u é a relação entre os diâmetros efetivos D_{60} e D_{10} :

$$C_u = D_{60} / D_{10} \quad (2.2)$$

e o Coeficiente de curvatura C_c é dado pela equação:

$$C_c = \frac{(D_{30})^2}{D_{60} \cdot D_{10}} \quad (2.3)$$

O Coeficiente de Uniformidade C_u dá uma idéia da distribuição do tamanho das partículas do solo; valores próximos de um indicam curva granulométrica quase

vertical, com os diâmetros variando em um intervalo pequeno, enquanto que, para valores maiores a curva granulométrica irá se abatendo e aumentando o intervalo de variação dos diâmetros, tornando a porosidade menor.

A representação da curva granulométrica em papel semi-logaritmo apresenta vantagens, pois os solos com C_u , aproximadamente iguais, serão representados por curvas paralelas. Os solos que apresentam $C_u < 5$ são denominados uniformes; e com $C_u > 15$ desuniformes. Para valores de C_u entre 5 e 15 são denominados de medianamente uniformes.

A experiência mostra que para um solo ser bem graduado, o valor do coeficiente de curvatura C_c deverá estar entre 1 e 3. Neste caso haverá uma boa distribuição de partículas, de forma que os espaços deixados pelas partículas maiores sejam ocupados pelas menores, causando porosidades menores.

Tabela 2.1 – Importantes propriedades físicas de rochas e solos.

Litologia	Porosidade (%)	Condutividade hidráulica [cm/s]	Compressibilidade $\beta \left[\frac{m^2}{N} \right] ou Pa^{-1}$
Não consolidados			
Cascalho	25 - 40	$10^{-2} - 10^2$	$10^{-8} - 10^{-10}$
Areia	25 - 50	$10^{-4} - 1$	$10^{-7} - 10^{-9}$
Silte	35 - 50	$10^{-7} - 10^{-3}$	Não há
Argila	40 - 70	$10^{-10} - 10^{-7}$	$10^{-6} - 10^{-8}$
Sedimentos glaciais	10 - 20	$10^{-10} - 10^{-4}$	$10^{-6} - 10^{-8}$
Consolidados			
Basalto fraturado	5 - 50	$10^{-5} - 1$	$10^{-8} - 10^{-10}$
Calcário cárstico	5 - 50	$10^{-4} - 10$	Não aplicável
Arenito	5 - 30	$10^{-8} - 10^{-4}$	$10^{-11} - 10^{-10}$
Calcário, dolomita	0 - 20	$10^{-7} - 10^{-4}$	$< 10^{-10}$
Xisto	0 - 10	$10^{-11} - 10^{-7}$	$10^{-7} - 10^{-8}$
Rocha cristalina fraturada	0 - 10	$10^{-7} - 10^{-2}$	10^{-10}
Rocha cristalina densa	0 - 5	$10^{-12} - 10^{-8}$	$10^{-9} - 10^{-11}$

Fonte: LEAP, 1999, TABELA 1.3

A razão de vazios, e , usado em mecânica dos solos, é definida como

$$e = \frac{V_p}{V_s} \quad (2.4)$$

onde V_s é o volume de sólidos, tal que

$$n = \frac{1}{(1 + 1/e)} \quad (2.5)$$

2.4.2 – Umidade do solo

A umidade do solo θ pode ser medida e descrita por tomadas de peso ou de volume de amostras de solo ou rocha. A equação gravimétrica é

$$\theta_p = \frac{P_a}{P_s} \quad (2.6)$$

onde P_a é o peso da água contido na amostra e P_s é o peso seco dos sólidos contidos na amostra. Embora esta definição seja útil, normalmente a definição volumétrica é mais usada

$$\theta_v = \frac{V_a}{V_s} \quad (2.7)$$

onde V_a é o volume da água contido na amostra e V_s é o volume seco dos sólidos contidos na amostra. O teor em água da amostra w é dado em percentagem

$$w(\%) = \frac{V_a}{V_s} \cdot 100 \quad (2.8)$$

As variáveis contidas nas equações (2.6 - 2.9) estão graficamente representadas na Figura 2.3. Outros índices relacionados à umidade são: a razão de saturação

$$r_s = \frac{V_a}{V_v} \quad (2.9)$$

onde V_v é o volume de vazios e o grau de saturação que é a razão de saturação dado em percentagem

$$s(\%) = \frac{V_a}{V_v} \cdot 100 \quad (2.10)$$

2.4.3 – Capilaridade

A força de capilaridade é um elemento importante no movimento da água em materiais não saturados. A água é atraída para os grãos sólidos por adesão. Um exemplo simples é a água subindo em um canudo de refrigerante, com uma altura capilar h_c e um pequeno raio r (Figura 2.5):

$$h_c = \frac{2\sigma \cos\alpha}{\gamma_a \cdot r} \quad (2.11)$$

onde σ é a tensão de superfície da água ($0,0756 \text{ N/m}$ a 0°C), γ_a é o peso específico da água ($9,805 \text{ kN/m}^3$ à 0°C) e $\alpha = 0^\circ$ para a água.

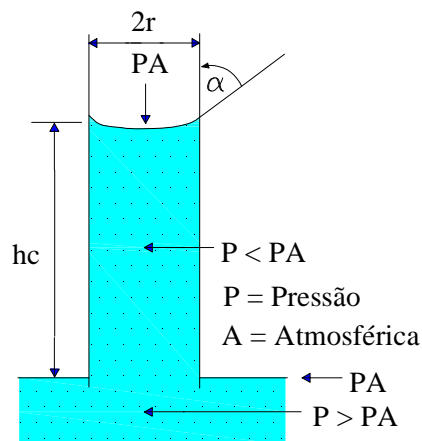


Figura 2.5 – Capilaridade da água em um tubo estreito de raio r .

MAVIS e TSUI (1939), apud LEAP (1999), desenvolveram a seguinte equação para estimar a altura de capilaridade subindo em milímetros no solo:

$$h_c = \left(\frac{2,2}{d_H}\right) \left[\frac{(1-n)}{n}\right]^{2/3} \quad (2.12)$$

onde d_H é a média harmônica dos diâmetros dos grãos em milímetros e n é a porosidade.

A elevação capilar em pedregulhos grossos pode ser só de alguns milímetros, mas em argilas podem chegar até três ou quatro metros, de acordo com DAVIS e DE WIEST (1966) e LOHMAN(1972), citados por LEAP (1999).

Na zona das raízes há uma disputa natural por água entre as forças de capilaridade do solo e as forças de sucção osmóticas das raízes das plantas. A umidade do solo, na qual as forças de capilaridade do solo tornam-se maiores que as forças osmóticas, é conhecida como ponto de murchamento, isto é, a umidade do solo na qual as plantas cessam de receber água e murcham. Este ponto em areias é de aproximadamente 5% enquanto em argilas é de 25 a 30% (USDA, 1955, apud LEAP (1999)).

2.4.4 – Compressibilidade da água

A água é quase incompressível, mas deve-se levar em conta esta propriedade principalmente quando se trata de estudar grandes volumes de água. Em condições de temperatura e massa constantes, DOMENICO e SCHWARTZ (1990), apud LEAP (1999), definem a compressibilidade isotérmica da água como

$$\beta = \frac{1}{E} = -\left(\frac{1}{V_a}\right) \left(\frac{\partial V_a}{\partial P}\right) \quad (2.13)$$

onde β , compressibilidade do fluido, representa a variação do volume de água em relação ao volume total de água do sistema pela variação de pressão. O sinal negativo

sinaliza a diminuição do volume de água quando a pressão aumenta. A letra E representa o módulo de compressão. A 25 °C a água de um aquífero possui a seguinte compressibilidade: $\beta = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$.

2.4.5 – Compressibilidade do terreno

A compressibilidade de um solo ou rocha contendo água, em uma determinada profundidade h é afetada por pressões internas e externas e pela pressão da água contida em seus poros. A equação de equilíbrio de tensão neste ponto é dada por (Figura 2.2):

$$\sigma_t = \sigma_e + P_p \quad (2.14)$$

onde σ_t é a carga total agindo para baixo neste ponto e é composta da pressão do solo ou rochas sobrepostos ao ponto, inclusive a água que eles contêm mais as edificações, árvores, carga móveis (por exemplo: trens), situados sobre a superfície do terreno. A tensão efetiva ou de resistência da estrutura dos grãos sólidos, isto é, a matriz do solo, é σ_e e P_p é a pressão de poros relativa à água situada nos poros deste aquífero.

Conforme a profundidade do ponto cresce, cresce com ele a tensão total, porque esta cresce naturalmente com a profundidade. Para equilibrar, as tensões do lado direito da equação (2.14) devem crescer juntas. Se um poço é bombeado, a extração de água irá aos poucos diminuindo a pressão dos poros P_p e por conseqüência haverá um crescimento na tensão efetiva σ_e exercida sobre a matriz do solo. Como resultado esta irá comprimir, diminuindo a porosidade do solo. Se houver injeção de água no poço, o contrário acontece.

2.4.6 – Carga hidráulica

A carga hidráulica h em um ponto de um aquífero é expressa como

$$h = z + \frac{P}{\rho g} \quad (2.15)$$

onde z é a elevação do ponto em relação a um plano de referência (normalmente usa-se o nível do mar), P é a pressão do fluido no ponto exercida pela coluna de água sobre este ponto, e ρg é o peso específico da água, γ , ou mais simplesmente

$$h = z + \psi \quad (2.16)$$

onde ψ é também chamado de carga de pressão.

A carga hidráulica tem dimensão de comprimento, o que torna conveniente os cálculos baseados na elevação da água do mar, o qual é normalmente considerado nível de referência zero. A carga hidráulica pode também ser chamada de potencial de fluido, mas esta expressão é pouco usada.

No movimento da água é importante considerar a carga hidráulica e não somente a carga de pressão. Pois a água irá se deslocar sempre de uma carga hidráulica mais alta para uma mais baixa, não importando se a carga de pressão no destino é mais alta que na origem.

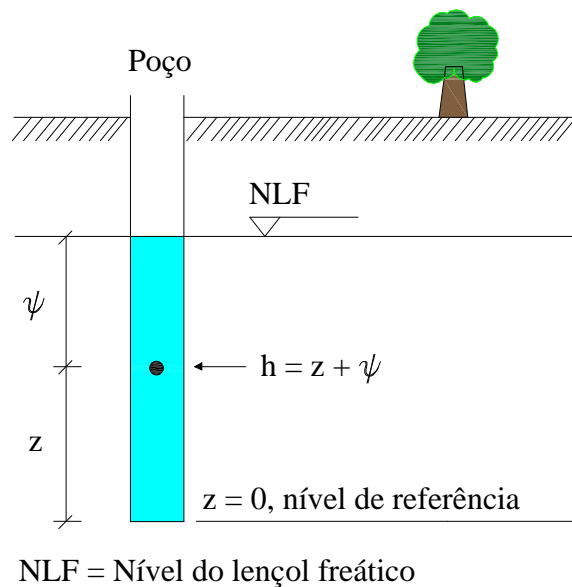


Figura 2.6 – Carga hidráulica de um ponto em um aquífero.

2.4.7 – Armazenamento

A equação de equilíbrio de massa para um escoamento em um aquífero através de um volume unitário de meio poroso é dado por

$$Q_{sai} \cdot \Delta t = Q_{ent} \cdot \Delta t \pm \Delta S \cdot \Delta t \quad (2.17)$$

onde Q é a razão do fluxo total em volume por unidade de tempo e ΔS é o volume por unidade de tempo entrando ou saindo do volume unitário no tempo t .

Em um meio poroso saturado confinado entre duas camadas de rocha ou argila a água será armazenada nos poros do meio pela combinação de dois fenômenos: a compressão da água e a expansão do aquífero. Quando a água é forçada para dentro do meio em uma quantidade maior do que é retirada, a água irá comprimir e a estrutura do meio irá expandir para acomodar o excesso.

Define-se armazenamento específico S_s (HUYAKORN, 1983, apud CIRILO e CABRAL (1989)) como o volume de água recebido pelo aquífero por unidade de volume e por unidade de aumento de carga hidráulica:

$$S_s = \frac{\delta V_{recebido}}{V \delta h} \quad (2.18)$$

onde δ indica uma pequena variação.

O armazenamento específico S_s também pode ser calculado mediante a seguinte equação (LEAP (1999)):

$$S_s = \rho g (\beta_t + n\beta_a) \quad (2.19)$$

onde ρ é a massa específica da água, g é a aceleração da gravidade local, β_t é a compressibilidade do meio poroso, n é a porosidade e β_a é a compressibilidade da água.

O armazenamento específico tem dimensão $1/L$ e seu valor é normalmente menor que $0,0001 cm^{-1}$.

O coeficiente de armazenamento de um aquífero S é dado por

$$S = S_s \cdot \ell \quad (2.20)$$

onde ℓ é a espessura do aquífero saturado. Ele é um parâmetro adimensional e corresponde ao volume de água libertado por uma coluna de aquífero de altura igual à sua espessura e seção unitária, ao diminuir a carga hidráulica (nível piezométrico) de uma unidade. Nos aquíferos confinados o valor deste coeficiente é normalmente na ordem de 5×10^{-3} a 5×10^{-5} (LEAP, 1999).

O comportamento dos aquíferos livres é diferente dos aquíferos confinados. Nos aquíferos livres a água é liberada em função da drenagem dos poros e os vazios passam a ser ocupados pelo ar e o nível freático fica mais baixo, sendo que a estrutura do solo permanece quase imutável. Nos aquíferos confinados a retirada ou inclusão de água faz com que a estrutura do solo se compacte ou se expanda, respectivamente. Esse comportamento leva alguns autores a denominar este tipo de armazenamento como elástico.

O coeficiente de armazenamento para meio poroso não confinado é chamado de produção específica S_y (em inglês “specific yield”) e é definido como a razão do volume de água que drena de uma estrutura porosa saturada sob a influência da gravidade para o volume total da estrutura, por unidade de esvaziamento do nível freático. Este coeficiente freqüentemente tem valores na ordem de 0,2 a 0,3 e três até quatro ordens de magnitude maior que o coeficiente de armazenagem elástica.

A drenagem por gravidade age no meio poroso até o momento em que as forças da tensão de superfície e atração molecular para os grãos da estrutura de solo igualem a força da gravidade. A razão do volume de água retido nos poros para o volume da estrutura do solo é conhecido como retenção específica S_r .

$$S_r = \frac{V_a}{V_t} \quad (2.21)$$

Nas partes mais altas de um meio poroso não confinado, onde a armazenagem elástica não é significativa, a soma da produção específica S_y e da retenção específica S_r iguala a porosidade

$$S_y + S_r = n. \quad (2.22)$$

Quando um meio poroso não confinado é muito grosso, as partes baixas do meio devem também conter água sob armazenamento elástico, permitindo incrementar a pressão e conseqüentemente a compressibilidade da água e a expansão da estrutura do solo com o incremento da altura. Nesse caso o armazenamento total do meio é expresso como

$$S = S_y + \ell S_s \quad (2.23)$$

onde ℓ é a espessura do meio saturado. Como visto acima, o valor do armazenamento específico S_s é algumas ordens de grandeza inferior a produção específica S_y , podendo então a equação (2.23) ser simplificada para $S = S_y$.

A propriedade dos solos denominada capacidade de campo é usada para descrever essencialmente o mesmo fenômeno que a retenção específica, mas ela é normalmente usada em estudos de solo para agricultura. Ela é uma função não somente da retenção específica, mas também da altura de evaporação e da permeabilidade do solo não saturado.

2.4.8 – Permeabilidade intrínseca

Diversas são as propriedades básicas de fluidos e meios porosos que irão determinar a facilidade com a qual um meio irá transmitir um fluido. A mais fundamental de todas elas é conhecida como permeabilidade intrínseca, também chamada de permeabilidade específica, k . Ela é simplesmente uma função da média dos tamanhos de poros do meio e é definida como

$$k = C d^2 \quad (2.24)$$

onde d é o diâmetro médio dos poros, e C é uma constante empírica a qual depende principalmente da composição mineralógica, do tamanho e da distribuição das partículas do solo.

A permeabilidade intrínseca é uma função estritamente do meio e não tem nenhuma relação com a temperatura, pressão ou propriedades do fluido que passa

através do meio. Ela comumente é medida em Darcy, milidarcy ou cm^2 . Embora independente do fluido, o Darcy é definido com um fluido padrão com a finalidade de quantificar ele com a área através do qual o fluido com uma viscosidade de um centipoise irá fluir na razão equivalente a $1 cm^3/s$, na seção de $1 cm^2$ sob um gradiente de pressão de uma atmosfera por centímetro ou

$$1 \text{ Darcy} = \left[\left(1 \text{ centipoise} \times \frac{1 cm^3}{s} \right) / 1 cm^2 \right] / (1 atm / 1 cm).$$

Sendo $1 \text{ centipoise} = 0,01 \text{ dine} \cdot s/cm^2$ e $1 \text{ atm} = 1,0132 \times 10^6 \text{ dinas}/cm^2$, substituindo esses valores em 1 Darcy obtém-se $1 \text{ Darcy} = 9,87 \times 10^{-9} cm^2$.

Vários autores (BEAR, 1979) estabelecem fórmulas para cálculo de permeabilidade intrínseca, mas geralmente seus valores são determinados na prática pela experiência que se tem do aquífero em estudo.

2.4.9 – Viscosidade

Viscosidade dinâmica de um fluido é a propriedade associada à resistência que ele oferece ao cisalhamento quando em movimento. A figura 2.7 auxiliará o entendimento físico e matemático da definição.

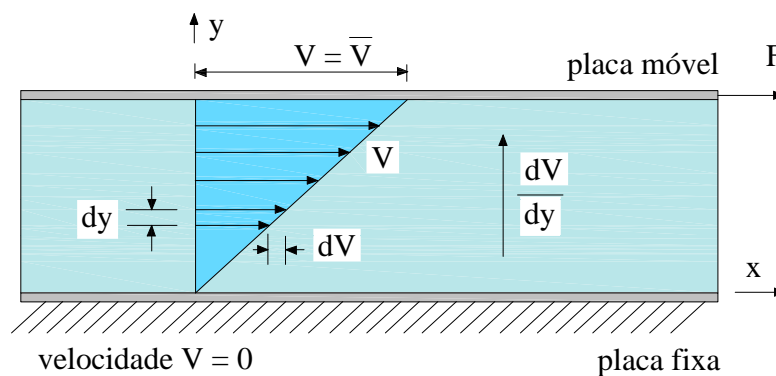


Figura 2.7 – Desenho para explicar a viscosidade dinâmica como uma resistência de um fluido a deformação por cisalhamento.

Seja considerada a existência de um fluido entre duas placas horizontais, planas, suficientemente largas para serem desprezados os efeitos de borda e com distância entre elas pequena. Se a placa inferior permanecer parada enquanto a superior for colocada em movimento por ação de uma força F no sentido do eixo x , com uma velocidade $V = \bar{V}$ dentro do limite de escoamento laminar, então o líquido irá se deslocar acompanhando a placa superior, com variação linear de velocidade, com velocidades variáveis de zero junto à placa inferior até $V = \bar{V}$ junto à placa superior. A razão de variação da velocidade pela variação da altura é chamada de taxa vertical de tensão (dV/dy). Esse fenômeno é causado pela tensão de cisalhamento τ , o qual é

$$\tau = F/A \quad (2.25)$$

onde F é a força de movimento da placa superior com a velocidade $V = \bar{V}$ e A é a área da superfície da placa superior. Dessa experiência observa-se que a tensão de cisalhamento é proporcional a taxa vertical de tensão e assumindo uma constante μ que transforme essa proporcionalidade em equação tem-se:

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy} \quad (2.26)$$

Essa constante μ é conhecida como viscosidade dinâmica e tem unidade $[FTL^{-2}]$. Para pressões moderadas ela independe da pressão. A viscosidade dinâmica depende da temperatura e em geral decresce com ela. A viscosidade dinâmica da água a 15°C é de $1,1404 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$.

A viscosidade dinâmica pode ser relacionada com a viscosidade cinemática através da expressão

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.27)$$

onde ρ é a massa específica do fluido. A viscosidade cinemática tem unidade $[L^2T^{-1}]$. A viscosidade cinemática da água a 15°C é de $1,139 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

2.4.10 – Gradiente hidráulico

Gradiente hidráulico é a relação entre a perda de carga por unidade de comprimento em um escoamento ao longo de uma linha de corrente

$$I = \frac{dh}{dL} \quad (2.28)$$

I é um número adimensional.

2.4.11 – Condutividade hidráulica em meios saturados

A permeabilidade intrínseca de um meio poroso não descreve completamente a relativa facilidade com a qual um líquido irá fluir em um meio poroso. Esta descrição completa é possível pelo uso da condutividade hidráulica, K , a qual combina as propriedades do meio e do fluxo,

$$K = \frac{k \rho g}{\mu} \quad (2.29)$$

onde $\rho g / \mu$ é o fator hidrodinâmico do fluido.

Tabela 2.2 - Alguns valores típicos da condutividade hidráulica.

Tipo de Solo	Condutividade hidráulica, K [cm/s]
Pedregulho limpo	$K \geq 1,0$
Areia limpa grossa	$0,01 < K < 1,0$
Areia mista	$0,005 < K < 0,01$
Areia fina	$0,001 < K < 0,05$
Areia siltosa	$0,0001 < K < 0,002$
Silte	$0,00001 < K < 0,0005$
Argila ou barro	$K < 0,000001$

Fonte: HARR, 1999, Table 4.2 ("Coefficient of Permeability")

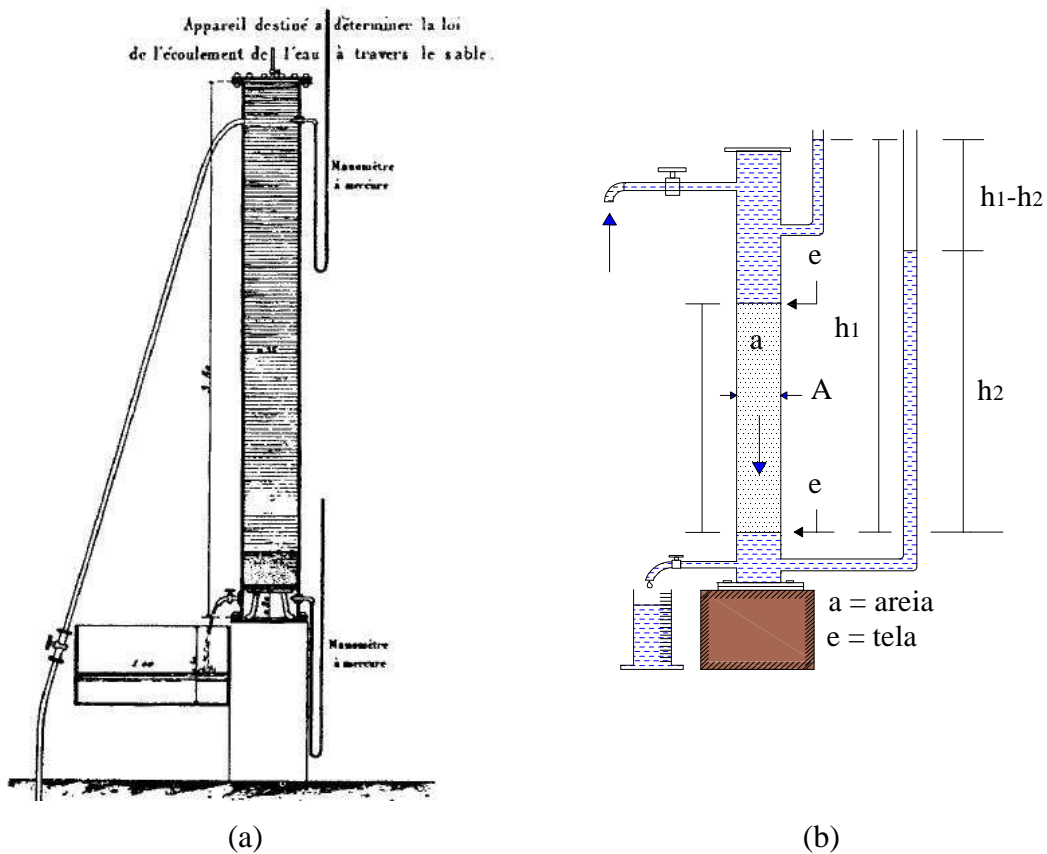


Figura 2.8 – (a) Aparato original usado por Henry DARCY (1856) para sua experiência com manômetro de mercúrio e publicado em “*Les fontaines publiques de la ville de Dijon*” e (b) um aparato equivalente usado com manômetro de água para tornar mais simples o entendimento da experiência.

A condutividade hidráulica, dependendo do setor de trabalho, também é chamada de coeficiente de permeabilidade ou constante de permeabilidade. Esse parâmetro com dimensionalidade de velocidade $[LT^{-1}]$ corresponde ao volume de líquido fluindo perpendicularmente a uma área unitária de meio poroso por unidade de tempo sob a influência de um gradiente hidráulico unitário. A tabela 2.2 lista a condutividade hidráulica (coeficiente de permeabilidade) para diversas litologias.

Henry Darcy, engenheiro francês, em 1856, descobriu uma das mais importantes relações físicas da ciência da hidrodinâmica de meios porosos, a qual se tornou conhecida como Lei de Darcy. Ele quantificou a perda de carga piezométrica ($h_1 - h_2$) necessária para a produção de determinados valores de vazão Q em um cilindro de areia de comprimento fixo L e com uma área de meio poroso perpendicular a direção de fluxo A . Ele observou que a vazão era diretamente proporcional à perda de carga e

inversamente proporcional ao comprimento do cilindro. As variáveis estudadas estariam relacionadas por intermédio de uma constante de proporcionalidade K , que representava as propriedades do fluido e do meio (Figura 2.8).

$$q = \frac{Q}{A} = K \frac{h_1 - h_2}{L} \quad (2.30)$$

onde q representava o fluxo por unidade de área transversal e por unidade de tempo, h_1 e h_2 representavam as cargas piezométricas nas extremidades do tubo, L , o comprimento do percurso e K , a condutividade hidráulica. O sinal resultante da expressão (positivo ou negativo) indicará que o movimento do fluido se dará no sentido da maior para a menor carga piezométrica.

Convém ressaltar que a lei de Darcy é válida para escoamentos laminares. Num meio poroso, pode-se considerar como escoamento laminar aquele cujo número de Reynolds, definido por

$$R_e = \frac{\rho v D}{\mu} \quad (2.31)$$

é menor ou igual a um (HARR, 1999, §4.2.3), onde D pode ser considerado como d_{50} , ou seja, o diâmetro que na curva granulométrica excede o tamanho de 50% do material granuloso em peso.

Observando-se a equação (2.30) nota-se que q tem a dimensão de velocidade [LT^{-1}] e por isto é comumente designada como velocidade de Darcy. Outros nomes usados na literatura são vazão específica, velocidade aparente ou ainda velocidade de descarga. A velocidade efetiva com que o escoamento se realiza no meio poroso é

$$v_e = \frac{q}{n_e} \quad (2.32)$$

onde n_e é a porosidade efetiva. Esta velocidade também é chamada de velocidade real, velocidade de infiltração ou velocidade intersticial média.

A principal vantagem do uso da equação (2.29) se dá quando se trata de problemas com mais de um fluido ou com variações significativas de temperatura.

Quando se trata de um único fluido relativamente incompressível e sujeito a pequenas mudanças de temperatura tal como em aquíferos e problemas relacionados com infiltração é mais conveniente usar a condutividade hidráulica K como único parâmetro (HARR, 1999).

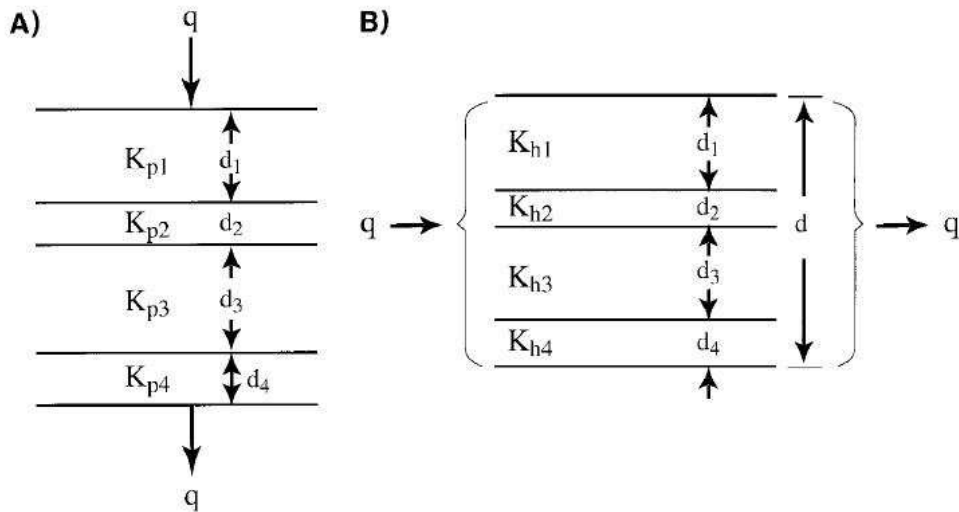


Figura 2.9 – Condutividade hidráulica para aquíferos multicamadas: (A) fluxo perpendicular as camadas, e (B) fluxo paralelo as camadas.

A condutividade hidráulica média K_p perpendicular a um aquífero multicamadas de m camadas cada uma das quais sendo isotrópica ou anisotrópica, pode ser determinada usando a média harmônica ponderada como (LEAP, 1999)

$$K_p = d / \sum_{1}^m d_m / K_{pm} \quad (2.33)$$

onde d é a espessura total, d_m é a espessura da cada camada, e K_{pm} é a condutividade hidráulica perpendicular a cada camada (ver Figura 2.9.A).

A média da condutividade hidráulica horizontal paralela as camadas é dada pela média linear ponderada

$$K_h = \sum_1^m K_{dm} \cdot d_m/d \quad (2.34)$$

onde K_{dm} é a condutividade hidráulica horizontal de cada camada (ver Figura 2.9.B).

Havendo uma descontinuidade na condutividade hidráulica em um meio poroso, pode ser adotada a separação do escoamento em regiões, de tal maneira que em cada região se tenha condições homogêneas. A equação do aquífero é utilizada para cada região e na superfície de separação entre as regiões aplicam-se equações de compatibilidade de potencial h e de fluxo normal $\partial h/\partial n$ à superfície de separação.

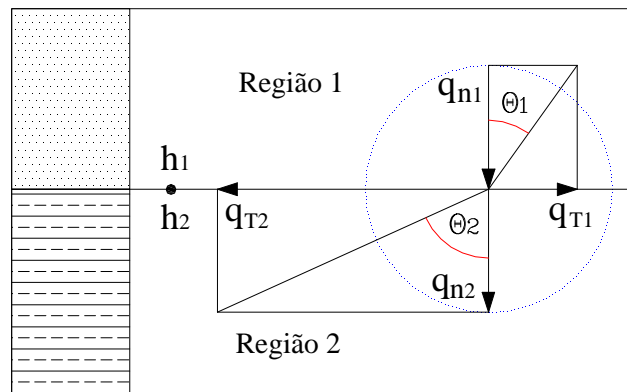


Figura 2.10 - Heterogeneidade em escoamento subterrâneo.

A Figura 2.10 mostra as condições de compatibilidade entre as regiões um e dois, onde se tem $q_{n1} = q_{n2}$ e $h = h_1 = h_2$. Sendo T a linha tangente à interface e sendo o fluxo contínuo ao longo da interface, então $\partial h/\partial T$ também é contínuo. Logo,

$$q_{T1} = K_1 \frac{\partial h}{\partial T} \quad (2.35)$$

$$q_{T2} = K_2 \frac{\partial h}{\partial T} \quad (2.36)$$

por definição

$$tg \theta_1 = \frac{q_{T1}}{q_{n1}} \quad (2.37)$$

$$tg \theta_2 = \frac{q_{T2}}{q_{n2}} \quad (2.38)$$

Dividindo-se os valores de q_{T1} por q_{T2} (das equações 2.35 e 2.36) obtém-se

$$\frac{q_{T1}}{K_1} = \frac{q_{T2}}{K_2} \quad (2.39)$$

ou seja, quanto maior a condutividade hidráulica maior a componente tangencial do escoamento. Aplicando as equações (2.37 e 2.38) na equação (2.39) e levando em consideração a igualdade das velocidades de Darcy q_{n1} e q_{n2} obtém-se

$$\frac{tg \theta_1}{tg \theta_2} = \frac{K_1}{K_2} \quad (2.40)$$

VERRUIJT (1982) apresenta um exemplo, onde uma camada de argila semi-permeável sobrepõe-se a uma camada de areia. Considerando-se o fluxo na argila quase vertical (*angulo* $\theta_1 = 0.1^\circ$) e adotando-se a permeabilidade da areia muito maior que a da argila $K_2 = K_1 \cdot 10^6$ constata-se que o fluxo na areia será quase horizontal (*angulo* $\theta_2 = 89,96^\circ$).

Embora seja comum empregar condutividade hidráulica de uma forma generalizada no estudo das propriedades hidráulicas de um meio poroso, é mais vantajoso usar o termo transmissividade para descrever a facilidade com que a água move-se através de um espesso corpo poroso tal como um aquífero horizontal ou multicamadas.

Transmissividade T_r , também designado por coeficiente de transmissividade ou ainda transmissibilidade é simplesmente o produto da condutividade hidráulica K pela espessura ℓ do aquífero saturado

$$T_r = K \cdot \ell \quad (2.41)$$

e tem dimensionalidade $[L^2T^{-1}]$. A transmissividade é usualmente calculada em m^2/dia . A vazão total de escoamento Q através de uma área A do aquífero perpendicular a direção do escoamento sob um determinado gradiente I é dado por

$$Q = T_r \cdot I \cdot A \quad (2.42)$$

2.4.12 – Condutividade hidráulica em meios não saturados

Como visto previamente, a água em meios não saturados é sujeita a influência não somente do gradiente hidráulico, mas também da atração molecular e da tensão de superfície. Por este motivo a condutividade hidráulica em meios não saturados depende da carga de pressão ψ , a qual é sempre negativa. Para ressaltar esta particularidade esta condutividade será chamada de $K(\psi)$.

2.4.13 – Isotropia e Homogeneidade

Diz-se que um aquífero é isotrópico quando suas propriedades hidráulicas não variam em função da direção considerada, caso contrário diz-se que o mesmo é anisotrópico. Esta definição aplica-se as propriedades de um aquífero quando as mesmas são vetoriais, tais como a descarga específica, a velocidade efetiva e a condutividade hidráulica.

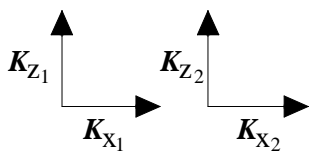
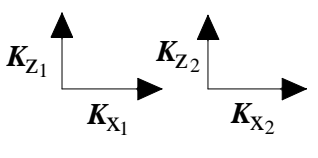
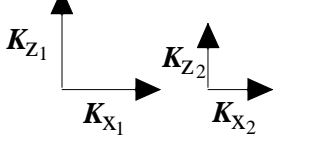
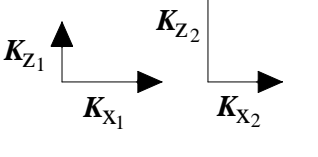
Um aquífero é considerado homogêneo quando apresentar as propriedades hidrogeológicas iguais em todos os pontos do domínio considerado, caso contrário é chamado heterogêneo.

Considerando as duas definições acima é possível obter as seguintes combinações de meio poroso: 1) homogêneo e isotrópico; 2) homogêneo e anisotrópico; 3) heterogêneo e isotrópico e 4) heterogêneo e anisotrópico. Com relação à condutividade hidráulica em um meio poroso a Tabela 2.3 mostra as possíveis combinações de homogeneidade, isotropia, heterogeneidade e anisotropia.

As propriedades direcionais de um aquífero tais como permeabilidade intrínseca, condutividade hidráulica e transmissividade são descritas tridimensionalmente em notação cartesiana de tensão usando nove termos. No entanto, deve-se lembrar que a transmissividade é um termo bidimensional e que, portanto, deve ser aplicado levando em consideração sua característica no plano horizontal. Para a propriedade de condutividade hidráulica este tensor é assim representado:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Tabela 2.3 – Sumário das possíveis combinações de homogeneidade, isotropia, heterogeneidade e anisotropia da condutividade hidráulica em um meio poroso.

	Homogêneo	$K_{z1} = K_{z2}$ $K_{x1} = K_{x2}$
	Isotrópico	$K_x = K_z$
	Homogêneo	$K_{z1} = K_{z2}$ $K_{x1} = K_{x2}$
	Anisotrópico	$K_x \neq K_z$
	Heterogêneo	$K_{z1} \neq K_{z2}$ $K_{x1} \neq K_{x2}$
	Isotrópico	$K_x = K_z$
	Heterogêneo	$K_{z1} \neq K_{z2}$ $K_{x1} \neq K_{x2}$
	Anisotrópico	$K_x \neq K_z$

A Figura 2.11.a mostra em duas dimensões a situação dos eixos tensores não coincidindo com os eixos cartesianos, causando por conseqüência um tensor com os termos fora da diagonal principal diferente de zero. E ao seu lado, a Figura 2.11.b a situação em que há coincidência dos eixos.

Quando as direções principais do tensor coincidem com os eixos cartesianos adotados, diz-se que o meio é ortotrópico. Neste caso os elementos do tensor fora da diagonal principal se anulam e os únicos termos de interesse são

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

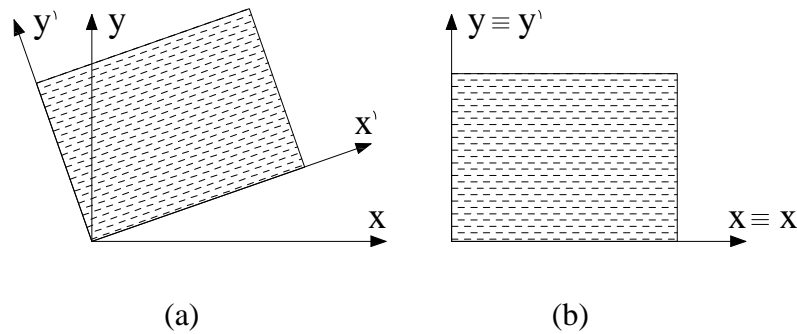


Figura 2.11 – (a) Direções principais do tensor não coincidem com os eixos cartesianos. (b) Direções principais do tensor coincidem com os eixos cartesianos.

Quando o meio é homogêneo e isotrópico $K = K_{xx} = K_{yy} = K_{zz}$.

Para um meio anisotrópico, a lei de Darcy pode assumir a seguinte representação

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \partial h / \partial x \\ \partial h / \partial y \\ \partial h / \partial z \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

A isotropia ou anisotropia da condutividade hidráulica e da transmissividade é controlada especificamente pela isotropia e anisotropia da permeabilidade intrínseca. Esta sendo uma função estritamente do meio poroso, é usualmente determinada pela estrutura do meio, o qual por sua vez, é o resultado da origem geológica do meio e das alterações subseqüentes.

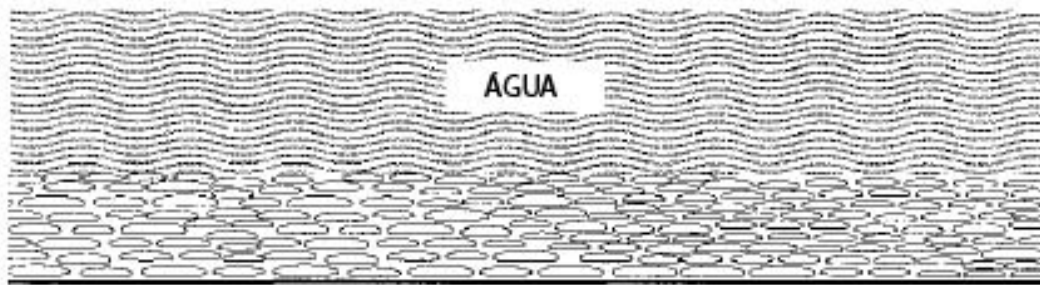


Figura 2.12– Anisotropia hidráulica em sedimentos formados pela ação das águas.

LEAP (1999) cita como exemplo, um depósito sedimentar que apresenta menor permeabilidade na direção vertical que na horizontal. Justifica isso devido ao fato de que como os sedimentos são depositados pela água eles assumem uma posição mais estável onde os eixos maiores dos grãos e seixos são assentados horizontalmente (Figura 2.12). Este mesmo depósito sedimentar se sofrer subseqüentes fraturas por ação de forças tectônicas em uma dada direção, poderão ter rachaduras verticais que poderão resultar em permeabilidades maiores na vertical que na horizontal (Figura 2.13).

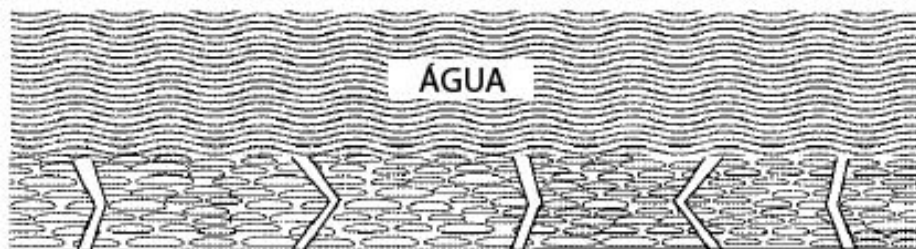


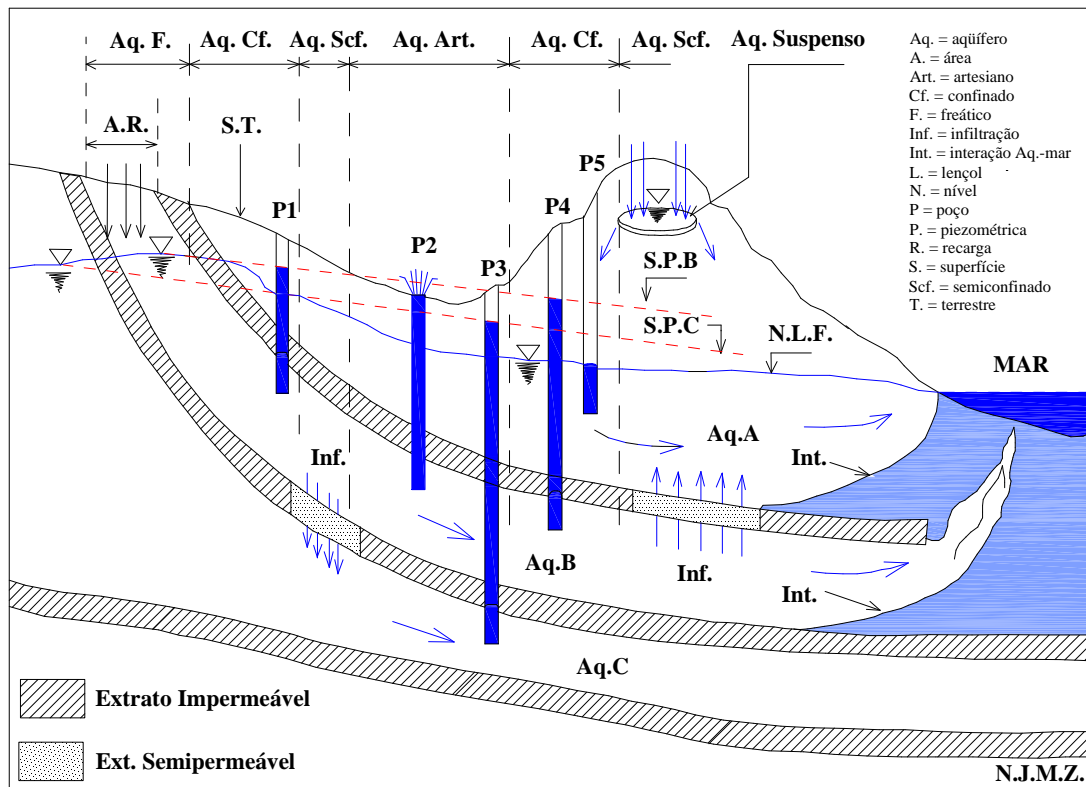
Figura 2.13 – Anisotropia devido à geração de porosidades secundárias por fratura.

2.5 – AQÜÍFEROS

2.5.1 – Definições

Um aquífero foi definido por DAVIS e DE WIEST (1969), apud LEAP (1999), como “... uma zona natural (formação geológica) abaixo da superfície que produz água em quantidades suficientemente grandes que a torne economicamente importante”.

Areias e pedregulhos que são encontrados em depósitos aluviais, dunas litorâneas, planícies litorâneas, e depósitos glaciais, são os materiais de aquíferos mais comuns. Arenito, pedra calcárea porosa, e outras formações cársticas também são materiais de aquíferos bons. Em geral, pedras ígneas e metamórficas não formam bons aquíferos a menos que eles sejam fraturados e suficientemente porosos (YONG e AHMED, 1999).



CONVENÇÕES:

- | | |
|----------------------------------|--|
| Aq.A = Aquífero A, não confinado | Int.= Interface Água Aquífero/Água Mar |
| Aq.Art. = Aquífero Artesiano | N.L.F. = Nível Lençol Freático |
| Aq.B = Aquífero B | P1, P3, P4 = Poço Artesiano |
| Aq.C = Aquífero C, confinado | P2 = Poço Surgente ou jorrante |
| Aq.Cf. = Aquífero Confinado | P5 = Poço Freático |
| Aq.F. = Aquífero Freático | S.P.B = Superfície Piezométrica Aquífero B |
| A.R.=Área de Recarga | S.P.C = Superfície Piezométrica Aquífero C |
| Aq.Scf. = Aquífero Semiconfinado | S.T. = Superfície Terrestre |
| Inf. = Infiltração | |

Figura 2.14 – Diversos tipos de aquíferos e poços.

Um aquífero que se situa entre duas camadas ou formações impermeáveis é chamado de aquífero confinado se é totalmente saturado do topo até o fundo. A Figura 2.14 mostra dois exemplos, aquíferos B e C. Se a área de recarga para este aquífero é localizada em uma região mais alta que o topo do aquífero, e o poço é escavado dentro do aquífero, o nível da água irá crescer acima do topo como mostrado (Poço surgente, também chamado poço jorrante, Figura 2.14, P2). Tal aquífero é conhecido como um aquífero artesiano; ele foi assim nomeado após Artois, da França, onde tais poços são mais comuns. Ele observou, no entanto, que o poço não tem que estar escoando para assim ser chamado, embora essa seja a concepção popular (Poço artesiano, Figura 2.14, P1, P3 e P4).

A superfície piezométrica ou superfície de pressão, a qual é o local da carga piezométrica de um aquífero é representada por uma linha que tem a altura do nível da água na área de recarga, local mais alto do aquífero, e decresce com a perda de carga devido ao atrito da água com os grãos de solo à medida que a água se movimenta para as regiões mais baixas. Na Figura 2.14 estão marcadas as linhas piezométricas das bacias B e C em linha tracejada vermelha (S.P.B. e S.P.C.).

Um aquífero não confinado, também chamado de freático ou livre não possui camada de confinamento sobre si, mas deve situar-se sobre uma camada impermeável ou quase impermeável. Este aquífero corresponde ao aquífero A da Figura 2.14.

O topo de uma zona não saturada de um aquífero não confinado é freqüentemente a superfície terrestre, e o topo da zona saturada está usualmente sob tensão ou pressão negativa. Esta última propriedade dá sentido à definição de superfície freática a qual é simplesmente a superfície onde a pressão relativa é nula, isto é, a pressão absoluta é a atmosférica. Na figura 2.14 esta linha (N.L.F.) é desenhada em azul. Imediatamente acima do nível freático, o meio é ainda saturado, mas a água é manejada pelas forças de capilaridade, dessa forma criando uma tensão ou carga de pressão negativa. Essa tensão pode existir embora os poros possam estar saturados entre o nível do lençol freático e o topo da franja de capilaridade. Abaixo do nível do lençol freático a pressão da água cresce com a profundidade.

Embora maior quantidade de água possa ser obtida de aquíferos não confinados do que de outros tipos, eles são mais vulneráveis a contaminação das fontes da superfície que outras por causa da falta de uma camada limitante sobre eles. É por esta razão que cuidados especiais devem ser tomados para assegurar a remoção e/ou

remediação de fontes de contaminação sobre um aquífero não confinado em uso ou sendo considerado como uma provisão de água (LEAP, 1999).

Um aquífero freático especial é conhecido como aquífero suspenso. Este é constituído de bolsas de areia ou pedregulho, ou outro material, que se assenta sobre materiais impermeáveis (ou quase impermeáveis) como a argila. Estes aquíferos localizam-se sobre áreas horizontais limitadas e, verticalmente, entre a superfície do terreno e o nível de água do aquífero freático. A Figura 2.14 mostra um exemplo deste aquífero. Durante os períodos de taxas de recarga altos, esses aquíferos podem permanecer saturados e de fato conter suficiente água para uso em bacias temporárias. Frequentemente, entretanto, após uma estação seca, e após bombeamento, os aquíferos suspensos ficarão secos.

Um mapa de nível de lençol freático (NLF) em uma região pode ser construído de níveis de água medidos em poços na região. Em muitos casos o NLF será uma linha paralela a superfície topográfica. Embora o termo “superfície piezométrica (SP)” seja geralmente reservado para aquíferos confinados com uma alta carga de pressão, ambos NLF e SP podem ser agrupados no termo superfície potenciométrica. As curvas potenciométricas ou piezométricas estão contidas na superfície potenciométrica e podem ser definidas como as linhas que unem todos os pontos de igual valor do nível estático ou de pressão piezométrica, no caso dos aquíferos confinados.

Aquitardos são formações geológicas semipermeáveis que, podendo conter quantidades apreciáveis de água, transmitem a água muito lentamente, não sendo viável seu aproveitamento econômico. Em condições especiais, estas formações podem tornar-se muito importantes, por permitirem a recarga vertical dos aquíferos. Eles são frequentemente referenciados como uma formação de fendas.

Aquicludes são formações geológicas que, embora porosa e capaz de armazenar água, transmite a água com velocidade bastante reduzida, não sendo possível sua exploração em termos econômicos. Um exemplo é uma camada argilosa. Para todos os objetivos práticos, um aquiclude é considerado uma formação impermeável.

Um aquífuge é uma formação impermeável que não contém nem transporta água.

Um aquífero confinado entre um aquitardo e um aquiclude, ou entre dois aquitardos, é chamado um aquífero semiconfinado (“leaky”). Ele possui normalmente propriedades comuns a um aquífero confinado, tal como uma superfície de altura

piezométrica, mas algumas águas irão fluir para dentro ou para fora do aquífero através dos equitardos. Na Figura 2.14 pode ser visto dois locais com infiltração em aquíferos semiconfinados. Observa-se um vazamento do aquífero B para o C, e mais próximo ao mar, um vazamento do aquífero B para o A.

2.5.2 – Suposições de Dupuit-Forchheimer

Para alguns problemas de escoamento bidimensional, um componente do escoamento pode ser negligenciado com respeito a outros. Em particular, em alguns escoamentos não confinados com uma superfície livre, o comportamento vertical do escoamento pode ser negligenciado. Essa aproximação pioneira para DUPUIT (1863) e utilizado mais tarde por FORCHHEIMER (1930) é conhecida como a Suposição de Dupuit-Forchheimer.

Tal suposição fornece razoáveis resultados quando a altura do escoamento não confinado é raso e o declive da superfície livre é pequeno (LEAP, 1999).

As suposições de Dupuit-Forchheimer são assim sumarizadas:

- 1) O escoamento é horizontal em qualquer seção de corte vertical;
- 2) A velocidade é constante para uma determinada altura;
- 3) A velocidade é calculada usando a declividade da superfície livre como o gradiente hidráulico;
- 4) A declividade da superfície livre é relativamente pequena.

As suposições de Dupuit-Forchheimer não apresentaram bons resultados no cálculo do escoamento na vizinhança de poços parcialmente penetrantes no aquífero (KEMBLOWSKY, 1987, apud CIRILO e CABRAL, 1989).

“Códigos usando as suposições de Dupuit permitem tratar o nível freático como uma propriedade a ser calculada pelo modelo o que é freqüentemente exatamente o que é desejado. A resposta do nível freático para o bombeamento de um poço ou variações de estágios em reservatórios podem ser resolvidos com códigos usando as suposições de Dupuit. Genericamente falando, códigos usando as suposições de Dupuit são mais simples e de menor intensidade de trabalho que aqueles que requerem que o nível do lençol freático seja fornecido (fixado). Códigos requerendo uma zona de interface não

saturada ou saturada têm necessidades complexas e detalhadas e são geralmente somente usados para aplicações localizadas por causa das detalhadas definições necessárias.” (GENETTI, 1999).

2.5.3 – Equações de escoamento

A natureza é muito diversa e complexa para ser regida por uma única equação física-matemática. Mas quando é possível aliar a experiência de trabalho de campo e hipóteses simplificadoras compatíveis com cada aquífero em estudo é possível modelar numericamente o escoamento da água subterrânea a níveis próximos da realidade e obter previsões com razoável precisão para o comportamento dos aquíferos nos próximos meses ou anos. Um exemplo estimulador deste estudo do subsolo na previsão do futuro é o do geocientista Marion King Hubbert, dos EUA, em 1956, quando previu o pique da produção de petróleo no seu país.

2.5.3.1 – Equação tridimensional de um aquífero

Em um problema em que os eixos cartesianos utilizados coincidem com as direções principais do tensor da condutividade hidráulica os elementos não pertencentes à diagonal principal serão nulos. Considerando esta hipótese, supondo a água um fluido incompressível e trabalhando com um domínio tridimensional a equação que governa o movimento da água em um meio poroso será (CIRILO e CABRAL, 1989)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xx} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{yy} \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{zz} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + R_v = S_s \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2.46)$$

onde S_s é o armazenamento específico, R_v a taxa de recarga do aquífero por unidade de volume, correspondente a recarga do aquífero ou exploração por bombeamento, cuja unidade é o inverso do tempo. O valor de R_v será positivo se água é adicionada ao aquífero e negativo se a água é retirada do aquífero. O termo R_v é usado tanto para recarga distribuída como para recarga concentrada. A recarga é função da localização,

coordenadas espaciais, e do tempo:

$$R_v = R_v(x, y, z, t) \quad (2.47)$$

2.5.3.2 – Modelo horizontal de escoamento em aquíferos confinados

Num aquífero confinado horizontal, as camadas acima e abaixo do meio poroso são impermeáveis e a condição de contorno nestas duas faces é de fluxo nulo. Considerando que as variações de espessura ℓ , mostrada na Figura 2.15, sejam desprezíveis ao longo do eixo x , e considerando que as velocidades de Darcy sejam idênticas em cada ponto de uma seção transversal perpendicular ao eixo x , pode ser feita a análise apenas no plano xy do aquífero. Isto significa que a carga hidráulica é independente de z e depende somente de sua posição (x, y) e do tempo

$$U = U(x, y, t) \quad (2.48)$$

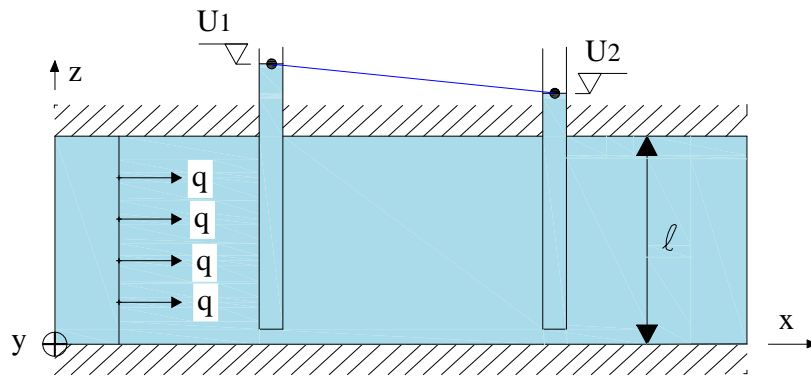


Figura 2.15 – Aquífero confinado horizontalmente. Hipóteses para a modelagem.

Considerando a espessura do aquífero ℓ e procedendo à integração da Eq.(2.46) ao longo do eixo vertical z , obtém-se a equação (2.49) que representa a difusão da água na seção média do aquífero, de altura $z = \ell/2$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\ell K_{xx} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\ell K_{yy} \frac{\partial U}{\partial y} \right) + R_v \ell = S_s \ell \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2.49)$$

Fazendo $R_\ell = R_v \cdot \ell$ (recarga no modelo bidimensional) e aplicando as definições de transmissividade T_r ($T_r = K \cdot \ell$) e coeficiente de armazenamento S ($S = S_s \cdot \ell$) chega-se à equação

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_{xx} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_{yy} \frac{\partial U}{\partial y} \right) + R_\ell = S \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2.50)$$

Considerando o aquífero isotrópico a transmissividade é constante, e portanto tem-se

$$\nabla^2 U + \frac{R_\ell}{T_r} = \frac{S}{T_r} \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2.51)$$

onde $R_\ell = R_\ell(x, y, t)$ pode ser expresso em m/s e é função das coordenadas do plano e do tempo. O coeficiente de armazenamento S é adimensional.

2.5.3.3 – Modelo vertical de escoamento em aquíferos confinados

Num aquífero confinado vertical, as camadas à esquerda e a direita do meio poroso são impermeáveis e a condição de contorno nestas duas faces é de fluxo nulo. Considerando que as variações de largura ℓ , mostrada na Figura 2.16, sejam desprezíveis ao longo do eixo z , e considerando que as velocidades de Darcy sejam idênticas em cada ponto da seção transversal perpendicular ao eixo z , pode ser feita a análise apenas no plano xz do aquífero. Isto significa que a carga hidráulica é independente de y e depende somente de sua posição (x, z) e do tempo

$$U = U(x, z, t) \quad (2.52)$$

Considerando a espessura do aquífero ℓ e procedendo à integração da Eq.(2.46) ao longo do eixo horizontal y , obtém-se a equação (2.53) que representa a difusão da água na seção média do aquífero, distante da origem de $\ell/2$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\ell K_{xx} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\ell K_{zz} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + R_v \ell = S_s \ell \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2.53)$$

Fazendo $R_\ell = R_v \cdot \ell$ (recarga no modelo bidimensional) e aplicando as definições de transmissividade T_r ($T_r = K \cdot \ell$) e coeficiente de armazenamento S ($S = S_s \cdot L$) chega-se à equação

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_{xx} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(T_{zz} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + R_\ell = S \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2.54)$$

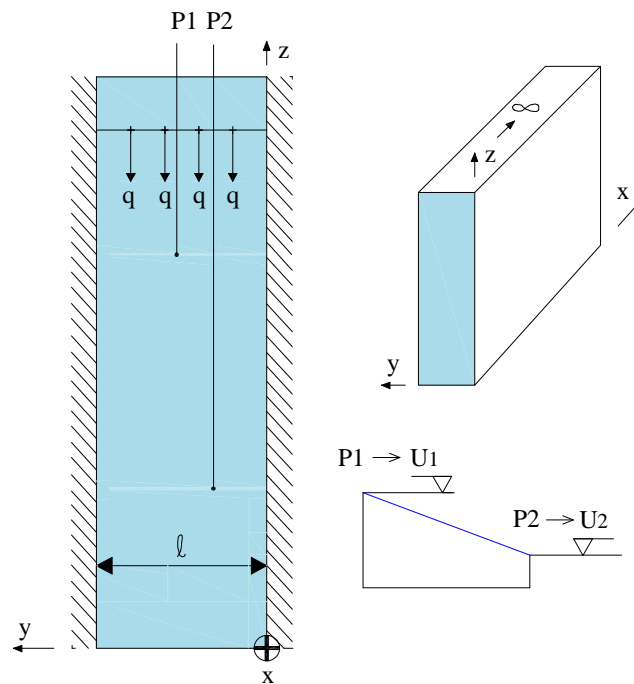


Figura 2.16 – Aquífero confinado verticalmente. Hipóteses para a modelagem.

Piezômetro P1 e P2. Aquífero de dimensão infinita na direção y .

2.5.3.4 – Modelo horizontal de escoamento em aquíferos não confinados

No aquífero não-confinado não existe camada limitante impermeável na fase superior. Para simplificação do cálculo, admite-se que existe uma interface de separação entre a zona saturada e uma região acima, completamente seca.

Aplicando-se as suposições de Dupuit, pode-se considerar a carga hidráulica ao longo de uma linha vertical como constante e o escoamento como sendo horizontal.

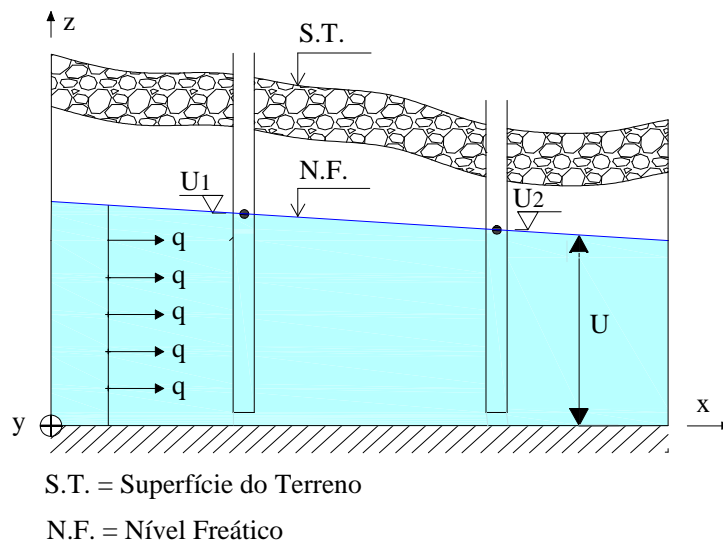


Figura 2.17 – Modelo horizontal de escoamento em aquífero não-confinado.

Levando-se em conta que ao longo de uma superfície livre atua a pressão atmosférica, a carga hidráulica U pode ser considerada como a altura do aquífero. Aplicando-se as mesmas condições usadas na equação (2.50), com a diferença de que o coeficiente de armazenamento para este tipo de aquífero é a produção específica S_y conforme a equação (2.23) tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xx} U \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{yy} U \frac{\partial U}{\partial y} \right) + R_v U = S_y U \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2.55)$$

Fazendo $R = R_v \cdot U$ (recarga no modelo bidimensional) e aplicando a definição de produção específica S ($S = S_y \cdot U$) chega-se à equação

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xx} U \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{yy} U \frac{\partial U}{\partial y} \right) + R = S \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2.56)$$

Observando-se a equação (2.56) vê-se que ela é não-linear. No entanto, adotando-se a condutividade hidráulica como constante, e considerando que a variação espacial de U ($\partial U/\partial x$ e $\partial U/\partial y$) permanece pequena em relação ao valor de U , pode ser aplicada a relação

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial (U^2)}{\partial x} \quad (2.57)$$

de onde se obtém

$$\frac{\partial^2 (U^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (U^2)}{\partial y^2} + \frac{2R}{K} = \frac{2S}{K} \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2.58)$$

Utilizando uma nova variável $v = U^2$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{2R}{K} = \frac{S}{K\sqrt{v}} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2.59)$$

conhecida como equação bidimensional de Boussinesq, que pode ser resolvida através de técnicas de linearização.

CAPÍTULO 3

CONDUÇÃO DE CALOR EM SÓLIDOS

3.1– INTRODUÇÃO

A aplicação do modelo numérico proposto sobre um corpo com fluxo de calor transiente requer alguns conceitos básicos que serão aqui tratados. As propriedades dos materiais relacionadas à transmissão de calor são fundamentos básicos para a obtenção de bons resultados. Para isso as áreas de ciência e tecnologia dos países industrializados estão investindo muito em trabalhos de laboratório para medições mais precisas tanto de materiais já conhecidos como em materiais novos.

Cito aqui, como exemplo, o Instituto de Investigação e Desenvolvimento Tecnológico em Ciências da Construção, situado em Coimbra/Portugal, que foi recentemente criado, e possui um laboratório sofisticado de medição das propriedades térmicas dos materiais usados na construção civil.

O estudo da condução de calor em sólidos pode evoluir em paralelo com outras ciências, tais como o escoamento em meios porosos, por seguirem as mesmas leis. A Tabela 3.1 mostra as relações principais entre estes dois ramos do conhecimento.

As propriedades físicas, que determinam muitas das aplicações dos materiais, são aquelas relacionadas diretamente com as variações da temperatura. As propriedades de maior interesse, para a solução da condução de calor em sólidos, são a capacidade e a condutividade térmica. A revisão dos conceitos fundamentais está direcionada para a equação de condução de calor e para os princípios físicos que determinam as propriedades térmicas dos materiais.

Seguindo a metodologia científica tradicional, o estudo de qualquer ramo da física é iniciado com a separação de uma região limitada no espaço ou uma porção finita de matéria e a sua vizinhança. Esta porção, que é separada de forma idealizada e sobre a qual a atenção é focada, é chamada de sistema. Toda a parte externa, que tenha uma influência direta no comportamento do sistema, é denominada vizinhança ou ambiente. O passo seguinte consiste em descrever este sistema em termos de quantidades que permitirão analisar seu comportamento ou suas interações com o

ambiente. Em geral, existem dois pontos de vista para esta descrição: o macroscópico e o microscópico. A descrição macroscópica de um sistema envolve a especificação de poucas coordenadas fundamentais mensuráveis. As variáveis termodinâmicas de pressão, volume, temperatura, ou mesmo propriedades como a condutividade térmica de um sistema constituem exemplos típicos de coordenadas fundamentais mensuráveis de uma descrição macroscópica. Na chamada termodinâmica estatística, o sistema consiste de um grande número de moléculas, átomos ou partículas que coexistem dentro de um conjunto amplo de estados de energias, interagem entre si por meio de colisões ou por forças à distância e onde são aplicáveis os conceitos de probabilidades. Apesar das diferenças e aparentes incompatibilidades, ambos os pontos de vista, quando aplicados ao mesmo sistema, devem produzir as mesmas conclusões. A relação entre eles situa-se no fato que as poucas propriedades diretamente mensuráveis da descrição macroscópica são realmente valores médios, obtidos ao longo de um período de tempo, de características microscópicas. Enquanto os conceitos das propriedades microscópicas estão em revisão continuada, devidos aos avanços da investigação científica, os conceitos das propriedades macroscópicas mensuráveis permanecem e permanecerão sem alterações enquanto os sentidos humanos permanecem os mesmos. Do ponto de vista macroscópico, a transmissão de calor pode ser definida como a transmissão de energia de uma região para outra, resultante da diferença de temperatura entre elas. Geralmente, a literatura reconhece três modos distintos de transmissão de calor: condução, radiação e convecção.

A transmissão de calor pelo processo de condução de calor, um dos focos do presente trabalho, exige um meio material para sua realização.

Do ponto de vista microscópico e de acordo com a teoria cinética, a temperatura de um material é proporcional a energia cinética média de vibração de seus átomos ou moléculas. A energia intrínseca da matéria, em virtude da velocidade e posição relativa dos seus átomos, é chamada energia interna. Assim, quanto mais rápido vibram os átomos, maiores são as temperaturas e a energia interna. Quando os átomos em uma região adquirem uma energia cinética maior que a energia cinética média de átomos da região adjacente, conforme manifestado por uma diferença de temperatura, os átomos com maior energia transmitirão parte desta energia para os átomos da região de temperatura mais baixa. No processo de condução, a transmissão de calor pode ocorrer tendo a interação elástica entre os átomos ou os elétrons de condução como

elementos transportadores da energia entre as regiões de altas e baixas temperaturas. Independente do mecanismo exato, que de forma alguma é totalmente entendido, o efeito observável da condução do calor consiste na busca do equilíbrio da temperatura. Entretanto, se as diferenças de temperaturas são mantidas pela adição e remoção de calor em pontos diferentes do sistema, um fluxo contínuo de calor é estabelecido da região quente para a fria.

Tabela 3.1 – Comparação da condução de calor com escoamento em meios porosos.

VARIÁVEL	ESCOAMENTO EM MEIOS POROSOS	CONDUÇÃO DE CALOR
Potencial	Carga hidráulica	Temperatura
	h [m]	T [°C]
Quantidade transportada	Vazão de água	Fluxo de calor
	Q [m ³ s ⁻¹]	Q [W]
Propriedade física do meio	Condutividade hidráulica	Condutividade térmica
	K [m s ⁻¹]	K [W m ⁻¹ °C ⁻¹]
Relação entre o potencial e o fluxo	Lei de Darcy	Lei de Fourier
	$q = -K \nabla h$ [m s ⁻¹]	$q = -K \nabla T$ [W m ⁻²]
Quantidade armazenada	Armazenamento específico	Capacidade térmica
	S_s [m ⁻¹]	C_p [J °C ⁻¹]

Fonte: WANG e ANDERSON (1982)

O ramo da ciência que trata da relação entre calor e outras formas de energia é chamado termodinâmica. A primeira lei da termodinâmica estabelece que a energia não pode ser criada ou destruída, mas somente mudada de uma forma para outra. Esta lei governa quantitativamente todas as transformações de energia, mas não faz restrições quanto à direção destas transformações. Sabe-se, contudo, pela experiência, que nenhum processo é possível cujo resultado único seja a transmissão

líquida de calor de uma região de baixa temperatura para outra de temperatura mais alta. Esta assertiva, de comprovação experimental, é conhecida como a segunda lei da termodinâmica.

A energia térmica é transmitida sempre que existir uma diferença de temperatura no sistema ou quando dois sistemas com diferentes temperaturas são colocados em contato. O processo pelo qual a energia é transportada é chamado transmissão de calor. A energia que flui não pode ser medida ou observada diretamente, mas os efeitos por ela produzidos são suscetíveis de observação e de mensuração, como, por exemplo, a temperatura. O fluxo de calor é um processo por meio do qual a energia interna do sistema é alterada para mais ou para menos e, por conseqüência, sua temperatura.

3.2 – PROPRIEDADES TÉRMICAS

3.2.1 - Fluxo de calor

Em todo ponto de um corpo, considerado em primeira aproximação isotrópico e homogêneo, é possível identificar uma taxa de transferência de calor instantânea (em Watt, W, no Sistema Internacional de Unidades, SI). O termo fluxo de calor q (em W/m^2 , SI), refere-se ao transporte de energia através de uma superfície e na direção a ela perpendicular.

3.2.2 - Capacidade térmica e calor específico

Capacidade térmica ou capacidade calorífica é a grandeza física que determina a variação térmica de um sistema ao receber determinada quantidade de calor. Se o sistema material sofre uma mudança de temperatura de T_1 a T_2 durante a transferência de ΔQ unidades de calor (em condição de pressão constante), a capacidade térmica média $\overline{C_p}$ do sistema é definida pela equação da calorimetria:

$$\bar{C}_P = \frac{\Delta Q}{T_2 - T_1} = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \quad (3.1)$$

O valor momentâneo da capacidade térmica C_P , é definido por:

$$C_P = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{dQ}{dT} \quad (3.2)$$

O calor específico a pressão constante, c_p , relaciona-se com a capacidade térmica do sistema C_P por meio da expressão:

$$c_{p_z} = C_{p_z}/z \quad (3.3)$$

onde z é a massa, m , ou volume, V , ou número de moles, n , do material do sistema.

Na condição de pressão constante, esta equação permite definir o calor específico por unidade de massa c_{p_m} , o calor específico volumétrico c_{p_v} e o calor específico molar c_{p_n} , cujos valores estão inter-relacionados por meio de:

$$c_{p_m} = \frac{c_{p_v}}{\rho} = \frac{c_{p_n}}{M} \quad (3.4)$$

onde $\rho = m/V$ é a massa específica e M é o peso molecular do material no sistema. As unidades do calor específico são, portanto $\frac{J}{kg \cdot K}$, $\frac{J}{m^3 \cdot K}$ ou ainda $\frac{J}{mol \cdot K}$.

A partir das equações (3.2 e 3.3) são obtidas as expressões usuais de calorimetria:

$$dQ = m \cdot c_{p_m} \cdot dT \quad (3.5)$$

$$dQ = V \cdot c_{p_v} \cdot dT \quad (3.6)$$

$$dQ = n \cdot c_{p_n} \cdot dT \quad (3.7)$$

Na determinação da taxa de remoção de calor, $d\dot{Q}$ (em W), por um fluido refrigerante são utilizadas as vazões mássicas \dot{m} (kg/s), volumétricas \dot{V} (m^3/s) ou molares \dot{n} ($moles/s$).

O calor específico momentâneo é dependente da temperatura $c_p = c_p(T)$. Assim, para a mudança de temperatura do sistema entre T_1 e T_2 , a quantidade de calor envolvida é expressa como:

$$Q = z \cdot \int_{T_1}^{T_2} c_{Pz} \cdot dT \quad (3.8)$$

Os valores de calor específico, usualmente à pressão constante e por unidade de massa, são tabelados para faixas de temperatura e em relação a uma temperatura de referência T_{ref} . O valor tabelado corresponde ao valor médio dado por:

$$\overline{c_{Pm}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{1}{\Delta T} \int_{T_{ref}}^T c_{Pm} \cdot dT \quad (3.9)$$

onde ΔQ é a quantidade de calor envolvida no aumento de temperatura de $\Delta T = T - T_{ref}$, a pressão constante, de um sólido de massa m , inicialmente à temperatura T_{ref} .

O calor específico e outras propriedades de uma gama imensa de materiais pode ser encontrado em livros especializados como, por exemplo, BRADY, CLAUSER e VACCARI (2002).

3.2.3 - Condutividade térmica

De origem empírica, a relação básica para a transmissão de calor por condução foi introduzida na ciência pelo matemático francês J. B. J. Fourier em 1822. Com base no esquema da Figura 3.1 e em condições de estado estacionário, a equação de Fourier estabelece que a quantidade de calor dQ , fluindo por condução em um material, durante um intervalo de tempo dt , é igual ao produto da condutividade térmica K do material pela área A da seção através da qual flui por condução, medida perpendicularmente à direção de fluxo, e pelo gradiente de temperatura dT/dx , isto é, a razão local entre a variação de temperatura, dT , por variação da posição, dx , na direção do fluxo de calor x . Esta formulação é dada pela seguinte expressão (LIENHARD IV e LIENHARD V, 2005):

$$dQ = -A \cdot \left(K \cdot \frac{dT}{dx} \right) \cdot dt \quad (3.10)$$

onde o sinal (-) indica que o fluxo de calor ocorre em sentido contrário ao sentido do aumento da temperatura.

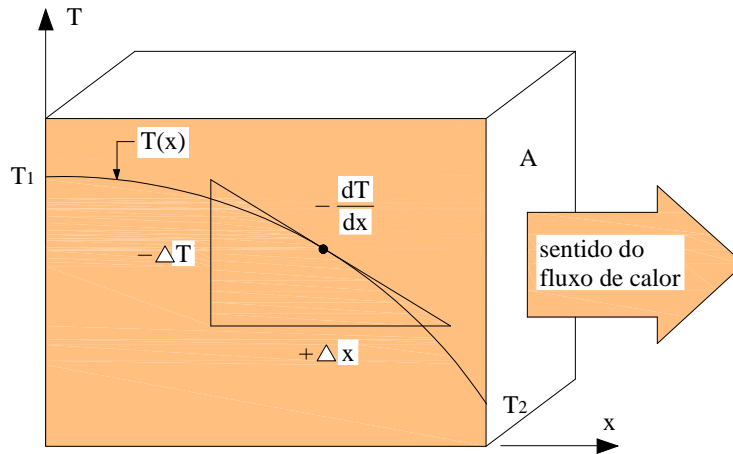


Figura 3.1 – Ilustração sobre a equação de Fourier: $-\frac{dT}{dx} = \frac{q}{K}$

O elemento infinitesimal da Figura 3.2 ilustra o balanço de energia para o fluxo de calor unidirecional e variável no tempo. Este balanço envolve três quantidades de calor descritas a seguir nos itens 1, 2 e 3:

(1) O calor que entra no elemento pela face de entrada na posição x , dada pela equação (3.11):

$$Q_e = -A \left(K \frac{dT}{dx} \right)_x dt \quad (3.11)$$

onde $A = dy \cdot dz$ é a área e $\left(K \cdot \frac{dT}{dx} \right)_x$ representa o fluxo de calor, avaliado na posição x e tem unidades de $\frac{W}{m \cdot K} \cdot \frac{K}{m} = \frac{W}{m^2}$. A equação (3.11) tem, portanto, a unidade de energia: $m^2 \cdot \left(\frac{W}{m^2} \right) \cdot s = W \cdot s = J$.

(2) O calor que sai do elemento pela face de saída na posição $x + dx$:

$$Q_s = -A \cdot \left(K \cdot \frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} \cdot dt = -A \cdot \left[\left(K \cdot \frac{dT}{dx} \right)_x + \frac{d \left(K \cdot \frac{dT}{dx} \right)}{dx} \cdot dx \right] \cdot dt \quad (3.12)$$

onde o termo entre colchetes representa a avaliação do fluxo de calor na posição $x + dx$. Este fluxo é composto pelo fluxo de calor na face de entrada em x e o incremento do fluxo de calor ao longo do infinitésimo dx .

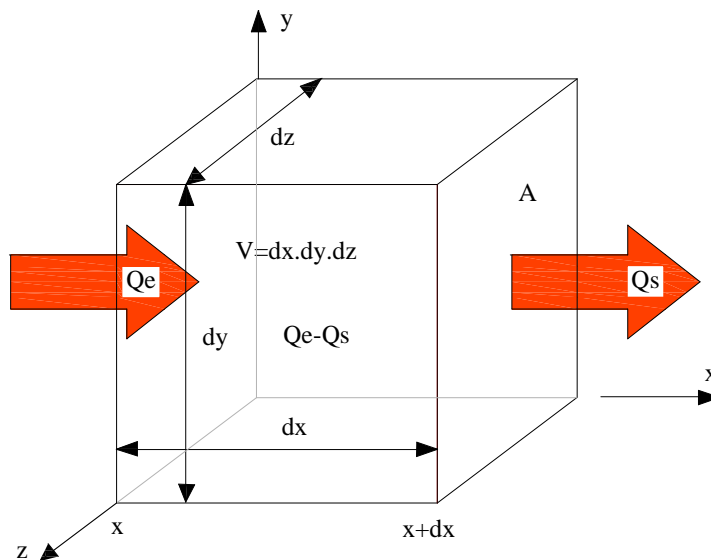


Figura 3.2 – Balanço de energia em um sistema infinitesimal dx, dy, dz .

(3) O calor convertido em energia interna e responsável pela variação da temperatura:

$$Q_e - Q_s = V \cdot \left(\rho \cdot c_{p.m} \cdot \frac{dT}{dt} \right) \cdot dt \quad (3.13)$$

onde $V = dx \cdot dy \cdot dz$ e a unidade de calor da equação (3.13) é dada por

$$\Delta Q = m^3 \cdot \left(\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{J}{kg \cdot K} \cdot \frac{K}{s} \right) \cdot s = J \quad (3.14)$$

3.2.4 – Difusividade térmica

A difusividade térmica é uma constante α que foi chamada por Kelvin (1863, apud STACEY, 2000) de difusividade da substância e é dada pela seguinte expressão

$$\alpha = \frac{K}{\rho \cdot c_p} \quad (3.15)$$

onde K é a condutividade térmica, ρ a massa específica do material e c_p o calor específico a pressão constante.

CAPÍTULO 4

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

4.1 – INTRODUÇÃO

Aqui é apresentado o Método dos Elementos de Contorno para a solução da equação da difusão transiente com solução fundamental dependente do tempo. A equação integral de contorno é aproximada por elementos lineares, ou seja, o contorno é aproximado por n segmentos de reta (elementos do contorno, ver Figura 4.1) e as incógnitas são avaliadas em cada um dos pontos de ligação entre dois elementos consecutivos (nós funcionais coincidindo com os nós geométricos). Pode-se ver, por exemplo, na Figura 4.4(a) o ponto j entre os elementos p e q .

Está sendo procurada a solução da equação da difusão transiente definida abaixo com condições de contorno, iniciais e de recarga estabelecidas em um domínio bidimensional de material isotrópico e homogêneo a partir de um tempo t :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{R(x, y, t)}{K} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (4.1)$$

equivalente a:

$$\nabla^2 U(x, y, t) + \frac{R}{K} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \text{ no domínio } \Omega, t > 0 \quad (4.2)$$

com as condições de contorno essenciais ou de Dirichlet:

$$U(x, y, t) = \bar{U}(x, y, t), \quad \text{em } \Gamma_u, \quad t > 0, \quad (4.3)$$

com as condições de contorno naturais ou de Neumann:

$$q(x, y, t) = \bar{q}(x, y, t), \quad \text{em } \Gamma_q, \quad t > 0, \quad (4.4)$$

com a condição inicial:

$$U(x, y, t) = U_0(x, y), \quad \text{para } t = 0, \text{ no domínio } \Omega \quad (4.5)$$

e com a fonte:

$$R(x, y, t)/K = \bar{R}(x, y), \quad \text{para } t_1 < t < t_2, \quad \text{no domínio } \Omega \quad (4.6)$$

onde U é o potencial, R/K o termo fonte e $\frac{\partial}{\partial n_i}$ representa uma derivada normal à superfície de contorno e no sentido para fora do domínio. Os termos $\bar{U}, \bar{q}, \bar{R}$ são constantes. $\Gamma_i, i = 1, 2, \dots, N$ representa o contorno constituído de N elementos de contorno que limitam o domínio. O contorno Γ_i é chamado de Γ_u quando as condições de contorno conhecidas são os potenciais dos pontos pertencentes a este contorno e Γ_q quando as condições de contorno conhecidas forem o fluxo. A difusividade α é considerada constante no tempo e no espaço.

BREBBIA (1984, página 141) apresenta três alternativas para resolver este problema. A primeira remove a dependência do tempo por meio da Transformada de Laplace. A segunda utiliza a aproximação de diferenças finitas para retirar a dependência do tempo, porém para se ter um resultado bom demanda um dt pequeno. A terceira utiliza a solução fundamental dependente do tempo e é esta que será adotada.

Usando o Método dos Resíduos Ponderados (MRP) para resolver a equação (4.1) combinada com as condições dadas nas equações (4.3, 4.4, 4.5 e 4.6) e considerando sua dependência do tempo obtém-se a seguinte integral:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Omega} \left[\nabla^2 U(x, t) + \frac{R}{K} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right] U^*(\xi, x, t_F, t) d\Omega(x) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma_q} [q(x, t) - \bar{q}(x, t)] U^*(\xi, x, t_F, t) d\Gamma(x) dt \\ & - \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma_u} [U(x, t) - \bar{U}(x, t)] q^*(\xi, x, t_F, t) d\Gamma(x) dt \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde:

$$q^*(\xi, x, t_F, t) = \frac{\partial U^*(\xi, x, t_F, t)}{\partial n(x)} \quad (4.8)$$

Integrando por partes duas vezes o Laplaciano e uma vez (BREBBIA, 1984, pag. 147) a derivada no tempo a equação (4.7) fica:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Omega} \left[\nabla^2 U^*(\xi, x, t_F, t) + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U^*(\xi, x, t_F, t)}{\partial t} \right] U(x, t) d\Omega(x) dt \\ & + \left[\int_{\Omega} \frac{R}{K}(x, t) U^*(\xi, x, t_F, t) d\Omega(x) \right]_{t=t_0}^{t=t_F} \\ & - \frac{1}{\alpha} \left[\int_{\Omega} U(x, t) U^*(\xi, x, t_F, t) d\Omega(x) \right]_{t=t_0}^{t=t_F} = \quad (4.9) \\ & - \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} q(x, t) U^*(\xi, x, t_F, t) d\Gamma(x) dt \\ & + \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} U(x, t) q^*(\xi, x, t_F, t) d\Gamma(x) dt \end{aligned}$$

A solução fundamental dependente do tempo U^* para o domínio bidimensional é a seguinte (BREBBIA, 1984, pag. 148):

$$U^*(\xi, x, t_F, t) = \frac{1}{4\pi\alpha\tau} \exp\left[\frac{-r^2(\xi, x)}{4\alpha\tau}\right] H(\tau) \quad (4.10)$$

onde $\tau = t_F - t$. A função Heaviside $H(\tau)$ indica que a solução é zero para $t > t_F$, ou seja, mostra que não pode haver resposta antes de ocorrer a aplicação da fonte pontual.

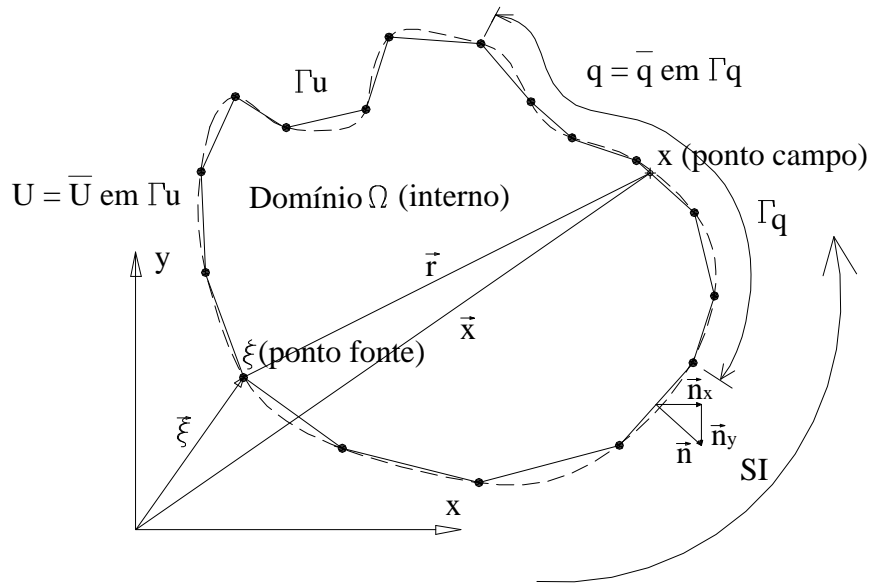


Figura 4.1 - Domínio 2D: Contorno Γ_q e Γ_u . Ponto fonte ξ e ponto campo x .
 SI=Sentido de Integração. Normal ao contorno \vec{n} e cossenos diretores \vec{n}_x e \vec{n}_y . Linha tracejada = domínio real.

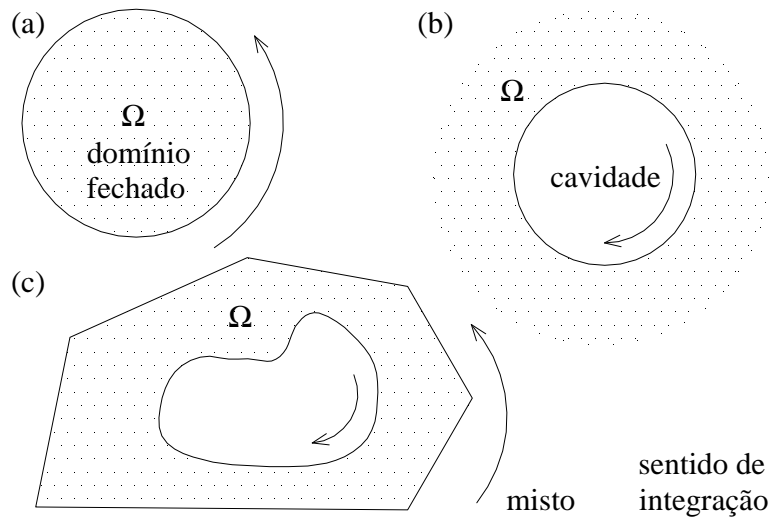


Figura 4.2 – Sentido de integração em função do domínio adotado.

A solução fundamental possui as seguintes propriedades (BREBBIA, 1984, pag. 148):

$$\alpha \nabla^2 U^*(\xi, x, t_F, t) + \frac{\partial U^*(\xi, x, t_F, t)}{\partial t} = -\delta(\xi, x) \delta(t_F, t) \quad (4.11)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_F} U^*(\xi, x, t_F, t) = \delta(\xi, x) \quad (4.12)$$

Para evitar a singularidade que ocorre na integração da equação (4.9) no tempo $t = t_F$, ou seja, no ponto de aplicação da função delta de Dirac, deve-se subtrair ou adicionar ao limite superior desta integral uma quantidade arbitrariamente pequena ε . A integração da primeira integral do lado esquerdo será identicamente zero para t no intervalo $0, t_F - \varepsilon$ e, tomando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e levando em conta a equação (4.12) obtém-se (BREBBIA, 1984, página 148):

$$\begin{aligned} U(\xi, t_F) + \alpha \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} U(x, t) q^*(\xi, x, t_F, t) d\Gamma(x) dt \\ = \alpha \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} q(x, t) U^*(\xi, x, t_F, t) d\Gamma(x) dt \\ + \int_{\Omega} U_0(x, t_0) U^*(\xi, x, t_F, t_0) d\Omega(x) \\ + \int_{\Omega} \bar{R}(x, t) U^*(\xi, x, t_F, t) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Colocando o ponto fonte ξ da equação (4.13) no contorno retirando-o do domínio através de um setor circular de raio ε , analisando cuidadosamente as funções envolvidas quando ε tende a zero e levando em conta o sentido de integração (Figura 4.2), esta equação passa a representar a solução numérica do problema como indicado abaixo:

$$c(\xi)U(\xi, t_F) + \alpha \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} U(x, t) q^*(\xi, x, t_F, t) d\Gamma(x) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} q(x, t) U^*(\xi, x, t_F, t) d\Gamma(x) dt \\
&+ \int_{\Omega} U_0(x, t_0) U^*(\xi, x, t_F, t_0) d\Omega(x) \\
&+ \int_{\Omega} \bar{R}(x, t_0) U^*(\xi, x, t_F, t) d\Omega(x)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

onde $c(\xi)$ é função do ângulo interno \hat{B} no ponto B (Figura 4.3).

$$\begin{aligned}
c(\xi) &= 0 \quad \text{se } \xi \text{ é um ponto externo} \quad (\xi \ni (\Omega + \Gamma)) \\
c(\xi) &= \frac{\hat{B}}{2\pi} \quad \text{se } \xi \text{ é um ponto do contorno} \quad (\xi \in \Gamma) \\
c(\xi) &= 1 \quad \text{se } \xi \text{ é um ponto interno} \quad (\xi \in \Omega)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

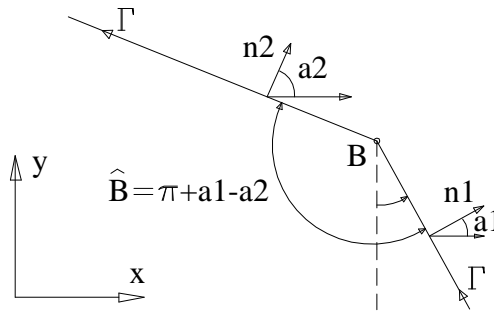


Figura 4.3 - Contorno Γ . Ângulo interno \hat{B}

Dois modos de marcha no tempo podem ser adotados para resolver as integrais da equação (4.14). Ambos adotam a técnica de marcha no tempo onde é assumido que a função U e q variam dentro de cada passo no tempo de acordo com uma função de interpolação que pode ser constante ou de ordem maior. Assumindo uma função de ponderação no tempo na primeira e na segunda integral da equação (4.14) as integrais em $U(x, y, t)$ e $q(x, y, t)$ saem de dentro da integral em relação ao tempo, e então, pode-se integrar q^* e U^* analiticamente, desde que as funções de ponderação escolhidas não sejam muito complicadas. O primeiro modo, que será adotado neste trabalho, será o que trata cada passo no tempo como um novo problema. Para isso deve-se calcular o

potencial U em um número suficiente de pontos internos com a finalidade de usá-los como pseudo-inicial valores para o próximo passo de tempo. O segundo modo, que aqui não será tratado, considera o processo de integração iniciando sempre do tempo inicial do problema t_0 , em que U_0 pode ser zero ou não. Nesse, o problema pode evoluir no tempo somente calculando os pontos do contorno.

A solução numérica da equação (4.14) pode ser levada a efeito discretizando o contorno em uma série de elementos. O elemento usado aqui será o linear (segmento de reta com dois nós extremos). Assume-se que as funções U e q de cada elemento e em cada passo de tempo irão variar de acordo com as seguintes funções de interpolação:

$$U = \{\phi\}^T \{\psi\} \{U\}_m^n \quad (4.16)$$

$$q = \{\phi\}^T \{\psi\} \{q\}_m^n$$

onde $\{\phi\}^T$ e $\{\psi\}$ são respectivamente, funções de interpolação no espaço e no tempo. O índice n refere-se ao número do nó do contorno em cada elemento ao qual o valor nodal U e q são associados. O índice m refere-se ao grau de variação da função tempo ψ . $m = 1$ se a função é constante, $m = 1$ e 2 se a função é linear, etc.

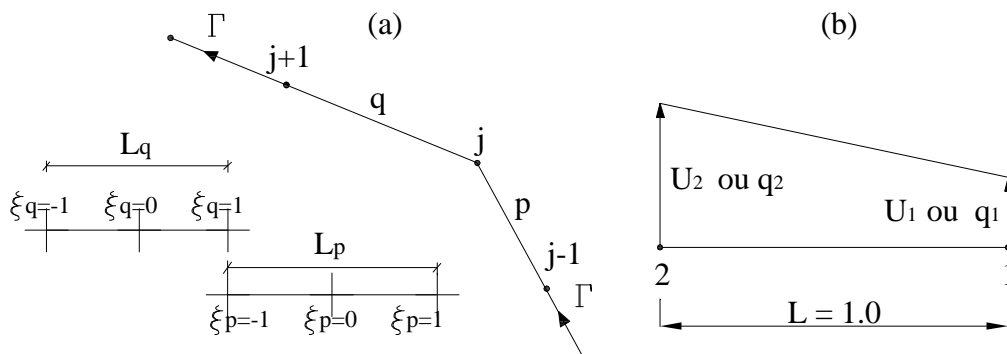


Figura 4.4 (a) Contorno Γ e a seqüência de integração no elemento linear e (b) representação do potencial ou fluxo nos nós do elemento linear.

A solução fundamental e sua derivada normal para este problema bidimensional são apresentadas em BREBBIA (1984, p. 150):

$$U^*(\xi, x, t_F, t) = \frac{1}{4\pi\alpha\tau} \exp\left[\frac{-r^2(\xi, x)}{4\alpha\tau}\right] \quad (4.17)$$

$$q^*(\xi, x, t_F, t) = \frac{d(\xi, x)}{8\pi\alpha^2\tau^2} \exp\left[\frac{-r^2(\xi, x)}{4\alpha\tau}\right] \quad (4.18)$$

onde r é a distância entre o ponto fonte ξ e o ponto campo x (Figura 4.1) assim calculada:

$$r(\xi, x) = \sqrt{[x(\xi) - x(x)]^2 + [y(\xi) - y(x)]^2}, \quad (4.19)$$

$\tau = t_F - t$ e $d(\xi, x)$ é a projeção da distância r sobre a normal ao contorno:

$$d(\xi, x) = [x(\xi) - x(x)] n_x + [y(\xi) - y(x)] n_y \quad (4.20)$$

onde n_x é o cosseno diretor da normal ao elemento ao qual o ponto campo pertence em relação ao eixo x e n_y é o cosseno diretor desta normal em relação ao eixo y .

Discretizando o contorno Γ em M elementos, N nós, o domínio em L células triangulares e o tempo em F passos de tempo, a substituição da equação (4.16) na equação (4.14) conduz a (BREBBIA, 1984, página 150):

$$\begin{aligned} c_i U_F^i + \alpha \sum_{m=1}^M \left(\int_{\Gamma_m} \{\phi\}^T \int_{t_{F-1}}^{t_F} q^* \{\psi\} dt d\Gamma \right) \{U\}^n \\ = \alpha \sum_{m=1}^M \left(\int_{\Gamma_m} \{\phi\}^T \int_{t_{F-1}}^{t_F} U^* \{\psi\} dt d\Gamma \right) \{q\}^n \\ + \sum_{\ell=1}^L \int_{\Omega_\ell} U^* \{U_{F-1}\} d\Omega \\ + \sum_{\ell=1}^L \int_{\Omega_\ell} U^* \{R_{F-1}\} d\Omega \end{aligned} \quad (4.21)$$

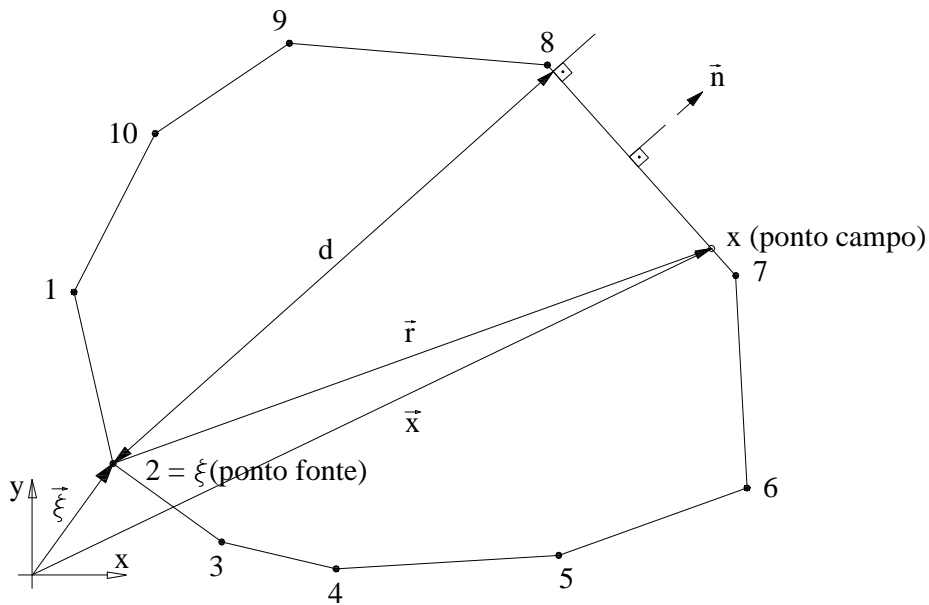


Figura 4.5 – Distância d entre o ponto fonte e o elemento ao qual pertence o ponto campo.

4.2 - INTEGRAÇÃO NO TEMPO

A função de interpolação no tempo, escolhida para este trabalho, é constante e unitária. Esta hipótese supõe que as funções U e q permanecem constante em cada passo no tempo, isto é, a função de interpolação $\{\psi\} = 1$. Aplicando a equação (4.21) em todos os N nós do contorno o seguinte sistema de equações é obtido:

$$[H]\{U_F\} = [G]\{q_F\} + [P]\{\bar{U}_{F-1}\} + [P]\{\bar{R}_{F-1}\} \quad (4.22)$$

No programa desenvolvido as matrizes $[G]$, $[H]$ e $[P]$ acima foram denominadas $[G_L]$, $[H_L]$ e $[M_{BI}]$. Para simplificar o termo constante α da equação (4.21) foi passado

para dentro da integral do tempo. Os coeficientes das matrizes $[H]$, $[G]$, $[P]$ e $[R]$ são assim constituídos:

$$\hat{h}_{ij} = \int_{\Gamma} \{\phi\}_2 \int_{t_{F-1}}^{t_F} \alpha q^*(i, x, t_F, t) dt d\Gamma \quad (4.23)$$

$$g_{ij} = \int_{\Gamma} \{\phi\}_2 \int_{t_{F-1}}^{t_F} \alpha U^*(i, x, t_F, t) dt d\Gamma \quad (4.24)$$

$$R_{ij} = P_{ij} = \int_{\Omega_f} U^*(i, x, t_F, t_{F-1}) d\Omega \quad (4.25)$$

onde $\{\phi\}_2$ indica que será usada uma função de interpolação linear na integração do espaço. O termo $[H]$ da equação (4.22) é constituído por

$$h_{ij} = \hat{h}_{ij} + c_i \quad (4.26)$$

A integração no tempo da equação (4.23) pode ser resolvida analiticamente sabendo-se que o valor de q^* é dado pela equação (4.18). A integração em q^* apresenta o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \alpha q^* dt &= \frac{\alpha d}{2\pi\alpha r^2} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{r^2}{4\alpha\tau^2} \exp\left(\frac{-r^2}{4\alpha\tau}\right) dt \\ &= \frac{d}{2\pi r^2} [\exp(-a_{f-1}) - \exp(-a_f)] \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde

$$a_f = \frac{r^2}{4\alpha(t_F - t_f)} \quad (4.28)$$

e

$$d = [(x_i - x_1)(y_2 - y_1) + (y_i - y_1)(x_1 - x_2)]/L_p \quad (4.29)$$

Os índices possuem o seguinte significado: i corresponde ao ponto fonte e p o elemento onde situa-se o ponto campo. x_i é a coordenada x do ponto i e x_1 é a coordenada x do nó um do elemento. Aplica-se o mesmo raciocínio para y_i . L_p é o comprimento do elemento p .

Para integrar a equação (4.24) no tempo é necessário fazer uma mudança de variável. Chamando

$$z = \frac{r^2}{4\alpha\tau} \quad (4.30)$$

a equação integral de U^* no tempo fornece:

$$\begin{aligned} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \alpha U^* dt &= \frac{\alpha}{\pi r^2} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{r^2}{4\alpha\tau} \exp\left(\frac{-r^2}{4\alpha\tau}\right) dt \\ &= \frac{\alpha}{4\pi\alpha} \int_{a_{f-1}}^{a_f} \frac{e^{-z}}{z} dz = \frac{1}{4\pi} [E_1(a_{f-1}) - E_1(a_f)] \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde E_1 é a função exponencial integral, que pode ser encontrada em livros clássicos de Matemática, por exemplo ABRAMOWITZ (1977). Cabe observar que $\exp(-a_f) = 0$ devido a definição de a_f na equação (4.28). Verificando:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\exp(-a_f)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\exp(a_f)} \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{4\pi\epsilon}{r^2} \right] = 0 \quad (4.32)$$

onde $\epsilon = t_{F+\epsilon} - t_F$, e representa um raio de círculo centrado no ponto fonte e no tempo t_F , tão pequeno quanto possível, usado na dedução da integral de contorno, equação (4.13), para evitar a singularidade que ocorreria na integração da equação (4.9). De forma semelhante constata-se que $E_1(a_f) = 0$ na equação (4.31).

4.3 – INTEGRAÇÃO NO ESPAÇO

Após ser obtida uma solução para a integral no tempo, a integração no espaço será levada a efeito. A função de interpolação adotada será

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad \phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.33)$$

Os termos da matriz $[H]$ e $[G]$, respectivamente H_{ij} e G_{ij} excluindo os termos singulares $i = j$ da equação (4.22) podem assim ser calculados:

$$\begin{aligned} H_{ij} &= h_{ip}^2 + h_{iq}^1 \\ G_{ij} &= g_{ip}^2 + g_{iq}^1 \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde os índices p e q se referem a dois elementos consecutivos do contorno que se interceptam no nó j , conforme mostra a Figura 4.4.a. Considerando M como o número de pontos de Gauss que será usado para executar a integração por Quadratura de Gauss, os valores dos coeficientes das matrizes $[H]$ e $[G]$ podem ser escritos como:

$$h_{ip}^1 = \frac{d_{ip}}{4\pi} \sum_{m=1}^M \frac{1}{r_{im}^2} [\exp(-a_{f-1}) - \exp(-a_f)]_m \phi_m^1 W_m \quad (4.35)$$

$$h_{ip}^2 = \frac{d_{ip}}{4\pi} \sum_{m=1}^M \frac{1}{r_{im}^2} [\exp(-a_{f-1}) - \exp(-a_f)]_m \phi_m^2 W_m \quad (4.36)$$

$$g_{ip}^1 = \frac{L_p}{8\pi} \sum_{m=1}^M [E_1(a_{f-1}) - E_1(a_f)]_m \phi_m^1 W_m \quad (4.37)$$

$$g_{ip}^2 = \frac{L_p}{8\pi} \sum_{m=1}^M [E_1(a_{f-1}) - E_1(a_f)]_m \phi_m^2 W_m \quad (4.38)$$

WROBEL (1981) sugere o uso de seis pontos de Gauss para o uso da quadratura de Gauss no cálculo de h e g . Foi observado neste trabalho que este valor é suficiente. Porém, para os cálculos das integrais de domínio, nas quais foi usado o cálculo das áreas com o método da quadratura de Gauss e que serão deduzidas mais a frente, foram necessários até doze pontos para obter cálculos de área com erros menores que 0.01%. Nas equações (4.35-4.36) $\frac{d_{ip}}{4\pi} = \frac{L_p}{2} \frac{d}{2\pi}$, nas equações (4.37-4.38) o termo $\frac{L_p}{8\pi} = \frac{L_p}{2} \frac{1}{4\pi}$, onde o termo $\frac{L_p}{2}$ corresponde ao Jacobiano da transformação de coordenadas para integrar por Gauss, e nas equações (4.35,4.36,4.37 e 4.38) W_m é o valor do peso correspondente a coordenada de Gauss que será aplicada na função ϕ_m .

Os termos G_{ii} são (WROBEL, 1981, pag. 131):

$$G_{ii} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{L_p}{4} \int_{-1}^1 E_1 \left[\frac{\eta_p (1 - \xi_p)^2}{4} \right] (1 + \xi_p) d\xi \right. \\ \left. + \frac{L_q}{4} \int_{-1}^1 E_1 \left[\frac{\eta_q (1 + \xi_q)^2}{4} \right] (1 - \xi_q) d\xi \right\} \quad (4.39)$$

onde

$$\eta_p = \frac{L_p^2}{4\alpha\Delta t} \quad e \quad \eta_q = \frac{L_q^2}{4\alpha\Delta t} \quad (4.40)$$

e a exponencial integral $E_1(x)$ pode ser calculada usando séries (BREBBIA, 1984):

$$E_1(x) = -C - \log_e(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n n!} \quad (4.41)$$

onde $C = 0,57721566\dots$ é a constante de Euler. A equação (4.39) pode ser calculada usando o procedimento da quadratura Gaussiana:

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n W_i g(\xi_i) \quad (4.42)$$

onde W_i é o peso de Gauss e ξ_i é o ponto de Gauss. Outra técnica de encontrar G_{ii} foi apresentada em BREBBIA (1984), mas aqui não foi utilizada.

Para elementos lineares os termos \hat{H}_{ii} são nulos devido a ortogonalidade entre r e n , o que faz com que $d = 0$ na equação (4.18). Então, o valor de $H_{ii} = \hat{H}_{ii} + c_i = c_i$, onde o valor de c_i é aquele dado na equação (4.15).

4.4 – INTEGRAÇÃO DA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL NO DOMÍNIO

4.4.1 - Integral de Domínio

Seja considerar a seguinte equação de domínio:

$$P_{\xi} = \int_{\Omega} p U^* d\Omega = \sum_{c=1}^{NrCel} \int_{\Omega_c} (p_1 N_1 + p_2 N_2 + p_3 N_3) U^* d\Omega_c \quad (4.43)$$

onde p_i é uma constante conhecida para cada nó das células que dividem o domínio. Para a integral de área que será resolvida convém interpolar o valor de p segundo uma função de interpolação adequada. Serão escolhidas funções de interpolação N_i que tem valor unitário no nó correspondente ao seu índice e valor zero nos outros nós. O valor de P_{ξ} corresponde ao coeficiente de influência da força de campo p_i sobre o ponto fonte ξ . Como p_i é constante ele pode sair da integral e obtém-se um somatório de integrais como abaixo:

$$P_{\xi} = \sum_{c=1}^{NrCel} p_1 \int_{\Omega_c} N_1 U^* d\Omega_c + p_2 \int_{\Omega_c} N_2 U^* d\Omega_c + p_3 \int_{\Omega_c} N_3 U^* d\Omega_c \quad (4.44)$$

onde Ω_c refere-se a integral de área na célula. Resumindo obtém-se:

$$P_{\xi} = \sum_{c=1}^{NrCel} \{p_1 \ p_2 \ p_3\} (I_1 \ I_2 \ I_3)^T \quad (4.45)$$

onde

$$I_i = \int_{\Omega_c} N_i U^* d\Omega_c \quad (4.46)$$

Para se obter a influência dos pontos de cada célula no ponto fonte, calcula-se as integrais I_1 , I_2 , e I_3 e coloca-se seus valores acumulados em um vetor coluna global, cuja posição é dada pelo número do nó no sistema global. Ao final dos cálculos haverá uma matriz de influência com um número de linhas correspondentes aos pontos fontes e um número de colunas correspondente ao número de nós globais. O produto desta matriz pelo vetor de valores de potencial em cada ponto do sistema global, vetor $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_M\}$ onde M é o número de nós global, dará o valor desejado. Usando a Figura 4.6 para explicar, e supondo que os pontos fontes são os pontos do contorno (12 pontos), a matriz $[P]$ formada teria uma dimensão 12 linhas por 15 colunas. O

vetor $\{p\}$ teria 15 elementos. O produto $[P] \{p\}$ apresentaria o vetor solução para a integral da equação (4.43).

O que será calculado aqui é uma matriz que represente a integral da equação (4.25) para todo o domínio e que quando multiplicada pelo vetor de condições iniciais U_{F-1} fornece a influência das condições iniciais no contorno. A recarga também usará esta matriz para adicionar potencial ao domínio. Então a integral a ser considerada é:

$$P_{\xi} = \int_{\Omega} U^* d\Omega = \sum_{c=1}^{NrCel} \sum_{m=1}^3 \int_{\Omega_c} N_m U^* d\Omega_c \quad (4.47)$$

A solução fundamental foi dada na equação (4.10) e adotar-se-á as seguintes constantes para tornar conciso os cálculos que virão:

$$v_2 = \frac{1}{4\alpha\tau} \quad e \quad v_1 = \frac{1}{4\alpha\pi\tau} = \frac{v_2}{\pi} \quad (4.48)$$

ficando a solução fundamental assim:

$$U^*(\xi, x, t_F, t) = \frac{1}{4\pi\alpha\tau} \exp\left[\frac{-r^2(\xi, x)}{4\alpha\tau}\right] = U^* = v_1 \exp(-v_2 r^2) \quad (4.49)$$

Passando a equação (4.44) do sistema de coordenadas cartesianas para o sistema de coordenadas cilíndricas, obtém-se:

$$P_{\xi} = \sum_{c=1}^{NrCel} \sum_{m=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \int_{\theta_{\gamma}}^{\theta_{\lambda}} \int_0^{R_{\beta}(\theta)} N_m U^* r dr d\theta \quad (4.50)$$

onde r corresponde a distância entre o ponto fonte ξ e o ponto campo de coordenadas (x, y) . Deve-se lembrar que o sistema de coordenadas cilíndricas tem por origem cada ponto fonte ξ . Essa informação já está considerada na equação a seguir (MANSUR, 1983, pag. 85):

$$R_{\beta}(\theta) = \frac{-2A_{\beta}}{b_{\beta} \cos(\theta) + a_{\beta} \sin(\theta)} \quad (4.51)$$

onde

$$a_{\beta} = x_{\lambda} - x_{\gamma} \quad (4.52)$$

$$b_{\beta} = y_{\gamma} - y_{\lambda} \quad (4.53)$$

$$2A_{\beta} = x_{\gamma} y_{\lambda} - x_{\lambda} y_{\gamma} \quad (4.54)$$

As correspondências entre os índices β , γ e λ são apresentadas pela Tabela 4.1, onde os números 1, 2 e 3 correspondem aos 3 pontos da célula triangular (Figura 4.7 (e)).

Tabela 4.1 – Tabela que relaciona β , γ e λ

β	γ	λ
1	2	3
2	3	1
3	1	2

A integral de área I_1 será obtida assim:

$$I_{m=1} = \int_{\Omega_c} N_{m=1} U^* d\Omega \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} I_{m=1} &= \int_{\theta_2}^{\theta_3} \int_0^{R_{\beta=1}(\theta)} N_{m=1} U^* r dr d\theta \\ &+ \int_{\theta_3}^{\theta_1} \int_0^{R_{\beta=2}(\theta)} N_{m=1} U^* r dr d\theta \\ &+ \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{R_{\beta=3}(\theta)} N_{m=1} U^* r dr d\theta \end{aligned} \quad (4.56)$$

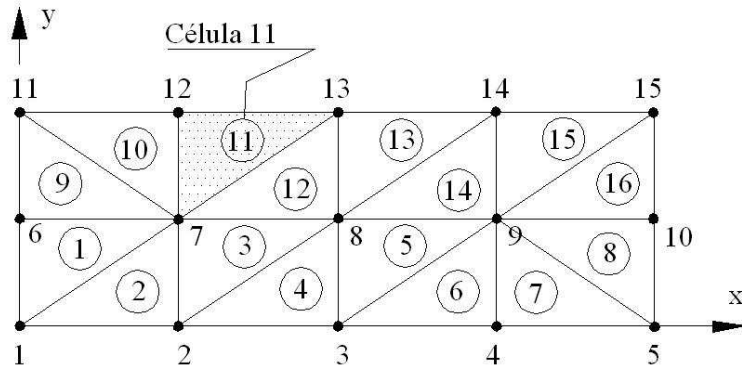


Figura 4.6 - Elemento linear no contorno e células no domínio

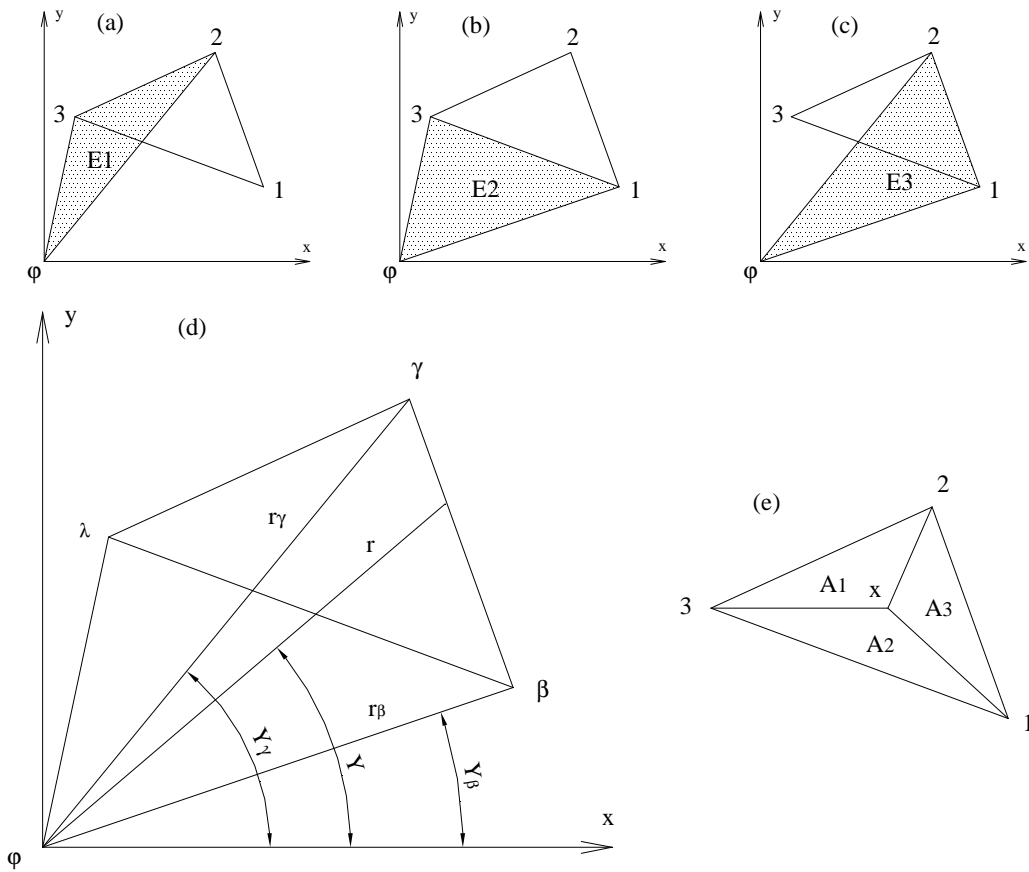


Figura 4.7 - (a), (b), (c) Células auxiliares para cálculo das integrais no domínio, (d) Ponto fonte ξ como origem do sistema para integração, (e) Sistema de coordenadas triangulares para o ponto x .

simplificadamente $I_{m=1}$ é dada por

$$I_{m=1} = J_{m=1,\beta=1} + J_{m=1,\beta=2} + J_{m=1,\beta=3} \quad (4.57)$$

A integral de área $I_{m=2}$ será obtida da mesma forma:

$$I_{m=2} = \int_{\Omega_c} N_{m=2} U^* d\Omega \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} I_{m=2} &= \int_{\theta_2}^{\theta_3} \int_0^{R_{\beta=1}(\theta)} N_{m=2} U^* r dr d\theta \\ &+ \int_{\theta_3}^{\theta_1} \int_0^{R_{\beta=2}(\theta)} N_{m=2} U^* r dr d\theta \\ &+ \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{R_{\beta=3}(\theta)} N_{m=2} U^* r dr d\theta \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$I_{m=2} = J_{m=2,\beta=1} + J_{m=2,\beta=2} + J_{m=2,\beta=3} \quad (4.60)$$

E a integral de área $I_{m=3}$ também:

$$I_{m=3} = \int_{\Omega_c} N_{m=3} U^* d\Omega \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} I_{m=3} &= \int_{\theta_2}^{\theta_3} \int_0^{R_{\beta=1}(\theta)} N_{m=3} U^* r dr d\theta \\ &+ \int_{\theta_3}^{\theta_1} \int_0^{R_{\beta=2}(\theta)} N_{m=3} U^* r dr d\theta \\ &+ \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{R_{\beta=3}(\theta)} N_{m=3} U^* r dr d\theta \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$I_{m=3} = J_{m=3,\beta=1} + J_{m=3,\beta=2} + J_{m=3,\beta=3} \quad (4.63)$$

É importante salientar os valores dos ângulos dos limites superior e inferior das integrais. Para J_{11}, J_{21} e J_{31} o ângulo limite superior da integral é θ_3 , e o

ângulo limite inferior é θ_2 . Para a integral interna, dependente de r , o limite superior é $R_1(\theta)$ e o limite inferior é zero. De forma geral é assim:

Tabela 4.2 - Integral J e o valor dos ângulos superior e inferior

J	ângulo superior	ângulo inferior	r superior	r inferior
$J_{m=1,\beta=1}, J_{m=2,\beta=1}, J_{m=3,\beta=1}$	θ_3	θ_2	$R_{\beta=1}(\theta)$	0
$J_{m=1,\beta=2}, J_{m=2,\beta=2}, J_{m=3,\beta=2}$	θ_1	θ_3	$R_{\beta=2}(\theta)$	0
$J_{m=1,\beta=3}, J_{m=2,\beta=3}, J_{m=3,\beta=3}$	θ_2	θ_1	$R_{\beta=3}(\theta)$	0

As três funções de ponderação escolhidas para este problema são:

$$N_{m=\beta} = \frac{A_{m=\beta}}{A} + \frac{1}{2A} (b_{m=\beta} x + a_{m=\beta} y) \quad (4.64)$$

onde as variáveis $N_{m=\beta}$ são relativas a célula que está sendo integrada, A é a área desta célula e os índices que definem suas propriedades são:

$$a_{m=\beta} = x_\lambda - x_\gamma \quad (4.65)$$

$$b_{m=\beta} = y_\gamma - y_\lambda \quad (4.66)$$

$$2A_{m=\beta} = x_\gamma y_\lambda - x_\lambda y_\gamma \quad (4.67)$$

$$2A = b_1 a_2 - b_2 a_1 \quad (4.68)$$

Os valores de a_1 , a_2 , b_1 e b_2 são obtidos com o emprego das equações (4.52 e 4.53) e os valores de $N_{m=\beta}$ são obtidos em coordenadas cilíndricas com a seguinte transformação:

$$x = r \cos(\theta) \quad (4.69)$$

$$y = r \sin(\theta) \quad (4.70)$$

Substituindo os valores de x e y das equações (4.69 e 4.70) na equação (4.64) obtém-se:

$$N_{\beta} = C_{\beta} + D_{\beta}(\theta)r \quad (4.71)$$

onde

$$C_{\beta} = \frac{A_{\beta}}{A} \quad (4.72)$$

$$D_{\beta}(\theta) = \frac{1}{2A} [b_{\beta} \cos(\theta) + a_{\beta} \text{sen}(\theta)] \quad (4.73)$$

Dessa forma as funções de ponderação em coordenadas polares são:

$$N_1 = C_1 + D_1(\theta) r \quad (4.74)$$

$$N_2 = C_2 + D_2(\theta) r \quad (4.75)$$

$$N_3 = C_3 + D_3(\theta) r \quad (4.76)$$

4.4.2 - Cálculo de $J_{m=1,\beta=1}$, $J_{m=1,\beta=2}$, $J_{m=1,\beta=3}$

A integral $J_{m=1,\beta=1}$ relatada nas equações (4.56 e 4.57) é transcrita aqui individualmente:

$$J_{m=1,\beta=1} = \int_{\theta_2}^{\theta_3} \int_0^{R_{\beta=1}(\theta)} N_{m=1} U^* r \, dr \, d\theta \quad (4.77)$$

o elemento interno desta integral pode ser colocado na seguinte forma:

$$N_{m=1} U^* r = (C_{m=1} + D_{m=1} r) v_1 \exp(-v_2 r^2) r \quad (4.78)$$

$$N_{m=1} U^* r = C_{m=1} v_1 r \exp(-v_2 r^2) + D_{m=1} v_1 r^2 \exp(-v_2 r^2) \quad (4.79)$$

A integral interna com limite superior em R da equação (4.77) pode ser assim expandida:

$$\begin{aligned}
 I_R &= \int_0^{R_{\beta=1}(\theta)} N_{m=1} U^* r \, dr \\
 &= \int_0^{R_{\beta=1}(\theta)} C_{m=1} v_1 \exp(-v_2 r^2) r \, dr \\
 &+ \int_0^{R_{\beta=1}(\theta)} D_{m=1} v_1 \exp(-v_2 r^2) r^2 \, dr
 \end{aligned} \tag{4.80}$$

Conforme pode ser observado na equação (4.72) $C_{m=1}$ é independente de r e portanto pode ser retirado de dentro da integral. Também, conforme pode ser observado na equação (4.73) $D_{\beta}(\theta)$ não varia com r , somente com θ . Portanto a integral em relação a dr considerará $D_{\beta}(\theta)$ como uma constante. Observa-se, como indicado na equação (4.48) que v_1 é uma constante. Levando em conta estas considerações é obtido:

$$I_R = C_{m=1} t_1 \int_0^{R_{\beta=1}(\theta)} \exp(-t_2 r^2) r \, dr + D_{m=1} t_1 \int_0^{R_{\beta=1}(\theta)} \exp(-t_2 r^2) r^2 \, dr \tag{4.81}$$

Simplificadamente:

$$I_R = I_{RC} + I_{RD} \tag{4.82}$$

onde

$$I_{RC} = C_{m=1} v_1 \int_0^{R_{\beta=1}(\theta)} \exp(-v_2 r^2) r \, dr \tag{4.83}$$

$$I_{RD} = D_{m=1} v_1 \int_0^{R_{\beta=1}(\theta)} \exp(-v_2 r^2) r^2 \, dr \tag{4.84}$$

Para integração v_1 e v_2 serão substituídos (equação (4.48)). O valor de I_{RC} é obtido assim:

$$I_{RC} = \frac{A_{m=1}}{A} \frac{1}{4\alpha\pi\tau} \int_0^{R_{\beta=1}(\theta)} \exp\left(\frac{-r^2}{4\alpha\tau}\right) r \, dr \quad (4.85)$$

A equação solução para a integral da equação (4.85) é dada por:

$$\frac{-4\alpha\tau}{2} \int_a^b \frac{-2r}{4\alpha\tau} \exp\left(\frac{-r^2}{4\alpha\tau}\right) \, dr = \frac{-4\alpha\tau}{2} \left[\exp\left(\frac{-r^2}{4\alpha\tau}\right) \right]_a^b \quad (4.86)$$

Adaptando a equação (4.85) para integrar de acordo com a equação (4.86) obtém-se:

$$I_{RC} = \frac{-1}{2\pi} \frac{A_{m=1}}{A} \int_0^{R_{\beta=1}(\theta)} \frac{-2r}{4\alpha\tau} \exp\left(\frac{-r^2}{4\alpha\tau}\right) \, dr \quad (4.87)$$

$$I_{RC} = \frac{-1}{2\pi} \frac{A_{m=1}}{A} \left[\exp\left(\frac{-r^2}{4\alpha\tau}\right) \right]_0^{R_{\beta=1}(\theta)} \quad (4.88)$$

$$I_{RC} = \frac{-1}{2\pi} \frac{A_{m=1}}{A} \left[\exp\left(\frac{-R_{\beta=1}^2(\theta)}{4\alpha\tau}\right) - 0 \right] \quad (4.89)$$

$$I_{RC} = \frac{-1}{2\pi} \frac{A_{m=1}}{A} \left[\exp\left(\frac{-R_{\beta=1}^2(\theta)}{4\alpha\tau}\right) \right] \quad (4.90)$$

Agora será resolvida a integral I_{RD} utilizando os valores originais de v_1 e v_2 (equação (4.48)):

$$I_{RD} = \frac{1}{4\alpha\pi\tau} \frac{1}{2A} (b_\beta \cos(\theta) + a_\beta \sin(\theta)) \int_0^{R_{\beta=1}(\theta)} \exp\left(\frac{-r^2}{4\alpha\tau}\right) r^2 \, dr \quad (4.91)$$

Uma solução possível para esta integral, utilizada por WROBEL (1981, página 137) foi o uso da “função Gamma incompleta normalizada” que pode ser obtida no livro de ABRAMOWITZ (1977, página 260) :

$$\gamma(a, x) = \int_0^x \exp(-t) t^{a-1} dt \quad (4.92)$$

Adaptando a integral da equação (4.91) as condições apontadas pela equação (4.92):

$$-t = \frac{-r^2}{4\alpha\tau} \rightarrow t = \frac{r^2}{4\alpha\tau} \rightarrow \frac{dt}{dr} = \frac{2r}{4\alpha\tau} \rightarrow \frac{dt}{dr} = \frac{r}{2\alpha\tau} \quad (4.93)$$

$$r^2 = 4\alpha\tau t \rightarrow r = (4\alpha\tau t)^{1/2} = 2(\alpha\tau)^{1/2} t^{1/2} \quad (4.94)$$

$$r dr = 2\alpha\tau dt \rightarrow r^2 dr = 2\alpha\tau dt \cdot 2(\alpha\tau)^{1/2} t^{1/2} = 4\alpha\tau(\alpha\tau)^{1/2} t^{1/2} dt \quad (4.95)$$

$$\text{Se } t^{a-1} = t^{1/2} \quad \text{então } a = 3/2 \quad (4.96)$$

e a equação (4.91) ficará assim:

$$I_{RD} = \frac{1}{4\alpha\pi\tau} \frac{1}{2A} (b_{m=1} \cos(\theta) + a_{m=1} \sin(\theta)) 4\alpha\tau(\alpha\tau)^{1/2} \cdot \int_0^{R_{\beta=1}(\theta)} \exp(-t) t^{a-1} dt \quad (4.97)$$

onde

$$t = \frac{r^2}{4\alpha\tau} \quad e \quad a = \frac{3}{2} \quad (4.98)$$

$$I_{RD} = \frac{(\alpha\tau)^{1/2}}{\pi} \frac{1}{2A} (b_{m=1} \cos(\theta) + a_{m=1} \sin(\theta)) \int_0^{R_{\beta=1}(\theta)} \exp(-t) t^{a-1} dt \quad (4.99)$$

$$I_{RD} = \frac{(\alpha\tau)^{1/2}}{\pi} \frac{1}{2A} (b_{m=1} \cos(\theta) + a_{m=1} \sin(\theta)) \left[\gamma\left(\frac{3}{2}, t\right) \right]_0^{R^2/4\alpha\tau} \quad (4.100)$$

$$I_{RD} = \frac{(\alpha\tau)^{1/2}}{\pi} \frac{1}{2A} (b_{m=1} \cos(\theta) + a_{m=1} \sin(\theta)) \left[\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R_{\beta=1}^2(\theta)}{4\alpha\tau}\right) \right] \quad (4.101)$$

A função $\gamma\left(\frac{3}{2}, x\right)$ existente na equação (4.101) será comentada na seção 4.4.4.

O cálculo de $J_{m=1,\beta=1}$ iniciado na equação (4.77) agora apresenta-se assim:

$$J_{m=1,\beta=1} = \int_{\theta_2}^{\theta_3} I_R(\theta) d\theta \quad (4.102)$$

onde $I_R(\theta) = I_{RC}(\theta) + I_{RD}(\theta)$ e seus valores estão calculados, respectivamente, nas equações (4.90 e 4.101).

Pode-se integrar $J_{m=1,\beta=1}$ por quadratura unidimensional de Gauss, desde que se faça a seguinte transformação de coordenadas:

$$\theta = \frac{\xi}{2}(\theta_v - \theta_u) + \frac{1}{2}(\theta_v + \theta_u) \quad (4.103)$$

Para os limites de integração usados θ será:

$$\theta = \frac{\xi}{2}(\theta_3 - \theta_2) + \frac{1}{2}(\theta_3 + \theta_2) \quad (4.104)$$

Dessa forma a integral de $J_{m=1,\beta=1}$ terá como limite inferior -1 e limite superior 1 . O Jacobiano da transformação será:

$$Jacob = \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{\theta_3 - \theta_2}{2} \quad (4.105)$$

$$d\theta = \left(\frac{\theta_3 - \theta_2}{2}\right) d\xi \quad (4.106)$$

então o valor de $J_{m=1,\beta=1}$ procurado é:

$$J_{m=1,\beta=1} = \sum_{g=1}^{NGauss} I_R(\xi) \left(\frac{\theta_3 - \theta_2}{2}\right) W(\xi) \quad (4.107)$$

onde ξ é a coordenada de Gauss e $W(\xi)$ é o peso de Gauss referente a ξ .

A obtenção dos resultados $J_{m=1,\beta=2}$ e $J_{m=1,\beta=3}$ serão calculados usando o mesmo procedimento seguido para $J_{m=1,\beta=1}$, mudando os limites das

integrais conforme indicado na Tabela 4.2. O valor desejado na equação (4.56) é então obtido.

4.4.3 - Cálculo de $I_{m=1}$, $I_{m=2}$ e $I_{m=3}$

O procedimento seguido para obter $I_{m=1}$ é repetido para obtenção de $I_{m=2}$ e $I_{m=3}$. Assim sendo, o coeficiente de influência de uma célula em um ponto fonte foi calculado e armazenado convenientemente na matriz $[P]$.

4.4.4 - Cálculo da Função $\gamma\left(\frac{3}{2}, x\right)$

Para calcular a função $\gamma\left(\frac{3}{2}, x\right)$ presente na equação (4.101) pode-se utilizar a seguinte equação (WROBEL, 1981, páginas 139 e 281):

$$\gamma\left(\frac{3}{2}, x\right) = \frac{\pi^{1/2}}{2} \operatorname{erf}(x^{1/2}) - x^{1/2} e^{-x} \quad (4.108)$$

A função erro $\operatorname{erf}(y)$ válida para o domínio $0 \leq y < \infty$ pode ser obtida assim:

$$\operatorname{erf}(y) = 1 - (a_1 \cdot m + a_2 \cdot m^2 + a_3 \cdot m^3) \cdot e^{-y^2} + \varepsilon(y) \quad (4.109)$$

onde $a_1 = 0,3480242$, $a_2 = -0,0958798$ e $a_3 = 0,7478556$.

O erro máximo da função erro na equação (4.109) é dado por:

$$\|\varepsilon(y)\| \leq 2,5 \times 10^{-5} \quad (4.110)$$

e o valor de m na equação (4.109) é:

$$m = \frac{1}{1 + 0,47047 \cdot y} \quad (4.111)$$

4.5 – O PROCESSO DE AVANÇO NO TEMPO PASSO A PASSO

Para explicar mais facilmente o lay-out de funcionamento do programa que calcula a equação da difusão transiente com o uso do MEC convém mostrar as principais matrizes utilizadas. Esta explicação será muito útil no capítulo 5 onde será descrito o Método de Aproximação Explícito de Green com o uso do MEC. Considere-se a seguinte nomenclatura: n_i (número de pontos internos), n_c (número de nós do contorno) e n_p (número de pontos do domínio, $n_p = n_c + n_i$).

A matriz $[H_L]$ é a matriz que representa a integral do contorno com elemento linear com relação à derivada da solução fundamental. Ela é uma matriz de n_c linhas por n_c colunas. A matriz $[G_L]$ representa a integral do contorno com elemento linear com relação à solução fundamental e também é constituída de n_c linhas e n_c colunas. No processo de calcular as incógnitas existentes no contorno há necessidade de se fazer uma troca de colunas entre $[G_L]$ e $[H_L]$. Na figura 4.8 é feita uma simulação onde o potencial do nó j do contorno é conhecido, então a coluna j de $[H_L]$ passa para a direita e a coluna j de $[G_L]$ passa para à esquerda, multiplicando-as por (-1). Implícitamente significa, também, que os elementos dos vetores de potencial e fluxo trocaram de lugar (u_j com q_j). Foi chamada de matriz $[C_c]$ a matriz $[H_L]$ e matriz $[D_d]$ a matriz $[G_L]$ depois desta troca.

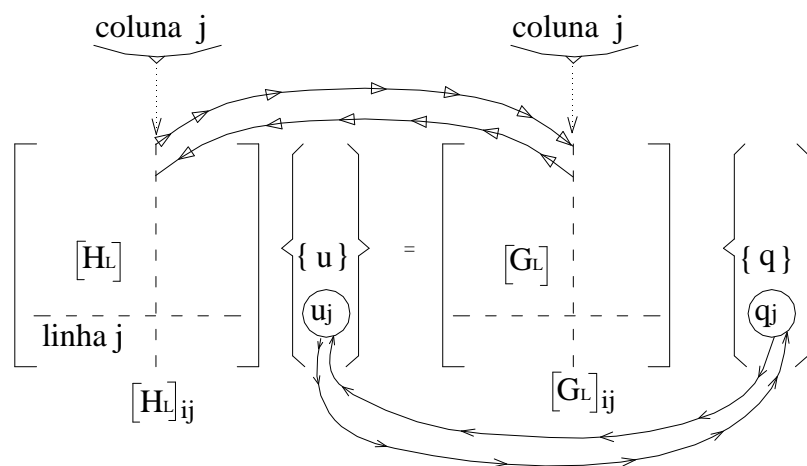


Figura 4.8 - Troca de colunas nas matrizes $[G_L]$ e $[H_L]$.

A matriz $[C_c]$ será considerada, em cada avanço de tempo, a matriz $[A_{sy}]$ de um sistema $[A_{sy}]\{X\} = \{B_{sy}\}$.

A matriz $[D_d]$ multiplicada pelo vetor de condições prescritas no contorno $\{V_{pb}\}$ irá ser somada ao vetor $\{B_{sy}\}$ de n_c elementos inicializado com valor zero para cada início de ciclo de avanço no tempo.

Como o procedimento adotado neste trabalho foi o de considerar condições iniciais iguais ou diferentes de zero a equação (4.22) possui a matriz de domínio $[P]$ que leva isto em consideração. Esta matriz, chamada no programa de $[M_{IB}]$, possui n_c linhas e n_p colunas. Cada coluna j corresponde a influência do nó j nos n_c nós do contorno. O vetor de condições iniciais $\{U(t-1)\}$ e de recarga $\{R(t-1)\}$ possuem n_p elementos. Quando é multiplicada a matriz $[M_{IB}]$ pelos vetores acima obtém-se dois vetores de n_c elementos que devem ser somados ao vetor $\{B_{sy}\}$. Neste ponto o sistema de equações está completo e resta então resolvê-lo.

O sistema de equações lineares n_c por n_c é resolvido por uma subrotina chamada AXB, que usa o método de Gauss-Jordan, com um procedimento de passar o maior elemento para a diagonal (DIEGUEZ, 1992). Devido a repetitiva operação de resolver o sistema de equações no MAEG para calcular a matriz de Green, assunto este que será visto no capítulo 5, foi criada uma subrotina chamada AXBF que pode resolver um repetitivo sistema de equações mais rapidamente quando há mudança somente no vetor de termos independentes. No primeiro passo de tempo resolve-se o sistema e, concomitantemente, guarda-se as operações que o vetor de elementos independentes B_{sy} tem de executar no triângulo inferior da matriz $[A_{sy}]$ e no triângulo superior e na diagonal memoriza-se a matriz $[A_{sy}]$ já resolvida parcialmente. Essa operação diminui sensivelmente o tempo de execução do programa no que se refere à solução do sistema de equações e, quanto maior o número de equações a resolver, mais vantajoso é adotar este procedimento. Para ter uma idéia da vantagem deste método sobre o tradicional foi realizado um teste em um computador pessoal com processador Intel® Pentium® D CPU 2.8 GHz, 1.87 GB de RAM, com o sistema operacional Windows XP. A solução de um sistema de equações lineares de 360 elementos foi resolvida 360 vezes com o método normal AXB e com o método otimizado AXBF. Enquanto que com AXB o tempo de processamento foi de 3304 segundos, com o método AXBF foi de apenas 38 segundos. Isso representa uma economia de 87%.

Após ser encontrada a solução do sistema é conhecido o potencial e o fluxo em todos os pontos do contorno. É preciso conhecer agora o potencial nos pontos internos do domínio.

O processo de avanço no tempo passo a passo aqui adotado se baseia no processo chamado “Scheme 1” do livro de BREBBIA (1984, página 156). No princípio do processo, no tempo inicial t_0 , valores iniciais U_0 do potencial sobre o domínio são especificados. Desde que pelo menos um ponto de potencial no contorno seja especificado e nos demais pontos do contorno sejam conhecidos o fluxo ou o potencial no passo de tempo ($F = 1$), a aplicação da equação (4.22) conduz a solução do problema no contorno. Para que o processo avance no tempo é necessário que se conheça o valor U_0 da condição inicial de potencial em todos os n_p pontos. Isso é possível com o uso da equação (4.13) que em forma matricial é assim representada:

$$\{U_F^i\} = [G] \{q_F^c\} - [H] \{U_F^c\} + [P] \{\bar{U}_{F-1}^\Omega\} + [P] \{\bar{R}_{F-1}^\Omega\} \quad (4.112)$$

O vetor $\{U_F^i\}$ que será calculado guarda os valores dos potenciais no tempo F dos pontos internos no domínio e portanto tem dimensão n_i . Os valores dos fluxos nos pontos do contorno $\{q_F^c\}$ e dos potenciais do contorno $\{U_F^c\}$ foram determinados pela solução da equação (4.22) e os potenciais nos n_p pontos no tempo inicial $\{\bar{U}_{F-1}^\Omega\}$ no início é dado do problema e a partir do tempo Δt é calculado com a equação (4.112). A recarga $\{\bar{R}_{F-1}^\Omega\}$ é um dado do problema e pode ser nulo ou não. As matrizes $[G]$ e $[H]$ tem dimensão n_i por n_c . A matriz $[P]$ tem dimensão n_i por n_p . A matriz $[G]$, $[H]$ e $[P]$ foram chamadas respectivamente, no programa desenvolvido, de matriz $[G_{LI}]$, $[H_{LI}]$ e $[M_{DI}]$.

As matrizes $[G_{LI}]$, $[H_{LI}]$ e $[M_{DI}]$ dependem de dados geométricos, propriedades do meio e do tamanho do passo de tempo. Assim, se for adotado um passo de tempo constante na análise do problema, elas podem ser resolvidas uma única vez e estocadas para uso no devido tempo. Esta foi uma estratégia adotada no programa. Convém recordar que as matrizes $[G_L]$, $[H_L]$ e $[M_{BI}]$ tem estas mesmas características e adotou-se o mesmo procedimento. Para se ter uma idéia de ganho de tempo de processamento com o cálculo único destas matrizes foi calculado o tempo de processamento delas e foi criada a Tabela 4.3 abaixo para resumir os resultados.

Tabela 4.3 – Tempo de processamento das matrizes G_L , H_L , G_{LI} , H_{LI} , M_{IB} e M_{ID} , para três exemplos com os nós de contorno (n_c) e internos (n_i) indicados.

	E1	E2	E3
nc	72	144	360
ni	285	1209	7821
	tempo (s)		
GL	< 1	< 1	1
HL	< 1	< 1	1
GLI	1	1	25
HLI	1	1	14
MIB	3	28	427 (\cong 7 min)
MID	14	239	9354 (\cong 3h)

Observa-se, para o exemplo com o maior número de pontos de contorno (360), que foi gasto aproximadamente 7,1 minutos para o cálculo da matriz M_{IB} e de três horas para cálculo da matriz M_{ID} , o que reforça a necessidade de se usar um passo de tempo constante no processo de avanço no tempo para economizar tempo de processamento.

4.6 - EXEMPLO

Será apresentado nesta seção um exemplo para ilustrar o resultado obtido com as técnicas adotadas para o MEC.

4.6.1 - Exemplo 1

O exemplo 1 trata de um aquífero (A) confinado dentro de um corpo de água (B), conforme mostra a Figura 4.11. Esta figura também mostra o domínio (D), com lados de comprimento L_x e L_y , escolhido para estudo. O isolamento deste domínio

do meio onde se encontrava é obtido pela substituição do meio pelas condições de contorno e pela condição inicial. O gráfico simulado U versus x mostra as curvas R_0 , R_1 e R_2 . A linha R_0 corresponde à linha do potencial no tempo zero, a linha R_1 corresponde à linha do potencial em estado transiente e a linha R_2 corresponde à linha do potencial em estado permanente. Inicialmente a altura do nível da água é de 16,0 metros em todo o aquífero. Deseja-se simular o movimento do nível da água através do tempo se, no tempo $t = 0,0$ s, o nível de jusante do reservatório é subitamente rebaixado para o nível de 11,0 metros, com a abertura instantânea da comporta (C). O nível de montante e jusante é mantido assim até o final da experiência. Os parâmetros do aquífero são: Transmissividade $T = 0,02 \frac{m^2}{minuto} = 0,000333 \frac{m^2}{s}$ e coeficiente de armazenamento $S = 0,002$ (adimensional). Assim sendo, o coeficiente de difusividade é $\alpha = \frac{T}{S} = 10,0 \frac{m^2}{min} = 0,166667 \frac{m^2}{s}$. Ao isolar os lados de $y = 0,0$ m e $y = Ly = 80,0$ m pode-se considerar o fluxo nestes lados igual a zero ($\bar{q} = 0,0$ m/s) por motivo de não haver variação de potencial para cada ponto de coordenada x ao longo de uma determinada coordenada y . Portanto este problema é considerado unidimensional na direção x . As condições de contorno são $U(x = 0,0$ m; $y; t) = 16,0$ m.c.a e $U(x = 100,0$ m; $y; t) = 11,0$ m.c.a. para $t > 0$. A condição prescrita inicial é dada pela altura de coluna de água na comporta, ou seja, $U(x; y; t = 0) = 16,0$ mca. A Figura 4.9 representa uma síntese das condições geométricas e de contorno do problema. A Figura 4.10 mostra em detalhes a discretização do contorno e do domínio para a solução deste problema usando 160 células. Este problema foi resolvido para 3 discretizações diferentes: 36, 72 e 360 elementos de contorno lineares, com respectivamente 160, 640 e 16000 células triangulares. A solução numérica obtida com o MEC com 36, 72 e 360 elementos e a obtida com o método analítico encontram-se na Tabela 4.4 e a Figura 4.12 ilustra o gráfico potencial versus tempo para as soluções obtidas com o MEC usando 36 e 360 elementos. A Tabela 4.5 mostra a solução obtida para o caso analítico e para o MEC com 72 elementos levando em consideração o perfil do problema em $y = 40$ m. A Figura 4.13 mostra o gráfico potencial U versus coordenada x para os dados contidos na Tabela 4.5. Observa-se que resultados com erros pequenos requerem um grande refinamento da malha. A solução analítica foi apresentada por WANG e ANDERSON (1982, página 89, equação (4.27)):

$$U(x, t) = U_1 + (U_2 - U_1) \frac{x}{L} \tag{4.113}$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(U_2 - U_1) \cos(n\pi)}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(\frac{-\alpha n^2 \pi^2 t}{L^2}\right)$$

onde U_1 e U_2 são as condições de contorno, L é o comprimento do domínio na direção do fluxo, o qual neste exemplo é na direção x , α a difusividade, x a coordenada do ponto em estudo e t o tempo decorrido após o instante inicial.

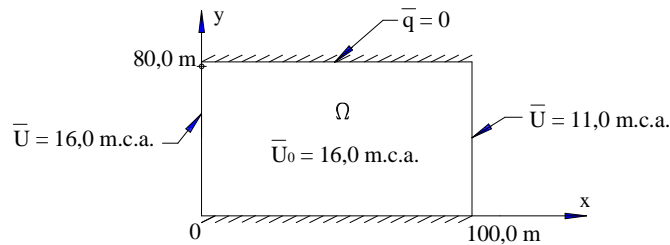


Figura 4.9 – Condições de contorno sobre o domínio 2D do exemplo 1.

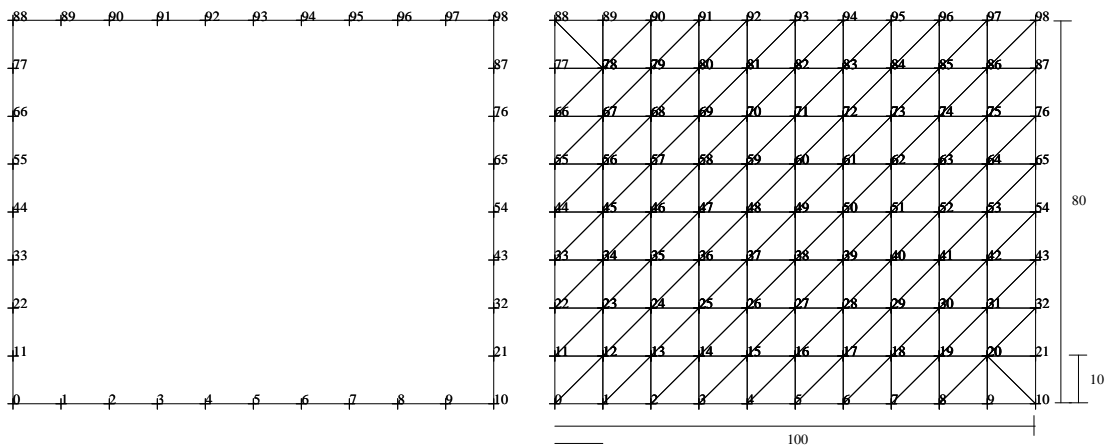


Figura 4.10 - Geometria e discretização do exemplo 1 com 36 elementos no contorno.

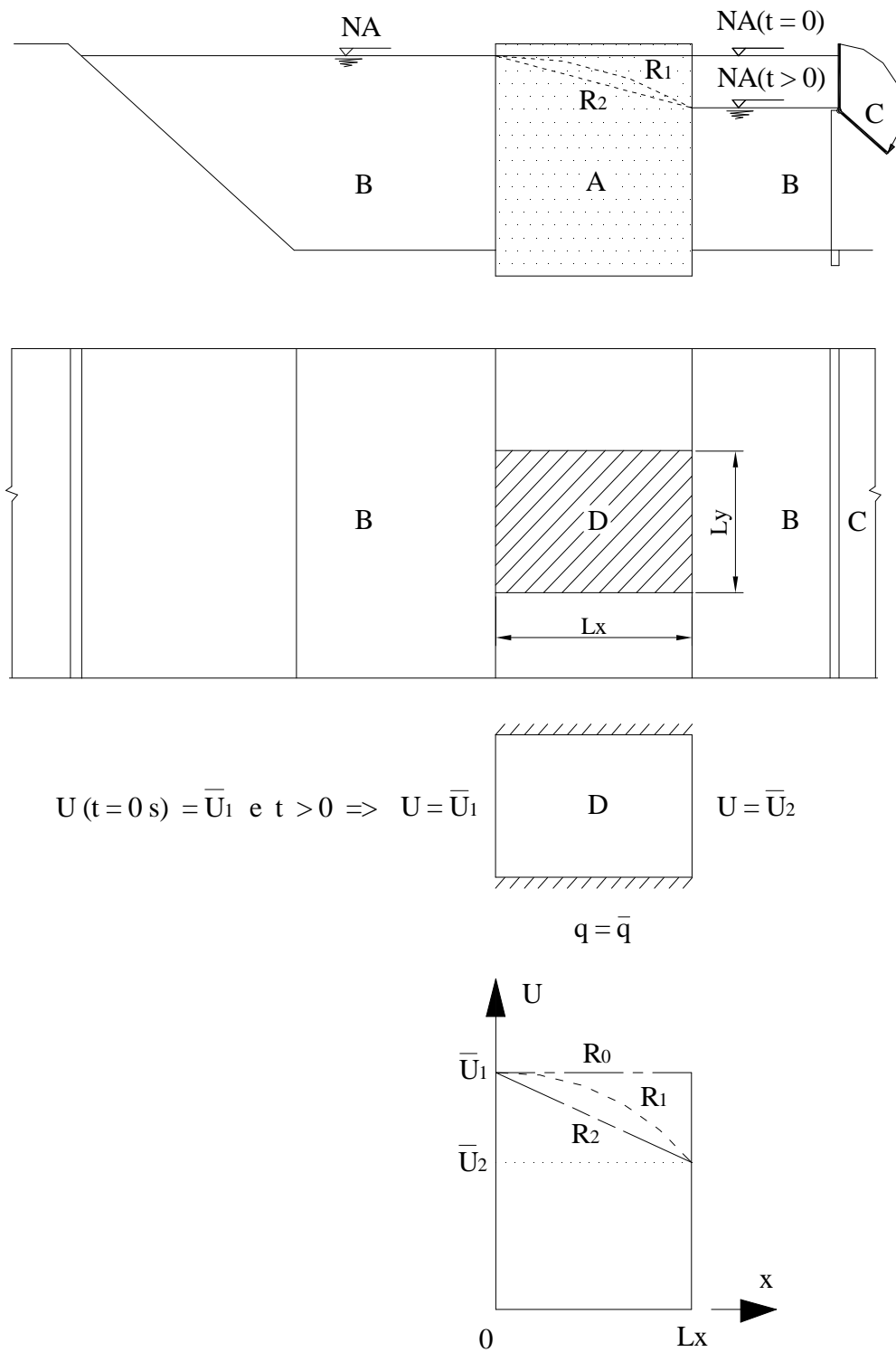


Figura 4.11 - Geometria e dados básicos do exemplo 1

Tabela 4.4 – Potencial e erros relativos (E) no ponto central do domínio para as discretizações adotadas.

Método Analítico		Método Numérico - MEC, $\Delta t = 5$ min					
		36 elementos		72 elementos		360 elementos	
		160 células		640 células		16000 células	
		$\Delta x = \Delta y = 10$ m		$\Delta x = \Delta y = 5$ m		$\Delta x = \Delta y = 1$ m	
t(min)	U(mca)	U(mca)	E (%)	U(mca)	E(%)	U(mca)	E(%)
0	16,000	16,000	0,00	16,000	0,00	16,000	0,00
50	15,431	15,291	0,91	15,396	0,22	15,432	0,01
100	14,686	14,491	1,33	14,622	0,44	14,669	0,12
150	14,224	14,047	1,25	14,160	0,45	14,203	0,15
200	13,942	13,802	1,01	13,888	0,39	13,922	0,14
250	13,770	13,666	0,75	13,728	0,30	13,754	0,12
300	13,665	13,592	0,53	13,634	0,22	13,653	0,09
350	13,601	13,551	0,37	13,579	0,16	13,592	0,07
400	13,561	13,528	0,25	13,546	0,11	13,555	0,05
450	13,537	13,516	0,16	13,527	0,07	13,533	0,03
500	13,523	13,509	0,11	13,516	0,05	13,520	0,02

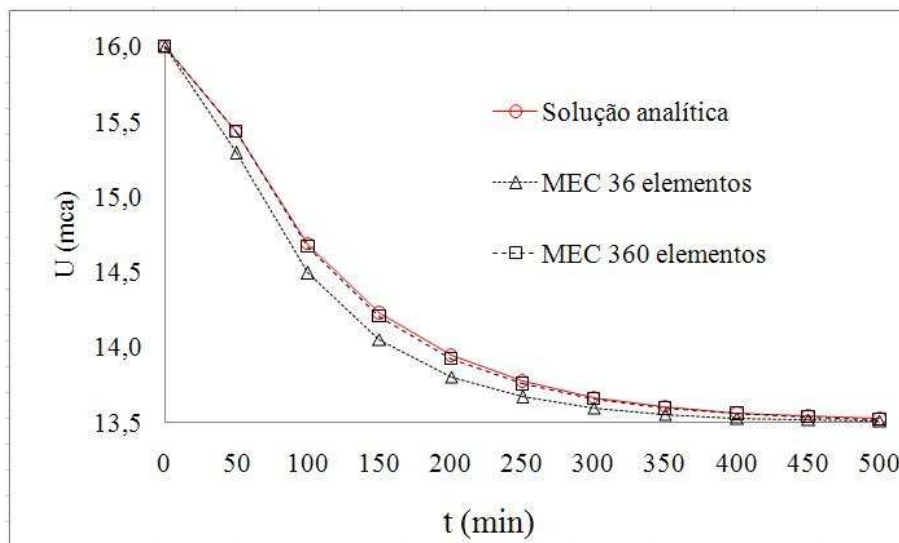


Figura 4.12 - Gráfico do exemplo 1. Representação do resultado descrito na Tabela 4.4 para o ponto central $(x, y)=(50$ m,40 m), obtidos com o método analítico e com o MEC.

Tabela 4.5 - Perfil do potencial nos tempos 50, 100 e 500 minutos do exemplo 1, para as coordenadas horizontais de 0 m a 100 m, e coordenada vertical $y = 40$ m, para uma discretização de 72 elementos e 640 células.

t (min)	M. Analítico			M. Numérico - MEC, $\Delta t = 5$ min		
	A-50	A-100	A-500	MEC-50	MEC-100	MEC-500
	50	100	500	50	100	500
x(m)	U(mca)	U(mca)	U(mca)	U(mca)	U(mca)	U(mca)
0	16,000	16,000	16,000	16,000	16,000	16,000
10	15,980	15,849	15,507	15,977	15,834	15,507
20	15,944	15,668	15,013	15,935	15,637	15,011
30	15,866	15,431	14,519	15,851	15,385	14,514
40	15,711	15,110	14,022	15,687	15,053	14,016
50	15,431	14,686	13,523	15,396	14,622	13,516
60	14,970	14,146	13,022	14,928	14,081	13,015
70	14,286	13,489	12,519	14,242	13,431	12,512
80	13,365	12,727	12,013	13,328	12,682	12,008
90	12,241	11,885	11,507	12,220	11,860	11,503
100	11,000	11,000	11,000	11,000	11,000	11,000

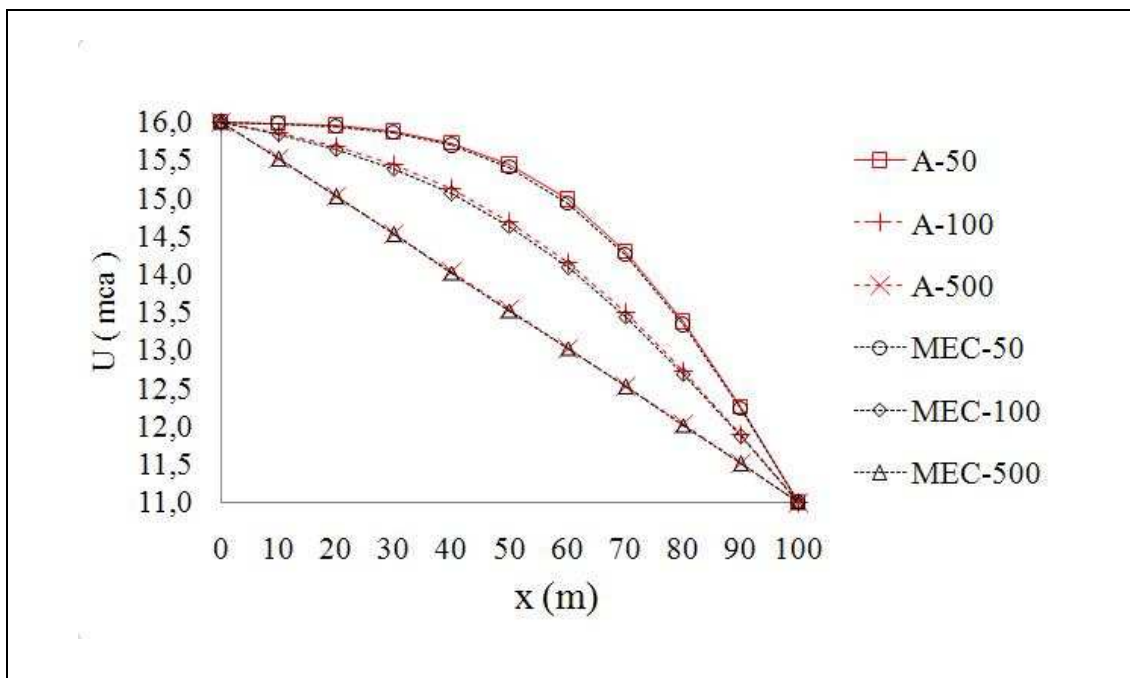


Figura 4.13 - Potencial U versus coordenada X , do exemplo 1, para discretização com 72 elementos na coordenada $y = 40$ m. Esta figura representa os dados da Tabela 4.5.

CAPÍTULO 5

MÉTODO DE APROXIMAÇÃO EXPLÍCITA DE GREEN

5.1- INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar o método de integração temporal baseado em funções de Green, que avança no tempo de forma explícita, denominado Método de Aproximação Explícita de Green (MAEG), originalmente designado Explicit Green Approach (ExGA), a fim de resolver problemas governados pela equação da difusão transiente em condução de calor ou em escoamento de águas subterrâneas.

As variáveis que serão consideradas durante a exposição teórica deste capítulo serão próprias de problemas de calor por motivo da facilidade de interpretação física das funções de Green e pela ausência de literatura científica na modelagem de águas subterrâneas, porém seus conceitos podem ser aplicados totalmente em águas subterrâneas.

O problema de condução de calor em regime transiente pode ser resolvido, também, pelo emprego das funções de Green. Para este problema a função de Green descreve a temperatura causada por um pulso de energia local e instantâneo. Além de possibilitar a obtenção de soluções para esse problema, estudos envolvendo as funções de Green permitem uma maior compreensão da natureza do processo de difusão.

O livro de CARSLAW e JAEGER (1959), que é um clássico neste assunto, apresenta uma introdução ao uso de métodos baseados na função de Green em problemas de condução de calor, onde essas funções foram obtidas através da transformada de Laplace. Outra importante referência que diz respeito às funções de Green é o livro de ÖZİŞİK (1980). Neste são descritos o uso e as vantagens dos métodos baseados nessas funções como também apresentadas as propriedades multiplicativas das funções de Green, utilizadas para obter soluções 2-D e 3-D através de soluções 1-D.

Neste período foram apresentados outros trabalhos sobre as funções de Green por MORSE e FESHBACH (1953), ROACH (1970), GREENBERG (1971), STAKGOLD (1979) e BUTKOVSKIY (1982).

BECK (1984) estendeu as soluções apresentadas por ÖZİŞİK (1980), incluindo

o termo de perda de calor lateral em superfícies finas, que entra na equação de governo em alguns problemas específicos.

HAJI-SHEIKH e LAKSHMINARAYANAN (1987) e HAJI-SHEIKH (1988) desenvolveram métodos aproximados para encontrar funções de Green, utilizando o método de integral de Galerkin.

BECK et al. (1992) apresentaram uma extensa compilação das funções de Green, contendo mais de vinte e cinco diferentes deduções analíticas para essas funções.

COLE e MCGUHAN (1993), para calcular a temperatura de um corpo composto de múltiplas camadas aquecido por radiação a laser, utilizaram um método baseado em funções de Green.

FENG e MICHAELIDES (1997) apresentaram um método baseado em funções de Green modificado para modelar problemas de transferência de calor em corpos sólidos homogêneos ou compósitos.

SUTRADHAR et al. (2002), por sua vez, apresentaram um método de elementos de contorno com transformada de Laplace e aproximação de Galerkin, que utiliza funções de Green, tendo aplicado o método em problemas de condução de calor transiente tridimensional para materiais heterogêneos.

GRAY et al. (2003) trabalharam com funções de Green em análise integral de contorno para problemas de condução de calor utilizando modelos exponenciais para materiais heterogêneos.

KUO e CHEN (2005), motivados pelos estudos de NORRIS (1994) e MARTIN et al. (2002), elaboraram um modelo matemático simplificado, usando funções exponenciais para representar a heterogeneidade e anisotropia de materiais, a fim de obter funções de Green exatas para a equação de difusão.

MANSUR et al. (2007) apresentaram uma família de algoritmos explícitos para integração temporal de equações diferenciais parciais do tipo hiperbólico, baseadas em funções de Green numéricas, que foi denominada ExGA. Além disso, os autores associaram esse método com o método clássico da equação integral de contorno no domínio do tempo (MANSUR, 1983), que, juntamente com WROBEL (1981), podem ser consideradas versões preliminares dos métodos de marcha utilizando funções de Green.

Assim como MANSUR et al. (2007), LOUREIRO (2007) e DORS (2007) aplicaram o MAEG para a equação da propagação de ondas, VASCONCELLOS

(2008), MANSUR et al. (2009), LOUREIRO et al. (2009) e LOUREIRO e MANSUR (2009), aplicaram o MAEG para a equação da difusão transiente usando como ferramentas básicas métodos tradicionais como o MEF, o MDF e outros. Esse método permite o avanço ao longo do tempo usando a matriz de Green, que representa o domínio do problema a ser resolvido em termos de suas propriedades físicas e geométricas.

O MAEG aqui usando o MEC, é um prosseguimento desta linha de pesquisa. Assim como nas outras pesquisas, o MEC aqui adotado não sofre restrições com relação à geometria. O preço a pagar por esta condição é a necessidade de discretização do domínio. A limitação existente no uso do MEC é relativa às propriedades físicas do meio e do fluido (no caso de escoamento de água subterrânea), pois ele exige um meio isotrópico e homogêneo. Por outro lado, uma precisão significativa e estabilidade podem ser alcançadas em problemas em que soluções analíticas são dificilmente encontradas, quando não impossíveis de serem obtidas à luz do conhecimento atual.

BECK (1992) escreveu em seu livro, que embora as aproximações das funções de Green representassem um poderoso e flexível método para resolver problemas de condução de calor e difusão, eram necessários ter expressões matemáticas para essas funções de Green (FG). MANSUR e al. (2009) mostraram que não havendo expressões matemáticas para resolver estes tipos de problemas, métodos numéricos podem ser usados para montar a matriz de Green que representará uma FG. Desta forma pode-se concluir que não há restrições para o uso das FG.

Dentre as vantagens apontadas para as FG, por vários autores para problemas de condução de calor e difusão, distinguem-se as seguintes:

- 1) o método é flexível e poderoso, pois, a partir da obtenção das funções de Green do problema para uma determinada geometria, pode-se empregá-lo para uma variedade de condições iniciais e de contorno;
- 2) as funções de Green podem ser encontradas em livros especializados ou serem deduzidas. Uma vez obtidas, essas funções podem ser usadas para outros problemas sem qualquer esforço adicional;
- 3) as funções de Green para difusão transiente 2-D e 3-D podem ser encontradas por multiplicação de casos 1-D.

A literatura exhibe expressões analíticas para as funções de Green de uma grande variedade de fenômenos físicos encontrados na natureza e estudados na engenharia, incluindo propagação de ondas (MANSUR, 1983), piezoeletricidade, termoelasticidade e poroelasticidade (NORRIS, 1994), dentre outras. Verifica-se também que a maioria das soluções fundamentais existentes é para material homogêneo.

A matriz de Green é uma aproximação da função de Green. Essa matriz pode ser determinada com ou sem o conhecimento de expressões analíticas da função de Green do problema. Assim como em MANSUR *et al.* (2009) o procedimento de cálculo através do MEF não exigia essas expressões analíticas, aqui com o MEC também não foram necessárias.

A matriz de Green é apenas determinada para o primeiro intervalo de tempo, permitindo seu uso para os próximos passos de tempo. Além disso, essa matriz pode ser reutilizada para outros problemas que possuam o mesmo domínio, as mesmas características físicas e as mesmas condições de contorno, assim como pode ser feito com as funções de Green analíticas.

Na próxima seção deste capítulo será apresentado um procedimento numérico para solucionar a integral de convolução e depois são apresentados alguns exemplos.

5.2 – SOLUÇÃO NUMÉRICA DA INTEGRAL DE CONVOLUÇÃO

Nesta seção é apresentado um esquema para obter a solução numérica da integral de convolução dada pela equação abaixo apresentada por VASCONCELLOS (2008) e MANSUR *et al.* (2009), que representa a evolução da temperatura para a equação da difusão transiente com o método de aproximação explícita de Green. Essa equação, que foi deduzida com o uso da transformada de Laplace aplicada à equação da difusão transiente resolvida numericamente com o MEF, pode ser utilizada pelo MEC. Assumindo que o passo de tempo é Δt , o vetor solução de temperatura em algum tempo pode evoluir recursivamente como:

$$\{T\}^{t+\Delta t} = [G]^{\Delta t}[C]\{T\}^t + \int_0^{\Delta t} [G]^{\Delta t-\tau}\{F\}^{t+\tau}d\tau \quad (5.1)$$

Observa-se que para a utilização deste método tornam-se necessários apenas os cálculos da matriz de Green e da integral de convolução no intervalo $0 \leq t \leq \Delta t$. Na equação acima $[G]$ é a matriz de Green, $[C]$ a matriz de capacitância diagonalizada, $\{T\}$ o vetor de temperatura e $\{F\}$ o vetor carga. Para integrar numericamente a integral de convolução representada pelo último termo da equação (5.1) adotou-se o método de integração de Newton-Cottes, por motivo de que nele, o intervalo de tempo de integração é constante, o que é desejável para o ExGA, em detrimento de outras estratégias tal como o método de integração de Gauss. O método adotado caracteriza-se por uma marcha no tempo do tipo passo a passo com incremento de tempo Δt constante.

Esta integração numérica destina-se a aproximar a integral de uma função $f(t)$, contínua dentro do intervalo de integração $[a,b]$, através de um polinômio interpolador de grau n , $p_n(t)$, que interpola o integrando com $n + 1$ pontos contidos no intervalo, sendo este intervalo dividido em n partes.

O método de Newton-Cottes, para um número de intervalos igualmente espaçados, é dado por:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b p_n(t)dt \cong \sum_{j=0}^n w_j f_j \quad (5.2)$$

onde w_j são os coeficientes de Newton-Cottes obtidos pela interpolação de ordem n (n intervalos) e f_j são os valores discretos da função $f(t)$ correspondentes aos $n + 1$ pontos obtidos pela divisão do espaço temporal $[a,b]$. A tabela 5.1 apresenta os coeficientes de Newton-Cottes para alguns valores de n observando-se que $h = (b - a)/n$.

Levando em consideração estas informações a integral de convolução da equação (5.1) pode ser assim escrita:

$$\int_0^{\Delta t} [G]^{\Delta t-\tau}\{F\}^{t+\tau}d\tau \cong \sum_{j=0}^n w_j [G]^{\Delta t-jh}\{F\}^{t+jh} \quad (5.3)$$

onde os valores de w_j são dados pela Tabela 5.1 em função do número de divisões escolhido, sendo $h = \Delta t/n$ o tamanho do intervalo de integração.

Tabela 5.1 – Coeficientes W_j do método de Newton-Cotes usando $n + 1$ pontos (DORS, 2007)

n	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
1	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}$					
2	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$				
3	$\frac{3h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{9h}{8}$	$\frac{3h}{8}$			
4	$\frac{14h}{45}$	$\frac{64h}{45}$	$\frac{24h}{45}$	$\frac{64h}{45}$	$\frac{14h}{45}$		
5	$\frac{95h}{288}$	$\frac{375h}{288}$	$\frac{250h}{288}$	$\frac{250h}{288}$	$\frac{375h}{288}$	$\frac{95h}{288}$	
6	$\frac{41h}{140}$	$\frac{216h}{140}$	$\frac{27h}{140}$	$\frac{272h}{140}$	$\frac{27h}{140}$	$\frac{216h}{140}$	$\frac{41h}{140}$

Portanto, nota-se que é necessário obter primeiramente as $n + 1$ funções de Green, dentro do intervalo $[0, \Delta t]$, para poder computar a contribuição destas convoluções ao longo da marcha no tempo.

Adicionalmente, DORS (2007), existe ainda a possibilidade de se calcular a integral (5.1) de forma particionada dividindo-se o intervalo de integração em m sub-intervalos como abaixo:

$$[0, \Delta t] = \left[0, \frac{\Delta t}{m}\right] \cup \left[\frac{\Delta t}{m}, \frac{2\Delta t}{m}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{(m-1)\Delta t}{m}, \Delta t\right] \quad (5.4)$$

Isto permite fixar a ordem de integração n de Newton-Cottes independentemente do número total m de sub-passos adotado para o intervalo de integração $[0, \Delta t]$, resultando na seguinte expressão para a convolução:

$$\int_0^{\Delta t} [G]^{\Delta t - \tau} \{F\}^{t + \tau} d\tau \cong \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^n w_j [G]^{\Delta t - (k+j)h} \{F\}^{t + (k+j)h} \quad (5.5)$$

No entanto, cabe salientar que o número total de divisões do intervalo de intergração (n_{div}) deve ser igual ao produto do número de sub-passos de tempo pelo número de pontos da ordem de integração, ou seja, $n_{div} = m \cdot n$, e, com isso, n_{div} torna-se sempre múltiplo de n .

É importante notar que a utilização das equações (5.3) e (5.5) para calcular a convolução permite que se marche no tempo com incrementos Δt bem maiores do que aqueles comumente adotados em métodos de marcha no tempo explícitos, ou mesmo implícitos, uma vez que a variação do carregamento dentro do incremento de tempo é corretamente computada com estas considerações.

Na hipótese de que os carregamentos $\{F\}^\tau$ sejam aproximadamente lineares dentro do período de tempo $[0, \Delta t]$ pode-se interpolar tal vetor dentro deste intervalo adotando-se as funções de aproximação N_1 e N_2 :

$$\{F\}^{t + \tau} = N_1 \{F\}^t + N_2 \{F\}^{t + \Delta t}, \text{ para } 0 \leq \tau \leq \Delta t \quad (5.6)$$

onde N_1 e N_2 são funções de interpolação lineares dadas por:

$$N_1 = \frac{\Delta t - \tau}{\Delta t} \quad \text{e} \quad N_2 = \frac{\tau}{\Delta t} \quad (5.7)$$

Pode-se observar que a função N_1 tem valor unitário quando $\tau = 0$ e valor zero para $\tau = \Delta t$ e a função N_2 tem valor unitário quando $\tau = \Delta t$ e valor zero para $\tau = 0$, como mostra a figura (5.1).

Introduzindo as equações (5.6) e (5.7) na equação (5.5) obtém-se:

$$\int_0^{\Delta t} [G]^{\Delta t - \tau} \{F\}^{t + \tau} d\tau \cong$$

$$\left\{ \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^n w_j N_1 [G]^{\Delta t - (k+j)h} \right\} \{F\}^t + \left\{ \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^n w_j N_2 [G]^{\Delta t - (k+j)h} \right\} \{F\}^{t+\Delta t} \quad (5.8)$$

Neste trabalho adotou-se $n = 1$ do método de Newton-Cottes, sistema conhecido também por regra do trapézio. Conseqüentemente, de acordo com a Tabela (5.1) tem-se que $h = \Delta t/m$ e $w_0 = w_1 = \Delta t/2m$.

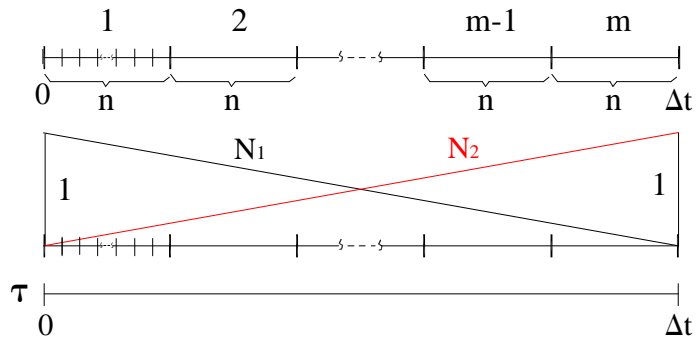


Figura 5.1 – Funções de aproximação N_1 e N_2 e o particionamento do intervalo de integração.

Usando a equação (5.8) e as considerações acima obtém-se:

$$\int_0^{\Delta t} [G]^{\Delta t - \tau} \{F\}^{t+\tau} d\tau \cong [C_1] \{F\}^t + [C_2] \{F\}^{t+\Delta t} \quad (5.9)$$

onde as matrizes de convolução $[C_1]$ e $[C_2]$ são:

$$[C_1] = \sum_{k=1}^m \frac{\Delta t}{2m} \left(1 - \frac{k}{m}\right) [G]^{\Delta t \left(1 - \frac{k}{m}\right)} + \frac{\Delta t}{2m} \left(1 - \frac{(k-1)}{m}\right) [G]^{\Delta t \left(1 - \frac{(k-1)}{m}\right)} \quad (5.10)$$

$$[C_2] = \sum_{k=1}^m \frac{\Delta t}{2m} \left(\frac{k}{m}\right) [G]^{\Delta t \left(1 - \frac{k}{m}\right)} + \frac{\Delta t}{2m} \left(\frac{k-1}{m}\right) [G]^{\Delta t \left(1 - \frac{(k-1)}{m}\right)} \quad (5.11)$$

As matrizes de convolução $[C_1]$ e $[C_2]$ possuem a mesma dimensão $nnos \times nnos$ da matriz de Green, onde $nnos$ corresponde ao número de nós do problema.

O procedimento de pesquisa para encontrar a matriz de Green com o MEC foi aplicar os mesmos passos adotados no cálculo da matriz de Green através do MEF, por motivo de que os procedimentos do MEC adotados neste trabalho não há uma ou mais matrizes de solução do problema, mas sim uma sequência de operações de matrizes para atingir a solução.

A matriz de capacitância diagonalizada usada na equação (5.1) pode ser obtida de duas formas: 1) calcula-se a matriz de capacitância do MEF para elementos triangulares com a mesma geometria da malha de células do MEC, e depois se transforma ela em diagonal, ou seja, todos os elementos de uma linha são somados e esta soma é colocada na diagonal, enquanto todos os demais membros desta linha assumem o valor zero ($C(i, i) = \sum_{j=1}^{nnos} C(i, j)$ e $C(i, j) = 0$ se $i \neq j$); 2) calcula-se a área de influência de cada ponto do domínio sobre um outro ponto qualquer do domínio, usando um procedimento semelhante ao usado para calcular a matriz $[M_{IB}]$. A seguir é criada uma matriz com todos os elementos nulos com exceção da diagonal principal, onde o termo $C(i, i)$ é igual a área de influência do ponto i multiplicado pela constante $(1/\alpha)$. A soma das áreas de influência de todos os pontos corresponde à área do domínio.

A matriz de Green $[G]$, aqui obtida, é constituída com a solução de $nnos$ problemas, onde cada coluna j representa a solução do seguinte problema: o valor inicial dos potenciais em todos os nós é igual a zero com exceção do potencial do nó j , onde o potencial tem como valor $U(0) = 1/C(j, j)$ e as condições de contorno são as condições dadas do problema e os valores dos potenciais ou fluxo do contorno são considerados nulos.

5.3 – EXEMPLOS

Para avaliar o trabalho realizado com o MAEG-MEC foram escolhidos três problemas do artigo escrito por MANSUR et al. (2009).

Os objetivos destes exemplos são: (1) resolver um problema de condução de calor, sem fontes e com fluxo nulo no contorno, tal que a resposta para o campo de temperatura é dada justo pela primeira parte do lado direito da equação (5.1), isto é, eliminando a contribuição da integral de convolução; (2) simular uma situação unidimensional para testar a condição de contorno de potencial prescrito; e (3) analisar uma situação bidimensional com choque térmico no contorno, de tal forma que a resposta para o campo de temperaturas seja dada pela equação (5.1) completa. Uma estreita chapa retangular de lados $a = 10,0$ m e $b = 8,0$ m foram consideradas para os exemplos 1 e 3. O exemplo 2, que representa um problema unidimensional, considera o lado $a = 10,0$ m e o lado $b = 2,0$ m para reduzir o tempo de execução do programa. Os coeficientes físicos adotados foram $\alpha = 1,0 \text{ m}^2/\text{s}$, $K = 1,0 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$. A matriz de Green foi determinada pelo MEC usando células triangulares, como mostrados nas Figuras 5.2 e 5.3 e explanado no capítulo 4. O método de aproximação explícita de Green foi comparado com o MEC com a mesma discretização espacial e a mesma discretização no tempo usado para calcular a matriz de Green.

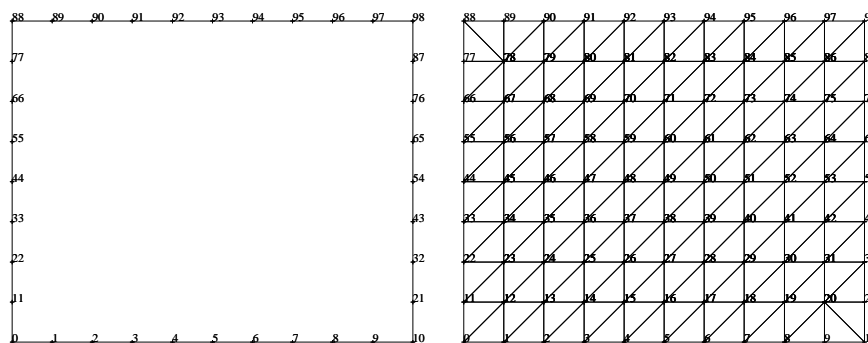


Figura 5.2 - Geometria, contorno e malha para os exemplos 1 e 3.

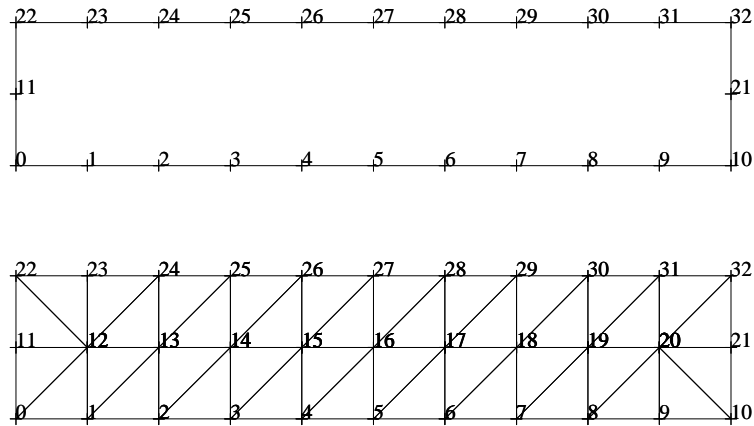


Figura 5.3 - Geometria, contorno e malha para o exemplo 2.

5.3.1- Exemplo 1

Esse exemplo considera um domínio retangular com fluxo térmico nulo em todos os lados (ver Figura 5.4), com condição inicial $T(x, y, 0) = \delta(x, y|5, 4)$, onde (5, 4) é o ponto central do domínio. A matriz de Green foi calculada usando um passo no tempo $\Delta t = 0.1$ s e a malha com Δx e Δy iguais a 1,0, 0,5, 0,25 e 0,1 m. Não houve uso de sub-passos para calcular os resultados mostrados na Tabela 5.2; a malha com o menor número de células (160) é mostrada na Figura 5.2.

A função de Green analítica para esse problema bi-dimensional é dada por BECK et al. (1992, página 503). A solução, verdadeira para pequenos valores de $\alpha(t - \tau)/a^2$ e $\alpha(t - \tau)/b^2$, ambos ≤ 0.022 , é dado por:

$$G(x, y, t|x', y', \tau) = \frac{1}{4\pi\alpha(t - \tau)} \left\{ \sum_{i=1}^9 \exp \left[\frac{-r_i^2}{4\alpha(t - \tau)} \right] \right\} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2 & r_2^2 &= (x - x')^2 + (y + y')^2 \\ r_3^2 &= (x - x')^2 + (2b - y - y')^2 & r_4^2 &= (x + x')^2 + (y - y')^2 \\ r_5^2 &= (x + x')^2 + (y + y')^2 & & \\ r_6^2 &= (x + x')^2 + (2b - y - y')^2 & r_7^2 &= (2a - x - x')^2 + (y - y')^2 \\ r_8^2 &= (2a - x - x')^2 + (y + y')^2 & r_9^2 &= (2a - x - x')^2 + (2b - y - y')^2 \end{aligned} \quad (5.13)$$

O gráfico da Figura 5.5, que representa os valores da Tabela 5.2, mostra os resultados do MAEG-MEC quando a malha é refinada, mantendo o passo no tempo constante. É importante observar que a diferença entre o resultado numérico do gráfico da Figura 5.5 e a solução analítica não são relacionados à convergência, mas sim, porque as funções de Green consideram cargas pontuais onde as numéricas consideram a distribuição sobre as células nas proximidades do nó fonte. Assim, como demonstrado na Figura 5.5, quanto mais refinada é a malha mais próximas são as soluções numéricas e analíticas. Também, pode ser visto como era o esperado, quando t tende a zero a solução analítica no ponto fonte tende ao infinito. Os resultados mostrados na Tabela 5.2 representam as respostas obtidas pelo MEC e pelo MAEG-MEC com o mesmo Δt . É possível fazer duas importantes observações sobre eles:

- 1) Os resultados obtidos pelo MEC e pelo MAEG-MEC são iguais devido o modo construtivo como foi montada a matriz de Green.
- 2) Os resultados mostram convergência nos dois métodos empregados, pois observa-se que conforme a malha vai sendo refinada eles apresentam erros menores.

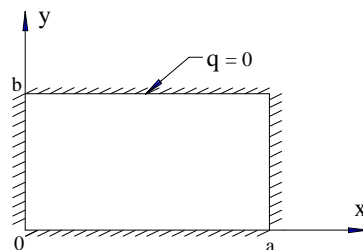


Figura 5.4 - Geometria e condições de contorno do exemplo 1.

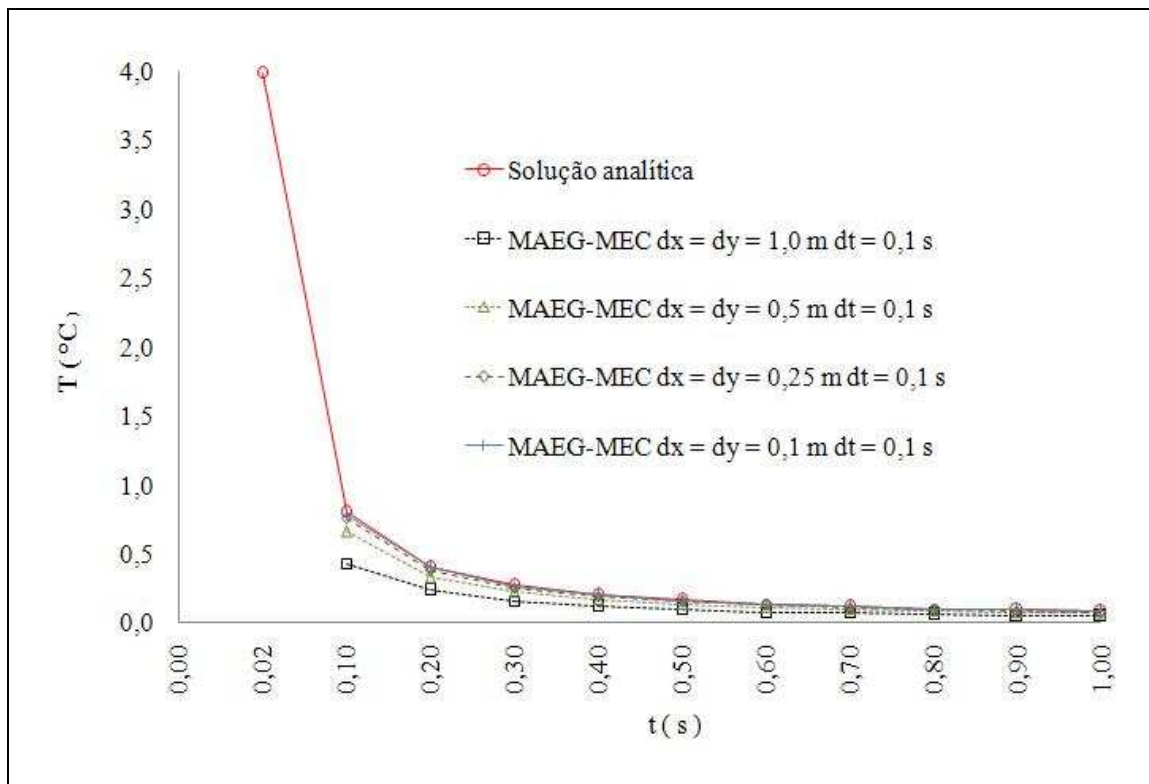


Figura 5.5 - Temperatura no ponto central (5 m, 4 m) do domínio do exemplo 1, correspondente aos valores da Tabela 5.2 no tempo $t = 0,02$ s até $t = 1,0$ s.

Tabela 5.2- Temperatura e erros relativos no ponto central do domínio para o passo no tempo $\Delta t = 0,1 s$ e comprimentos de Δx e Δy iguais à 1,0, 0,5, 0,25 e 0,1 metros, com o uso da solução analítica, do MEC e do MAEG-MEC.

t [s]	Analítico	MAEG-MEC MEC $\Delta x = \Delta y = 1,0 m$ $\Delta t = 0,1 s$		MAEG-MEC MEC $\Delta x = \Delta y = 0,5 m$ $\Delta t = 0,1 s$		MAEG-MEC MEC $\Delta x = \Delta y = 0,25 m$ $\Delta t = 0,1 s$		MAEG-MEC MEC $\Delta x = \Delta y = 0,1 m$ $\Delta t = 0,1 s$	
	T (°C)	T (°C)	erro%	T (°C)	erro%	T (°C)	erro%	T (°C)	erro%
0,00									
0,02	3,979								
0,10	0,796	0,425	46,66	0,656	17,53	0,757	4,92	0,782	1,78
0,20	0,398	0,234	41,14	0,330	17,20	0,378	4,97	0,395	0,85
0,30	0,265	0,155	41,57	0,220	17,02	0,252	4,84	0,263	0,73
0,40	0,199	0,115	42,43	0,165	17,08	0,189	4,96	0,197	0,85
0,50	0,159	0,091	42,86	0,132	16,95	0,151	4,84	0,158	0,73
0,60	0,133	0,075	43,35	0,110	17,25	0,126	5,19	0,132	1,10
0,70	0,114	0,064	43,51	0,094	17,24	0,108	5,19	0,113	1,10
0,80	0,099	0,056	43,18	0,083	16,60	0,095	4,47	0,099	0,35
0,90	0,088	0,050	43,24	0,073	16,59	0,084	4,47	0,088	0,35
1,00	0,080	0,045	43,84	0,066	17,42	0,076	5,43	0,079	1,35
1,10	0,072	0,041	43,27	0,060	16,58	0,069	4,47	0,072	0,35
1,20	0,066	0,037	43,26	0,055	16,57	0,063	4,47	0,066	0,35
1,30	0,061	0,035	43,28	0,051	16,67	0,058	4,59	0,061	0,48
1,40	0,057	0,032	43,56	0,047	17,18	0,054	5,19	0,056	1,10
1,50	0,053	0,030	43,24	0,044	16,85	0,050	4,82	0,053	0,72
1,60	0,050	0,028	43,45	0,041	17,35	0,047	5,41	0,049	1,34
1,70	0,047	0,027	43,19	0,039	17,22	0,045	5,28	0,046	1,20
1,80	0,044	0,025	42,45	0,037	16,44	0,042	4,42	0,044	0,31
1,90	0,042	0,024	42,61	0,035	17,01	0,040	5,11	0,042	1,04
2,00	0,040	0,023	42,43	0,033	17,14	0,038	5,31	0,039	1,26
2,10	0,038	0,022	41,91	0,032	16,84	0,036	5,02	0,038	0,97
2,20	0,036	0,021	41,04	0,030	16,09	0,034	4,24	0,036	0,17
2,30	0,035	0,020	41,53	0,029	17,31	0,033	5,71	0,034	1,72
2,40	0,033	0,020	40,05	0,028	15,78	0,032	4,06	0,033	0,02
2,50	0,032	0,019	40,09	0,027	16,44	0,030	4,91	0,032	0,92
2,60	0,031	0,019	39,93	0,026	16,84	0,029	5,48	0,031	1,55
2,70	0,030	0,018	39,58	0,025	17,01	0,028	5,79	0,029	1,90
2,80	0,029	0,018	39,04	0,024	16,94	0,027	5,85	0,028	1,99
2,90	0,028	0,017	38,32	0,023	16,64	0,026	5,65	0,027	1,82
3,00	0,027	0,017	37,39	0,023	16,10	0,026	5,19	0,027	1,37

Foi realizada outra simulação para o domínio dividido de forma que $\Delta x = \Delta y = 0,5m$, obtendo-se 640 células e com o seguinte passo no tempo: para o MAEG-MEC foi usado um $\Delta t = 0,5 s$ e o cálculo da matriz de Green com $\Delta t = 0,1 s$ enquanto que para o MEC foi usado um passo no tempo de $\Delta t = 0,1 s$. Os resultados estão na Tabela 5.3 e sua representação gráfica está na Figura 5.6. Verificou-se que os resultados do MAEG-MEC ficaram melhores que os do MEC.

Tabela 5.3 – Temperatura e erros (E) relativos no ponto central do domínio para o número de sub-passos igual a cinco.

t (s)	Solução Analítica	MEC		MAEG-MEC	
	T °C	T °C	E (%)	T °C	E (%)
0,00					
0,10	0,79577	0,65600	17,56		
0,50	0,15900	0,13205	16,95	0,13205	16,95
1,00	0,08000	0,06606	17,42	0,06607	17,42
1,50	0,05300	0,04407	16,85	0,04411	16,77
2,00	0,04000	0,03314	17,14	0,03333	16,68
2,50	0,03200	0,02674	16,44	0,02716	15,14
3,00	0,02700	0,02265	16,10	0,02336	13,47

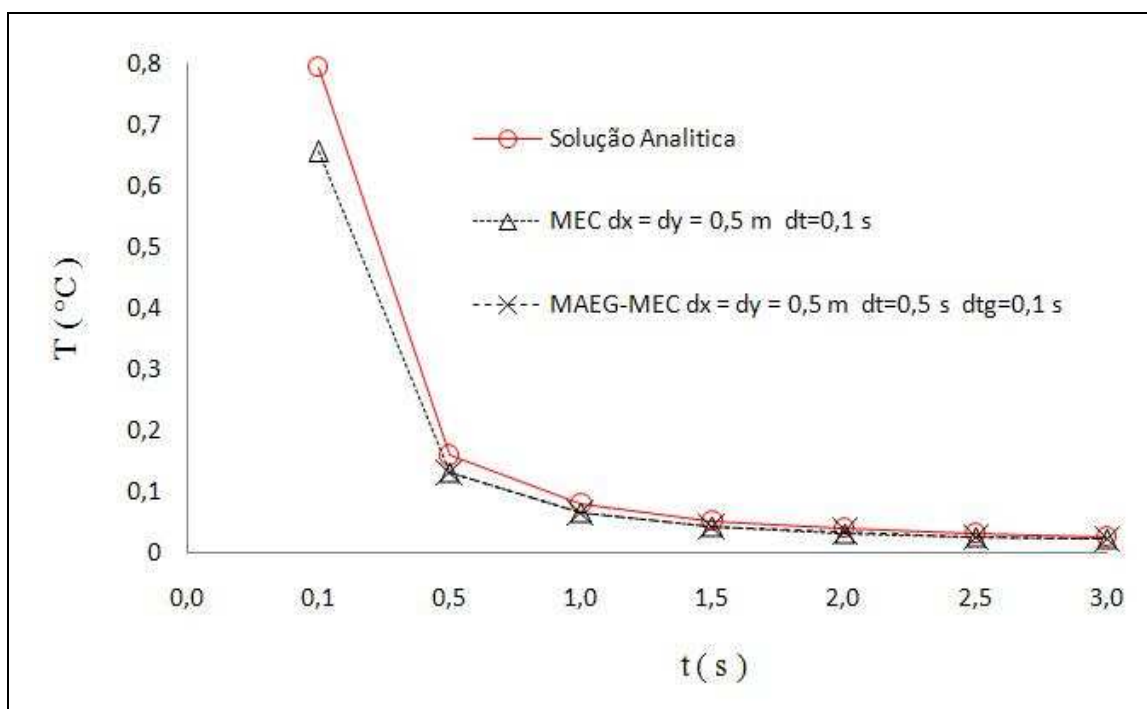


Figura 5.6 – Gráfico da solução Analítica, do MEC e do MAEG-MEC para o exemplo 1, com uso de 5 sub-passos no MAEG-MEC. Esta é uma representação da Tabela 5.3.

5.3.2- Exemplo 2

Este exemplo simula um problema unidimensional. A condição inicial é $T(x, y, 0) = 0,0 \text{ }^\circ\text{C}$ em todo domínio. As condições de contorno são fluxo térmico nulo nos dois lados horizontais da região retangular e potenciais térmicos de $T(0, y, t) = 0,0 \text{ }^\circ\text{C}$ no lado vertical esquerdo e $T(a, y, t) = 1,0 \text{ }^\circ\text{C}$ no lado vertical direito (ver Figura 5.7).

A história temporal da temperatura no ponto central do domínio é ilustrada pela Tabela 5.4 e pelo gráfico da Figura 5.8 para $\Delta x = \Delta y = 1,0 \text{ m}$ e $\Delta t = 1,0 \text{ s}$. Outra simulação foi realizada com discretização maior, usando $\Delta x = \Delta y = 0,5 \text{ m}$ e $\Delta t = 0,5 \text{ s}$, resultados estes mostrados na Tabela 5.5 e no gráfico da Figura 5.9. O resultado obtido pelo método MAEG-MEC é muito próximo da solução do MEC para $\Delta x = \Delta y = 1,0 \text{ m}$ e para $\Delta x = \Delta y = 0,5 \text{ m}$ o resultado fica ainda melhor. Finalmente foi gerada uma solução do MEC e do MAEG-MEC com $\Delta x = \Delta y = 0,1 \text{ m}$ e $\Delta t = 0,075 \text{ s}$ alcançando uma solução para os dois métodos muito próximos da solução analítica. Foi realizada uma interpolação linear, para a simulação três, para obter os pontos no tempo estabelecidos para a simulação inicial, os quais não são múltiplos do Δt adotado. Os resultados obtidos para este caso estão mostrados na Tabela 5.6 e sua representação gráfica na Figura 5.10. A solução analítica foi apresentada por WANG e ANDERSON (1982), equação (4.113), que será aqui repetida por conveniência:

$$T(x, t) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_2 \cos(n\pi) - T_1}{n} \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \exp \left(\frac{-\alpha n^2 \pi^2 t}{L^2} \right) \quad (5.14)$$

onde T_1 e T_2 são as condições de contorno e L é o comprimento do domínio na direção do fluxo, o qual neste exemplo é na direção x .

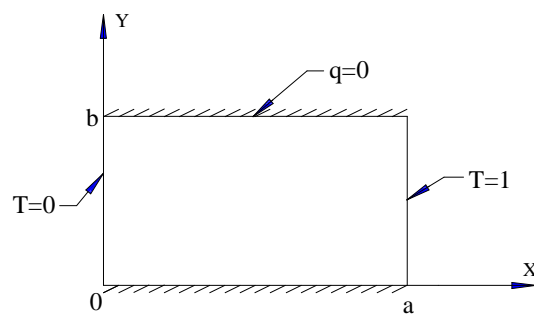


Figura 5.7 - Geometria e condições de contorno do exemplo 2. Condição inicial igual a zero em todos os pontos.

Tabela 5.4 – Temperatura e erros (E) relativos no ponto central do domínio para $\Delta x = \Delta y = 1,0 m$ e $\Delta t = 1,0 s$.

t(s)	Analítica	MEC		MAEG-MEC	
	T(°C)	T(°C)	E (%)	T(°C)	E (%)
0	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00
5	0,114	0,163	43,26	0,166	46,07
10	0,263	0,324	23,33	0,326	24,23
15	0,355	0,408	14,99	0,410	15,53
20	0,412	0,452	9,90	0,454	10,31
25	0,446	0,475	6,54	0,477	6,89
30	0,467	0,487	4,29	0,489	4,61
35	0,480	0,493	2,79	0,495	3,10
40	0,488	0,497	1,80	0,498	2,10
45	0,493	0,498	1,15	0,500	1,45
50	0,495	0,499	0,73	0,501	1,03
55	0,497	0,500	0,46	0,501	0,76
60	0,498	0,500	0,29	0,501	0,58

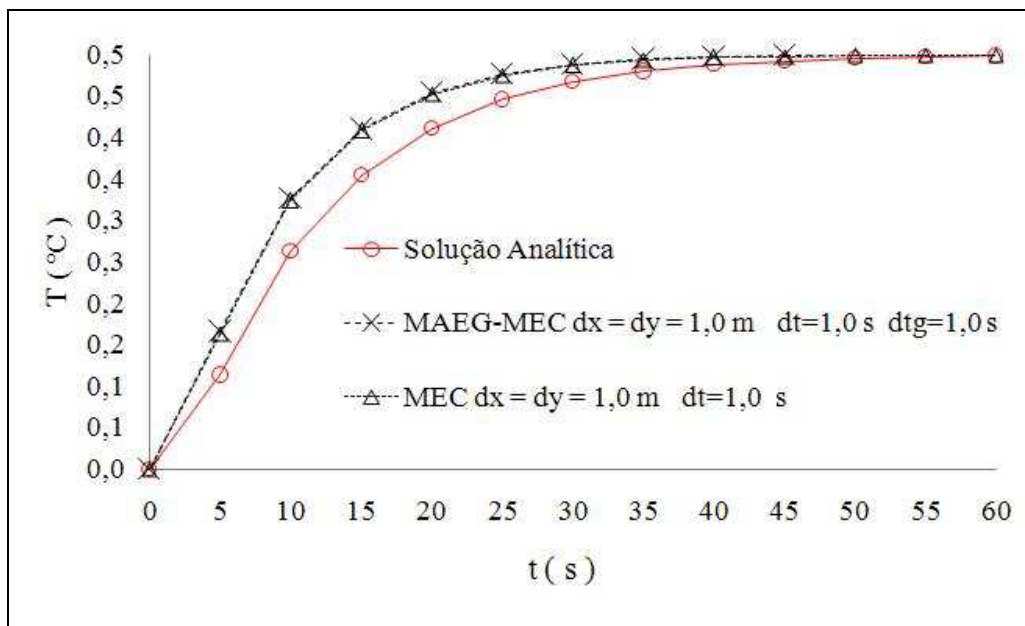


Figura 5.8 – Gráfico dos resultados obtidos com o exemplo 2 com $\Delta x = \Delta y = 1,0 m$ e $\Delta t = 1,0 s$. Esta figura representa graficamente os dados da Tabela 5.4.

Tabela 5.5 – Temperatura e erros (E) relativos no ponto central do domínio para

$$\Delta x = \Delta y = 0,5 \text{ m e } \Delta t = 0,5 \text{ s.}$$

t (s)	Analítica	MEC		MAEG-MEC	
	T (°C)	T (°C)	E (%)	T (°C)	E (%)
0	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00
5	0,114	0,144	26,80	0,146	28,59
10	0,263	0,302	14,89	0,302	14,91
15	0,355	0,390	9,83	0,389	9,52
20	0,412	0,439	6,66	0,437	6,24
25	0,446	0,466	4,51	0,464	4,04
30	0,467	0,481	3,03	0,479	2,54
35	0,480	0,490	2,02	0,487	1,52
40	0,488	0,494	1,33	0,492	0,83
45	0,493	0,497	0,87	0,494	0,37
50	0,495	0,498	0,57	0,496	0,06
55	0,497	0,499	0,36	0,496	0,14
60	0,498	0,499	0,23	0,497	0,27

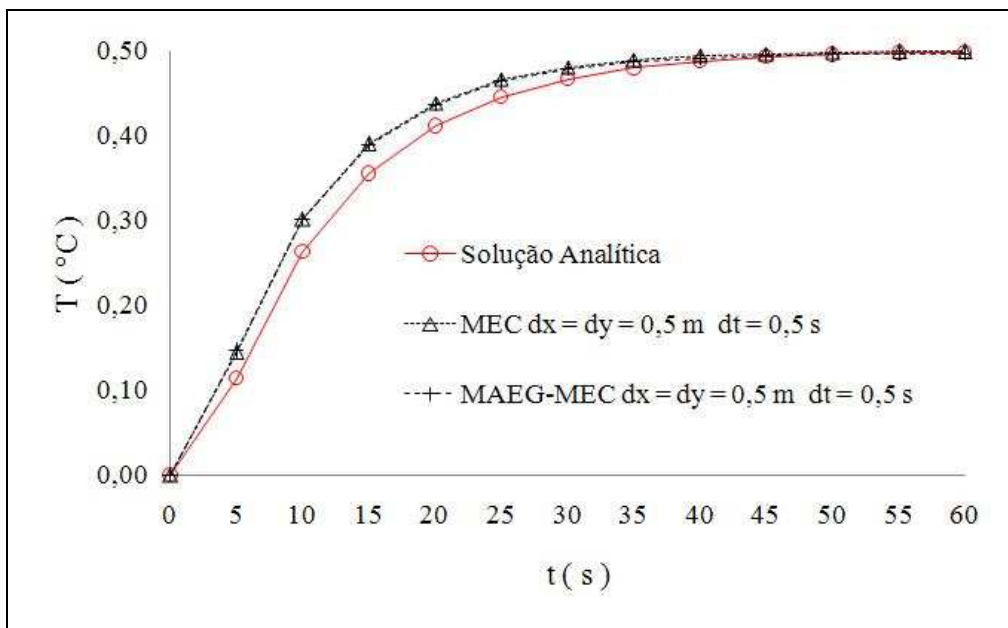


Figura 5.9 – Gráfico dos resultados obtidos com o exemplo 2 com $\Delta x = \Delta y = 0,5 \text{ m}$ e $\Delta t = 0,5 \text{ s}$. Esta figura representa os dados da Tabela 5.5.

Tabela 5.6 – Temperatura e erros (E) relativos no ponto central do domínio para

$$\Delta x = \Delta y = 0,1 \text{ m} \text{ e } \Delta t = 0,075 \text{ s.}$$

t (s)	Analítica	MEC		MAEG-MEC	
	T (°C)	T (°C)	E (%)	T (°C)	E (%)
0	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00
5	0,114	0,124	8,74	0,133	16,49
10	0,263	0,276	4,95	0,283	7,66
15	0,355	0,367	3,34	0,371	4,52
20	0,412	0,421	2,33	0,422	2,43
25	0,446	0,453	1,62	0,450	0,86
30	0,467	0,472	1,12	0,467	0,05
35	0,480	0,484	0,77	0,476	0,73
40	0,488	0,490	0,52	0,482	1,23
45	0,493	0,494	0,35	0,485	1,54
50	0,495	0,497	0,23	0,487	1,76
55	0,497	0,498	0,16	0,488	1,90
60	0,498	0,499	0,10	0,488	1,99

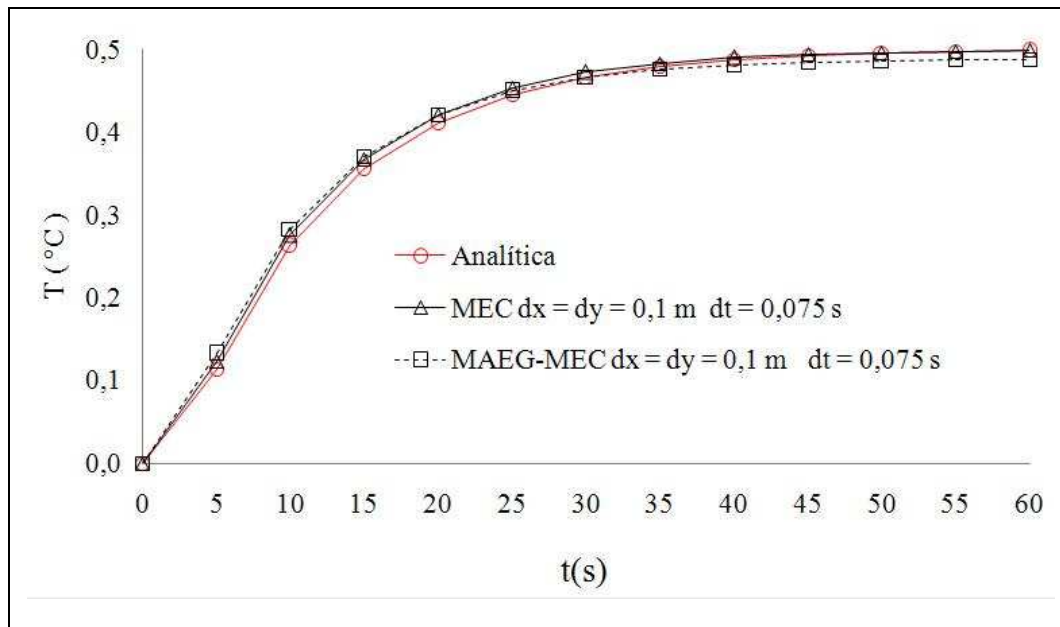


Figura 5.10 – Gráfico dos resultados obtidos com o exemplo 2 com $\Delta x = \Delta y = 0,1 \text{ m}$ e $\Delta t = 0,075 \text{ s}$. Esta figura representa os dados da Tabela 5.6.

5.3.3. Exemplo 3

Este exemplo simula um problema bidimensional. A condição inicial é $T(x, y, 0) = 0.0 \text{ °C}$ em todo o domínio. As condições de contorno são a temperatura unitária $T = 1.0 \text{ °C}$ em todos os lados da região como mostra a Figura 5.11. Simulações com o método MAEG-MEC e o MEC foram também calculados e comparados com a solução analítica apresentada por CARSLAW e JAEGER (1959, página 185), adaptada para 2-D, assim apresentada:

$$\begin{aligned} T(x, y, t) = T_1 - \frac{16T_1}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)(2m+1)} \\ \times \cos[(2n+1)\pi x/2a] \times \cos[(2m+1)\pi y/2b] \\ \times \exp\{-\alpha\pi^2 t/4\}[(2n+1)^2/a^2 + (2m+1)^2/b^2] \end{aligned} \quad (5.15)$$

Para este exemplo foram escolhidas três simulações para mostrar os resultados obtidos: 1) O domínio foi discretizado com $\Delta x = \Delta y = 1,0 \text{ m}$ e foi adotado um $\Delta t = 0,9 \text{ s}$. Os resultados estão mostrados na Tabela 5.7 e sua representação gráfica na Figura 5.12. 2) O domínio foi discretizado com $\Delta x = \Delta y = 0,5 \text{ m}$ e foi adotado um $\Delta t = 0,225 \text{ s}$ para os dois métodos. 3) Com o domínio discretizado com $\Delta x = \Delta y = 0,25 \text{ m}$ o MEC e o MAEG-MEC foram calculados com $\Delta t = 0,06 \text{ s}$. Nas três simulações foram realizadas interpolações lineares para obter os pontos no tempo adotados, os quais não são múltiplos do Δt adotado. Como no exemplo 2, observa-se aqui que os resultados do MEC e do MAEG-MEC estão convergindo para os valores obtidos com a solução analítica. O resultado do item dois está exposto na Tabela 5.8, a qual é representada graficamente pela Figura 5.13 e o resultado do item três está exposto na Tabela 5.9, a qual é representada graficamente pela Figura 5.14.

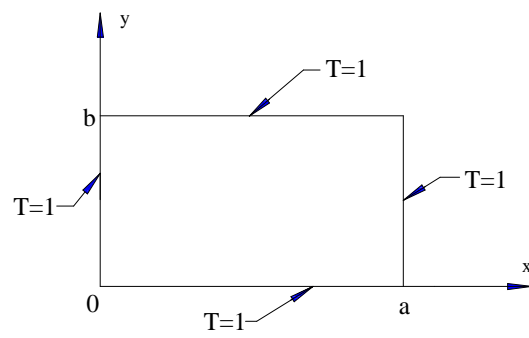


Figura 5.11 - Geometria e condições de contorno do exemplo 3.

Tabela 5.7 – Temperatura e erros (E) relativos no ponto central do domínio para

$$\Delta x = \Delta y = 1,0 \text{ m} \text{ e } \Delta t = 0,9 \text{ s.}$$

t (s)	Analítica	MEC		MAEG-MEC	
	T (°C)	T (°C)	E (%)	T (°C)	E (%)
0	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00
2	0,114	0,112	1,59	0,164	44,60
4	0,420	0,432	2,80	0,475	13,14
6	0,646	0,667	3,27	0,692	7,17
8	0,786	0,808	2,79	0,821	4,49
10	0,871	0,889	2,08	0,895	2,82
12	0,922	0,936	1,46	0,938	1,73
14	0,953	0,963	1,02	0,963	1,04
16	0,972	0,979	0,71	0,977	0,58
18	0,983	0,988	0,48	0,986	0,28
20	0,990	0,993	0,32	0,990	0,07

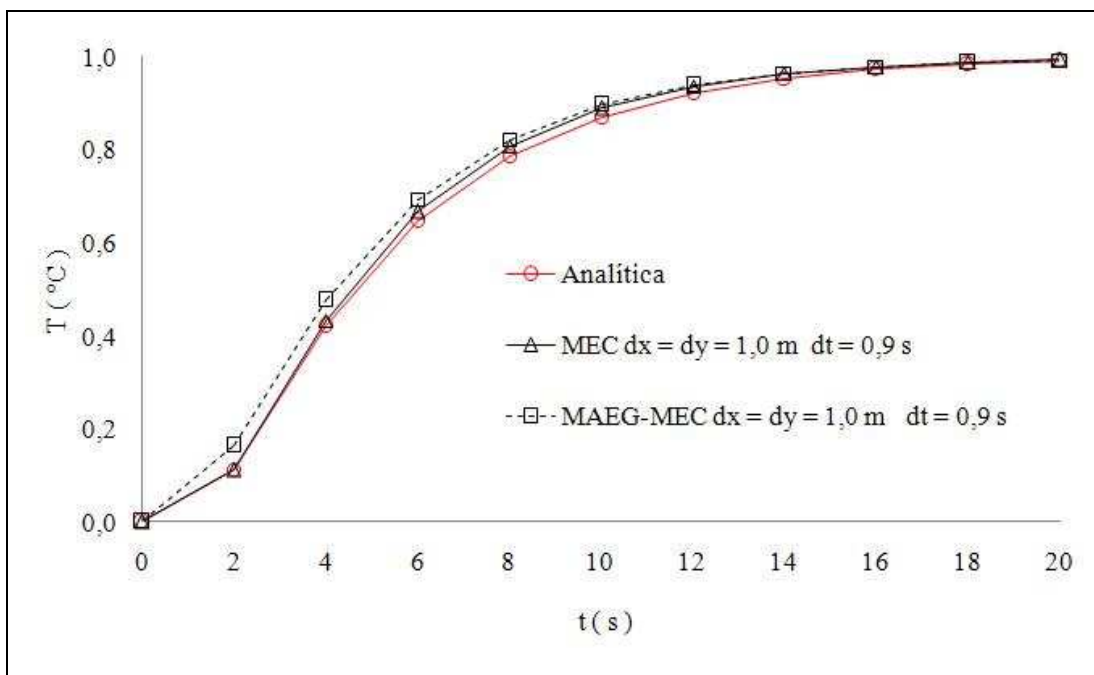


Figura 5.12 – Resultado do exemplo 3 para $\Delta x = \Delta y = 1,0\text{m}$ e $\Delta t = 0,9 \text{ s}$. Este gráfico representa os dados da Tabela 5.7.

Tabela 5.8 – Temperatura e erros (E) relativos no ponto central do domínio para $\Delta x = \Delta y = 0,5\text{m}$ e $\Delta t = 0,225\text{ s}$.

t (s)	Análítica	MEC		MAEG-MEC	
	T (°C)	T (°C)	E (%)	T (°C)	E (%)
0	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00
2	0,114	0,132	16,26	0,143	26,17
4	0,420	0,461	9,72	0,466	10,80
6	0,646	0,686	6,31	0,683	5,86
8	0,786	0,819	4,25	0,812	3,29
10	0,871	0,896	2,89	0,886	1,72
12	0,922	0,940	1,96	0,928	0,68
14	0,953	0,966	1,32	0,953	0,01
16	0,972	0,980	0,88	0,967	0,48
18	0,983	0,989	0,58	0,975	0,79
20	0,990	0,993	0,38	0,980	1,00

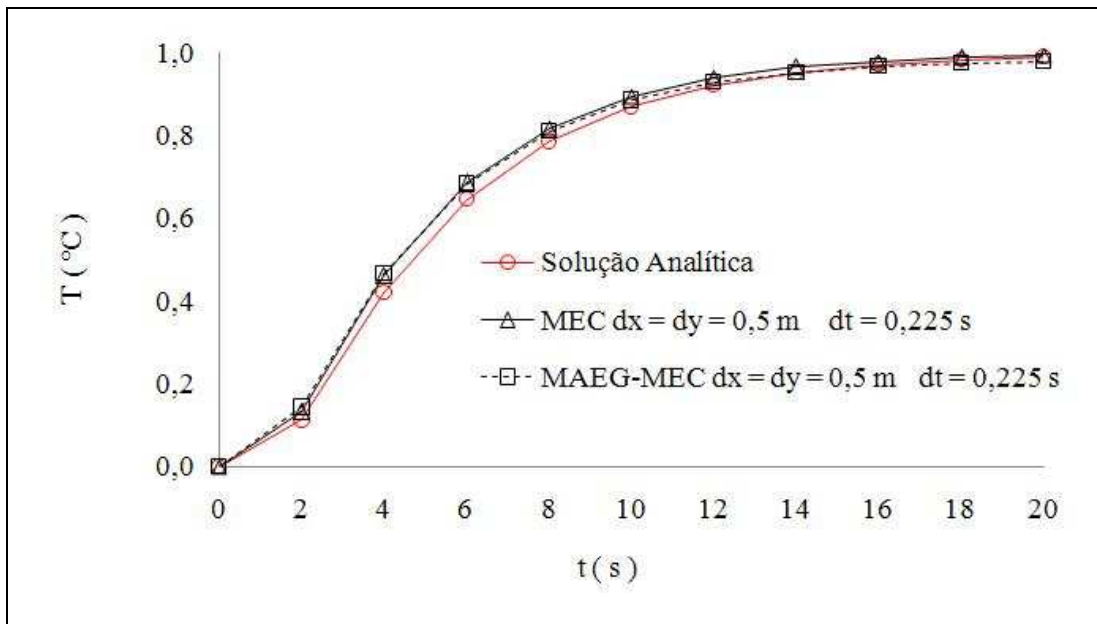


Figura 5.13– Gráfico do exemplo 3, apresentando os dados da Tabela 5.8.

Tabela 5.9 – Temperatura e erros (E) relativos no ponto central do domínio para $\Delta x = \Delta y = 0,25\text{m}$ e $\Delta t = 0,06\text{ s}$.

t (s)	Analítica	MEC		MAEG-MEC	
	T (°C)	T (°C)	E (%)	T (°C)	E (%)
0	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00
2	0,114	0,137	20,67	0,139	22,80
4	0,420	0,464	10,50	0,466	10,98
6	0,646	0,688	6,52	0,687	6,38
8	0,786	0,820	4,29	0,817	4,02
10	0,871	0,896	2,88	0,893	2,55
12	0,922	0,940	1,93	0,937	1,58
14	0,953	0,965	1,29	0,962	0,93
16	0,972	0,980	0,86	0,976	0,48
18	0,983	0,988	0,56	0,985	0,19
20	0,990	0,993	0,37	0,990	0,01

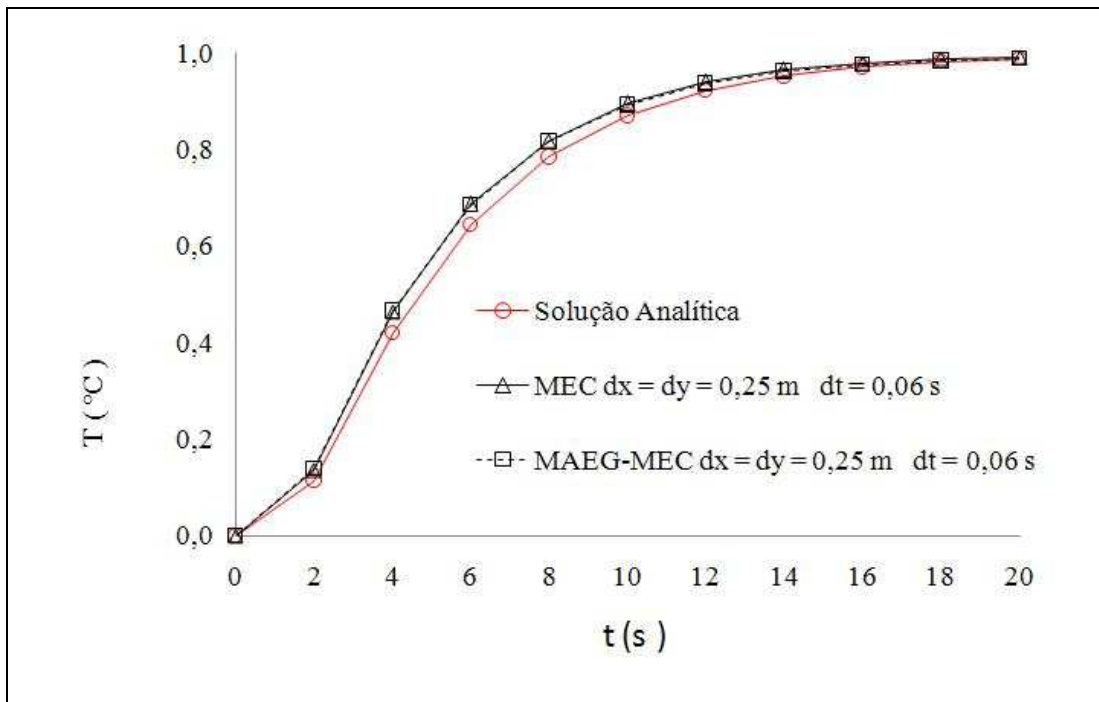


Figura 5.14– Temperatura no ponto central do domínio no exemplo 3. Este gráfico apresenta os dados da Tabela 5.9.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÃO

Na presente tese desenvolveu-se um modelo de simulação de difusão através dos fenômenos da condução de calor ou de escoamento de água subterrânea. Foi proposto um modelo numérico bidimensional, com geometria qualquer. Este modelo considera meios isotrópicos e homogêneos.

Um algoritmo foi apresentado no qual as funções de Green são obtidas mediante uma discretização espacial via Método dos Elementos de Contorno – MEC, e integração temporal através do Método de Aproximação Explícita de Green – MAEG. Em outros trabalhos deste gênero este método é denominado ExGA - “Explicit Green Approach”.

A verificação da técnica proposta baseou-se na comparação dos resultados obtidos com soluções exatas conhecidas na literatura especializada.

O MEC adotado caminha passo a passo no tempo, utilizando valores do potencial em alguns pontos do domínio, para poder avançar no tempo com potencial inicial diferente de zero. Foi necessário adotar este procedimento para poder resolver problemas com valores iniciais diferentes de zero com o MAEG.

Muitas vezes os pesquisadores apresentam o MEC como um método vantajoso em relação aos métodos conhecidos como o Método dos Elementos Finitos – MEF e o Método das Diferenças Finitas – MDF, por motivo de que nele não é necessário a discretização do domínio. Observa-se aqui que esta vantagem desaparece.

É importante citar que devido às características próprias do MEC muitas implementações do programa tiveram sucesso devido ao aprendizado obtido com o MAEG-MEF, no trabalho que culminou no artigo MANSUR et al. (2009).

No MAEG, o potencial, que pode ser o campo de temperatura em problemas de condução de calor ou a carga hidráulica em problemas de águas subterrâneas, é calculado explicitamente, no tempo, através da matriz de Green, a qual é determinada neste trabalho pelo MEC.

Verificou-se que existe muito tempo de processamento gasto em calcular matrizes independentes uma das outras. Isso favorece a exploração de processamento em paralelo.

Outra característica desse modelo é que as matrizes são calculadas considerando somente o tipo de condição de contorno, e não seus valores, o que favorece o estudo do comportamento de um sistema para diversos valores de potenciais ou fluxos, ou mesmo de condição inicial. O programa pode conter procedimentos de memorização das matrizes, de forma que o cálculo delas só seja realizado uma vez, com conseqüente economia de processamento.

Uma vez que a formulação proposta baseia-se no cálculo das funções de Green para um único incremento de tempo foi verificada a estratégia de utilização de sub-passos no tempo. Verificou-se que o passo no tempo do MEC para obter bons resultados muitas vezes é grande, dificultando o uso de sub-passos no MAEG dentro do limite de tempo transiente de alguns problemas.

Sugestões para trabalhos futuros:

- 1) Paralelização com respeito ao cálculo das matrizes;
- 2) Verificar a possibilidade e/ou a vantagem da utilização de sub-malhas;
- 3) Visando estudar duas regiões ou mais, com propriedades diferentes entre si, mas homogêneas e isotrópicas, pesquisar o acoplamento entre elas usando o MAEG-MEC x MAEG-MEC ou do MAEG-MEC x MEC. Esta solução permitiria, por exemplo, resolver problemas de transferência de calor na presença de inclusões situadas no interior do domínio.
- 4) Estudar a metodologia proposta para a equação de difusão-advecção;
- 5) Verificar a possibilidade de uso de interpolações com polinômios de ordem superior, tal como a regra 1/3 de Simpson, que é de segunda ordem, para melhorar os resultados. A interpolação usada nesta tese foi de variação linear, com o uso da regra do trapézio.
- 6) Calcular a matriz de Green com outros métodos numéricos. O MEF (MANSUR et al. (2009) , um método de integração híbrido tempo/Laplace (LOUREIRO *et al.*, 2009) e o MEC (presente tese) já foram utilizados;
- 7) Aplicação em problemas tridimensionais;

- 8) Executar ensaios experimentais em condução de calor para verificar as respostas obtidas com simulações analíticas e numéricas. A implementação de estudos experimentais poderia permitir, em longo prazo, um conhecimento mais profundo da validade prática dos modelos desenvolvidos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I.A., 1977, *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, Incorporated. Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, Dover, New York.
- BATHE, K.J., 1996, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. 2^a Edição, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, New Jersey, USA.
- BEAR, J., 1972, *Dynamics of Fluids in Porous Media*, 1^a Edição, American Elsevier Publishing Company Inc., New York, USA.
- BEAR, J., 1979, *Hydraulics of Groundwater*, 1^a Edição, McGraw-Hill International Book Company, Haifa, Israel.
- BEAR, J., DAGAN, G., 1964, "Moving Interface in Coastal Aquifers", *Journal of Hydraulics Division of A.S.C.E.* v. 90(HY4), pp. 193-216.
- BECK, J.V., 1984, "Green's function solution for transient heat conduction problems." *International Journal of Heat Mass Transfer*, v. 27, n. 8, pp. 1235–1244.
- BECK, J.V., COLE, K.D., HAJI-SHEIKH, A., LITKOUHI, B., 1992, *Heat Conduction using Green's Function.*, 1^a Edição, Hemisphere Publishing, New York, USA.
- BRADY, G. S., CLAUSER, H. R. e VACCARI, J. A., 2002, *Materials Handbook*, 15^a Edição, Editora McGraw-Hill Handbooks, U.S.A.
- BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C., 1984, *Boundary Element Techniques – Theory and Applications in Engineering*, v. 1, Springer-Verlag.
- BUTKOVSKIY, A. G., 1982, *Green's Functions and Transfer Functions Handbook*. Halstead Press: A Division of Wiley, New York.
- CARSLAW, H.S. and JAEGER, J.C., 1959, *Conduction of Heat in Solids*. 2^a Edição, Oxford University Press, Oxford, England.
- CIRILO, J.A., CABRAL, J.P., 1989, "Modelos de Água Subterrânea". In: Silva, R. C. V. (ed.), *Métodos Numéricos em Recursos Hídricos*, 1^a Edição, capítulo 5, Volume 1, Editora ABRH, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- COLE, K. D. and MCGAHAN, W. A., 1993, "Theory of multilayers heated by laser absorption", *Journal of Heat Transfer*, v. 115, pp. 767–770.

- DE WIEST, R.J.M., 1969, *Flow Through Porous Media*. Academic Press, New York, USA.
- DIEGUEZ, J. P. P., 1992, Métodos Numéricos Computacionais para a Engenharia, Editora Interciência Ltda, Rio de Janeiro, Brasil.
- DOMINGUEZ, J., 1993, "Boundary Elements in Dynamics". Southampton e Boston: Computational Mechanics Publications.
- DORS, K., 2007, Propagação de ondas elásticas utilizando funções de Green numéricas locais em modelos discretizados por elementos finitos. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- FENG, Z. and MICHAELIDES, E. E., 1997, "The use of modified Green's functions in unsteady heat transfer.", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 40, n. 12, pp. 2997–3002.
- GENETTI, A. J. Jr., 1999. "Grounwater Hydrology", Manual nº 1110-2-1421, do U.S. Army Corps of Engineers, Washington, DC 20314-1000.
- GLEICK, P. H., 1996: "Water resources". In: S. H. Schneider (ed.), *Encyclopedia of Climate and Weather*, Oxford University Press, New York, vol. 2, pp.817-823
- GRAY, L. J., KAPLAN, T., RICHARDSON, J.D., and PAULINO, G.H., 2003, "Green's functions and boundary integral analysis for exponentially graded materials: Heat conduction.", *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, v. 70, n. 4, pp. 543–549.
- GREENBERG, M. D., 1971, *Applications of Green's Functions in Science and Engineering*, 1^a Edição, Prentice-Hall. Engelwood Cliffs, New Jersey.
- HAJI-SHEIKH, A. and LAKSHMINARAYANAN, R., 1987, "Integral solution of diffusion equation. Part 2: Boundary conditions of second and third kinds.", *Journal of Heat Transfer* 109, pp. 557-562.
- HAJI-SHEIKH, A., 1988, "Heat diffusion in heterogeneous media using heat-flux-conserving basis functions.", *Journal of Heat Transfer* 110, pp. 276–282.
- HARR, Milton. E., 1999, "Groundwater and Seepage: Accounting for Variability". In: Jacques W. Delleur (ed.), *The Handbook of Groundwater Engineering*. 1^a Edição, Capítulo 4, publicado por CRC Press LLC, USA.
- KEMBLOWSKY, M., 1987, "A Review of Boundary Element Models of Saltwater Intrusion", *Topics in Boundary Elem. Research*, v. 4, Springer Verlag.
- KUO, H. and CHEN, T., 2005, "Steady and transient Green's functions for anisotropic conduction in an exponentially graded solid", *International Journal of Solids and Structures*, v. 42, pp. 1111–1128.

- LEAP, D. I., 1999. "Geological Occurrence of Groundwater". In: Jacques W. Delleur (ed.), *The Handbook of Groundwater Engineering*, 1ª Edição, capítulo 1, Boca Raton: CRC Press LLC.
- LIENHARD IV, J. H. e LIENHARD V, J. H., 2005, *A Heat Transfer Textbook*. 2ª Edição, Phlogiston Press, Cambridge, Massachusetts, U.S.A.
- LIU, C., SZECZODY, J. E., ZACHARA, J. M and BALL, W.P., 2000, "Use of Generalized Integral Transform Method for Solving Equations of Solute Transport in Porous Media", *Advances in Water Resources*, v. 23, pp. 483-492.
- LOUREIRO, F.S., 2007, *Métodos de integração temporal baseados no cálculo numérico de funções de Green através do método dos elementos finitos*. Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- LOUREIRO, F. S. ; MANSUR, W.J. ; VASCONCELLOS, C. A. B. , 2009, "A hybrid time/Laplace integration method based on numerical Green's functions in conduction heat transfer." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 198, p. 2662-2672.
- LOUREIRO, F. S. ; MANSUR, W.J. , 2009, "A new family of time integration methods for heat conduction problems using numerical Green's functions". *Computational Mechanics*, v. 44, p. 519-531.
- MANSUR, W. J., 1983, *A Time Steeping Technique to Solve Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method*. Ph.D. Thesis, University of Southampton, England.
- MANSUR, W. J., VASCONCELLOS, C.A.B., ZAMBROZUSKI, N.J.M., ROTUNNO FILHO, O.C., 2009, "Numerical Solution for the Linear Transient Heat Conduction Equation Using an Explicit Green's Approach". *International Journal of Heat and Mass Transfer* v. 52, pp. 694–701.
- MARTIN, P.A., RICHARDSON, J.D., GRAY, L.J. and BERGER, J.R. , 2002, "On Green's function for a three-dimensional exponentially graded elastic solid.", *Proc. R. Soc. Lond. A*, v. 458, pp. 1931–1947.
- MORSE, P. M. and FESHBACH, H., 1953, *Methods of Theoretical Physics*, 1ª Edição, Volume I e II. McGraw-Hill, New York, USA.
- NORRIS, A. N, 1994, "Dynamic Green's function in anisotropic piezoelectric, thermoelastic and poroelastic solids", *Proc. R. Soc. Lond. A*, v. 447, pp.175–188.
- OLIVEIRA, J. N., 2002, *Ferramental de gestão de águas subterrâneas para a cidade de São José do Rio Preto, SP*. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, SP, Brasil.
- OLIVEIRA, J. B., 2009, *Estudo paramétrico da contaminação no entorno de um aterro sanitário*, Tese de Mestrado, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.

- ÖZISIK, M.N., 1980, Heat Conduction, Ed. John Wiley, New York.
- ROACH, G. F., 1970, Green's Functions. Cambridge University Press, 1ª Edição, New York.
- ROCHA, R. P. A. and CRUZ, M. E., 2001, "Integral Transform Solutions for One-Dimensional Transient Flow and Contaminant Transport in Dual-Porosity Systems". In: Proceedings of the 2nd International Conference on Computational Heat and Mass Transfer, Rio de Janeiro, Brasil.
- SEZER, A., GÖKTEPE, A.B., ALTUN, S., 2009, "Estimation of the permeability of granular soils using neuro-fuzzy system", AIAI-2009, Workshops Proceedings, pp. 333-342.
- SILVEIRA, A.L.L., 1993, "Ciclo Hidrológico e Bacia Hidrográfica", In: TUCCI, C.E.M. (ed.), Hidrologia: Ciência e Aplicação, 2ª Edição, capítulo 2, Ed. da Universidade/UFRGS – ABRH, Porto Alegre, Brasil.
- STACEY, F. D., 2000, "Kelvin's age of the Earth paradox revised.", Journal of Geophysical Research, v. 105, n. B6, pp. 13,155-13,158.
- STAKGOLD, I., 1979, Green's Functions and Boundary Value Problems, 1ª Edição Wiley, New York.
- STALLMAN, R.W., 1956. "Numerical analysis of regional water levels to define aquifer hydrology", Eos, Trans. American Geophysical Union 37(4): 451-460.
- SUTRADHAR, A., PAULINO, G. H. and GRAY, L.J., 2002, "Transient heat conduction in homogeneous and non-homogeneous materials by the Laplace transform Galerkin boundary element method", Engineering Analysis with boundary Elements, n. 26, pp. 119–132.
- TRESCOTT, P.C. and LARSON, S.P., 1977, "Comparison of iterative method of solving two-dimensional groundwater flow equation", Water Resources Research, v. 13, n. 1, pp. 125-136.
- TURNER, M. R., CLOUGH, R., MARTIN, H., TOPP, L., 1956, Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. Journal Aero. Sei., v. 23, n. 9, pp. 805-823.
- VASCONCELLOS, C.A.B., 2001, Simulação numérica de escoamentos em meios porosos não-saturados. Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- VASCONCELLOS, C.A.B. AMORIM, J.C.C., GUEDES, R.O.C and SCOFANO NETO, F., 2001, "Application of the Generalized Integral Transform Technique for Vertical Infiltration Flow in Unsaturated Soils". In: IV Encontro de Modelagem Computacional. Instituto Politécnico da UERJ, Nova Friburgo, RJ, Brasil.

- VASCONCELLOS, C.A.B., AMORIM, J.C.C. e SCOFANO NETO, F., 2005, "Comparação entre Soluções Numéricas e Semi-analíticas para Problemas Governados pela Equação de Richards". In: XXVI CILAMCE – Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Guarapari, ES, Brasil.
- VASCONCELLOS, C. A. B., 2008. Modelagem de Águas Subterrâneas utilizando a Aproximação Explícita de Green e o Método de Elementos Finitos, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- VERRUIJT, A., 1982, Theory of Groundwater Flow, 2^a Edição. Delft University of Technology, The Neterland.
- WANG, H.F., ANDERSON, M.P., 1982, Introduction to Groundwater Modeling: Finite Difference and Finite Element Methods, Academic Press Inc., San Diego, USA.
- WROBEL, L.C., 1981, Potencial and Viscous Flow Problems Using the Boundary Element Method. Ph.D. Thesis, University Southampton, England.
- WROBEL, L.C., 1989, "Introdução aos Métodos Numéricos". In: Silva, R. C. V. (ed.), Métodos Numéricos em Recursos Hídricos, 1^a Edição, capítulo 1, Volume 1, Editora ABRH, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- YONG S. Chae e AHMED Hamidi, 1999, Groundwater and Surface Water Pollution, CRC Press LLC.