



COPPE/UFRJ

MODELAGEM SÍSMICA ANISOTRÓPICA ATRAVÉS DO MÉTODO DAS
DIFERENÇAS FINITAS UTILIZANDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES EM
SEGUNDA ORDEM

Leandro Di Bartolo

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientadores: Webe João Mansur
Cleber Dors

Rio de Janeiro
Outubro de 2010

MODELAGEM SÍSMICA ANISOTRÓPICA ATRAVÉS DO MÉTODO DAS
DIFERENÇAS FINITAS UTILIZANDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES EM
SEGUNDA ORDEM

Leandro Di Bartolo

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Examinada por:

Prof. Webe João Mansur, Ph.D.

Dr. Cleberson Dors, D.Sc.

Prof. Breno Pinheiro Jacob, D.Sc.

Prof. Jessé Carvalho Costa, D.Sc.

Dr. André Bulcão, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
OUTUBRO DE 2010

Di Bartolo, Leandro

Modelagem Sísmica Anisotrópica Através do Método das Diferenças Finitas Utilizando Sistemas de equações em Segunda Ordem/Leandro Di Bartolo. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2010.

XXI, 222 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: Webe João Mansur

Cleberson Dors

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Civil, 2010.

Referências Bibliográficas: p. 148 – 158.

1. Método das Diferenças Finitas. 2. Malha Intercalada. 3. Modelagem Sísmica. 4. Anisotropia. 5. Ondas Acústicas. 6. Ondas Elásticas. I. Mansur, Webe João *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

Às Denises.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Prof. Webe Mansur por ter aceito me orientar, o que me permitiu ingressar na área — migrando da astrofísica estelar para geofísica aplicada — e por ter provido os meios para que este trabalho pudesse ser realizado. Agradeço especialmente ao meu segundo orientador e amigo Cleberson Dors pela orientação conjunta deste trabalho, pelos incontáveis ensinamentos em programação e sismica ao longo destes anos e pelo acompanhamento do trabalho no dia a dia.

Agradeço ao André Bulcão pela colaboração prestada, em especial na fase inicial deste trabalho, ajudando no desenvolvimento do primeiro programa de modelagem que fiz utilizando diferenças finitas e na implementação da migração RTM.

Gostaria de registrar também meus sinceros agradecimentos a todos os colegas do LAMEC pela companhia agradável e pelas diversas discussões que contribuíram para a minha formação e para o trabalho desenvolvido. Especificamente, agradeço ao Cid e ao Pablo pela ajuda prestada em Fortran, ao Elias pelas inúmeras discussões sobre sismica, anisotropia e física em geral, além da troca de material bibliográfico. Agradeço também ao Israel, Wellington, Wilson, Paulo, Cátia, Edivaldo e Franciane; e ao Leonardo Pinheiro e Leonardo Miers. Obrigado à Ivone pela apoio prestado durante o curso.

Obrigado ao meu orientador de mestrado em astrofísica, Gustavo Porto de Mello, pela contribuição prestada na minha formação científica, durante os dois anos de mestrado e pela compreensão e apoio da minha escolha por mudar de área.

Obrigado também à todos os professores que tive a sorte de ter nesta longa trajetória da minha formação, em especial — no bacharelado em Física na UERJ — ao Roberto Moreira, Cesar Linhares, Luis Oxman, Ivan da Cunha Lima, Caio Lewenkopf, Mauricio Vilches, Canalle, Silvio Sorella e Amós Troper, e — na UFRJ — ao Moysés Nussenzveig e Luiz Davidovich. Obrigado pelas excelentes aulas. A admiração que tenho por cada um deles sempre foi e continua sendo uma fonte de inspiração contínua pra mim.

Agradeço à toda minha família, em especial minha mãe Denise e minhas irmãs Tamara e Priscila, pelo apoio prestado, sem os quais a minha trajetória científica,

ao longo de todos estes anos, desde o ingresso no curso de física até hoje, teria sido muito mais árdua. Muito obrigado também à minha mulher Denise Costa pelo companheirismo, cumplicidade e pelo apoio em todas as horas.

Agradeço aos meus grandes amigos Luis Juracy, Carlos Magno, Gustavo de Barros, Fabrício Casarejos e Jaime Villas da Rocha. Magno, obrigado pelos scripts do GNUPlot e pela disponibilidade em ajudar. Jaime, obrigado pela contínua contribuição ao longo da minha trajetória, desde o início da graduação até hoje, e sobretudo pela amizade de mais de uma década e pelo apoio em diversos momentos importantes. Agradeço também aos amigos André Saraiva, Marcus Vinicius Moutinho, Carla Melo, Alexandre Magnus e Marcos Esteves.

Por fim, gostaria de agradecer ao CNPq e FAPERJ pelo apoio financeiro parcial prestado em diferentes fases da elaboração deste trabalho, sem os quais teria sido impossível sua realização.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

MODELAGEM SÍSMICA ANISOTRÓPICA ATRAVÉS DO MÉTODO DAS
DIFERENÇAS FINITAS UTILIZANDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES EM
SEGUNDA ORDEM

Leandro Di Bartolo

Outubro/2010

Orientadores: Webe João Mansur
Cleberon Dors

Programa: Engenharia Civil

Neste trabalho, são desenvolvidas formulações numéricas generalizadas para a resolução do problema de propagação de ondas sísmicas via o método das diferenças finitas com malhas intercaladas. São abordadas duas famílias de esquemas numéricos denominados de esquemas de campo único, baseado em equações de segunda ordem, de acordo com a malha utilizada: malha intercalada tradicional (VIRIEUX, 1986) ou malha rotacionada SAENGER *et al.* (2000). Destaca-se que a primeira família é adequada para a propagação de ondas em meios elásticos com anisotropia até ortotrópica (incluindo os sub-casos isotrópico e acústico), enquanto a segunda é adequada para meios com anisotropia geral. É desenvolvido um método geral para discretização de equações de campo único em malhas intercaladas, demonstrando-se, então, que tais esquemas resultantes apresentam a mesma precisão e estabilidade numérica dos esquemas clássicos correspondentes, mas com a vantagem de demandarem menos memória. Em relação ao custo computacional, os diversos esquemas apresentam características variadas, alguns se mostrando mais vantajosos outros menos. Foram discutidas questões referentes à aplicação da fonte sísmica nos diferentes esquemas implementados. Enfatiza-se que a aplicação errada da fonte pode levar a problemas na propagação da onda. Ao final, são apresentados diversos exemplos demonstrando a aplicação dos esquemas desenvolvidos e discutindo suas características em comparação com esquemas da literatura.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

FINITE DIFFERENCE SEISMIC ANISOTROPIC MODELLING USING
SECOND ORDER SYSTEMS OF EQUATIONS

Leandro Di Bartolo

October/2010

Advisors: Webe João Mansur
Cleberson Dors

Department: Civil Engineering

In this research, general numerical formulations are developed for solving the problem of seismic wave propagation via the staggered finite difference method. Are outlined two families of numerical schemes called single-field (SF) schemes based on second order equations, according to the staggered grid adopted: standard staggered grid (VIRIEUX, 1986) and rotated staggered grid SAENGER *et al.* (2000). It is noteworthy that the first family is suitable for elastic media up to orthotropic anisotropy (including the isotropic and acoustic sub-cases), while the second is for general anisotropy. It is developed a general method for discretization of SF equations using staggered grid, being proved that such schemes results have the same accuracy and stability of corresponding classic numerical schemes, but with the advantage of less memory demanding. Regarding the computational cost, the different schemes have various characteristics, some more some less advantageous. Issues were raised concerning the application of seismic source in the various schemes implemented. It is emphasized that the misapplication of the source can lead to problems in wave propagation. Finally, several examples are presented demonstrating the application of the developed schemes and their characteristics are discussed in comparison with schemes presented in the literature.

Sumário

Lista de Figuras	xiv
Lista de Tabelas	xvii
Lista de Símbolos	xviii
Lista de Abreviaturas	xx
1 Introdução	1
1.1 Contextualização do trabalho	1
1.2 Modelagem sísmica	5
1.3 Revisão bibliográfica	9
1.4 Objetivos do trabalho	13
1.5 Estrutura do trabalho	14
2 Teoria Geral da Propagação de Ondas Elásticas	16
2.1 A equação geral da onda elástica	18
2.1.1 Conservação da quantidade movimento	19
2.1.2 Relações constitutivas	21
2.2 Representações da equação geral da onda elástica	22
2.2.1 Equações de campo duplo	22
2.2.2 Equações de campo único (equações de 2a. ordem)	23
2.3 Equações para o caso bidimensional	24
2.3.1 Notação de Voigt	25
2.3.2 Anisotropia geral	26
2.3.3 Caso ortotrópico	29
2.3.4 Caso isotrópico	31
2.4 Representações para a equação geral da onda acústica	34
2.5 Termo fonte, condições de contorno e condições iniciais	36
2.5.1 Fonte sísmica	36
2.5.2 Condições de contorno e condições iniciais	40

3	Operadores de Diferenças Finitas para Malhas Intercaladas	42
3.1	Operadores clássicos para malha intercalada	42
3.2	Configurações de malhas intercaladas	46
3.2.1	Conceito de malha intercalada	46
3.2.2	Malha intercalada padrão	49
3.2.3	Malha intercalada rotacionada	50
3.3	Formulações clássicas para equações de campo duplo	53
3.3.1	Caso ortotrópico (ortorrômbo)	53
3.3.2	Caso geral (anisotropia qualquer)	55
3.4	Relação generalizada para obtenção dos operadores de derivada segunda	56
3.5	Obtenção dos operadores de derivada segunda generalizados nas ma-	
	lhas intercaladas	57
3.5.1	Operador temporal	58
3.5.2	Operadores espaciais na malha intercalada padrão	59
3.5.3	Operadores espaciais na malha rotacionada	63
4	Formulações Numéricas Generalizadas para Malhas Intercaladas	70
4.1	Formulações para deslocamentos (velocidades)	72
4.1.1	Caso ortotrópico (ortorrômbo)	73
4.1.2	Caso anisotrópico geral	74
4.2	Formulações para tensões	77
4.2.1	Caso acústico	77
4.2.2	Caso ortotrópico (ortorrômbo)	79
4.2.3	Caso geral (anisotropia qualquer)	79
4.3	Equivalência entre esquemas de campo único e campo duplo	79
4.4	Esquemas de ordem superior no tempo	82
4.4.1	Formulação acústica	82
4.4.2	Formulação elástica geral	85
4.5	Aplicação da fonte sísmica	86
4.5.1	Amostragem da fonte	86
4.5.2	Expressões discretas	86
4.6	Condições de contorno e amortecimento	89
4.7	Estabilidade e dispersão numéricas	91
4.7.1	Estabilidade numérica	91
4.7.2	dispersão numérica	94
4.8	Armazenamento e custo computacionais	94
4.9	Aspectos importantes para a comparação entre os esquemas	99

5	Exemplos e Aplicações	101
5.1	Sumário dos esquemas implementados	102
5.2	Avaliação da equivalência da assinatura da fonte	104
5.2.1	Formulações acústicas	105
5.2.2	Formulações elásticas isotrópicas	110
5.2.3	Formulações elásticas anisotrópicas	116
5.3	Avaliação dos operadores para modelo de camadas	124
5.3.1	Formulações acústicas	125
5.3.2	Formulações elásticas isotrópicas	128
5.3.3	Formulações elásticas anisotrópicas	130
5.3.4	Comparação de esquemas elásticos e acústicos e sismogramas .	131
5.4	Aplicação para o modelo Marmousi 2	132
6	Conclusões	141
	Referências Bibliográficas	148
A	Teoria da Propagação de Ondas acústicas	159
A.1	Equação geral da onda acústica	159
A.1.1	Conservação da massa	160
A.1.2	Conservação da quantidade de movimento	161
A.1.3	Relações constitutivas	161
A.2	Linearização das equações gerais	162
A.2.1	Equação da continuidade	163
A.2.2	Equação de movimento	163
A.2.3	Equação de estado	164
A.2.4	Equações finais linearizadas	164
A.3	Representações da equação geral da onda acústica	165
A.3.1	Equações em termos da pressão e das velocidade	165
A.3.2	Equações em termos da pressão e dos deslocamentos	165
A.3.3	Equação da onda de pressões	165
A.3.4	Equação da onda de velocidades	167
A.3.5	Equação da onda de deslocamentos	167
B	Definições Básicas e Tensor de Elasticidade	169
B.1	Definições básicas	169
B.1.1	Tensor de deformação	169
B.1.2	Tensor de tensão	170
B.2	Tensor de Elasticidade	173
B.2.1	Notação de Voigt	176

B.2.2	Caso geral	177
B.2.3	Simetria ortotrópica (ortorrômbica)	178
B.2.4	Sub-casos do caso ortotrópico	178
B.2.5	Simetria tetragonal	180
B.2.6	Simetria hexagonal (VTI)	180
B.2.7	Simetria cúbica	183
B.2.8	Simetria isotrópica	183
B.2.9	Meios bidimensionais	187
C	Método das Diferenças Finitas (MDF)	188
C.1	Derivada primeira	190
C.2	Derivada segunda	190
C.3	Operadores de diferenças como interpolações	191
C.3.1	Aproximação de quarta ordem	192
C.4	Propriedades das equações de diferenças	193
C.4.1	Critério de não-dispersão numérica	194
C.4.2	Critério de estabilidade	195
D	Formulações Numéricas Clássicas	197
D.1	Formulações com malha simples	197
D.1.1	Equação da onda acústica clássica	197
D.1.2	Equação da onda acústica geral	198
D.1.3	Equação elástica da onda	201
D.2	Formulações com malha intercalada	203
D.2.1	Formulação acústica	203
D.2.2	Formulação elástica isotrópica	206
E	Expressões de Campo Único em Quarta Ordem no Espaço	208
E.1	Anisotropia ortotrópica	208
E.2	Anisotropia geral	210
F	Esquema de Lax-Wendroff e Termos de Correção	211
F.1	Equação da onda acústica para densidade constante	211
F.2	Equação da onda acústica geral	213
F.2.1	Aplicação da fonte	214
F.3	Discretização do termo de correção: Caso acústico	215
F.3.1	Termos $T^{(1)}$	215
F.3.2	Termos $T^{(2)}$	216
F.3.3	Discretizações	216
F.3.4	Expressões finais	218

F.4	Discretização do termo de correção: Caso elástico	219
F.4.1	Simplificações para meios isotrópicos	219
F.4.2	Discretizações	221
F.4.3	Expressões finais	221

Lista de Figuras

2.1	Região do espaço contendo o material de interesse.	19
2.2	Gráficos do parâmetro de injeção de massa i_V e sua derivada.	39
2.3	Gráficos da fonte da equação da onda acústica e sua transformada.	39
3.1	Malha intercalada em x e z	43
3.2	Malha intercalada em uma direção	44
3.3	Malha intercalada proposta por Yee.	47
3.4	Face do cubo de Yee.	48
3.5	Malha intercalada de Virieux.	49
3.6	Malha intercalada rotacionada.	51
3.7	Transformação de coordenadas na malha rotacionada	51
3.8	<i>Stencil</i> do operador geral de derivada segunda contendo propriedade.	61
3.9	<i>Stencil</i> da derivada cruzada com propriedade em quarta ordem.	62
4.1	Pontos sob a influência da fonte para o esquema acústico em velocidade.	88
4.2	Condições de contorno não reflexivas e camadas de amortecimento.	91
5.1	Comparação dos instantâneos da modelagem acústica para esquemas de campo único e duplo.	106
5.2	Comparação do campo de pressão acústica ao longo do tempo para os esquemas de segunda ordem no espaço.	107
5.3	Comparação do campo de pressão acústica ao longo do tempo para os esquemas de quarta ordem no espaço.	108
5.4	Comparação dos campo de pressão acústica ao longo do tempo para os esquemas de quarta ordem no tempo.	109
5.5	Comparação dos instantâneos da modelagem com operador de Kelly e de campo único acústico para água e carvão.	111
5.6	Comparação dos campo de velocidade ao longo do tempo para os diferentes esquemas isotrópicos.	112
5.7	Comparação dos campo de velocidade ao longo do tempo para os diferentes esquemas isotrópicos.	113

5.8	Aplicação da fonte no esquema de Kelly em comparação com o de campo único.	114
5.9	115
5.10	116
5.11	Instantâneos mostrando a assinatura da fonte para diversos folhelhos.	117
5.12	Instantâneos mostrando a assinatura da fonte para diferentes materiais anisotrópicos.	118
5.13	Comparação dos campos de velocidades para os esquemas anisotrópicos.	119
5.14	Comparação dos campos de velocidades (v_z) para os esquemas de campo único e de Kelly.	120
5.15	Instantâneos mostrando a propagação com o esquema de Kelly.	120
5.16	Comparação dos campos de velocidades (v_z) para os esquemas de campo único e de Kelly.	121
5.17	Instantâneos mostrando defeito na aplicação da fonte na malha rotacionada.	122
5.18	Comparação das componentes v_z para os esquemas na malha rotacionada.	122
5.19	Instantâneos mostrando a assinatura da fonte para materiais com forte anisotropia.	123
5.20	Comparação do campo v_z utilizando o esquema de campo único e o de campo duplo na malha rotacionada.	124
5.21	Modelos de camadas utilizado.	125
5.22	Instantâneos do campo de pressão mostrando a propagação da onda acústica.	126
5.23	Comparação dos traços dos sismogramas de afastamento de $x = 1,5\text{km}$ para os diferentes esquemas acústicos de segunda ordem.	127
5.24	Comparação dos traços dos sismogramas de afastamento de $x = 1,5\text{km}$ para os diferentes esquemas acústicos de segunda ordem.	128
5.25	Instantâneos do campo de velocidade vertical mostrando a propagação da onda elástica isotrópica.	129
5.26	Comparação dos campo de velocidade vertical para os esquemas isotrópicos.	130
5.27	Instantâneos mostrando a propagação da ondas elástica isotrópica.	134
5.28	Comparação dos campo de velocidade vertical para os esquemas anisotrópicos na malha rotacionada.	135
5.29	Comparação dos campo de velocidade vertical para os esquemas anisotrópicos na malha rotacionada.	136
5.30	Comparação entre os sismogramas acústico e elástico para o modelo de camadas.	137

5.31	Comparação entre os simogramas elásticos isotrópico com anisotrópico para o modelo de camadas.	138
5.32	Modelo Marmousi 2: distribuição velocidades e densidade.	139
5.33	Traços do sismograma para os esquemas na malha padrão.	140
5.34	Traços do sismograma para os esquemas na malha rodada.	140
A.1	Região do espaço contendo um fluido em movimento.	160
B.1	Força de superfície atuando em um elemento de área.	170
B.2	Tensões que atuam em um tetraedro infinitesimal.	171
B.3	Componentes do tensor de tensões.	172
B.4	Potencial de Lennard-Jones	174
C.1	Malha de Diferenças Finitas	189
D.1	Esquema de discretização por malha intercalada acústica	204
D.2	Esquema do cálculo de p na malha intercalada.	205
D.3	Malha intercalada de Yee.	206
F.1	Pontos utilizados nos esquemas de quarta ordem no espaço.	213

Lista de Tabelas

2.1	Relação das Eq. elásticas com as Eq. acústicas.	35
4.1	Esquemas implementados e número de operações e memória requeridas.	96
5.1	Sumário dos esquemas implementados	102
5.2	Parâmetros utilizados nas modelagens.	105
5.3	Unidades utilizadas nos gráficos.	105
5.4	Parâmetros utilizados nas modelagens.	125
5.5	Parâmetros utilizados nas modelagens utilizando o modelo Marmousi 2.	133
B.1	Sub-casos do caso ortotrópico.	179
B.2	Propriedades elásticas de rochas com simetria VTI.	182
B.3	Relação entre as propriedades elásticas de meios isotrópicos.	185

Lista de Símbolos

K	Razão entre os calores específicos a pressão e a volume constantes, p. 163
S	Superfície fechada em torno do volume V , p. 23
T	Temperatura, p. 162
V	Volume da região que define o problema, p. 23
$\Delta\rho$	Varição da densidade em virtude da passagem da onda (nas equações finais simplificamos a notação: $\Delta\rho \rightarrow \rho$), p. 163
Δp	Varição da pressão em virtude da passagem da onda (nas equações finais simplificamos a notação: $\Delta p \rightarrow p$), p. 163
γ	O inverso de K , isto é, a razão entre os calores específicos a volume e a pressão constantes, p. 163
\hat{n}	Normal a uma superfície, p. 23
κ	Módulo de compressão adiabática do material (Bulk), p. 38, 165
ρ	Densidade de massa total (nas equações finais representa a variação da densidade em virtude da passagem da onda, isto é, $\Delta\rho$), p. 23
ρ_0	Densidade de massa do material, p. 24
$\vec{\nabla}$	Operador vetorial nabla; aplicado a uma função escalar resulta no gradiente da mesma e, aplicada em uma função vetorial, resulta em seu divergente, p. 24
\vec{f}	Densidade de força externa, p. 20, 23
\vec{v}	Campo de velocidade, p. 23
b	Do inglês <i>buoyancy</i> , o inverso da densidade, p. 28

f_{corte}	Frequência de corte da fonte sísmica, p. 41
f_c	Parâmetro associado a f_{corte} , dado por $f_{corte}/3\sqrt{\pi}$, p. 41
i_V	Fonte acústica em termos de densidade de volume injetado no meio (e.g. airgun), p. 164
i_m	Fonte sísmica em termos da densidade de massa injetada, p. 161
p	Pressão total (nas equações finais representa a variação da pressão em virtude da passagem da onda, isto é, Δp), p. 162
p_0	Pressão hidrostática, p. 163

Lista de Abreviaturas

AVA	Amplitude Versus Ângulo, p. 3
AVO	Amplitude Versus Offset, p. 3
CCNR	Condição de contorno não reflexiva de Reynolds, p. 93
CMP	<i>Common Mid Point</i> , ou seja, Ponto Médio Comum, p. 4
EI	Endereçamento Indireto à memória de um computador, p. 100
MDFI	Método das Diferenças Finitas com Malha Intercalada, p. 10, 46
MDF	Método das Diferenças Finitas, p. 8, 9
RSGFEF	<i>Rotated Staggered Grid First-Order Equations Formulations</i> , ou seja, Formulações baseadas em Equações de Primeira Ordem na Malha Intercalada Rotacionada, p. 74
RSG	<i>Rotated Staggered Grid</i> , ou seja, Malha Intercalada Rotacionada, p. 57, 75
SGFEF	<i>Staggered Grid First-Order Equations Formulations</i> , ou seja, Formulações baseadas em Equações de Primeira Ordem em Malhas Intercaladas, p. 75
SGSEF	<i>Staggered Grid Second-Order Equations Formulations</i> , ou seja, Formulações baseadas em Equações de Segunda Ordem em Malhas Intercaladas, p. 74
SSGFEF	<i>Standard Staggered Grid First-Order Equations Formulations</i> , ou seja, Formulações baseadas em Equações de Primeira Ordem na Malha Intercalada Padrão, p. 74
SSG	<i>Standard Staggered Grid</i> , ou seja, Malha Intercalada Padrão, p. 57, 75

TI	Transversa isotrópica, ou seja, uma classe de anisotropia, p. 7
VTI	<i>Vertical Transverse Isotropy</i> , ou seja, isotropia transversa vertical, p. 54
WEM	<i>wave equation migration methods</i> , ou seja, métodos de migração baseados na equação da onda, p. 5
<i>stencil</i>	Palavra inglesa utilizada para designar número de pontos utilizados em uma aproximação, p. 49

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo introdutório, será apresentada, em primeiro lugar, uma contextualização da modelagem sísmica dentro do escopo do método sísmico como um todo. Na seção 1.2, será introduzido o tema da modelagem sísmica especificamente. Na seção 1.3, apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre o tema. Na seqüência, os objetivos e, por fim, a estrutura da tese.

1.1 Contextualização do trabalho

Os primeiros campos de petróleo explorados comercialmente datam de meados do século XIX, estando associados a condições geológicas favoráveis, como posição próxima à superfície e geologia simples. Mesmo com o início da utilização de técnicas baseadas em sísmica, as descobertas continuaram sendo possíveis, na grande maioria dos casos, somente quando existiam condições geológicas favoráveis, uma vez que os instrumentos disponíveis à época, tanto no que se refere à aquisição quanto ao processamento e obtenção de imagens que eram ainda rudimentares. Contudo, as primeiras descobertas baseadas em sísmica abriram caminho para o contínuo desenvolvimento e aplicação do método sísmico em larga escala, resultando em um imenso sucesso e forjando tanto o desenvolvimento tecnológico estrito senso quando o de algoritmos de processamento e migração ao longo das décadas.

Com o desenvolvimento contínuo da sísmica de exploração, campos associados a formações geológicas cada vez mais complexas passaram a ser encontrados, ratificando a posição do método sísmico como principal ferramenta de exploração de hidrocarbonetos. As recentes descobertas de grandes volumes de óleo na região do pré-sal nas bacias brasileiras demonstram o alto grau de refinamento das técnicas da sísmica de exploração na atualidade, uma vez que as reservas encontram-se em regiões de geologia complexa que podem chegar a uma profundidade de 8 km (2km de lâmina de água mais 6 km de rochas), incluindo uma camada de sal altamente reflexiva que pode chegar a 2 km de espessura. Com isto, a sensibilidade dos mé-

todos deve ser muito alta, uma vez que pouca energia chega às profundidades dos reservatórios encontrados, implicando em um retorno e registro em superfície muito mais suscetíveis ao ruído.

Dentro deste contexto, a utilização de técnicas de sísmica, aplicadas à exploração de hidrocarbonetos, têm como principal objetivo a produção de imagens o mais fidedignas possíveis dos refletores presentes na região alvo, como também a aferição de outras informações relevantes sobre a litologia associada, onde a finalidade última é encontrar formações geológicas favoráveis ao acúmulo de hidrocarbonetos. Outras finalidades importantes são a avaliação dos reservatórios já encontrados para que possam ser melhor explorados os recursos e a definição dos melhores locais para a perfuração de novos poços. As técnicas empregadas em exploração de hidrocarbonetos utilizando-se sísmica são designadas pelo nome de método sísmico.

Enfatiza-se entretanto que, dado os grandes desafios exploratórios, outros métodos geofísicos são atualmente utilizados pela indústria do petróleo, como por exemplo os métodos eletromagnéticos — como o método magnetotelúrico, que utiliza o campo eletromagnético terrestre para obter informações associadas às propriedades eletromagnéticas das rochas, e o CSEM (*Controlled Source Electromagnetic Method*) (CONSTABLE e SRNKA, 2007) que, diferentemente do anterior, utiliza uma fonte controlada de ondas eletromagnéticas — e os métodos gravimétricos (BARBOSA *et al.*, 1997; ZHDANOV, 2002). Tais métodos têm sido utilizados conjuntamente com o método sísmico para fornecer informações adicionais, em situações onde, por exemplo, o método sísmico é pouco sensível.

Em relação ao método sísmico, classicamente pode-se dizer que ele consiste em três etapas principais, nomeadamente, aquisição, processamento e interpretação (YILMAZ, 2001a,b). Na primeira, realizam-se *in situ* experimentos sísmicos cujo objetivo é fazer propagar ondas sísmicas na região de interesse, captando, em seguida, as ondas refletidas provenientes do meio. Na etapa de processamento, realizam-se procedimentos com o intuito de extrair as informações geológicas contidas nos dados coletados, gerando imagens da conformação geológica existente. Por fim, na terceira etapa, se interpretam estas informações, em conjunto com todas as informações geológicas e petrofísicas aferidas, visando identificar possíveis reservas de hidrocarbonetos em subsuperfície.

Em termos mais específicos, no processo de aquisição sísmica, uma fonte de ondas sísmicas é aplicada (usualmente próxima à superfície da Terra ou do mar), de forma que a onda se propaga para o interior da área de interesse, ou seja, simula-se um sismo artificial. Quando encontra descontinuidades — isto é, regiões em que há mudanças abruptas das propriedades físicas das rochas sedimentares que compõem a região —, a onda gerada pela fonte é refletida (proporcionalmente ao contraste de impedância acústica existente) e se dirige em direção à superfície, onde pode ser

registrada e posteriormente processada.

Sabe-se que as ondas registradas na superfície contém informações preciosas sobre a geologia em subsuperfície. Neste sentido, o conjunto de dados como um todo contém informações sobre as reflexões, refrações e difrações dos diversos modos de onda e de conversões destes modos de onda ao se propagarem na região de interesse. Mesmo em aquisições marítimas, onde são medidas as respostas apenas da componente compressional das ondas, há informações sobre as diversas conversões ocorridas em subsuperfície. Toda estas informações podem ser divididas em duas componentes, sendo a primeira relativa aos tempos de trânsito e a segunda relativa às amplitudes das ondas sísmicas. Os tempos de trânsito são utilizados para extrair informações chamadas de cinemáticas (no jargão geofísico), ou seja, informações relativas à posição dos refletores, as quais são influenciadas apenas pelo perfil de velocidades. Já as amplitudes podem ser utilizadas para obter informações de outra natureza (dinâmicas), relacionadas com os coeficientes de reflexão entre as camadas rochosas e conseqüentemente com diversas propriedades do meio.

Um exemplo da importância das amplitudes aparece nas análises chamadas de *Amplitude Versus Offset* (AVO) e *Amplitude Versus Ângulo* (AVA), que são utilizadas como indicativo direto da presença de hidrocarbonetos. Além destas análises, muitas outras informações petrofísicas podem ser obtidas a partir das amplitudes observadas, como por exemplo a porosidade e a saturação de líquidos nos poros. Desta forma, fica evidenciada a importância de uma boa representação da amplitude e dos tempos de trânsito nos algoritmos de processamento.

Em relação ao registro sísmico, após a geração artificial do sismo pela fonte sísmica, o mesmo é feito por arranjos de equipamentos semelhantes a microfones, conhecidos como geofones (medido em terra) ou hidrofones (medido na água), dispostos na superfície do local de aferição. Os geofones podem coletar dados multicomponentes enquanto os hidrofones coletam apenas informação da variação da pressão na água. Ao conjunto de dados obtidos dá-se o nome de sismogramas, sendo os sismogramas associados a cada tiro denominados sismogramas de tiro comum (*common shot gathers*). Tais registros contém informações da variação da pressão (no caso da água) ao longo do tempo para cada hidrofone que, por sua vez, são arranjados a diferentes distâncias da fonte (*offset*). Enfatiza-se ainda que, em uma aquisição típica, a fonte é detonada diversas vezes, varrendo, desta forma, imensas áreas e coletando grandes volumes de dados, muitos dos quais redundantes. A geometria de disposição das fontes e dos receptores influencia diretamente a qualidade final da imagem que poderá ser obtida. Outro aspecto fundamental no método sísmico é a redundância de informações, que possibilitará, no final das contas, aumentar a razão sinal/ruído.

Na segunda etapa, após a aquisição, os dados sísmicos são processados digi-

talmente com o objetivo final de se gerar uma imagem da região de interesse. Nesta etapa, primeiro é realizado um procedimento inicial conhecido como *pre-processamento*, onde o sinal sísmico digital gravado é tratado com o intuito de remover sinais não desejados e aumentar a razão sinal/ruído. Ao final desta etapa, são realizados procedimentos objetivando fazer uma imagem dos refletores, colapsando as reflexões, refrações e difrações presentes nos sismogramas para suas corretas posições em profundidade (ou mesmo em tempo). Por razões históricas, tal processo é chamado de migração sísmica.

O termo migração está associado com as antigas técnicas geométricas, baseadas em gráficos, que buscavam *migrar* as posições dos eventos observados nos sismogramas para suas corretas posições em profundidade ou em tempo. Tais métodos de migração manual foram utilizados durante grande parte da primeira metade do sec. XX, sendo baseados em princípios geométricos simples válidos apenas para configurações geométricas simples, de forma que sua utilidade era restrita a casos de configurações geológicas simplificadas, como àquelas não por acaso associadas às descobertas da época.

Na verdade, a migração predetermina a maior parte do processamento. Implementada desde os anos de 1920 como um método gráfico, a migração esteve baseada em princípios cinemáticos de colapso das difrações e, em última instância, na migração Kirchhoff. GARDNER (1985) apresenta boa parte desta história, através dos diversos artigos que descrevem esta migração mecânica, oposta à digital realizada hoje em dia. Como o desenvolvimento do empilhamento utilizando ponto médio (CMP) (MAYNE, 1962) e a aplicação de técnicas de processamento digital a dados sísmicos na década de 1960, em especial o colapso das difrações realizado digitalmente (SCHNEIDER, 1971), as novas técnicas digitais de migração baseadas na equação da onda (no caso em soluções integrais da mesma) passaram a ter supremacia (GRAY *et al.*, 2001).

Segundo GRAY *et al.* (2001), no que se refere aos desenvolvimentos dos métodos digitais baseados em computadores, uma grande contribuição foi dada pelos trabalhos realizados por Jon Claerbout e seus estudantes. Foi desenvolvido um método de migração baseado na solução de diferenças finitas de uma aproximação da equação da onda (CLAERBOUT e DOHERTY, 1972). Já a migração Kirchhoff (SCHNEIDER, 1978) e a migração baseada em frequência e número de onda (GAZDAG, 1978; STOLT, 1978) foram desenvolvidas pouco depois. Todos estes métodos foram propostos como migração em tempo e então, com a necessidade de maior acurácia na presença de variação lateral de velocidades, foram redesenhados como métodos de migração em profundidade em poucos anos. No mesmo período, a migração reversa no tempo foi desenvolvida (BAYSAL *et al.*, 1983; MCMECHAN, 1983; WHITMORE, 1983), técnica esta baseada não em uma aproximação da equação da onda,

mas sim na equação completa. Nos últimos 20 anos têm sido propostas extensões destes métodos para meios tridimensionais e para migração pré-empilhamento.

A migração Kirchhoff, um dos primeiros métodos utilizados para a migração de dados sísmicos, baseado em soluções integrais do problema de propagação de ondas, é ainda hoje muito utilizada. Pode-se dizer que este tipo de migração é responsável pela maioria das descobertas de hidrocarbonetos feitas até hoje. A principal razão para o seu imenso sucesso é a grande eficiência computacional da técnica, sendo rápida o suficiente para a migração do grande volume de dados existente em uma aquisição típica, fornecendo resultados aceitáveis para diversos casos de interesse. Entretanto, sabe-se hoje que este tipo de migração não é adequado quando existe elevada complexidade geológica, embora engenhosas extensões da migração Kirchhoff tenham sido e continuem sendo propostas e utilizadas. Assim, em paralelo, diversos métodos de migração têm sido estudados e até aplicados nos problemas da indústria.

Neste sentido, em virtude de uma conjunção de fatores — principalmente o desenvolvimento de computadores mais rápidos (*clusters*) e com maior capacidade de armazenamento, além dos crescentes desafios exploratórios —, são cada vez mais estudados e utilizados em migração sísmica os métodos baseados na equação da onda, em contraposição à migração Kirchhoff que é baseada em soluções integrais da mesma. Estes métodos são conhecidos genericamente por *wave equation migration methods* (WEM), cuja tradução é algo como “métodos de migração baseados na equação da onda”. Nestes métodos, os algoritmos de modelagem e de migração são utilizados em conjunto, apresentando exatamente as mesmas características. Com isto, os métodos de modelagem utilizando a equação da onda ganham destaque.

Muitos métodos de migração diferentes são designados por WEM. O que eles têm em comum é o fato de resolverem alguma aproximação da equação diferencial da onda (ou mesmo a equação completa), através da propagação direta do campo, diferentemente do método de migração Kirchhoff, que é baseado em soluções integrais desta equação, nas quais o campo de onda não é propagado. Os WEM podem diferir quanto ao domínio utilizado (tempo ou frequência), quanto ao tipo de equação da onda utilizada (acústica ou elástica) e quanto à aproximação utilizada para resolver numericamente a equação da onda, como por exemplo a aproximação *one-way* que considera apenas o campo de onda descendente. Para uma revisão teórica conceitual dos WEM ver SAVA e HILL (2009).

1.2 Modelagem sísmica

Os métodos de modelagem de ondas sísmicas e migração podem ser considerados dois dos mais importantes tipos de simulações numéricas para a geofísica aplicada. Pelas suas características, estes dois tipos de simulações apresentam um desenvol-

vimento em paralelo na literatura especializada, ou seja, o desenvolvimento de um é acompanhado pelo desenvolvimento do outro. A grosso modo, tais assuntos são operações inversas. A modelagem sísmica busca descrever o fenômeno de propagação de ondas desde a fonte, passando pelas camadas do meio geofísico, até retornar aos receptores. Já a migração busca desfazer o efeito desta propagação, dos receptores em direção ao interior do modelo, colapsando as difrações para os seus locais corretos em subsuperfície, gerando, assim, uma mapa dos refletores. Portanto, a relação histórica entre os desenvolvimentos em modelagem e migração sísmica pode ser perfeitamente compreendida, uma vez que a princípio pode-se pensar que somente se inverte a direção temporal da modelagem sísmica para realizar a migração, aplicando-se adicionalmente uma condição de imagem. Isto é especialmente válido para o caso dos métodos de migração baseados na equação da onda (WEM).

Outro tema relacionado com a modelagem, atualmente em voga, é a inversão de dados sísmicos, ou simplesmente inversão sísmica. A mesma é utilizada para extrair diversas informações petrofísicas dos dados. A princípio, para fazer a inversão, é necessário resolver o problema direto (modelagem da propagação de ondas) de forma acurada e eficiente (TAKEUCHI e GELLER, 2000) e, quanto melhor se resolve o problema direto, mais realísticos serão os resultados de inversão aplicados a dados reais e maior a quantidade de informações petrofísicas que podem ser aferidas. Entretanto, como é bom conhecido da literatura de problemas inversos (ASTER *et al.*, 2005) existem problemas de condicionamento que dificultam a resolução do problema inverso, o que torna, na prática, o problema mais complexo.

A modelagem tem um papel importante em diversas etapas do método sísmico, além do imageamento das estruturas, em especial na (i) avaliação das possibilidades, limitações e armadilhas do método sísmico, (ii) otimização dos parâmetros de aquisição e (iii) fornecimento de dados sísmicos de entrada para avaliação de programas de processamento sísmico (BERKHOUT, 1985). Por exemplo, estudos de iluminação sísmica são utilizados para melhor planejar a geometria de aquisição para uma dada informação que se deseja priorizar (ALVES *et al.*, 2009).

Há diferentes teorias físicas — como, por exemplo, a teoria acústica, elástica, visco-elástica e poro-elástica — que descrevem a propagação de ondas sísmicas, cada uma com diferentes graus de refinamento e simplificações inerentes. Com isto, diferentes equações matemáticas necessitarão ser resolvidas, de acordo com a teoria considerada. Outras possibilidades são resolver equações aproximadas utilizando, por exemplo, o traçado de raio (CERVENÝ, 2001) ou a equação *one-way* que propaga as ondas apenas em uma direção. Logicamente, quanto mais refinada for a teoria física considerada, melhor será descrita a propagação da onda e mais complexas serão as equações que regem o fenômeno, além de em geral serem mais dispendiosas computacionalmente.

É importante enfatizar entretanto que a obtenção de soluções por meio de equações aproximadas apresenta problemas nas soluções quando o meio possui alta complexidade. Por exemplo, o traçado de raio que a princípio é uma excelente alternativa para obtenção de soluções da propagação de ondas sísmicas, por ser computacionalmente eficiente, apresenta problemas com instabilidade de raios e raios que se cruzam, de forma que as soluções computacionais tornam-se mais dispendiosas. A solução numérica da equação *one-way*, por sua vez, também apresenta problemas em regiões onde a onda inverte a direção antes de atingir um determinado refletor (*turning waves*). Com isto, a solução das equações completas que regem a propagação de ondas ganham destaque como um método eficaz em qualquer situação geológica.

Em relação à utilização das equações completas da onda, a abordagem através da teoria elástica, ao invés da equação acústica, é capaz de modelar corretamente os diferentes modos de onda existentes em um sismograma real. Dentro do escopo desta teoria, pode-se ainda considerar meios anisotrópicos, bastando incorporar relações constitutivas adequadas nas equações de propagação. Neste sentido, como dito anteriormente, quanto mais refinado é o modelo físico matemático utilizado para a propagação da onda, mais realísticos serão os resultados. Com isto, mais informações podem ser obtidas, pensando-se não somente em migração, mas também em inversão de dados sísmicos. É claro que o problema de inversão está longe de ser simples, pois quanto maior o número de parâmetros envolvidos, via de regra, mais mal condicionado será o problema inverso. Por outro lado, quanto mais complexo o modelo matemático, maior custo computacional será necessário para a resolução do problema direto e maior ainda será o custo com os problemas inversos e migrações associados. Neste trabalho, será considerada apenas a propagação de ondas elásticas em meios anisotrópicos gerais, sendo a teoria acústica englobada como um caso particular.

No que se refere à anisotropia, desde o século XIX, é bem conhecido o fato de que as rochas se comportam como meios anisotrópicos como chama a atenção RUDZKI (1897), ou seja, que suas propriedades elásticas variam com a direção. Em um trabalho do mesmo autor (RUDZKI, 1912), ainda no início do século XX, discute-se a propagação de ondas elásticas em meios TI, ou seja, transversamente isotrópico na geofísica. Mas, somente nos últimos 30 anos a anisotropia tem apresentado um impacto significativo na área de exploração de hidrocarbonetos, principalmente devido à evolução computacional, o que permitiu a utilização de algoritmos mais refinados que corrigem falhas em abordagens isotrópicas (HELBIG e THOMSEN, 2005).

Rudzki previa que uma diversidade de rochas poderia ser de natureza anisotrópica, o que foi provado experimentalmente somente anos depois. Hoje sabe-se que diversas classes de anisotropia são encontradas na natureza, nomeadamente, mono-

clínica, ortotrópica (ou ortorrômbica), tetragonal, trigonal, cúbica e TI (BOS *et al.*, 2004). Portanto, é de fundamental importância considerar a existência de anisotropia, para que os campos de onda sejam corretamente representados e, em última instância, para o correto posicionamento dos refletores.

Em relação à resolução das equações que descrevem a propagação de ondas sísmicas, além da abordagem numérica que é amplamente utilizada na área, a princípio há também outras duas possibilidades. A abordagem mais imediata é a resolução direta (analítica) das equações que governam a propagação de ondas. Entretanto, mesmo considerando-se as equações aproximadas, a resolução analítica destas equações não é possível na maioria dos casos de interesse prático, dada a complexidade dos meios geológicos de interesse. A outra possibilidade é a abordagem experimental. Entretanto, tal abordagem se mostra dispendiosa e menos vantajosa que a abordagem computacional que será o foco deste trabalho. Com isto, os métodos numéricos para solução aproximada das equações de propagação de ondas sísmicas são alternativas imprescindíveis dentro do escopo da sismica de exploração de hidrocarbonetos.

A aplicação de métodos numéricos a problemas de propagação de ondas sísmicas remonta a cerca de 40 anos (KELLY e MARFURT, 1980). Como mencionada anteriormente, a complexidade estrutural dos meios encontrados em problemas de sismica de exploração faz com que seja imprescindível a utilização destes métodos para a obtenção de soluções aproximadas, que hoje são largamente empregadas, em diversas etapas do método sísmico, como por exemplo na migração.

Neste sentido, diferentes métodos numéricos são utilizados, como por exemplo o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método do Elemento Espectral (MEE), o Método de Galerkin Descontínuo (MGD), além do Método dos Elementos de Contorno (MEC). Em relação ao MEC (BREBBIA *et al.*, 1984; MANSUR, 1983), há restrições a sua aplicação pois, mesmo suas soluções sendo a princípio mais precisas que as dos demais métodos, tal método é custoso computacionalmente e, principalmente, há dificuldade de obtenção das soluções fundamentais (funções de Green) do problema para meios não-homogêneos. Abordagens interessantes sobre o tema consideram aproximações numéricas explícitas e implícitas da função de Green, respectivamente, ExGA e ImGA (DORS, 2007; SOARES e MANSUR, 2005).

Os MDF e o MEF, por outro lado, se mostram mais adequados a problemas de sismica, sendo aplicados há muitas décadas para a propagação de ondas, enquanto o MEE é utilizado desde o início da década de 1990 (KOMATITSCH e TROMP, 1999; KOMATITSCH e VILOTTE, 1998; KOMATITSCH *et al.*, 2001; SERIANI e PRIOLO, 1994). Para uma revisão abrangente dos métodos espectrais ver o artigo de CHALJUB *et al.* (2007). O MGD foi aplicado ainda mais recentemente, em especial nos trabalhos de DE LA PUENTE *et al.* (2007); DE LA PUENTE *et al.*

(2008); DUMBSER e KÄSER (2006); DUMBSER *et al.* (2007); KÄSER e DUMBSER (2006); KÄSER *et al.* (2007, 2008). Para maiores detalhes ver, por exemplo, MOCZO *et al.* (2010). Cabe ressaltar, por fim, que de todos os métodos citados, o MDF é um dos mais utilizados para problemas de propagação de ondas que envolvem um grande número de nós na malha discreta, como é o caso da sísmica. Isto se deve à sua grande eficiência computacional, podendo ser obtidos algoritmos explícitos, e à facilidade de implementação.

O escopo deste trabalho é o desenvolvimento de métodos numéricos para a propagação de ondas elásticas no domínio do tempo em meios heterogêneos e anisotrópicos gerais, que apresentem bons resultados em locais onde haja acoplamento com meios acústicos, utilizando-se o Método das Diferenças Finitas com a Técnica de Malhas Intercaladas (MDFI). Neste sentido, o objetivo do trabalho, como discutido adiante, é o desenvolvimento de formulações generalizadas utilizando MDFI.

1.3 Revisão bibliográfica

Como visto, os métodos numéricos são introduzidos para resolução de problemas complexos que não possuem solução analítica, como é o caso da propagação de ondas em meios complexos. O método das diferenças finitas (MDF) é utilizado há muitas décadas em engenharia para resolução de diferentes tipos de problemas, em especial para problemas de propagação de ondas. Na geofísica aplicada, o MDF é um dos métodos numéricos mais utilizados, entre outros motivos pela eficiência dos algoritmos, uma vez que é possível obter formulações explícitas que não necessitam de resolução de sistemas algébricos ou inversão de matrizes, sendo o método mais utilizado quando se trata de problemas que envolvem malhas com grande número de nós. Entretanto, outros métodos numéricos são igualmente tema de pesquisa para modelagem de ondas. Para uma visão geral do tema em geofísica, vide CARCIONE *et al.* (2002).

Os métodos numéricos em geral são cada vez mais utilizados em diversas áreas, não somente em engenharia — onde são largamente utilizados há décadas — e em geofísica, mas também em física por exemplo, onde os métodos analíticos historicamente são os preferidos por serem mais apropriados à interpretação dos fenômenos. De modo geral, as contribuições realizadas no que se refere ao tema de métodos numéricos não se restringe à geofísica, podendo ser adaptadas a diversos problemas de diferentes áreas, como por exemplo física teórica. De todo modo, dos métodos numéricos utilizados, sem dúvida, o MDF é um dos métodos mais popularmente empregados, não somente pela eficiência mencionada acima, mas também pela maior facilidade de implementação computacional e maior simplicidade do método que por outro lado não deixa de fornecer boas respostas em diversos problemas (como é o

caso específico da propagação de ondas).

Nesta seção, será empreendida uma revisão geral dos artigos mais influentes na área de modelagem numérica da equação da onda elástica (e acústica) através do método das diferenças finitas no domínio do tempo. Para maiores detalhes, reporta-se aos diversos trabalhos de revisão existentes sobre o tema, como por exemplo MOCZO *et al.* (2007) e LEVANDER (1989).

Como mencionado anteriormente, remonta cerca de 40 anos o uso do Método das Diferenças finitas (MDF) em problemas de propagação de ondas por sismologistas, tendo sido a pesquisadora A. S. Alterman uma das mais proeminentes nestes tempos inaugurais. Artigos representativos deste trabalho são ALTERMAN e KORNFELD (1968), ALTERMAN e ROTENBERG (1969), ALTERMAN e LOWENTHAL (1970), OTTAVIANI (1971), onde foram tratados principalmente problemas de propagação de ondas em meios homogêneos e isotrópicos.

A necessidade de formulações numéricas capazes de lidar com os domínios heterogêneos complexos freqüentemente encontrados nos problemas de modelagem de interesse em geofísica aplicada, cedo levou à utilização de esquemas heterogêneos, onde as propriedades heterogêneas do meio são fornecidas ponto a ponto e o esquema aproxima implicitamente as condições de contorno entre as interfaces. É atribuído a BOORE (1972) a introdução de esquemas heterogêneos. Tal esquema foi estendido em KELLY *et al.* (1976). Enfatiza-se que tal extensão é ainda hoje muito utilizada para modelagem de meios elásticos em regiões *on-shore*, uma vez que em regiões *off-shore*, ou seja, com presença de água, tal esquema não apresenta bons resultados. Na verdade, materiais com parâmetro de Poisson maiores que $\nu = 0,25$ não são modelados de forma acurada ou estável (LEVANDER, 1988; MARFURT, 1984) pelo esquema proposto em KELLY *et al.* (1976). Como será visto neste trabalho, tal esquema numérico apresenta ainda outros problemas no que se refere à aplicação da fonte. Outros esquemas que utilizam o MDF apresentam o mesmo problema para modelar regiões de acoplamento acústico-elásticas (STEPHEN, 1988).

MADARIAGA (1976) foi o primeiro a desenvolver um esquema baseado em malha intercalada que utiliza um sistema de equações de primeira ordem que contorna o problema para materiais com elevada razão de Poisson (como a água). Na verdade, a utilização de malhas intercaladas foi introduzida em YEE (1966) para a resolução de problemas de eletrodinâmica clássica. Atualmente, é muito popular o esquema de VIRIEUX (1984, 1986) que também lança mão de malha intercalada, bem como sua extensão para quarta ordem no espaço (LEVANDER, 1989), para a resolução do problema de propagação de ondas sísmicas. A grande vantagem destes esquemas de malha intercalada, amplamente propalada pela literatura especializada, é que, diferente dos esquemas baseados na equação de segunda ordem da onda de deslocamento, tais esquemas são capazes de modelar regiões de interface entre água e

rochas, funcionando em materiais com quaisquer parâmetros de Poisson. Uma desvantagem é que tais esquemas necessitam, em duas dimensões, do armazenamento de três campos de tensões e dois campos de velocidades, ou seja, 25 % a mais que os quatro campos de velocidade (dois para cada instante de tempo) do esquema de Kelly baseado na equação de segunda ordem para a velocidade das partículas do meio. Em três dimensões a situação é ainda pior, sendo necessário 50 % a mais de memória.

Os trabalhos de Yee, Madariaga e Virieux se enquadram todos no que será denominado aqui de Método das Diferenças Finitas Intercalado (MDFI). Na verdade, a utilização do MDFI remonta à década de 1960, tendo tal técnica sido utilizada em dinâmica de fluidos, como por exemplo em HARLOW e WELCH (1965). Sobre este assunto, um artigo de grande influência é o artigo de YEE (1966), que utiliza uma malha intercalada para resolução das equações de Maxwell no domínio do tempo, inaugurando a área dos métodos no domínio do tempo (FDTM) para resolução de problemas eletromagnéticos (TAFLOVE e HAGNESS, 2000). Em geofísica, os trabalhos de Virieux (VIRIEUX, 1984, 1986) propõem um método para resolução do problema da propagação de ondas elásticas em meios isotrópicos baseando-se no método de Yee.

Desde então, extensões do método de Virieux foram propostas. Entre os mais importantes, ainda na década de 80, destacam-se os trabalhos de LEVANDER (1988), que elevou a ordem do método de Virieux para quarta ordem de aproximação no espaço, e LUO e SCHUSTER (1990), que propôs um algoritmo que reduz a quantidade de memória necessária para implementar o método de Virieux, pois calcula os campos de tensão e velocidade em conjunto, sem a necessidade de armazenar as tensões. Na década seguinte, FARIA e STOFFA (1994) aplicaram o esquema proposto originalmente por Virieux para o caso de anisotropia com simetria vertical transversa (VTI) em duas dimensões também. SAENGER *et al.* (2000) propuseram uma nova malha intercalada para a resolução de problemas de propagação de ondas elásticas em meios anisotrópicos gerais, ou seja, com qualquer grau de anisotropia.

A utilização de malhas intercaladas como o proposto por Virieux para formulação de esquemas de diferenças finitas apresenta uma limitação inerente para tratar meios anisotrópicos gerais, relativa ao posicionamento dos campos de velocidade e tensão e das propriedades elásticas (tensor de elasticidade). Com isto, é necessário interpolar os campos de propagação para a utilização do método em meios com anisotropia maior que ortotrópica. MAGNIER *et al.* (1994) propuseram um esquema baseado em uma “malha parcialmente intercalada” para lidar com meios com qualquer grau de anisotropia, onde é discutido o problema de acoplamento entre a malha e a malha intercalada quando da definição das mesmas. Conforme o autor menciona, o problema de desacoplamento da malha não aparece na formulação proposta, além

de ser aplicável a qualquer grau de anisotropia, sem necessidade de interpolação.

De acordo com MOCZO *et al.* (2010), ANDREWS (1973) e DAY (1982) independentemente aplicaram originalmente a idéia de uma “malha parcialmente intercalada” para modelar a propagação de onda em rupturas de falhas. Posteriormente JIANFENG (1997) aplicou a mesma idéia, e mais recentemente um esquema do tipo foi proposto por Saenger e seus colaboradores (por exemplo em SAENGER *et al.* (2000) e SAENGER e BOHLEN (2004)) para tratar materiais com qualquer grau de anisotropia.

GELLER e TAKEUCHI (1998) e TAKEUCHI e GELLER (2000) propuseram novos esquemas que aumentam a precisão dos métodos, por exemplo por meio do cancelamento do erro espacial com o erro temporal da aproximação de diferenças finitas, resultando em um esquema mais rápido para um determinado nível de acurácia em comparação com os esquemas tradicionais. YANG *et al.* (2003) propuseram um método baseado em expansão em série de Taylor da aproximação por interpolação, chegando a um resultado com erro entre $1/60$ e $1/100$ em relação ao método de diferença finita convencional.

Além disso, diversos esquemas de diferenças finitas que utilizam médias de propriedades têm sido propostos com o objetivo de melhorar as propriedades de estabilidade dos esquemas e/ou a representação de amplitudes em descontinuidades, como por exemplo em MOCZO *et al.* (2002); ZAHRADNÍK e PRIOLO (1995). HALL e WANG (2009) propõem um esquema de quarta ordem no espaço e segunda ordem no tempo baseado na equação da onda de velocidades, utilizando propriedades integradas (seguindo idéia do artigo de TIKHONOV e SAMARSKII (1962)) em uma malha simples, no qual as velocidades são consideradas no mesmo ponto. Entretanto, assim como o esquema de KELLY *et al.* (1976), tal esquema apresenta problemas em meios acústicos (ou com parâmetro de Poison maior que $\nu = 0,25$).

Outra linha de pesquisa relativa à modelagem são os métodos de ordem superior no tempo. É conhecida a existência de problema de instabilidade numérica para elevar a ordem de aproximação no tempo para os operadores de diferenças finitas em geral. Por exemplo, o artigo de ANNE *et al.* (2000) mostra que a equação acústica da onda é incondicionalmente instável para aproximações de ordem maior que segunda no tempo. O mesmo problema se verifica para a equação elástica da onda. Desta forma, uma alternativa para elevar a ordem temporal e ao mesmo tempo manter o número de instantes de tempo necessários para o cálculo, são os esquemas conhecidos como Lax-Wendroff (LAX e WENDROFF, 1964). Em geofísica, tal esquema foi aplicado originalmente por SHUBIN e BELL (1987) na equação acústica tradicional da onda (que desconsidera o gradiente da densidade). Diversos outros trabalhos existentes na literatura aplicam esquemas tipo Lax-Wendroff à propagação de ondas. Por exemplo, CHEN (2007, 2009) mostra que tal esquema apresenta-se

vantajoso na aplicação em problemas de curto tempo (como em geofísica aplicada) em comparação com esquemas tipo Nyström. No trabalho de COHEN e JOLY (1990), o esquema de Lax-Wendroff foi estendido para a aplicação na equação da onda acústica para meios heterogêneos em geral.

1.4 Objetivos do trabalho

Dentro do contexto apresentado, o enfoque deste trabalho é desenvolver uma generalização do método das diferenças finitas com malhas intercaladas para a propagação de ondas sísmicas em meios complexos gerais, ou seja, meios heterogêneos e anisotrópicos com qualquer grau de anisotropia. Tal estudo envolve de forma natural a propagação em meios elásticos isotrópicos e em meios acústicos como casos particulares. Como será utilizado o MDF com a técnica de malhas intercaladas (MDFI), os esquemas desenvolvidos deverão ser capazes de modelar a propagação de ondas sísmicas em meios com acoplamento acústico-elástico, assim como os esquemas clássicos que utilizam malhas intercaladas (SAENGER *et al.*, 2000; VIRIEUX, 1986) e servirão de base para as formulações generalizadas.

Como visto anteriormente, todos os esquemas de diferenças finitas conhecidos baseados em campo único, ou seja, os esquemas que buscam discretizar a equação da onda em termos de deslocamentos (ou velocidades), como por exemplo o esquema de Kelly baseado em deslocamentos (KELLY *et al.*, 1976), falham ao modelar regiões de acoplamento entre meios elásticos e meios acústicos e mesmo em regiões com razão de Poisson elevadas. Neste sentido, na literatura, utiliza-se as equações elastodinâmicas escritas em termos de dois campos (tensões e velocidades), discretizando-as utilizando malhas intercaladas, como é o caso do esquema bem conhecido de Virieux. Entretanto, uma desvantagem deste esquema é o maior dispêndio de memória, uma vez que necessita-se armazenar maior número de componentes referentes aos dois campos de propagação utilizados.

A proposta principal deste trabalho é desenvolver formulações generalizadas, utilizando o método das diferenças finitas com malhas intercaladas, aplicadas à propagação de ondas sísmicas baseadas em equações que utilizam somente um campo de propagação (deslocamento, velocidade ou tensão). O objetivo é que tais esquemas sejam capazes de modelar corretamente a propagação de ondas em meios anisotrópicos e com acoplamento acústico-elástico, ou seja, as situações mais comuns encontradas nos principais alvos exploratórios atuais para busca de hidrocarbonetos nas bacias brasileiras.

As novas formulações numéricas desenvolvidas são denominadas de formulações de campo único, sendo construídas de forma que as propriedades de estabilidade e dispersão numérica sejam iguais às dos esquemas clássicos de Virieux-Levander

(VIRIEUX, 1986) e de Saenger (SAENGER *et al.*, 2000), porém discretizando a equação da onda de segunda ordem utilizando as respectivas malhas de diferenças finitas. Em outras palavras, para o caso elástico isotrópico, por exemplo, o presente trabalho objetiva obter um esquema semelhante ao esquema de Kelly, mas estável em regiões de acoplamento água-rochas.

Os esquemas generalizados aqui desenvolvidos podem ser vistos como duas famílias de esquemas generalizados, cada qual baseado em uma formulação clássica distinta, nomeadamente, na malha intercalada tradicional de Virieux (VIRIEUX, 1986) e na malha rotacionada (SAENGER *et al.*, 2000). A primeira delas é adequada a meios anisotrópicos, com grau de anisotropia até ortotrópica, e a segunda pode ser aplicada para meios com anisotropia geral. Ressalta-se que, uma vez que os esquemas de campo único são construídos de forma a modelar corretamente meios acústicos, outro objetivo é estudar esquemas puramente acústicos, que serão vistos simplesmente como casos particulares do elástico. Assim, dada sua importância prática, serão considerados esquemas acústicos de campo único generalizados, que apresentam-se como uma alternativa por exemplo ao esquema de Cohen (COHEN e JOLY, 1990).

Outros desenvolvimentos foram realizados neste trabalho, com o objetivo de elucidar questões relativas à propagação de ondas. Neste sentido, foi realizado um estudo da equivalência da aplicação da fonte sísmica nos diferentes esquemas, incluindo os da literatura, de forma a produzir o mesmo resultado numérico entre os diferentes esquemas. Além disso, foram implementados esquemas de quarta ordem no tempo utilizando a formulação de Lax-Wendroff, em especial na malha intercalada tradicional no caso acústico.

1.5 Estrutura do trabalho

O texto está dividido em seis capítulos: no capítulo 2, é apresentada a teoria elástica da propagação de ondas em meios anisotrópicos gerais. É dada ênfase na obtenção das equações diferenciais que servirão de base para os esquemas numéricos implementados, ou seja, os sistemas de equações diferenciais de primeira ordem em termos de dois campos (como, por exemplo, o sistema em tensões e velocidades), e as equações de segunda ordem envolvendo um campo de propagação único (deslocamentos, velocidades ou tensões).

No capítulo 3, introduz-se o Método das Diferenças Finitas com Malha Intercalada (MDFI), sendo feita uma revisão de diferentes configurações de malhas intercaladas, objetivando-se mostrar sua relação com as equações que se deseja discretizar. São obtidos os operadores de diferenças finitas simples, utilizados nos esquemas intercalados clássicos, e os operadores de diferenças finitas para derivadas segundas

nas malhas intercaladas, que serão utilizados para o desenvolvimento dos esquemas generalizados propostos. No mesmo capítulo, são apresentados também os esquemas clássicos na malha intercalada padrão (VIRIEUX, 1986) — utilizados para modelar a propagação de ondas em meios com anisotropia ortotrópica (ou com simetria maior que ortotrópica, incluindo meios elásticos e acústicos) — e na malha intercalada rotacionada, para quaisquer tipos de anisotropia.

No capítulo 4, apresenta-se os esquemas generalizados desenvolvidos, baseados nas equações de campo único, sendo implementadas as formulações que efetivamente apresentam menor dispêndio de armazenamento. Neste sentido, são apresentadas as expressões dos esquemas efetivamente implementados, ou seja, as formulações de campo único em deslocamentos e velocidades para esquemas elásticos e formulação em pressão para o caso acústico. É demonstrada a equivalência entre os esquemas de campo único desenvolvidos e os de campo duplo correspondentes. Formulações de quarta ordem no tempo são consideradas por meio de esquemas de Lax-Wendroff aplicados às formulações na malha intercalada. Aborda-se, então, questões referentes à aplicação da fonte sísmica e condições de contorno. Apresenta-se os resultados de análises de estabilidade para os esquemas propostos. Ao final discute-se o custo computacional e a quantidade de memória necessária para cada esquema, bem como algumas questões referentes à comparação dos resultados de esquemas que utilizam diferentes malhas.

No capítulo 5, apresentam-se exemplos e aplicações utilizando os diversos esquemas numéricos propostos. Será demonstrada a equivalência das respostas numéricas entre os esquemas propostos e os esquemas clássicos na malha intercalada, bem como serão realizadas comparações destas formulações com aquelas da literatura, discutindo-se vantagens e desvantagens.

Por fim, no capítulo 6, são apresentadas as conclusões, bem como os trabalhos futuros, sendo deixados para os apêndices questões menos diretamente relacionadas com o tema principal desta tese, conforme a lista abaixo:

- Apêndice A: Teoria da Propagação de Ondas acústicas
- Apêndice B: Definições Básicas e Tensor de Elasticidade
- Apêndice C: Método das Diferenças Finitas (MDF)
- Apêndice D: Formulações Numéricas da Literatura
- Apêndice E: Expressões de Campo Único em Quarta Ordem no Espaço

Capítulo 2

Teoria Geral da Propagação de Ondas Elásticas

Neste capítulo, é apresentada a teoria referente ao fenômeno de propagação de ondas em meios elásticos gerais (heterogêneos e anisotrópicos), necessária para a compreensão das formulações numéricas propostas, desenvolvidas nos demais capítulos. São abordados apenas os tópicos principais necessários para a obtenção das equações da elastodinâmica, sendo apresentadas principalmente as equações que efetivamente serão utilizadas nas modelagens numéricas. São deixadas para os apêndices algumas demonstrações e conceitos relacionados. Enfatiza-se que a abordagem dada neste capítulo parte do caso geral, isto é, das equações válidas para meios heterogêneos e anisotrópicos gerais em três dimensões, simplificando as mesmas sucessivamente de modo a gerar os casos particulares que serão implementados (em duas dimensões) de anisotropia ortotrópica (VTI em duas dimensões) e, por fim, o caso isotrópico e acústico.

Neste sentido, é importante notar que a propagação de ondas acústicas — como é o caso por exemplo do som ao se propagar em meios fluidos (e.g. ar e água) — pode ser enquadrada como um caso particular da propagação de ondas elásticas compressionais em meios materiais (não há ondas S , nem ondas convertidas). Isto porque a propagação acústica corresponde a fenômenos ondulatórios cuja perturbação se propaga por meio da vibração das partículas do meio no sentido longitudinal (sentido da própria propagação), tal qual ocorre com as ondas elásticas compressionais. Adicionalmente, sabe-se que somente ondas compressionais podem se propagar em fluidos, sendo as ondas de natureza cisalhante incapazes de se propagar nestes em virtude dos mesmos não oferecerem resistência ao cisalhamento. Uma imagem que demonstra este fato é que, ao verter-se um copo d'água, a água escorre, ou seja as camadas de água “escorregam” umas sobre as outras sem resistência, diferente de um material sólido que se mantém coeso devido à resistência que as camadas deste meio tem de “escorregarem” umas sobre as outras. Desta forma, as equações que

regem a propagação de ondas acústicas podem ser vistas como um caso particular da propagação de ondas elásticas em meios isotrópicos onde o módulo de cisalhamento é nulo.

É evidente que a simulação da propagação de ondas acústicas em meios geofísicos é uma simplificação, uma vez que as camadas de rochas destes meios não são meios fluidos e, portanto, não são meios acústicos. Ao contrário, elas oferecem resistência ao cisalhamento e, assim, ondas transversais são geradas e podem se propagar em conjunto com as ondas compressionais, de forma que as rochas são, na verdade, melhor descritas como sendo meios elásticos. O modelo mais simples de propagação de ondas elásticas considera a existência de isotropia, isto é, que as propriedades elásticas do meio independem da direção em que são medidas e, por conseguinte, a velocidade independe da direção. Nestes meios, as ondas longitudinais e cisalhantes são, respectivamente, paralelas e perpendiculares a direção de propagação, sendo denominadas de ondas P e ondas S , respectivamente.

Entretanto, embora durante muito tempo a propagação de ondas sísmicas tenha sido tratada quase que exclusivamente lançando-se mão da hipótese de isotropia, sabe-se atualmente que a negligência da anisotropia em modelos geofísicos pode causar distorções consideráveis na propagação de ondas, ocasionando interpretações incorretas de fenômenos físicos e conduzindo, por conseqüência, a erros em processos de migração e inversão de dados sísmicos por exemplo, influenciando no posicionamento dos refletores, etapas estas fundamentais no processo de detecção de hidrocarbonetos. Neste sentido, é interessante observar que, já no início do séc. XX, Rudzki, um importante pesquisador na área de anisotropia escreveu (HELBIG e THOMSEN, 2005):

Since in seismology, there exists the deplorable habit to regard anisotropic materials as isotropic, ...¹

alertando para a importância de avaliar a influência da desconsideração da anisotropia na sismologia. São inúmeras as razões pelas quais as rochas se comportam como materiais anisotrópicos (HELBIG, 1994) e, na prática, a anisotropia das rochas é observada há muito tempo, seja em dados de levantamentos sísmicos, seja em medidas diretas de laboratório. Para uma visão geral do progresso da área em geofísica de exploração, sugere-se o artigo de HELBIG e THOMSEN (2005).

Diferentemente de meios isotrópicos, onde observa-se a propagação de dois modos distintos de onda, as chamadas ondas P e S , respectivamente, com movimento das partículas na direção do movimento e perpendicular ao movimento, no caso da propagação de ondas em meios elásticos anisotrópicos, os modos de onda apresentam comportamento complexo, se acoplando mesmo em meios homogêneos. Parti-

¹Em sismologia, há um hábito deplorável de considerar materiais anisotrópicos como isotrópicos.

cularmente, no caso da isotropia vertical transversa (VTI), surgem dois modos de onda, denominados de onda quase- P e quase- S , que não mais perturbam as partículas do meio nas direções paralela e perpendicular à direção de propagação da onda. Ressalta-se ainda que a velocidade de fase e a velocidade de grupo no caso anisotrópico tornam-se diferentes. Modelos simplificados podem ser adotados, nos quais a anisotropia é tratada por meios de equações “pseudo-acústicas” aproximadas (ALKHALIFAH, 2000; HESTHOLM, 2009), aproximando apenas as ondas P (ou melhor quase- P no caso VTI), de modo a desacoplar estas ondas. Porém no presente trabalho somente as formulações completas serão abordadas. Para uma discussão completa sobre anisotropia, indica-se a seguinte bibliografia especializada: HELBIG (1994), TSVANKIN (2001), SLAWINSKI (2003), entre outros.

Além da presença de anisotropia nos meios geofísicos, existem ainda modelos mais complicados e mais realistas que levam em conta a viscosidade e a porosidade das rochas em meios anisotrópicos (CARCIONE, 2007; COUSSI, 2004). Em tais formulações aparecem novos modos de onda (como por exemplo as chamadas ondas P lentas), demonstrando que, quanto mais efeitos físicos são considerados na teoria ondulatória, maior a complexidade dos resultados (por exemplos, os sismogramas) gerados. Porém tais modelos não serão abordados neste trabalho.

A seguir, serão obtidas as equações que governam a propagação de ondas em meios elásticos heterogêneos e anisotrópicos com qualquer grau de anisotropia. Algumas definições básicas importantes, necessárias à teoria da elastodinâmica, são deixadas para o apêndice B. Existem muitos livros de referência sobre o assunto de propagação de ondas em sísmica, onde maiores detalhes podem ser encontrados, citando-se em especial WAPENAAR e BERKHOUT (1989), GRAFF (1991), ACHENBACH (1973), AKI e RICHARDS (2002) e WU *et al.* (2006), além dos já citados anteriormente.

2.1 A equação geral da onda elástica

Nesta seção, as equações que descrevem a propagação de ondas em meios elásticos gerais são obtidas como conseqüência da aplicação das leis da física, sendo as formas lineares das mesmas obtidas considerando-se pequenas perturbações em torno dos valores médios de equilíbrio. As equações matemáticas básicas obtidas são, então, transformadas em diversas formulações matemáticas distintas, cada qual escrita em termos das diferentes componentes dos campos de propagação da onda, ou seja, as componentes dos campos de deslocamento, velocidade e tensão.

2.1.1 Conservação da quantidade movimento

Considere uma região do espaço contendo um material qualquer, cuja densidade é dada por $\rho(\vec{r},t)$. Seja a velocidade de deslocamento das partículas dada por $\vec{v}(\vec{r},t)$ dependente da posição \vec{r} e do tempo t . Considere, então, uma porção deste material de volume V encerrado por uma superfície S , cuja normal é dada por \hat{n} , conforme a Fig. 2.1 (WAPENAAR e BERKHOUT, 1989).

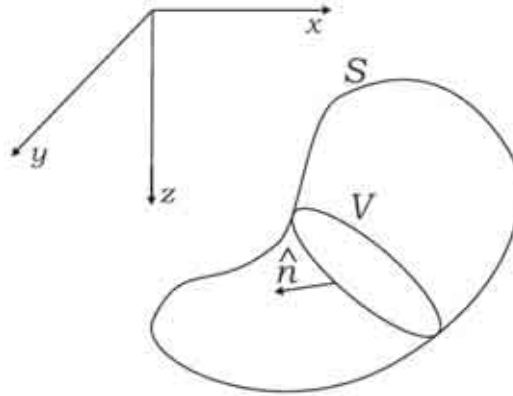


Figura 2.1: Região do espaço contendo o material de interesse.

A lei da conservação da quantidade de movimento estabelece que a mudança da quantidade de movimento das partículas neste volume é igual ao fluxo de quantidade de movimento entrando na superfície, adicionado da resultante das forças que atuam nas partículas em V (Segunda Lei de Newton generalizada), ou seja

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} dV = - \oint_S (\rho \vec{v}) \cdot \hat{n} dS + \vec{F}'(V), \quad (2.1)$$

sendo a força resultante que atua no volume V dada por

$$\vec{F}'(V) = \oint_S \vec{\tau}_n dS + \int_V \vec{f} dV, \quad (2.2)$$

onde \vec{f} é a densidade (volumétrica) de força externa que atua no volume V e $\vec{\tau}_n$ é a tensão que atua em cada ponto da superfície S (que depende da orientação da superfície, conforme mostra o apêndice B, seção B.1.2, podendo ser obtida por meio do tensor de tensões para uma direção qualquer). A primeira parcela da Eq. (2.2) se refere às forças de contato que atuam na superfície da região considerada devido ao restante do meio (na região interna, pela Terceira Lei de Newton, estas forças se anulam); a segunda parcela se refere às forças externas aplicadas em cada ponto do volume (forças de volume). Repare que a única diferença da Eq. (2.1) para a expressão correspondente ao caso acústico (ver Eq. (A.5) e Eq. (A.6) no apêndice A), ou seja, no caso do material ser um fluido, é que aqui está sendo utilizada uma tensão geral $\vec{\tau}_n$ que inclui tensões de cisalhamento (\hat{n} se refere à orientação da

superfície S), enquanto no caso acústico a tensão é sempre normal, sendo dada por $-p\hat{n}$ (de acordo com o Princípio de Pascal).

Aplicando na Eq. (2.1) o teorema de Gauss, dado pela Eq. (A.2) do apêndice A, segue que

$$\int_V \frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} dV = - \int_V [\vec{v}\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) + (\rho\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}] dV + \vec{F}(V), \quad (2.3)$$

onde

$$\vec{F}(V) = - \int_V \partial_i \vec{\tau}_i dV + \int_V \vec{f} dV, \quad (2.4)$$

onde $\vec{\nabla}$ é o operador vetorial dado pelas seguintes componentes cartesianas $\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$. Como o volume V é um volume arbitrário, chega-se à

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) + (\rho\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - \partial_i \vec{\tau}_i = \vec{f}. \quad (2.5)$$

Esta equação vetorial expressa a conservação do momento linear (ou quantidade de movimento), sendo conhecida como equação não linear de movimento para meios elásticos. Considerando-se um sistema de coordenadas cartesianas, e utilizando a notação indicial (convenção de soma sob índices repetidos), pode-se escrever a Eq. (2.5) como

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + v_i \partial_j (\rho v_j) + \rho v_j \partial_j v_i - \partial_j \tau_{ij} = f_i, \quad (2.6)$$

onde τ_{ij} são as componentes do tensor de tensões. Como no caso acústico (ver apêndice A), para as aplicações em geofísica, o interesse se restringe ao regime linear, e portanto a Eq. (2.6) será simplificada. Inicialmente, repare que apenas o primeiro e o quarto termos do primeiro membro contribuem por serem de primeira ordem e, logicamente, a fonte f_i . No processo de linearização considera-se ainda a decomposição

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho, \quad (2.7)$$

onde $\Delta\rho$ é a mudança da densidade no meio devida à passagem da onda e ρ_0 é densidade de equilíbrio, de forma que

$$\Delta\rho \ll \rho_0. \quad (2.8)$$

Assim, chega-se facilmente à versão linear da equação de movimento em coordenadas cartesianas dadas por

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} - \partial_j \tau_{ij} = f_i, \quad (2.9)$$

onde ρ é agora a densidade de equilíbrio do meio (ρ_0).

2.1.2 Relações constitutivas

Para a descrição completa dos movimentos em um meio elástico, é necessário ainda levar em conta as chamadas relações constitutivas do meio, isto é, como se relacionam os tensores de segunda ordem de tensões $\tau(\vec{r},t)$ e de deformações $e(\vec{r},t)$. De forma geral, sabe-se que eles são mutuamente dependentes, o que é expresso matematicamente por

$$\chi(\tau, e) = 0, \quad (2.10)$$

onde χ é, em geral, uma função não-linear envolvendo os tensores. Novamente, enfatiza-se que neste trabalho o interesse se concentra apenas no regime linear. Neste caso, a forma mais geral da relação tensão-deformação é descrita por (ver Apêndice B)

$$\tau_{ij}(\vec{r},t) = c_{ijkl}(\vec{r})e_{kl}(\vec{r},t), \quad (2.11)$$

que é a Lei de Hooke generalizada. As 81 ($3 \times 3 \times 3 \times 3$) componentes c_{ijkl} do tensor de elasticidade na verdade se reduzem a 21 componentes independentes, devido à existência de simetrias físicas, conforme descrito no Apêndice B. Estas componentes caracterizam completamente o meio elástico (no regime linear).

Na presença de uma distribuição de fontes de deformações $h(\vec{r},t)$ externa, a Eq. (2.11) deve ser modificada para

$$\tau_{ij}(\vec{r},t) - c_{ijkl}(\vec{r})e_{kl}(\vec{r},t) = -g_{ij}(\vec{r},t), \quad (2.12)$$

com

$$g_{ij}(\vec{r},t) = c_{ijkl}(\vec{r})h_{kl}(\vec{r},t), \quad (2.13)$$

onde $h_{kl}(\vec{r},t)$ representa as componentes do tensor $h(\vec{r},t)$. Claramente $g_{ij}(\vec{r},t)$ representa a distribuição de tensões (dependente do tensor de elasticidade do meio) associada à fonte de deformações. Substituindo a Eq. (B.1) na expressão acima, chega-se à

$$\tau_{ij} - \frac{1}{2}c_{ijkl}(\partial_l u_k + \partial_k u_l) = -g_{ij}. \quad (2.14)$$

Usando a propriedade de simetria $c_{ijkl} = c_{ijlk}$, obtém-se

$$\tau_{ij} - c_{ijkl}\partial_l u_k = -g_{ij}. \quad (2.15)$$

Por fim, considerando a velocidade \vec{v} das partículas $\vec{v} = \partial_t \vec{u}$, chega-se à relação tensão-velocidade linearizada

$$\partial_t \tau_{ij} - c_{ijkl}\partial_l v_k = -\partial_t g_{ij}. \quad (2.16)$$

Tal equação é equivalente à equação da continuidade linearizada para o caso acústico,

dada no apêndice A pela Eq. (A.25), e junto com a equação de movimento dada pela Eq. (2.9) descrevem completamente os movimentos em um meio elástico geral.

2.2 Representações da equação geral da onda elástica

Na seção 2.1 foram obtidas as equações que descrevem a propagação da onda elástica em meios gerais (heterogêneos e anisotrópicos), escritas na forma de um sistema de equações em termos da velocidade de deslocamento das partículas e da tensão. Como se trata de um fenômeno ondulatório de transmissão de energia mecânica com velocidade finita, tal sistema de equações é hiperbólico.

Nesta seção, a partir do referido sistema de equações, serão desenvolvidas diferentes formas de representação matemática do mesmo fenômeno ondulatório, utilizando um ou dois dos diferentes campos de propagação da onda, ou seja, velocidades, deslocamentos e tensões. As representações que lançam mão de dois campos — como, por exemplo, o sistema em termos de velocidades e tensões originalmente deduzido — são escritas por sistemas hiperbólicos de equações diferenciais acopladas, sendo designadas neste trabalho como representações de campo duplo. Já as equações que utilizam apenas um campo são escritas como conjuntos de equações da onda de segunda ordem (também de tipo hiperbólica) na respectiva variável, para cada componente, sendo designadas aqui de representações de campo único. A conhecida equação de Navier, para as componentes do deslocamento, enquadra-se neste segundo tipo. Enfatiza-se que todas as equações que serão obtidas são válidas para meios gerais heterogêneos e anisotrópicos.

2.2.1 Equações de campo duplo

Sistema em velocidades e tensões

A primeira forma de representação do fenômeno ondulatório é por meio dos campos de velocidades v_i de deslocamento das partículas do meio e do campo de tensões τ_{ij} . Esta representação é dada diretamente pelas equações deduzidas anteriormente, ou seja, Eq. (2.9) e Eq. (2.16) apresentadas novamente aqui como segue:

$$\rho \partial_t v_i - \partial_j \tau_{ij} = f_i \quad (2.17)$$

$$\partial_t \tau_{ij} - c_{ijkl} \partial_l v_k = -\partial_t g_{ij}, \quad (2.18)$$

onde a fonte é dada, conforme Eq. (2.13), por

$$g_{ij}(\vec{r}, t) = c_{ijkl}(\vec{r}) h_{kl}(\vec{r}, t), \quad (2.19)$$

sendo f_i a densidade de força externa aplicada, ρ a densidade de massa e c_{ijkl} o tensor de elasticidade.

Sistema em deslocamentos e tensões

A forma mais imediata de reescrever o sistema de equações dado pelas Eq. (2.17) e Eq. (2.18) é valendo-se da relação $v_i = \partial_t u_i$ (onde u_i são as componentes do campo de deslocamentos), o que resulta em

$$\rho \partial_t^2 u_i - \partial_j \tau_{ij} = f_i \quad (2.20)$$

$$\tau_{ij} - c_{ijkl} \partial_l u_k = -g_{ij}, \quad (2.21)$$

onde g_{ij} é dado pela mesma expressão que antes, ou seja, pela Eq. (2.19).

2.2.2 Equações de campo único (equações de 2a. ordem)

Equação da onda de deslocamentos

Substituindo diretamente a Eq. (2.21) na Eq. (2.20), obtém-se

$$\rho \partial_t^2 u_i - \partial_j (c_{ijkl} \partial_l u_k) = s_i^u, \quad (2.22)$$

onde as componentes da fonte s_i^u são dadas por

$$s_i^u = f_i - \partial_j g_{ij}, \quad (2.23)$$

sendo g_{ij} dado pela Eq. (2.19).

Equação da onda de velocidades

Derivando a Eq. (2.17) em relação ao tempo e a Eq. (2.18) em relação a x_j , obtém-se

$$\rho \partial_t^2 v_i - \partial_j \partial_t \tau_{ij} = \partial_t f_i \quad (2.24)$$

$$\partial_j \partial_t \tau_{ij} - \partial_j (c_{ijkl} \partial_l v_k) = -\partial_t \partial_j g_{ij}, \quad (2.25)$$

Somando então as equações acima, chega-se à

$$\rho \partial_t^2 v_i - \partial_j (c_{ijkl} \partial_l v_k) = \partial_t s_i^u. \quad (2.26)$$

Repare que a Eq. (2.26) da onda de velocidades tem exatamente a mesma forma da Eq. (2.22) da onda de deslocamentos, sendo a única diferença relativa à fonte, uma vez que a fonte no segundo caso é dada pela derivada temporal da fonte no primeiro caso.

Equação da onda de tensões

Para obter a equação da onda de tensões, divide-se a Eq. (2.17) por ρ ou, equivalentemente, multiplica-se a mesma por b ($b = 1/\rho$), derivando-se em seguida em relação a x_l e multiplicando por fim (contração em k e l) por c_{ijkl} . Assim, obtém-se

$$\begin{aligned}\partial_t v_i - b \partial_j \tau_{ij} &= b f_i \\ \partial_l \partial_t v_i - \partial_l (b \partial_j \tau_{ij}) &= \partial_l (b f_i) \\ \partial_l \partial_t v_k - \partial_l (b \partial_n \tau_{kn}) &= \partial_l (b f_k) \\ c_{ijkl} \partial_l \partial_t v_k - c_{ijkl} \partial_l (b \partial_n \tau_{kn}) &= c_{ijkl} \partial_l (b f_k).\end{aligned}\tag{2.27}$$

Por outro lado, derivando a Eq. (2.18) em relação ao tempo, obtém-se

$$\partial_t^2 \tau_{ij} - c_{ijkl} \partial_l \partial_t v_k = -\partial_t^2 g_{ij}.\tag{2.28}$$

Somando então a Eq. (2.27) com a Eq. (2.28), resulta em

$$\partial_t^2 \tau_{ij} - c_{ijkl} \partial_l (b \partial_n \tau_{kn}) = c_{ijkl} \partial_l (b f_k) - \partial_t^2 g_{ij},\tag{2.29}$$

onde utilizando-se a definição dada pela Eq. (2.19), chega-se finalmente à

$$\partial_t^2 \tau_{ij} - c_{ijkl} \partial_l (b \partial_n \tau_{kn}) = -c_{ijkl} s_{kl}^\tau,\tag{2.30}$$

onde

$$s_{kl}^\tau = \partial_t^2 h_{kl} - \partial_l (b f_k).\tag{2.31}$$

Mais uma vez, chama-se a atenção para o fato de que todas as variantes matemáticas vistas acima da equação geral da onda elástica são formas matemáticas equivalentes para descrever o mesmo fenômeno através de diferentes campos de onda (tensões, velocidades e/ou deslocamentos).

2.3 Equações para o caso bidimensional

Neste trabalho, serão implementadas modelagens envolvendo modelos bidimensionais, uma vez que a generalização para o caso tridimensional não apresenta maiores dificuldades. A principal causa de serem realizadas apenas modelagens em duas dimensões é manter o custo computacional o mais baixo possível para agilizar as modelagens e demais testes a serem realizados no capítulo 5. Portanto, as equações serão expandidas para os índices $i = 1$, referente à coordenada x (relacionada ao *off-set*), e para $j = 3$ (referente à profundidade z do meio) como é usual na geofísica.

2.3.1 Notação de Voigt

Conforme discutido com mais detalhes no apêndice B, pode-se representar o tensor de elasticidade c_{ijkl} de quarta ordem por uma matriz, como se fosse um tensor de segunda ordem, utilizando-se a chamada notação de Voigt. Em duas dimensões, considerando-se as coordenadas x e z usuais da geofísica e recorrendo-se a tal notação, o tensor de elasticidade passa a ser representado através da seguinte matriz

$$C_{nm} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{15} \\ c_{13} & c_{33} & c_{35} \\ c_{15} & c_{35} & c_{55} \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

onde os índices 1,3 e 5 são associados, respectivamente, aos termos normais na direção x , z e cisalhantes xz . É importante notar que a matriz dada pela Eq. (2.32) possui apenas 6 elementos independentes (pois a matriz é simétrica). Ressalta-se que, no caso geral de três dimensões espaciais, C_{nm} possui 21 constantes independentes (ver apêndice B).

Recorrendo-se à notação de Voigt, as equações para uma dada simetria do tensor de elasticidade (apêndice B) podem ser obtidas de forma visual através de produto de matrizes, bastando considerar a forma específica da matriz de elasticidade no caso considerado. Por exemplo, para o caso de anisotropia geral (2D) dada pelo tensor de elasticidade representado pela Eq. (2.32), a relação tensão-deslocamento, dada pela Eq. (2.21), pode ser vista como a seguinte equação matricial

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{33} \\ \tau_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{15} \\ c_{13} & c_{33} & c_{35} \\ c_{15} & c_{35} & c_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x u_x \\ \partial_z u_z \\ \partial_x u_z + \partial_z u_x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_{xx} \\ f_{zz} \\ f_{xz} \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

sendo a fonte dada por

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_z \\ f_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{15} \\ c_{13} & c_{33} & c_{35} \\ c_{15} & c_{35} & c_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x h_x \\ \partial_z h_z \\ \partial_x h_z + \partial_z h_x \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

com h_i representando as distribuições de deslocamento aplicadas nos respectivos eixos coordenados, de forma que as linhas do vetor à direita representam as componentes do tensor de deformação aplicado, denominado h_{ij} daqui por diante. Enfatiza-se que, deliberadamente, optou-se por utilizar uma notação mais intuitiva colocando-se as derivadas com índices dados pelas letras x e z , referente às coordenadas espaciais onde a derivada é tomada respectivamente associados aos índices 1 e 3, tanto quando para as componentes dos campos vetoriais. Outra detalhe na notação utilizada é que se utiliza a mesma letra c minúscula para os elementos do tensor de elasticidade C_{ij}

na notação de Voigt que aquela utilizada no caso da notação tensorial tradicional, ou seja, c_{ijkl} .

2.3.2 Anisotropia geral

Equações de campo duplo: sistema em velocidades e tensões

As equações de movimento, em termos de velocidades e tensões, escritas indicialmente pela Eq. (2.17), não dependem explicitamente das propriedades constitutivas do meio, ou seja de c_{ijkl} , sendo escritas, portanto, sempre da mesma forma independentemente do grau de anisotropia considerado. Já as demais equações, escritas de forma sintética por meio da Eq. (2.18), devem ser obtidas utilizando-se o tensor de elasticidade dado pela Eq. (2.32), como exemplificado no tópico anterior. Desta forma, as seguintes equações são obtidas de forma imediata:

$$\rho \partial_t v_x - \partial_x \tau_{xx} - \partial_z \tau_{xz} = f_x \quad (2.35)$$

$$\rho \partial_t v_z - \partial_x \tau_{xz} - \partial_z \tau_{zz} = f_z \quad (2.36)$$

$$\partial_t \tau_{xx} - c_{11} \partial_x v_x - c_{13} \partial_z v_z - c_{15} (\partial_x v_z + \partial_z v_x) = -\partial_t g_{xx} \quad (2.37)$$

$$\partial_t \tau_{zz} - c_{13} \partial_x v_x - c_{33} \partial_z v_z - c_{35} (\partial_x v_z + \partial_z v_x) = -\partial_t g_{zz} \quad (2.38)$$

$$\partial_t \tau_{xz} - c_{15} \partial_x v_x - c_{35} \partial_z v_z - c_{55} (\partial_x v_z + \partial_z v_x) = -\partial_t g_{xz}, \quad (2.39)$$

onde, como antes, os termos do tensor de elasticidade estão escritos na notação de Voigt.

Com isto, a fonte geral de tensão passa a ser

$$g_{xx} = c_{11} h_{xx} + c_{13} h_{zz} + c_{15} (h_{xz} + h_{zx}) \quad (2.40)$$

$$g_{zz} = c_{13} h_{xx} + c_{33} h_{zz} + c_{35} (h_{xz} + h_{zx}) \quad (2.41)$$

$$g_{xz} = c_{15} h_{xx} + c_{35} h_{zz} + c_{55} (h_{xz} + h_{zx}). \quad (2.42)$$

Destaca-se que, conforme será discutido na seção 2.5.1, a fonte que simula ondas sísmicas neste trabalho, no contexto da geofísica, será um caso particular da fonte geral de tensões dada acima.

Equações de campo duplo: sistema em deslocamentos e tensões

De forma semelhante, para as equações em deslocamentos e tensões em duas dimensões chega-se facilmente à

$$\rho \partial_t^2 u_x - \partial_x \tau_{xx} - \partial_z \tau_{xz} = f_x \quad (2.43)$$

$$\rho \partial_t^2 u_z - \partial_x \tau_{xz} - \partial_z \tau_{zz} = f_z \quad (2.44)$$

$$\tau_{xx} - c_{11} \partial_x u_x - c_{13} \partial_z u_z - c_{15} (\partial_x u_z + \partial_z u_x) = -g_{xx} \quad (2.45)$$

$$\tau_{zz} - c_{13} \partial_x u_x - c_{33} \partial_z u_z - c_{35} (\partial_x u_z + \partial_z u_x) = -g_{zz} \quad (2.46)$$

$$\tau_{xz} - c_{15} \partial_x u_x - c_{35} \partial_z u_z - c_{55} (\partial_x u_z + \partial_z u_x) = -g_{xz}. \quad (2.47)$$

Equações de campo único: equações da onda em deslocamentos

Para obter as equações de campo único em duas dimensões, serão expandidas diretamente as expressões indiciais dada pela Eq. (2.22). Expandindo a equação da onda de deslocamentos para meios anisotrópicos gerais em duas dimensões, obtém-se para cada uma das coordenadas ($i = 1,3$ para x e z)

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 u_i - [\partial_x (c_{i111} \partial_x u_x) + \partial_x (c_{i113} \partial_z u_x) + \partial_x (c_{i131} \partial_x u_z) + \partial_x (c_{i133} \partial_z u_z) \\ + \partial_z (c_{i311} \partial_x u_x) + \partial_z (c_{i313} \partial_z u_x) + \partial_z (c_{i331} \partial_x u_z) + \partial_z (c_{i333} \partial_z u_z)] = s_i^u. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Explicitamente, chega-se às seguintes equações

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 u_x - [\partial_x (c_{1111} \partial_x u_x) + \partial_x (c_{1113} \partial_z u_x) + \partial_x (c_{1131} \partial_x u_z) + \partial_x (c_{1133} \partial_z u_z) \\ + \partial_z (c_{1311} \partial_x u_x) + \partial_z (c_{1313} \partial_z u_x) + \partial_z (c_{1331} \partial_x u_z) + \partial_z (c_{1333} \partial_z u_z)] = s_x^u \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 u_z - [\partial_x (c_{3111} \partial_x u_x) + \partial_x (c_{3113} \partial_z u_x) + \partial_x (c_{3131} \partial_x u_z) + \partial_x (c_{3133} \partial_z u_z) \\ + \partial_z (c_{3311} \partial_x u_x) + \partial_z (c_{3313} \partial_z u_x) + \partial_z (c_{3331} \partial_x u_z) + \partial_z (c_{3333} \partial_z u_z)] = s_z^u \end{aligned} \quad (2.50)$$

Usando agora a notação de Voigt para representar os termos do tensor de elasticidade e reordenando, obtém-se finalmente

$$\begin{aligned} \partial_x (c_{11} \partial_x u_x) + \partial_x (c_{13} \partial_z u_z) + \partial_x [c_{15} (\partial_x u_z + \partial_z u_x)] \\ + \partial_z (c_{15} \partial_x u_x) + \partial_z (c_{35} \partial_z u_z) + \partial_z [c_{55} (\partial_x u_z + \partial_z u_x)] = \rho \partial_t^2 u_x + s_x^u \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \partial_x (c_{15} \partial_x u_x) + \partial_x (c_{35} \partial_z u_z) + \partial_x [c_{55} (\partial_x u_z + \partial_z u_x)] \\ + \partial_z (c_{13} \partial_x u_x) + \partial_z (c_{33} \partial_z u_z) + \partial_z [c_{35} (\partial_x u_z + \partial_z u_x)] = \rho \partial_t^2 u_z + s_z^u. \end{aligned} \quad (2.52)$$

De forma semelhante, as componentes da fonte s_i^u são dadas por

$$s_x^u = f_x - [\partial_x(c_{11}h_{xx}) + \partial_x(c_{13}h_{zz}) + \partial_x(c_{15}h_{xz})] \quad (2.53)$$

$$+ \partial_z(c_{15}h_{xx}) + \partial_z(c_{35}h_{zz}) + \partial_z(c_{55}h_{xz})] \quad (2.54)$$

$$s_z^u = f_z - [\partial_x(c_{15}h_{xx}) + \partial_x(c_{35}h_{zz}) + \partial_x(c_{55}h_{xz})] \quad (2.55)$$

$$+ \partial_z(c_{13}h_{xx}) + \partial_z(c_{33}h_{zz}) + \partial_z(c_{35}h_{xz})]. \quad (2.56)$$

É importante observar que a fonte descrita acima corresponde a uma fonte geral para o caso anisotrópico geral. Na seção 2.5.1 será discutida a aplicação da fonte com mais detalhes.

Equações de campo único: equações da onda em velocidades

Como foi visto, as equações da onda de velocidades apresentam a mesma forma das equações da onda de deslocamentos, vista no tópico anterior. Portanto, as equações são as mesmas (exceto pela fonte), sendo dadas por

$$\begin{aligned} & \partial_x(c_{11}\partial_x v_x) + \partial_x(c_{13}\partial_z v_z) + \partial_x[c_{15}(\partial_x v_z + \partial_z v_x)] \\ + & \partial_z(c_{15}\partial_x v_x) + \partial_z(c_{35}\partial_z v_z) + \partial_z[c_{55}(\partial_x v_z + \partial_z v_x)] = \rho\partial_t^2 v_x + \partial_t s_x^u \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} & \partial_x(c_{15}\partial_x v_x) + \partial_x(c_{35}\partial_z v_z) + \partial_x[c_{55}(\partial_x v_z + \partial_z v_x)] \\ + & \partial_z(c_{13}\partial_x v_x) + \partial_z(c_{33}\partial_z v_z) + \partial_z[c_{35}(\partial_x v_z + \partial_z v_x)] = \rho\partial_t^2 v_z + \partial_t s_z^u, \end{aligned} \quad (2.58)$$

onde a fonte é dada pelas mesmas expressões que o caso da onda de deslocamentos, com a diferença de que é tomada a derivada temporal das distribuições dadas por h_{ij} e f_i .

Equações de campo único: equações da onda em tensões

Expandindo a equação geral da onda de tensões, dada pelas Eq. (2.30), em duas dimensões, obtém-se

$$\begin{aligned} & \partial_t^2 \tau_{ij} - [c_{ij11}\partial_x(b\partial_x \tau_{xx}) + c_{ij11}\partial_x(b\partial_z \tau_{xz}) + c_{ij13}\partial_z(b\partial_x \tau_{xx}) + c_{ij13}\partial_z(b\partial_z \tau_{xz}) \\ + & c_{ij31}\partial_x(b\partial_x \tau_{zx}) + c_{ij31}\partial_x(b\partial_z \tau_{zz}) + c_{ij33}\partial_z(b\partial_x \tau_{zx}) + c_{ij33}\partial_z(b\partial_z \tau_{zz})] = -s'_{ij}{}^\tau. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Como antes, esta equação indicial se desdobra em 3 equações, uma para cada componente do tensor de tensões em duas dimensões, ou seja, τ_{xx} , τ_{zz} e τ_{xz} . Escrevendo explicitamente cada uma destas equações, utilizando a notação de Voigt, obtém-se

as seguintes equações

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \tau_{xx} = & c_{11} \partial_x (b \partial_x \tau_{xx}) + c_{11} \partial_x (b \partial_z \tau_{xz}) + c_{15} \partial_z (b \partial_x \tau_{xx}) + c_{15} \partial_z (b \partial_z \tau_{xz}) \\ & + c_{15} \partial_x (b \partial_x \tau_{zx}) + c_{15} \partial_x (b \partial_z \tau_{zz}) + c_{13} \partial_z (b \partial_x \tau_{zx}) + c_{13} \partial_z (b \partial_z \tau_{zz}) + s'_{xx} \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \tau_{xz} = & c_{15} \partial_x (b \partial_x \tau_{xx}) + c_{15} \partial_x (b \partial_z \tau_{xz}) + c_{55} \partial_z (b \partial_x \tau_{xx}) + c_{55} \partial_z (b \partial_z \tau_{xz}) \\ & + c_{55} \partial_x (b \partial_x \tau_{zx}) + c_{55} \partial_x (b \partial_z \tau_{zz}) + c_{35} \partial_z (b \partial_x \tau_{zx}) + c_{35} \partial_z (b \partial_z \tau_{zz}) + s'_{xz} \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \tau_{zz} = & c_{13} \partial_x (b \partial_x \tau_{xx}) + c_{13} \partial_x (b \partial_z \tau_{xz}) + c_{35} \partial_z (b \partial_x \tau_{xx}) + c_{35} \partial_z (b \partial_z \tau_{xz}) \\ & + c_{35} \partial_x (b \partial_x \tau_{zx}) + c_{35} \partial_x (b \partial_z \tau_{zz}) + c_{33} \partial_z (b \partial_x \tau_{zx}) + c_{33} \partial_z (b \partial_z \tau_{zz}) + s'_{zz} \end{aligned} \quad (2.62)$$

onde a fonte é dada por

$$s'_{ij} = c_{ijkl} s_{kl} = c_{ijkl} (\partial_t^2 h_{kl} - \partial_l (b f_k)), \quad (2.63)$$

ou, usando a notação de voigt,

$$s'_n = c_{np} s_p \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} = & c_{n1} (\partial_t^2 h_{xx} - \partial_x (b f_x)) + c_{n3} (\partial_t^2 h_{zz} - \partial_z (b f_z)) \\ & + c_{n5} \{ \partial_t^2 h_{xz} - [\partial_x (b f_z) + \partial_z (b f_x)] \} \end{aligned} \quad (2.65)$$

que explicitamente resulta em

$$\begin{aligned} s'_{xx} = & c_{11} (\partial_t^2 h_{xx} - \partial_x (b f_x)) + c_{13} (\partial_t^2 h_{zz} - \partial_z (b f_z)) \\ & + c_{15} \{ \partial_t^2 h_{xz} - [\partial_x (b f_z) + \partial_z (b f_x)] \} \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} s'_{xz} = & c_{15} (\partial_t^2 h_{xx} - \partial_x (b f_x)) + c_{35} (\partial_t^2 h_{zz} - \partial_z (b f_z)) \\ & + c_{55} \{ \partial_t^2 h_{xz} - [\partial_x (b f_z) + \partial_z (b f_x)] \} \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} s'_{zz} = & c_{13} (\partial_t^2 h_{xx} - \partial_x (b f_x)) + c_{33} (\partial_t^2 h_{zz} - \partial_z (b f_z)) \\ & + c_{35} \{ \partial_t^2 h_{xz} - [\partial_x (b f_z) + \partial_z (b f_x)] \} \end{aligned} \quad (2.68)$$

2.3.3 Caso ortotrópico

Para obter as equações para o caso ortotrópico em duas dimensões², expande-se as equações do caso geral anisotrópico (seção 2.2) para $i = 1$ (referente à coordenada x) e $i = 3$ (referente a coordenada z) e substitui-se os termos do tensor de elasticidade do caso ortotrópico em duas dimensões, dado por (ver Apêndice B)

$$C_{nm} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{13} & 0 \\ c_{13} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & c_{55} \end{pmatrix}, \quad (2.69)$$

²O caso ortotrópico é equivalente ao caso VTI considerando-se meios bidimensionais.

ou seja, basta substituir $c_{15} = c_{35} = 0$ nas equações para o caso de anisotropia geral vistas na seção 2.3.2.

Equações de campo duplo: sistema em velocidades e tensões

No caso ortotrópico, obtém-se as seguintes equações

$$\rho \partial_t v_x - \partial_x \tau_{xx} - \partial_z \tau_{xz} = f_x \quad (2.70)$$

$$\rho \partial_t v_z - \partial_x \tau_{xz} - \partial_z \tau_{zz} = f_z \quad (2.71)$$

$$\partial_t \tau_{xx} - (c_{11} \partial_x v_x + c_{13} \partial_z v_z) = -\partial_t g_{xx}^{(ort)} \quad (2.72)$$

$$\partial_t \tau_{zz} - (c_{13} \partial_x v_x + c_{33} \partial_z v_z) = -\partial_t g_{zz}^{(ort)} \quad (2.73)$$

$$\partial_t \tau_{xz} - c_{55} (\partial_z v_x + \partial_x v_z) = -\partial_t g_{xz}^{(ort)}, \quad (2.74)$$

onde a fonte de tensão é dada por

$$g_{xx}^{(ort)} = c_{11} h_{xx} + c_{13} h_{zz} \quad (2.75)$$

$$g_{zz}^{(ort)} = c_{13} h_{xx} + c_{33} h_{zz} \quad (2.76)$$

$$g_{xz}^{(ort)} = c_{55} (h_{xz} + h_{zx}). \quad (2.77)$$

Equações de campo duplo: sistema em deslocamentos e tensões

De forma semelhante para as equações em deslocamentos e tensões em duas dimensões chega-se à

$$\rho \partial_t^2 u_x - \partial_x \tau_{xx} - \partial_z \tau_{xz} = f_x \quad (2.78)$$

$$\rho \partial_t^2 u_z - \partial_x \tau_{xz} - \partial_z \tau_{zz} = f_z \quad (2.79)$$

$$\tau_{xx} - (c_{11} \partial_x u_x + c_{13} \partial_z u_z) = -g_{xx}^{(ort)} \quad (2.80)$$

$$\tau_{zz} - (c_{13} \partial_x u_x + c_{33} \partial_z u_z) = -g_{zz}^{(ort)} \quad (2.81)$$

$$\tau_{xz} - c_{55} (\partial_z u_x + \partial_x u_z) = -g_{xz}^{(ort)}, \quad (2.82)$$

onde as fontes são dadas pelas Eq. (2.75)-Eq. (2.77).

Equações de campo único: equações da onda de deslocamentos

As equações de campo único para as componentes da onda de deslocamentos no caso ortotrópico são dadas por

$$\rho \partial_t^2 u_x - [\partial_x (c_{11} \partial_x u_x) + \partial_x (c_{13} \partial_z u_z) + \partial_z (c_{55} \partial_z u_x) + \partial_z (c_{55} \partial_x u_z)] = s_x^{u(ort)} \quad (2.83)$$

$$\rho \partial_t^2 u_z - [\partial_x (c_{55} \partial_z u_x) + \partial_x (c_{55} \partial_x u_z) + \partial_z (c_{13} \partial_x u_x) + \partial_z (c_{33} \partial_z u_z)] = s_z^{u(ort)}, \quad (2.84)$$

sendo as componentes da fonte dadas por

$$s_x^{u(ort)} = f_x - (\partial_x c_{11} h_{xx} + \partial_x c_{13} h_{zz} + \partial_z c_{55} h_{xz} + \partial_z c_{55} h_{xz}) \quad (2.85)$$

$$s_z^{u(ort)} = f_z - (\partial_x c_{55} h_{xz} + \partial_x c_{55} h_{zx} + \partial_z c_{13} h_{xx} + \partial_z c_{33} h_{zz}). \quad (2.86)$$

Novamente chama-se a atenção para o fato de que a fonte descrita acima é geral para o caso ortotrópico, sendo a fonte utilizada nas modelagens deste trabalho melhor descrita na seção 2.5.1.

Equações de campo único: equações da onda de velocidades

Como as equações da onda de velocidades tem a mesma forma das equações de deslocamentos, obtém-se diretamente

$$\rho \partial_t^2 v_x - [\partial_x (c_{11} \partial_x v_x) + \partial_x (c_{13} \partial_z v_z) + \partial_z (c_{55} \partial_z v_x) + \partial_z (c_{55} \partial_x v_z)] = \partial_t s_x^{u(ort)} \quad (2.87)$$

$$\rho \partial_t^2 v_z - [\partial_x (c_{55} \partial_z v_x) + \partial_x (c_{55} \partial_x v_z) + \partial_z (c_{13} \partial_x v_x) + \partial_z (c_{33} \partial_z v_z)] = \partial_t s_z^{u(ort)}, \quad (2.88)$$

com a fonte dada pelas mesmas expressões que antes, dadas pelas Eq. (2.85)-(2.85), com a diferença de que é tomada a derivada temporal das distribuições dadas por h_{ij} e f_i nas mesmas.

Equações de campo único: equações da onda de tensões

Para as equações da onda de tensões obtém-se

$$\partial_t^2 \tau_{xx} - [c_{11} \partial_x (b \partial_x \tau_{xx} + b \partial_z \tau_{xz}) + c_{13} \partial_z (b \partial_x \tau_{xz} + b \partial_z \tau_{zz})] = -s_{xx}'^{\tau(ort)} \quad (2.89)$$

$$\partial_t^2 \tau_{zz} - [c_{13} \partial_x (b \partial_x \tau_{xx} + b \partial_z \tau_{xz}) + c_{33} \partial_z (b \partial_x \tau_{xz} + b \partial_z \tau_{zz})] = -s_{zz}'^{\tau(ort)} \quad (2.90)$$

$$\partial_t^2 \tau_{xz} - c_{55} [\partial_z (b \partial_x \tau_{xx} + b \partial_z \tau_{xz}) + \partial_x (b \partial_x \tau_{xz} + b \partial_z \tau_{zz})] = -s_{xz}'^{\tau(ort)}, \quad (2.91)$$

onde a fonte é dada por

$$s_{xx}'^{\tau(ort)} = c_{11} (\partial_t^2 h_{xx} - \partial_x (b f_x)) + c_{13} (\partial_t^2 h_{zz} - \partial_z (b f_z)) \quad (2.92)$$

$$s_{zz}'^{\tau(ort)} = c_{13} (\partial_t^2 h_{xx} - \partial_x (b f_x)) + c_{33} (\partial_t^2 h_{zz} - \partial_z (b f_z)) \quad (2.93)$$

$$s_{xz}'^{\tau(ort)} = c_{55} [\partial_t^2 h_{xz} - \partial_z (b f_x) + \partial_t^2 h_{zx} - \partial_x (b f_z)]. \quad (2.94)$$

2.3.4 Caso isotrópico

Até aqui, foram apresentadas as equações bidimensionais para o caso de anisotropia geral e para o caso com anisotropia ortotrópica. Agora será visto o caso mais simples de todos, que se caracteriza por apresentar a velocidade de propagação da onda independente da direção de propagação da mesma, isto é, serão considerados os meios

isotrópicos. Neste caso, como discutido no apêndice B, o tensor de elasticidade é dado pelo tensor isotrópico simétrico, sendo sua expressão na notação de Voigt dada (em duas dimensões) por

$$C_{nm} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \quad (2.95)$$

Repare que o número de constantes independentes deste tensor se reduz a dois. As equações em duas dimensões para o caso isotrópico podem ser obtidas fazendo-se

$$c_{11}, c_{33} \rightarrow \lambda + 2\mu \quad (2.96)$$

$$c_{13} \rightarrow \lambda \quad (2.97)$$

$$c_{55} \rightarrow \mu \quad (2.98)$$

nas equações para o caso ortotrópico vistas anteriormente.

Equações de campo duplo: sistema em deslocamentos e tensões

De forma direta, obtém-se

$$\rho \partial_t^2 u_x - \partial_x \tau_{xx} - \partial_z \tau_{xz} = f_x \quad (2.99)$$

$$\rho \partial_t^2 u_z - \partial_x \tau_{xz} - \partial_z \tau_{zz} = f_z \quad (2.100)$$

$$\tau_{xx} - (\lambda + 2\mu) \partial_x u_x - \lambda \partial_z u_z = -\bar{g}_{xx} \quad (2.101)$$

$$\tau_{zz} - (\lambda + 2\mu) \partial_z u_z - \lambda \partial_x u_x = -\bar{g}_{zz} \quad (2.102)$$

$$\tau_{xz} - \mu [\partial_x u_z + \partial_z u_x] = -\bar{g}_{xz}, \quad (2.103)$$

com a fonte dada por

$$\bar{g}_{xx} = (\lambda + 2\mu) h_{xx} + \lambda h_{zz} \quad (2.104)$$

$$\bar{g}_{zz} = (\lambda + 2\mu) h_{zz} + \lambda h_{xx} \quad (2.105)$$

$$\bar{g}_{xz} = \mu (h_{xz} + h_{zx}). \quad (2.106)$$

Equações de campo duplo: sistema em velocidades e tensões

De forma semelhante, o sistema em termos de velocidades e tensões é dado por

$$\rho \partial_t v_x - \partial_x \tau_{xx} - \partial_z \tau_{xz} = f_x \quad (2.107)$$

$$\rho \partial_t v_z - \partial_x \tau_{xz} - \partial_z \tau_{zz} = f_z \quad (2.108)$$

$$\partial_t \tau_{xx} - (\lambda + 2\mu) \partial_x v_x - \lambda \partial_z v_z = -\partial_t \bar{g}_{xx} \quad (2.109)$$

$$\partial_t \tau_{zz} - (\lambda + 2\mu) \partial_z v_z - \lambda \partial_x v_x = -\partial_t \bar{g}_{zz} \quad (2.110)$$

$$\partial_t \tau_{xz} - \mu [\partial_x v_z + \partial_z v_x] = -\partial_t \bar{g}_{xz}. \quad (2.111)$$

Equações de campo único: equações da onda de deslocamentos

A onda de deslocamentos no caso isotrópico é dada por

$$\rho \partial_t^2 u_x - \partial_x [(\lambda + 2\mu) \partial_x u_x + \lambda \partial_z u_z] - \partial_z [\mu (\partial_z u_x + \partial_x u_z)] = \bar{s}_x \quad (2.112)$$

$$\rho \partial_t^2 u_z - \partial_z [(\lambda + 2\mu) \partial_z u_z + \lambda \partial_x u_x] - \partial_x [\mu (\partial_x u_z + \partial_z u_x)] = \bar{s}_z, \quad (2.113)$$

sendo a fonte dada por

$$\bar{s}_i = f_i - \partial_j \bar{g}_{ij} = f_i - \partial_x \bar{g}_{ix} - \partial_z \bar{g}_{iz}. \quad (2.114)$$

Equações de campo único: equações da onda de velocidades

De forma semelhante, as equações da onda de velocidade são dadas por

$$\rho \partial_t^2 v_x - \partial_x [(\lambda + 2\mu) \partial_x v_x + \lambda \partial_z v_z] - \partial_z [\mu (\partial_z v_x + \partial_x v_z)] = \partial_t \bar{s}_x \quad (2.115)$$

$$\rho \partial_t^2 v_z - \partial_z [(\lambda + 2\mu) \partial_z v_z + \lambda \partial_x v_x] - \partial_x [\mu (\partial_x v_z + \partial_z v_x)] = \partial_t \bar{s}_z. \quad (2.116)$$

Equações de campo único: equações da onda de tensões

Para as equações da onda de tensões obtém-se

$$\partial_t^2 \tau_{xx} - [(\lambda + 2\mu) \partial_x (b \partial_x \tau_{xx} + b \partial_z \tau_{xz}) + \lambda \partial_z (b \partial_x \tau_{xz} + b \partial_z \tau_{zz})] = -\bar{s}'_{xx} \quad (2.117)$$

$$\partial_t^2 \tau_{zz} - [\lambda \partial_x (b \partial_x \tau_{xx}) + b \partial_z \tau_{xz} + (\lambda + 2\mu) \partial_z (b \partial_x \tau_{xz} + b \partial_z \tau_{zz})] = -\bar{s}'_{zz} \quad (2.118)$$

$$\partial_t^2 \tau_{xz} - \mu [\partial_z (b \partial_x \tau_{xx} + b \partial_z \tau_{xz}) + \partial_x (b \partial_x \tau_{xz} + b \partial_z \tau_{zz})] = -\bar{s}'_{xz}, \quad (2.119)$$

onde a fonte é dada por

$$\bar{s}'_{xx} = (\lambda + 2\mu) [\partial_t^2 h_{xx} - \partial_x (b f_x)] + \lambda [\partial_t^2 h_{zz} - \partial_z (b f_z)] \quad (2.120)$$

$$\bar{s}'_{zz} = \lambda [\partial_t^2 h_{xx} - \partial_x (b f_x)] + (\lambda + 2\mu) [\partial_t^2 h_{zz} - \partial_z (b f_z)] \quad (2.121)$$

$$\bar{s}'_{xz} = \lambda [\partial_t^2 h_{xz} - \partial_z (b f_x) + \partial_t^2 h_{zx} - \partial_x (b f_z)]. \quad (2.122)$$

2.4 Representações para a equação geral da onda acústica

O apêndice A mostra a dedução completa das equações da acústica. Nesta seção será mostrado que cada uma das equações vistas para a propagação de ondas elásticas tem uma equação correspondente no caso acústico. Enfatiza-se, entretanto, que no caso acústico não existe anisotropia, de forma que esta equivalência deve ser vista como uma simplificação do caso elástico isotrópico para o caso acústico. Por exemplo, tem-se as seguintes simplificações das equações elásticas para meios isotrópicos no caso acústico:

$$\rho \partial_t v_i - \partial_j \tau_{ij} = f_i \quad \leftrightarrow \quad \rho \partial_t v_i + \partial_i p = f_i \quad (2.123)$$

$$\partial_t \tau_{ij} - \lambda \delta_{ij} \partial_k v_k - \mu [\partial_j v_i + \partial_i v_j] = -\partial_t \bar{g}_{ij} \quad \leftrightarrow \quad \partial_t p + \kappa \partial_i v_i = \kappa \partial_t i_V, \quad (2.124)$$

existindo correspondência para todas as demais equações, conforme discutido a seguir.

Primeiro deve-se ter em conta que o módulo de cisalhamento é nulo no caso acústico, uma vez que não há resistência ao cisalhamento nestes meios. Além disso, o tensor de elasticidade se simplifica para apenas uma grandeza independente, o módulo de compressão adiabática κ (módulo de Bulk), definido no apêndice A, Eq. (A.28). Com isto, pode-se escrever

$$c_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl} \kappa. \quad (2.125)$$

Assim, a matriz de elasticidade pode ser vista como um caso particular da relação para meios elásticos isotrópicos dada pela Eq. (2.95) com módulo de cisalhamento nulo, podendo ser escrita na notação simplificada de Voigt como (ver apêndice B)

$$C_{nm} = \begin{pmatrix} \kappa & \kappa & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & \kappa & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & \kappa & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.126)$$

onde o módulo de compressão adiabática (Bulk) é identificado como o primeiro parâmetro de Lamé ($\lambda = \kappa$). Além disso, como não há cisalhamento, a tensão cisalhante é nula, bem como as tensões normais são equivalentes ao negativo da pressão acústica (pela forma que foram definidas), o que pode ser escrito, como

Tabela 2.1: Relação das Eq. elásticas com as Eq. acústicas.

Equação	Formulação Elástica	Formulação Acústica
contin. u	$\tau_{ij} - c_{ijkl}\partial_l u_k = -c_{ijkl}h_{kl}$	$p + \kappa\partial_i u_i = \kappa i_V$
contin. v	$\partial_t \tau_{ij} - c_{ijkl}\partial_l v_k = -c_{ijkl}\partial_t h_{kl}$	$\partial_t p + \kappa\partial_i v_i = \kappa\partial_t i_V$
movim. u	$\rho\partial_t^2 u_i - \partial_j \tau_{ij} = f_i$	$\rho\partial_t^2 u_i + \partial_i p = f_i$
movim. v	$\rho\partial_t v_i - \partial_j \tau_{ij} = f_i$	$\rho\partial_t v_i + \partial_i p = f_i$
onda p	$\partial_t^2 \tau_{ij} - c_{ijkl}\partial_l (b\partial_n \tau_{kn}) = -c_{ijkl}s_{kl}$	$\partial_t^2 p - \kappa\partial_i (b\partial_i p) = -\kappa s$
onda u	$\rho\partial_t^2 u_i - \partial_j (c_{ijkl}\partial_l u_k) = s_i^u$	$\rho\partial_t^2 u_i - \partial_i (\kappa\partial_j u_j) = s_i^u$
onda v	$\rho\partial_t^2 v_i - \partial_j (c_{ijkl}\partial_l v_k) = \partial_t s_i^u$	$\rho\partial_t^2 v_i - \partial_i (\kappa\partial_j v_j) = \partial_t s_i^u$
fonte s	$s_{kl} = \partial_t^2 h_{kl} - \partial_l (b f_k)$	$s = \partial_t^2 i_V - \partial_i (b f_i)$
fonte s^u	$s_i^u = f_i - \partial_j g_{ij}$	$s_i^u = f_i - \partial_i (\kappa i_V)$

visto na Eq. (B.16), sinteticamente como

$$\tau_{ij} = -\delta_{ij}p. \quad (2.127)$$

Substituindo estas simplificações em cada uma das equações para o caso elástico isotrópico chega-se facilmente às equações correspondentes para o caso acústico, desde que se utilize uma fonte de tensão normal equivalente à definida no caso acústico (apêndice A), dada por

$$g_{ij} = c_{ijkl}h_{kl} = \delta_{ij}\kappa i_V, \quad (2.128)$$

que corresponde à “injeção” de tensões normais dadas por i_V , descritas no caso acústico como sendo uma injeção de massa. A correspondência entre as equações elásticas e acústicas é mostrada na Tab. 2.1.

Enfatiza-se que todas as equações apresentadas na referida tabela foram escritas no sistema de coordenadas cartesianas e em notação indicial (usando notação de Einstein). No apêndice A, são deduzidas as equações da acústica com maiores detalhes. A partir das equações obtidas no referido apêndice, pode-se chegar às equações da acústica apresentadas na tabela, bastando transformá-las do formato vetorial para o formato indicial (em coordenadas cartesianas) e multiplicando-se, quando for o caso, por menos 1 e/ou por propriedades, além de utilizar-se a relação $c^2 = \kappa/\rho$ quando necessário. Enfatiza-se que as equações acústicas escritas em notação indicial, usando coordenadas cartesianas, são válidas apenas neste sistema de coordenadas, enquanto que as equações escritas na forma vetorial (apêndice A) são válidas em qualquer sistema de coordenadas. Para obter as equações em outros sistemas de coordenadas, basta substituir-se as corretas expressões dos operadores diferenciais para cada sistema de coordenadas em questão nas expressões vetoriais, como mostra, por exemplo, o livro-texto de BORISENKO e TARAPOV (1979).

2.5 Termo fonte, condições de contorno e condições iniciais

Nesta seção, são discutidos os demais tópicos importantes para que as equações de propagação de ondas apresentadas anteriormente representem um problema físico completo com solução matemática unívoca. Para tal, é necessário a especificação da fonte de geração da perturbação sísmica, além das condições de contorno e das condições iniciais, como será discutido nos próximos tópicos.

2.5.1 Fonte sísmica

Nesta seção, serão feitas importantes considerações em relação à fonte sísmica. Como será necessário comparar resultados provenientes de diferentes formulações numéricas, é importante tomar algumas precauções em relação a aplicação da fonte. Como foi visto na seção anterior, a fonte da equação da onda acústica possui uma forma distinta daquela do sistema de primeira ordem em pressão e velocidade (equação de campo duplo). Com isto, se se deseja o mesmo efeito físico — que significa ser gerada a mesma onda — deve-se aplicar a fonte de forma adequada, como será tratado nesta seção. As considerações que serão feitas são referentes apenas às expressões analíticas, sendo deixadas questões relativas à discretização das mesmas para o capítulo 4, junto com a descrição dos esquemas numéricos implementados.

Primeiro, enfatiza-se que, via de regra, neste trabalho será considerado apenas o caso mais comum de fonte sísmica, ou seja, uma fonte como as utilizadas em levantamentos marítimos convencionais. De maneira geral, uma fonte sísmica é qualquer aparato utilizado para gerar ondas sísmicas que irão se propagar através do meio que se deseja estudar. Exemplos de possíveis fontes sísmicas para levantamentos terrestres são: detonação de dinamites enterradas e queda de pesos na superfície da Terra. No formalismo desenvolvido neste trabalho uma fonte geral é caracterizada pela distribuição \vec{f} de densidade de força (forças de volumes) e pela distribuição de tensões g_{ij} aplicada (correspondente a aplicação de uma distribuição de deslocamentos h_{ij}).

No caso dos levantamentos marítimos, a fonte é um equipamento especialmente construído, chamado de *airgun* — uma espécie de canhão de ar comprimido —, construído para injetar massa a partir de uma região espacialmente pequena, freqüentemente considerada pontual ou uma distribuição de pontos para o caso de arranjos de *airguns*. Esta injeção de ar ocorre ao longo de um curto intervalo de tempo, tipicamente da ordem de um décimo de segundo, e gera uma frente de onda esférica que se propaga pela água até atingir as primeiras camadas de rocha no fundo oceânico, por onde continua a se propagar e, eventualmente, ao atingir regiões com forte variação das propriedades físicas (contrastes de impedância), sofre as reflexões

que serão registradas nos hidrofones. É claro que a onda gerada por um *airgun* é de tipo P , isto é, puramente longitudinal, uma vez que é gerada em um meio fluído (a água). Logicamente, isto não significa que inexistam ondas S na modelagem elástica, uma vez que há conversão da onda P gerada pela fonte para onda S ao atingir as primeiras camadas rochosas em subsuperfície.

Ao longo deste trabalho, seja no caso acústico ou no caso elástico, será utilizada uma fonte pontual. No caso acústico (apêndice A) a fonte teórica foi representada pela distribuição i_V . Como discutido anteriormente, tal parâmetro é utilizado para descrever o efeito da injeção de massa gerada pelo *airgun*. Em termos mais precisos (ver apêndice A), i_V é uma distribuição espaço-temporal que descreve a densidade de matéria injetada por densidade de matéria do meio (no caso água). A expressão que será utilizada é uma generalização de uma fonte do tipo pulso de Ricker, nomeada assim em homenagem aos trabalhos pioneiros de Ricker no estudo das assinaturas de fontes sísmicas em meados do século passado. Alguns destes trabalhos são RICKER (1940, 1945, 1953). Neste sentido, tradicionalmente utiliza-se uma fonte pontual em geofísica para o caso da equação da onda acústica — ver por exemplo CUNHA (1997) e BULCÃO (2004) — dada pela seguinte expressão

$$F(t) = \left[2\pi (\pi f_c t_d)^2 - 1 \right] \exp \left[-\pi (\pi f_c t_d)^2 \right], \quad (2.129)$$

onde f_c é um parâmetro relacionado com a frequência de corte f_{corte} e t_d é o tempo defasado, utilizado para deslocar o início da aplicação da fonte, para que o máximo (ou mínimo, no caso) da função seja deslocado de zero para um tempo t_0 positivo de forma que a expressão seja praticamente zero no início da análise (em $t = 0$) e cresça suavemente (sem descontinuidade), conforme mostra a Fig. 2.3. As expressões para os parâmetros acima são dadas por

$$f_c = \frac{f_{corte}}{3\sqrt{\pi}} \quad (2.130)$$

$$t_d = t - t_0 \quad (2.131)$$

$$t_0 = \frac{2\sqrt{\pi}}{f_{corte}}. \quad (2.132)$$

Como a Eq. (2.129), que representa a derivada segunda da função de Gauss (como será detalhado na seqüência), vai a zero apenas no infinito, utiliza-se tal expressão truncada no tempo, ou seja, na prática, utiliza-se a seguinte expressão para fonte:

$$F(t) = \left[2\pi (\pi f_c t_d)^2 - 1 \right] \exp \left[-\pi (\pi f_c t_d)^2 \right] \quad \text{para } 0 \leq t \leq t_M \quad (2.133)$$

$$F(t) = 0 \quad \text{para } t > t_M, \quad (2.134)$$

onde

$$t_M = 2t_0 = \frac{4\sqrt{\pi}}{f_{corte}}. \quad (2.135)$$

No presente trabalho, para o caso acústico, generaliza-se esta fonte tradicional da geofísica considerando-se um parâmetro i_V tal que a fonte da equação da onda acústica (dada por $\partial_t^2 i_V$, conforme dado no apêndice A ou na Tab. 2.1) fique igual a Eq. (2.129). Para tal, deve-se utilizar uma injeção de massa que siga uma distribuição do tipo gaussiana (Fig. 2.2(a)), ou seja, um parâmetro i_V cuja expressão é dada por

$$i_V(\vec{x}, t) = \frac{A}{2\pi(\pi f_c t_d)^2} \exp\left[-\pi(\pi f_c t_d)^2\right] \delta(\vec{x} - \vec{x}_f), \quad (2.136)$$

onde $\delta(\vec{x} - \vec{x}_f)$ é a distribuição conhecida como delta de Dirac, sendo \vec{x}_f a coordenada de aplicação da fonte, e A a amplitude da mesma. Além disso, deve-se considerar a densidade de forças externas (\vec{f} nas expressões vistas anteriormente) nula, ou seja,

$$\vec{f} = \vec{0}. \quad (2.137)$$

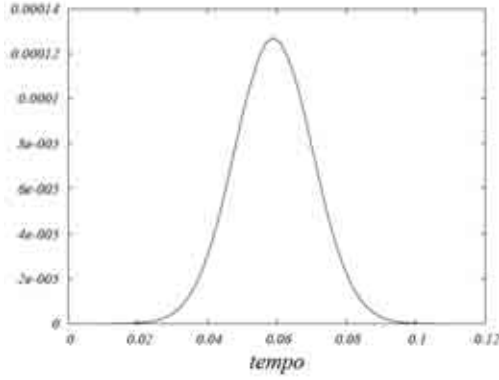
Com isto todos os termos fonte nas equações da acústica (ver Tab. 2.1), ou seja, aqueles relativos aos termos não homogêneos das equações diferenciais, podem ser obtidos a partir das derivadas primeira e segunda de i_V , que por sua vez podem ser calculadas sem dificuldades, resultando em

$$\frac{\partial i_V}{\partial t} = -A t_d \exp\left[-\pi(\pi f_c t_d)^2\right] \delta(\vec{x} - \vec{x}_f) \quad (2.138)$$

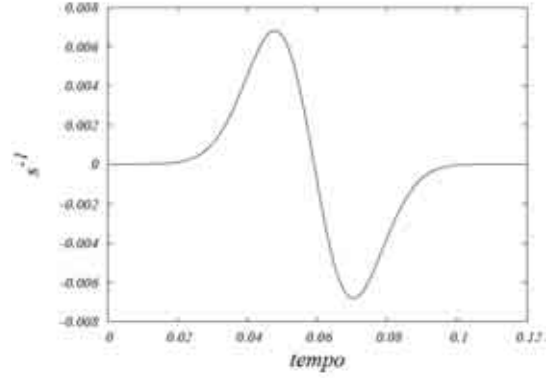
$$\frac{\partial^2 i_V}{\partial t^2} = A \left[2\pi(\pi f_c t_d)^2 - 1\right] \exp\left[-\pi(\pi f_c t_d)^2\right] \delta(\vec{x} - \vec{x}_f). \quad (2.139)$$

Na Figura 2.2, são mostrados os gráficos do parâmetro de injeção de massa i_V e de sua derivada primeira para $A = 1$. Repare que este parâmetro é adimensional, por representar um volume de injeção de massa por volume do meio. Entretanto, a distribuição i_V (ou suas derivadas) aparece sempre nas equações multiplicada pela constante de compressão adiabática (módulo de Bulk), que possui dimensão de pressão, sendo, por esta razão, denominada neste trabalho como uma “fonte de pressão”. Enfatiza-se que, através das Eq. (2.138) e Eq. (2.139), pode-se calcular todas as fontes nas diferentes expressões vistas anteriormente para a propagação da onda acústica (dadas na Tab. 2.1). Por exemplo, a fonte s de pressão acústica é dada por

$$s(\vec{x}, t) = \frac{\partial^2 i_V}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{f}\right) = \frac{\partial^2 i_V}{\partial t^2}.$$



(a) Função i_V .



(b) Derivada primeira de i_V .

Figura 2.2: Gráficos do parâmetro adimensional i_V de volume de massa injetada por volume do meio (função de Gauss) (a) e sua derivada primeira (b).

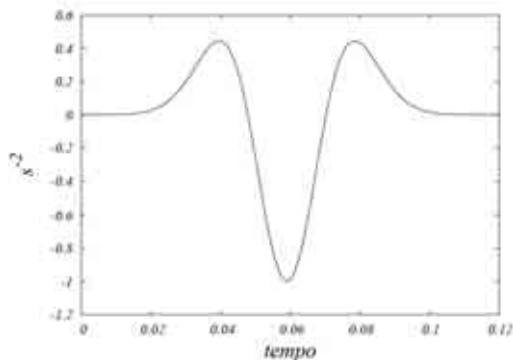
O que fornece a seguinte expressão para a fonte

$$s(\vec{x}, t) = A \left[2\pi (\pi f_c t_d)^2 - 1 \right] \exp \left[-\pi (\pi f_c t_d)^2 \right] \delta(\vec{x} - \vec{x}_f), \quad (2.140)$$

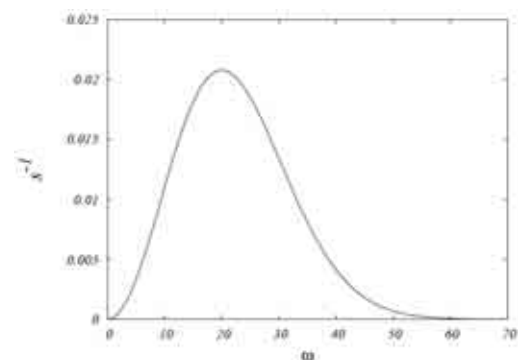
ou seja, considerando-se uma amplitude unitária $A = 1$, esta equivale a fonte dada pela Eq. (2.129), como tinha que ser. Na Fig. 2.3-(a), é mostrado o gráfico desta fonte (lembrando que ela deve ser ainda multiplicada pela constante de compressão adiabática κ do meio). A transformada de Fourier desta expressão é dada por

$$s(f) = \frac{2f^2}{\pi^2 f_c^3} \exp \left[\frac{-f^2}{\pi f_c^2} \right], \quad (2.141)$$

o que fornece o conteúdo de freqüências associado à fonte. Com isto, é possível ver uma propriedade importantíssima da fonte, qual seja, o fato da mesma ser de banda limitada, sendo f_{corte} a máxima freqüência presente (Fig. 2.3-(b)).



(a) Gráfico de fonte sísmica s .



(b) Espectro de freqüências da fonte sísmica.

Figura 2.3: Gráficos da fonte pontual para a equação da onda acústica utilizando uma freqüência de corte $f_{corte} = 60\text{Hz}$ e de sua transformada de Fourier.

O fato da fonte ser de banda limitada é interessante pois as camadas rochosas por onde a onda se propaga funcionam como um filtro de altas frequências, dissipando energia nesta faixa. Além disso, para representar o sinal da fonte em termos discretos, como será visto na parte que trata dos esquemas numéricos, existe uma frequência limite que pode ser representada dependendo do tempo de amostragem t_A utilizado na gravação do registro sísmico (teorema da amostragem, seção 4.5).

No caso das formulações elásticas, serão utilizadas fontes de tensão análogas à definida para o caso acústico. Para tal, a fonte será aplicada sempre em uma camada acústica, por exemplo a água (como em levantamentos *off-shore*). Isto irá viabilizar a comparação direta entre as diferentes formulações acústicas e elásticas, além de simplificar substancialmente a aplicação da fonte. Assim, a mesma fonte acústica será utilizada no caso elástico.

2.5.2 Condições de contorno e condições iniciais

Como é bem conhecido da teoria de equações diferenciais parciais, para que um sistema de equações diferenciais parciais apresente uma solução única em um determinado domínio é necessário considerar-se as condições de contorno e as condições iniciais do problema. Tal problema matemático é conhecido com o nome de problema de valor inicial e de valor de contorno. A seguir serão consideradas tais condições para o caso de propagação de ondas.

Em relação às condições iniciais, nos problemas simulados neste trabalho necessita-se apenas de condições triviais. Desta forma, as condições iniciais adequadas são de campos iniciais nulos, bem como de derivada temporal nula, ou seja,

$$\vec{u}(\vec{x}, t = 0) = 0 \quad (2.142)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\vec{x}, t = 0) = 0. \quad (2.143)$$

Como foi visto no tópico anterior, enfatiza-se que é utilizada uma fonte explosiva geradora da perturbação sísmica com uma dependência temporal suave que inicia de um valor nulo, de forma que ela atende às condições iniciais dadas acima.

Em relação às condições de contorno, classicamente dois tipos de condições de contorno são utilizadas, nomeadamente as condições essenciais (de Dirichlet), com valor do campo prescrito, e as condições naturais (de Neumann), como valor da derivada do campo prescrita, ou seja,

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{u} \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2.144)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \hat{n}}(\vec{x}) = \vec{q} \quad \text{em } \Gamma_q, \quad (2.145)$$

onde \vec{u} e \vec{q} são os valores dos campos de velocidade (ou deslocamento) e de sua derivada em relação à \hat{n} (vetor perpendicular ao contorno) prescritos, respectivamente, nos contornos Γ_u e Γ_q . No caso das tensões (ou pressão acústica) as expressões são as mesmas. Entretanto, no contexto da propagação de ondas, aplicar tais condições nos bordos do domínio numérico considerado faria com que toda a onda incidente sobre eles fosse refletida com a mesma fase ou com a fase invertida dependendo de qual condição se utiliza. Neste sentido, para o bordo superior utiliza-se a condição essencial com campos prescritos, pois este bordo representa a superfície da terra ou da água nas simulações presentes neste trabalho, sendo nos demais bordos necessário recorrer-se às chamadas condições de contorno não-reflexivas.

A necessidade de utilização de condições de contorno não-reflexivas ocorre porque os problemas que se deseja modelar são na verdade problemas de domínios semi-infinitos (ou infinitos). Assim, necessita-se considerar tais condições, pois o domínio precisa ser truncado numericamente. Este ponto será melhor discutido na seção 4.6, do capítulo que trata das formulações numéricas. Conceitualmente, tais condições são representadas pela chamada equação *one-way* da onda, considerando a mesma, em um determinado contorno, na direção em que a onda sai do modelo, ou seja, tomando-se o sinal positivo ou negativo da seguinte equação

$$\frac{d}{dx} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = 0. \quad (2.146)$$

Capítulo 3

Operadores de Diferenças Finitas para Malhas Intercaladas

Até aqui foram tratadas apenas questões teóricas relativas às descrições matemático-analíticas para a propagação de ondas elásticas e acústicas. Neste capítulo, será dado início à parte numérica deste trabalho, ou seja, serão tratados os conceitos importantes para a resolução das equações vistas, sendo utilizado o método das diferenças finitas com malhas intercaladas (*staggered grids*), chamado de MDFI. Serão apresentados os conceitos fundamentais do MDFI, sendo tais conceitos importantes para os desenvolvimentos do próximo capítulo, onde serão apresentados os esquemas numéricos propostos e desenvolvidos neste trabalho. Para uma revisão do MDF com malha simples, vide apêndice C.

Na seção 3.1, obtém-se os operadores clássicos de diferenças finitas na malha intercalada, operadores estes utilizados nos esquemas clássicos (SAENGER *et al.*, 2000; VIRIEUX, 1986). Na seção seguinte, discute-se as diferentes configurações de malhas intercaladas propostas na literatura, mostrando em especial sua relação com as equações que se deseja discretizar. Na seção 3.3, apresenta-se os esquemas clássicos propostos na literatura. Na sequência, discute-se um conceito importante, referente à relação existente entre os operadores na malha intercalada e os operadores na malha simples. Tal conceito é utilizado para obtenção dos operadores de diferenças finitas mais gerais na seção 3.5, operadores estes que serão utilizados nos esquemas apresentados no capítulo 4.

3.1 Operadores clássicos para malha intercalada

Nesta seção, faz-se uma breve revisão dos operadores de diferenças finitas clássicos utilizados para as formulações de diferenças finitas com malhas intercaladas da literatura. O apêndice C apresenta uma introdução ao método das diferenças finitas

(MDF) com malhas simples, ou seja, não intercaladas. Aqui será aplicado o mesmo método discutido no referido apêndice para o caso específico de malhas intercaladas. A Fig. 3.1 mostra um exemplo de malha intercalada espacialmente nas duas direções, com um campo considerado na malha original (pontos pretos) e o outro na malha intermediária (pontos brancos). Vê-se que a malha intercalada é, na verdade,

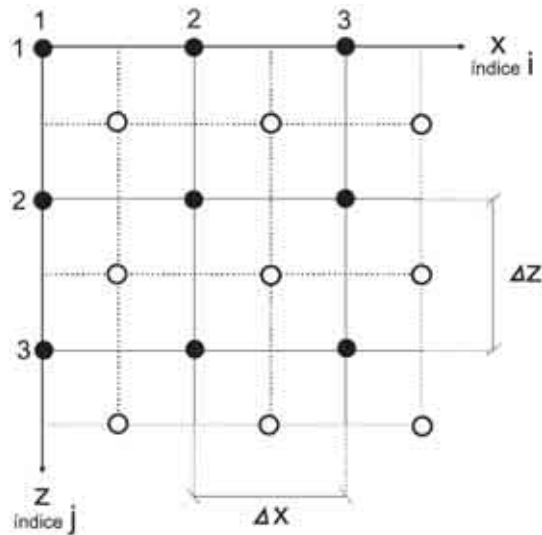


Figura 3.1: Malha intercalada em x e z . Os subíndice i e j inteiros correspondem à coordenada dos nós da malha normal (pontos pretos cheios) e as coordenadas fracionárias (círculos), à malha intermediária. Os espaçamentos são mostrados.

uma malha dual, composta por pontos da malha de diferenças finitas original e por pontos de uma malha intermediária.

Nas malhas intercaladas, os pontos da malha original são utilizados para aproximar derivadas consideradas em pontos da malha intermediária. De forma recíproca, as aproximações das derivadas em pontos da malha original são aproximadas utilizando pontos da malha intermediária. Em outras palavras, os operadores de diferenças finitas levam pontos da malha original para a malha intermediária e vice versa. Na verdade, como será visto adiante, os operadores de diferenças finitas levam, de forma geral, pontos de uma malha para as duas malhas. Neste sentido, como será visto, existe uma estreita relação entre os operadores para malhas intercaladas e os operadores para malhas simples. Por exemplo, pode-se chegar às discretizações de derivadas segundas por meio das expressões de derivada primeira aplicadas duas vezes em pontos da malha intercalada.

Utilizando esquemas de diferenças finitas com malhas intercaladas, as equações que se deseja discretizar são equilibradas em pontos diferentes, sendo as variáveis de interesse (os campos e as propriedades) definidas em locais apropriados (na malha original ou na malha intermediária) para obtenção de aproximações de diferenças centrais nos pontos onde cada equação é equilibrada. Em virtude disto diferentes

configurações de malhas intercaladas são utilizadas para resolução de diferentes sistemas de equações diferenciais. Na Fig. 3.2, são mostradas duas possibilidades simples de intercalar a malha (diferentes da apresentada na Fig. 3.1), onde se intercala as malhas apenas em uma das direções coordenadas. Tais malhas serão utilizadas para

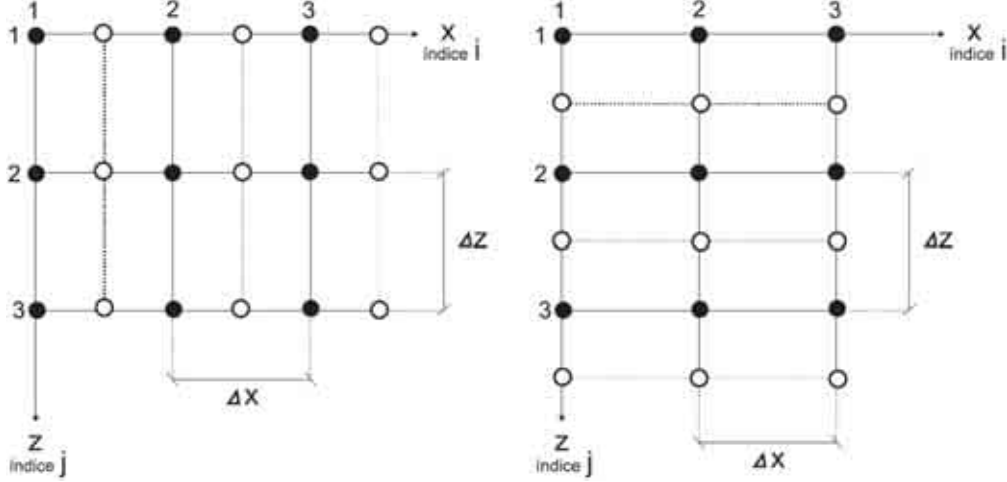


Figura 3.2: Malha intercalada em uma direção, seguindo padrão da Fig. 3.1.

obter os operadores intercalados mais simples em cada uma das direções espaciais, usando expansões em série de Taylor (conforme o procedimento discutido no apêndice C). Enfatiza-se que estes operadores básicos serão utilizados para obter todos os demais operadores de diferenças finitas utilizados neste trabalho, por meio de aplicação sucessiva, como explicado na seção 3.4.

Para obter as aproximações de diferenças finitas na malha intercalada, considere um ponto x_i discreto da mesma, onde se deseja aproximar as derivadas de um campo genérico f . Para tal, escreve-se as expansões da função f em diferentes pontos $x = x_i + l\Delta x$, onde $l = 1/2 + n$ com $n \in Z$ (inteiro), em torno de x_i (onde x_i são os pontos discretos da malha e Δx é o espaçamento da malha), para $l = \pm 1/2$ (ver Eq. (C.2) do apêndice C), ou seja,

$$f_{i+1/2} = f_i + \frac{\Delta x}{2 \cdot 1!} \frac{df_i}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2^2 \cdot 2!} \frac{d^2 f_i}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{d^3 f_i}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{2^4 \cdot 4!} \frac{d^4 f_i}{dx^4} + \frac{\Delta x^5}{2^5 \cdot 5!} \frac{d^5 f_i}{dx^5} + \dots \quad (3.1)$$

$$f_{i-1/2} = f_i - \frac{\Delta x}{2 \cdot 1!} \frac{df_i}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2^2 \cdot 2!} \frac{d^2 f_i}{dx^2} - \frac{\Delta x^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{d^3 f_i}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{2^4 \cdot 4!} \frac{d^4 f_i}{dx^4} - \frac{\Delta x^5}{2^5 \cdot 5!} \frac{d^5 f_i}{dx^5} + \dots \quad (3.2)$$

Repare que, no caso de malha simples, foram utilizadas expressões do mesmo tipo, considerando-se $l \in Z$, como desenvolvido no apêndice C.

Para obter as expressões de diferenças finitas para as derivadas em segunda e quarta ordens¹ de aproximação, na malha intercalada, manipula-se algebricamente

¹Subentenda-se daqui por diante que n -ésima ordem na variável x significa que o erro de truncamento da série de Taylor da aproximação via DF seja da ordem da n -ésima potência do equivalente espaçamento da malha, isto é, Δx^n .

tais equações isolando o termo de interesse, como apresentado a seguir.

Subtraindo-se a Eq. (3.1) da Eq. (3.2) (como feito no apêndice C), obtém-se

$$f_{i+1/2} - f_{i-1/2} = \frac{\Delta x}{1!} \frac{df_i}{dx} + \frac{\Delta x^3}{2^2 \cdot 3!} \frac{d^3 f_i}{dx^3} + \frac{\Delta x^5}{2^4 \cdot 5!} \frac{d^5 f_i}{dx^5} + \dots \quad (3.3)$$

Isolando a derivada primeira, obtém-se

$$\frac{df_i}{dx} = \frac{f_{i+1/2} - f_{i-1/2}}{\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{2^2 \cdot 3!} \frac{d^3 f_i}{dx^3} - \frac{\Delta x^4}{2^4 \cdot 5!} \frac{d^5 f_i}{dx^5} - \dots \quad (3.4)$$

que fornece a expressão para a derivada primeira na malha intercalada em segunda ordem, isto é, com erro de truncamento da ordem Δx^2 . Repare que esta expressão é equivalente à expressão obtida para a malha padrão (ver Eq. (C.6) do apêndice C), possuindo o mesmo *stencil* de dois pontos, uma vez que ambas representam a mesma aproximação, porém para malhas com espaçamentos distintos (Δx e $\Delta x/2$).

É importante mencionar que a expressão obtida acima para a derivada primeira da função f , na malha intercalada, é uma aproximação de diferenças centrais calculada no ponto x_i da malha padrão. Portanto, a aplicação de operadores como este leva um ponto da malha original a pontos da malha intermediária. Logicamente a recíproca é igualmente verdadeira. Mais adiante, será visto que o operador de diferenças finitas para derivada segunda na malha padrão pode ser entendido como o operador acima, aplicado duas vezes sucessivamente na malha intercalada.

Para obter a expressão da derivada primeira em quarta ordem, realiza-se o mesmo procedimento para $f_{i\pm 3/2}$, manipulando-se as expansões obtidas para chegar à expressão

$$\frac{df_i}{dx} = \frac{f_{i+3/2} - f_{i-3/2}}{3\Delta x} - \frac{9\Delta x^2}{2^2 \cdot 3!} \frac{d^3 f_i}{dx^3} - \frac{27\Delta x^4}{2^4 \cdot 5!} \frac{d^5 f_i}{dx^5} - \dots, \quad (3.5)$$

Para cancelar termo em Δx^2 multiplica-se a Eq. (3.4) por 9 e subtrai-se o resultado da Eq. (3.5), o que fornece a conhecida expressão

$$\frac{df_i}{dx} = \frac{9}{8} \left(\frac{f_{i+1/2} - f_{i-1/2}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{f_{i+3/2} - f_{i-3/2}}{3\Delta x} \right) - \frac{18\Delta x^4}{2^4 \cdot 5!} \frac{d^5 f_i}{dx^5} - \dots \quad (3.6)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{df_i}{dx} = \frac{-f_{i+3/2} + 27f_{i+1/2} - 27f_{i-1/2} + f_{i-3/2}}{24h} + O(4). \quad (3.7)$$

3.2 Configurações de malhas intercaladas

Como foi mencionado na seção anterior, os pontos nos quais as variáveis são definidas de forma discreta são de suma importância para a formulação de esquemas de diferenças finitas com malha intercalada. Dito de outra forma, a configuração da malha intercalada precisa ser considerada de forma cuidadosa para a abordagem de um determinado problema envolvendo equações ou sistemas de equações diferenciais.

Tradicionalmente, as malhas intercaladas têm sido utilizadas para resolução de sistemas de equações hiperbólicas de primeira ordem. Tais sistemas envolvem a consideração de dois campos, como por exemplo o campo de pressões e de velocidades. Entretanto, pode-se pensar em esquemas com malhas intercaladas mais gerais, como os que serão propostos no capítulo 4, aplicáveis a outros tipos de equações.

Nesta seção, serão apresentadas algumas malhas intercaladas propostas na literatura, com o objetivo de tornar clara a relação entre a configuração da malha e as equações que se deseja aproximar. Como neste trabalho todas as modelagens serão implementadas para meios bidimensionais, todas as malhas serão apresentadas nas duas dimensões usuais da geofísica, ou seja, x para a coordenada horizontal e z para a profundidade, com exceção da malha de Yee que será apresentada em três dimensões conforme o artigo original (YEE, 1966). Destaca-se, entretanto, que a extensão para três dimensões não apresenta maiores dificuldades, podendo ser feita de forma simples através da extensão da malha na direção y e lançando-se mão dos mesmos operadores utilizados nas demais direções.

3.2.1 Conceito de malha intercalada

A malha proposta no trabalho clássico de Yee (YEE, 1966) é uma das primeiras malhas intercaladas que se tem notícia utilizadas na literatura. Tal malha foi proposta originalmente para a resolução aproximada de equações diferenciais da eletrodinâmica utilizando o método das diferenças finitas. Nesta seção, tal malha será definida, sendo mostrada a relação da mesma com as equações do problema abordado, ou seja, da eletrodinâmica. Enfatiza-se que tal malha não será utilizada nas formulações deste trabalho, sendo apresentada aqui apenas para mostrar em detalhes as idéias por trás da utilização de malhas intercaladas através do trabalho original que deu origem aos trabalhos de Virieux (VIRIEUX, 1984, 1986) aplicados ao problema de propagação de ondas sísmicas.

As equações que regem o problema eletromagnético, cuja formulação de Yee busca resolver, são as equações de Maxwell. No problema abordado, as componentes cartesianas dos campos elétrico e magnético obedecem ao seguinte sistema de

equações diferenciais de primeira ordem

$$-\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (3.8)$$

$$-\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - J_x \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial D_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - J_y \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - J_z, \quad (3.13)$$

acrescidas das relações constitutivas, válidas para meios lineares,

$$B = \mu H \quad (3.14)$$

$$D = \epsilon E, \quad (3.15)$$

onde μ e ϵ são escalares que caracterizam as propriedades eletromagnéticas do meio (conhecidas como susceptibilidade magnética μ e permissividade elétrica ϵ), considerado isotrópico. Tais relações ligam valores dos campos magnético \vec{H} e elétrico \vec{E} aos campos de indução magnética \vec{B} e de deslocamento elétrico \vec{D} . Logicamente, no caso de materiais anisotrópicos, as relações constitutivas tornam-se relações tensoriais.

Considere a Fig. 3.3, onde é mostrada a malha intercalada de diferenças finitas definida por Yee para a solução do sistema de equações dado acima. A idéia funda-

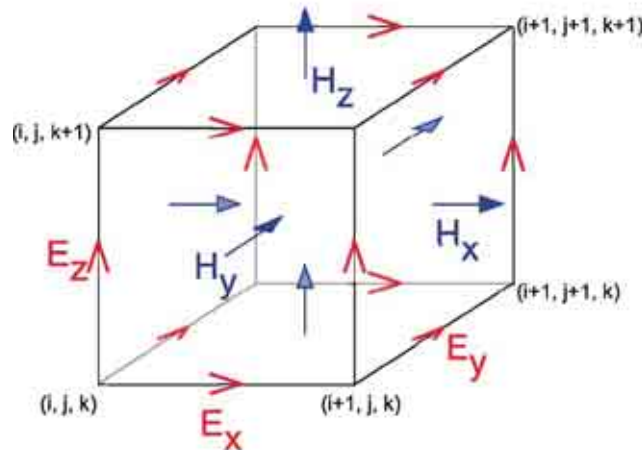


Figura 3.3: Malha intercalada proposta por Yee.

mental na formulação numérica utilizada pelo autor é definir a malha intercalada de forma adequada para a utilização de aproximações de diferenças finitas centradas.

Neste sentido, considere a primeira equação, que relaciona \dot{B}_x com as derivadas espaciais $\partial_y E_z$ e $\partial_z E_y$. Para discretizar a parte espacial, a equação é considerada no ponto $i + 1, j + 1/2, k + 1/2$ onde se define H_x (e também B_x), ou seja, considere a face direita do cubo da Fig. 3.3, mostrada na Fig. 3.4. Repare por exemplo que a

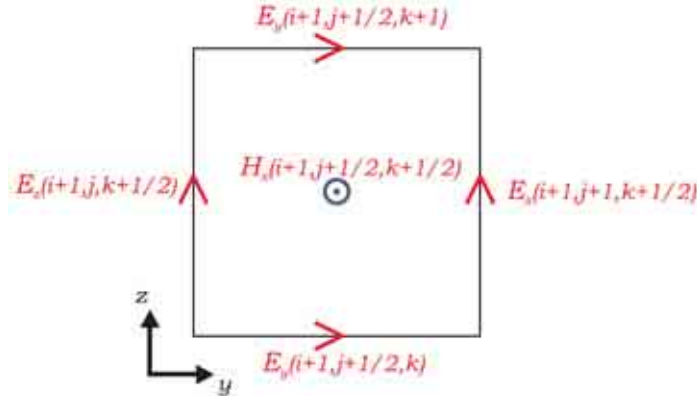


Figura 3.4: Face do cubo de Yee.

derivada $\partial_y E_z$ pode ser aproximada por diferenças centrais utilizando-se os pontos a direita e a esquerda de H_x , através das aproximações de segunda ordem para as derivadas primeiras deduzida na seção 3.1. A outra derivada da primeira equação — ou seja, $\partial_z E_y$ — é calculada utilizando-se pontos acima e abaixo de H_x , centrado neste ponto, através da mesma aproximação de diferenças finitas. Pode-se verificar, utilizando-se as demais faces do cubo de Yee, que o posicionamento dos campos na malha é adequado não somente para a discretização da primeira equação como também para as demais equações.

Em relação à discretização temporal, um fato importante é que a malha é intercalada também no tempo, sendo as derivadas temporais aproximadas por diferenças centrais. As três primeiras equações são consideradas no tempo $n\Delta t$ e as três últimas, nos tempos $n\Delta t/2$ da malha intercalada. Com isto, obtém-se um esquema explícito onde os campos são calculados de forma intercalada no tempo, sendo obtidos o campo magnético no tempo posterior $t = (n + 1/2)\Delta t$ por meio do campo elétrico no tempo intercalado anterior $t = n\Delta t$, bem como do próprio campo magnético no tempo anterior $t = (n - 1/2)\Delta t$. Por sua vez, o campo elétrico no tempo $t = n\Delta t$ é obtido através do campo magnético no tempo $t = (n - 1/2)\Delta t$ e também do campo elétrico no tempo $t = (n - 1)\Delta t$. Em virtude deste salto no tempo, onde os campos são calculados um a partir do outro em tempos intercalados, é comum referenciar este tipo de método de avanço no tempo como *leap-frog*.

Para exemplificar a discretização acima descrita, considere o equilíbrio da primeira equação no ponto da malha com coordenadas cartesianas $(x, y, z) = (i\Delta x, [j + 1/2]\Delta y, [k + 1/2]\Delta z)$ e no tempo $t = n\Delta t$. Escrevendo as derivadas desta equação

utilizando expressões de diferenças finitas centrais de segunda ordem, obtém-se

$$-\frac{B_{(x)i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - B_{(x)i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{E_{(z)i,j+1,k+1/2}^n - E_{(z)i,j,k+1/2}^n}{\Delta y} - \frac{E_{(y)i,j+1/2,k+1}^n - E_{(y)i,j+1/2,k}^n}{\Delta z}. \quad (3.16)$$

De maneira análoga para a quarta equação, a expressão discreta é obtida considerando-se a mesma no ponto da malha com coordenadas cartesianas $(x,y,z) = ([i + 1/2]\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$ e no tempo $t = (n - 1/2)\Delta t$, o que resulta em

$$\frac{D_{(x)i+1/2,j,k}^n - B_{(x)i+1/2,j,k}^{n-1}}{\Delta t} = \frac{H_{(z)i+1/2,j+1/2,k}^{n-1/2} - H_{(z)i+1/2,j-1/2,k}^{n-1/2}}{\Delta y} - \frac{H_{(y)i+1/2,j,k+1/2}^{n-1/2} - H_{(y)i+1/2,j,k-1/2}^{n-1/2}}{\Delta z} \quad (3.17)$$

Tais expressões discretas mostram, conforme foi discutido acima, que os campos são calculados de forma intercalada um a partir do outro.

3.2.2 Malha intercalada padrão

Como mencionado anteriormente, o método proposto por Yee foi aplicado originalmente por Virieux (VIRIEUX, 1984, 1986) para a resolução das equações da propagação de ondas elásticas em meios isotrópicos. A idéia é basicamente a mesma, ou seja, intercalar as componentes do campo de velocidade e de tensão para permitir discretizar as Eq. (2.107)-(2.111) através de operadores de diferenças centrais. Para tal, é definida a malha mostrada na Fig. 3.5 para um meio bidimensional. A apre-

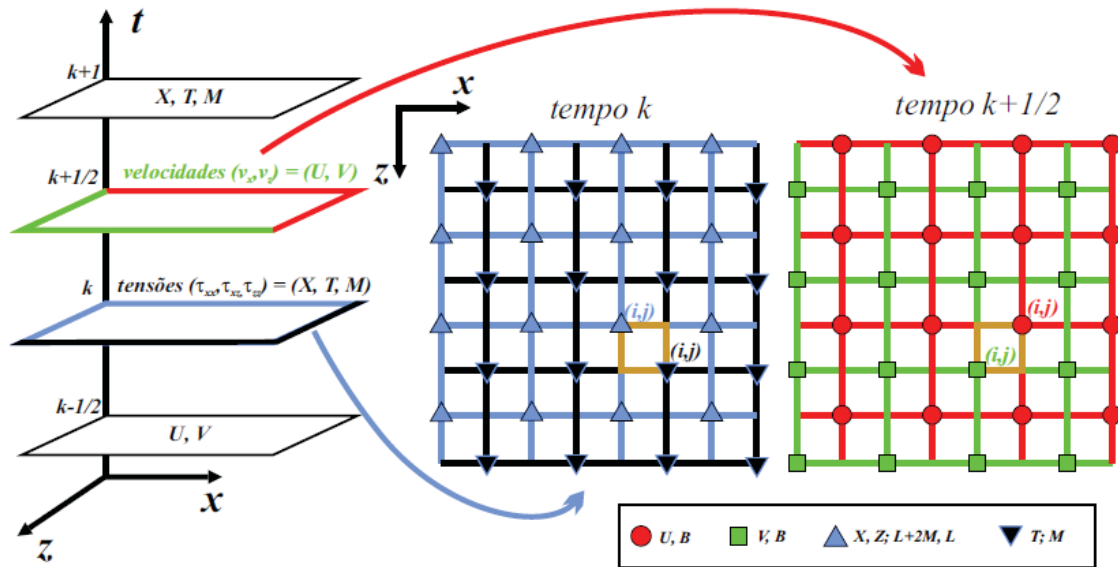


Figura 3.5: Malha intercalada de Virieux.

sentação da malha em duas dimensões é adequada a uma melhor visualização do intercalamento da mesma também em relação ao tempo. Além disso, as modelagens feitas no presente trabalho foram todas em duas dimensões, embora a extensão da malha para três dimensões não apresente maiores dificuldades. Existem inclusive diversos trabalhos que realizam modelagens utilizando-se a malha de Virieux para meios tridimensionais, como por exemplo GRAVES (1996).

Como pode ser visto na Fig. 3.5, os campos de velocidade e tensão são calculados intercaladamente em intervalos de $\Delta t/2$. Desta forma, o esquema de segunda ordem no espaço e no tempo é obtido utilizando-se as aproximações de segunda ordem para as derivadas primeiras deduzida na seção 3.1, conforme apresentado no artigo de VIRIEUX (1986). Destaca-se que os esquemas mais utilizados atualmente neste contexto de malhas intercaladas para modelagem geofísica utilizam aproximações de quarta ordem no espaço (LEVANDER, 1988) e que ordens ainda mais elevadas podem ser utilizadas sem problemas. As expressões discretas destes esquemas, tanto em segunda ordem como em quarta ordem, podem ser encontradas no apêndice D. Na seção 3.3.1, é apresentada a extensão do esquema de Virieux para o caso de anisotropia ortotrópica, onde é empregada a mesma malha definida originalmente por Virieux para problemas em meios isotrópicos (FARIA e STOFFA, 1994).

3.2.3 Malha intercalada rotacionada

Como foi dito acima, a malha de Virieux foi utilizada originalmente para discretizar as equações da elastodinâmica em meios isotrópicos. Na verdade, a malha é igualmente adequada para casos com anisotropia ortotrópica ou inferior. Por exemplo, no trabalho de FARIA e STOFFA (1994) é aplicada a malha de Virieux para anisotropia do tipo VTI (isotropia vertical transversa) em duas dimensões. Para graus de anisotropia mais elevados, esta malha não é adequada, devido à existência de termos adicionais nas equações gerais em duas dimensões (ver seção 2.3.2), para os quais não é possível escrever aproximações de derivadas centrais, havendo a necessidade de interpolação dos campos para tal. Para tais casos, SAENGER *et al.* (2000) propuseram uma nova configuração de malha intercalada, adequada a qualquer grau de anisotropia, denominada pelos autores como malha intercalada rotacionada (*rotated staggered grid*), com uma configuração tal qual ilustrada na Fig. 3.6.

Nesta nova malha intercalada proposta, todas as componentes de tensão, bem como as propriedades elásticas, são calculadas nos mesmos pontos da malha original (no tempo $k\Delta t$) enquanto todas as componentes da velocidade são calculadas em pontos da malha intermediária (no tempo $(k + 1/2)\Delta t$), como mostra a Fig. 3.6. Utilizando esta nova malha intercalada, as derivadas são consideradas, então, na direção diagonal da malha (indicadas por \tilde{x} e \tilde{z} na Fig. 3.6), sendo as derivadas

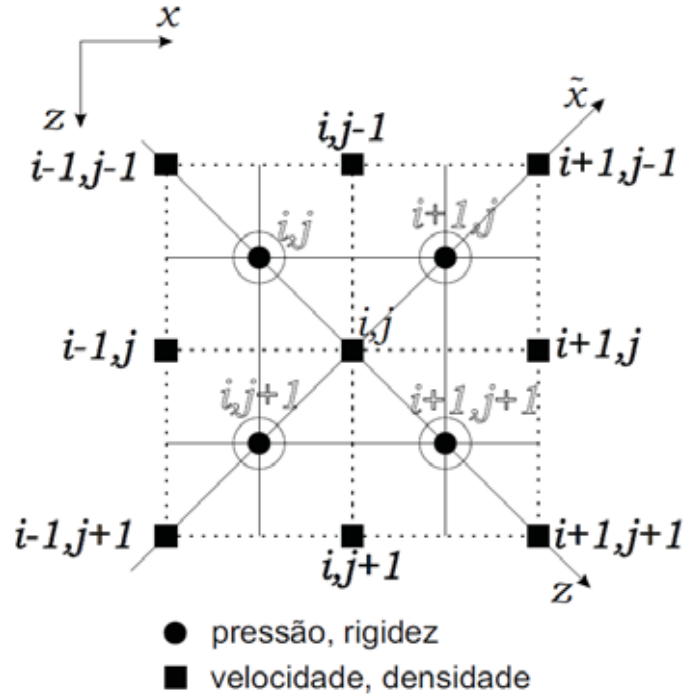


Figura 3.6: Malha intercalada rotacionada.

em relação a x e a z reescritas como combinações de tais derivadas. Para isto, basta considerar a transformação entre os sistemas rotacionado (não ortogonal) e o não rotacionado, conforme a Fig. 3.7. As transformações² entre os sistemas de

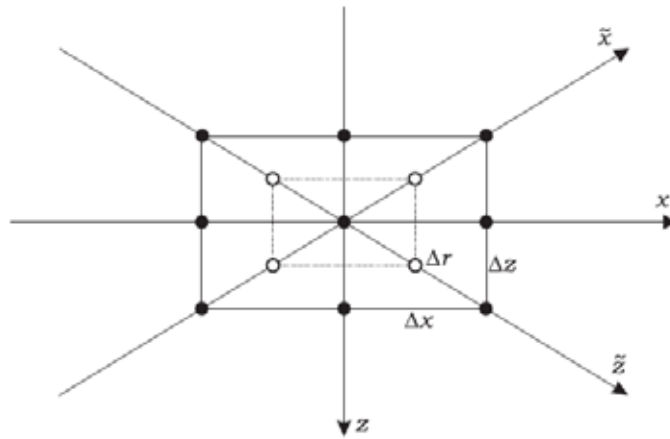


Figura 3.7: Transformação de coordenadas na malha rotacionada

coordenadas mostrados na referida figura são dadas por

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \frac{\Delta r}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta x} & -\frac{1}{\Delta z} \\ \frac{1}{\Delta x} & \frac{1}{\Delta z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

²As transformações que constam no artigo original de SAENGER *et al.* (2000) são válidas apenas para o caso de uma malha quadrada ($\Delta x = \Delta z$).

onde $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta z^2$.

Conseqüentemente, a transformação inversa é dada por³

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta r} \begin{pmatrix} \Delta x & \Delta x \\ -\Delta z & \Delta z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

de forma que as derivadas nas coordenadas x e z passam a ser escritas por meio das seguintes expressões em função das derivadas nas direções rotacionadas

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta r} \begin{pmatrix} \Delta x & \Delta x \\ -\Delta z & \Delta z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{\tilde{x}} \\ D_{\tilde{z}} \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

No esquema com malha rotacionada, são utilizadas as expressões aproximadas básicas vistas na seção 3.1 para as coordenadas rotacionadas e, então, as aproximações nas direções x e z originais são obtidas por meio da Eq. (3.20). Para compreender melhor esta idéia, imagine, por exemplo, que se queira aproximar as derivadas do ponto $(i + 1/2, j + 1/2)$ na Fig. 3.7 utilizando o operador de segunda ordem dado pela Eq. (3.4). Desta forma, basta substituir o referido operador na Eq. (3.20), o que resulta em

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_z \end{pmatrix} f_{i+1/2, j+1/2} = \frac{1}{\Delta r^2} \begin{pmatrix} \Delta x & \Delta x \\ -\Delta z & \Delta z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{i+1, j} - f_{i, j+1} \\ f_{i+1, j+1} - f_{i, j} \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

De forma semelhante para as aproximações em quarta ordem, basta utilizar as seguintes expressões para as derivadas nas direções rotacionadas

$$\begin{pmatrix} D_{\tilde{x}} \\ D_{\tilde{z}} \end{pmatrix} f_{i+1/2, j+1/2} = \frac{1}{\Delta r} \begin{pmatrix} \frac{9}{8}(f_{i+1, j} - f_{i, j+1}) - \frac{1}{24}(f_{i+2, j-1} - f_{i-1, j+2}) \\ \frac{9}{8}(f_{i+1, j+1} - f_{i, j}) - \frac{1}{24}(f_{i+2, j+2} - f_{i-1, j-1}) \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

A vantagem desta nova configuração de malha é a eliminação da necessidade de interpolação tanto dos campos de tensão e velocidade como das propriedades elásticas, o que seria necessário aplicando a malha de Virieux no caso de anisotropia mais geral que ortotrópica. Exemplos da utilização desta malha podem ser encontrados em BANSAL e SEN (2008), que aplicam a mesma para a resolução de problemas com anisotropia geral em 3 dimensões.

³Repare que a transformação de coordenadas não é ortogonal (a inversa não é a transposta), pois o sistema ortonormal é transformado em um sistema não ortogonal.

3.3 Formulações clássicas para equações de campo duplo

Nesta seção, serão revistas as expressões discretas para formulações clássicas de campo duplo (SAENGER *et al.*, 2000; VIRIEUX, 1986), referentes à discretização do sistema de equações de primeira ordem para as componentes do campo de tensão e de velocidade utilizando a malha intercalada tradicional (SSG, do inglês *Standard Staggered Grid*) e a rotacionada (RSG, do inglês *Rotated Staggered Grid*), apresentadas na seção 3.2. Tais formulações correspondem, respectivamente, aos casos de anisotropia ortotrópica e geral.

Uma revisão sobre os principais esquemas numéricos clássicos de diferenças finitas é dado no apêndice D, esquemas estes que serão utilizados como meio de comparação com os esquemas de campo único propostos no próximo capítulo, comparação esta realizada no capítulo de exemplos (capítulo 5).

3.3.1 Caso ortotrópico (ortorrômbo)

A extensão do esquema clássico de VIRIEUX (1986) e LEVANDER (1988) para o caso com isotropia transversa vertical (VTI), também denominada de simetria hexagonal, é imediata, tendo sido apresentada no trabalho de FARIA e STOFFA (1994) para o caso bidimensional. Em tal trabalho, as seguintes equações de campo duplo, válidas para meios VTI são discretizadas:

$$\rho\partial_t U = \partial_x X + \partial_z T \quad (3.23)$$

$$\rho\partial_t V = \partial_x T + \partial_z Z \quad (3.24)$$

$$\partial_t X = A\partial_x U + B\partial_z V \quad (3.25)$$

$$\partial_t Z = B\partial_x U + D\partial_z V \quad (3.26)$$

$$\partial_t T = F(\partial_z U + \partial_x V), \quad (3.27)$$

onde as velocidades são dadas por $(v_x, v_z) = (U, V)$, as tensões, por $(\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz}) = (X, Z, T)$ e os parâmetros do tensor de elasticidade, por $c_{11} = A$, $c_{13} = B$, $c_{33} = D$, $c_{55} = F$. São utilizadas, então, as aproximações clássicas de diferenças finitas, vistas na seção 3.1, para aproximar as derivadas. O resultado, como apresentado

em FARIA e STOFFA (1994) é

$$\begin{aligned}
U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} &= U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} + b_{i,j} \frac{\Delta t}{h} \left(X_{i+\frac{1}{2},j}^k - X_{i-\frac{1}{2},j}^k + T_{i,j+\frac{1}{2}}^k - T_{i,j-\frac{1}{2}}^k \right) \\
V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} &= V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} + b_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{h} \left(T_{i+1,j+\frac{1}{2}}^k - T_{i,j+\frac{1}{2}}^k + Z_{i+\frac{1}{2},j+1}^k - Z_{i+\frac{1}{2},j}^k \right) \\
X_{i+\frac{1}{2},j}^{k+1} &= X_{i+\frac{1}{2},j}^k + A_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{h} \left(U_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + B_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{h} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\
Z_{i+\frac{1}{2},j}^{k+1} &= Z_{i+\frac{1}{2},j}^k + D_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{h} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + B_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{h} \left(U_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\
T_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} &= T_{i,j+\frac{1}{2}}^k + F_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{h} \left(U_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + F_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{h} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Para obter as expressões em quarta ordem no espaço, como feito originalmente no trabalho de LEVANDER (1988) para meios isotrópicos, se utiliza o operador de diferenças centrais na malha intercalada em quarta ordem dado por

$$\begin{aligned}
\frac{df_i}{dx} &= \frac{9}{8} \left(\frac{f_{i+1/2} - f_{i-1/2}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{f_{i+3/2} - f_{i-3/2}}{3\Delta x} \right) \\
&= \frac{-f_{i+3/2} + 27f_{i+1/2} - 27f_{i-1/2} + f_{i-3/2}}{24h}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Um fato importante é que a matriz de elasticidade para os casos isotrópico, VTI e ortotrópico apresenta elementos não nulos nas mesmas posições, de forma que as equações possuem a mesma forma. Com isto, a SSG (Virieux) pode ser aplicada de forma direta para estes casos, bem como para os subcasos (ver apêndice B), onde se inclui o caso acústico. Para todos estes casos, a malha intercalada de Virieux é adequada, ou seja, para anisotropia até ortotrópica. Por exemplo, o esquema para meios isotrópico podem ser visto como um sub-caso do esquema apresentado, bastando fazer-se

$$A, D \rightarrow \lambda + 2\mu \tag{3.30}$$

$$B \rightarrow \lambda \tag{3.31}$$

$$F \rightarrow \mu. \tag{3.32}$$

Para os demais subcasos, ver apêndice B. Para todos estes casos, são utilizados os mesmos operadores de diferenças finitas para o caso VTI, bem como a mesma malha intercalada (vista anteriormente na Fig. 3.5). Enfatiza-se ainda que, em duas

dimensões, o caso ortotrópico e o caso VTI coincidem. Para implementações em três dimensões, logicamente o caso ortotrópico é mais geral que o VTI. Entretanto, a mesma malha e os mesmos operadores podem ser utilizados, sem muita dificuldade, para implementação do caso ortotrópico tridimensional.

3.3.2 Caso geral (anisotropia qualquer)

Para casos mais gerais que o ortotrópico, é necessário utilizar uma nova malha intercalada, originalmente proposta por SAENGER *et al.* (2000), conforme apresentado na seção 3.2.3. Assim, as equações em tensões e velocidades para o caso geral que deseja-se discretizar são dadas por

$$\rho \partial_t U = \partial_x X + \partial_z T \quad (3.33)$$

$$\rho \partial_t V = \partial_x T + \partial_z Z \quad (3.34)$$

$$\partial_t X = A \partial_x U + B \partial_z V + C(\partial_x V + \partial_z U) \quad (3.35)$$

$$\partial_t Z = B \partial_x U + D \partial_z V + E(\partial_x V + \partial_z U) \quad (3.36)$$

$$\partial_t T = C \partial_x U + E \partial_z V + F(\partial_x V + \partial_z U), \quad (3.37)$$

tendo sido utilizada a mesma notação que a para o caso ortotrópico, sendo C e E os termos adicionais do tensor de elasticidade referentes, respectivamente, a c_{15} e c_{35} . As equações discretizadas, aplicando os operadores rotacionados como visto na seção 3.2.3, são dadas por

$$\begin{aligned} U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} &= U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} + b_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{h} \left(D_x X_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^k + D_z T_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^k \right) \\ V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} &= V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} + b_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{h} \left(D_x T_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^k + D_z Z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^k \right) \\ X_{i,j}^{k+1} &= X_{i,j}^k + \frac{\Delta t}{h} \left[A_{i,j} D_x U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + B_{i,j} D_z V_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + C_{i,j} \left(D_x V_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + D_z U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \right] \\ Z_{i,j}^{k+1} &= Z_{i,j}^k + \frac{\Delta t}{h} \left[B_{i,j} D_x U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + D_{i,j} D_z V_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + E_{i,j} \left(D_x V_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + D_z U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \right] \\ T_{i,j}^{k+1} &= T_{i,j}^k + \frac{\Delta t}{h} \left[C_{i,j} D_x U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + E_{i,j} D_z V_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + F_{i,j} \left(D_x V_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + D_z U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde os operadores D_x e D_z são dados (ver seção 3.2.3) pela combinação linear dos operadores de derivada na malha rotacionada, em segunda ou em quarta ordem,

dada matricialmente por

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta r} \begin{pmatrix} \Delta x & \Delta x \\ -\Delta z & \Delta z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{\tilde{x}} \\ D_{\tilde{z}} \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

como os operadores rotacionados dados, em segunda ordem, por

$$\begin{pmatrix} D_{\tilde{x}} \\ D_{\tilde{z}} \end{pmatrix} f_{i+1/2, j+1/2} = \frac{1}{\Delta r} \begin{pmatrix} f_{i+1, j} - f_{i, j+1} \\ f_{i+1, j+1} - f_{i, j} \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

ou, em quarta ordem, por

$$\begin{pmatrix} D_{\tilde{x}} \\ D_{\tilde{z}} \end{pmatrix} f_{i+1/2, j+1/2} = \frac{1}{\Delta r} \begin{pmatrix} \frac{9}{8}(f_{i+1, j} - f_{i, j+1}) - \frac{1}{24}(f_{i+2, j-1} - f_{i-1, j+2}) \\ \frac{9}{8}(f_{i+1, j+1} - f_{i, j}) - \frac{1}{24}(f_{i+2, j+2} - f_{i-1, j-1}) \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

3.4 Relação generalizada para obtenção dos operadores de derivada segunda

Nesta seção, será apresentada uma importante relação generalizada para obtenção dos operadores que servirão de base para os esquemas de diferenças finitas de campo único propostos neste trabalho. Todos os operadores utilizados nos esquemas de diferenças finitas com malhas intercaladas que se tem notícia, em especial nos esquemas propostos por VIRIEUX (1986) e SAENGER *et al.* (2000) — denominados neste trabalho de operadores clássicos —, são para aproximar derivadas de primeira ordem (seção 3.1). Tais operadores são aplicados a equações de campo duplo, ou seja, sistemas de equações diferenciais de primeira ordem.

Neste sentido, para discretizar as equações de campo único, deve-se pensar em operadores mais gerais que os clássicos, uma vez que as equações de campo duplo são de segunda ordem. Será mostrado, então, como obter tais operadores, de forma que os esquemas numéricos de campo único resultantes na malha intercalada sejam equivalentes aos esquemas clássicos correspondentes, para cada família de operadores desenvolvida na seção 3.5. Como será visto, para isto, deve-se aplicar duas vezes sucessivamente os operadores clássicos na malha intercalada correspondente.

Considere, então, um sistema de equações hiperbólico de primeira ordem (equações de campo duplo) que rege um problema de propagação de ondas. Considere também uma malha intercalada utilizada para sua resolução, como por exemplo a malha intercalada padrão ou a malha rotacionada. Sejam, $\tilde{G}_i^{(n)}$ operadores clássicos de derivada primeira de diferenças centrais com ordem n de aproximação, na direção x_i , utilizados para discretizar as equações citadas na malha considerada. Por fim, considere uma equação de campo único (escrita para um campo de propagação

qualquer) que descreva o mesmo fenômeno ondulatório (como visto na seção 2.2). Postula-se, então, que é possível obter esquemas baseados na equação de campo único considerada, cuja solução numérica seja a mesma solução encontrada pelo esquema de campo duplo considerado. Para isto, os operadores generalizados de derivadas de segunda ordem, necessários para discretizar a referida equação de campo único, devem ser obtidos utilizando-se a relação generalizada dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \left(h \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \tilde{G}_i^{(n)} (h \tilde{G}_j^{(n)} f). \quad (3.42)$$

Ou seja, para obter operadores de derivada segunda que tenham o mesmo efeito dos operadores clássicos na malha intercalada considerada, mas que podem ser aplicados a equações de campo único, deve-se aplicar o operador considerado duas vezes sucessivamente. Esquemáticamente, pode-se escrever

$$h \frac{\partial f}{\partial x_j} = h \tilde{G}_j^{(n)} f \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(h \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \tilde{G}_i^{(n)} (h \tilde{G}_j^{(n)} f). \quad (3.43)$$

3.5 Obtenção dos operadores de derivada segunda generalizados nas malhas intercaladas

Nesta seção, são obtidos explicitamente os operadores de diferenças finitas generalizados que serão utilizados nas formulações deste trabalho (apresentadas no capítulo 4), baseadas em equações de campo único discretizadas em malhas intercaladas. Basicamente, são obtidos operadores generalizados, envolvendo derivadas segundas temporais e espaciais, para discretizar cada termo das equações de campo único, por exemplo, as equações em velocidades para anisotropia ototrópica:

$$\rho \partial_t^2 v_x = \partial_x (c_{11} \partial_x v_x) + \partial_x (c_{13} \partial_z v_z) + \partial_z (c_{55} \partial_z v_x) + \partial_z (c_{55} \partial_x v_z) \quad (3.44)$$

$$\rho \partial_t^2 v_z = \partial_x (c_{55} \partial_z v_x) + \partial_x (c_{55} \partial_x v_z) + \partial_z (c_{13} \partial_x v_x) + \partial_z (c_{33} \partial_z v_z). \quad (3.45)$$

Como pode ser visto nas equações acima, as derivadas temporais são as mais simples, uma vez que se apresentam como derivadas de segunda ordem simples. Já as derivadas espaciais apresentam a propriedade (elástica) entre cada uma das derivadas. Para obtenção destes operadores, lança-se mão da idéia que foi discutida na seção 3.4. Os operadores generalizados são obtidos por meio da aplicação sucessiva dos operadores clássicos que aproximam derivadas primeiras, ou seja, aplica-se a relação generalizada dada pela Eq. (3.42). Na seqüência, são obtidos os operadores generalizados nas malhas intercaladas padrão da geofísica (VIRIEUX, 1986) e rotacionada (SAENGER *et al.*, 2000), iniciando-se pelo operador temporal que é o

mesmo nos dois casos, uma vez que se utiliza o mesmo operador temporal clássico nos dois casos.

3.5.1 Operador temporal

Como dito anteriormente, a derivada temporal é o caso mais simples de todos, uma vez que os termos temporais que aparecem nas equações de campo único são derivadas segundas simples. O operador temporal utilizado, tanto no caso da malha intercalada tradicional ou rotacionada, é dado em segunda ordem de aproximação por

$$\tilde{D}_t f_{i,j}^k = \frac{f_{i,j}^{k+1/2} - f_{i,j}^{k-1/2}}{\Delta t}, \quad (3.46)$$

que é utilizado para discretizar as derivadas simples que aparecem nas equações de campo duplo, do tipo $\partial f / \partial t$.

Para obter o operador temporal generalizado, utilizado nas equações de campo único, aplica-se este operador duas vezes sucessivamente, utilizando-se a relação dada pela Eq. (3.42), obtendo-se

$$\tilde{D}_t g_{i,j}^k = \frac{g_{i,j}^{k+1/2} - g_{i,j}^{k-1/2}}{\Delta t}. \quad (3.47)$$

onde

$$g_{i,j}^k = \tilde{D}_t f_{i,j}^k = \frac{f_{i,j}^{k+1/2} - f_{i,j}^{k-1/2}}{\Delta t}. \quad (3.48)$$

Logo

$$\tilde{D}_t (\tilde{D}_t f_{i,j}^k) = \frac{\left(\frac{f_{i,j}^{k+1} - f_{i,j}^k}{\Delta t} \right) - \left(\frac{f_{i,j}^k - f_{i,j}^{k-1}}{\Delta t} \right)}{\Delta t}. \quad (3.49)$$

Repare que este operador é igual ao operador de diferenças finitas de derivada de segunda ordem para malha simple, ou seja, o tempo é desintercalado nos esquemas de campo único com malha intercalada.

No caso de quarta ordem, o operador clássico é dado por

$$\tilde{D}_t f_{i,j}^k = \frac{9}{8} \frac{f_{i,j}^{k+1/2} - f_{i,j}^{k-1/2}}{\Delta t} - \frac{1}{8} \frac{f_{i,j}^{k+3/2} - f_{i,j}^{k-3/2}}{3\Delta t}, \quad (3.50)$$

sendo o operador generalizado, da mesma forma, obtido por aplicação sucessiva dele. Entretanto, assim como no caso dos esquemas clássicos de campo duplo, tais operadores lavam a esquemas incondicionalmente instáveis.

3.5.2 Operadores espaciais na malha intercalada padrão

Os operadores generalizados na malha intercalada de Virieux são obtidos a partir da aplicação sucessiva do operador de derivada primeira, dado pela Eq. (3.4), para segunda ordem, ou pela Eq. (3.6), para quarta ordem de aproximação. Assim, de acordo com o caso em questão, aplica-se os operadores de derivada primeira D_x ou D_z da forma adequada, como mostrado na seqüência.

Derivadas cruzadas

Primeiro, será considerada a derivada cruzada simples da seguinte forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (3.51)$$

Para obter a aproximação de diferenças finitas em segunda ordem no ponto i, j , referente à coordenada espacial $(x, z) = (i\Delta x, j\Delta z)$, aplica-se duas vezes os operadores de segunda ordem na malha intercalada, dados pela Eq. (3.4), correspondentes a cada uma das derivadas, ou seja,

$$\frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x \partial z} \approx D_x(D_z f_{i,j}) = D_x g_{i,j} = \frac{g_{i+1/2,j} - g_{i-1/2,j}}{\Delta x}$$

sendo

$$g_{i,j} = D_z f_{i,j} = \frac{f_{i,j+1/2} - f_{i,j-1/2}}{\Delta z}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x \partial z} &\approx \frac{\frac{f_{i+1/2,j+1/2} - f_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta z} - \frac{f_{i-1/2,j+1/2} - f_{i-1/2,j-1/2}}{\Delta z}}{\Delta x} \\ &\approx \frac{1}{\Delta x \Delta z} (f_{i+1/2,j+1/2} - f_{i+1/2,j-1/2} - f_{i-1/2,j+1/2} + f_{i-1/2,j-1/2}). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Para obter a aproximação de quarta ordem, procede-se da mesma forma, utilizando-se agora os operadores dados pela Eq. (3.6), ou seja,

$$\frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x \partial z} \approx D_x(D_z f_{i,j}) = D_x g_{i,j} = \frac{9}{8} \left(\frac{g_{i+1/2,j} - g_{i-1/2,j}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{g_{i+3/2,j} - g_{i-3/2,j}}{3\Delta x} \right).$$

sendo

$$g_{i,j} = D_z f_{i,j} = \frac{9}{8} \left(\frac{f_{i,j+1/2} - f_{i,j-1/2}}{\Delta z} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{f_{i,j+3/2} - f_{i,j-3/2}}{3\Delta z} \right)$$

O que resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x \partial z} \approx & \frac{1}{\Delta x \Delta z} \left\{ \frac{9}{8} \left[\frac{9}{8} \left(f_{i+1/2,j+1/2} - f_{i+1/2,j-1/2} \right) - \frac{1}{24} \left(f_{i+1/2,j+3/2} - f_{i+1/2,j-3/2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{9}{8} \left(f_{i-1/2,j+1/2} - f_{i-1/2,j-1/2} \right) + \frac{1}{24} \left(f_{i-1/2,j+3/2} - f_{i-1/2,j-3/2} \right) \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{24} \left[\frac{9}{8} \left(f_{i+3/2,j+1/2} - f_{i+3/2,j-1/2} \right) - \frac{1}{24} \left(f_{i+3/2,j+3/2} - f_{i+3/2,j-3/2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{9}{8} \left(f_{i-3/2,j+1/2} - f_{i-3/2,j-1/2} \right) + \frac{1}{24} \left(f_{i-3/2,j+3/2} - f_{i-3/2,j-3/2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Observa-se que tal expressão aproxima a derivada cruzada por 16 pontos em torno de i,j na malha intercalada. Mais adiante, serão mostradas figuras ilustrativas.

Derivadas contendo propriedades

Outro tipo de derivada que será necessário aproximar são as derivadas que envolvem propriedades do meio, descrita pela função $h(x,z)$. Novamente, será obtido o operador através da aplicação sucessiva de operadores de derivada primeira na malha intercalada. Como antes, faz-se

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} \approx D_x(h_{i,j} D_x f_{i,j}) = D_x g_{i,j} = \frac{g_{i+1/2,j} - g_{i-1/2,j}}{\Delta x}, \quad (3.54)$$

onde

$$g_{i,j} \approx h_{i,j} D_x f_{i,j} = h_{i,j} \frac{f_{i+1/2,j} - f_{i-1/2,j}}{\Delta x}, \quad (3.55)$$

Portanto, obtém-se a seguinte aproximação de segunda ordem

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} \approx \frac{h_{i+1/2,j}(f_{i+1,j} - f_{i,j}) - h_{i-1/2,j}(f_{i,j} - f_{i-1,j})}{\Delta x^2}. \quad (3.56)$$

Repare que a aproximação acima depende de valores da função h calculada em pontos da malha intercalada, enquanto que a função f somente é considerada em pontos da malha simples original. Portanto, a aplicação sucessiva dos operadores na malha intercalada leva, em geral, a aproximações que dependem de pontos tanto na malha original quanto na malha intercalada. Na verdade, como apenas as propriedades são consideradas na malha intermediária, esta aproximação pode ser considerada uma aproximação na malha normal, sendo que as propriedades precisam ser calculadas por meio de expressões especiais ou simplesmente utilizando-se uma interpolação linear. Na Fig. 3.8 mostra-se esquematicamente os pontos utilizados para este operador (dado pelos pontos brancos).

Similarmente, em quarta ordem obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} \approx D_x g_{i,j} = \frac{9}{8} \left(\frac{g_{i+1/2,j} - g_{i-1/2,j}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{g_{i+3/2,j} - g_{i-3/2,j}}{3\Delta x} \right)$$

onde

$$g_{i,j} = h_{i,j} \frac{\partial f_{i,j}}{\partial x} \approx h_{i,j} D_x f_{i,j} = h_{i,j} \left\{ \frac{9}{8} \left(\frac{f_{i+1/2,j} - f_{i-1/2,j}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{f_{i+3/2,j} - f_{i-3/2,j}}{3\Delta x} \right) \right\}.$$

Ou de forma explicita chega-se à

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} \approx & \frac{9}{8} \left(h_{i+1/2,j} \left[\frac{9}{8} \left(\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x^2} \right) - \frac{1}{24} \left(\frac{f_{i+2,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right) \right] \right. \\ & - h_{i-1/2,j} \left[\frac{9}{8} \left(\frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right) - \frac{1}{24} \left(\frac{f_{i+1,j} - f_{i-2,j}}{\Delta x^2} \right) \right] \Big) \\ & - \frac{1}{24} \left(h_{i+3/2,j} \left[\frac{9}{8} \left(\frac{f_{i+2,j} - f_{i+1,j}}{\Delta x^2} \right) - \frac{1}{24} \left(\frac{f_{i+3,j} - f_{i,j}}{\Delta x^2} \right) \right] \right. \\ & \left. \left. - h_{i-3/2,j} \left[\frac{9}{8} \left(\frac{f_{i-1,j} - f_{i-2,j}}{\Delta x^2} \right) - \frac{1}{24} \left(\frac{f_{i,j} - f_{i-3,j}}{\Delta x^2} \right) \right] \right) \right). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Esta aproximação utiliza 7 pontos na malha (valores do campo f) e mais 4 pontos na malha intercalada (valores da propriedade h), como mostra a Fig. 3.8.

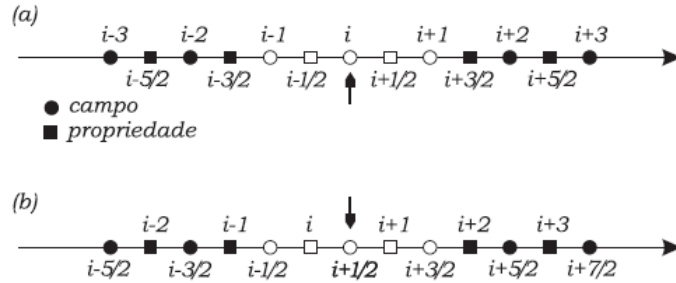


Figura 3.8: *Stencil* do operador geral de derivada segunda contendo propriedade, aplicada no ponto indicado (a) da malha simples original ou (b) da malha intermediária. Os pontos brancos são utilizados na aproximação de segunda ordem, enquanto todos os pontos são utilizados na de quarta ordem.

Derivadas cruzadas com propriedades

O caso mais geral de operador que será utilizado neste trabalho é uma mistura dos dois tipos vistos acima, ou seja, envolve derivadas cruzadas e contém um produto de funções, dado por

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (3.58)$$

Como antes, a aproximação em segunda ordem, obtida aplicando-se duas vezes o operador de derivada primeira de segunda ordem, é dada por

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{i,j} \approx D_x(h_{i,j} D_z f_{i,j}) = D_x g_{i,j} = \frac{g_{i+1/2,j} - g_{i-1/2,j}}{\Delta x}, \quad (3.59)$$

o que conduz à seguinte aproximação

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{i,j} \approx \frac{h_{i+1/2,j}(f_{i+1/2,j+1/2} - f_{i+1/2,j-1/2})}{\Delta x \Delta z} - \frac{h_{i-1/2,j}(f_{i-1/2,j+1/2} - f_{i-1/2,j-1/2})}{\Delta x \Delta z}, \quad (3.60)$$

conforme ilustrado pelos pontos brancos presentes na Fig. 3.9.

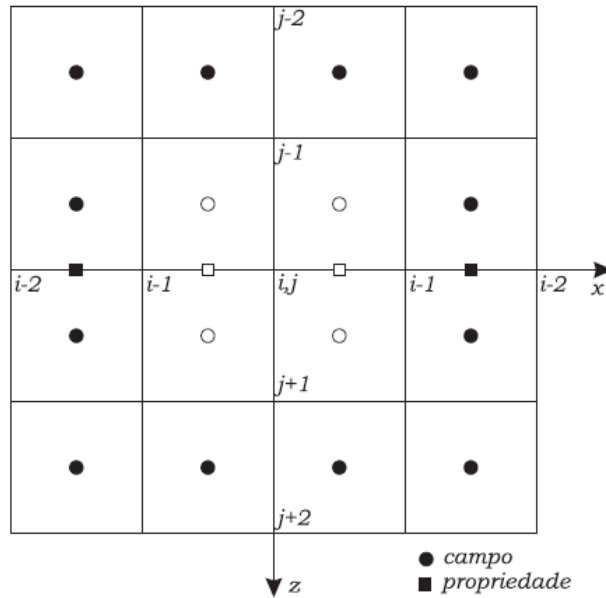


Figura 3.9: Pontos utilizados para aproximação da derivada cruzada contendo propriedade aplicada no ponto indicado i,j da malha: apenas os quadrados e círculos brancos são utilizados em segunda ordem, enquanto todos os pontos são utilizados para aproximar em quarta ordem.

Da mesma forma, em quarta ordem obtém-se a aproximação

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{i,j} &\approx \frac{9}{8} \left(h_{i+1/2,j} \left[\frac{9}{8} \left(\frac{f_{i+1/2,j+1/2} - f_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta x \Delta z} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{24} \left(\frac{f_{i+1/2,j+3/2} - f_{i+1/2,j-3/2}}{\Delta x \Delta z} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - h_{i-1/2,j} \left[\frac{9}{8} \left(\frac{f_{i-1/2,j+1/2} - f_{i-1/2,j-1/2}}{\Delta x \Delta z} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{24} \left(\frac{f_{i-1/2,j+3/2} - f_{i-1/2,j-3/2}}{\Delta x \Delta z} \right) \right] \right) \quad (3.61) \\
&- \frac{1}{24} \left(h_{i+3/2,j} \left[\frac{9}{8} \left(\frac{f_{i+3/2,j+1/2} - f_{i+3/2,j-1/2}}{\Delta x \Delta z} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{24} \left(\frac{f_{i+3/2,j+3/2} - f_{i+3/2,j-3/2}}{\Delta x \Delta z} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - h_{i-3/2,j} \left[\frac{9}{8} \left(\frac{f_{i-3/2,j+1/2} - f_{i-3/2,j-1/2}}{\Delta x \Delta z} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{24} \left(\frac{f_{i-3/2,j+3/2} - f_{i-3/2,j-3/2}}{\Delta x \Delta z} \right) \right] \right) ,
\end{aligned}$$

que utiliza 16 pontos na malha intercalada (valores do campo f) e mais 4 pontos com valores de propriedade como ilustrado na Fig. 3.9.

3.5.3 Operadores espaciais na malha rotacionada

Derivadas cruzadas

Como no caso da malha intercalada de Virieux, primeiro será considerada a derivada cruzada simples, ou seja

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (3.62)$$

Para obter a aproximação de diferenças finitas em segunda ordem na malha rotacionada, aplica-se duas vezes os operadores para derivada primeira de segunda ordem de aproximação para a malha rotacionada, dados pela Eq. (3.21), e correspondentes a cada uma das derivadas, ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{i,j} &\approx D_x(D_z f_{i,j}) = D_x g_{i,j} = \\
&= \frac{\Delta x}{\Delta r^2} \left[(g_{i+1/2,j-1/2} - g_{i-1/2,j+1/2}) + (g_{i+1/2,j+1/2} - g_{i-1/2,j-1/2}) \right] \quad (3.63)
\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
g_{i,j} &= D_z f_{i,j} = \\
&= \frac{\Delta z}{\Delta r^2} \left[- \left(g_{i+1/2,j-1/2} - g_{i-1/2,j+1/2} \right) + \left(g_{i+1/2,j+1/2} - g_{i-1/2,j-1/2} \right) \right]. \quad (3.64)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{i,j} &\approx \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta r^4} \{ [- (f_{i+1,j-1} - f_{i,j}) + (f_{i+1,j} - f_{i,j-1})] \\
&\quad - [- (f_{i,j} - f_{i-1,j+1}) + (f_{i,j+1} - f_{i-1,j})] + \\
&\quad [- (f_{i+1,j} - f_{i,j+1}) + (f_{i+1,j+1} - f_{i,j})] \\
&\quad - [- (f_{i,j-1} - f_{i-1,j}) + (f_{i,j} - f_{i-1,j-1})] \}. \quad (3.65)
\end{aligned}$$

Observa-se que esta aproximação utiliza 9 pontos (*stencil*) na malha.

Para a aproximação de diferenças finitas em quarta ordem na malha rotacionada, aplica-se duas vezes os operadores de derivada primeira de quarta ordem de aproximação correspondentes a cada uma das derivadas, obtendo-se, de forma análoga, a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{i,j} &\approx D_x (D_z f_{i,j}) = D_x g_{i,j} = \\
&= \frac{\Delta x}{\Delta r^2} \left[\frac{9}{8} \left(g_{i+1/2,j-1/2} - g_{i-1/2,j+1/2} \right) - \frac{1}{24} \left(g_{i+3/2,j-3/2} - g_{i-3/2,j+3/2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{9}{8} \left(g_{i+1/2,j+1/2} - g_{i-1/2,j-1/2} \right) - \frac{1}{24} \left(g_{i+3/2,j+3/2} - g_{i-3/2,j-3/2} \right) \right], \quad (3.66)
\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
g_{i,j} &= D_z f_{i,j} = \\
&= \frac{\Delta z}{\Delta r^2} \left[- \frac{9}{8} \left(f_{i+1/2,j-1/2} - f_{i-1/2,j+1/2} \right) + \frac{1}{24} \left(f_{i+3/2,j-3/2} - f_{i-3/2,j+3/2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{9}{8} \left(f_{i+1/2,j+1/2} - f_{i-1/2,j-1/2} \right) - \frac{1}{24} \left(f_{i+3/2,j+3/2} - f_{i-3/2,j-3/2} \right) \right]. \quad (3.67)
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo uma expressão na outra, obtém-se explicitamente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{i,j} &\approx \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta r^4} \left\{ \frac{9}{8} \left[-\frac{9}{8} (f_{i+1,j-1} - f_{i,j}) + \frac{1}{24} (f_{i+2,j-2} - f_{i-1,j+1}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{9}{8} (f_{i+1,j} - f_{i,j-1}) - \frac{1}{24} (f_{i+2,j+1} - f_{i-1,j-2}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{9}{8} (f_{i,j} - f_{i-1,j+1}) - \frac{1}{24} (f_{i+1,j-1} - f_{i-2,j+2}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{9}{8} (f_{i,j+1} - f_{i-1,j}) + \frac{1}{24} (f_{i+1,j+2} - f_{i-2,j-1}) \right] \right. \\
&\quad - \frac{1}{24} \left[-\frac{9}{8} (f_{i+2,j-2} - f_{i+1,j-1}) + \frac{1}{24} (f_{i+3,j-3} - f_{i,j}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{9}{8} (f_{i+2,j-1} - f_{i+1,j-2}) - \frac{1}{24} (f_{i+3,j} - f_{i,j-3}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{9}{8} (f_{i-1,j+1} - f_{i-2,j+2}) - \frac{1}{24} (f_{i,j} - f_{i-3,j+3}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{9}{8} (f_{i-1,j+2} - f_{i-2,j+1}) + \frac{1}{24} (f_{i,j+3} - f_{i-3,j}) \right] \\
&\quad + \frac{9}{8} \left[-\frac{9}{8} (f_{i+1,j} - f_{i,j+1}) + \frac{1}{24} (f_{i+2,j-1} - f_{i-1,j+2}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{9}{8} (f_{i+1,j+1} - f_{i,j}) - \frac{1}{24} (f_{i+2,j+2} - f_{i-1,j-1}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{9}{8} (f_{i,j-1} - f_{i-1,j}) - \frac{1}{24} (f_{i+1,j-2} - f_{i-2,j+1}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{9}{8} (f_{i,j} - f_{i-1,j-1}) + \frac{1}{24} (f_{i+1,j+1} - f_{i-2,j-2}) \right] \\
&\quad - \frac{1}{24} \left[-\frac{9}{8} (f_{i+2,j+1} - f_{i+1,j+2}) + \frac{1}{24} (f_{i+3,j} - f_{i,j+3}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{9}{8} (f_{i+2,j+2} - f_{i+1,j+1}) - \frac{1}{24} (f_{i+3,j+3} - f_{i,j}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{9}{8} (f_{i-1,j-2} - f_{i-2,j-1}) - \frac{1}{24} (f_{i,j-3} - f_{i-3,j}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{9}{8} (f_{i-1,j-1} - f_{i-2,j-2}) + \frac{1}{24} (f_{i,j} - f_{i-3,j-3}) \right] \left. \right\}. \tag{3.68}
\end{aligned}$$

Derivadas contendo propriedades

Será visto agora a aproximação para derivadas na malha rotacionada que envolvem o produto de propriedades do meio com derivadas da função, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} \approx D_x(g_{i,j}), \tag{3.69}$$

onde

$$g_{i,j} = h_{i,j} D_x(f_{i,j}). \tag{3.70}$$

Utilizando-se as aproximações dadas pelas Eq. (3.21), obtém-se, em segunda

ordem, as seguintes expressões

$$D_x(g_{i,j}) = \frac{\Delta x}{\Delta r^2} \left[(g_{i+1/2,j-1/2} - g_{i-1/2,j+1/2}) + (g_{i+1/2,j+1/2} - g_{i-1/2,j-1/2}) \right], \quad (3.71)$$

onde

$$\begin{aligned} g_{i,j} &= h_{i,j} D_x(f_{i,j}) \\ &= h_{i,j} \frac{\Delta x}{\Delta r^2} \left[(f_{i+1/2,j-1/2} - f_{i-1/2,j+1/2}) + (f_{i+1/2,j+1/2} - f_{i-1/2,j-1/2}) \right]. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Obtém-se, por fim, a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} &\approx \frac{\Delta x^2}{\Delta r^4} \left\{ h_{i+1/2,j-1/2} [(f_{i+1,j-1} - f_{i,j}) + (f_{i+1,j} - f_{i,j-1})] \right. \\ &\quad - h_{i-1/2,j+1/2} [(f_{i,j} - f_{i-1,j+1}) + (f_{i,j+1} - f_{i-1,j})] + \\ &\quad h_{i+1/2,j+1/2} [(f_{i+1,j} - f_{i,j+1}) + (f_{i+1,j+1} - f_{i,j})] \\ &\quad \left. - h_{i-1/2,j-1/2} [(f_{i,j-1} - f_{i-1,j}) + (f_{i,j} - f_{i-1,j-1})] \right\}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Esta aproximação utiliza 9 pontos na malha (valores do campo f) e mais 4 pontos na malha intercalada (valores da propriedade h).

Para obter a aproximação de diferenças finitas em quarta ordem na malha rotacionada, aplica-se duas vezes os operadores de quarta ordem correspondentes a cada uma das derivadas, o que resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} &\approx D_x(h D_x f_{i,j}) = D_x g_{i,j} = \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta r^2} \left[\frac{9}{8} (g_{i+1/2,j-1/2} - g_{i-1/2,j+1/2}) - \frac{1}{24} (g_{i+3/2,j-3/2} - g_{i-3/2,j+3/2}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{8} (g_{i+1/2,j+1/2} - g_{i-1/2,j-1/2}) - \frac{1}{24} (g_{i+3/2,j+3/2} - g_{i-3/2,j-3/2}) \right], \end{aligned} \quad (3.74)$$

sendo

$$\begin{aligned} g_{i,j} &= h D_x f_{i,j} = \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta r^2} h_{i,j} \left[\frac{9}{8} (f_{i+1/2,j-1/2} - f_{i-1/2,j+1/2}) - \frac{1}{24} (f_{i+3/2,j-3/2} - f_{i-3/2,j+3/2}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{8} (f_{i+1/2,j+1/2} - f_{i-1/2,j-1/2}) - \frac{1}{24} (f_{i+3/2,j+3/2} - f_{i-3/2,j-3/2}) \right]. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Substituindo a Eq. 3.75 na Eq. 3.74, obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} &\approx \frac{\Delta x^2}{\Delta r^4} \left\{ \frac{9}{8} \left[h_{i+1/2,j-1/2} \left(\frac{9}{8} (f_{i+1,j-1} - f_{i,j}) - \frac{1}{24} (f_{i+2,j-2} - f_{i-1,j+1}) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{9}{8} (f_{i+1,j} - f_{i,j-1}) - \frac{1}{24} (f_{i+2,j+1} - f_{i-1,j-2}) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - h_{i-1/2,j+1/2} \left(\frac{9}{8} (f_{i,j} - f_{i-1,j+1}) - \frac{1}{24} (f_{i+1,j-1} - f_{i-2,j+2}) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{9}{8} (f_{i,j+1} - f_{i-1,j}) - \frac{1}{24} (f_{i+1,j+2} - f_{i-2,j-1}) \right) \right] \right] \\
&- \frac{1}{24} \left[h_{i+3/2,j-3/2} \left(\frac{9}{8} (f_{i+2,j-2} - f_{i+1,j-1}) - \frac{1}{24} (f_{i+3,j-3} - f_{i,j}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{9}{8} (f_{i+2,j-1} - f_{i+1,j-2}) - \frac{1}{24} (f_{i+3,j} - f_{i,j-3}) \right) \right. \\
&\quad \left. - h_{i-1/2,j+1/2} \left(\frac{9}{8} (f_{i-1,j+1} - f_{i-2,j+2}) - \frac{1}{24} (f_{i,j} - f_{i-3,j+3}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{9}{8} (f_{i-1,j+2} - f_{i-2,j+1}) - \frac{1}{24} (f_{i,j+3} - f_{i-3,j}) \right) \right] \right] \tag{3.76} \\
&+ \frac{9}{8} \left[h_{i+1/2,j+1/2} \left(\frac{9}{8} (f_{i+1,j} - f_{i,j+1}) - \frac{1}{24} (f_{i+2,j-1} - f_{i-1,j+2}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{9}{8} (f_{i+1,j+1} - f_{i,j}) - \frac{1}{24} (f_{i+2,j+2} - f_{i-1,j-1}) \right) \right. \\
&\quad \left. - h_{i-1/2,j-1/2} \left(\frac{9}{8} (f_{i,j-1} - f_{i-1,j}) - \frac{1}{24} (f_{i+1,j-2} - f_{i-2,j+1}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{9}{8} (f_{i,j} - f_{i-1,j-1}) - \frac{1}{24} (f_{i+1,j+1} - f_{i-2,j-2}) \right) \right] \\
&- \frac{1}{24} \left[h_{i+3/2,j+3/2} \left(\frac{9}{8} (f_{i+2,j+1} - f_{i+1,j+2}) - \frac{1}{24} (f_{i+3,j} - f_{i,j+3}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{9}{8} (f_{i+2,j+2} - f_{i+1,j+1}) - \frac{1}{24} (f_{i+3,j+3} - f_{i,j}) \right) \right. \\
&\quad \left. - h_{i-3/2,j-3/2} \left(\frac{9}{8} (f_{i-1,j-2} - f_{i-2,j-1}) - \frac{1}{24} (f_{i,j-3} - f_{i-3,j}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{9}{8} (f_{i-1,j-1} - f_{i-2,j-2}) - \frac{1}{24} (f_{i,j} - f_{i-3,j-3}) \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Derivadas cruzadas contendo propriedades

O caso mais geral de operador que será utilizado neste trabalho é aquele que envolve derivadas cruzadas e contém propriedades, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{i,j} \approx D_x(g_{i,j}), \tag{3.77}$$

onde

$$g_{i,j} = h_{i,j} D_z(f_{i,j}). \tag{3.78}$$

A aproximação em segunda ordem é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{i,j} &\approx \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta r^4} \left\{ h_{i+1/2,j-1/2} [-(f_{i+1,j-1} - f_{i,j}) + (f_{i+1,j} - f_{i,j-1})] \right. \\ &\quad - h_{i-1/2,j+1/2} [-(f_{i,j} - f_{i-1,j+1}) + (f_{i,j+1} - f_{i-1,j})] + \\ &\quad h_{i+1/2,j+1/2} [-(f_{i+1,j} - f_{i,j+1}) + (f_{i+1,j+1} - f_{i,j})] \\ &\quad \left. - h_{i-1/2,j-1/2} [-(f_{i,j-1} - f_{i-1,j}) + (f_{i,j} - f_{i-1,j-1})] \right\}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Em quarta ordem, obtém-se a aproximação

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{i,j} &\approx \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta r^4} \left\{ \frac{9}{8} \left[h_{i+1/2,j-1/2} \left(-\frac{9}{8} (f_{i+1,j-1} - f_{i,j}) + \frac{1}{24} (f_{i+2,j-2} - f_{i-1,j+1}) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{9}{8} (f_{i+1,j} - f_{i,j-1}) - \frac{1}{24} (f_{i+2,j+1} - f_{i-1,j-2}) \right) \right. \\ &\quad - h_{i-1/2,j+1/2} \left(-\frac{9}{8} (f_{i,j} - f_{i-1,j+1}) + \frac{1}{24} (f_{i+1,j-1} - f_{i-2,j+2}) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{9}{8} (f_{i,j+1} - f_{i-1,j}) - \frac{1}{24} (f_{i+1,j+2} - f_{i-2,j-1}) \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{24} \left[h_{i+3/2,j-3/2} \left(-\frac{9}{8} (f_{i+2,j-2} - f_{i+1,j-1}) + \frac{1}{24} (f_{i+3,j-3} - f_{i,j}) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{8} (f_{i+2,j-1} - f_{i+1,j-2}) - \frac{1}{24} (f_{i+3,j} - f_{i,j-3}) \right) \\ &\quad - h_{i-1/2,j+1/2} \left(-\frac{9}{8} (f_{i-1,j+1} - f_{i-2,j+2}) + \frac{1}{24} (f_{i,j} - f_{i-3,j+3}) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{9}{8} (f_{i-1,j+2} - f_{i-2,j+1}) - \frac{1}{24} (f_{i,j+3} - f_{i-3,j}) \right) \right] \\ &\quad + \frac{9}{8} \left[h_{i+1/2,j+1/2} \left(-\frac{9}{8} (f_{i+1,j} - f_{i,j+1}) + \frac{1}{24} (f_{i+2,j-1} - f_{i-1,j+2}) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{8} (f_{i+1,j+1} - f_{i,j}) - \frac{1}{24} (f_{i+2,j+2} - f_{i-1,j-1}) \right) \\ &\quad - h_{i-1/2,j-1/2} \left(-\frac{9}{8} (f_{i,j-1} - f_{i-1,j}) + \frac{1}{24} (f_{i+1,j-2} - f_{i-2,j+1}) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{9}{8} (f_{i,j} - f_{i-1,j-1}) - \frac{1}{24} (f_{i+1,j+1} - f_{i-2,j-2}) \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{24} \left[h_{i+3/2,j+3/2} \left(-\frac{9}{8} (f_{i+2,j+1} - f_{i+1,j+2}) + \frac{1}{24} (f_{i+3,j} - f_{i,j+3}) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{8} (f_{i+2,j+2} - f_{i+1,j+1}) - \frac{1}{24} (f_{i+3,j+3} - f_{i,j}) \right) \\ &\quad - h_{i-3/2,j-3/2} \left(-\frac{9}{8} (f_{i-1,j-2} - f_{i-2,j-1}) + \frac{1}{24} (f_{i,j-3} - f_{i-3,j}) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{9}{8} (f_{i-1,j-1} - f_{i-2,j-2}) - \frac{1}{24} (f_{i,j} - f_{i-3,j-3}) \right) \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Como mencionado anteriormente, o conjunto de operadores de diferenças finitas generalizados obtidos será utilizado para as formulações numéricas apresentadas no capítulo 4. É importante chamar a atenção para o fato de que, uma vez que os

esquemas de campo único utilizam a mesma malha do esquema de campo duplo correspondente, a discretização das equações de campo único deve ser feita nos pontos corretos, ou seja, nos mesmos pontos que o esquema clássico correspondente. As aproximações generalizadas na a malha de Virieux, dadas, em segunda ordem, pelas Eq. 3.52, Eq. 3.56 e Eq. 3.60, e, em quarta ordem, pelas Eq. 3.53, Eq. 3.57 e Eq. 3.61, formam a base para os esquemas de campo único na malha de Virieux, válidos para anisotropia até ortotrópica. Enfatiza-se que os casos isotrópico e acústico são vistos como casos especiais, sendo discretizados na mesma malha. Já as aproximação generalizadas na malha rotacionada, dadas, em segunda ordem, pelas Eq. 3.65, Eq. 3.73 e Eq. 3.79, e, em quarta ordem, pelas Eq. 3.68, Eq. 3.76 e Eq. 3.80, formam a base para os esquemas de campo único na malha rotacionada, válidos para qualquer grau de anisotropia. Entretanto, como os operadores rotacionados possuem maior número de termos, sendo desta forma mais custoso computacionalmente, se adotará a estratégia de utilizar o esquema na malha rotacionada apenas para o caso de anisotropia maior que ortotrópica.

Capítulo 4

Formulações Numéricas Generalizadas para Malhas Intercaladas

Neste capítulo são apresentadas as principais contribuições desta tese, ou seja, os esquemas numéricos desenvolvidos e implementados neste trabalho para a propagação de ondas elásticas em meios gerais utilizando o Método das Diferenças Finitas com malha intercalada (MDFI). Para tal são utilizados os operadores generalizados obtidos na seção 3.5 do capítulo anterior. Os meios de propagação considerados podem apresentar qualquer grau de heterogeneidades e anisotropia, como discutido no capítulo 2, ressaltando-se que o caso isotrópico e o caso acústico são englobados nos esquemas como subcasos apenas modificando-se o tensor de elasticidade.

Os esquemas propostos constituem-se em uma generalização da idéia de utilização da malha intercalada para discretizar as equações de campo único, ou seja, as equações hiperbólicas de segunda ordem escritas para um único campo de propagação, apresentadas no capítulo 2 explicitamente para meios bidimensionais, tanto para meios acústicos, isotrópicos, quanto para meios anisotrópicos (ortotrópico ou anisotrópicos gerais). Tais esquemas são designados como SG-SF (*Staggered Grid Single Field Formulations*, ou seja, Formulações de Campo Único com Malhas Intercaladas).

Neste sentido, duas famílias distintas de algoritmos são apresentadas, uma baseada em discretizações na malha intercalada padrão, designada por SSG-SF (*Standard Staggered Grid Single Field Formulations*, ou seja, Formulações de Campo Único com Malha Intercalada Padrão), e outra baseada na malha intercalada rotacionada, designada por RSG-SF (*Rotated Staggered Grid Single Field Formulations*, ou seja, Formulações de Campo Único com Malha Intercalada Rotacionada). A primeira família utiliza a malha proposta em VIRIEUX (1984, 1986) e a segunda a malha

proposta em SAENGER *et al.* (2000). Enfatiza-se que em cada família de esquemas propostos — seja para meios elásticos (isotrópicos ou anisotrópicos) ou acústicos, em velocidades ou em tensões (pressão) — utiliza-se as mesmas aproximações de diferenças finitas correspondentes para cada malha para aproximar as derivadas presentes nas equações, aproximações estas obtidas na seção 3.5 do capítulo anterior. Observa-se, entretanto, que, dos esquemas possíveis, apenas os que apresentem vantagem de economia de armazenamento foram implementados e, além disso, que a malha intercalada tradicional (SSG) não é adequada para meios com anisotropia maior de ortotrópica. Neste caso, utiliza-se a malha rotacionada (RSG).

Como será visto, os SG-SF apresentam vantagens e desvantagens em relação aos esquemas de campo duplo originais (apresentados na seção 3.3), designados por SG-DF (*Staggered Grid Double Field Formulations*, ou seja, Formulações de Campo Duplo com Malhas Intercaladas). A característica mais importante é que os SG-SF, diferente dos esquemas de campo único com malhas simples encontrados na literatura, baseados nas equações da onda de deslocamentos (KELLY *et al.*, 1976), apresentam resposta numérica satisfatória para materiais com quaisquer razões de Poisson (incluindo meios acústicos, como a água). Na verdade, como será visto, os SG-SF desenvolvidos no presente trabalho apresentam as mesmas características numéricas que os esquemas SG-DF correspondentes, encontrados na literatura.

Na seção 4.1, são apresentados os esquemas de campo único para a equação em termos de velocidades. São apresentados separadamente os SSG-SF e os RSG-SF, respectivamente, esquemas para anisotropia até ortotrópica (VTI no caso de duas dimensões) e para anisotropia geral. Na seção 4.2, discute os esquemas de campo único para o campo de tensões. Enfatiza-se que são apresentados apenas os esquemas efetivamente implementados, sendo tais esquemas aqueles que apresentam vantagens em termos de armazenamento de memória, que, como será visto, são os esquemas de campo único em deslocamentos (ou velocidades) para o caso elástico e os esquemas de campo único em pressão para o caso acústico. É claro que o método proposto é geral, sendo essencialmente o mesmo para a discretização de quaisquer das equações de campo único apresentadas no capítulo 2. Menciona-se ainda que alguns casos particulares são discutidos em conjunto com a apresentação dos referidos esquemas de campo único, sendo feita uma comparação com os esquemas propostos na literatura (apresentados no apêndice D). Na seção seguinte, seção 4.3, mostra-se a equivalência entre os esquemas de campo único propostos e os respectivos esquemas de campo duplo provenientes da literatura (seção 3.3).

Na seção 4.4, é aplicado um método para elevar a ordem das aproximações temporais para o caso de malhas intercaladas, resultando em esquemas que quarta ordem no espaço e no tempo (4E-4T) válidos para meios anisotrópicos. Na seqüência, discuti-se também diversos aspectos importantes, mas muitas vezes ignorados, no

que diz respeito à implementação dos esquemas numéricos, como a aplicação da fonte (seção 4.5). Na seção 4.6, considera-se as condições de contorno e, na seção 4.9, questões referentes à comparação de esquemas em diferentes malhas. Na seção 4.7, são discutidas as propriedades de estabilidade dos esquemas implementados. Na seção 4.8, são discutidos aspectos da eficiência computacional dos esquemas implementados, como o custo computacional e a memória utilizada.

É importante enfatizar que, tanto as formulações tradicionais (seção 3.3) quanto as formulações originalmente propostas neste trabalho, são discretizadas com as mesmas malhas intercaladas. Assim, os esquemas para anisotropia até ortotrópica são discretizados utilizando-se a malha de Virieux enquanto os esquemas para o caso geral, utilizando-se a malha rotacionada. Como foi mencionado anteriormente, a anisotropia ortotrópica recai em anisotropia VTI no caso de duas dimensões. Entretanto, os esquemas serão designados como ortotrópicos para enfatizar que o mesmo esquema pode ser estendido para o caso tridimensional, sendo válidas as mesmas considerações. Enfatiza-se, ainda, que os demais operadores implementados neste trabalho, provenientes da literatura, são apresentados no apêndice D, sendo utilizados para comparação com os esquemas desenvolvidos e demais discussões.

4.1 Formulações para deslocamentos (velocidades)

Nesta seção, inicia-se a discussão dos esquemas de campo único propostos neste trabalho, ou seja, dos esquemas numéricos que discretizam equações da onda escritas em uma única variável utilizando malhas intercaladas (SG-SF). Como foi visto no capítulo 2, a equação da onda de deslocamentos e a equação da onda de velocidades tem exatamente a mesma forma (para qualquer grau de anisotropia), com exceção da fonte, que no caso da equação em velocidade é dada pela derivada temporal da fonte de deslocamento. Portanto, o esquema numérico que será desenvolvido para tratar tais equações será idêntico, diferindo apenas na aplicação da fonte sísmica em cada caso.

Ressalta-se que de os esquemas numéricos de diferenças finitas que se tem notícia para discretizar a equação da onda de velocidades no caso isotrópico, o de maior destaque foi proposto por KELLY *et al.* (1976), como mostrado no apêndice D. Entretanto este esquema utiliza uma malha simples, diferente do que é proposto neste trabalho. Como é bem conhecido, o esquema de Kelly apresenta instabilidade numérica em situações onde o parâmetro de Poison é maior que cerca de $\nu = 0,25$, como por exemplo a água (ver apêndice B). Logicamente, a extensão do esquema de Kelly para anisotropia até ortotrópica (extensão esta que é bem direta, bastando

trocar os parâmetros de Lamé pelos elementos correspondentes do tensor de elasticidade) apresenta o mesmo problema de estabilidade. Já os esquemas propostos neste trabalho são estáveis nestas situações, apresentando as mesmas características de estabilidade dos correspondentes esquemas de campo duplo que utilizam malha intercalada (como os esquemas de Virieux e de Levander ou os de malha rotacionada), como será visto adiante.

Na seqüência, serão apresentados os esquemas propostos neste trabalho para o caso de anisotropia ortotrópica, onde utiliza-se a malha de Virieux para discretização e, posteriormente, o esquema para o caso de anisotropia geral, onde se utiliza a malha rotacionada. Enfatiza-se que a razão de utilizar a malha de Virieux no primeiro caso e a malha rotacionada no segundo foi discutida no capítulo anterior.

4.1.1 Caso ortotrópico (ortorrômbico)

A equação da onda de deslocamentos (velocidades) para o caso ortotrópico é dada por

$$\rho \partial_t^2 U = \partial_x(A \partial_x U) + \partial_x(B \partial_z V) + \partial_z(F \partial_z U) + \partial_z(F \partial_x V) \quad (4.1)$$

$$\rho \partial_t^2 V = \partial_x(F \partial_z U) + \partial_x(F \partial_x V) + \partial_z(B \partial_x U) + \partial_z(D \partial_z V), \quad (4.2)$$

onde U e V representam as componentes x e z da velocidade (ou do deslocamento) e, como antes, os coeficientes A , B , ... são as componente do tensor de elasticidade.

Estas equações são discretizadas utilizando-se a malha intercalada de Virieux (VIRIEUX, 1986). Para tanto, a Eq. (4.1) é considerada nos pontos representados por círculos vermelhos (pontos vermelhos) e a Eq. (4.2) é considerada no ponto verde (quadrado), conforme ilustrado pela figura 3.5 (página 49). As equações discretas são então obtidas aproximando-se as derivadas espaciais (conforme apresentado na seção 3.5) pelas expressões de segunda ou quarta ordem, enquanto as derivadas temporais são aproximadas pela expressão simples de segunda ordem (dadas na seção 3.1). Desta forma, considerando-se, por exemplo, segunda ordem de aproximação

no espaço, as equações discretas serão dadas por

$$\begin{aligned}
U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} + U_{i,j}^{k-\frac{3}{2}} &= b_{i,j} \frac{\Delta t^2}{h^2} \left[A_{i+\frac{1}{2},j} \left(U_{i+1,j}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right. \\
&\quad \left. - A_{i-\frac{1}{2},j} \left(U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i-1,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right. \\
&\quad + B_{i+\frac{1}{2},j} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) - B_{i-\frac{1}{2},j} \left(V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + F_{i,j+\frac{1}{2}} \left(U_{i,j+1}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) - F_{i,j-\frac{1}{2}} \left(U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j-1}^{k-\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad \left. + F_{i,j+\frac{1}{2}} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) - F_{i,j-\frac{1}{2}} \left(V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (4.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - 2V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} + V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{3}{2}} &= b_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t^2}{h^2} \left[F_{i+1,j+\frac{1}{2}} \left(U_{i+1,j+1}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i+1,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right. \\
&\quad \left. - F_{i,j+\frac{1}{2}} \left(U_{i,j+1}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right. \\
&\quad + F_{i+1,j+\frac{1}{2}} \left(V_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) - F_{i,j+\frac{1}{2}} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + D_{i+\frac{1}{2},j+1} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) - D_{i+\frac{1}{2},j} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad \left. + B_{i+\frac{1}{2},j+1} \left(U_{i+1,j+1}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j+1}^{k-\frac{1}{2}} \right) - B_{i+\frac{1}{2},j} \left(U_{i+1,j}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right]. \quad (4.4)
\end{aligned}$$

É importante lembrar que os casos especiais de esquemas isotrópico e acústico são obtidos utilizando-se os elementos do tensor de elasticidade correspondentes (ver apêndice B). Para obter as equações em quarta ordem de aproximação no espaço, utilizam-se as expressões em quarta ordem para as derivadas espaciais (dadas na seção 3.5), sendo apresentadas as expressões resultantes no apêndice E.

4.1.2 Caso anisotrópico geral

Para o caso de anisotropia maior que ortotrópica, como foi visto no capítulo anterior, é necessário utilizar a malha rotacionada. Desta forma, a equação da onda para o caso geral, que é dada por

$$\begin{aligned}
\rho \partial_t^2 U &= \partial_x (A \partial_x U) + \partial_x (B \partial_z V) + \partial_x [C (\partial_x V + \partial_z U)] \\
&\quad + \partial_z (C \partial_x U) + \partial_z (E \partial_z V) + \partial_z [F (\partial_x V + \partial_z U)] \quad (4.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho \partial_t^2 V &= \partial_x (C \partial_x U) + \partial_x (E \partial_z V) + \partial_x [F (\partial_x V + \partial_z U)] \\
&\quad + \partial_z (B \partial_x U) + \partial_z (D \partial_z V) + \partial_z [E (\partial_x V + \partial_z U)], \quad (4.6)
\end{aligned}$$

é discretizada utilizando-se as derivadas rotacionadas, como apresentado na seção 3.1, nos pontos corretos da malha.

As expressões discretas em segunda ordem são dadas, para a componente x , por

$$\begin{aligned}
U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} + U_{i,j}^{k-\frac{3}{2}} &= b_{i,j} \frac{\Delta t^2}{4h^2} \left[A_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(1)}U + D_{\tilde{z}}^{(1)}U \right) \right. \\
&\quad \left. - A_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(2)}U + D_{\tilde{z}}^{(2)}U \right) \right. \\
&\quad + A_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(3)}U + D_{\tilde{z}}^{(3)}U \right) - A_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(4)}U + D_{\tilde{z}}^{(4)}U \right) \\
&\quad + B_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(1)}V + D_{\tilde{z}}^{(1)}V \right) - B_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(2)}V + D_{\tilde{z}}^{(2)}V \right) \\
&\quad + B_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(3)}V + D_{\tilde{z}}^{(3)}V \right) - B_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(4)}V + D_{\tilde{z}}^{(4)}V \right) \\
&\quad + C_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(1)}V + D_{\tilde{z}}^{(1)}V \right) - C_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(2)}V + D_{\tilde{z}}^{(2)}V \right) \\
&\quad + C_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(3)}V + D_{\tilde{z}}^{(3)}V \right) - C_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(4)}V + D_{\tilde{z}}^{(4)}V \right) \\
&\quad + C_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(1)}U + D_{\tilde{z}}^{(1)}U \right) - C_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(2)}U + D_{\tilde{z}}^{(2)}U \right) \\
&\quad + C_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(3)}U + D_{\tilde{z}}^{(3)}U \right) - C_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(4)}U + D_{\tilde{z}}^{(4)}U \right) \quad (4.7) \\
&\quad - C_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(1)}U + D_{\tilde{z}}^{(1)}U \right) + C_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(2)}U + D_{\tilde{z}}^{(2)}U \right) \\
&\quad + C_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(3)}U + D_{\tilde{z}}^{(3)}U \right) - C_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(4)}U + D_{\tilde{z}}^{(4)}U \right) \\
&\quad - E_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(1)}V + D_{\tilde{z}}^{(1)}V \right) + E_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(2)}V + D_{\tilde{z}}^{(2)}V \right) \\
&\quad + E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(3)}V + D_{\tilde{z}}^{(3)}V \right) - E_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(4)}V + D_{\tilde{z}}^{(4)}V \right) \\
&\quad - F_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(1)}V + D_{\tilde{z}}^{(1)}V \right) + F_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(2)}V + D_{\tilde{z}}^{(2)}V \right) \\
&\quad + F_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(3)}V + D_{\tilde{z}}^{(3)}V \right) - F_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(4)}V + D_{\tilde{z}}^{(4)}V \right) \\
&\quad - F_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(1)}U + D_{\tilde{z}}^{(1)}U \right) + F_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(2)}U + D_{\tilde{z}}^{(2)}U \right) \\
&\quad \left. + F_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(3)}U + D_{\tilde{z}}^{(3)}U \right) - F_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(4)}U + D_{\tilde{z}}^{(4)}U \right) \right]
\end{aligned}$$

e, para a componente z , por

$$\begin{aligned}
V_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2V_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} + V_{i,j}^{k-\frac{3}{2}} &= b_{i,j} \frac{\Delta t^2}{4h^2} \left[C_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(1)}U + D_{\tilde{z}}^{(1)}U \right) \right. \\
&\quad \left. - C_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(2)}U + D_{\tilde{z}}^{(2)}U \right) \right. \\
&\quad + C_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(3)}U + D_{\tilde{z}}^{(3)}U \right) - C_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(4)}U + D_{\tilde{z}}^{(4)}U \right) \\
&\quad + E_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(1)}V + D_{\tilde{z}}^{(1)}V \right) - E_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(2)}V + D_{\tilde{z}}^{(2)}V \right) \\
&\quad + E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(3)}V + D_{\tilde{z}}^{(3)}V \right) - E_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(4)}V + D_{\tilde{z}}^{(4)}V \right) \\
&\quad + F_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(1)}V + D_{\tilde{z}}^{(1)}V \right) - F_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(2)}V + D_{\tilde{z}}^{(2)}V \right) \\
&\quad + F_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(3)}V + D_{\tilde{z}}^{(3)}V \right) - F_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(4)}V + D_{\tilde{z}}^{(4)}V \right) \\
&\quad + F_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(1)}U + D_{\tilde{z}}^{(1)}U \right) - F_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(2)}U + D_{\tilde{z}}^{(2)}U \right) \\
&\quad + F_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(3)}U + D_{\tilde{z}}^{(3)}U \right) - F_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(4)}U + D_{\tilde{z}}^{(4)}U \right) \\
&\quad - B_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(1)}U + D_{\tilde{z}}^{(1)}U \right) + B_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(2)}U + D_{\tilde{z}}^{(2)}U \right) \\
&\quad + B_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(3)}U + D_{\tilde{z}}^{(3)}U \right) - B_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(4)}U + D_{\tilde{z}}^{(4)}U \right) \\
&\quad - D_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(1)}V + D_{\tilde{z}}^{(1)}V \right) + D_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(2)}V + D_{\tilde{z}}^{(2)}V \right) \\
&\quad + D_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(3)}V + D_{\tilde{z}}^{(3)}V \right) - D_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(4)}V + D_{\tilde{z}}^{(4)}V \right) \\
&\quad - E_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(1)}V + D_{\tilde{z}}^{(1)}V \right) + E_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(2)}V + D_{\tilde{z}}^{(2)}V \right) \\
&\quad + E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(3)}V + D_{\tilde{z}}^{(3)}V \right) - E_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(D_{\tilde{x}}^{(4)}V + D_{\tilde{z}}^{(4)}V \right) \\
&\quad - E_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(1)}U + D_{\tilde{z}}^{(1)}U \right) + F_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(2)}U + D_{\tilde{z}}^{(2)}U \right) \\
&\quad \left. + E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(3)}U + D_{\tilde{z}}^{(3)}U \right) - E_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(-D_{\tilde{x}}^{(4)}U + D_{\tilde{z}}^{(4)}U \right) \right], \tag{4.8}
\end{aligned}$$

onde

$$D_{\tilde{x}}^{(1)}U = U_{i+1,j-1} - U_{i,j}, \quad D_{\tilde{z}}^{(1)}U = U_{i+1,j} - U_{i,j-1} \tag{4.9}$$

$$D_{\tilde{x}}^{(2)}U = U_{i,j} - U_{i-1,j+1}, \quad D_{\tilde{z}}^{(2)}U = U_{i,j+1} - U_{i-1,j} \tag{4.10}$$

$$D_{\tilde{x}}^{(3)}U = U_{i+1,j} - U_{i,j+1}, \quad D_{\tilde{z}}^{(3)}U = U_{i+1,j+1} - U_{i,j} \tag{4.11}$$

$$D_{\tilde{x}}^{(4)}U = U_{i,j-1} - U_{i-1,j}, \quad D_{\tilde{z}}^{(4)}U = U_{i,j} - U_{i-1,j-1} \tag{4.12}$$

e

$$D_{\tilde{x}}^{(1)}V = V_{i+1,j-1} - V_{i,j}, \quad D_{\tilde{z}}^{(1)}V = V_{i+1,j} - V_{i,j-1} \tag{4.13}$$

$$D_{\tilde{x}}^{(2)}V = V_{i,j} - V_{i-1,j+1}, \quad D_{\tilde{z}}^{(2)}V = V_{i,j+1} - V_{i-1,j} \tag{4.14}$$

$$D_{\tilde{x}}^{(3)}V = V_{i+1,j} - V_{i,j+1}, \quad D_{\tilde{z}}^{(3)}V = V_{i+1,j+1} - V_{i,j} \tag{4.15}$$

$$D_{\tilde{x}}^{(4)}V = V_{i,j-1} - V_{i-1,j}, \quad D_{\tilde{z}}^{(4)}V = V_{i,j} - V_{i-1,j-1}. \tag{4.16}$$

4.2 Formulações para tensões

Assim como feito para a equação da onda de velocidades, pode-se obter discretizações para a equação da onda de tensões. A desvantagem imediata é que, em duas dimensões, ao invés de 2 campos (velocidade em cada uma das direções) utiliza-se três campos (as duas componentes normais de tensão mais a componente cisalhante). No caso tridimensional, a situação torna-se ainda pior (3 velocidades contra 6 tensões), fazendo com que tais esquemas sejam, a princípio, mais onerosos computacionalmente. Entretanto, no caso acústico, pode-se obter significativa vantagem com um esquema deste tipo, uma vez que existe somente uma componente de tensão (identificada como a pressão acústica), independente do problema considerado ser bi ou tridimensional.

Assim, diferente dos esquemas de campo único em deslocamentos (ou velocidades), primeiro será apresentado o caso acústico para a formulação de campo único em tensão, dada a especial utilidade da mesma. Os casos elásticos anisotrópicos são apresentados na seqüência, mas sem explicitar as equações (o que pode ser feito sem nenhuma dificuldade utilizando a metodologia proposta neste trabalho). Ressalta-se que tais esquemas não foram implementados em virtude da desvantagem descrita acima. Mais uma vez, as equações são discretizadas utilizando a malha de Virieux, no caso com anisotropia até ortotrópica ou caso acústico, e utilizando a malha rotacionada, no caso com anisotropia geral.

4.2.1 Caso acústico

Conforme dado na seção 2.4, a equação da onda de tensões se reduz à seguinte expressão no caso acústico em duas dimensões

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \kappa \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right], \quad (4.17)$$

onde p é a pressão acústica e κ é a módulo de compressão adiabática (módulo de Bulk).

Para discretizar a Eq. (4.17), de forma similar ao que foi feito para o caso da onda de velocidades, utiliza-se a malha de Virieux. Portanto, os operadores de diferenças finitas utilizados são os operadores de derivadas contendo propriedades, dados pela Eq. 3.56 em segunda ordem e pela 3.57 em quarta ordem (seção 3.5). Em segunda ordem, obtém-se a seguinte expressões discreta

$$P_{i,j}^{k+1} - 2P_{i,j}^k + P_{i,j}^{k-1} = \frac{\Delta t^2}{h^2} \kappa_{i,j} \left[b_{i+\frac{1}{2},j} (P_{i+1,j}^k - P_{i,j}^k) - b_{i-\frac{1}{2},j} (P_{i,j}^k - P_{i-1,j}^k) \right. \\ \left. + b_{i,j+\frac{1}{2}} (P_{i,j+1}^k - P_{i,j}^k) - b_{i,j-\frac{1}{2}} (P_{i,j}^k - P_{i,j-1}^k) \right], \quad (4.18)$$

onde b é o inverso da densidade, h é o espaçamento da malha ($\Delta x = \Delta x = h$) e Δt é o intervalo de tempo. A expressão em quarta ordem no espaço é dada por

$$\begin{aligned}
P_{i,j}^{k+1} - 2P_{i,j}^k + P_{i,j}^{k-1} = & \frac{\Delta t^2}{h^2} \kappa_{i,j} \left\{ \frac{9}{8} \left(b_{i+\frac{1}{2},j} \left[\frac{9}{8} (P_{i+1,j}^k - P_{i,j}^k) - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \frac{1}{24} (P_{i+2,j}^k - P_{i-1,j}^k) \right] \right) \right. \\
& \left. - b_{i-\frac{1}{2},j} \left[\frac{9}{8} (P_{i,j}^k - P_{i-1,j}^k) - \frac{1}{24} (P_{i+1,j}^k - P_{i-2,j}^k) \right] \right) \\
- & \frac{1}{24} \left(b_{i+\frac{3}{2},j} \left[\frac{9}{8} (P_{i+2,j}^k - P_{i+1,j}^k) - \frac{1}{24} (P_{i+3,j}^k - P_{i,j}^k) \right] \right. \\
& \left. - b_{i-\frac{3}{2},j} \left[\frac{9}{8} (P_{i-1,j}^k - P_{i-2,j}^k) - \frac{1}{24} (P_{i,j}^k - P_{i-3,j}^k) \right] \right) \\
+ & \frac{9}{8} \left(b_{i,j+\frac{1}{2}} \left[\frac{9}{8} (P_{i,j+1}^k - P_{i,j}^k) - \frac{1}{24} (P_{i,j+2}^k - P_{i,j-1}^k) \right] \right. \\
& \left. - b_{i,j-\frac{1}{2}} \left[\frac{9}{8} (P_{i,j}^k - P_{i,j-1}^k) - \frac{1}{24} (P_{i,j+1}^k - P_{i,j-2}^k) \right] \right) \\
- & \frac{1}{24} \left(b_{i,j+\frac{3}{2}} \left[\frac{9}{8} (P_{i,j+2}^k - P_{i+1,j}^k) - \frac{1}{24} (P_{i,j+3}^k - P_{i,j}^k) \right] \right. \\
& \left. - b_{i,j-\frac{1}{2}} \left[\frac{9}{8} (P_{i,j-1}^k - P_{i,j-2}^k) - \frac{1}{24} (P_{i,j}^k - P_{i,j-3}^k) \right] \right) \left. \right\} \quad (4.19)
\end{aligned}$$

É importante mencionar que o esquema de segunda ordem apresentado acima, dado pela Eq. 4.18, coincide com o esquema apresentado no artigo de COHEN e JOLY (1990) (ver este esquema no apêndice D). Já o esquema de quarta ordem, dado pela Eq. 4.19, é inteiramente diferente do esquema desenvolvido no referido trabalho, pois este força a utilização de um menor número de pontos (ver (apêndice D)), razão pela qual é freqüentemente designado por esquema compacto. Já o esquema proposto no presente trabalho é uma generalização natural do esquema de segunda ordem, dado pela Eq. 4.18. Acrescenta-se que o esquema de COHEN e JOLY (1990) apresenta estabilidade numérica inferior ao esquema proposto neste trabalho. Em virtude disto, os autores daquele trabalho necessitam lançar mão de um parâmetro λ para suavizar o inverso da densidade do meio com o intuito de estabilizar o esquema.

Outra observação importante em relação ao trabalho apresentado em COHEN e JOLY (1990) é que em tal artigo é aplicada a extensão para quarta ordem da aproximação temporal de diferenças finitas da equação da onda acústica geral (para velocidade e densidade variáveis) utilizando-se a formulação de Lax-Wendroff. Tal extensão é independente da aproximação espacial discutida acima, de forma que a mesma idéia pode ser aplicadas também no esquema proposto acima. Para maiores detalhes sobre a aplicação do esquema de Lax-Wendroff em geofísica, apresenta-se uma revisão no apêndice F, sendo apresentada na seção 4.4 a aplicação da mesma idéia para a malha intercalada.

4.2.2 Caso ortotrópico (ortorrômbico)

No caso de anisotropia ortotrópica, as equações da onda de tensões em duas dimensões são dadas por

$$\partial_t^2 X = A\partial_x(b\partial_x X) + A\partial_x(b\partial_z T) + B\partial_z(b\partial_x T) + B\partial_z(b\partial_z Z) \quad (4.20)$$

$$\partial_t^2 Z = B\partial_x(b\partial_x X) + B\partial_x(b\partial_z T) + D\partial_z(b\partial_x T) + D\partial_z(b\partial_z Z) \quad (4.21)$$

$$\partial_t^2 T = F\partial_z(b\partial_x X) + F\partial_z(b\partial_z T) + E\partial_x(b\partial_x T) + E\partial_x(b\partial_z Z), \quad (4.22)$$

onde A, B, \dots são os elementos do tensor de elasticidade, como antes, e as componentes da tensão são dadas por $(\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz}) = (X, Z, T)$.

Como já mencionado, as equações acima podem ser facilmente discretizadas utilizando-se os mesmos operadores que antes, dados na seção 3.5, tanto em segunda quanto em quarta ordem no espaço, considerando-se a malha de Virieux.

4.2.3 Caso geral (anisotropia qualquer)

Já para anisotropia geral, o sistema de equações a ser discretizado é dado por

$$\begin{aligned} \partial_t^2 X = & A\partial_x(b\partial_x X) + A\partial_x(b\partial_z T) + C\partial_z(b\partial_x X) + C\partial_z(b\partial_z T) \\ & + C\partial_x(b\partial_x T) + C\partial_x(b\partial_z Z) + B\partial_z(b\partial_x T) + B\partial_z(b\partial_z Z) \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 Z = & B\partial_x(b\partial_x X) + B\partial_x(b\partial_z T) + E\partial_z(b\partial_x X) + E\partial_z(b\partial_z T) \\ & + E\partial_x(b\partial_x T) + E\partial_x(b\partial_z Z) + D\partial_z(b\partial_x T) + D\partial_z(b\partial_z Z) \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 T = & C\partial_x(b\partial_x X) + C\partial_x(b\partial_z T) + F\partial_z(b\partial_x X) + F\partial_z(b\partial_z T) \\ & + F\partial_x(b\partial_x T) + F\partial_x(b\partial_z Z) + E\partial_z(b\partial_x T) + E\partial_z(b\partial_z Z), \end{aligned} \quad (4.25)$$

sendo as derivadas espaciais discretizadas utilizando os operadores na malha rotacionada, desenvolvidos na seção 3.5.

4.3 Equivalência entre esquemas de campo único e campo duplo

Nesta seção, será mostrado que os esquemas de campo único desenvolvidos nas seções anteriores, utilizando as aproximações propostas, são numericamente equivalentes aos esquemas de campo duplo correspondentes. Para simplificar a dedução, será demonstrada a equivalência para o caso mais simples, qual seja, o caso ortotrópico com discretização de segunda ordem no espaço uma vez que a generalização é imediata. Para tal, considere as equações de campo duplo discretizadas em segunda

ordem, dadas por

$$\begin{aligned}
U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} &= U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} + b_{i,j} \frac{\Delta t}{h} \left(X_{i+\frac{1}{2},j}^k - X_{i-\frac{1}{2},j}^k + T_{i,j+\frac{1}{2}}^k - T_{i,j-\frac{1}{2}}^k \right) \\
V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} &= V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} + b_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{h} \left(T_{i+1,j+\frac{1}{2}}^k - T_{i,j+\frac{1}{2}}^k + Z_{i+\frac{1}{2},j+1}^k - Z_{i+\frac{1}{2},j}^k \right) \\
X_{i+\frac{1}{2},j}^{k+1} &= X_{i+\frac{1}{2},j}^k + A_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{h} \left(U_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + B_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{h} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\
Z_{i+\frac{1}{2},j}^{k+1} &= Z_{i+\frac{1}{2},j}^k + D_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{h} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + B_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{h} \left(U_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\
T_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} &= T_{i,j+\frac{1}{2}}^k + F_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{h} \left(U_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + F_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{h} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Para demonstrar que estas equações são equivalentes às discretizações em campo único, por exemplo em velocidades, basta substituí-se as três últimas equações nas duas primeiras, objetivando-se eliminar as variáveis de tensão e obter-se apenas equações em termos das componentes da velocidade. Fazendo-se a substituição, obtém-se

$$\begin{aligned}
U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} &= U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} + b_{i,j} \frac{\Delta t}{h} \left(X_{i+\frac{1}{2},j}^{k-1} - X_{i-\frac{1}{2},j}^{k-1} + T_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-1} - T_{i,j-\frac{1}{2}}^{k-1} \right) \\
&\quad + b_{i,j} \frac{\Delta t^2}{h^2} \left[A_{i+\frac{1}{2},j} \left(U_{i+1,j}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) - A_{i-\frac{1}{2},j} \left(U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i-1,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right. \\
&\quad + B_{i+\frac{1}{2},j} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) - B_{i-\frac{1}{2},j} \left(V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + F_{i,j+\frac{1}{2}} \left(U_{i,j+1}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) - F_{i,j-\frac{1}{2}} \left(U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j-1}^{k-\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad \left. + F_{i,j+\frac{1}{2}} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) - F_{i,j-\frac{1}{2}} \left(V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} &= V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} + b_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{h} \left(T_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{k-1} - T_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-1} + Z_{i+\frac{1}{2},j+1}^{k-1} - Z_{i+\frac{1}{2},j}^{k-1} \right) \\
&\quad + b_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t^2}{h^2} \left[F_{i+1,j+\frac{1}{2}} \left(U_{i+1,j+1}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i+1,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) - F_{i,j+\frac{1}{2}} \left(U_{i,j+1}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right. \\
&\quad + F_{i+1,j+\frac{1}{2}} \left(V_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right) - F_{i,j+\frac{1}{2}} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + D_{i+\frac{1}{2},j+1} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) - D_{i+\frac{1}{2},j} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad \left. + B_{i+\frac{1}{2},j+1} \left(U_{i+1,j+1}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j+1}^{k-\frac{1}{2}} \right) - B_{i+\frac{1}{2},j} \left(U_{i+1,j}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right],
\end{aligned} \tag{4.28}$$

onde os termos já foram agrupados de forma conveniente.

Como constata-se as Eq. 4.27 e Eq. 4.28, ainda existem termos de tensões não

eliminados. Para eliminá-los, basta reescrever as duas primeiras equações de Eq. (4.26) para o tempo $k - 1$, ou seja,

$$\begin{aligned} b_{i,j} \frac{\Delta t}{h} \left(X_{i+\frac{1}{2},j}^{k-1} - X_{i-\frac{1}{2},j}^{k-1} + T_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-1} - T_{i,j-\frac{1}{2}}^{k-1} \right) &= U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k-\frac{3}{2}} \\ b_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{h} \left(T_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{k-1} - T_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-1} + Z_{i+\frac{1}{2},j+1}^{k-1} - Z_{i+\frac{1}{2},j}^{k-1} \right) &= U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

e substitui-las nas Eq. (4.27) e Eq. (4.28), obtendo-se finalmente as seguintes expressões

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} + U_{i,j}^{k-\frac{3}{2}} &= b_{i,j} \frac{\Delta t^2}{h^2} \left[A_{i+\frac{1}{2},j} \left(U_{i+1,j}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - A_{i-\frac{1}{2},j} \left(U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i-1,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\quad + B_{i+\frac{1}{2},j} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) - B_{i-\frac{1}{2},j} \left(V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + F_{i,j+\frac{1}{2}} \left(U_{i,j+1}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) - F_{i,j-\frac{1}{2}} \left(U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j-1}^{k-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad \left. + F_{i,j+\frac{1}{2}} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) - F_{i,j-\frac{1}{2}} \left(V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (4.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - 2V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} + V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{3}{2}} &= b_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t^2}{h^2} \left[F_{i+1,j+\frac{1}{2}} \left(U_{i+1,j+1}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i+1,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - F_{i,j+\frac{1}{2}} \left(U_{i,j+1}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\quad + F_{i+1,j+\frac{1}{2}} \left(V_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right) - F_{i,j+\frac{1}{2}} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + D_{i+\frac{1}{2},j+1} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) - D_{i+\frac{1}{2},j} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad \left. + B_{i+\frac{1}{2},j+1} \left(U_{i+1,j+1}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j+1}^{k-\frac{1}{2}} \right) - B_{i+\frac{1}{2},j} \left(U_{i+1,j}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right]. \quad (4.30) \end{aligned}$$

As equações obtidas são exatamente as mesmas equações obtidas anteriormente para o esquema de campo único para a onda de velocidades em segunda ordem de aproximação. Isto mostra que as duas formulações são numericamente equivalentes.

De forma semelhante, pode-se demonstrar o mesmo para o esquema de quarta ordem no espaço. Equivalência semelhante pode ser também mostrada para o esquema de campo único que utiliza onda de tensões. Para isto, inversamente, substitui-se as duas primeiras equações, dadas nas Eq. (4.26), nas três últimas. Para os esquemas de malha rotacionada (anisotropia geral), pode-se mostrar também a mesma equivalência. Em relação à equivalência entre as fontes, na seção 4.5.2 é discutido em detalhes a equivalência da fonte entre os esquemas de campo duplo e os esquemas de campo único correspondente.

Como conclusão deste tópico, chama-se a atenção para o fato de que qualquer esquema de malha intercalada baseado em um sistema de equações hiperbólico de

primeira ordem pode ser formulado em termos de um esquema baseado na equação da onda de segunda ordem utilizando-se o método de obtenção dos operadores gerais utilizado na seção 3.5. Um exemplo é o esquema de Yee para problemas eletromagnéticos, que originalmente é escrito para o sistema de equações de primeira ordem, mas pode ser formulado para a equação de segunda ordem correspondente.

4.4 Esquemas de ordem superior no tempo

Como descrito por exemplo por ANNE *et al.* (2000), as formulações de diferenças finitas para a equação da onda em quarta ordem no tempo apresentam problema de instabilidade numérica. Assim, para elevar a ordem de aproximação no tempo para os operadores de diferenças finitas deve-se recorrer a esquemas especiais, tanto para a equação acústica da onda como para a equação elástica. Uma alternativa para elevar a ordem temporal das aproximações é através da utilização de esquemas conhecidos pelo nome de seus autores (LAX e WENDROFF, 1964). A idéia nestes esquemas é contornar a instabilidade da aproximação da derivada temporal trocando os termos de ordem elevada da expansão em série de Taylor do operador temporal por uma expressão em termos de derivada espacial, utilizando-se a própria equação da onda. Como resultado, obtém-se um esquema de quarta ordem no tempo, mas calcula o campo no instante de tempo futuro utilizando-se apenas os campos em dois instantes de tempo anteriores (e não quatro, como seria o caso de um esquema comum de quarta ordem no tempo, se tal esquema fosse estável). Como será mostrado, tal esquema pode ser aplicado com sucesso na malha intercalada. Para uma revisão dos esquemas tipo Lax-Wendroff utilizados em geofísica, são apresentados os esquemas implementados para malha simples no apêndice F.

Nesta seção, será apresentada a extensão da idéia original para os esquemas com malha intercaladas. Por uma questão de simplicidade, serão obtidas aproximações de quarta ordem no tempo, iniciado o procedimento pelo problema acústico, para, na seqüência, abordar-se o problema elástico anisotrópico geral. Entretanto, seguindo o mesmo procedimento, é possível obter ordens mais elevadas de aproximação temporal.

4.4.1 Formulação acústica

É importante mencionar que o esquema aqui desenvolvido foi encontrado recentemente pelo autor deste trabalho, apresentado no artigo de GUSTAFSSON e WAHLUND (2005), artigo onde há inclusive uma análise da estabilidade numérica baseada em métodos energéticos. Entretanto, não foram encontrados artigos com a extensão elástica deste esquema nem para meios isotrópicos nem para meios anisotrópicos,

extensão esta deduzida na seção seguinte. Há entretanto, um trabalho de congresso que trata do tema apenas no caso isotrópico em CRASE (1990).

Considere o problema acústico, escrito pelas seguintes equações

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (4.31)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} p = 0. \quad (4.32)$$

A discretização destas equações em segunda ordem no tempo e segunda ou quarta ordem no espaço é dada no apêndice D (seção D.2), sendo utilizada malha intercalada de Virieux. Para elevar a ordem da aproximação temporal, da mesma forma que é feito no caso dos esquemas de malha simples (ver apêndice F), considera-se a expansão em série de Taylor até quarta ordem do operador de derivada primeira temporal, de modo a obter-se

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)^{k+1/2} = \frac{p^{k+1} - p^k}{\Delta t} - \frac{\Delta t^2}{24} \left(\frac{\partial^3 p}{\partial t^3} \right)^{k+1/2} + O(\Delta t^4). \quad (4.33)$$

Por outro lado, derivando a Eq. (4.31) no tempo e utilizando a Eq. (4.32), obtém-se

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} (-\kappa \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = -\kappa \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \kappa \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} \right).$$

Derivando novamente este resultado, segue que

$$\frac{\partial^3 p}{\partial t^3} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\kappa \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} \right) \right] = \kappa \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) \right].$$

Utilizando por fim a Eq. (4.31), obtém-se

$$\frac{\partial^3 p}{\partial t^3} = -\kappa \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} (\kappa \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right]. \quad (4.34)$$

Substituindo na Eq. (4.33), chega-se finalmente à

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)^{k+1/2} = \frac{p^{k+1} - p^k}{\Delta t} + \left(\frac{\kappa \Delta t^2}{24} \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} (\kappa \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right] \right)^{k+1/2} + O(\Delta t^4). \quad (4.35)$$

Procedendo-se de forma análoga pode ser feito para obter o termo em \vec{v} , tem-se que

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)^k = \frac{\vec{v}^{k+1/2} - \vec{v}^{k-1/2}}{\Delta t} + \left(\frac{\Delta t^2}{24 \rho} \vec{\nabla} \cdot \left[\kappa \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) \right] \right)^k + O(\Delta t^4). \quad (4.36)$$

Com isto, as equações modificadas são escritas como

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\kappa \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \frac{\kappa \Delta t^2}{24} \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} (\kappa \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right] \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \frac{\Delta t^2}{24\rho} \vec{\nabla} \cdot \left[\kappa \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) \right], \quad (4.38)$$

onde os termos de correção T_1 e T_2 , responsáveis pelo acréscimo da ordem temporal, são dados por

$$T_1 = \frac{\kappa \Delta t^2}{24} \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} (\kappa \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right] \quad (4.39)$$

$$T_2 = \frac{\Delta t^2}{24\rho} \vec{\nabla} \cdot \left[\kappa \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) \right]. \quad (4.40)$$

É importante mencionar que as equações modificadas devem ser discretizadas em segunda ordem para a derivada temporal, em quarta para o operador espacial original e apenas em segunda ordem para o termo de correção, para obter um esquema de quarta ordem no espaço e no tempo. A razão pela qual somente é necessário discretizar os termos de correção em segunda ordem se deve ao fato destes termos possuírem a grandeza Δt^2 multiplicada. As discretizações dos termos de correção são deduzidas no apêndice (F), para o caso 2D implementado.

As expressões deduzidas acima são válidas quando não há fontes. No caso da existência de fonte de injeção de matéria por exemplo, como é o caso da aquisições marítimas usando *airgum*, a Eq. 4.31 deve ser reescrita como

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = F = \frac{\partial^2 i_V}{\partial t^2}, \quad (4.41)$$

de forma que as equações modificadas são alteradas para

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\kappa \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - T_1 + T_1^F \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - T_2 + T_2^F, \quad (4.43)$$

sendo os termos de correção adicionais em virtude da fonte dados por

$$T_1^F = \kappa \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} F \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \quad (4.44)$$

$$T_2^F = -b \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right), \quad (4.45)$$

sendo aplicados, evidentemente, apenas durante o intervalo de tempo em que a fonte é diferente de zero e nas posições com fontes prescritas.

4.4.2 Formulação elástica geral

O mesmo método será aplicado agora para o caso elástico geral, dado pelas Eq. (2.17) e Eq. (2.18)

$$\rho \partial_t v_i - \partial_j \tau_{ij} = 0 \quad (4.46)$$

$$\partial_t \tau_{ij} - c_{ijkl} \partial_l v_k = 0. \quad (4.47)$$

Primeiro, considere a seguinte expansão em série de Taylor dada por

$$\partial_t \tau_{ij}^{k+1/2} = \frac{\tau_{ij}^{k+1} - \tau_{ij}^k}{\Delta t} - \frac{\Delta t^2}{24} \partial_t^3 \tau_{ij}^{k+1/2} + O(\Delta t^4). \quad (4.48)$$

Derivando a Eq. (4.47) e utilizando a Eq. (4.46), chega-se à

$$\partial_t^2 \tau_{ij} = \partial_t (\partial_t \tau_{ij}) = \partial_t (c_{ijkl} \partial_l v_k) = c_{ijkl} \partial_l \partial_t v_k = c_{ijkl} \partial_l \left[\frac{1}{\rho} \partial_m \tau_{km} \right]. \quad (4.49)$$

Derivando novamente o resultado, obtém-se finalmente a seguinte equação

$$\partial_t^3 \tau_{ij} = c_{ijkl} \partial_l \left[\frac{1}{\rho} \partial_m \partial_t \tau_{km} \right] = c_{ijkl} \partial_l \left[\frac{1}{\rho} \partial_m (c_{kmnp} \partial_n v_p) \right], \quad (4.50)$$

onde foi mais uma vez utilizada a Eq. (4.47). Substituindo-se a expressão obtida na expansão em série de Taylor, chega-se à equação modificada correspondente.

Realizando cálculos semelhantes para a outra equação, encontra-se o seguinte sistema de equações modificadas

$$\partial_t \tau_{ij} - c_{ijkl} \partial_l v_k - \frac{\Delta t^2}{24} c_{ijkl} \partial_l \left[\frac{1}{\rho} \partial_m (c_{kmnp} \partial_n v_p) \right] = 0 \quad (4.51)$$

$$\rho \partial_t v_i - \partial_j \tau_{ij} - \frac{\Delta t^2}{24} \partial_j \left[c_{ijkl} \partial_l \left(\frac{1}{\rho} \partial_p \tau_{kp} \right) \right] = 0 \quad (4.52)$$

Tais equações são válidas para o caso geral de meios anisotrópicos e heterogêneos e, como antes, correspondem a um esquema de diferenças finitas de quarta ordem no espaço e no tempo, uma vez que se discretizam as derivadas espaciais em quarta ordem e as temporais em segunda ordem. Assim, os termos tradicionais são discretizados utilizando os esquemas vistos anteriormente, havendo necessidade de discretizar apenas os termos adicionais, chamados de termos de correção. Para discretizar os termos de correção basta utilizar aproximações de segunda ordem, pois o mesmo argumento dado no caso acústico permanece válido. No Apêndice F são deduzidas as expressões 2D para a discretização destes termos no caso isotrópico. A dedução para o caso anisotrópico, embora trabalhosa, não apresenta maiores dificuldades. Além disso, como no caso acústico, a inclusão da fonte leva a novos termos de correção.

4.5 Aplicação da fonte sísmica

Nesta seção, serão discutidas questões acerca da fonte sísmica, no que se refere à discretização. No primeiro tópico, será abordado o tema da taxa de amostragem temporal e o Teorema da Amostragem. No segundo tópico, aborda-se como discretizar a expressão da fonte sísmica nos esquemas numéricos de campo único para que o efeito seja idêntico ao efeito da aplicação da fonte no esquema de campo duplo correspondente.

4.5.1 Amostragem da fonte

Quando se trabalha com modelos discretos para representar o contínuo, existem certas condições que a fonte sísmica deve satisfazer para que a mesma seja uma boa representação do sinal original. Neste sentido, o Teorema da Amostragem fornece um importante resultado. Para amostrar uma função com intervalo de tempo de amostragem t_A , apenas será possível representar a função corretamente até a frequência f_M máxima (YILMAZ, 2001a), também conhecida como frequência de Nyquist, dada por

$$f_M = \frac{1}{2t_A}. \quad (4.53)$$

Assim, para representar uma fonte sísmica de frequência de corte dada, por exemplo, por $f_{corte} = 125\text{Hz}$, o intervalo de tempo máximo de amostragem que deverá ser utilizado é

$$t_A = \frac{1}{2f_M} = \frac{1}{250} = 4\text{ms}. \quad (4.54)$$

4.5.2 Expressões discretas

Considerando-se uma fonte sísmica com um determinado efeito físico, a aplicação da fonte sísmica no esquema numérico deve ser feita de forma criteriosa para que se obtenha o efeito físico desejado. Dois aspectos principais devem ser observados, quais sejam (a) a expressão da fonte na equação diferencial considerada (termo não homogêneo) e (b) a discretização desta expressão.

Em relação ao tópico (a), a questão foi discutida em detalhes na seção 2.5.1. Por exemplo, considere um problema acústico em que se injeta massa i_V dada pela função gaussiana, com densidade de força externa \vec{f} nula. Na equação da onda de pressão, o termo fonte aparece como a derivada segunda de i_V em relação ao tempo multiplicado pela constante de compressão adiabática. Já no sistema de primeira ordem em pressão e velocidade, o termo fonte aparece como a derivada primeira de i_V em relação ao tempo também multiplicada pela constante de compressão adiabática κ . Portanto, para ter o mesmo efeito físico de injeção de massa, a princípio,

é necessário considerar a expressão dada pela derivada segunda da gaussiana, no primeiro caso, e pela derivada primeira no segundo caso. São apresentadas todas as expressões “analíticas” da fonte para cada uma das equações diferenciais tratadas neste trabalho, na Tab. 2.1 (página 35) do capítulo 2 de teoria.

Em relação ao tópico (b), ou seja de discretização da expressão da fonte, o problema pode ser dividido em dois novamente. A primeira parte é relativa a discretização da fonte quando há derivadas espaciais do termo fonte no esquema de campo único (como ocorre na onda de velocidade) e a segunda é referente às discretizações das derivadas temporais. De forma geral, a discretização da fonte irá diferir de acordo com a equação diferencial discretizada e de acordo com o esquema numérico adotado. Na verdade, para que um esquema de campo duplo e um esquema de campo único sejam inteiramente equivalentes é necessário utilizar a mesma expressão analítica para a fonte nos dois esquemas e, em caso de derivadas extras, espaciais ou temporais, tomá-las numericamente na malha considerada utilizando os operadores adequados.

Para tornar claro este ponto, considere o mesmo exemplo mencionado no início desta seção. A equação diferencial da onda de velocidades neste caso é dada por

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - b \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\kappa \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] \right\} = -b \frac{\partial(\kappa \partial_t i_V)}{\partial x} \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - b \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\kappa \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] \right\} = -b \frac{\partial(\kappa \partial_t i_V)}{\partial z}, \quad (4.56)$$

onde b é o inverso da densidade. Para que a fonte tenha exatamente o mesmo efeito da fonte de campo duplo do esquema correspondente (dado no apêndice D, D.2.1), o esquema de campo único em segunda ordem de aproximação deve ser discretizado, levando em conta o termo fonte, na malha intercalada da forma usual, resultado em

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} + U_{i,j}^{k-\frac{3}{2}} &= b_{i,j} \frac{\Delta t^2}{h^2} \left[\kappa_{i+\frac{1}{2},j} \left(U_{i+1,j}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \kappa_{i-\frac{1}{2},j} \left(U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i-1,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \kappa_{i+\frac{1}{2},j} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) - \kappa_{i-\frac{1}{2},j} \left(V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right] \\ &\quad - b_{i,j} \frac{\Delta t^2}{h} \left(\kappa_{i+\frac{1}{2},j} \partial_t \mathbf{i}_{\mathbf{V}_{i+\frac{1}{2},j}}^{k-\frac{1}{2}} - \kappa_{i-\frac{1}{2},j} \partial_t \mathbf{i}_{\mathbf{V}_{i-\frac{1}{2},j}}^{k-\frac{1}{2}} \right) \\ V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - 2V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} + V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{3}{2}} &= b_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t^2}{h^2} \left[\kappa_{i+\frac{1}{2},j+1} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \kappa_{i+\frac{1}{2},j} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \kappa_{i+\frac{1}{2},j+1} \left(U_{i+1,j+1}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j+1}^{k-\frac{1}{2}} \right) - \kappa_{i+\frac{1}{2},j} \left(U_{i+1,j}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right] \\ &\quad - b_{i,j} \frac{\Delta t^2}{h} \left(\kappa_{i+\frac{1}{2},j+1} \partial_t \mathbf{i}_{\mathbf{V}_{i+\frac{1}{2},j+1}}^{k-\frac{1}{2}} - \kappa_{i+\frac{1}{2},j} \partial_t \mathbf{i}_{\mathbf{V}_{i+\frac{1}{2},j}}^{k-\frac{1}{2}} \right), \end{aligned}$$

onde $\partial_t i_{V,i,j}^k$ é a função dada pela derivada da gaussiana amostrada no tempo k aplicada no ponto i,j da malha. Repare que o termo fonte no esquema de campo duplo correspondente é dado também por $\partial_t i_V$ (sendo utilizada uma amostragem da derivada primeira da gaussiana analítica), de forma que, na expressão acima, deve-se utilizar a mesma expressão analítica. Observa-se ainda que as equações acima são um caso particular do esquema apresentado nas Eq. (4.3) e Eq. (4.4), com os elementos do tensor de elasticidade dados por $A = B = D = \kappa$ e $F = c_{55} = 0$, ou seja, no caso acústico. A fonte foi discretizada com o operador simples de derivada primeira de segunda ordem (dado seção 3.1), tendo sido discretizada no ponto correto tanto em espaço, como no tempo. Pelas expressões discretas mostradas acima, vê-se que a fonte necessita ser considerada nos pontos intercalados $i + 1/2, j$ (ou seja, nos pontos referentes a p da malha intercalada), e que sua área de influência não se restringe a um único ponto, mesmo no caso de fonte pontual. Assim, a fonte, aplicada no ponto $i_F + 1/2, j_F$, tem influência no ponto imediatamente a direita em $i_F + 1, j_F$ e à esquerda em i_F, j_F , na componente x da velocidade, e imediatamente abaixo em $i_F + 1/2, j_F + 1/2$ e acima $i_F + 1/2, j_F - 1/2$, na componente z da velocidade, como mostra a Fig. 4.1(a). No caso de aproximação de quarta ordem, é necessário utilizar mais quatro pontos, como mostra a Fig. 4.1(b), como pode ser facilmente verificado discretizando a fonte com o operador de quarta ordem.

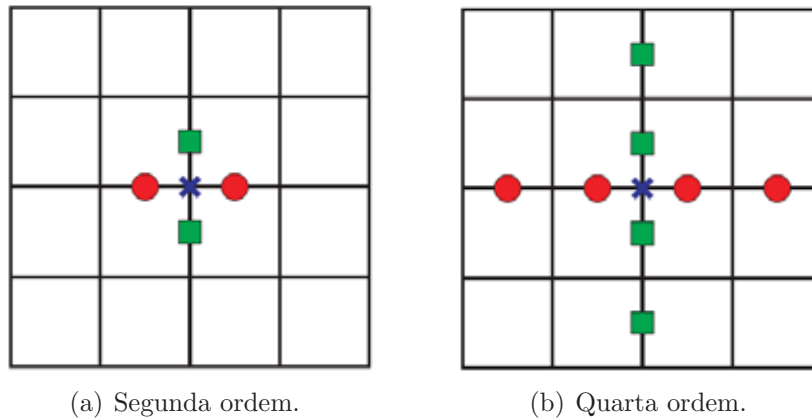


Figura 4.1: Pontos sob a influência da fonte para o esquema acústico em pressão na malha de Virieux, sendo os círculos relativos à U e os quadrados relativos à V . A posição de aplicação da fonte é dada pelos xis.

Em relação ao esquema de campo único para a equação da onda de pressão, deve-se tomar a mesma precaução. Na equação diferencial da onda de pressão, o termo fonte aparece como $\partial_t^2 i_V$. Entretanto, para que os efeitos da aplicação da fonte sejam iguais, ao invés de utilizar a expressão analítica desta derivada segunda, deve-se utilizar a mesma expressão analítica utilizada no esquema de campo duplo ($\partial_t i_V$) e derivá-la mais uma vez através do operador de diferença central no tempo. Como isto, pode-se mostrar que o efeito da fonte é o mesmo.

4.6 Condições de contorno e amortecimento

Em aplicações geofísicas, o meio considerado é, na maioria das vezes, semi-infinito, ou seja, a onda gerada pela fonte encontra uma região praticamente ilimitada (por toda a Terra) para se propagar estando restrita somente pela superfície da Terra. Por outro lado, quando se utiliza um método numérico de discretização de domínio para modelar tal fenômeno, há a necessidade de considerar apenas um domínio finito. Assim, em uma modelagem sísmica computacional, considera-se a região de interesse, truncando-se o domínio físico real, de forma que é necessário utilizar-se condições de contorno especiais (e, diga-se de passagem, artificiais) com o intuito de simular o meio infinito. Ou seja, ao utilizar estas condições artificiais, deseja-se que a onda incidente passe através das bordas sem gerar reflexão. Como se sabe, a aplicação de condições de contorno naturais ou essenciais leva a reflexões bem acentuadas (toda a energia é refletida). Outra condição de contorno que necessita ser utilizada é a condição de contorno para a superfície, como será discutido.

As condições especiais para simular os meios infinitos são chamadas de condições de contorno não reflexivas (CCNR) ou condições de contorno absorvedoras. Além das CCNR, outro recurso utilizado são as chamadas camadas de amortecimento, que serão apresentadas no próximo tópico. Uma CCNR ideal seria uma na qual não houvesse nenhuma reflexão nas bordas artificiais do modelo computacional, tal qual ocorre no problema idealizado. Entretanto, esta é uma área de pesquisa em aberto, não existindo, até o momento, uma condição de contorno que satisfaça 100 % a exigência de reflexão zero. Mas, algumas soluções têm sido propostas com o intuito de minimizar a reflexão através das bordas fictícias. Em relação à condição de contorno aplicada na superfície, será utilizada sempre a condição de contorno essencial (de Dirichlet), ou seja, com pressão prescrita, dada por $p = 0$, no caso acústico, e tensão $\tau_{ij} = 0$, no caso elástico.

No presente trabalho, é utilizada uma CCNR proposta por REYNOLDS (1978), baseada na equação *one-way* da onda acústica. Assim, se aplica uma decomposição da equação da onda unidimensional nas bordas, isto é,

$$\frac{d^2p}{dx^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{d}{dx} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) p = 0, \quad (4.57)$$

onde o primeiro termo da decomposição representa a onda se propagando para a direita e a segunda parte, a onda se propagando para a esquerda. O Método consiste, então, em utilizar como condição de contorno apenas a parcela de propagação associada à onda que sai do modelo. Neste sentido, na borda esquerda do modelo

considera-se a seguinte condição de contorno

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (4.58)$$

referente à propagação da onda da direita para a esquerda. Com isto, o coeficiente de reflexão vai a zero nesta borda, como discutido no referido artigo (no caso de incidência normal). A expressão acima pode ser discretizada usando diferença central e considerando-se pontos fictícios à esquerda do modelo. Outra possibilidade é utilizar, como foi feito neste trabalho, uma expressão em diferença progressiva, isto é, considerando os próprios pontos i do contorno um ponto $i + 1$ à direita. Assim, a expressão utilizada para esta borda foi

$$p_{i,j}^{k+1} = p_{i,j}^k + c \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{i+1,j}^k - p_{i,j}^k). \quad (4.59)$$

Expressões semelhantes podem ser deduzidas para as demais bordas. Na Fig. 4.2(a), é exemplificado o efeito da aplicação da CCNR de Reynolds para uma modelagem acústica. No caso elástico isotrópico, pode-se estender a idéia de Reynolds aplicando-se expressões semelhantes para as componentes normais das tensões elásticas, sendo o resultado satisfatório. Já para o caso anisotrópico geral, a extensão não é nada trivial, uma vez que a velocidade varia com a direção do raio.

Como foi mencionado, outras estratégias utilizadas para atenuar as reflexões indesejadas nas bordas do modelo constituem-se em aplicação de camadas de absorção como é o caso das camadas de amortecimento propostas em CERJAN *et al.* (1985), que, pode-se dizer, constituem-se no método mais simples de aplicação de camadas absorvedoras. Outro método muito popular é denominado *Perfectly Matched Layers* (PML), proposto originalmente em BERENGER (1994) para problemas de eletrodinâmica. Muitos trabalhos têm sido propostos nesta linha de PML, fazendo desta área uma das mais ativas da atualidade. No presente trabalho, quando possível, foram utilizadas camadas de amortecimento propostas em CERJAN *et al.* (1985). Esta zona de amortecimento é criada nos pontos próximos a borda do modelo. Em tais pontos o campo é multiplicado por um fator de decaimento exponencial ponto a ponto, o que reduz gradativamente a amplitude da onda ao se aproximar da borda do modelo, onde, por fim, é aplicada a CCNR de Reynolds. Na Fig. 4.2 abaixo, é apresentada uma modelagem acústica para um meio de três camadas homogêneas, onde se mostra o efeito combinado da aplicação de camadas de amortecimento com a CCNR (Fig. 4.2(a)) em comparação com a aplicação isolada da CCNR (Fig. 4.2(b)). Pode-se ver, que as reflexões nas bordas não são mais visíveis, uma vez que apresentam amplitude consideravelmente menor que as demais amplitudes presentes, demonstrando a eficiência do método.

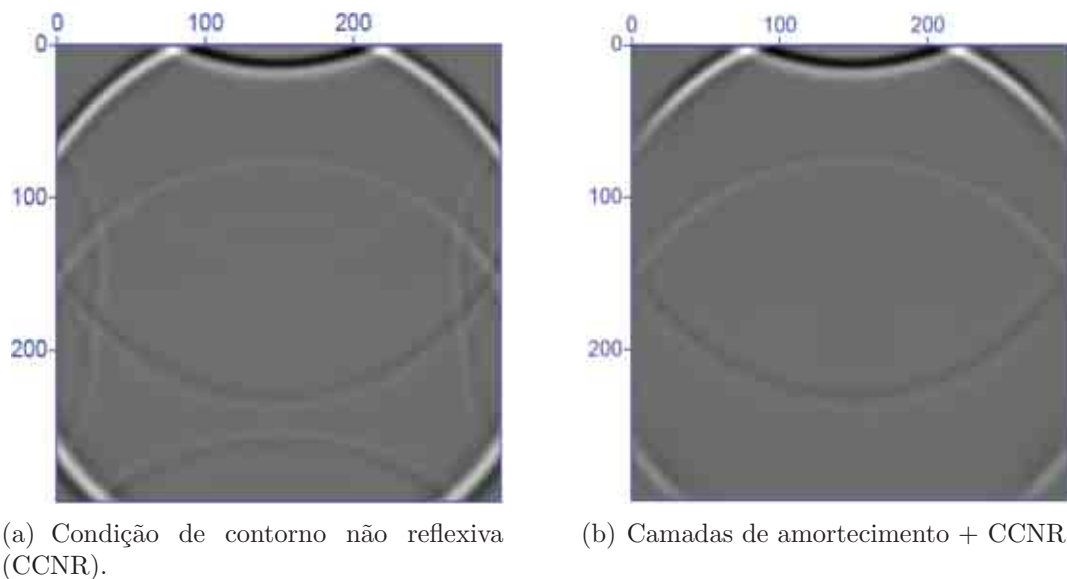


Figura 4.2: Modelagem acústica mostrando efeito da aplicação da CCNR e camadas de amortecimento aplicadas nas bordas (menos na superfície). Aplica-se em (a) as CCNR de Reynolds e em (b) as camadas de amortecimento mais CCNR de Reynolds.

Infelizmente a aplicação de camadas de amortecimento de Cerjan, ou mesmo a utilização de PML, pode levar a soluções que apresentem instabilidades (BÉCACHÉ *et al.*, 2003). No artigo citado, a autora mostra as condições para estabilidade no caso ortotrópico. Enfatiza-se que o tema de condições de contorno não reflexivas e camadas de absorção não é o foco deste trabalho, de forma que reporta-se a vasta bibliografia existente para maiores aprofundamentos e soluções mais efetivas para o caso anisotrópico, como por exemplo em APPELÖ e KREISS (2006).

4.7 Estabilidade e dispersão numéricas

4.7.1 Estabilidade numérica

Neste tópico, será tratado o tema da estabilidade e dispersão numérica dos esquemas propostos. Análises completas deste tipo no caso de esquemas heterogêneos e anisotrópicos constituem-se em um problema em aberto que foge ao escopo deste trabalho. Desta forma, a estabilidade numérica dos esquemas apresentada aqui será, conforme a maior parte da literatura sobre o tema, utilizando apenas resultados de estabilidade provenientes da teoria de estabilidade de von Neumann (VONNEUMANN e RICHTMYER, 1950). Sabe-se que a teoria de von Neumann não é válida para meios heterogêneos e anisotrópicos em geral, mas os resultados provenientes dela constituem-se em um ponto de partida valioso, utilizado por diversos autores.

Como foi mostrado na seção 4.3, os esquemas de campo único são equivalentes aos esquemas de campo duplo correspondentes. Desta forma, tais esquemas pos-

suem as mesmas propriedades de estabilidade e dispersão numérica. Primeiro, será discutida a estabilidade apenas para os esquemas de segunda ordem de aproximação no tempo, sendo deixada para depois algumas considerações sobre os esquemas de quarta ordem.

A análise de von Neumann (para um meio infinito e homogêneo) para o caso isotrópico fornece os seguintes resultados de estabilidade para a malha intercalada padrão de Virieux com aproximação de segunda ordem no espaço (VIRIEUX, 1986)

$$c_P \frac{\Delta t}{h} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (4.60)$$

em meios bidimensionais, e

$$c_P \frac{\Delta t}{h} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (4.61)$$

em meios tridimensionais, onde c_P é a velocidade de propagação da onda P . Para aproximação de quarta ordem no espaço (LEVANDER, 1988), tem-se¹,

$$c_P \frac{\Delta t}{h} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(9/8 + 1/24)} = \frac{6}{7} \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (4.62)$$

em meios bidimensionais, e

$$c_P \frac{\Delta t}{h} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{(9/8 + 1/24)} = \frac{6}{7} \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (4.63)$$

em meios tridimensionais. De forma geral, o critério de estabilidade de esquemas que utilizam a malha de Virieux, em qualquer $(2n)$ -ésima ordem de aproximação espacial, pode ser escrito como (SAENGER *et al.*, 2000)

$$c_P \frac{\Delta t}{h} \leq \left(\sqrt{N} \sum_{i=1}^n d_i \right)^{-1}, \quad (4.64)$$

onde N é a dimensão do espaço e d_i são os coeficientes da aproximação espacial de diferenças finitas, que no caso do operador de Levander são $d_1 = 9/8$ e $d_2 = 1/24$, como mostra a Eq. (3.6).

Como comparação com os esquemas propostos, baseados na malha de Virieux e na malha rotacionada, apresenta-se a seguir o resultado de estabilidade para o esquema de Kelly (KELLY *et al.*, 1976). Tal esquema (apêndice D) discretiza a equação da onda de deslocamentos utilizando uma malha simples, possuindo o seguinte critério de estabilidade

$$\frac{\Delta t}{h} \leq \frac{1}{\sqrt{c_P^2 + c_S^2}}, \quad (4.65)$$

¹há um erro tipográfico na expressão do artigo original, Eq. (7)

onde c_S é a velocidade de propagação da onda S . Repare que tal critério é menos restritivo que o critério para a malha de Virieux, uma vez que $c_S < c_P$. Entretanto, como será visto no capítulo 5 de exemplos, tal esquema apresenta problemas na aplicação da fonte pontual explosiva, gerando uma onda S numérica não física para todos os materiais. Além disso, no esquema de Kelly a relação de dispersão é altamente dependente da razão de Poisson, de forma que suas respostas se tornam muito ruins para quando este parâmetro de aproxima de $\nu = 0,5$, tornando o esquema muito mais restritivo que aqueles que utilizam a malha de Virieux. Por exemplo, em meios acústicos (como a água), que possuem módulo de cisalhamento $\mu = 0$, o parâmetro de Poisson é $\nu = 0,5$ (ver apêndice B), de forma que o esquema apresenta uma resposta fortemente dispersiva (como mostrado no capítulo 5 de exemplos).

Agora será visto o caso da malha rotacionada, a segunda malha utilizada neste trabalho. A análise de von Neumann neste caso leva ao seguinte resultado (SAENGER *et al.*, 2000)

$$c_P \frac{\Delta t}{h} \leq \left(\sum_{i=1}^n d_i \right)^{-1}, \quad (4.66)$$

válido para meios bi- ou tri-dimensionais.

É importante observar que, para meios heterogêneos e não infinitos, a análise de von Neumann não é mais válida. Nesta caso a análise de estabilidade torna-se muito complexa, uma vez que passam a existir diversos modos de onda (como por exemplo ondas de Rayleigh). No trabalho de HANEY (2007), é proposta a generalização da análise de von Neumann para meios heterogêneos aplicada ao caso acústico. Estas análises fogem ao escopo deste trabalho e, para maiores informações, deve-se recorrer diretamente à literatura especializada. Embora nem sempre seja verdade, é razoável considerar-se que valem os critérios de estabilidade dados acima, considerando-se ponto a ponto as propriedades do modelo. Neste sentido, definem-se os problemas dos coeficientes congelados (do inglês *frozen coefficient problems*) como aqueles em que as propriedades do modelo são consideradas constantes e iguais a cada um dos valores das propriedades presentes no modelo em questão. Assim, se cada problema de coeficiente congelado é estável, o problema de coeficientes variáveis é também estável (STRIKWERDA, 2004). Portanto, basta verificar o critério de estabilidade para a velocidade de onda P da camada com maior velocidade para garantir a estabilidade em todo o modelo.

Para os casos de modelagens com anisotropia, como chamou a atenção CRASE (1990), não são encontradas análises de estabilidade na literatura. Um exceção é o trabalho de VERES (2010), onde é empreendida uma análise de estabilidade tipo von Neumann para o esquema ortotrópico na malha de Virieux. Entretanto, é comum empregar-se os critérios de estabilidade dados acima, considerando-se a maior

velocidade presente no modelo, como é feito por exemplo no trabalho de FARIA e STOFFA (1994). Assim, por exemplo, no caso de meios com isotropia vertical transversa (VTI), geralmente as maiores velocidades se verificam na direção horizontal, de forma que deve-se utilizar no critério de estabilidade a velocidade da onda quase-P na direção horizontal da camada de maior velocidade. Para esquemas de ordens superiores que utilizam a malha de Virieux, CRASE (1990), em um trabalho de congresso, realiza uma análise de estabilidade tipo von Neumann. GUSTAFSSON e WAHLUND (2005) realiza uma análise de estabilidade baseada no método energético para o caso acústico. Estas análises não serão reproduzidas aqui, devendo ser buscadas diretamente nas fontes.

4.7.2 dispersão numérica

Em relação às propriedades de dispersão numérica (apêndice C) dos esquemas esquemas propostos, cabem apenas algumas observações rápidas. O interesse aqui não é investigar o assunto em profundidade, mas apenas estabelecer critérios simples para que os resultados das modelagens numéricas sejam acurados, seguindo a mesma idéia discutida no apêndice C (seção C.4).

Dada a igualdade dos esquemas de campo único e de campo duplo em cada uma das malha utilizadas neste trabalho, é evidente que as relações de dispersão destes esquemas serão as mesmas. Tais relações não serão escritas explicitamente aqui, pois se está interessado apenas em saber por exemplo qual o número de pontos suficiente para evitar o problema de dispersão numérica nos esquemas propostos. Neste sentido, é importante ressaltar apenas que os esquemas na malha rotacionada apresentam relação de dispersão rotacionada na direção diagonal das células da malha e amplificada de um fator \sqrt{n} , onde n é a dimensão do espaço (SAENGER *et al.*, 2000). Com isto, as direções de máxima dispersão numérica se encontram rotacionadas também. Claro que isto se deve ao fato das discretizações serem feitas na direção diagonal na malha intercalada rotacionada, sendo esta direção \sqrt{n} maior que o espaçamento da malha. Para solucionar a maior dispersividade dos esquemas rotacionados, obtendo-se assim, soluções com o mesmo grau de dispersão numérica que os esquemas na malha de Virieux, deve-se reduzir, portanto, o espaçamento da malha por um fator \sqrt{n} .

4.8 Armazenamento e custo computacionais

É importante comparar o custo computacional e quantidade de memória necessária para a implementação de cada esquema proposto para, assim, melhor avaliar a viabilidade de sua utilização em uma determinada situação prática. Entretanto,

uma avaliação completa do tempo de processamento de cada formulação, envolvendo questões de otimização computacional, foge ao escopo deste trabalho. O que será feito nesta seção é comparar o número de operações de ponto flutuante e endereçamentos indiretos em cada um dos esquemas implementados, englobando todos os esquemas da Tab. 4.1, como foram programados nas rotinas desenvolvidas.

Enfatiza-se que nenhuma otimização das formulações é feita, nos resultados apresentados na Tab 4.1, tendo sido contadas as operações diretamente nas rotinas dos operadores. Neste sentido, é importante mencionar que devido à heterogeneidade da programação dos diferentes operadores, nem sempre os resultados apresentados refletem com exatidão o custo de cada operador. Por exemplo, um simples reagrupamento e reutilização de termos já faz com que o número de operações e acessos indiretos se reduzam, tornando os esquemas mais rápidos. Entretanto, enfatiza-se que tal trabalho não foi realizado de forma homogênea nas rotinas desenvolvidas neste trabalho.

Como exemplo de um trabalho simples que pode ser utilizado para melhorar o desempenho dos operadores implementados, considere o esquema tradicional para equação acústica da onda (apêndice D), escrito como

$$p_{i,j}^{k+1} = 2p_{i,j}^k - p_{i,j}^{k-1} + \delta c_{i,j}^2 \left[16(p_{i-1,j}^k + p_{i+1,j}^k + p_{i,j-1}^k + p_{i,j+1}^k) - 60p_{i,j}^k - p_{i+2,j}^k - p_{i-2,j}^k - p_{i,j+2}^k - p_{i,j-2}^k \right] \quad (4.67)$$

onde δ é dado por

$$\delta = \frac{\Delta t^2}{12h^2} \quad (4.68)$$

e c^2 é o quadrado da velocidade do meio, sendo ambos calculados fora do loop uma única vez. Conta-se, então, o número de operações de soma (ou subtração), produto (ou divisão) e o número total de operações (*floating point operation* ou *flops*), além do número de vezes que um vetor é acessado na memória (endereçamento indireto - EI). Em relação ao EI, chama-se a atenção para o fato de que este número deve ser verificado baseado no *stencil* do esquema e não no número de vezes em que cada ponto do stencil aparece nas equações discretas, uma vez que pode-se definir variáveis locais para cada ponto nas primeiras linhas do *loop*. Além disso, contas que são realizadas mais de uma vez podem igualmente ser definidas no início, otimizando assim o número de operações realizadas.

Tabela 4.1: Esquemas implementados e número de operações requeridas no caso bidimensional (2D). Np é o número de produtos, Ns é o número de somas, $flops$ é o número total de operações de ponto flutuante; a quantidade de memória utilizada por número de pontos da malha é separada na memória MC utilizada para os campos de onda, MP para as propriedades do meio e MT para a quantidade total; e EI é o número de endereçamentos indiretos necessários.

Esquema	ordem	Np	Ns	$Ntot$	MC	MP	MT	EI
	2E2T	4	6	10	2	1	3	9
Onda acústica clássica	4E2T	7	10	15	2	1	3	12
	4E4T	13	24	35	2	1	3	16
Onda acústica het. suav. (Cohen)	4E2T	38	45	83	2	2	4	50
	2E2T	6	8	14	3	2	5	17
Campo duplo acústico	4E2T	11	16	26	3	2	5	25
	4E4T	98	98	196	3	2	5	100
Esquema de Kelly	2E2T	46	50	96	4	3	7	72
Campo duplo elástico VIR	2E2T	17	27	41	5	5	10	44
	4E2T	39	45	84	5	5	10	64
Campo duplo elástico ROT	2E2T	16	34	50	5	7	12	43
Campo único acústico	2E2T	11	14	25	2	2	4	20
	4E2T	35	42	77	2	2	4	62
(ρ constante)	4E2T	11	14	25	2	1	3	16
Campo único elástico VIR	2E2T	52	28	80	4	5	9	70
Campo único elástico ROT	2E2T	64	94	158	4	7	11	102

Por exemplo, considere o esquema de Virieux para o caso ortotrópico escrito de forma direta

$$\begin{aligned}
U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} &= U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} + b_{i,j} \frac{\Delta t}{h} \left(X_{i+\frac{1}{2},j}^k - X_{i-\frac{1}{2},j}^k + T_{i,j+\frac{1}{2}}^k - T_{i,j-\frac{1}{2}}^k \right) \\
V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} &= V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} + b_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{h} \left(T_{i+1,j+\frac{1}{2}}^k - T_{i,j+\frac{1}{2}}^k + Z_{i+\frac{1}{2},j+1}^k - Z_{i+\frac{1}{2},j}^k \right) \\
X_{i+\frac{1}{2},j}^{k+1} &= X_{i+\frac{1}{2},j}^k + A_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{h} \left(U_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + B_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{h} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\
Z_{i+\frac{1}{2},j}^{k+1} &= Z_{i+\frac{1}{2},j}^k + D_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{h} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + B_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{h} \left(U_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\
T_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} &= T_{i,j+\frac{1}{2}}^k + F_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{h} \left(U_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + F_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{h} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right).
\end{aligned}$$

Escrito desta forma, serão contados o número de operações e de endereçamentos indiretos utilizados. Para cada equação em velocidade, são utilizadas 4 somas e 2 produtos, além de 7 endereçamentos indiretos (EI), totalizando 8 somas, 4 produtos e 14 EI nas duas primeiras equações. Para cada uma das equações em tensões, obtém-se 4 somas, 4 produtos e 8 EI, totalizando 12 somas, 12 produtos e 24 EI para as 3 últimas equações. Portanto o total para as 5 equações é de 20 somas, 16 produtos e 38 EI. Por outro lado, a memória requerida para este esquema, uma vez que necessita-se armazenar os campos apenas em um instante de tempo para a marcha no tempo, é de 5 campos (2 velocidades e 3 tensões) e mais 5 propriedades (4 delas referentes ao tensor de elasticidade e 1 referente à densidade), totalizando em 10 o número de campos e propriedades necessárias. Isto significa uma memória requerida de $10N$ (onde N é o número de pontos da malha vezes 4 bytes, para precisão simples, ou vezes 8, para precisão dupla).

Reescrevendo então as equações discretas dadas acima, segundo os critérios de reagrupamento e otimização discutidos, tem-se

$$\begin{aligned}
U0 &= U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \\
V0 &= V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \\
DU &= U_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - U0 \\
DV &= V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \\
T0 &= T_{i,j+\frac{1}{2}}^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} &= U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} + b_{i,j} \frac{\Delta t}{h} \left(X_{i+\frac{1}{2},j}^k - X_{i-\frac{1}{2},j}^k + T0 - T_{i,j-\frac{1}{2}}^k \right) \\
V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} &= V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} + b_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{h} \left(T_{i+1,j+\frac{1}{2}}^k - T0 + Z_{i+\frac{1}{2},j+1}^k - Z_{i+\frac{1}{2},j}^k \right) \\
X_{i+\frac{1}{2},j}^{k+1} &= X_{i+\frac{1}{2},j}^k + \frac{\Delta t}{h} \left(A_{i+\frac{1}{2},j} DU + B_{i+\frac{1}{2},j} DV \right) \\
Z_{i+\frac{1}{2},j}^{k+1} &= Z_{i+\frac{1}{2},j}^k + \frac{\Delta t}{h} \left(B_{i+\frac{1}{2},j} DU + D_{i+\frac{1}{2},j} DV \right) \\
T_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} &= T_{i,j+\frac{1}{2}}^k + F_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{h} \left(U_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - U0 + V0 - V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right).
\end{aligned}$$

Contando-se as operações, obtém-se um total de 18 somas, 14 produtos e 32 El. Assim, os resultados para todos os esquemas implementados neste trabalho, escritos com simplificações como as mostradas para o exemplo acima, são mostrados na Tab. 4.1.

Da mesma forma, o esquema de campo único correspondente, dado por

$$\begin{aligned}
U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} + U_{i,j}^{k-\frac{3}{2}} &= b_{i,j} \frac{\Delta t^2}{h^2} \left[A_{i+\frac{1}{2},j} \left(U_{i+1,j}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right. \\
&\quad \left. - A_{i-\frac{1}{2},j} \left(U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i-1,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right. \\
&\quad \left. + B_{i+\frac{1}{2},j} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) - B_{i-\frac{1}{2},j} \left(V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right. \\
&\quad \left. + F_{i,j+\frac{1}{2}} \left(U_{i,j+1}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) - F_{i,j-\frac{1}{2}} \left(U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j-1}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right. \\
&\quad \left. + F_{i,j+\frac{1}{2}} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) - F_{i,j-\frac{1}{2}} \left(V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right] \\
V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - 2V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} + V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{3}{2}} &= b_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t^2}{h^2} \left[F_{i+1,j+\frac{1}{2}} \left(U_{i+1,j+1}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i+1,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right. \\
&\quad \left. - F_{i,j+\frac{1}{2}} \left(U_{i,j+1}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right. \\
&\quad \left. + F_{i+1,j+\frac{1}{2}} \left(V_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) - F_{i,j+\frac{1}{2}} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right. \\
&\quad \left. + D_{i+\frac{1}{2},j+1} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) - D_{i+\frac{1}{2},j} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right. \\
&\quad \left. + B_{i+\frac{1}{2},j+1} \left(U_{i+1,j+1}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j+1}^{k-\frac{1}{2}} \right) - B_{i+\frac{1}{2},j} \left(U_{i+1,j}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right],
\end{aligned}$$

pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}
B1 &= B_{i+\frac{1}{2},j} & ; & & F1 &= F_{i,j+\frac{1}{2}} \\
U1 &= U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} & ; & & U2 &= U_{i+1,j+1}^{k-\frac{1}{2}} & ; & & U3 &= U_{i+1,j}^{k-\frac{1}{2}} & ; & & U4 &= U_{i,j+1}^{k-\frac{1}{2}} \\
V1 &= V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} & ; & & V2 &= V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} & ; & & V3 &= V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} & ; & & V4 &= V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2U1 + U_{i,j}^{k-\frac{3}{2}} &= b_{i,j} \frac{\Delta t^2}{h^2} \left[A_{i+\frac{1}{2},j} (U3 - U1) - A_{i-\frac{1}{2},j} \left(U1 - U_{i-1,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right. \\
&\quad \left. + B1 (V1 - V2) - B_{i-\frac{1}{2},j} (V3 - V4) \right. \\
&\quad \left. + F1 (U4 - U1 + V1 - V3) - F_{i,j-\frac{1}{2}} \left(U1 - U_{i,j-1}^{k-\frac{1}{2}} + V2 - V4 \right) \right] \\
V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - 2V1 + V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{3}{2}} &= b_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t^2}{h^2} \left[F_{i+1,j+\frac{1}{2}} \left(U2 - U3 + V_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V1 \right) \right. \\
&\quad \left. - F1 (U4 - U1 + V1 - V3) + D_{i+\frac{1}{2},j+1} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - V1 \right) - D_{i+\frac{1}{2},j} (V1 - V2) \right. \\
&\quad \left. + B_{i+\frac{1}{2},j+1} (U2 - U4) - B1 (U3 - U1) \right].
\end{aligned}$$

Desta forma, tal esquema apresenta o numero total de 34 somas, 18 produtos e 38 EI. Isto significa 30 % a mais de operações que o esquema de campo duplo correspondente e 20 % a mais de endereçamentos indiretos. Entretanto, uma vantagem do esquema de campo único é que a memória requerida para o armazenamento dos campos de propagação se reduz. Para tal esquema, pode-se verificar que é necessário armazenar 1 campo a menos, ou seja, 4 campos de velocidade (2 para cada componente), uma vez que tal esquema necessita armazenar 2 instantes de tempo para a marcha. Em três dimensões está diferenças aumenta ainda mais.

4.9 Aspectos importantes para a comparação entre os esquemas

Neste trabalho, para comparar os diferentes esquemas numéricos, foram tomadas algumas precauções importantes. Tanto nos esquemas com malha intercalada quanto nos esquemas com malha simples, além da correta aplicação da fonte acústica (como descrito na seção 4.5), é necessário utilizar a mesma malha com as propriedades definidas na mesma posição, bem como os campos que se deseja comparar considerados na mesma posição, conforme discutido nos próximos parágrafos.

Como foi visto, os esquemas de campo único fornecem a mesma resposta que os esquemas de campo duplo correspondentes. Mas para que a resposta seja igual, de fato, é necessário considerar-se a mesma malha de propriedades, bem como as mesmas médias de propriedades quando estas forem necessárias. Isto porque, em diferenças finitas, os modelos de entrada são dados geralmente em pontos de uma malha simples. Para resolver, por exemplo, um problema isotrópico numericamente utilizando a malha de Virieux, escolhendo calcular as tensões normais nos pontos da malha (i,j) (onde o modelo de entrada é dado, ou seja, os parâmetros de Lamé e a densidade de massa), é necessário interpolar o parâmetro μ nos pontos intermediários $(i+1/2,j+1/2)$, bem como a densidade ρ nos pontos $(i+1/2,j)$ e $(i,j+1/2)$. Assim, ao comparar o esquema de campo único com o esquema de campo duplo de Virieux,

é necessário utilizar as mesmas médias para que os resultados coincidam.

Por outro lado, ao comparar esquemas que utilizam malhas diferentes, como é o caso da malha rotacionada e da malha de Virieux, os próprios campos são calculados em posições diferentes. Assim, escolhendo os pontos (i,j) da malha como locais onde são calculadas as tensões na malha rotacionada, as componentes das velocidades são calculadas em $(i + 1/2, j + 1/2)$, ou seja, em pontos diferentes dos que se utiliza na malha de Virieux. Portanto, para uma comparação direta dos campos de velocidades entre um esquema não é possível diretamente. Entretanto, pode-se interpolar os campos (depois de propagados) na posição de interesse de forma a possibilitar a comparação.

Capítulo 5

Exemplos e Aplicações

Neste capítulo, são apresentados diversos exemplos e aplicações utilizando-se as formulações numéricas desenvolvidas e implementadas neste trabalho, sejam as propostas, sejam as conhecidas da literatura. O primeiro e mais importante objetivo destas modelagens é comparar os esquemas de campo único propostos, tanto na malha de Virieux como na malha rotacionada, com os esquemas de campo duplo clássicos equivalentes. Como foi visto, tais esquemas devem fornecer a mesma resposta nas modelagens em geral, como será mostrado nos exemplos, em especial da seção 5.3 (modelo de camadas) e na seção 5.4 (modelo Marmousi 2).

Assim, o principal objetivo deste capítulo é a comparação direta entre os esquemas de campo único e os de campo duplo correspondentes e não a avaliação completa do comportamento numérico das diferentes formulações, trabalho este que pode ser encontrado na literatura especializada no caso dos esquemas de campo duplo. Neste sentido, os esquemas de campo único incorporam as características numéricas dos esquemas de campo duplo correspondentes nas mais diversas situações, dada a equivalência numérica entre eles, como ficará claro com os exemplos apresentados. Ressalta-se ainda que as formulações propostas serão comparadas também com as formulações implementadas provenientes da literatura, para os diversos casos, bem como com as formulações de quarta ordem no tempo implementadas.

Antes dos exemplos propriamente ditos, na próxima seção faz-se um sumário de todos os esquemas implementados neste trabalho. Nas demais seções, são apresentados os exemplos e aplicações geofísicas. Especificamente, na seção 5.2, modela-se a propagação da onda em diferentes materiais homogêneos para verificar a assinatura da fonte explosiva, objetivando-se demonstrar a equivalência entre os diferentes esquemas, desde que tais fontes sejam aplicadas corretamente, como descrito na seção 4.5. Na seção 5.3, serão comparadas as formulações de campo único com as formulações de campo duplo correspondentes, para o caso de um modelo heterogêneo de camadas horizontais. Na seção seguinte, serão avaliados os resultados provenientes do modelo complexo Marmousi 2.

5.1 Sumário dos esquemas implementados

Para facilitar a referência ao longo do capítulo e ao mesmo tempo dar uma visão geral das formulações desenvolvidas, na Tab. 5.1 são mostrados os diferentes esquemas numéricos implementados neste trabalho. Em tal compilação são dadas a descrição das diferentes formulações, as diferentes ordens de aproximação espacial e temporal implementadas, bem como abreviaturas utilizadas para referência rápida a cada esquema ao longo deste capítulo (por exemplo nas legendas das figuras).

Tabela 5.1: Sumário dos esquemas implementados. A ordem de aproximação é dada no formato $nEmT$, onde n e m são as ordens de aproximação de diferenças finitas, respectivamente, para o espaço e o tempo. Os códigos apresentados serão utilizados para referenciar cada esquema ao longo deste capítulo.

n	Formulação	ordem	código
1	Eq. da onda acústica tradicional (densidade constante)	2E2T	AT-2E2T
		4E2T	AT-4E2T
		4E4T	AT-4E4T
2	Eq. da onda acústica com suavização (para densidade variável, segundo Cohen)	4E2T	AC-4E2T
		4E4T	AC-4E4T
3	Eq. da onda elástica em velocidade (segundo Kelly)	2E2T	EK-2E2T
4	Eq. da onda elástica em velocidade com anisotropia VTI (extensão de Kelly)	2E2T	EOK-2E2T
5	Eq. de campo duplo acústica	2E2T	ACD-2E2T
		4E2T	ACD-4E2T
		4E4T	ACD-4E4T
6	Eq. de campo duplo elástico isotrópico (malha de Virieux)	2E2T	ECD-2E2T
		4E2T	ECD-4E2T
7	Eq. de campo duplo elástico com anisotropia ortotrópica (malha de Virieux)	2E2T	EOCD-2E2T
		4E2T	EOCD-4E2T
8	Eq. de campo duplo elástico com anisotropia geral (malha rotacionada)	2E2T	EGCD-2E2T
		4E2T	EGCD-4E2T
9	Eq. de campo único acústico	2E2T	ACU-2E2T
		4E2T	ACU-4E2T
10	Eq. de campo único elástico isotrópico	2E2T	ECU-2E2T
		4E2T	ECU-4E2T
11	Eq. de campo único elástico com anisotropia ortotrópica (malha de Virieux)	2E2T	EOCU-2E2T
12	Eq. de campo único elástico com anisotropia geral (malha rotacionada)	2E2T	EGCU-2E2T

Destaca-se que, das formulações implementadas, as quatro últimas são propostas originais deste trabalho, sendo as formulações de 1 a 8 provenientes da literatura. Destes últimos, faz-se uma observação em relação ao esquema de número 4, pois o mesmo é uma extensão direta do esquema original de Kelly (apresentada no apên-

dice D) para o caso de anisotropia ortotrópica (VTI, em 2D), que, como foi visto, é imediata — bastando-se substituir as componentes do tensor de elasticidade isotrópico pelas componentes mais gerais do tensor de elasticidade ortotrópico (a forma das equações isotrópica e ortotrópica é a mesma). Tanto quanto tem notícia o autor deste trabalho, não há artigos publicados com esta extensão, o que a tornaria inédita.

As demais formulações (9-12) são esquemas originalmente desenvolvidos, denominados de esquemas de campo único. Deve-se fazer uma ressalva ao esquema de campo único isotrópico. Tal esquema é equivalente ao esquema proposto em LUO e SCHUSTER (1990), denominado de *Parsimonious*, embora desenvolvido por um método geral e diferente do citado artigo. Em tal artigo, é feita uma substituição direta das variáveis de tensão nas equações envolvendo tensões e deslocamentos, de forma a eliminar a necessidade de armazenamento da tensão no esquema proposto. Na prática, portanto, leva ao mesmo resultado obtido aqui no caso do esquema de campo único em deslocamentos para o caso isotrópico. Outra diferença importante é que não é feita nenhuma consideração a respeito da aplicação da fonte (que será discutida aqui na seção 5.2), nem os autores citados mencionam a equivalência entre o esquema em deslocamento e o esquema em velocidade.

Neste sentido, a forma como o esquema de campo único para o caso isotrópico é apresentado no presente trabalho, diferente do artigo de LUO e SCHUSTER (1990), torna claro que o mesmo é similar ao esquema de Kelly (KELLY *et al.*, 1976), diferindo deste em virtude de ser discretizado completamente na malha intercalado, seguindo o método descrito na última seção do capítulo 3. Assim, embora o esquema de Kelly aproxime as mesmas equações (equação da onda de deslocamentos), as componentes deste deslocamento são discretizadas na mesma posição do espaço no referido esquema, sendo, em consequência, as aproximações de diferenças finitas utilizadas para as derivadas espaciais tomadas em uma malha simples, no caso de derivadas do tipo $\partial x(f\partial x U)$, e em uma malha intercalado, no caso de derivadas cruzadas, como pode ser visto, respectivamente, na Eq. D.29 e Eq. D.30 apresentadas no apêndice D. No mais, como visto, o esquema de campo único fornece boas respostas para meios com quaisquer razões de Poisson, assim como o *Parsimonious*, diferente do esquemas de Kelly citado, que gera respostas ruins como será mostrado na próxima seção.

Todos os esquemas de campo único elásticos aqui propostos discretizam a equação da onda (de segunda ordem) de deslocamentos (ou de velocidades) na malha intercalada, com o método visto em detalhes nos capítulos anteriores. No caso de anisotropia até ortotrópica (incluindo o caso isotrópico), as equações são discretizadas utilizando-se a malha de Virieux, enquanto que, no caso de anisotropia geral, são discretizadas na malha rotacionada. Ressalta-se mais uma vez que uma vantagem

dos esquemas de campo único implementados é que eles apresentam estabilidade para meios com qualquer razão de Poisson (o que inclui água), possuindo propriedades de estabilidade e dispersão numérica idênticas a das formulações de campo duplo correspondentes, sendo a quantidade de memória requerida menor (equivalente ao esquema de Kelly). Em relação ao custo computacional, embora a princípio ele seja maior que o dos esquemas intercalados para o sistema de primeira ordem (de campo duplo), uma programação cuidadosa pode diminuir tais custos, aproximando-os do custo dos esquemas de campo duplo.

Já o esquema de campo único acústico discretiza a equação da onda de segunda ordem em pressão, válida para densidade variável. A razão de se utilizar a pressão e não a velocidade é por economia de memória, uma vez que há apenas uma componente de pressão (pois é escalar), enquanto que há duas (caso 2D) ou três componentes (caso 3D) no caso de velocidades ou deslocamentos. Entretanto, o método utilizado para a obtenção do esquema é exatamente o mesmo do que foi utilizado para o caso elástico. Como o caso acústico pode ser visto como um caso especial do caso isotrópico (ver apêndice B), foi empregada a malha de Virieux, bem como os mesmos operadores de derivadas de segunda ordem gerais nesta malha. Chama-se a atenção para o fato de que o esquema de campo único acústico resultante envolve apenas a consideração do campo de pressão na malha simples, sendo apenas as propriedades consideradas em pontos da malha intermediária. É importante mencionar ainda que, no artigo de COHEN e JOLY (1990), há uma expressão equivalente ao esquema proposta no presente trabalho para o caso de segunda ordem de aproximação no espaço (e no tempo). Já o esquema de quarta ordem no espaço da referido artigo é inteiramente diferente do proposto aqui, de forma que o esquema aqui proposto pode ser visto como uma alternativa, sendo por sua vez mais elegante, econômico e preciso que o do referido artigo, pois não necessita de suavização nem de estabilização.

5.2 Avaliação da equivalência da assinatura da fonte

O objetivo principal destes exemplos é verificar a aplicação da fonte sísmica nos diferentes esquemas implementados, em especial nos esquemas de campo único propostos em comparação com os de campo duplo correspondentes, comparando-se ainda com os demais esquemas implementados, provenientes da literatura. Como discutido ao longo do trabalho, a fonte é aplicada visando produzir o mesmo efeito físico nos diferentes esquemas. Assim, espera-se que os esquemas de campo único e os de campo duplo correspondentes apresentem exatamente a mesma resposta, dada

a igualdade entre eles (conforme discutido na seção 4.3).

Para verificar a assinatura da fonte em diferentes meios, são realizadas modelagens com diferentes tipos de meios homogêneos, sendo os parâmetros numéricos utilizados nas modelagens dados na Tab. 5.2, que obedecem aos critérios de estabilidade e não-dispersão numérica. A apresentação dos resultados é dividida, de acordo

Tabela 5.2: Parâmetros utilizados nas modelagens.

nome	valor	significado / unidade
Δt	2,5	incremento temporal ($\times 10^{-4}$ s) na marcha
h	5	espaçamento da malha (em m), onde $h = \Delta x = \Delta z$
f_c	60	freqüência de corte (em Hz) da fonte sísmica
N_x	601	número de pontos da malha na direção x
N_z	601	número de pontos da malha na direção z
N_{total}	4000	número total de passos de tempo, sendo o tempo total $t = 1$ s
ixf	301	posição da fonte na direção x (dada em pontos da malha)
jzf	301	posição da fonte na direção z (dada em pontos da malha)

com a aproximação física utilizada na formulação numérica, ou seja, em formulações acústicas, elásticas isotrópicas e anisotrópicas. Os resultados são apresentados de forma ilustrativa através de instantâneos (*snapshots*) dos campos de propagação e também na forma de gráficos destes campos ao longo do tempo em posições fixas do meio (traços do sismograma). A apresentação através destes últimos é enfatizada, uma vez que ela favorece a comparação detalhada da assinatura da fonte, enquanto os instantâneos apenas ilustram as grandes feições do campo de onda, não sendo adequadas para uma comparação das pequenas diferenças na precisão. As unidades utilizadas nos gráficos são as do sistema internacional (SI), dadas na Tab. 5.3.

Tabela 5.3: Unidades utilizadas nos gráficos.

grandeza	unidade	descrição
tempo	t	tempo dado em segundos
pressão	Pa	variação da pressão no meio devida à passagem da onda
deslocamento	m	deslocamento das partículas do meio
velocidade	$m s^{-1}$	velocidade de deslocamento das partículas do meio
amplitude		uma das 3 unidades anteriores, de acordo com o caso

5.2.1 Formulações acústicas

As primeiras modelagens realizadas para a verificação da fonte sísmica nos esquemas acústicos são realizadas na água, ou seja, considera-se as seguintes propriedades do

meio:

$$C_P = 1500 \text{ m s}^{-1}$$

$$\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}.$$

É importante lembrar que a formulação de campo único para o caso acústico é baseada na equação geral da onda (para densidade variável) para o campo de pressão e não em termos de deslocamento (ou velocidade), como implementado no caso elástico. Da mesma forma, as formulações baseadas na equação da onda com densidade constante (acústica tradicional) também são baseadas no campo de pressão. Assim, todas as comparações realizadas neste tópico são referentes a este campo, inclusive quando as mesmas são comparadas com as formulações de campo duplo (que fornecem como saída tanto o campo de pressão como de velocidade).

Para ilustrar a propagação da onda acústica, na Fig. 5.1, são mostrados os instantâneos (*snapshots*) do campo de pressão para as modelagens, utilizando-se a malha intercalada de Virieux, com os esquemas de campo duplo (Fig. 5.1(a)) e de campo único (Fig. 5.1(b)) em segunda ordem de aproximação no espaço e no tempo. Para os demais operadores acústicos os instantâneos são visualmente iguais

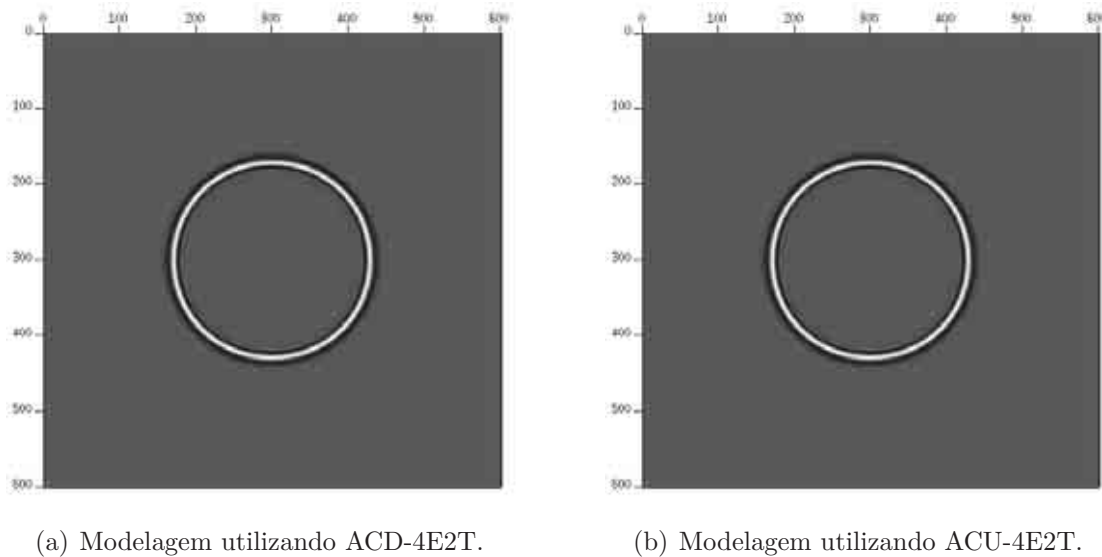
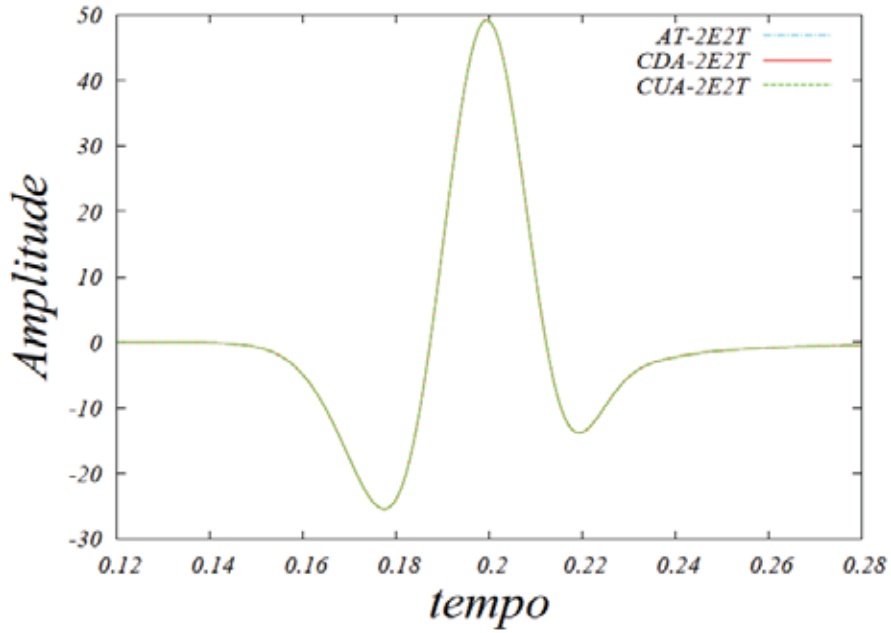


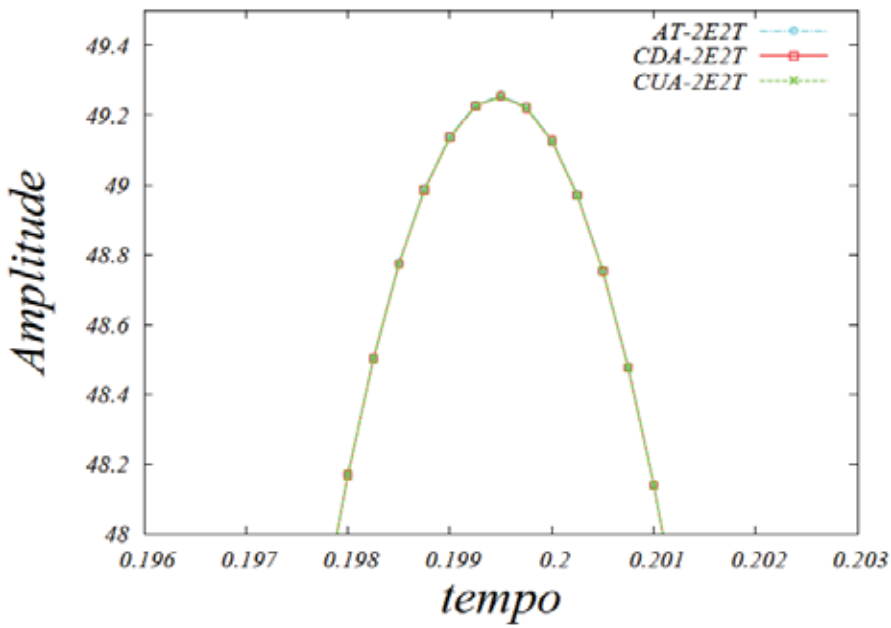
Figura 5.1: Instantâneos em $t = 0,5$ s da modelagens acústicas utilizando-se esquema de campo único e de campo duplo.

e, portanto, torna-se irrelevante apresentá-los.

A seguir serão comparadas as assinaturas para todos os esquema acústicos implementados. Para tal os gráficos da variação do campo de pressão acústica ao longo do tempo (traços de sismograma) para diferentes modelagens numéricas são comparados. Na Fig. 5.2, apresenta-se a variação da pressão para o ponto de $(i,j) = (341,301)$ da malha — referente a posição $(x,z) = (1700,1500)\text{m}$ —, para as



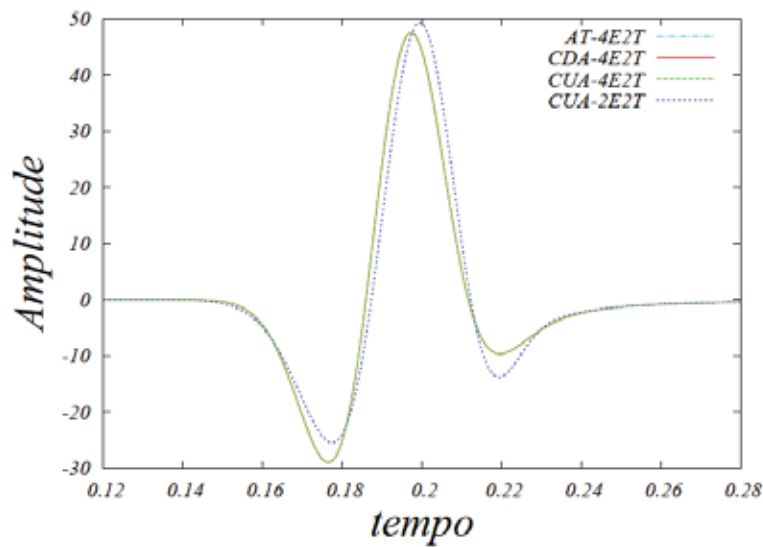
(a) Comparação entre os campos de pressão.



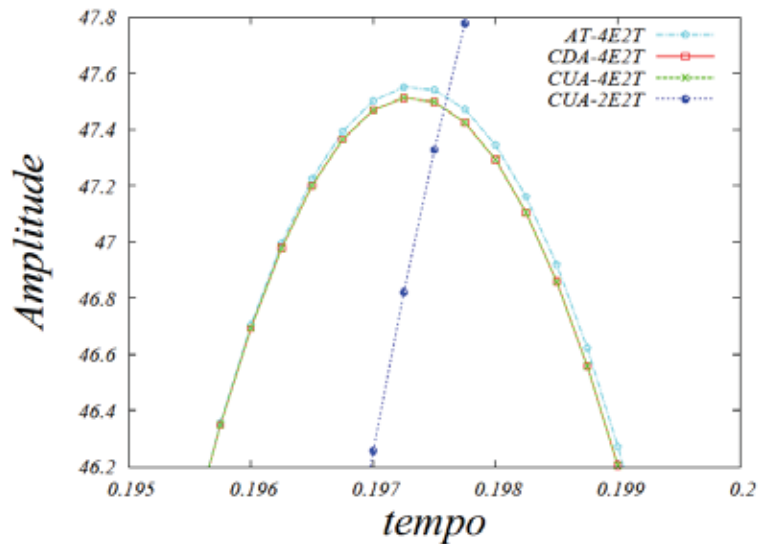
(b) Detalhe.

Figura 5.2: Comparação do campo de pressão acústica ao longo do tempo para os diversos esquemas de segunda ordem no nó $(i,j) = (341,301)$.

formulações de segunda ordem. Como se vê claramente nos gráficos, todos os esquemas de segunda ordem fornecem a mesma resposta numérica, o que era esperado uma vez que os esquemas de campo único e de campo duplo são equivalente e o esquemas clássico (baseado na equação acústica da onda para densidade constante) também recai na mesma expressão discreta no caso de um meio com densidade constante. Pode-se ver que, mesmo ampliando a escala (Fig. 5.2(b)), os valores da pressão nos pontos discretos são iguais para todos os esquemas. Em especial, as respostas coincidem no caso do esquema de campo único em comparação com o o esquema de campo duplo correspondente, como deveria ser. Lembrando que o esquema de Cohen de segunda ordem coincide com o esquema de campo único.



(a) Comparação entre os campos de pressão.

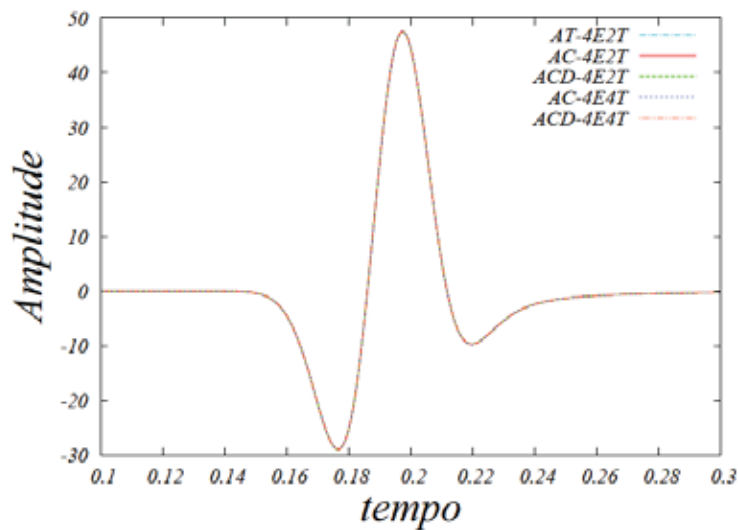


(b) Detalhe.

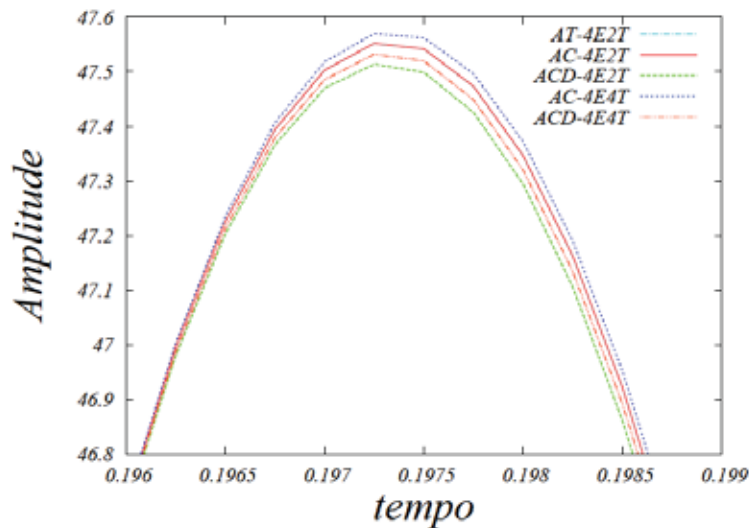
Figura 5.3: Comparação do campo de pressão acústica ao longo do tempo para os diversos esquemas de quarta ordem no nó $(i,j) = (341,301)$.

Na fig. 5.3, são apresentados os resultados para as formulações de quarta ordem no espaço (mantendo a segunda ordem no tempo), em comparação com a resposta do esquema de segunda ordem. Os resultados dos esquemas de quarta ordem são todos muito próximos, podendo-se observar apenas pequenas variações na resposta do esquema clássico (densidade constante). Estas variações se devem à diferença no número de pontos utilizados na referida formulação, uma vez que este número é inferior ao utilizado na formulação de campo único. É importante sublinhar que o esquema de campo único fornece o mesmo resultado do esquema de campo duplo correspondente, como deveria ser.

A seguir, na Fig. 5.4, são mostrados os resultados dos esquemas de quarta ordem no tempo, em comparação com os esquemas de segunda ordem no tempo. Na



(a) Comparação entre os campos de pressão.



(b) Detalhe.

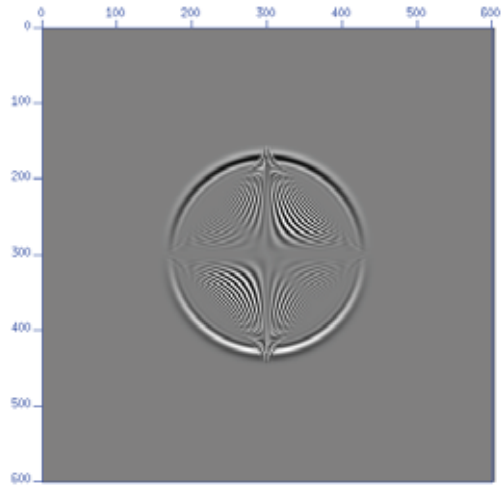
Figura 5.4: Comparação dos campo de pressão acústica ao longo do tempo para os esquemas de quarta ordem no tempo no nó $(i,j) = (341,301)$.

referida figura, são considerados os esquemas de Cohen com suavização (COHEN e JOLY, 1990) e os esquemas de campo duplo, tanto quanto o esquema que utiliza a formulação acústica padrão. Em virtude do grande custo computacional das formulações de quarta ordem no tempo, neste trabalho tais esquemas foram considerados e implementados apenas na formulação de campo duplo. Pode-se ver, na ampliação dada na Fig. 5.4(b), uma pequena diferença quando se inclui o termo de correção, elevando-se para quarta ordem no tempo os esquemas, tanto o de Cohen como o de campo duplo. Uma observação importante é que o resultado do esquema de Cohen é idêntico ao do esquema tradicional no caso de segunda ordem no tempo (e quarta ordem no espaço), de forma que as curvas estão sobrepostas na Fig. 5.4(b). Isto era esperado porque tais esquemas são equivalentes no caso de densidade constante.

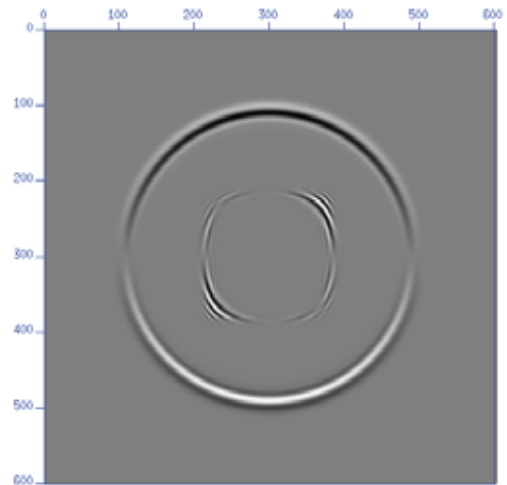
5.2.2 Formulações elásticas isotrópicas

As primeiras modelagens apresentadas neste exemplo objetivam mostrar os problemas que os esquemas baseados na formulação de Kelly encontram para modelar meios com razão de Poisson maior que cerca de $\nu = 0,25$. Para tal, foram rodadas modelagens utilizando o operador de Kelly e o de campo único para a água ($\nu = 0,5$) e para carvão ($\nu = 0,37$), com propriedades dadas por $c_P = 2200\text{m s}^{-1}$, $c_S = 1000\text{m s}^{-1}$ e $\rho = 1300\text{kg m}^{-3}$ (JAEGER *et al.*, 2007), como mostrado na Fig. 5.5, através dos instantâneos dos campos de velocidade vertical. Acima (Fig. 5.5(a) e Fig. 5.5(b)), onde são mostrados os resultados da modelagem com o operador de Kelly, vê-se defeitos numéricos na parte interior da frente de onda verdadeira, tanto para a água (à esquerda) quanto para o carvão (à direita). Tais defeitos constituem-se em modos de onda espúrios, como forte dispersão numérica associada, criados pela formulação numérica, provavelmente devido à anisotropia numérica. Abaixo (Fig. 5.5(c) e Fig. 5.5(d)), são mostradas as modelagens com o operador de campo único proposto, que resultam na correta propagação da onda, sem os modos de onda espúrios presentes na modelagem utilizado-se o esquema de Kelly.

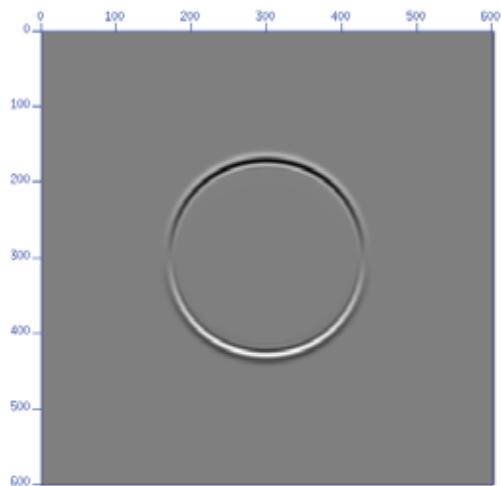
Na Fig. 5.6, são mostrados gráficos com a variação do campo de velocidade para o carvão ao longo do tempo, onde são comparados os esquemas de campo único e de campo duplo com o esquema de Kelly, primeiro na posição abaixo da fonte (onde o modo espúrio tem amplitude mínima). Pode-se ver, na Fig. 5.6(a), o modo de onda espúrio, com uma amplitude muito baixa, aproximadamente entre o tempo de 0,5 e 0,55 s. Enfatiza-se, entretanto, que nas demais direções a influência do modo espúrio na resposta é sempre maior (como será visto na seqüência). Na ampliação dada pela Fig. 5.6(b), vê-se que a amplitude mínima, referente à onda P , é idêntica nos esquemas de campo único e de campo duplo, enquanto que é ligeiramente diferente no caso do esquema de Kelly.



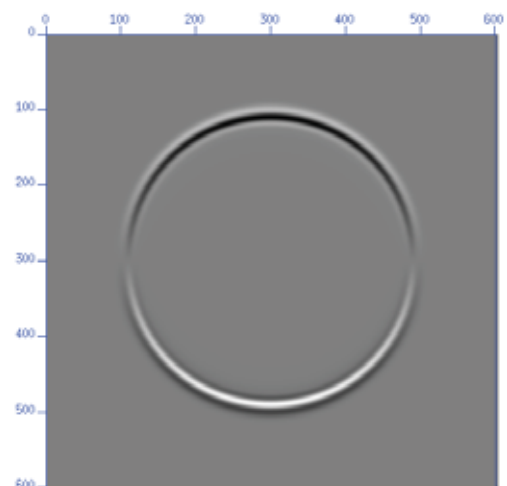
(a) Água modelada com esquema de Kelly.



(b) Carvão modelado com esquema de Kelly.

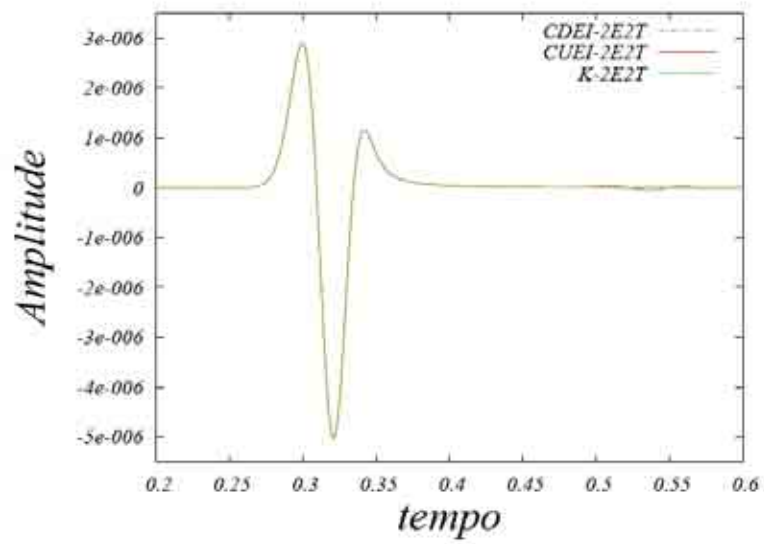


(c) Água modelada esquema de campo único.

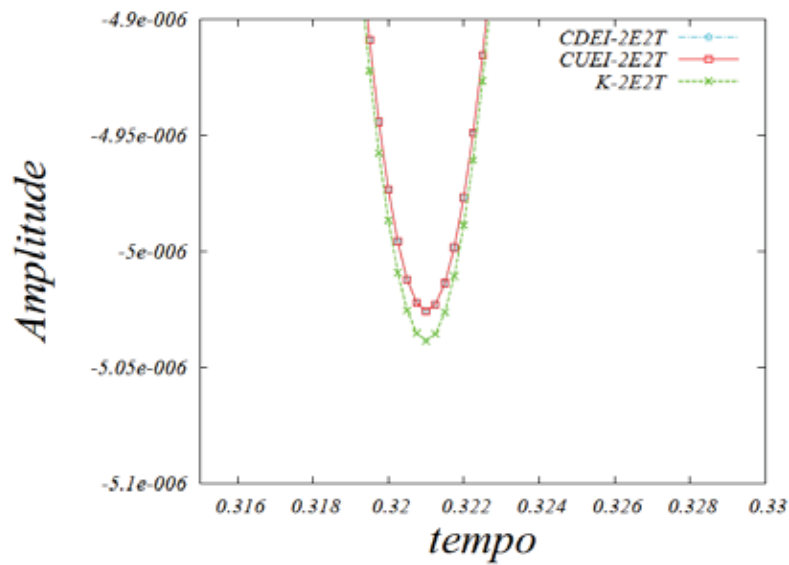


(d) Carvão modelado com esquema de campo único.

Figura 5.5: Instantâneos ($t = 0,5s$) de v_z comparando o operador de Kelly com o operador de campo único acústico para água e carvão (na mesma escala).



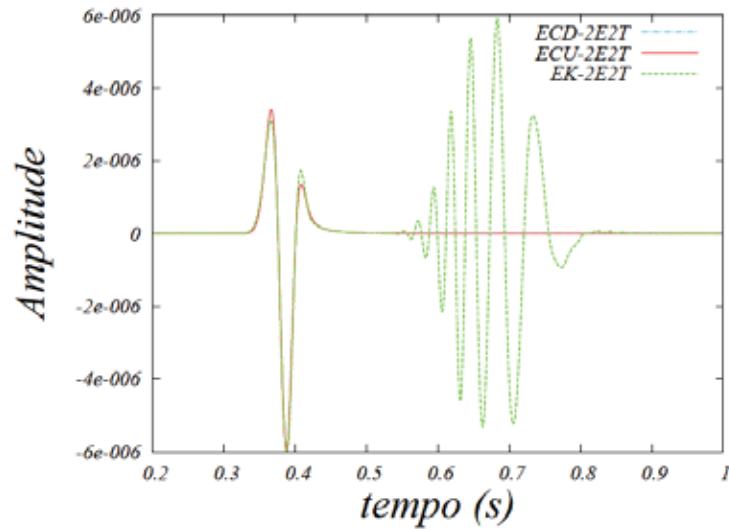
(a) Comparação entre v_z .



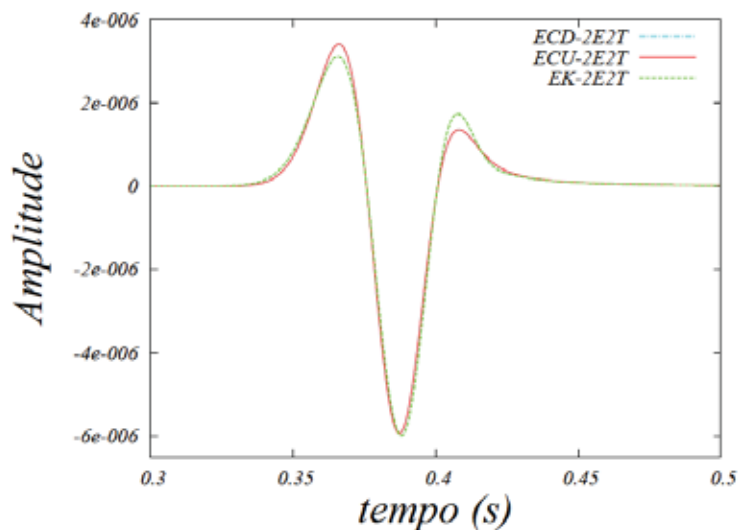
(b) Detalhe da amplitude mínima.

Figura 5.6: Comparação dos campo de velocidade vertical para o carvão ao longo do tempo no nó $(i,j) = (301,441)$, correspondente ao ponto $(x,z) = (1500,2200)$ m, para os diferentes esquemas isotrópicos.

Na Fig. 5.7, mostra-se a variação do campo de velocidade vertical para uma direção onde o resultado é o pior. O ponto da malha considerado é dado por $i = 201$



(a) Comparação entre os campos de velocidade.



(b) Detalhe do modo físico.

Figura 5.7: Comparação dos campo de velocidade vertical ao longo do tempo no nó $(i,j) = (201,401)$ (correspondente ao ponto $(x,z) = (1000,2000)$ m) para os diferentes esquemas isotrópicos.

e $j = 401$ (correspondente a direção diagonal inferior esquerda), onde o modo espúrio tem influência máxima para a modelagem do carvão. Neste sentido, como pode-se ver nos instantâneos mostrados anteriormente (Fig. 5.5), ocorre a pior situação nas direções diagonais superior direita e inferior esquerda, ou seja, onde o modo de onda espúrio apresenta maior amplitude e maior dispersão associada. Em tais direções se vê a total degradação da resposta pelo modo espúrio de onda, como se vê na Fig. 5.7(a)), mesmo a resposta associada à onda P sendo próxima da resposta do esquema de campo único, como por ser visto na Fig. 5.7(b). É claro

que isto inviabiliza completamente a utilização do esquema de Kelly para diversos materiais, a princípio, como relatado na literatura, que possuam $\nu > 0,25$, em especial na presença de água. O esquema de campo único, por outro lado apresenta uma solução satisfatória independentemente da razão de Poisson do meio modelado, sendo adequada inclusive em regiões de acoplamento água-rocha, como será visto na seção 5.3, da mesma forma que o esquema de campo duplo equivalente.

É importante chamar a atenção para o fato de que a fonte foi aplicada, conforme discutido na seção 4.5.2, em dois pontos em cada direção, para todas as modelagens mostradas acima, tanto para o esquema de campo único quanto para o esquema de Kelly (em segunda ordem no espaço). A aplicação em apenas um ponto em cada uma das direções, gera problemas nas respostas de ambos os esquemas (vide Fig. 5.8). O material utilizado nas modelagens da figura apresenta um parâmetro de Poisson

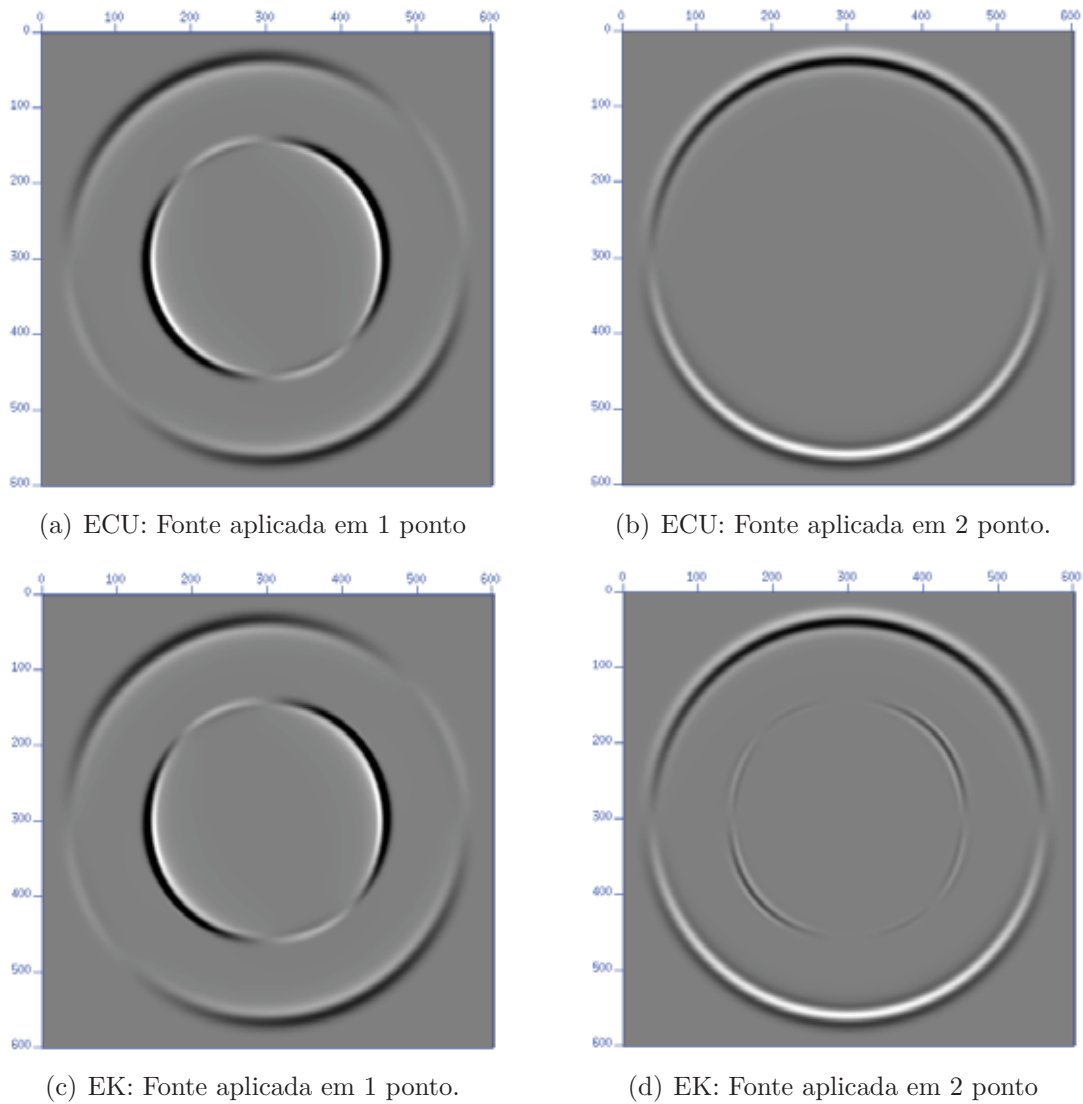


Figura 5.8: Instantâneos ($t = 0,5s$) comparando a aplicação da fonte no esquema de Kelly em comparação com o esquema de campo único.

típico ($\nu = 0,22$), com as seguintes propriedades $c_P = 3000\text{m s}^{-1}$, $c_S = 1795\text{m s}^{-1}$ e $\rho = 2440\text{kg m}^{-3}$. A escalada de cor do par de figuras da direita (Fig. 5.8(b)-5.8(d)) é a mesma, tanto quanto do par da esquerda (Fig. 5.8(a)-5.8(c)), sendo que o máximo e o mínimo da escala das figuras da esquerda é 10 vezes maior que os da direita.

Analisando as figuras, vê-se que, ao aplicar a fonte em apenas um ponto em cada direção, é gerado um modo de onda mais lento com altíssima amplitude (cerca de 10 vezes maior que a onda P), que aparece ao centro (Fig. 5.8(a)-5.8(c)). Outro ponto importante é que a assinatura da onda P (wavelet) não possui a forma correta (igual a gerada com o esquema de campo duplo). Além do problema verificado para ambos os esquemas quando se aplica a fonte erroneamente, em apenas um ponto em cada direção, verifica-se que, no caso do esquema de Kelly, há ainda um modo de onda residual mais lento que continua existindo mesmo aplicando-se a fonte corretamente. Tal modo de onda é similar ao observado no caso da modelagem do carvão discutida acima. Entretanto, este modo estará sempre presente mesmo em materiais com parâmetro de Poisson bem menores que $\nu = 0,35$, o que significa que a formulação de Kelly apresenta problemas mesmo nesta situação. Neste caso, entretanto, é provável que tal modo de onda espúrio esteja associado à aplicação da fonte, que foi feita utilizando-se a dedução obtida para o esquema de campo único (seção 4.5.2).

Na figura a seguir (Fig. 5.9) mostra-se um gráfico comparativo entre a formulação de campo único e a formulação de campo duplo quando o incremento temporal encontra-se bem próximo ao limine de estabilidade, ou seja, $\Delta t = 2,2 \times 10^{-3}\text{s}$. Pode-

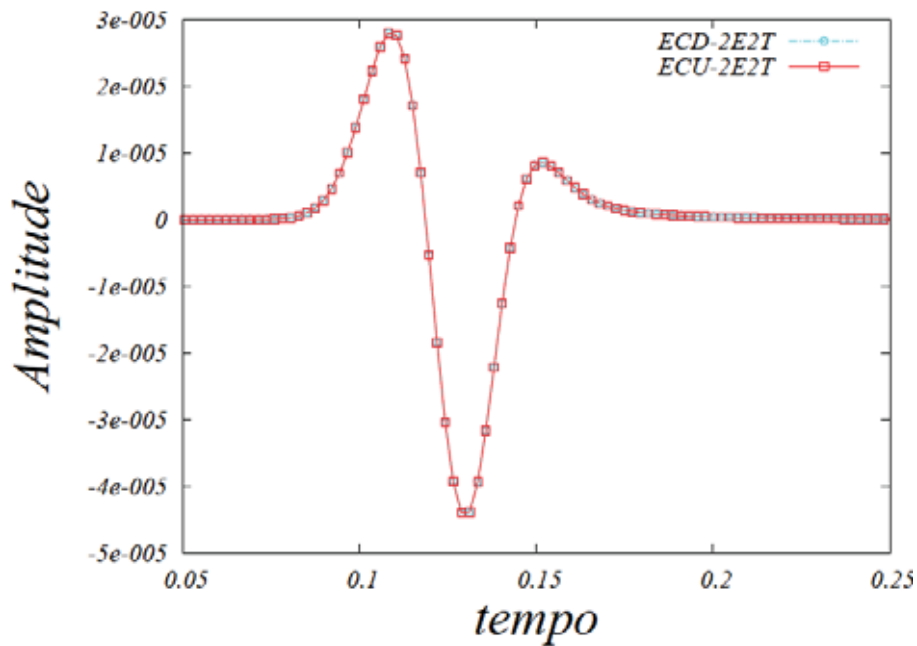


Figura 5.9: Campo de velocidade horizontal no ponto $(x,z)=(321,301)$ com $\Delta t = 2,2 \times 10^{-3}$ próximo do limite de estabilidade.

se ver que as respostas entre o esquema de campo único e o esquema de campo duplo, como antes, são idênticas. Isto demonstra a equivalência entre os esquemas mesmo em situações numéricas limite. Na Fig. 5.10, mostra-se um gráfico comparativo ampliado entre a formulação de campo único e a formulação de campo duplo para diferentes incrementos temporais. Pode-se ver a convergência da resposta.

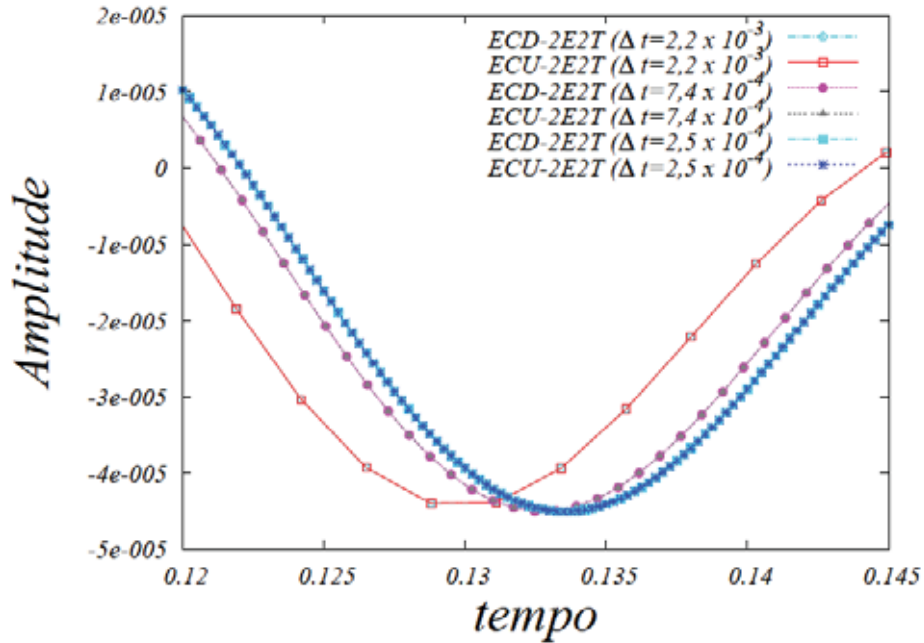


Figura 5.10: Campo de velocidade horizontal no ponto $(x,z)=(321,301)$ com diferentes valores de Δt .

No próximo tópico, mostram-se resultados para as formulações elásticas anisotrópicas, onde há um acoplamento entre as ondas P e S (na verdade quase- P e quase- S).

5.2.3 Formulações elásticas anisotrópicas

Neste tópico, serão apresentadas as modelagens utilizando-se os esquemas elásticos anisotrópicos. É importante observar-se que, no caso de anisotropia, como mencionada anteriormente, há um acoplamento físico entre os diversos modos de onda. Por exemplo, no caso de anisotropia VTI, os modos de onda quase- P e quase- SV são acoplados, de forma que, ao aplicar a fonte explosiva, são geradas, além das chamadas ondas quase- P , as ondas quase- SV . Com isto, mesmo em meios homogêneos, ao aplicar a fonte, são criados vários modos de onda, diferente do caso acústico e do caso elástico isotrópico analisados acima.

Nos primeiros exemplos apresentados aqui, serão utilizados meios com anisotropia VTI, com propriedades apresentadas na Tab. B.2 do apêndice B. Os esquemas utilizados para modelar a propagação da onda nestes meios são os esquemas de

campo único e de campo duplo, tanto utilizando-se a malha de Virieux, como a malha rotacionada. Como será visto, cada grau de anisotropia gera assinaturas muito diferentes, exemplificando o quanto a anisotropia possui grande influência nas respostas.

Na primeira figura, a Fig. 5.11, são mostradas ilustrativamente as assinaturas da fonte, através dos instantâneos da componente vertical do campo de velocidade, no tempo $t = 0,3s$, para diversos tipos de folhelho anisotrópico (Tab. B.2), utilizando-se

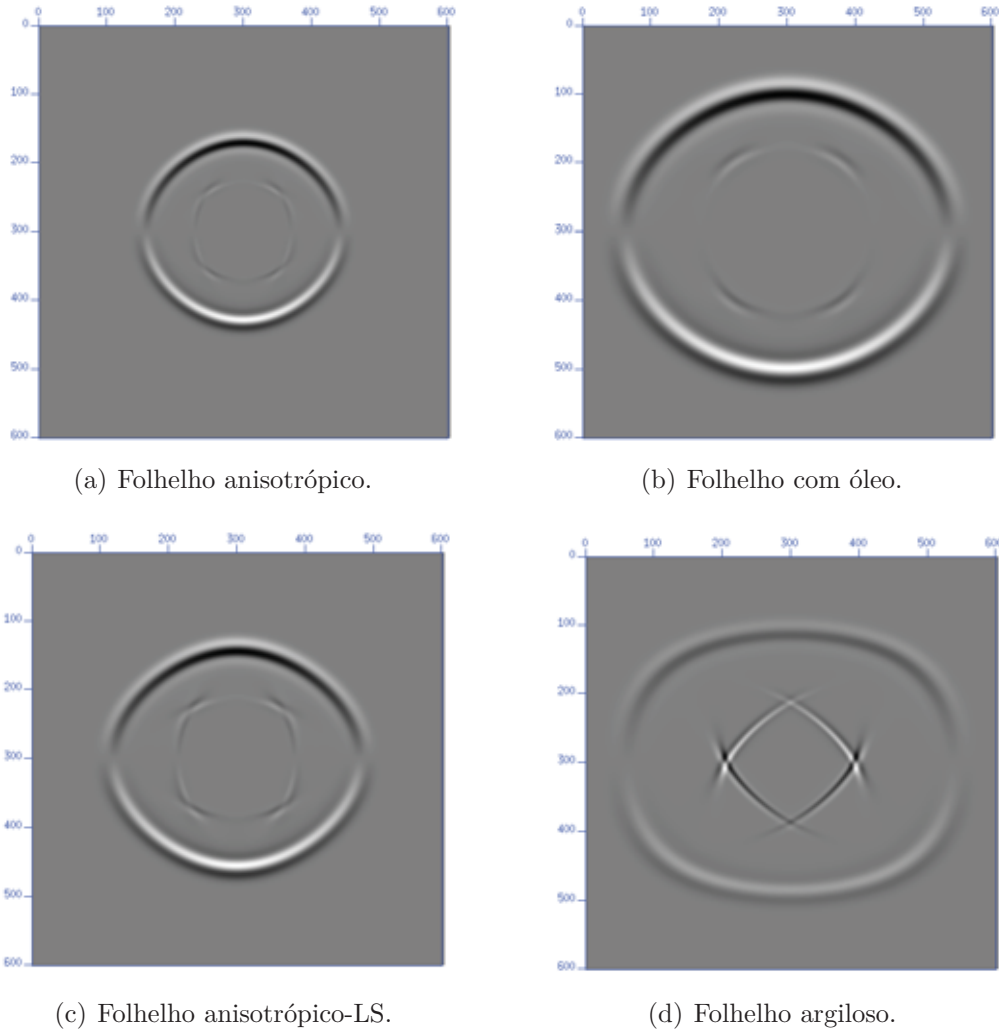


Figura 5.11: Instantâneos ($t = 0,3s$) mostrando a assinatura da fonte para diversos materiais tipos de folhelho dados na Tab. B.2: (a) folhelho anisotrópico (21) com $\epsilon = 0,103$ e $\delta = -0,073$, (b) folhelho com óleo (8) com $\epsilon = 0,200$ e $\delta = 0,000$, (c) folhelho anisotrópico-LS (20) com $\epsilon = 0,169$ e $\delta = -0,123$ e (d) folhelho argiloso (5) com $\epsilon = 0,334$ e $\delta = 0,818$.

a formulação de campo único na malha de Virieux. Nas Fig. 5.12, são apresentadas outras assinaturas de fonte para materiais com anisotropia moderada e forte, dados na Tab. B.2. O tempo de modelagem utilizado é o mesmo, ou seja, $t = 0,3s$, com exceção das Fig. 5.12(b) e Fig. 5.12(c) onde se utiliza $t = 0,2s$ (para que não seja

atingida a borda do modelo). Enfatiza-se que nestas modelagens estão presentes materiais com propriedades bem diversificadas, com parâmetros de Poisson entre $\nu = -0,088$ (cristal de quartzo) e $\nu = 0,395$ (material gipso intemperizado).

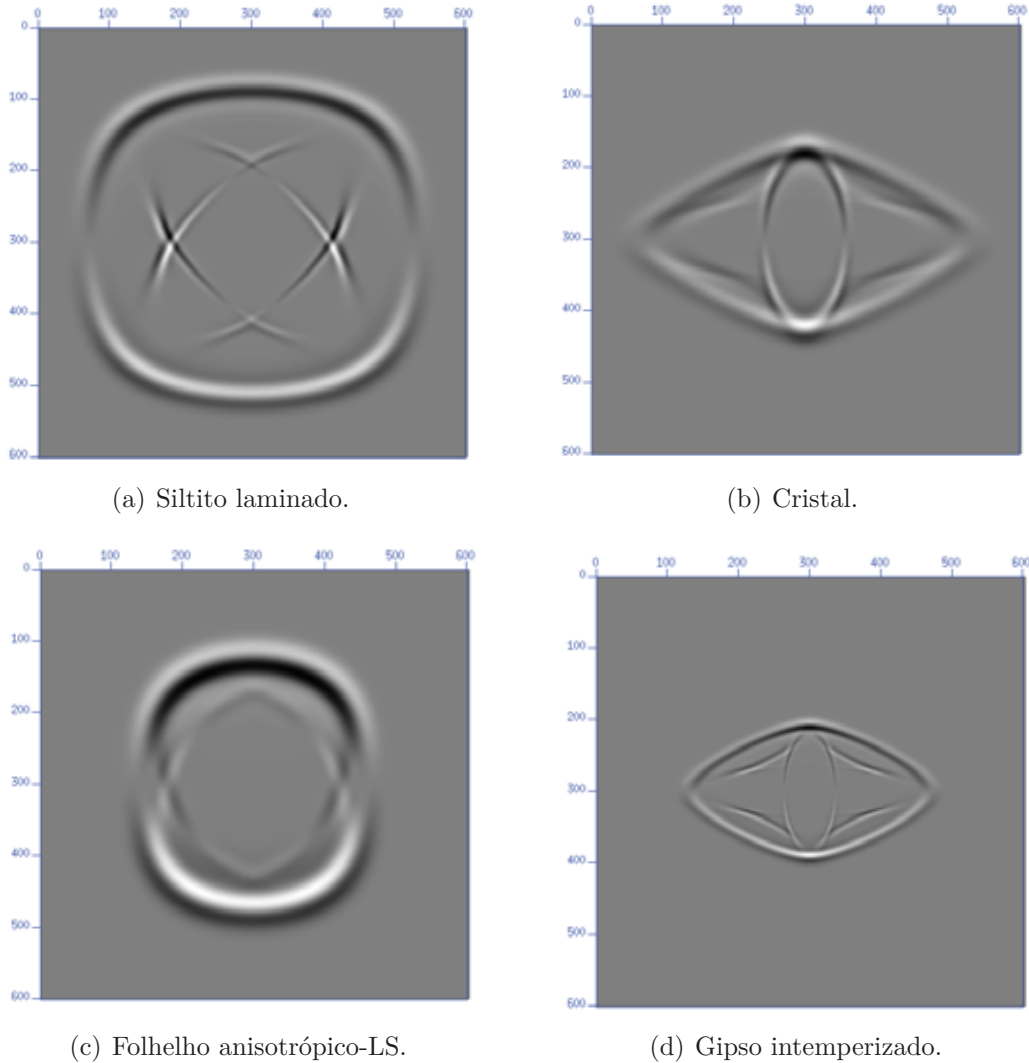
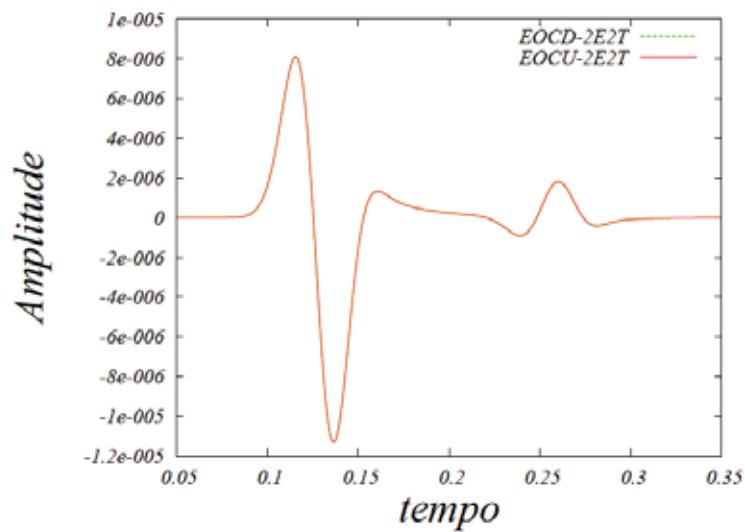


Figura 5.12: Instantâneos ($t = 0,3s$) mostrando a assinatura da fonte para diferentes materiais anisotrópicos (dados na Tab. B.2): (a) Siltito laminado (6) com $\epsilon = 0,091$ e $\delta = 0,688$, (b) Cristal (10) com $\epsilon = 1,120$ e $\delta = -1,230$, (c) Cristal de quartzo (11) com $\epsilon = -0,096$ e $\delta = 0,169$ e (d) Gipso intemperizado (23) com $\epsilon = 1,161$ e $\delta = -1,075$.

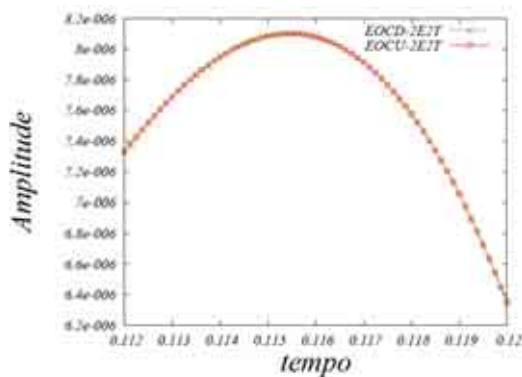
Em todos os exemplos apresentados acima, é interessante observar a influência dos coeficientes de Thomsen na frente de onda quase- P . O coeficiente ϵ regula a diferença entre a velocidade de propagação da onda quase- P na direção vertical e horizontal. Quando $\epsilon > 0$, a velocidade é maior na direção horizontal do que na direção vertical, alongando a frente de onda na direção horizontal. Inversamente, se $\epsilon < 0$, a frente de onda é retraída na direção vertical. Já o parâmetro δ regula a inclinação da frente de onda P nas proximidades da direção vertical. Quando

$\delta > 0$, a frente de onda avança nas proximidades do eixo z em relação ao que ocorreria no caso isotrópico e, inversamente, recua se $\delta < 0$. As figuras apresentadas acima demonstram tais comportamentos da frente de onda quase- P . Em relação à feição das ondas quase- S , internas às ondas quase- P , menciona-se apenas que a mesma pode ser obtida analiticamente resolvendo-se as equações de Christoffel para diferentes direções. Tal assunto não será abordado, podendo ser encontrado na bibliografia sugerida anteriormente. Menciona-se apenas que o resultado das modelagens apresentadas é fidedigno, como se sabe para o esquema de Virieux.

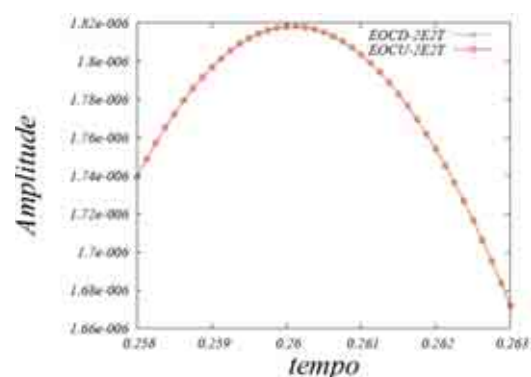
Como antes, na seqüência, compara-se as diferentes formulações por meio de gráficos. Primeiro, na Fig. 5.13, compara-se o esquema de campo duplo na malha de Virieux com o esquema de campo único correspondente. O material utilizado



(a) Comparação entre a componente vertical do campo de velocidade.



(b) Detalhe (onda quase- P).



(c) Detalhe (onda quase- S).

Figura 5.13: Comparação das componentes verticais dos campos de velocidades no nó $(x,z) = (251,351)$ para modelagens com os esquemas de campo único e de campo duplo.

é o siltito laminado (Tab. B.2). Como se vê na Fig. 5.13(a) e em especial nas ampliações mostradas nas Fig. 5.13(b) e Fig. 5.13(c), os resultados são idênticos,

como esperado.

Já a extensão do esquema de Kelly para meios VTI fornece uma resposta diferente da resposta dos esquemas na malha de Virieux, como é mostrado na Fig. 5.14. A onda quase- P gerada é muito semelhantes nos dois casos, enquanto a onda

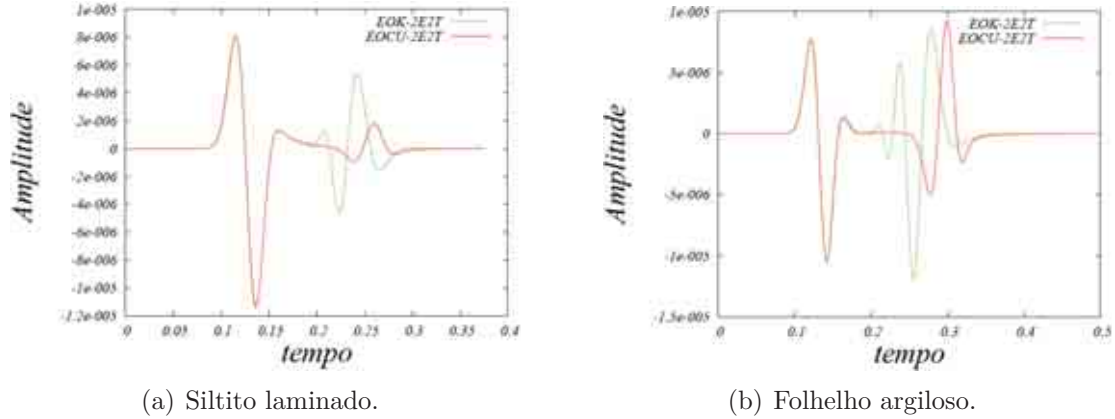


Figura 5.14: Comparação dos campos de velocidades (v_z) para os esquemas de campo único e de Kelly no nó $(x,z) = (251,351)$.

quase- S apresenta uma diferença bem grande, tanto em amplitude como em fase, possuindo inclusive formatos de onda (*wavelets*) diferentes, devido à dispersão numérica. Neste sentido, o esquema de Kelly apresenta características piores no que se refere à dispersão numérica, como mostrado na Fig. 5.15, através de instantâneos das componentes verticais dos campos de velocidades para dois materiais diferentes. O primeiro, o siltito laminado, apresenta razão de Poisson de $\nu = 0,245$, no limiar

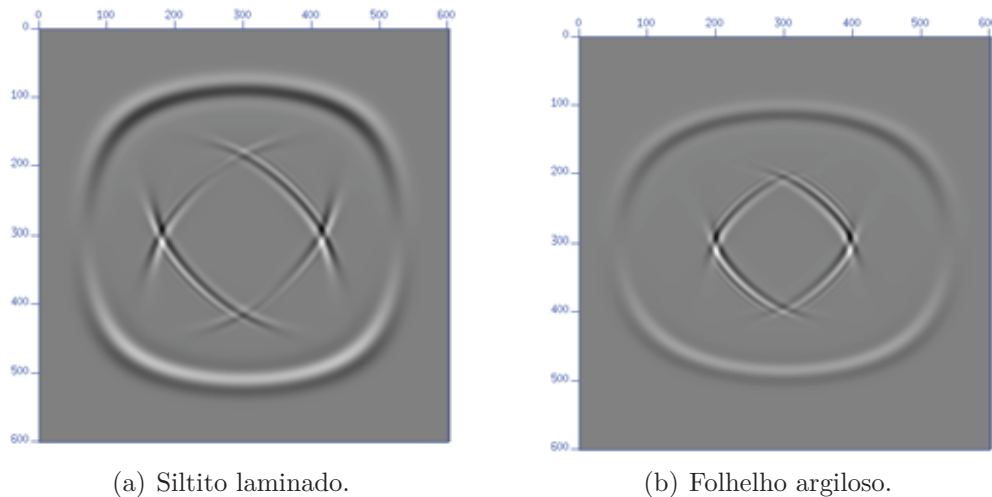
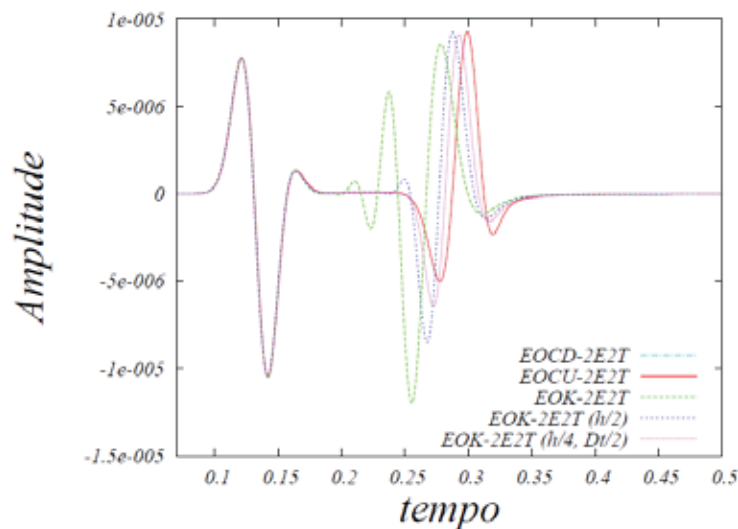


Figura 5.15: Instantâneos mostrando a propagação com o esquema de Kelly.

do valor de $\nu = 0,25$ onde há relatos de problemas na literatura (VIRIEUX, 1986), enquanto que o Folhelho argiloso possui $\nu = 0,312$. Nos dois casos, pode-se ver que a onda quase- S apresenta dispersão numérica. As modelagens com o operador de

campo único proposto, por outro lado, não apresentam tal problema, representando bem tanto as ondas P quanto as ondas S (na verdade quase- P e quase- S), como pode ser visto nos instantâneos apresentados anteriormente, respectivamente, nas Fig. 5.12(a) e Fig. 5.11(d).

Um fato importante é que o esquema de Kelly melhora seu resultado quando se diminui o espaçamento da malha, uma vez que é um esquema convergente. Entretanto, isto além de tornar mais caro o esquema por aumentar o número de pontos da malha, faz com que o incremento temporal também tenha que ser reduzido para manter a estabilidade numérica do esquema, tornando o esquema ainda mais caro. Na Fig. 5.16, mostra-se a convergência do esquema de Kelly para próximo da resposta do esquema de campo duplo proposto, o que prova a melhor precisão do esquema proposto em comparação com o esquema de Kelly. Menciona-se ainda que mesmo no caso de materiais com razão de Poisson bem abaixo de $\nu = 0,25$, como é o caso por exemplo do arenito imaturo que tem $\nu = 0,173$ (conforme a Tab. B.2), o esquema de campo único apresenta uma resposta mais acurada. Convém ressaltar ainda que o esquema de campo único e de campo duplo fornecem sempre a mesma resposta para todos os materiais estudados, como exemplificado através do resultado da modelagem do siltito laminado (Fig. 5.13).



(a) Siltito laminado.

Figura 5.16: Comparação dos campos de velocidades (v_z) para os esquemas de campo único e de Kelly no nó $(x,z) = (251,351)$, reduzindo-se o espaçamento da malha e o incremento temporal, como mostra a legenda.

Resta ainda comparar os esquemas na malha rotacionada. Uma observação importante é que tais esquemas apresentam um problema não descrito no artigo original (SAENGER *et al.*, 2000) — nem em SAENGER e BOHLEN (2004) do mesmo autor — em relação à aplicação da fonte sísmica explosiva, conforme chama a atenção por exemplo os autores HUSTEDT *et al.* (2004). O problema é que, ao aplicar

uma fonte pontual, ocorre uma excitação errada de metade dos pontos da malha, como mostrado na Fig. 5.17, onde se modela o Siltito laminado. Neste sentido, o

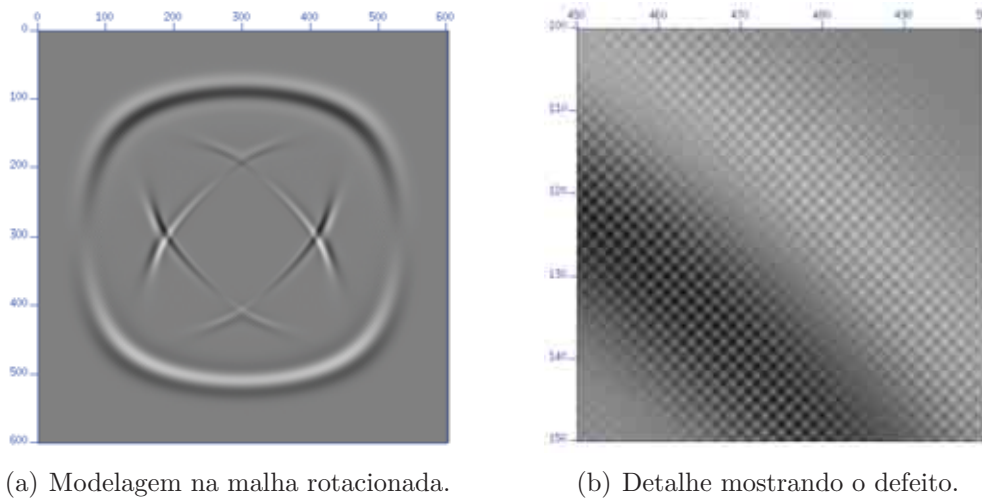


Figura 5.17: Instantâneos ($t = 0,3s$) mostrando defeito na aplicação da fonte na malha rotacionada para o siltito laminado, por exemplo.

esquema de campo único apresenta o mesmo problema. Este problema é resolvido, entretanto, aplicando-se uma distribuição espacial de fontes (OPERTO *et al.*, 2002).

Na seqüência, compara-se as respostas geradas com o esquema de campo único e de campo duplo correspondente, através de gráficos ao longo do tempo em um ponto fixo do meio. Na Fig. 5.18, mostra-se o comportamento da componente v_z no ponto $(x,z) = (301,461)$. Vê-se na figura, em especial no detalhe dado na Fig.

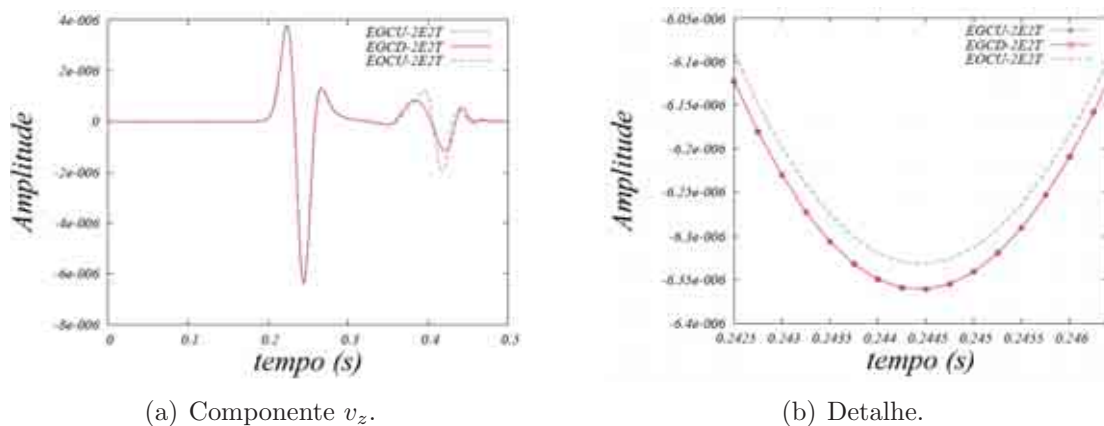


Figura 5.18: Comparação da componente v_z no ponto $(x,z) = (301,461)$ para os esquemas na malha rotacionada, junto com a resposta do esquema na malha de Virieux, utilizando-se o siltito laminado.

5.18(b), que os esquemas de campo único e de campo duplo na malha rotacionada apresentam a mesma resposta, resposta esta ligeiramente diferente da resposta na malha intercalada padrão (de Virieux). Esta diferença pode ser explicada pelas diferentes propriedades de dispersão e estabilidade verificadas na malha rotacionada.

As formulações na malha rotacionada são capazes de modelar regiões com qualquer grau de anisotropia, em especial meios TTI, ou seja, *tilted transverse isotropic* (isotropia transversa com eixo de simetria qualquer). Na Fig. 5.19, mostra-se ins-

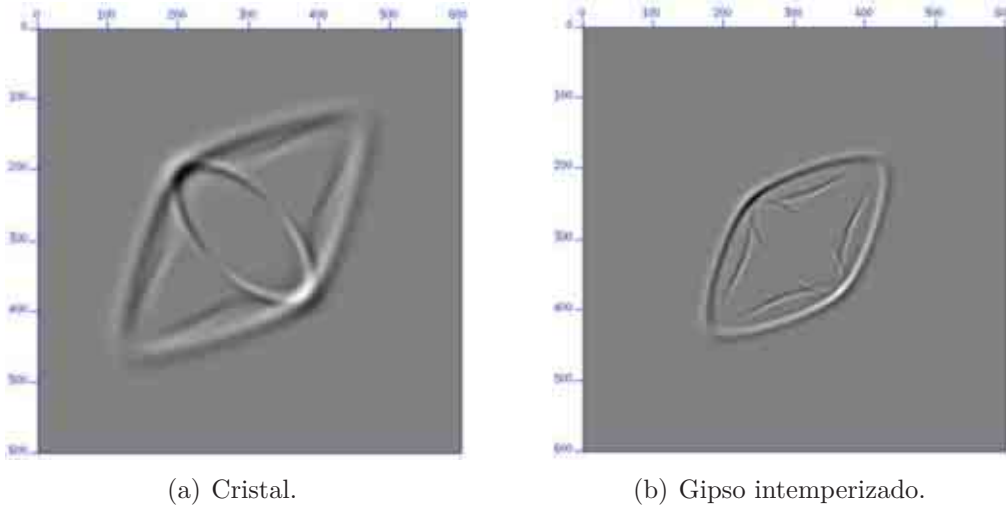
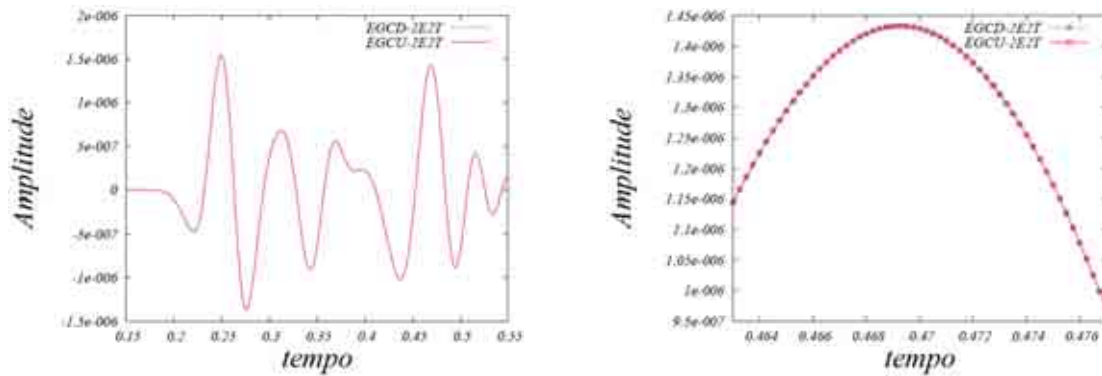


Figura 5.19: Instantâneos mostrando a assinatura da fonte para materiais com forte anisotropia dados na Tab. B.2: (a) Cristal (10) com $\epsilon = 1,120$ e $\delta = -1,230$, (b) Gipso intemperizado (23) com $\epsilon = 1,161$ e $\delta = -1,075$.

tantâneos da modelagem de dois dos meios mostrados anteriormente na Fig. 5.12, mas diferindo destes pela rotação do tensor de elasticidade em 45 graus. Repare que, com a rotação, as componentes do tensor de elasticidade se modificam de acordo com a Eq. B.18 (do apêndice B), de forma que mesmo as componentes que antes eram nulas (no caso VTI) são transformadas para valores diferentes de zero. Nenhum dos demais esquemas implementados neste trabalho é capaz de modelar um meio como este, de forma que apenas serão comparados os esquemas de campo único com o esquema de campo duplo, ambos na malha rotacionada.

Na Fig. 5.20, são mostradas comparativamente as respostas geradas com os esquemas de campo único e de campo duplo na malha rotacionada, como antes, através de gráficos da componente vertical do campo de velocidade ao longo do tempo, para o material gipso intemperizado no ponto $(x,z) = (351,251)$ da malha. Pode-se ver que as respostas do esquema de campo único e do esquema de campo duplo são idênticas. Portanto, assim como o esquema de campo único na malha de Virieux, o esquema de campo único na malha rotacionada apresenta as mesmas propriedades de dispersão e estabilidade numérica que o esquema de campo duplo correspondente. Cabe ressaltar que as propriedades de dispersão numérica e estabilidade são iguais entre os esquemas na malha rotacionada e na malha de Virieux, com visto na seção 4.7.



(a) Comparação do campo v_z na malha rotacionada.

(b) Detalhe.

Figura 5.20: Comparação do campo v_z utilizando o esquema de campo único e o de campo duplo na malha rotacionada para o Gipso intemperizado.

5.3 Avaliação dos operadores para modelo de camadas

Nesta seção, são apresentados os resultados das diversas formulações implementadas aplicadas a modelagens de um meio simples com camadas planas e horizontais. O principal objetivo deste exemplo é mostrar comparativamente a aplicação dos operadores implementados em meios heterogêneos, comparando em especial as respostas geradas com os esquemas de campo único com as geradas pelos esquemas de campo duplo correspondente. Adicionalmente, os esquemas da literatura também são comparados com os esquemas propostos.

Utiliza-se um modelo de camadas em virtude de este ser um pouco mais realistas e, ainda que simplificado, constituí-se em uma situação geológica de interesse. Assim, tal modelo é utilizado como transição ao modelo complexo Marmousi apresentados no próximo exemplo. A vantagem de utilizar modelo de poucas camadas é a maior simplicidade dos sismogramas gerados e maior facilidade de se isolar as ondas associadas a diferentes reflexões, como por exemplo reflexão das ondas P (ou quase- P no caso VTI) diretas, ondas convertidas e as diversas múltiplas.

O modelo utilizado representa uma região em mar (*offshore*) com 3 camadas de rochas, além da camada de água. A profundidade total do modelo é de 1km, sendo 0,5km a altura da lâmina d'água, e a largura total do modelo de 4km, com as propriedades das camadas e posição dos refletores conforme mostra a Fig. 5.21, onde a direita e abaixo são dados valores em quilômetros e a esquerda e acima, em pontos da malha de diferenças finitas. Repare que em algumas camadas foram incluídas anisotropia tipo VTI, através de parâmetros de Thomsen δ e ϵ (apêndice B). Os parâmetros numéricos utilizados nas modelagens, como espaçamento da malha e incremento temporal, são dados na Tab. 5.4.

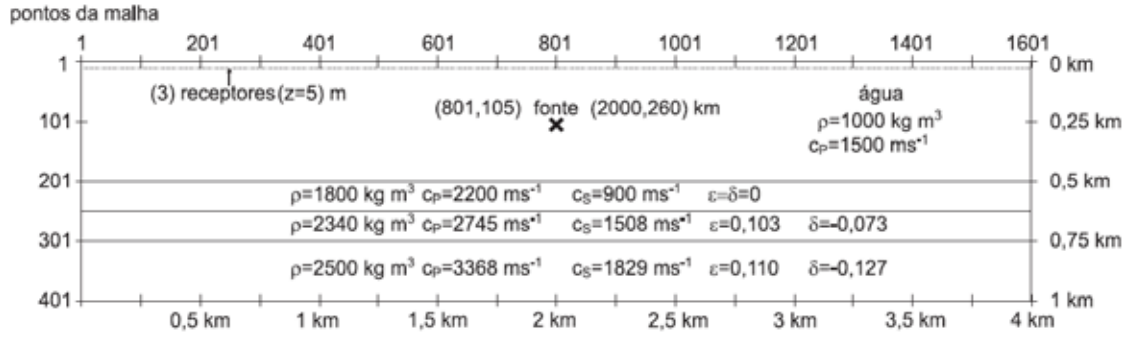


Figura 5.21: Modelos de camadas utilizado. São dadas as propriedades das camadas, as posições das interfaces em quilômetros e em pontos da malha, bem como as posições da fonte e dos receptores.

Tabela 5.4: Parâmetros utilizados nas modelagens de camadas planas, especificando-se o símbolo, o valor utilizado e uma breve explicação, com as unidades dadas entre parênteses.

nome	valor	significado (unidade)
Δt	2,5	incremento temporal ($\times 10^{-4}$ s) na marcha do tempo
h	2,5	espaçamento da malha (m) nas duas direções ($h = \Delta x = \Delta z$)
f_c	60	freqüência de corte (em Hz) da fonte sísmica
N_x	1601	número de pontos da malha na direção x
N_z	401	número de pontos da malha na direção z
N_{total}	7400	número total de passos de tempo (tempo total $t_{total} = 1,85$ s)
ixf	801	posição da fonte na direção x (dada em pontos da malha)
jzf	105	posição da fonte na direção z (dada em pontos da malha)
$jobs$	3	profundidade dos receptores (em pontos da malha)

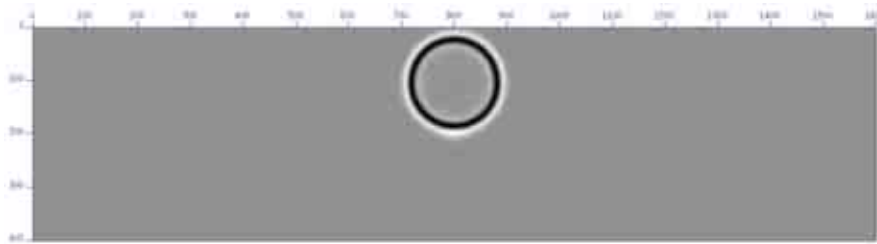
Na seqüência, os diferentes esquemas foram comparados. As modelagens foram divididas em modelagens utilizando-se operadores acústicos, elásticos isotrópicos e elásticos inisotrópicos. Chama-se a atenção para o fato de que não serão consideradas as múltiplas de superfície, uma vez que são utilizados contornos não reflexivos em todas as bordas. Ao final faz-se uma comparação entre as formulações acústicas, elásticas isotrópicas e anisotrópicas entre si, com o objetivo de exemplificar a crescente complexidade dos simogramas quando se melhora progressivamente a descrição física do fenômeno ondulatório e mostrar as diferenças nas amplitudes das reflexões quando se simplifica a descrição física do fenômeno ondulatório. A seguir, será iniciada apresentação com os resultados das modelagens utilizando-se os operadores acústicos.

5.3.1 Formulações acústicas

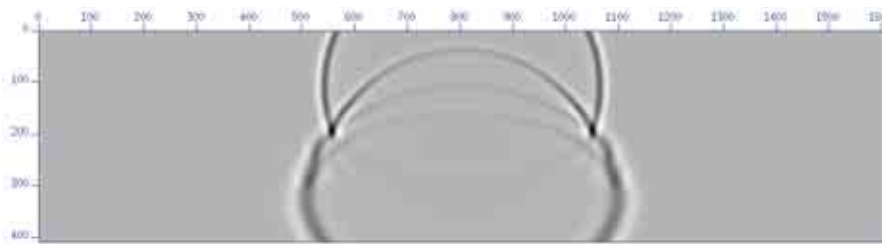
Neste tópico são apresentados os resultado das modelagens com os esquemas acústicos, onde apenas as ondas compressoriais são propagadas. Com isto, os sismogramas

gerados são mais simples, pois registram apenas os eventos associados às ondas P diretas, suas reflexões e múltiplas, desconsiderando completamente ondas convertidas. Lembrando que não são consideradas múltiplas de superfície.

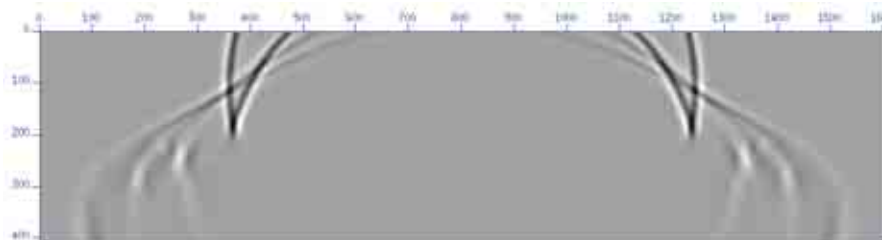
Os resultados são mostrados principalmente por meio de traços isolados do sismograma (medidos na linha de receptores), uma vez que, como antes, os instantâneos (snapshots) entre as diferentes formulações acústicas são praticamente indistinguíveis. Assim, somente para ilustrar a feição das frentes de onda ao se propagar pelo modelo de camadas, na Fig. 5.22 mostra-se os instantâneos da modelagem com



(a) tempo $t = 0,2$ s segundos.



(b) tempo $t = 0,7$ s.



(c) tempo $t = 1,0$ s.



(d) tempo $t = 1,3$ s.

Figura 5.22: Instantâneos do campo de pressão gerados com o esquema de campo único mostrando a propagação da onda acústica.

o operador de campo único acústico. Esta figura é interessante pois nela pode-se

distinguir somente as frentes de onda P , ondas estas que estarão presentes também no caso de propagação com operadores elástico. Tais ondas carregam grande parte da energia, sendo utilizadas com frequência isoladamente para a migração acústica.

Na seqüência, Fig. 5.23, mostra-se o traço do sismograma com coordenada horizontal dada por $x = 3,5\text{km}$ (afastamento de $1,5\text{km}$), onde são comparados os resultados das diferentes respostas das modelagens com os operadores acústicos de segunda ordem. Pode-se ver nas figuras, em especial nos diferentes detalhes mos-

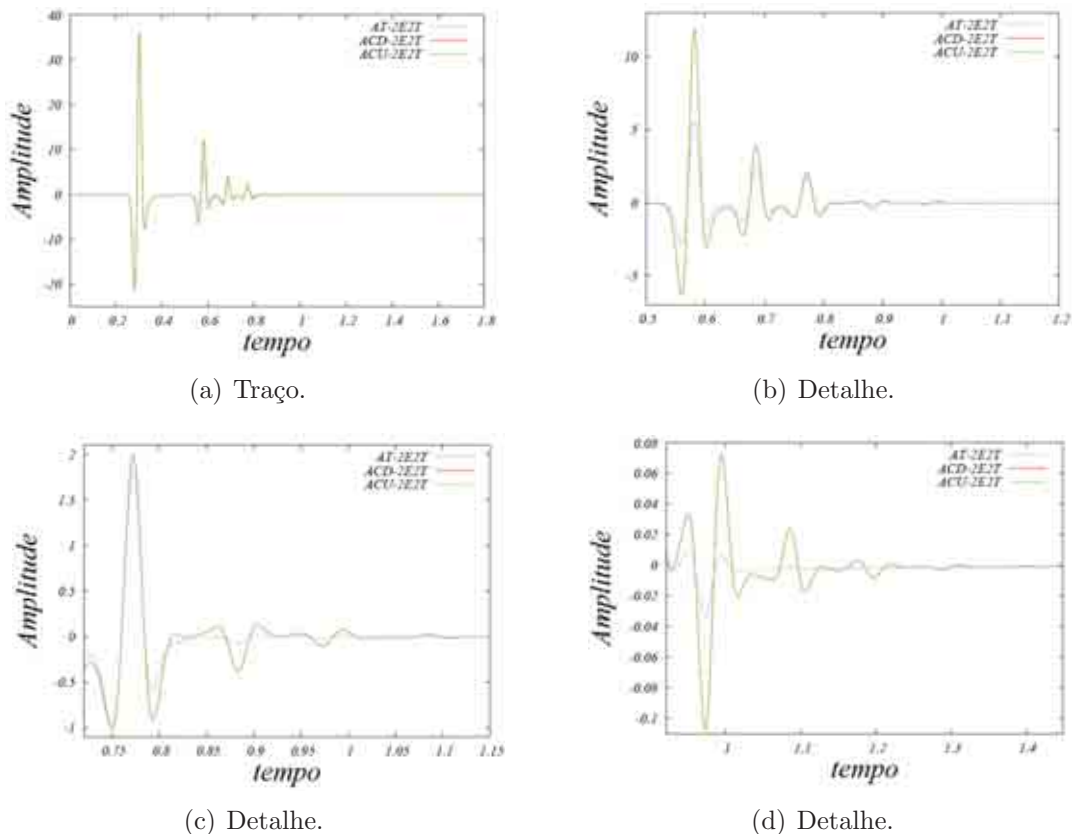


Figura 5.23: Comparação dos traços dos sismogramas de afastamento de $x = 1,5\text{km}$ para os diferentes esquemas acústicos de segunda ordem.

trados, que os esquemas de campo único e de campo duplo apresentam a mesma resposta. Em relação à formulação baseada na equação clássica da onda acústica (ρ constante), é interessante observar que as amplitudes registradas, associadas às reflexões nas interfaces, apresentam valores menores. Claro que isto se deve à diminuição dos contrastes de impedância acústica quando os gradientes de densidade são levados em conta. Observa-se ainda que, como os gráficos acima são referentes aos esquemas de segunda ordem, a discretização do termo espacial da formulação de campo único coincide com a discretização do esquema de Cohen (como discutido na seção 4.2.1).

Na seqüência, são apresentados os mesmo gráficos para os esquemas acústicos de quarta ordem no espaço, na Fig. 5.24. Como antes, pode-se ver que as reflexões dos

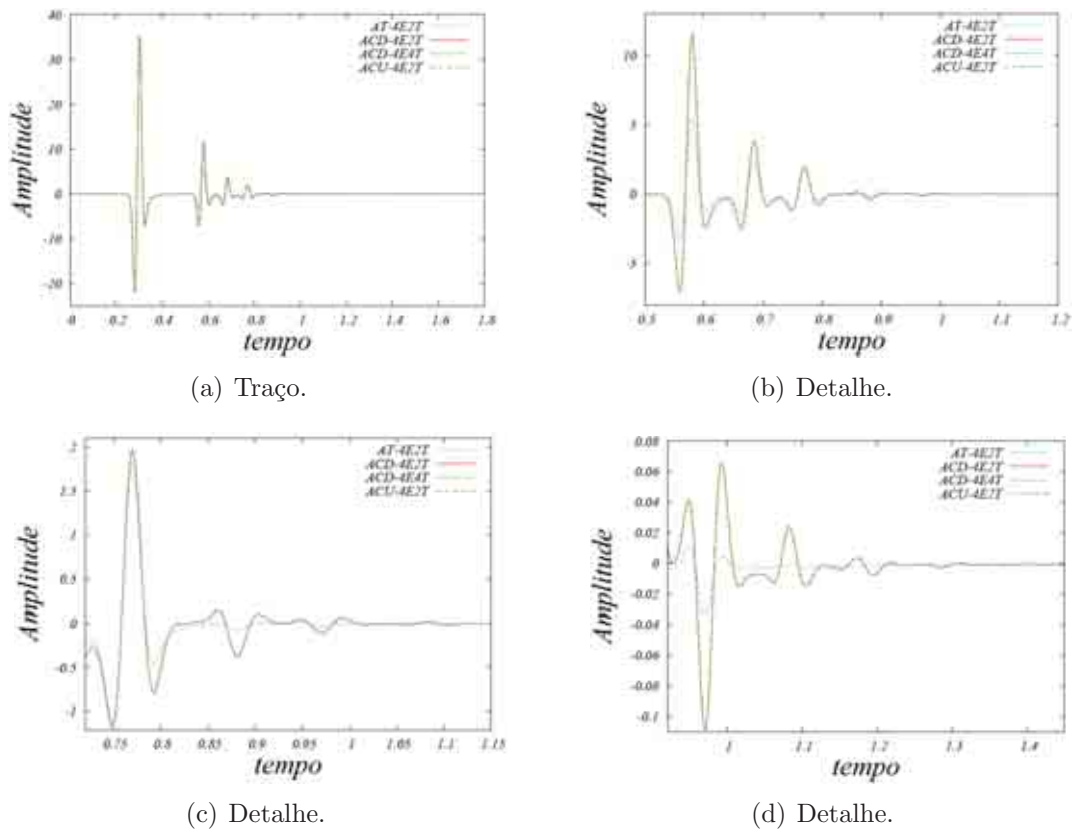


Figura 5.24: Comparação dos traços dos sismogramas de afastamento de $x = 1,5\text{km}$ para os diferentes esquemas acústicos de quarta ordem.

esquemas que consideram a variação da densidade são mais intensas e a resposta do esquema de campo único é a mesma que a do esquema de campo duplo. Uma observação importante é que o esquema de quarta ordem no tempo fornece uma resposta muito próxima daquela fornecida pelo esquema de segunda ordem correspondente. Soma-se a isto fato do esquema de quarta ordem ser muito mais caro, em virtude da inclusão dos extensos termos de correção (apresentados no apêndice F). Em virtude desta observação, os esquemas de quarta ordem no tempo não chegaram a ser implementados para o caso elástico. Por fim, enfatiza-se que o mesmo comportamento descrito nas figuras acima foi observado para todos os traços do sismograma. Portanto, conclui-se que os esquemas de campo único e de campo duplo acústico fornecem a mesma resposta. Ao final, no tópico 5.3.4, serão mostrados os sismogramas, comparando as respostas acústicas, elásticas isotrópicas e anisotrópicas.

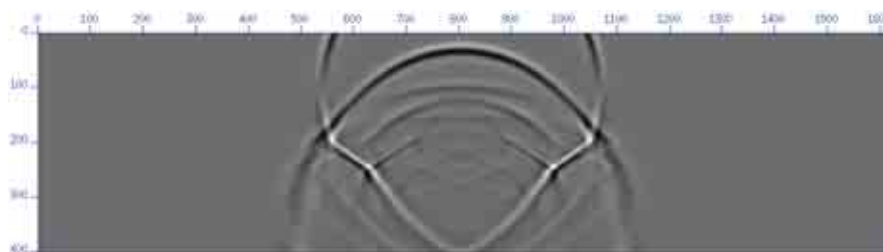
5.3.2 Formulações elásticas isotrópicas

Para exemplificar a maior complexidade das respostas considerando-se formulações elásticas, apresenta-se, como feito no caso acústico, os instantâneos do campo de propagação da onda, por exemplo o campo de velocidade na direção vertical, na Fig. 5.25. Pode-se ver a grande quantidade de modos de onda que surgem quando

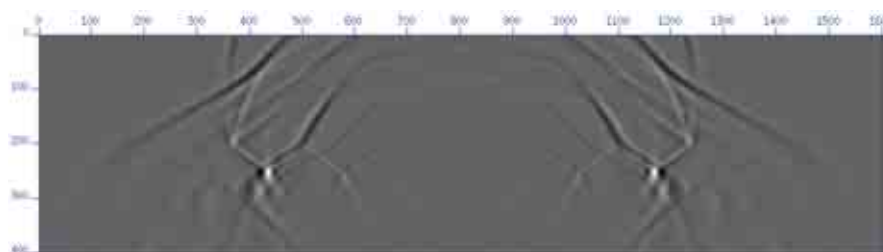
quando se considera a formulação elástica. Neste sentido, quando a onda acústica (onda P) chega a primeira camada de rocha, há conversão de parte da energia em onda S . Da mesma forma, sempre que refratar ou refletir nas interfaces do meio rochoso, parte da energia de cada modo novamente se converterá em outro modo. Todas estes modos de onda refletem nas interfaces e retornam à superfície, sendo que as ondas S vão se converter totalmente em onda P ao retornarem para a água.



(a) tempo $t = 0,3$ s segundos.



(b) tempo $t = 0,7$ s.



(c) tempo $t = 1,0$ s.



(d) tempo $t = 1,3$ s.

Figura 5.25: Instantâneos do campo de velocidade vertical mostrando a propagação da onda elástica isotrópica.

Nas próximas figuras, são mostrados, como antes, traços do sismograma de forma a comparar as diferentes respostas dos operadores elásticos isotrópicos. Na Fig. 5.26 são mostrados os resultados para os operadores elásticos isotrópicos de segunda

ordem, para dois diferentes afastamentos da fonte. Vê-se que os esquemas de campo

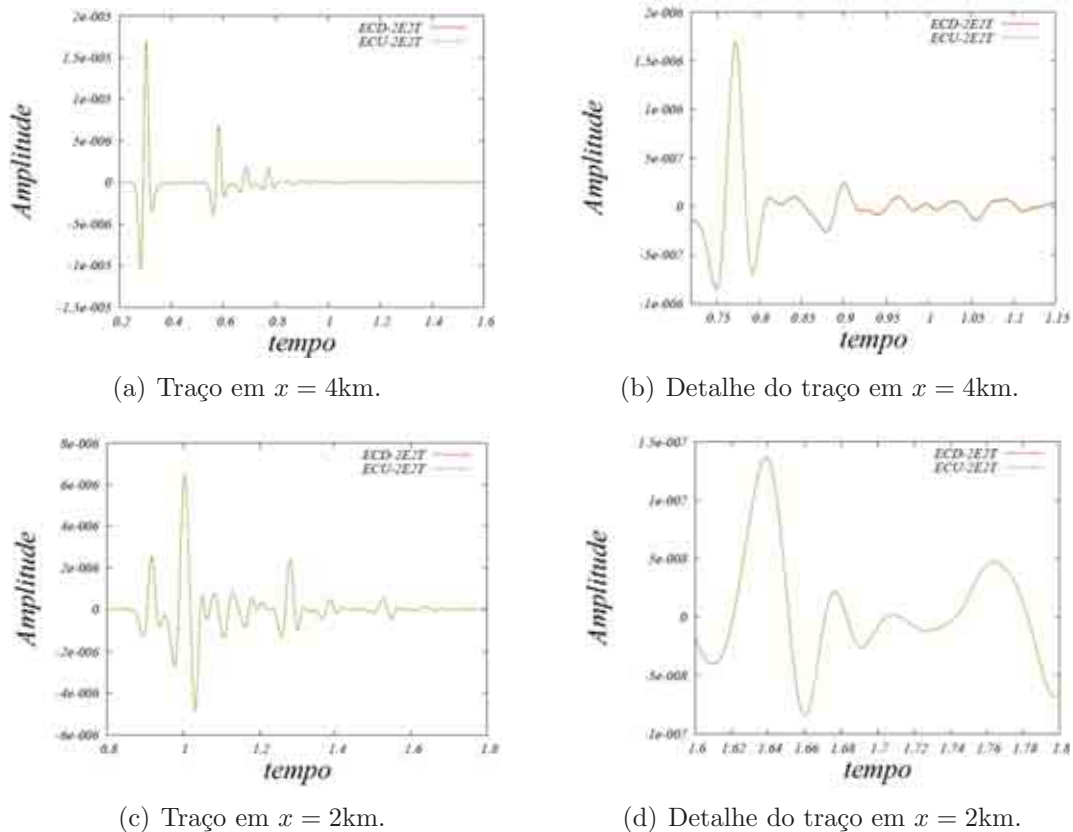


Figura 5.26: Comparação dos campo de velocidade vertical para os esquemas isotrópicos de campo único e de campo duplo.

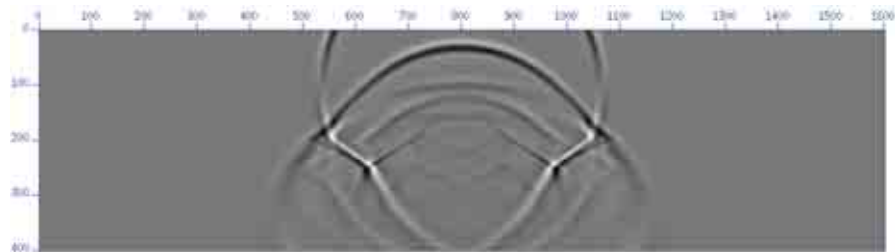
único e de campo duplo apresentam a mesma resposta, para ambos os traço — nas posições em $x = 2\text{km}$ e em $x = 4\text{km}$, que possuem, respectivamente o afastamento nulo e afastamento de 2 km em relação a fonte.

5.3.3 Formulações elásticas anisotrópicas

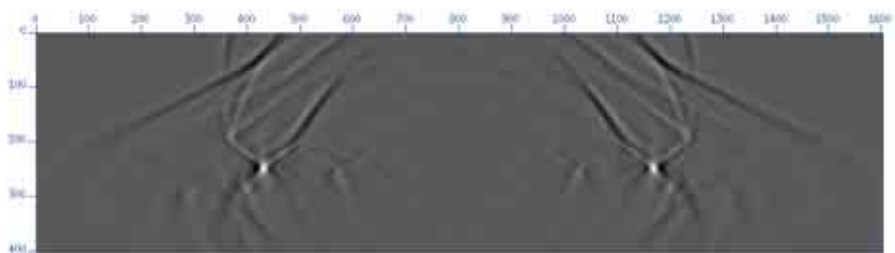
Neste tópico, são apresentados os resultados das formulações numéricas para a propagação de ondas elásticas em meios anisotrópicos no modelo de camadas. A fonte é detonada na água, deforma que apenas uma onda P é gerada e, ao atingir a primeira interface, parte da onda P se converte em onda S . Ao chegar na segunda interface, tanto a onda P quanto a onda S são convertidas em ondas quase- P e quase- S , uma vez que a terceira camada possui anisotropia VTI, sendo tais modos novamente convertidos ao atingir a última interface. Os instantâneos referentes à componente vertical da velocidade são mostrados na Fig. 5.21, para o operador de campo único na malha intercalada padrão.



(a) tempo $t = 0,3$ s segundos.



(b) tempo $t = 0,7$ s.



(c) tempo $t = 1,0$ s.



(d) tempo $t = 1,3$ s.

Figura 5.27: Instantâneos do campo de velocidade vertical mostrando a propagação da onda elástica anisotrópica.

Repare que, como todos os esquemas, seja os esquemas de campo duplo ou de campo único que utilizam a malha intercalada padrão ou a rotacionada, são válidos para anisotropia até VTI (caso 2D), os parâmetros de Thomsen são considerados nas modelagens deste tópico. Com isto, as respostas são diferentes da apresentadas no tópico anterior, sendo visíveis estas diferenças principalmente em afastamentos (*offsets*) mais elevados, uma vez que em regiões próximas à fonte, a onda se propaga em uma direção próxima da vertical, caso em que a velocidade de propagação é mais próxima da velocidade na direção vertical (utilizada nas formulações isotrópicas). Assim, quanto maior o afastamento da fonte, maior a diferença entre a velocidade na direção de propagação em relação a direção vertical, fazendo com que os tempos de trânsito se distanciem daqueles verificados na modelagem isotrópica. Isto reflete diretamente nos sismogramas, como será visto na seção 5.3.4.

Na Fig. 5.28, são mostrados de forma comparativa os resultados provenientes das modelagens utilizando-se os operadores na malha intercalada padrão (Virieux), através de traços do sismograma com diferentes afastamentos — na posição de 0,75km e 1,25km o que significa um afastamento da fonte de, respectivamente, 1,25km e 0,75km. Como se vê, os resultados são coincidentes para o caso dos esquemas nu-

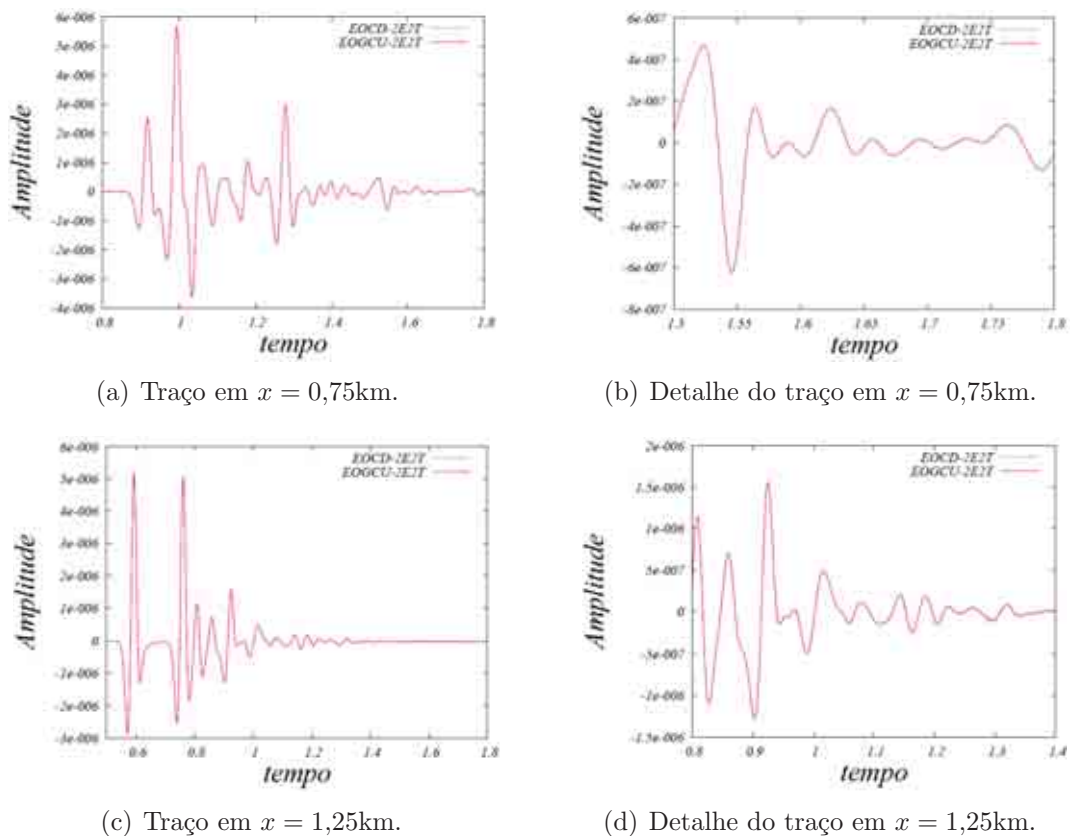


Figura 5.28: Comparação dos campo de velocidade vertical para os esquemas anisotrópicos de campo único e de campo duplo para malha rotacionada.

méricos de campo único em comparação com os esquemas de campo duplo. Nos

detalhes, dados pelas Fig. 5.28(b) e Fig. 5.28(d), onde amplia-se a escala dos referidos traços, também não há distinção dos resultados, mostrando a equivalência das modelagens utilizando-se os referidos esquemas também no caso deste meio de camadas.

Na Fig. 5.29, são mostrados de forma comparativa os resultados provenientes das modelagens utilizando-se os operadores na malha intercalada rotacionada. São mostrados dois traços diferentes do sismograma, com diferentes afastamentos, — na posição de 3km e 3,5km, respectivamente, com afastamento da fonte de 1km e 1,5km. Pode-se ver que ambos os traços apresentam resultados equivalentes para as mode-

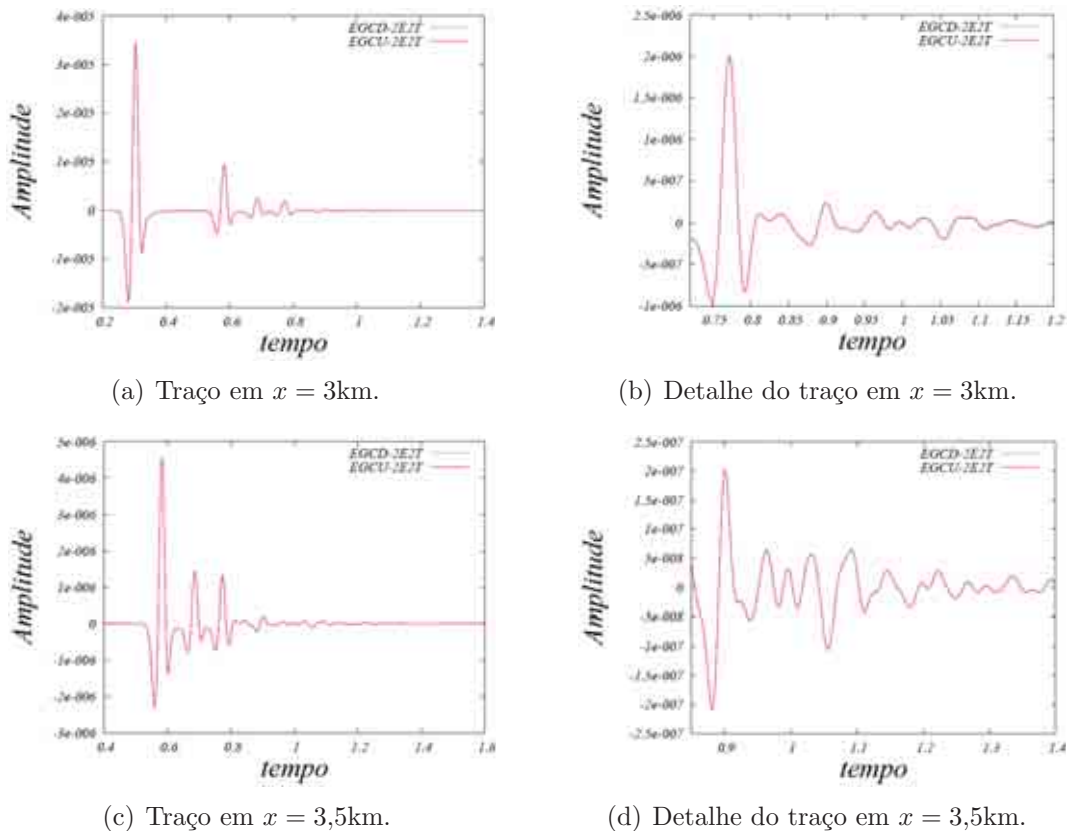


Figura 5.29: Comparação dos campo de velocidade vertical para os esquemas anisotrópicos de campo único e de campo duplo para malha rotacionada.

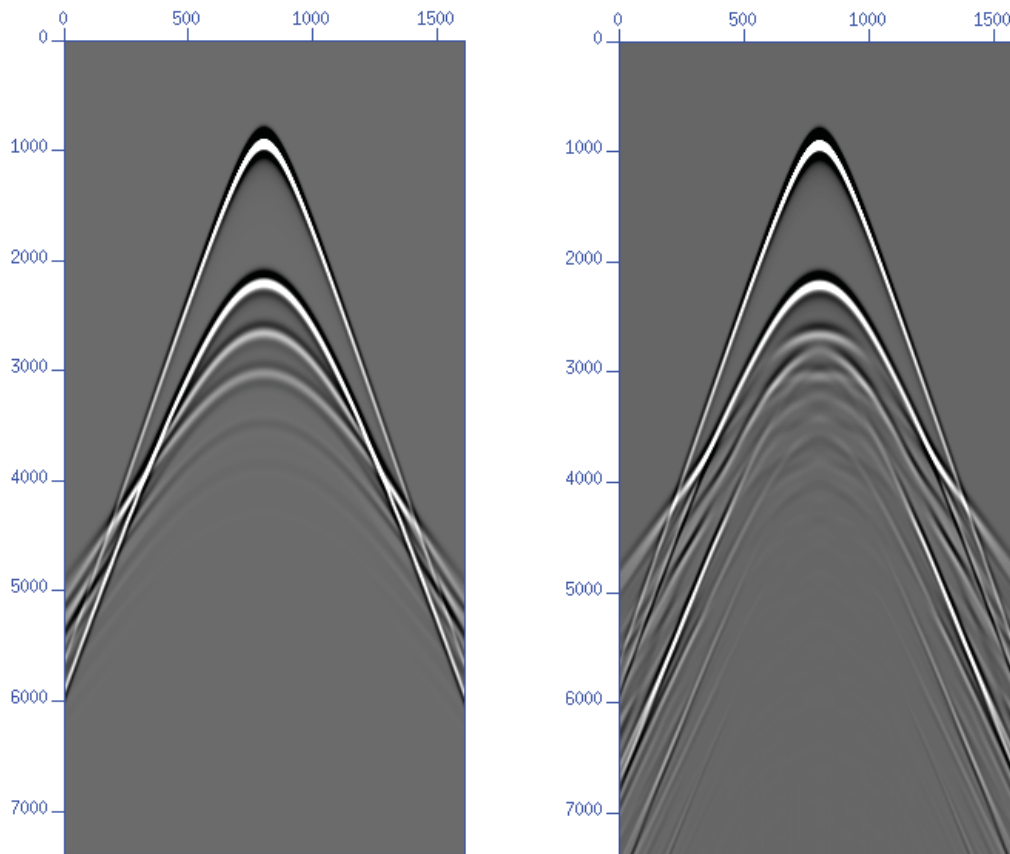
lagens de campo único de campo duplo na malha rotacionada, mesmo ampliando-se a escala, como mostram as Fig. 5.29(b) e Fig. 5.29(d). Portanto, como no caso da malha de Virieux, os esquemas na malha rotacionada se equivalem.

5.3.4 Comparação de esquemas elásticos e acústicos e sismogramas

Nesta seção, são apresentados os sismogramas completos obtidos nas modelagens realizadas acima, utilizando-se as diferentes formulações numéricas. O objetivo é

exemplificar a diferença nas respostas utilizando a teoria acústica, elástica isotrópica e anisotrópica, através das respostas dos esquemas de campo único propostos.

Primeiro, na Fig. 5.30, apresenta-se o sismograma gerado com a formulação acústica em comparação com a formulação elástica isotrópica, lado a lado para facilitar a comparação entre os mesmo. Como mencionado anteriormente, o sismograma



(a) Sismograma acústico.

(b) Sismograma elástico isotrópico.

Figura 5.30: Comparação entre os simogramas acústico e elástico isotrópico para o modelo de camadas.

elástico apresenta uma complexidade muito maior que o acústico, o que pode ser visto claramente na figura. É claro que as reflexões associadas às reflexões das ondas P diretas (não convertidas), bem como as múltiplas associadas a tais eventos, encontram-se na mesma posição nos dois casos, sendo os eventos a mais no sismograma elástico advindos das diversas conversões de ondas.

Neste sentido, na Fig. 5.30(a), a primeira curva se refere à onda direta, a segunda, terceira e quarta hipérbole se referem, respectivamente, ao primeiro, segundo e terceiro refletos. Os demais eventos presentes na figura citada estão associados a múltiplas. Na fig. 5.30(b), vê-se as reflexões associadas às ondas P diretas nas mesmas posições. O evento entre o segundo e o terceiro refletos é associado à reflexão da onda S criada na primeira interface, refletida na segunda e convertida em

onda P ao retornar para a água (onda PS-SP). Os demais eventos no referido sismograma, que não são eventos em comum com o sismograma acústico, são referentes a diferentes ondas convertidas (ver Fig. 5.25), bem como as múltiplas associadas as diversas múltiplas.

Na fig. 5.31, mostra-se o sismograma para o caso anisotrópico (Fig. 5.31(b)) em comparação com o caso isotrópico (Fig. 5.31(a)). Lembrando que foram utili-

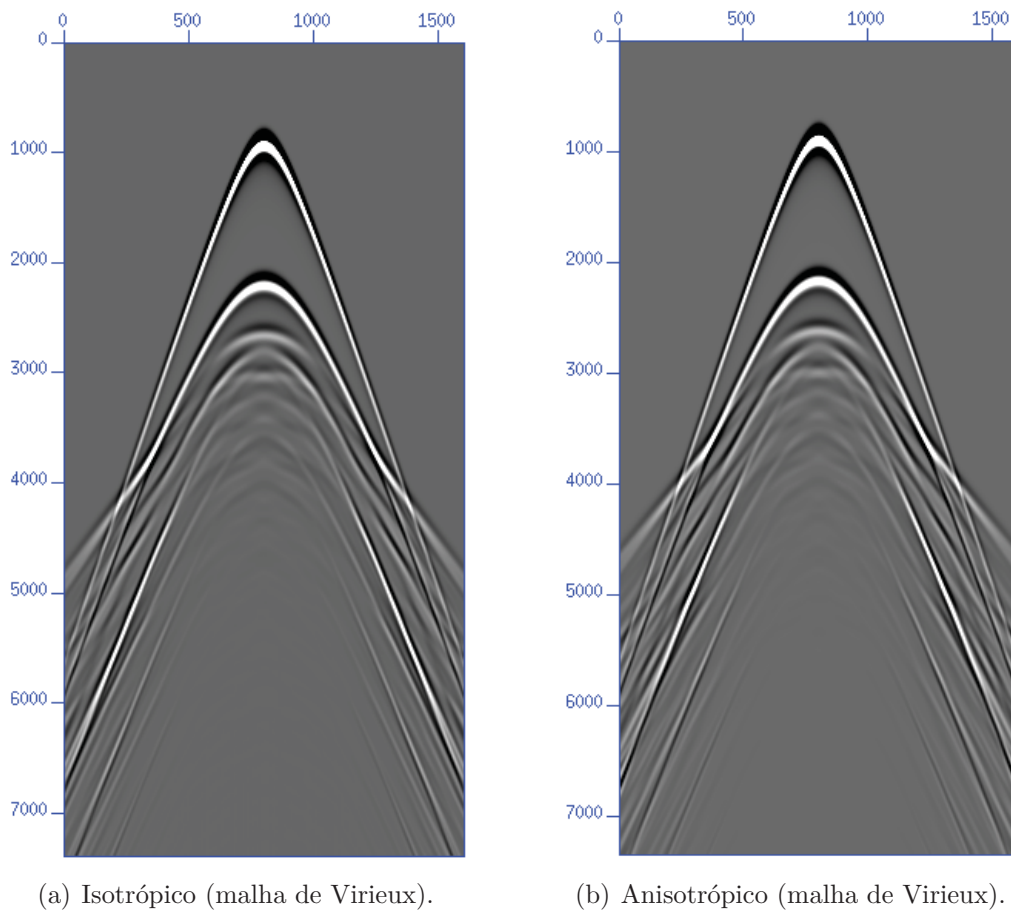
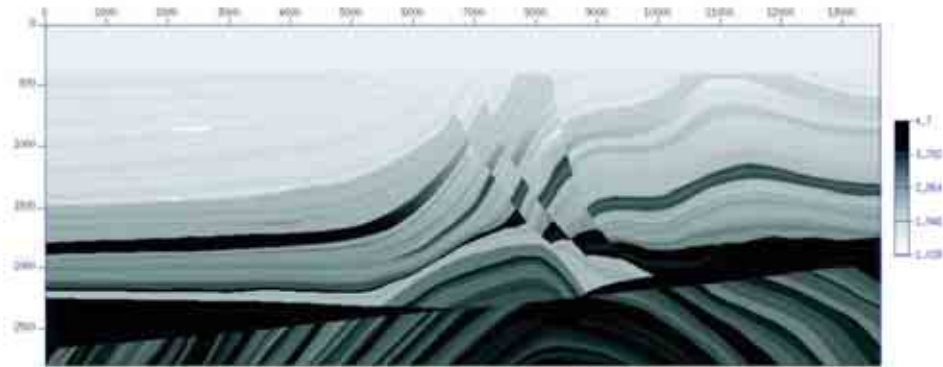


Figura 5.31: Comparação entre os simogramas gerados com operador elástico isotrópico e anisotrópico na malha de Virieux.

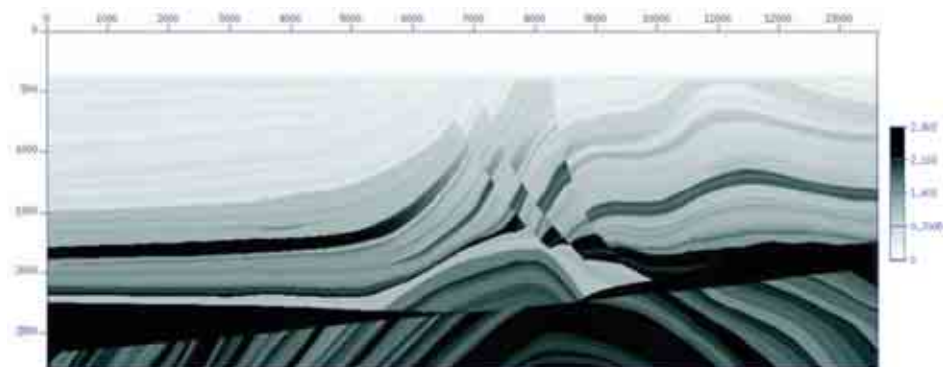
zados os esquemas de campo único na malha intercalada padrão. Pode-se ver que as curvas referentes ao segundo e terceiro refletores apresentam-se ligeiramente deslocadas em relação às posições do sismograma isotrópico. Já os eventos relativos às ondas convertidas, bem como às múltiplas, apresentam um deslocamento maior. É interessante notar que os sismogramas utilizando-se as formulações isotrópica e anisotrópica são muito semelhantes entre si, embora apresentem diferenças consideráveis para afastamentos elevados.

5.4 Aplicação para o modelo Marmousi 2

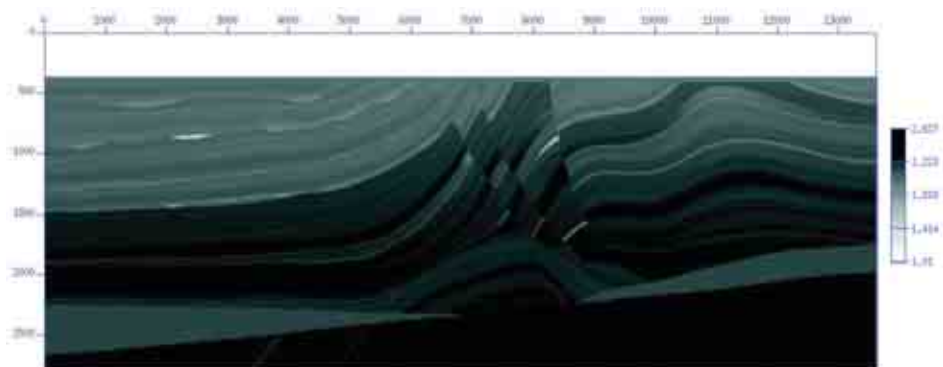
Nesta seção, os resultados serão testados para o caso de modelo de velocidades bem realistas, como é o caso do modelo conhecido como Marmousi 2 (MARTIN, 2004; MARTIN *et al.*, 2006). Tal modelo (Fig. 5.32) é uma extensão elástica do modelo Marmousi original, apresentando as mesmas feições geológicas do modelo original, sendo estendido lateralmente e incluída uma camada de água. Não é considerada



(a) Velocidade c_P



(b) Velocidade c_S .



(c) Densidade ρ .

Figura 5.32: Modelo Marmousi 2: distribuição velocidades e densidade, dados respectivamente em km s^{-1} e g cm^{-3} , sendo que o ponto indica o decimal.

nenhuma anisotropia neste modelo, sendo ele composto por tanto de três modelos:

um de velocidades de onda P , um de velocidades de onda S e um de densidades. As variação das velocidades de onda P e S desde modelo, bem como das densidades, ao longo do modelo, são mostradas na Fig. 5.32.

Os parâmetros numéricos utilizados nas modelagens são dados na Tab. 5.5.

Tabela 5.5: Parâmetros utilizados nas modelagens utilizando o modelo Marmousi 2

nome	valor	significado / unidade
Δt	1,0	incremento temporal ($\times 10^{-4}$ s) na marcha
h	1	espaçamento da malha (em m), onde $h = \Delta x = \Delta z$
f_c	60	freqüência de corte (em Hz) da fonte sísmica
N_x	13601	número de pontos da malha na direção x
N_z	2801	número de pontos da malha na direção z
N_{total}	16.000	número total de passos de tempo, sendo o tempo total $t = 1,6$ s
ixf	6801	posição da fonte na direção x (dada em pontos da malha)
jzf	265	posição da fonte na direção z (dada em pontos da malha)
jobs	261	profundidade de leitura do sismograma (dada em pontos da malha)

Na Fig. 5.33, são comparadas as respostas do esquema de campo único com o esquema de campo duplo na malha intercalada tradicional (de Virieux). Acima,

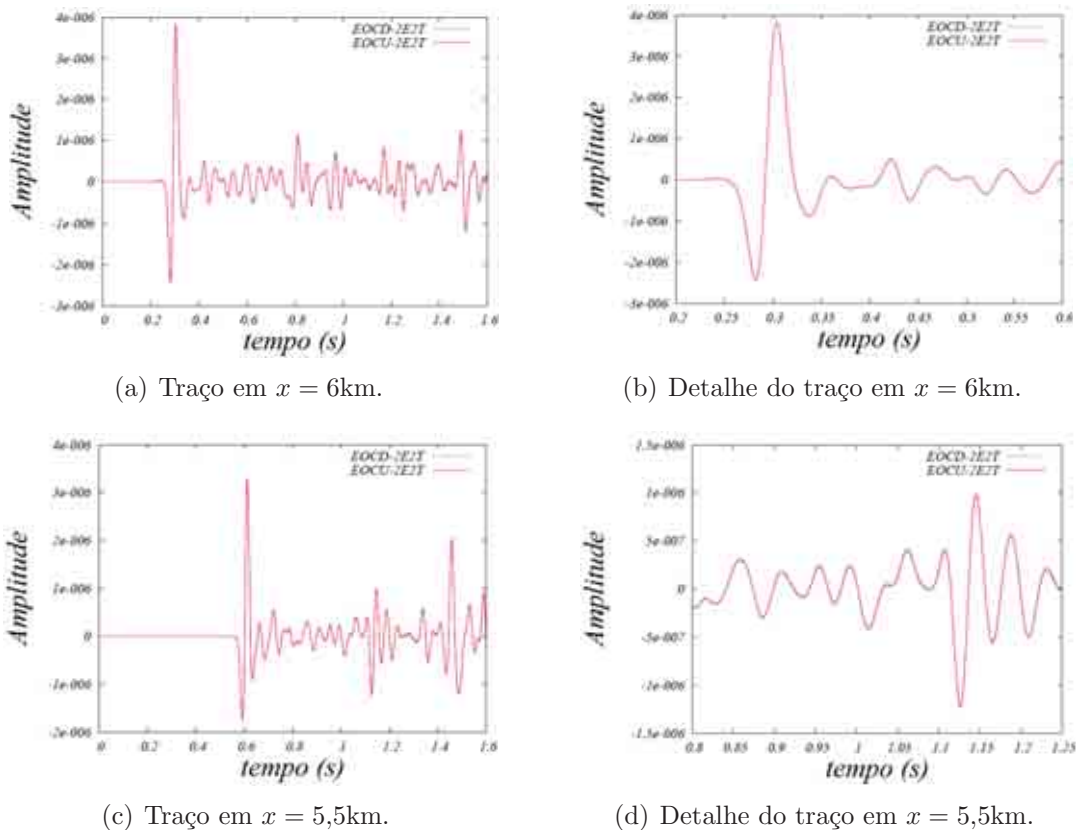


Figura 5.33: Traços do sismograma para os esquemas na malha padrão.

é mostrado o traço de posição $x = 6$ km, o que corresponde a um afastamento da fonte (*offset*) de 800m e, abaixo, é mostrado o traço de posição $x = 5,5$ km, o

que corresponde a um afastamento da fonte de 1300m. Como em todas as situações mostradas nos exemplos anteriores, a resposta do esquema de campo único proposto é equivalente à do esquema de campo duplo clássico na malha de Virieux.

Na seqüência, Fig. 5.34, são mostrados os resultados para os esquemas na malha intercalada rotacionada. Como a figura anterior, acima, é mostrado o traço

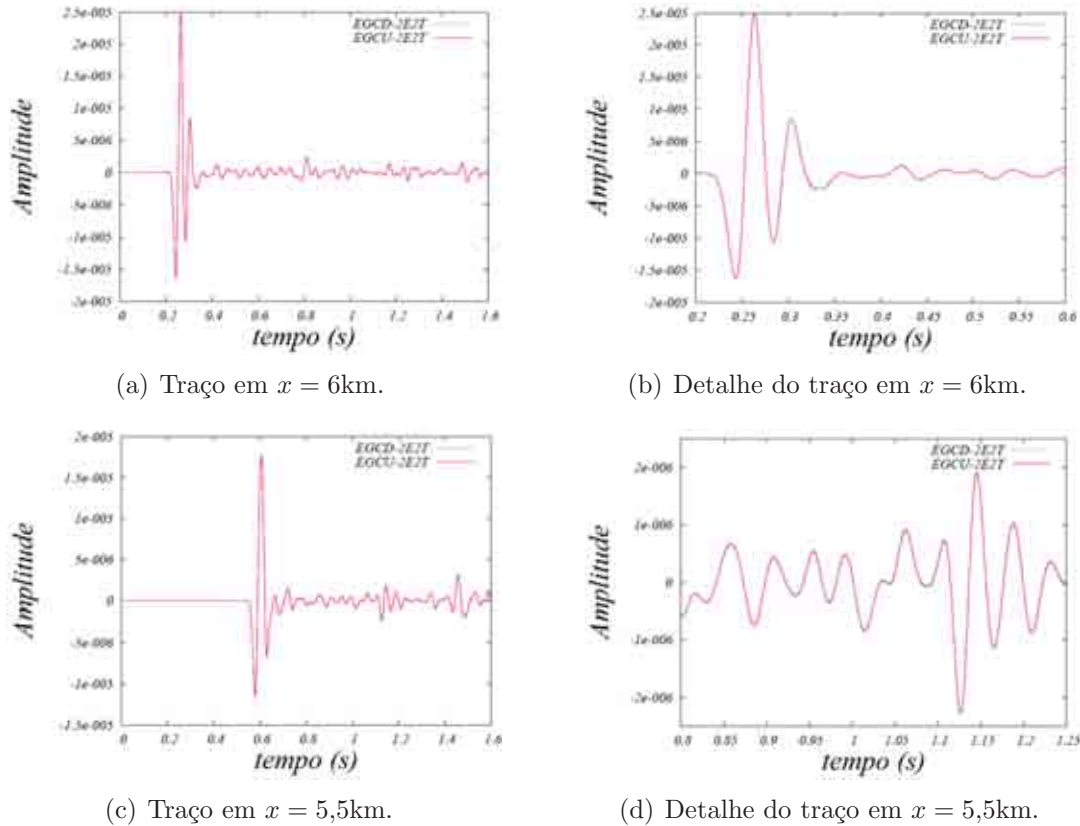


Figura 5.34: Traços do sismograma para os esquemas na malha rodada.

com afastamento da fonte de 800m e, abaixo, o traço com afastamento da fonte de 1300m. Os resultados da formulação de campo único proposta são equivalentes aos do esquema de campo duplo clássico na malha rotacionada. Uma observação deve ser feita no que se refere à aplicação da fonte na malha rotacionada. A equivalência da fonte entre o esquema de campo único e o esquema de campo duplo foi feita, como se pode ver nos resultados mostrados na figura.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho, foram desenvolvidas formulações numéricas generalizadas, baseadas no método das diferenças finitas com malhas intercaladas, aplicadas a problemas de propagação de ondas sísmicas em meios gerais (anisotrópicos, ortotrópicos, VTI, acústicos, etc) envolvendo geologias complexas, em especial para acoplamento entre meios elásticos e acústicos. Todas as formulações desenvolvidas se baseiam na discretização de equações de segunda ordem para um único campo de propagação, referenciadas pela abreviação SG-SF (*Staggered Grid Single Field Formulations*), dentro do escopo da teoria da elasticidade linear. Para o desenvolvimento das formulações, foi utilizado um método geral para a obtenção de operadores generalizados em malhas intercaladas clássicas, sendo construídos de forma a incorporar as características espectrais (estabilidade, convergência, etc) dos métodos clássicos correspondentes, mas apresentando algumas vantagens do ponto de vista computacional.

Os esquemas desenvolvidos podem ser divididos em duas famílias distintas de algoritmos, baseadas na utilização de malhas intercaladas clássicas da geofísica, sendo a primeira delas aquela associada à malha padrão (SSG) (VIRIEUX, 1986) e a segunda aquela associada à malha rotacionada (RSG) (SAENGER *et al.*, 2000). Por esta razão tais famílias de algoritmos são designadas, respectivamente, por SSG-SF e RSG-SF, combinando as siglas apresentadas acima. A família SSG-SF é adequada para o caso envolvendo anisotropias até ortotrópica — incluindo os subcasos como VTI, isotrópico e acústico — e a RSG-SF é adequada a problemas com qualquer grau de anisotropia, como por exemplo o caso TTI, também de grande interesse em sísmica, especialmente em regiões fraturadas. Enfatiza-se que todos os esquemas numéricos propostos são desenvolvidos utilizando-se essencialmente o mesmo método, que consiste na aplicação dos operadores utilizados nos trabalhos clássicos (para malha intercalada) duas vezes sucessivamente para obtenção dos operadores generalizados.

Ressalta-se que, diferente dos esquemas clássicos citados, baseados em sistemas de primeira ordem, as formulações numéricas propostas aqui são baseadas nas equi-

valentes equações diferenciais de segunda ordem que regem o fenômeno ondulatório. Com isto torna-se possível formular diferentes esquemas envolvendo campos de propagação distintos, ou seja, pode-se discretizar a equação da onda de deslocamento, a equação da onda de velocidade ou a equação da onda de tensão, todas equações de segunda ordem. Pode-se também considerar diferentes graus de anisotropia em cada família, gerando, por exemplo, esquemas elásticos isotrópicos e acústicos que podem ser vistos como sub-famílias dos esquemas propostos. A seguir, é feito um resumo dos assuntos abordados e resultados obtidos ao longo do trabalho.

No capítulo 2, foram deduzidas as equações diferenciais que regem o fenômeno ondulatório em meios anisotrópicos gerais, particularizando os casos de anisotropia ortotrópica, isotrópico e acústico, tratados neste trabalho. Foram escritas as diferentes formulações matemáticas do fenômeno, em especial os sistemas de primeira ordem escritos utilizando-se dois campos de propagação (equações de campo duplo) e as equações de segunda ordem escritas para um único campo de propagação (equações de campo único).

No capítulo 3, foram discutidas questões relativas à obtenção dos operadores em malhas intercaladas, iniciando-se por uma revisão de diferentes configurações de malhas intercaladas, onde é mostrada sua relação com as equações que se deseja discretizar. São obtidos os operadores clássicos utilizados nas formulações de Virieux e Saenger, que por sua vez são também discutidas. A partir de princípios simples, os operadores de diferenças finitas em malhas intercaladas são generalizados, sendo obtidos operadores para derivadas de segunda ordem em cada uma das malhas intercaladas utilizadas. Tais operadores são a base das formulações de campo único propostas, apresentadas no capítulo 4. Destaca-se que as formulações de diferenças finitas com malha intercalada propostas na literatura, diferentes das propostas neste trabalho, são todas baseadas nas equações de campo duplo.

No capítulo 4, foram então apresentados os esquemas originalmente desenvolvidos e efetivamente implementados neste trabalho, tendo sido demonstrada a equivalência numérica entre os esquemas de campo único e os esquemas de campo duplo clássicos. Foram abordados também esquemas de quarta ordem no tempo, utilizando-se a formulação de Lax-Wendroff, sendo deduzidas as equações modificadas gerais para o caso elástico anisotrópico. É importante ressaltar que, neste trabalho, implementa-se a quarta ordem no tempo apenas para o caso acústico, embora tenham sido obtidas também as expressões dos termos de correção para o caso elástico isotrópico (no apêndice F). A razão pela qual não foram implementadas as formulações de quarta ordem no tempo para o caso elástico se deve ao alto custo computacional das mesmas, além das pequenas diferenças nas respostas verificadas para o caso acústico implementado.

No capítulo 5, foram apresentados diversos exemplos numéricos comparando os

esquemas desenvolvidos com os propostos na literatura. Foi demonstrado na prática que, de fato, os esquemas de campo único apresentam os mesmos resultados dos esquemas de campo duplo correspondentes. Foram avaliados ainda, nos referidos exemplos, diversas questões discutidas ao longo do trabalho, como por exemplo a equivalência da aplicação da fonte entre esquemas distintos, bem como as respostas dos esquemas em regiões de acoplamento elástico-acústico para meios anisotrópicos.

Assim, as principais contribuições deste trabalho são os novos algoritmos propostos e implementados, bem como o método proposto para obtenção de esquemas generalizados em malhas intercaladas. As duas famílias de esquemas propostos, citadas anteriormente, englobam diversas sub-famílias de esquemas numéricos, cada uma delas válida para diferentes meios geofísicos (ortotrópico, isotrópico, elástico, etc). Enfatiza-se que as sub-famílias mais gerais englobam naturalmente as sub-famílias para meios mais simples. Cada sub-família pode ser formulada utilizando-se diferentes campos de propagação (deslocamento, velocidade e tensão), sendo os resultados equivalentes aos dos esquemas de campo duplo correspondente. Entretanto, algumas destas possibilidades não apresentam vantagem numérica alguma a princípio. Por exemplo, de forma geral, as sub-famílias para meios elásticos formuladas em deslocamento (ou tensão) necessitam de menos memória computacional que as formulações de campo duplo correspondentes. No caso acústico, as sub-famílias em pressão, por sua vez, apresentam vantagem em termos de armazenamento. A seguir lista-se os esquemas mais vantajosos:

1. Família de campo único na malha intercalada clássica (SSG-SF).

Esquema acústicos (ρ constante) para pressão.

Esquema acústico (ρ variável) para pressão.

Esquema elástico isotrópico em deslocamento (velocidade).

Esquema elástico ortotrópico em deslocamento (velocidade).

2. Família de campo único na malha rotacionada (RSG-SF).

Esquema elástico anisotrópico geral em deslocamento (velocidade).

Em relação à utilização da memória, os esquemas clássicos para o caso elástico — seja o de Virieux ou o de Saenger — têm um dispêndio de memória de $5N$ (N é o número total de pontos da malha) em duas dimensões (considerando apenas os campos de propagação), referentes a duas componentes de velocidade e três de tensão, e $9N$ em três dimensões, referentes a três componentes de velocidade e seis de tensão. Para resolver o mesmo problema utilizando-se um esquema de campo único baseado em tensão, o dispêndio de memória seria de $6N$ em duas dimensões e $12N$ em três dimensões — pois é necessário armazenar os campos em dois instantes de tempo

para o cálculo do campo futuro —, ou seja, tal esquema necessita, respectivamente, 20 % e 33 % a mais de memória, não sendo portanto vantajoso computacionalmente. Por outro lado, o esquema de campo único formulado para as equações em termos de deslocamento (ou velocidade) necessita de $4N$ e $6N$ de memória, respectivamente, em duas dimensões e três dimensões, o que significa uma utilização de apenas 80 % e 67% da memória utilizada nos esquemas de campo duplo clássicos, o que representa uma vantagem em relação a estes.

Em relação ao caso acústico, a vantagens em termos de gasto de memória computacional é ainda maior que a para o caso elástico, desde que utilizado o campo de pressão. Isto se deve ao fato do campo de tensões se reduzir, no caso acústico, a apenas uma componente, ou seja, a pressão acústica. Desta forma, o esquema de campo único baseado na equação para pressão tem um dispêndio de $2N$ de memória (onde N é o número de pontos da malha), tanto em duas quanto em três dimensões. Desta forma, em relação ao esquema clássico de campo duplo acústico, o esquema de campo único proposto utiliza apenas 67 % da memória daquele, no caso de duas dimensões, e 50 %, no caso de três dimensões. Verifica-se ainda que o esquema acústico para densidade constante apresenta uma eficiência computacional elevada, sendo bem mais rápido que o esquema de campo duplo clássico, possuindo ainda praticamente o mesmo número de operações que o esquema tradicional (baseado na equação acustica da onda para densidade constante) e a mesma precisão da malha intercalada acústica. Portanto, tais operadores são indicados para aplicações voltadas para a cinemática de ondas P , como por exemplo a migração RTM acústica. Já o esquema para densidade variável apresenta-se como alternativa, por exemplo, ao esquema de Cohen (COHEN e JOLY, 1990) quando se deseja levar em conta a influência de ρ nas amplitudes. Enfatiza-se que o esquema de campo único apresenta-se vantajoso em relação ao esquema de Cohen, uma vez que apresenta menor custo computacional, maior precisão numérica e maior estabilidade, sem necessidade de suavização da densidade para estabilização do esquema (como ocorre no caso do esquema de Cohen).

Enfatiza-se que ambos os esquemas acústicos desenvolvidos, por envolverem apenas o campo de pressão, apresentam-se sem intercalamento neste campo. No caso de densidade variável, a densidade é considerada em pontos intermediários da malha. Já o esquema para densidade constante utiliza a velocidade em pontos da malha simples. Outra característica do esquema de campo único acústico é que, por exemplo em quarta ordem, o número de pontos utilizado é maior do que o esquema de Cohen: 15 pontos contra 11 pontos do esquema de Cohen. Com isto, o esquema de Cohen recai no esquema acústico clássico no caso em que o meio apresenta densidade constante, enquanto os esquemas de campo único propostos apresentam a precisão do esquema de campo duplo clássico que é maior do que aquela. Assim,

outra conclusão importante, que fica especialmente evidenciada no caso acústico, é que o *stencil* da malha de intercalada é maior que o da malha simples, sendo este fato o responsável pela maior precisão dos esquemas de malha intercala e não, como citado em alguns trabalhos da literatura, a consideração de espaçamento da malha reduzidos pela metade.

Em relação especificamente à família RSG-SF, conclui-se que em virtude de serem mais caros que os esquemas equivalentes na malha padrão, além de apresentarem maior dispersão numérica, tais esquemas são indicados a princípio somente para modelar meios como anisotropia maior de ortotrópica (como TTI), situação onde a malha de Virieux não é adequada. Entretanto, como mencionado em SAENGER e BOHLEN (2004); SAENGER *et al.* (2000), a malha rotacionada apresenta maior estabilidade para modelar situações extremas de heterogeneidades, como por exemplo em trincas de densidade muito pequena. Com isto, pode-se modelar também uma superfície livre naturalmente introduzindo-se por exemplo uma camada de ar acima da água. Como desvantagem, cita-se os cuidados especiais necessários para a aplicação da fonte explosiva, que deve ser aplicada em uma região espacial, cuidados estes necessários devido a problemas de acoplamento na malha rotacionada (HUSTEDT *et al.*, 2004).

Em comparação com os esquemas da literatura formulados para uma única variável, é importante citar que o caso elástico isotrópico apresentado aqui como um caso particular — pertencente à família de campo único na malha de Virieux (SSG-SF) — é equivalente ao proposto em LUO e SCHUSTER (1990), embora seja apresentado de forma bem mais geral do que no referido trabalho. Por outro lado, o esquema para anisotropia ortotrópica da mesma família é uma formulação mais geral, constituindo-se em uma proposta original deste trabalho. O mesmo é aplicável ao campo de deslocamento ou ao campo de velocidade apenas modificando-se a fonte. Tal esquema modela corretamente regiões com razão de Poisson arbitrária, incluindo regiões contendo água. Por outro lado, os esquemas baseados na equação da onda para deslocamento, por exemplo o esquema de Kelly (KELLY *et al.*, 1976), apresentam sérios problemas neste caso, gerando respostas inaceitáveis com alta dispersão associada a artefatos numéricos. Nos exemplos deste trabalho, observou-se ainda que, mesmo em situações não tão adversas em termos de razões de Poisson, o esquema de Kelly apresenta problemas em relação à artefatos provenientes da aplicação da fonte, que possuem dispersão numérica associada. Tais artefatos, parecem ser devidos à anisotropia numérica e encontram-se presentes mesmo em materiais com pequena razão de Poisson. Por outro lado, a extensão ortotrópica do esquema de Kelly (desenvolvida e implementada neste trabalho), não apresenta o artefato numérico citado. Mas verifica-se, entretanto, que tal esquema apresenta maior dispersão numérica associada à onda quase- S , de forma que para gerar uma resposta

com a mesma precisão do esquema de campo único, é necessário reduzir o espaçamento da malha. Com isto, mesmo com o critério de estabilidade menos restritivo, a extensão ortotrópica do esquema de Kelly acaba sendo mais cara, além de necessitar de mais memória, para um determinado nível de precisão exigido, em comparação com o esquema de campo único. Enfatiza-se que o esquema de campo único é completamente livre de artefatos devidos à aplicação da fonte, o que, em conjunto com a boa representação da onda em regiões de acoplamento elástico-acústicas, faz deste esquema melhor que a extensão de Kelly.

Uma conclusão geral importante é que todos os esquemas de campo único desenvolvidos, apresentam os mesmos resultados dos esquemas clássicos correspondentes, com as mesmas características de precisão e estabilidade. Portanto, eles apresentam resultados acurados mesmo em situações de acoplamento elástico-acústico, diferente dos esquemas baseados em deslocamentos que são encontrados na literatura (esquema de Kelly, por exemplo).

Como conclusão final deste trabalho, cita-se a importância do desenvolvimento de esquemas de campo único alternativos aos populares esquemas de malha intercalada existentes na literatura, uma vez que tais esquemas podem apresentar vantagens em termos de memória e/ou custo computacional, como discutido. É importante mencionar que os métodos apresentados para obtenção dos esquemas de campo único são gerais e podem ser aplicados a outros problemas envolvendo equações hiperbólicas, como por exemplo na formulação de Yee para o eletromagnetismo ou problemas de dinâmica de fluidos. Outra contribuição deste trabalho se refere ao entendimento da forma como a fonte sísmica deve ser aplicada aos diferentes esquemas, resultado este importante para a utilização dos esquemas aqui propostos, tanto quanto os esquemas da literatura, como por exemplo o esquema de Kelly.

Como dito a principal vantagem das formulações de campo único propostas em relação às formulações clássicas intercaladas é o menor dispêndio de memória computacional, fornecendo respostas que apresentam as mesmas características numéricas de precisão, estabilidade e dispersão das formulações clássicas correspondentes. Portanto, os esquemas de campo único podem acomodar modelos bem maiores que os de esquemas tradicionais, fornecendo respostas tão boas quanto estes. Uma desvantagem é que os esquemas de campo único apresentam expressões mais complicadas, sendo mais difícil de programar e possuindo em geral um custo computacional maior. Entretanto, com uma programação cuidadosa pode-se reduzir substancialmente este custo. Enfatiza-se que o caso acústico para densidade constante apresenta vantagens tanto em memória quanto em custo computacional.

Pretende-se dar prosseguimento às pesquisas empreendidas neste trabalho, principalmente no que se refere aos seguintes temas de interesse:

1. Implementação tridimensional dos algoritmos;

2. Implementação de quarta ordem no tempo para os esquemas elásticos;
3. Estudos adicionais sobre a aplicação da fonte sísmica na malha rotacionada;
4. Desenvolvimento e implementação do esquema de campo único para a formulação de Yee para o eletromagnetismo;
5. Estudos adicionais e implementação de condições de contorno não reflexivas e camadas de amortecimento estáveis em meios anisotrópicos;
6. Estudo de novas possibilidades de configurações de malhas intercaladas, alternativas à malha rotacionada, para abordar o problema elástico anisotrópico;
7. Estudos adicionais e implementação de algoritmos de migração RTM utilizando-se as formulações numéricas anisotrópicas para avaliar os resultados e possíveis vantagens e desvantagens.

Referências Bibliográficas

- ACHENBACH, J., 1973, *Wave Propagation in Elastic Solids. Applied Mathematics and Mechanics, v. 16*. Amisterdam, North-Holland Publishing Company.
- AKI, K., RICHARDS, P., 2002, *Quatitative Seismology*. 2 ed. Amisterdam, University Science Books.
- ALFORD, R. M., KELLY, K. R., BOORE, D. M., 1974, “Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation”, *Geophysics*, v. 39, n. 6, pp. 834–842.
- ALKHALIFAH, T., 2000, “An acoustic wave equation for anisotropic media”, *Geophysics*, v. 65, n. 4, pp. 1239–1250.
- ALTERMAN, Z. S., KORNFELD, P., 1968, “Finite difference solution for pulse propagation in a sphere”, *Israel Journal of Thechnology*, v. 6, pp. 138–149.
- ALTERMAN, Z. S., LOEWENTHAL, D., 1970, “Seismic waves in a quarter and three-quarter plane”, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, v. 20, n. 2, pp. 101–126.
- ALTERMAN, Z. S., ROTENBERG, A., 1969, “Seismic waves in a quarter plane”, *Bulletin of the Seismological Society of America*, v. 59, pp. 347–368.
- ALVES, G., BULCAO, A., SOARES FILHO, D., et al., 2009, “A Target oriented approach for illumination analysis using wave equation via FDM”. In: *Expanded abstract, 79th Annual International Meeting*, pp. 1794–1797. SEG.
- ANDREWS, D., 1973, “A numerical study of tectonic stress release by underground explosions”, *Bulletin of the Seismological Society of America*, v. 63, pp. 1375–1391.
- ANNE, L., JOLY, P., TRAN, Q. H., 2000, “Construction and analysis of higher order finite difference schemes for 1D wave equation”, *Computacional Geociences*, v. 4, pp. 207–249.

- APPELÖ, D., KREISS, G., 2006, “A new absorbing layer for elastic waves”, *Journal of Computational Physics*, v. 215, n. 2, pp. 642–660.
- ASTER, R., THURBER, C., BORCHERS, B., 2005, *Parameter estimation and inverse problems*. New York, Academic Press.
- BANSAL, R., SEN, M. K., 2008, “Finite-difference modelling of S-wave splitting in anisotropic media”, *GEOPHYSICAL PROSPECTING*, v. 56, n. 3 (MAY), pp. 293–312. ISSN: 0016-8025. doi: {10.1111/j.1365-2478.2007.00693.x}.
- BARBOSA, V., SILVA, J., MEDEIROS, W., 1997, “Gravity inversion of basement relief using approximate equality constraints on depths”, *Geophysics*, v. 62, n. 6, pp. 1745–1757.
- BATHE, K.-J., 1996, *Finite Element Procedures*. 2 ed. New Jersey, Prentice-Hall.
- BAYSAL, E., KOSLOFF, D. D., SHERWOOD, J. W. C., 1983, “Reverse time migration”, *Geophysics*, v. 48, n. 11, pp. 1514–1524.
- BÉCACHE, E., FAUQUEUX, S., JOLY, P., 2003, “Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves”, *Journal of Computational Physics*, v. 188, n. 2, pp. 399–433.
- BERENGER, J., 1994, “A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves”, *Journal of computational physics*, v. 114, n. 2, pp. 185–200.
- BERKHOUT, A., 1985, *Seismic Migration: Imaging of acoustic energy by wave field extrapolation: in Developments in Solid Earth Geophysics, Vol. 14A*. Elsevier.
- BOORE, D., 1972, “Finite difference methods for seismic wave propagation in heterogeneous materials”, *Methods in computational physics*, v. 11, pp. 1–37.
- BORISENKO, A. I., TARAPOV, I. E., 1979, *Vector and tensor analysis with applications*. 1 ed. New York, Dover Publications, Inc.
- BOS, L., GIBSON, P., KOTCHETOV, M., et al., 2004, “Classes of anisotropic media: a tutorial”, *Studia Geophysica et Geodaetica*, v. 48, n. 1, pp. 1573–1626.
- BREBBIA, C., TELLES, J., WROBEL, L., 1984, *Boundary element techniques: theory and applications in engineering*.

- BULCÃO, A., 2004, *Modelagem e Migração Reversa no Tempo Empregando Operadores Elásticos e Acústicos*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- CARCIONE, J., 2007, *Wave Fields in Real Media. Handbook of geophysical exploration, v. 38*. Elsevier.
- CARCIONE, J., HERMAN, G., TEN KROODE, A., 2002, “Seismic modeling”, *Geophysics*, v. 67, pp. 1304.
- CERJAN, C., KOSLOFF, D., KOSLOFF, R., et al., 1985, “A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations”, *Geophysics*, v. 50, n. 4, pp. 705–708.
- CERVENÝ, V., 2001, *Seismic ray theory*. Cambridge Univ Press.
- CHALJUB, E., KOMATITSCH, D., VILOTTE, J., et al., 2007, “Spectral-element analysis in seismology”. In: Dmowska, R. (Ed.), *Advances in Geophysics*, v. 48, pp. 365–419, Elsevier.
- CHEN, J., 2007, “High-order time discretizations in seismic modeling”, *Geophysics*, v. 75, n. 5, pp. SM115–SM122.
- CHEN, J., 2009, “Lax-Wendroff and Nyström methods for seismic modelling”, *Geophysical Prospecting*, v. 57, n. 6, pp. 931–941.
- CLAERBOUT, J., DOHERTY, S., 1972, “Downward continuation of moveout-corrected seismograms”, *Geophysics*, v. 37, pp. 741.
- COHEN, G., JOLY, P., 1990, “Fourth order schemes for the heterogeneous acoustics equation”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 80, n. 1, pp. 397–407.
- COHEN, G., JOLY, P., 1996, “Construction and analysis of Fourth-Order Finite Difference Schemes for the Acoustic Wave Equation in Nonhomogeneous Media”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 33, n. 4, pp. 1266–1302.
- CONSTABLE, S., SRNKA, L. J., 2007, “An introduction to marine controlled-source electromagnetic methods for hydrocarbon exploration”, *Geophysics*, v. 72, n. 2, pp. WA3–WA12.
- COUSSI, O., 2004, *Poromechanics*. 1 ed. John Wiley & Sons Inc., Hoboken.
- CRASE, E., 1990, “High-order (space and time) finite-difference modeling of the elastic wave equation”, *Geophysics Expanded Abstract 90*, pp. 987–991.

- CUNHA, P. E. M., 1997, *Estratégias Eficientes para Migração Reversa no Tempo Pré-Empilhamento 3-D em Profundidade pelo Método das Diferenças Finitas*. Tese de Mestrado, PPPG/UFBa, Salvador, BA, Brasil.
- DAY, S., 1982, “Three-dimensional simulation of spontaneous rupture: the effect of nonuniform prestress”, *Bulletin of the Seismological Society of America*, v. 72, n. 6A, pp. 1881.
- DE LA PUENTE, J., KÄSER, M., DUMBSER, M., et al., 2007, “An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes–IV. Anisotropy”, *Geophysical Journal International*, v. 169, n. 3, pp. 1210–1228.
- DE LA PUENTE, J., DUMBSER, M., KÄSER, M., et al., 2008, “Discontinuous Galerkin methods for wave propagation in poroelastic media”, *Geophysics*, v. 73, pp. T77.
- DORS, C., 2007, *Propagação de Ondas Elásticas Utilizando Funções de Green Numéricas Locais em Modelos Discretizados por Elementos Finitos*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- DUMBSER, M., KÄSER, M., 2006, “An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes–II. The three-dimensional isotropic case”, *Geophysical Journal International*, v. 167, n. 1, pp. 319–336.
- DUMBSER, M., KÄSER, M., TORO, E., 2007, “An arbitrary high-order Discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes–V. Local time stepping and p-adaptivity”, *Geophysical Journal International*, v. 171, n. 2, pp. 695–717.
- FARIA, E. L., STOFFA, P. L., 1994, “Finite-difference modeling in transversely isotropic media”, *Geophysics*, v. 59, n. 2, pp. 282–289.
- GARDNER, G. H. F., 1985, *Migration of seismic data*. Soc. Expl. Geophys.
- GAZDAG, J., 1978, “Wave equation migration with the phase-shift method”, *Geophysics*, v. 43, pp. 1342.
- GELLER, R., TAKEUCHI, N., 1998, “Optimally accurate second-order time-domain finite difference scheme for the elastic equation of motion: one-dimensional case”, *Geophysical Journal International*, v. 135, n. 1, pp. 48–62.

- GRAFF, K. F., 1991, *Wave Motion in Elastic Solids*. Mineola, Dover Publication, Inc.
- GRAVES, R., 1996, “Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences”, *Bulletin of the Seismological Society of America*, v. 86, n. 4, pp. 1091.
- GRAY, S. H., ETGEN, J., DELLINGER, J., et al., 2001, “Seismic migration problems and solutions”, *Geophysics*, v. 66, n. 5, pp. 1522–1640.
- GUSTAFSSON, B., WAHLUND, P., 2005, “Time compact high order difference methods for wave propagation, 2D”, *Journal of Scientific Computing*, v. 25, n. 1, pp. 195–211.
- HAIRER, E., WANNER, G., 2002, *Solving ordinary differential equations II*. 2 ed. Berlin, Springer Series in Computational Mathematics.
- HAIRER, E., NORSETT, S. P., WANNER, G., 1992, *Solving ordinary differential equations I*. 2 ed. Berlin, Springer Series in Computational Mathematics.
- HALL, F., WANG, Y., 2009, “Elastic wave modelling by an integrated finite difference method”, *Geophysical Journal International*, v. 177, n. 1, pp. 104–114.
- HANEY, M. M., 2007, “Generalization of von Neumann analysis for a model of two discrete half-spaces: The acoustic case”, *Geophysics*, v. 72, n. 5, pp. SM35 – SM46.
- HARLOW, F., WELCH, J., 1965, “Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface”, *The physics of Fluids*, v. 8, n. 12, pp. 2182–2189.
- HELBIG, K., 1994, *Foundations of anisotropy for exploration seismics. Handbook of geophysical exploration*, v. 22. Elsevier.
- HELBIG, K., THOMSEN, L., 2005, “75-plus years of anisotropy in exploration and reservoir seismics: A historical review of concepts and methods”, *Geophysics*, v. 70, pp. 9ND–23ND.
- HESTHOLM, S., 2009, “Acoustic VTI modeling using high-order finite differences”, *Geophysics*, v. 74, pp. T67.
- HUSTEDT, B., OPERTO, S., VIRIEUX, J., 2004, “Mixed-grid and staggered-grid finite-difference methods for frequency-domain acoustic wave modelling”, *Geophysical Journal International*, v. 157, n. 3, pp. 1269–1296.

- ISAACSON, E., KELLER, H. B., 1994, *Analysis of numerical methods*. Dover Inc.
- JAEGER, J., COOK, N., ZIMMERMAN, R., 2007, *Fundamentals of rock mechanics*. Blackwell Publishing.
- JIANFENG, Z., 1997, “Quadrangle-grid velocity-stress finite-difference method for elastic-wave-propagation simulation”, *Geophysical Journal International*, v. 131, n. 1, pp. 127–134.
- KÄSER, M., DUMBSER, M., 2006, “An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes—I. The two-dimensional isotropic case with external source terms”, *Geophysical Journal International*, v. 166, n. 2, pp. 855–877.
- KÄSER, M., DUMBSER, M., DE LA PUENTE, J., et al., 2007, “An arbitrary high-order Discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes—III. Viscoelastic attenuation”, *Geophysical Journal International*, v. 168, n. 1, pp. 224–242.
- KÄSER, M., HERMANN, V., DE LA PUENTE, J., 2008, “Quantitative accuracy analysis of the discontinuous Galerkin method for seismic wave propagation”, *Geophysical Journal International*, v. 173, n. 3, pp. 990–999.
- KELLY, K. R., MARFURT, K. J., 1980, “Numerical Modeling of Seismic Wave Propagation, SEG”, *Geophysics reprint series n. 13*.
- KELLY, K. R., WARD, R. W., TREITEL, S., et al., 1976, “Synthetic seismograms: a finite -difference approach”, *Geophysics*, v. 41, n. 1, pp. 2–27.
- KOMATITSCH, D., TROMP, J., 1999, “Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation”, *Geophysical Journal International*, v. 139, n. 3, pp. 806–822.
- KOMATITSCH, D., VILOTTE, J., 1998, “The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures”, *Bulletin of the Seismological Society of America*, v. 88, n. 2, pp. 368–392.
- KOMATITSCH, D., MARTIN, R., TROMP, J., et al., 2001, “Wave propagation in 2-D elastic media using a spectral element method with triangles and quadrangles”, *Journal of Computational Acoustics*, v. 9, n. 2, pp. 703–718.
- LAX, P. D., WENDROFF, B., 1964, “Difference Schemes for Hyperbolic Equations with High Order of Accuracy”, *Communications on pure and applied mathematics*, v. XVII, pp. 381–398.

- LEVANDER, A. R., 1988, “Fourth-order finite-difference P-SV seismograms”, *Geophysics*, v. 53, n. 11, pp. 1425–1436.
- LEVANDER, A., 1989, “Finite-difference forward modeling in seismology”. In: James, D. (Ed.), *The Encyclopedia of Solid Earth Geophysics*, pp. 410–430, New York, Van Nostrand Reinhold.
- LEVEQUE, R. J., 2007, *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations : steady-state and time-dependent problems*. SIAM.
- LUO, Y., SCHUSTER, G., 1990, “Parsimonious staggered grid finite-differencing of the wave equation”, *Geophysical Research Letters*, v. 17, n. 2, pp. 155–158.
- MADARIAGA, R., 1976, “Dynamics of an expanding circular fault”, *Bulletin of the Seismological Society of America*, v. 66, n. 3, pp. 639.
- MAGNIER, S., MORA, P., TARANTOLA, A., 1994, “Finite differences on minimal grids”, *Geophysics*, v. 59, pp. 1435–1443.
- MANSUR, W. J., 1983, *Time-Stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- MARFURT, K., 1984, “Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of the scalar and elastic wave equations”, *Geophysics*, v. 49, pp. 533–549.
- MARTIN, G., 2004, *The Marmousi2 model, elastic synthetic data, and an analysis of imaging and AVO in a structurally complex environment*. Tese de Mestrado, University of Houston.
- MARTIN, G., WILEY, R., MARFURT, K., 2006, “Marmousi2: An elastic upgrade for Marmousi”, *The Leading Edge*, v. 25, n. 2, pp. 156.
- MAYNE, W., 1962, “Common reflection point horizontal data stacking techniques”, *Geophysics*, v. 27, pp. 927.
- MCMECHAN, G., 1983, “Migration by Extrapolation of Time-Dependent Boundary VALUES”, *Geophysical Prospecting*, v. 31, n. 3, pp. 413–420.
- MOCZO, P., KRISTEK, J., VAVRYCUK, V., et al., 2002, “3D heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of seismic motion with volume harmonic and arithmetic averaging of elastic moduli and densities”, *Bulletin of the Seismological Society of America*, v. 92, n. 8, pp. 3042.

- MOCZO, P., ROBERTSSON, J., EISNER, L., 2007, “The finite-difference time-domain method for modeling of seismic wave propagation”. In: Dmowska, R. (Ed.), *Advances in Geophysics*, v. 48, cap. 8, pp. 421–516, Elsevier.
- MOCZO, P., KRISTEK, J., GALIS, M., et al., 2010, “On accuracy of the finite-difference and finite-element schemes with respect to P-wave to S-wave speed ratio”, *Geophysical Journal International*, v. 182, pp. 493–510.
- MYSOVSKIĖ, I. P., 1969, *Lectures on Numerical Methods*. Netherlands, Wolters-Noordhoff Plublishin Groningen.
- NUSSENZWEIG, M., 1996, *Curso de Física Básica*, v. 2. 3 ed. São Paulo, Edgard Blücher.
- OPERTO, S., VIRIEUX, J., HUSTEDT, B., et al., 2002, “Adaptive wavelet-based finite-difference modelling of SH-wave propagation”, *Geophysical Journal International*, v. 148, n. 3, pp. 476–498.
- OTTAVIANI, M., 1971, “Elastic-wave propagation in two evenly-welded quarter-spaces”, *Bulletin of the Seismological Society of America*, v. 61, n. 5, pp. 1119.
- PUJOL, J., 2003, *Elastic Wave Propagation and Generation in Seismology*. Cambridge, Cambridge University Press.
- REYNOLDS, A. C., 1978, “Boundary Condictions for the Numerical Solution of Wave Propagation Problems”, *Geophysics*, v. 43, n. 6, pp. 1099–1110.
- RICKER, N., 1940, “The form and nature of seismic waves and the structure of seismograms”, *Geophysics*, v. 5, pp. 348.
- RICKER, N., 1945, “The computation of output disturbances from amplifiers for true wavelet inputs”, *Geophysics*, v. 10, pp. 207.
- RICKER, N., 1953, “The form and laws of propagation of seismic wavelets”, *Geophysics*, v. 18, n. 1, pp. 10–40.
- RUDZKI, M., 1897, “Über die Gestalt elastischer Wellen in Gesteinen, II Studie aus der Theorie der Erdbebenwellen”, *Bulletin of the Academy of Sciences Cracow*, 387-393.
- RUDZKI, M., 1912, “Sur la propagation d’une onde élastique superficielle dans un milieu transversalement isotrope”, *Bulletin of the Academy of Sciences Cracow (IA)*, 47-58.

- RYABEN'KII, V. S., TSYNKOV, S. V., 2007, *A theoretical introduction to numerical analysis*. New York, Chapman & Hall/CRC.
- SAENGER, E., BOHLEN, T., 2004, "Finite-difference modeling of viscoelastic and anisotropic wave propagation using the rotated staggered grid", *Geophysics*, v. 69, pp. 583.
- SAENGER, E. H., GOLD, N., SHAPIRO, S. A., 2000, "Modeling the propagation of elastic waves using a modified finite-difference grid", *Wave Motion*, v. 31, pp. 77–92.
- SAVA, P., HILL, S., 2009, "Overview and classification of wavefield seismic imaging methods", *The Leading Edge*, v. 28, n. 2, pp. 170–183.
- SCHNEIDER, W. A., 1978, "Integral formulation for migration in two and three dimensions", *Geophysics*, v. 43, n. 1, pp. 49–76.
- SCHNEIDER, W., 1971, "Developments in seismic data processing and analysis (1968–1970)", *Geophysics*, v. 36, pp. 1043–1073.
- SERIANI, G., PRIOLO, E., 1994, "Spectral element method for acoustic wave simulation in heterogeneous media", *Finite elements in analysis and design*, v. 16, n. 3-4, pp. 337–348.
- SHUBIN, G. R., BELL, J. B., 1987, "A Modified Equation Approach to Constructing Fourth Order Methods for Acoustic Wave Propagation", *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, v. 8, n. 2, pp. 135–151.
- SLAWINSKI, M., 2003, *Seismic waves and rays in elastic media. Handbook of geophysical exploration*, v. 34. Amsterdam, Elsevier.
- SOARES, D., MANSUR, W., 2005, "A time domain FEM approach based on implicit Green's functions for non-linear dynamic analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 62, n. 5, pp. 664–681.
- STEPHEN, R., 1988, "A review of finite difference methods for seismo-acoustics problems at the seafloor", *Reviews of Geophysics*, v. 26, n. 3, pp. 445–458.
- STOLT, R., 1978, "Migration by Fourier transform", *Geophysics*, v. 43, pp. 23.
- STRIKWERDA, J. C., 2004, *Finite difference schemes and partial differential equations*. SIAM.
- TAFLOVE, A., HAGNESS, S., 2000, *Computational eletrodynamics: the finite-difference time domain method*. Artech House.

- TAKEUCHI, N., GELLER, R., 2000, “Optimally accurate second order time-domain finite difference scheme for computing synthetic seismograms in 2-D and 3-D media”, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, v. 119, n. 1-2, pp. 99–132.
- THOMSEN, L., 1986, “Weak elastic anisotropy”, *Geophysics*, v. 51, n. 10, pp. 1954–1966.
- TIKHONOV, A., SAMARSKII, A., 1962, “Homogeneous difference schemes”, *USSR computational mathematics and mathematical physics*, v. 1, n. 1, pp. 5–67.
- TSVANKIN, I., 1997, “Anisotropic parameters and P-wave velocity for orthorhombic media”, *Geophysics*, v. 62, n. 4, pp. 1292–1309.
- TSVANKIN, I., 1996, “P-wave signatures and notation for transversely isotropic media: An overview”, *Geophysics*, v. 61, pp. 467.
- TSVANKIN, I., 2001, *seismic signatures and analysis of reflection data in anisotropic media. Handbook of geophysical exploration*, v. 29. Elsevier.
- VERES, I., 2010, “Stability analysis of second-and fourth-order finite-difference modelling of wave propagation in orthotropic media”, *Ultrasonics*, v. 50, n. 3, pp. 431–438.
- VIRIEUX, J., 1984, “SH-wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method”, *Geophysics*, v. 49, n. 11, pp. 1933–1957.
- VIRIEUX, J., 1986, “P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method”, *Geophysics*, v. 51, n. 4, pp. 889–901.
- VONNEUMANN, J., RICHTMYER, R., 1950, “A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks”, *Journal of Applied Physics*, v. 21, pp. 232–237.
- WAPENAAR, C. P. A., BERKHOUT, A. J., 1989, *Elastic Wave Field Extrapolation*, v. II. New York, Elsevier.
- WHITMORE, N., 1983, “Iterative depth migration by backward time propagation: 53rd Annual International Meeting, SEG”. In: *Expanded Abstracts, Session: S*, v. 10.
- WU, R., DMOWSKA, R., MAUPIN, V., 2006, *Advances in wave propagation in heterogeneous earth*. Academic Pr.

- YANG, D., TENG, J., ZHANG, Z., et al., 2003, “A nearly analytic discrete method for acoustic and elastic wave equations in anisotropic media”, *Bulletin of the Seismological Society of America*, v. 93, n. 2, pp. 882.
- YEE, K., 1966, “Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell’s equations in isotropic media”, *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on [legacy, pre - 1988]*, v. 14, n. 3, pp. 302–307.
- YILMAZ, O., 2001a, *Seismic Data Analysis. Processing, Inversion, and Interpretation of Seismic Data*, v. I. 2 ed. Tulsa, Society of Exploration Geophysicists.
- YILMAZ, O., 2001b, *Seismic Data Analysis. Processing, Inversion, and Interpretation of Seismic Data*, v. II. 2 ed. Tulsa, Society of Exploration Geophysicists.
- ZAHRADNÍK, J., PRIOLO, E., 1995, “Heterogeneous formulations of elastodynamic equations and finite-difference schemes”, *Geophysical Journal International*, v. 120, n. 3, pp. 663–676.
- ZHDANOV, M., 2002, *Geophysical inverse theory and regularization problems*. Elsevier Science Ltd.

Apêndice A

Teoria da Propagação de Ondas acústicas

Neste apêndice serão deduzidas as equações da propagação de ondas em meios acústicos, isto é, em fluidos ideais, onde não haja viscosidade, seguindo procedimento similar ao realizado para o caso elástico geral, visto na seção 2.1. Embora, como foi dito anteriormente, o caso acústico possa ser visto como um caso particular do elástico, alguns aspectos teóricos ficam mais evidentes diretamente desta dedução. A exigência de não haver viscosidade ficará mais clara nas deduções e está relacionada com o fato de que os efeitos de atrito entre as camadas do fluido serão desprezados. Dito de outra forma, serão considerados fluidos sem resistência ao cisalhamento. Logicamente, esta é uma excelente aproximação no caso de gases ou líquidos como a água. Além disso, o processo de linearização se torna mais visível e a constante de elasticidade do meio aparece como um módulo de compressão adiabática.

Na primeira seção deste apêndice, serão obtidas as equações básicas que governam o comportamento ondulatório nestes meios, sendo tais equações linearizadas em seguida. Por fim, obtém-se as diferentes formulações matemáticas para a descrição do fenômeno nas diversas variáveis de campo envolvidas, como deslocamentos, velocidades e pressões.

A.1 Equação geral da onda acústica

Para desenvolver uma teoria que descreva o movimento das partículas quando uma onda acústica se propaga no meio sob consideração, serão evocados o princípio fundamental da conservação da massa e a segunda lei de Newton. Para tal, se considera um fluido em movimento, cuja densidade é dada por ρ , no qual as partículas se deslocam com uma velocidade \vec{v} dependente da posição e do tempo. Considere, então, uma porção deste fluido de volume V encerrado por uma superfície S , cuja normal

é dada por \hat{n} , conforme a Fig. A.1 (WAPENAAR e BERKHOUT, 1989).

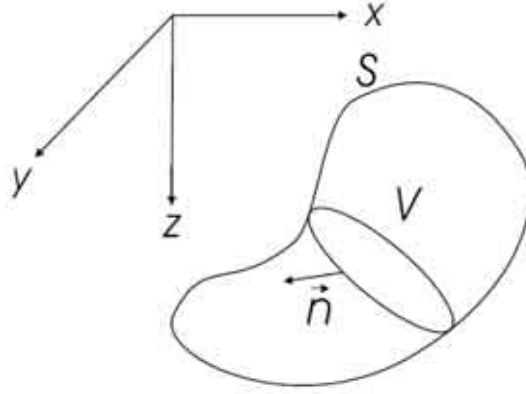


Figura A.1: Região do espaço contendo um fluido em movimento.

A.1.1 Conservação da massa

A lei da conservação da massa estabelece que, em um dado volume V delimitado por uma superfície S , a taxa de variação temporal de massa é igual ao fluxo de massa entrando através da superfície S adicionado à taxa de injeção de massa (fonte de massa), isto é,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_S \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_V i_m dV, \quad (\text{A.1})$$

onde $i_m(\vec{r}, t)$ representa a distribuição da fonte em termos de uma densidade volumétrica de injeção de massa, \vec{v} representa a velocidade da partícula e ρ a densidade de matéria. Aplicando o teorema da divergência de Gauss, dado por

$$\oint_S \vec{a} \cdot \hat{n} dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{a} dV, \quad (\text{A.2})$$

lembrando que o operador nabla é dado pelas seguintes componentes cartesianas $\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, e considerando o volume invariante no tempo, chega-se à seguinte expressão:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV + \int_V \frac{\partial i_m}{\partial t} dV, \quad (\text{A.3})$$

ou, uma vez que esta equação é válida para um volume V qualquer,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{\partial i_m}{\partial t}. \quad (\text{A.4})$$

Esta equação é conhecida como equação da continuidade não-linear.

A.1.2 Conservação da quantidade de movimento

Como na seção anterior, seja um volume V encerrado por uma superfície S . A lei da conservação da quantidade de movimento estabelece que a mudança da quantidade de movimento das partículas neste volume é igual ao fluxo de quantidade de movimento entrando na superfície adicionado da resultante das forças que atuam nas partículas em V (lei de Newton generalizada), ou seja

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} dV = - \oint_S (\rho \vec{v}) \vec{v} \cdot \hat{n} dS + \vec{F}'(V), \quad (\text{A.5})$$

onde

$$\vec{F}'(V) = - \oint_S p \hat{n} dS + \int_V \vec{f} dV. \quad (\text{A.6})$$

Na expressão acima, $p(\vec{r}, t)$ denota a pressão e $\vec{f}(\vec{r}, t)$ é a densidade volumétrica de força externa. É importante chamar a atenção para o fato de que forças de cisalhamento (devido à viscosidade) estão sendo desconsideradas, o que implica em assumir um fluido ideal.

Aplicando o teorema de Gauss, dado pela Eq. (A.2), segue que

$$\int_V \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV = - \int_V [\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) + (\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}] dV + \vec{F}'(V), \quad (\text{A.7})$$

onde

$$\vec{F}'(V) = - \int_V \vec{\nabla} p dV + \int_V \vec{f} dV, \quad (\text{A.8})$$

ou seja

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) + (\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{\nabla} p = \vec{f}, \quad (\text{A.9})$$

onde $\vec{\nabla} p$ é o gradiente de p . Esta equação é conhecida como equação do movimento não-linear.

A.1.3 Relações constitutivas

A pressão p , a densidade volumétrica de massa ρ e a temperatura T de um fluido são mutuamente dependentes. Este fato é descrito matematicamente por uma equação de estado, cuja forma geral pode ser expressa por

$$\chi(p, \rho, T) = 0, \quad (\text{A.10})$$

onde χ é uma função não-linear de p , ρ e T .

Como o foco deste desenvolvimento é a propagação de ondas, será assumido que os processos ocorrem de forma adiabática (sem troca de calor), uma vez que se sabe da física básica que durante a propagação de ondas os processos de compres-

são e expansão ocorrem tão rapidamente que as trocas de calor são negligenciáveis (NUSSENZWEIG, 1996). Com esta simplificação, a equação de estado se torna

$$p\rho^{-K} = \text{constante}, \quad (\text{A.11})$$

onde

$$K = C_P/C_V, \quad (\text{A.12})$$

sendo C_P e C_V os calores específicos, respectivamente, à pressão constante e a volume constante.

Agora, definindo expressões práticas para descrever a pressão e a densidade do fluido no formalismo apresentado, ou seja fazendo

$$p(\vec{r}, t) = p_0(\vec{r}) + \Delta p(\vec{r}, t) \quad (\text{A.13})$$

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) + \Delta \rho(\vec{r}, t), \quad (\text{A.14})$$

onde o subíndice zero representa os valores estáticos e Δ representa as variações em torno destes valores para as variáveis p e ρ , causadas pela passagem da onda acústica. Substituindo na Eq. (A.11) como segue

$$p\rho^{-K} = (p_0 + \Delta p)(\rho_0 + \Delta \rho)^{-K} = p_0\rho_0^{-K} \quad (\text{A.15})$$

$$= p_0 \left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right) \rho_0^{-K} \left(1 + \frac{\Delta \rho}{\rho_0}\right)^{-K} = p_0\rho_0^{-K} \quad (\text{A.16})$$

e dividindo ambos os membros por $p_0\rho_0^{-K}$, tem-se que

$$\left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right) \left(1 + \frac{\Delta \rho}{\rho_0}\right)^{-K} = 1 \quad (\text{A.17})$$

o que, por fim, fornece o resultado

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right)^\gamma - 1; \quad \gamma = 1/K \quad (\text{A.18})$$

ou, expandindo em série de Taylor o binômio (onde $\Delta p/p_0 \ll 1$):

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \gamma \frac{\Delta p}{p_0} + \frac{\gamma(\gamma - 1)}{2} \left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^2 + \frac{\gamma(\gamma - 1)(\gamma - 2)}{6} \left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^3 + \dots \quad (\text{A.19})$$

A.2 Linearização das equações gerais

Supondo agora que o fluido está em estado estático, de tal forma que a velocidade \vec{v} das partículas é devida somente à perturbação causada pelo campo acústico da onda,

pode-se, para uma vasta gama de aplicações, assumir as seguintes aproximações

$$\left| \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \right| \ll 1 \quad (\text{A.20})$$

$$\left| \frac{\Delta p}{p_0} \right| \ll 1. \quad (\text{A.21})$$

Com elas pode-se linearizar as equações básicas obtidas anteriormente, conforme apresentado a seguir.

A.2.1 Equação da continuidade

Substituindo a decomposição dada pela Eq. (A.14) na Eq. (A.4), obtém-se

$$\frac{\partial[\rho_0 + \Delta\rho]}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [(\rho_0 + \Delta\rho)\vec{v}] = \frac{\partial i_m}{\partial t}. \quad (\text{A.22})$$

Uma vez que ρ_0 é independente do tempo mas varia no espaço, desenvolvendo a derivada do produto no segundo termo e, por fim, dividindo o resultado por ρ_0 , obtém-se

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Delta\rho}{\partial t} + \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right) \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \frac{1}{\rho_0} \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\rho_0 + \Delta\rho) = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial i_m}{\partial t}. \quad (\text{A.23})$$

Pela Eq. (A.20), obtém-se

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Delta\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \frac{1}{\rho_0} \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\rho_0) + \frac{1}{\rho_0} \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\Delta\rho) = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial i_m}{\partial t}. \quad (\text{A.24})$$

Desconsiderando o terceiro e o quarto termos do primeiro membro (termos de ordem superior), obtém-se a equação da continuidade linear

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial i_m}{\partial t} \equiv \frac{\partial i_V}{\partial t}, \quad (\text{A.25})$$

onde $i_V(\vec{r}, t)$ representa uma fonte acústica mais realista dada pela densidade volumétrica do volume injetado no meio (como por exemplo um airgun).

A.2.2 Equação de movimento

Procedendo de forma análoga para a Eq. (A.9) de movimento não linear, obtém-se a equivalente equação linearizada:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}(\Delta p) = \vec{f}, \quad (\text{A.26})$$

onde se considera que a variação da pressão estática é muito menor do que a variação da pressão acústica causada pela ássagem da onda, isto é, $|\vec{\nabla} p_0| \ll |\vec{\nabla}(\Delta p)|$, além

de serem desconsiderados termos de ordem superior.

A.2.3 Equação de estado

Da expansão em série da equação adiabática de estado, dada pela Eq. (A.19), obtém-se diretamente a expressão linearizada para a equação de estado

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{\gamma}{p_0} \Delta p = \frac{1}{\kappa} \Delta p \quad (\text{A.27})$$

onde foi introduzido o módulo de compressão adiabática

$$\kappa(\vec{r}) = \frac{p_0}{\gamma}, \quad (\text{A.28})$$

lembrando que $\gamma = 1/K = C_V/C_P$, de forma que $\kappa(\vec{r})$ é dependente do peso da coluna de material acima do ponto \vec{r} (pressão hidrostática), bem como das propriedades térmicas do meio.

A.2.4 Equações finais linearizadas

Utilizando a Eq. (A.27) (equação de estado) para eliminar $\Delta\rho$ na Eq. (A.25) da continuidade, e simplificando a notação com as seguintes substituições

$$\Delta p(\vec{r}, t) \rightarrow p(\vec{r}, t) \quad (\text{A.29})$$

$$\rho_0(\vec{r}, t) \rightarrow \rho(\vec{r}, t), \quad (\text{A.30})$$

obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem para descrever a propagação da onda acústica:

$$\frac{1}{\kappa(\vec{r})} \frac{\partial p(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\partial i_V(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{A.31})$$

$$\rho(\vec{r}) \frac{\partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} p(\vec{r}, t) = \vec{f}(\vec{r}, t). \quad (\text{A.32})$$

Com estas equações, o campo de onda acústica linear é completamente representado através das variáveis $p(\vec{r}, t)$ e $\vec{v}(\vec{r}, t)$, enquanto o fluido (ou o sólido no qual se está utilizando a aproximação acústica para a propagação de onda) é totalmente representado por $\rho(\vec{r})$ e $\kappa(\vec{r})$. A fonte é dada pelos termos do segundo membro.

A.3 Representações da equação geral da onda acústica

Acima, foram deduzidas através de princípios físicos gerais as equações que descrevem a propagação de ondas acústicas em um meio heterogêneo geral. Entretanto, como se trata de um fenômeno ondulatório, existem outras variáveis que se alteram quando da passagem da onda e que, portanto, podem ser utilizadas para a descrição do fenômeno, tanto quanto a pressão e a velocidade. Além disso, em lugar de sistemas de equações hiperbólicos de primeira ordem, pode-se usar as correspondentes equações hiperbólicas de segunda ordem conhecidas como equações da onda. Nesta seção são apresentadas diversas formas matemáticas de descrição do mesmo fenômeno ondulatório.

A.3.1 Equações em termos da pressão e das velocidades

O primeiro conjunto de equações que descrevem a propagação de ondas acústicas a ser apresentado é o sistema dado pelas Eq. (A.33) e Eq. (A.34), deduzidos diretamente dos princípios físicos de conservação do momento linear e conservação da massa, isto é,

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial i_V}{\partial t} \quad (\text{A.33})$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} p = \vec{f}. \quad (\text{A.34})$$

A.3.2 Equações em termos da pressão e dos deslocamentos

A partir das Eq. (A.33) e Eq. (A.34), como $\vec{v} = \partial \vec{u} / \partial t$, chega-se facilmente à

$$\frac{1}{\kappa} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = i_V \quad (\text{A.35})$$

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \vec{\nabla} p = \vec{f}. \quad (\text{A.36})$$

A.3.3 Equação da onda de pressões

Tomando a derivada temporal da Eq. (A.33); dividindo por $\rho(\vec{r})$ e tomando o divergente da Eq. (A.34), obtém-se

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 i_V}{\partial t^2} \quad \text{e} \quad (\text{A.37})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{f} \right). \quad (\text{A.38})$$

Subtraindo a segunda equação na primeira e multiplicando o resultado por ρ , chega-se à

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -s,$$

ou equivalentemente

$$\rho \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho s, \quad (\text{A.39})$$

onde s representa a fonte e c representa a velocidade de propagação da onda acústica no meio, dados pelas expressões

$$s = \frac{\partial^2 i_V}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{f} \right) \quad e \quad c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}. \quad (\text{A.40})$$

Equação clássica da acústica

Reescrevendo a Eq. (A.39) da onda utilizando a identidade $\vec{\nabla} \cdot (f \vec{\nabla} g) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g + f \nabla^2 g$, obtém-se

$$\nabla^2 p + \rho \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho s.$$

Logo, derivando o inverso da densidade, obtém-se

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \rho \cdot \vec{\nabla} p = -\rho s. \quad (\text{A.41})$$

ou ainda, definindo a flutuabilidade (em inglês *buoyancy*) $b = 1/\rho$, pode-se escrever

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \rho \vec{\nabla} b \cdot \vec{\nabla} p = -\rho s. \quad (\text{A.42})$$

As equações acima são formas equivalentes de escrever a equação geral da onda pois expressam exatamente o mesmo que a Eq. (A.39). A partir destas equações, vê-se que, em regiões onde o gradiente de ρ é nulo (ou desprezível), é válida a seguinte equação clássica freqüentemente usada na geofísica

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho s, \quad (\text{A.43})$$

sendo a fonte e a velocidade dadas pelas Eq. (A.40).

Dos desenvolvimentos desta seção, vê-se que a equação geral da onda pode ser escrita como a Eq. (A.43), chamada neste trabalho de *equação clássica da onda* por ser classicamente utilizada em geofísica, acrescida de um termo de produto de gradientes. Em regiões onde o gradiente de densidade não seja desprezível, a

equação clássica não é uma boa aproximação. Um caso típico onde isto ocorre mais facilmente é no fundo do mar, quando a onda passa da água para as primeiras camadas de sedimentos. Neste caso, embora, a princípio, a direção de propagação e os tempos de trânsito sejam bem descritos pela equação (parcela cinemática), o mesmo não se verifica com a amplitude (parcela dinâmica). Na verdade, em meios complexos, onde inúmeras reflexões ocorrem em diversas direções, não está claro a priori se a equação clássica da onda é capaz de gerar, por exemplo, sismogramas sintéticos fidedignos, uma vez que reflexões vindas de diferentes regiões podem se somar ou se cancelar, o que alteraria não só a amplitude mas a própria feição dos eventos no sismograma.

A.3.4 Equação da onda de velocidades

Multiplicando a Eq. (A.33) por κ , tomando o seu gradiente e, adicionalmente, tomando a derivada temporal da Eq. (A.39), obtém-se

$$\frac{\partial \vec{\nabla} p}{\partial t} + \vec{\nabla}(\kappa \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = \vec{\nabla} \left(\kappa \frac{\partial i_V}{\partial t} \right) \quad (\text{A.44})$$

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} + \frac{\partial \vec{\nabla} p}{\partial t} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} \quad (\text{A.45})$$

Subtraindo a primeira equação da segunda e dividindo o resultado por κ , resulta em

$$\frac{1}{\kappa} \vec{\nabla}(\kappa \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\kappa} \frac{d \vec{s}_u}{dt}. \quad (\text{A.46})$$

onde a fonte é dada pela derivada de

$$\vec{s}_u = \vec{f} - \vec{\nabla}(\kappa i_V). \quad (\text{A.47})$$

Repare que está equação é bem diferente da equação da onda de pressões, uma vez que o gradiente do divergente presente na Eq. A.46 possui termos de derivadas cruzadas em duas ou três dimensões, sendo diferente do divergente do gradiente. Portanto, é importante salientar que, de maneira nenhuma, pode-se utilizar uma equação da forma da Eq. (A.39) para descrever a propagação dos deslocamentos, mesmo trocando as propriedades.

A.3.5 Equação da onda de deslocamentos

A equação da onda pode ser escrita também em termos do deslocamento \vec{u} das partículas do meio. A partir da equação da onda de velocidades dada pela Eq.

(A.46), como $\vec{v} = \partial\vec{u}/\partial t$, chega-se a

$$\frac{1}{\kappa} \vec{\nabla} (\kappa \nabla \cdot \vec{u}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\kappa} \vec{s}_u. \quad (\text{A.48})$$

Repare que, derivando a Eq. (A.48), obtém-se a Eq. A.46 da onda de velocidades.

Apêndice B

Definições Básicas e Tensor de Elasticidade

B.1 Definições básicas

Nesta seção, são apresentados os conceitos básicos de tensor de tensões e de deformações, indispensáveis para a compreensão dos demais tópicos tratados neste capítulo.

B.1.1 Tensor de deformação

Classicamente, pode-se descrever as deformações (em inglês *strain*) de um paralelepípedo infinitesimal em termos de deformações normais e cisalhantes. De forma geral as deformações são dadas por

$$e_{ij} = e_{ji} = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad (\text{B.1})$$

onde a notação ∂_i deve ser entendida como a derivada em relação à coordenada espacial x_i , sendo $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$ e $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r})$ é o vetor deslocamento, com componentes cartesianas $u_i = (u_x, u_y, u_z)$.

Assim, as deformações normais são dadas por

$$e_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad (\text{B.2})$$

ou explicitamente, para o caso tridimensional, por

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \text{e} \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (\text{B.3})$$

Já as deformações cisalhantes, no caso tridimensional, são escritas como

$$e_{zx} = e_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right), \quad (\text{B.4})$$

$$e_{yx} = e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) e \quad (\text{B.5})$$

$$e_{zy} = e_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right). \quad (\text{B.6})$$

B.1.2 Tensor de tensão

O estado de tensão (*stress*) de um meio elástico é especificado uma vez conhecida a força atuante em um elemento de área ds arbitrário passando através de um ponto P arbitrário do meio. Considere, então, um elemento de área ds (com vetor normal a esta superfície dado por \hat{n}) passando por um ponto P qualquer do meio, sendo \vec{r} o vetor que especifica a posição deste ponto (em relação à origem do sistema de coordenadas), conforme mostra a Fig. B.1. Assim, a força que atua em ds é igual

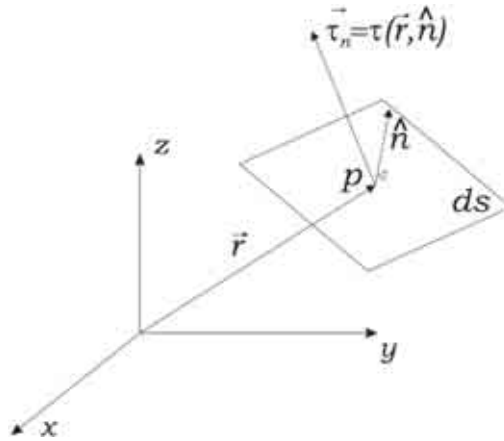


Figura B.1: Força de superfície atuando em um elemento de área.

a $\vec{\tau}_n ds$, onde a tensão $\vec{\tau}_n = \vec{\tau}_n(\vec{r}, \hat{n})$ é uma função do vetor posição \vec{r} e da direção \hat{n} . Como será mostrado a seguir, a função $\vec{\tau}_n(\vec{r}, \hat{n})$ pode ser definida, para uma direção arbitrária, a partir de um tensor de segunda ordem chamado de tensor de tensões, que dependerá somente de \vec{r} (sendo independente de \hat{n}).

Para isto, constrói-se um tetraedro no ponto P com suas arestas na direção dos eixos do sistema de coordenadas ortogonal (ver Fig. B.2), de modo que ds_1 , ds_2 e ds_3 representem as áreas das faces perpendiculares, respectivamente, aos eixos x_1 , x_2 e x_3 , e ds_n a área da face inclinada com normal dada por \hat{n} . Em conseqüência, $\vec{\tau}_{-1} ds_1$, $\vec{\tau}_{-2} ds_2$, $\vec{\tau}_{-3} ds_3$ e $\vec{\tau}_n ds_n$ correspondem às forças exercidas pelo resto do meio, respectivamente, nas áreas ds_1 , ds_2 , ds_3 e ds_n . O sinal de menos significa que as

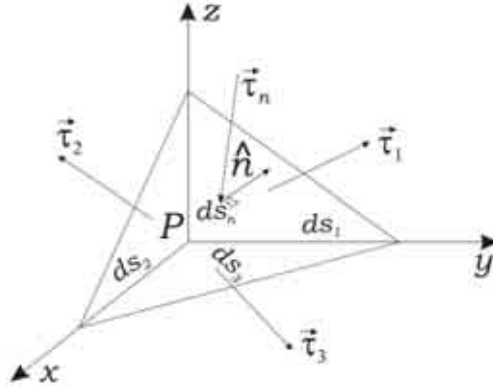


Figura B.2: Tensões que atuam em um tetraedro infinitesimal.

referidas tensões são aplicada no lado de fora do tetraedro, cujas normais exteriores apontam na direção oposta aos eixos coordenados. Pela Terceira Lei de Newton, a soma das forças $\vec{\tau}_1 ds_1$, $\vec{\tau}_2 ds_2$, $\vec{\tau}_3 ds_3$, que atuam nas faces internas do tetraedro, com suas respectivas reações se anulam, o que resulta em

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_{-1} = 0, \quad \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_{-2} = 0, \quad \vec{\tau}_3 + \vec{\tau}_{-3} = 0. \quad (\text{B.7})$$

Agora, considere a aceleração \vec{a} do centro de massa do tetraedro, e a força externa \vec{f} por unidade de massa agindo no volume. Evocando a Segunda Lei de Newton para o movimento do centro de massa do tetraedro, tem-se

$$\vec{a} dm = \vec{f} dm + \vec{\tau}_n ds_n + \vec{\tau}_{-1} ds_1 + \vec{\tau}_{-2} ds_1 + \vec{\tau}_{-3} ds_1 \quad (\text{B.8})$$

$$= \vec{f} dm + \vec{\tau}_n ds_n - \vec{\tau}_1 ds_1 - \vec{\tau}_2 ds_1 - \vec{\tau}_3 ds_1, \quad (\text{B.9})$$

onde dm é a massa do tetraedro. Considerando o limite quando os vértices do tetraedro que definem o plano da face inclinada tendem ao ponto P , obtém-se¹

$$\vec{\tau}_n ds_n = \vec{\tau}_1 ds_1 + \vec{\tau}_2 ds_1 + \vec{\tau}_3 ds_1 \equiv \vec{\tau}_i ds_i, \quad (\text{B.10})$$

uma vez que no limite infinitesimal os termos contendo dm são proporcionais ao volume e, portanto, de ordem superior se comparados aos termos contendo elementos de área. Com isto, uma vez que

$$ds_i = ds_n \cos(\hat{n}, x_i) = \hat{n}_i ds_n, \quad (\text{B.11})$$

tem-se que a tensão em um elemento de área com normal \hat{n} é dada por

$$\vec{\tau}_n = \vec{\tau}_i n_i. \quad (\text{B.12})$$

¹daqui por diante será utilizada a convenção de soma sob índices repetidos (convenção de Einstein), isto é, os índices repetidos devem ser somados.

Projetando τ_n nos eixos do sistema de coordenadas, obtém-se

$$\tau_{nk} = \tau_{ik}n_i, \quad (\text{B.13})$$

onde τ_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) refere-se a um conjunto de nove componentes. Destas componentes, três são normais ($i = k$) e seis, tangenciais ($i \neq k$), como mostrado na Fig. B.3. Como pode ser demonstrado, vide BORISENKO e TARAPOV (1979),

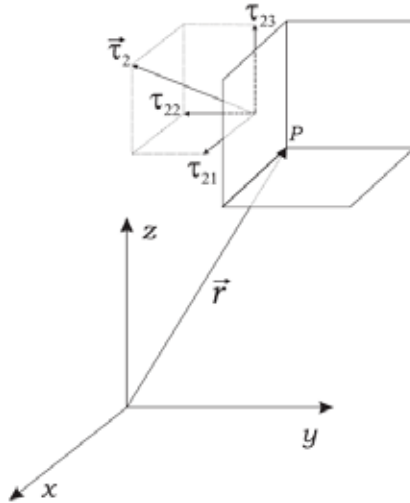


Figura B.3: Componentes do tensor de tensões.

as quantidades τ_{ik} se transformam como um tensor, sendo as componentes cartesianas do chamado tensor de tensões. Tal tensor é independente da orientação da área dada pela normal \hat{n} , onde a tensão atua, podendo, entretanto, ser utilizado para determinar $\vec{\tau}_n$ para \hat{n} arbitrário. Desta forma, o tensor de tensões especifica completamente o estado de tensão em qualquer ponto do meio elástico, podendo ser expresso em coordenadas cartesianas por

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.14})$$

onde τ_{ij} representa a tensão que atua sobre a face i de um cubo infinitesimal na direção j . Note que os elementos da diagonal representam as tensões normais e os elementos cruzados representam as tensões cisalhantes.

Um fato de suma importância é que das 9 componentes do tensor de tensões apenas 6 são independentes uma vez que as tensões internas não podem gerar um torque em um elemento de volume qualquer, implicando na simetria do tensor τ . Isto é facilmente demonstrado estabelecendo-se o equilíbrio dos momentos no cubo

da Fig. B.3, o que conduz à

$$\begin{aligned}\tau_{21} &= \tau_{12} \\ \tau_{31} &= \tau_{13} \\ \tau_{23} &= \tau_{32}.\end{aligned}\tag{B.15}$$

É interessante notar que no caso limite de um fluido ideal (onde não pode haver tensões cisalhantes), o tensor de tensões se simplifica para

$$\tau = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix},\tag{B.16}$$

onde foi utilizado o Princípio de Pascal que estabelece que a pressão p em um fluido ideal independe da direção, ou seja

$$p = -\tau_{xx} = -\tau_{yy} = -\tau_{zz},\tag{B.17}$$

sendo o sinal negativo advindo da diferença de definições de tensão (dilatação) e pressão (compressão).

B.2 Tensor de Elasticidade

No contexto da teoria da elasticidade, o tensor de elasticidade é um objeto matemático suficiente para caracterizar as propriedades elásticas de um meio. O que define o caráter tensorial de uma grandeza é a forma como esta se transforma sob mudança no sistema de coordenadas. O tensor de elasticidade é um tensor de quarta ordem, de forma que suas componentes se transformam sob mudança do sistema de coordenadas de acordo com a seguinte lei (BORISENKO e TARAPOV, 1979)

$$c'_{ijkl} = \alpha_{i'm} \alpha_{j'n} \alpha_{k'p} \alpha_{l'q} c_{mnpq},\tag{B.18}$$

onde c'_{ijkl} e c_{mnpq} são as componentes do tensor de elasticidade no novo e no antigo sistema de coordenadas K' e K , respectivamente, e $\alpha_{i'm}$ é o cosseno do ângulo entre o i -ésimo eixo de K' e o m -ésimo eixo de K (similarmente para os demais α 's). Repare que esta lei de transformação é uma generalização da transformação das componentes de um vetor (que, na verdade, é um tensor de primeira ordem). Para maiores detalhes matemáticos sobre tensores e demonstrações do caráter tensorial dos objetos da teoria da elasticidade, é sugerido o livro texto citado acima.

Mais interessantes que as provas matemáticas, é compreender intuitivamente o

que está por trás da idéia de materiais elásticos, compreendendo, assim, a razão pela qual a teoria da elasticidade tem uma aplicabilidade muito grande. Uma forma de compreender isto é tendo em conta que a maioria dos sólidos, líquidos e gases se comportam, dentro de certos limites, de forma elástica, ou seja, como uma mola ideal (obedecem a Lei de Hook). Assim, pode-se pensar num material qualquer como composto de infinitas molas, sendo as constantes das molas ponto a ponto as grandezas que caracterizam a elasticidade do meio. Microscopicamente, estas molas se originam da força entre os átomos ou moléculas constituintes do material. Por exemplo, como é bem conhecido, a interação entre átomos neutros ou moléculas pode ser descrita fenomenologicamente com boa precisão pelo potencial de Lennard-Jones (ver Fig. B.4), sendo este potencial responsável por manter os átomos em suas posições de equilíbrio. Assim, quando aplica-se uma força em um determinado átomo ou molécula o potencial de Lennard-Jones tende a reestabeler o equilíbrio por meio da aplicação de uma força contrária equivalente a uma mola.

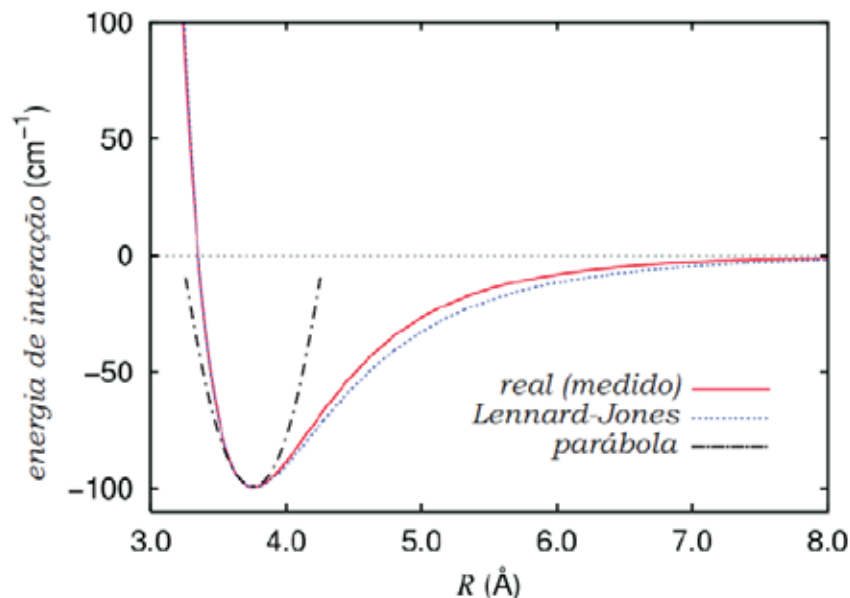


Figura B.4: Potencial de Lennard-Jones para um gás. É mostrado o potencial real em comparação com o potencial de Lennard-jones ajustado ao caso.

No contexto da teoria da elasticidade, falando ainda microscopicamente, o potencial de Lennard-Jones pode ser aproximado por uma função quadrática para pequenos deslocamentos da posição de equilíbrio dos átomos (ver Fig. B.4), ou seja, no potencial mínimo onde a derivada é nula. Assim, o deslocamento da posição de equilíbrio torna-se proporcional a magnitude da tensão aplicada. Neste sentido, é dito que se está no regime linear. Logicamente se as tensões envolvidas excederem um valor limite (fazendo com que os deslocamentos em torno da posição de equilíbrio se tornem maiores que um determinado valor crítico), comportamentos não lineares vão surgir, em analogia ao que ocorre quando se puxa uma mola além do seu limine

de elasticidade (o que pode ocasionar uma deformação permanente na mesma). No caso macroscópico, verifica-se experimentalmente que diversos materiais se comportam da mesma forma, ou seja, apresentam comportamento linear quando aplicadas tensões até um determinado valor (que depende do material).

Assim, no regime linear, a forma mais geral da relação entre tensão τ e deformação e é conhecida como a Lei de Hook generalizada, sendo dada pela seguinte expressão tensorial

$$\tau_{ij} = c_{ijkl}e_{kl}, \quad (\text{B.19})$$

onde i, j, k, l , que variam de 1 a 3 (no caso tridimensional), se referem aos eixos cartesianos do sistema de coordenadas. Ressaltando-se que é adotada aqui a convenção de soma implícita sob índices repetidos (convenção de Einstein).

A princípio, a quantidade de componentes do tensor de elasticidade c_{ijkl} é $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$. Entretanto, este tensor apresenta diversas simetrias que reduzem substancialmente as componentes independentes do mesmo. Primeiro, as componentes deste tensor possuem a seguinte simetria

$$c_{ijkl} = c_{jikl}, \quad (\text{B.20})$$

uma vez que $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Além disso,

$$c_{ijkl} = c_{ijlk}, \quad (\text{B.21})$$

uma vez que $e_{kl} = e_{lk}$. Por fim, assumindo que as deformações ocorrem de forma adiabática (a mesma justificativa física dada para o caso acústico no apêndice A permanece válida), pode-se demonstrar que (AKI e RICHARDS, 2002)

$$c_{ijkl} = c_{klij}. \quad (\text{B.22})$$

As simetrias descritas acima, reduzem o número de coeficientes independentes do tensor de elasticidade para 21. Existem diversos tipos de simetria que reduzem ainda mais o número de coeficientes independentes do tensor de elasticidade, sendo o caso mais simples aquele em que as propriedades elásticas independem da direção, isto é, no caso isotrópico. Na verdade, o caso acústico pode ser visto como o caso mais simples de elasticidade. Uma bela e clara exposição que avalia apenas as simetrias existentes no meio físico para obter as diferentes configurações do tensor de elasticidade é encontrada em BOS *et al.* (2004).

A seguir, serão apresentadas as formas do tensor de elasticidade para alguns casos de interesse no presente trabalho. Antes, porém, será introduzida a notação de Voigt, por meio da qual os quatro índices do tensor de elasticidade são reescritos

para apenas 2 índices, permitindo a representação matricial do mesmo.

B.2.1 Notação de Voigt

Em virtude das simetrias existentes nas tensões, deformações e no tensor de elasticidade, é possível reescrever estes objetos com uma notação compacta, de forma que a visualização deles se torne mais simples. Isto porque, sendo o tensor de elasticidade um tensor de quarta ordem, sua representação matricial não é possível a princípio, de forma que neste caso apenas se pode trabalhar com suas componentes.

O tensor de tensões, por ser um tensor de segunda ordem, pode ser representado matricialmente por

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.23})$$

onde $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, como antes, e $\tau_{23} = \tau_{32}$, $\tau_{13} = \tau_{31}$, $\tau_{12} = \tau_{21}$, totalizando 6 componentes independentes. Assim, uma forma de representar o tensor de tensões, permitindo com isto que o tensor de elasticidade seja representado por uma matriz, é escrevê-lo como um vetor, da seguinte forma

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.24})$$

Repare que, para tornar possível a representação utilizando um vetor, os dois índices i, j do tensor foram transformados num índice n único, através da seguinte relação

$$n = i\delta_{ij} + (9 - i - j)(1 - \delta_{ij}), \quad (\text{B.25})$$

que define a chamada notação de Voigt.

Utilizando a mesma notação — tendo em conta as simetrias nos índices originais $ijkl$ vistas acima —, pode-se escrever o tensor de elasticidade de quarta ordem,

como

$$C_{nm} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.26})$$

cujos elementos correspondem à

$$c_{ijkl} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1123} & c_{1113} & c_{1112} \\ c_{1122} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2223} & c_{2213} & c_{2212} \\ c_{1133} & c_{2233} & c_{3333} & c_{3323} & c_{3313} & c_{3312} \\ c_{1123} & c_{2223} & c_{3323} & c_{2323} & c_{2313} & c_{2312} \\ c_{1113} & c_{2213} & c_{3313} & c_{2313} & c_{1313} & c_{1312} \\ c_{1112} & c_{2212} & c_{3312} & c_{2312} & c_{1312} & c_{1212} \end{pmatrix} \quad (\text{B.27})$$

na notação original. Repare que as simetrias nos índices originais do tensor de tensões implicam que os novos índices (na notação de Voigt) são simétricos. A notação de Voigt é muito útil pois simplifica a representação e evidencia as simetrias físicas presentes no problema. Portanto, a matriz 6×6 escrita na notação de Voigt é simétrica, possuindo 21 propriedades independentes.

B.2.2 Caso geral

Como visto, o tensor de elasticidade geral pode ser escrito, utilizando-se a notação de Voigt, como

$$C_{nm} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.28})$$

Entretanto, das 21 constantes independentes presentes na Eq. B.28 para o caso anisotrópico geral, algumas podem se anular ou serem interdependentes, dependendo das simetrias da estrutura cristalina, ou mesmo de outros efeitos práticos como é o caso de heterogeneidades bem menores que a escala do comprimento de onda em questão que podem ocorrer no caso de rochas sedimentares. Um exemplo disto é a deposição de sedimentos em camadas com diferentes profundidades, portanto orientadas em uma direção privilegiada, originando a simetria com isotropia transversa vertical, na qual o tensor de elasticidade é invariante por rotações em torno do eixo

vertical. De forma mais geral, meios que apresentam simetrias físicas por qualquer razão, possuindo desta forma invariância do tensor de elasticidade sob alguma transformação de coordenadas, terão o número independente de componentes do tensor de tensões reduzido.

B.2.3 Simetria ortotrópica (ortorrômbica)

O primeiro caso descrito caracteriza-se, no que se refere a estrutura cristalina, por possuir os 3 eixos mutuamente perpendiculares, com diferentes comprimentos. De forma geral, meios que apresentam simetria ortotrópica (por exemplo em regiões fraturadas de reservatórios), o número de coeficientes não nulos do tensor de elasticidade é 9, sendo todos estes elementos independentes um do outro. Neste caso, o tensor de elasticidade é da forma

$$C_{nm} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.29})$$

Parâmetros geofísicos (de Tsvanki)

Assim como será mostrado para o caso isotrópico, é possível também reescrever os termos do tensor de elasticidade utilizando-se parâmetros mais diretamente envolvidos com a geofísica para o caso ortotrópico, como as velocidade de propagação de alguns modos de onda. Neste sentido, é conhecida a generalização dos parâmetros propostos no artigo de THOMSEN (1986) (ver simetria hexagonal, VTI, na seção B.2.6), feita no artigo de TSVANKIN (1997). Como no caso bidimensional a simetria ortotrópica recai na simetria VTI, somente serão apresentados os parâmetros de Thomsen na referida seção. Reporta-se ao artigo citado para obtenção das expressões para o caso ortotrópico ou ao livro de TSVANKIN (2001).

B.2.4 Sub-casos do caso ortotrópico

Alguns casos especiais de anisotropia podem ser vistos como casos particulares do caso ortotrópico, englobando todas as simetrias que apresentam os mesmos elementos que a Eq. (B.29) não nulos ou menos, mas podendo ter vínculos entre os elementos não nulos. Por exemplo, faz parte destes subcasos o caso VTI em que existe simetria de rotação em torno do eixo z (denominado de hexagonal ou VTI), isto é, quando as propriedades elásticas (dadas pelo tensor de elasticidade) não se

Tabela B.1: Sub-casos do caso ortotrópico.

Nome	No. de vínculos	vínculos	coef. independ.
Tetragonal	3	$c_{11} = c_{22}$ $c_{44} = c_{55}$ $c_{13} = c_{23}$	6
Hexagonal (VTI)	4	$c_{11} = c_{22}$ $c_{44} = c_{55}$ $c_{13} = c_{23}$ $c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$	5
Cúbico	6	$c_{11} = c_{22}$ $c_{22} = c_{33}$ $c_{44} = c_{55}$ $c_{55} = c_{66}$ $c_{12} = c_{13}$ $c_{13} = c_{23}$	3
Isotrópico	7	$c_{11} = c_{22}$ $c_{22} = c_{33}$ $c_{44} = c_{55}$ $c_{55} = c_{66}$ $c_{12} = c_{13}$ $c_{13} = c_{23}$ $c_{11} = c_{12} + c_{44}$	2
Acústico	8	$c_{11} = c_{22}$ $c_{22} = c_{33}$ $c_{44} = c_{55}$ $c_{55} = c_{66}$ $c_{12} = c_{13}$ $c_{13} = c_{23}$ $c_{11} = c_{12}$ $c_{44} = 0$	1

modificam em todos os pontos do modelo quando a direção é variada por uma rotação qualquer em torno de z . Nesta situação, o tensor de tensões apresenta 4 vínculos (conforme Tab. B.1), de forma que o tensor de elasticidade apresenta apenas cinco quantidades independentes, isto é, somente três a mais que no caso isotrópico.

Todos os subcasos do caso ortotrópico, cuja matriz de elasticidade é dada pela Eq. B.29, são apresentados na Tab. B.1, sendo no total 6 casos. São apresentados o número de simetrias presentes em cada caso, bem como os vínculos entre os elementos e o número de elementos independentes. Todos os sistemas mostrados apresentam equações de propagação da mesma forma, ou mais simples, de forma que os esquemas numéricos desenvolvidos para o caso ortotrópico neste trabalho se aplicam a todos subcasos.

Nas próximas seção deste apêndice, são apresentados os sub-casos do caso ortotrópicos, mostrando explicitamente a forma da matriz de elasticidade (em notação de

Voigt), descrevendo algumas características principais, bem como alguns conceitos importantes utilizados ao longo deste trabalho.

B.2.5 Simetria tetragonal

No caso de simetria tetragonal, como no caso ortorrômpico os eixos cristalográficos são mutuamente perpendiculares, mas o tamanho de dois eixos cristalográficos é igual ($a = b$), sendo o tensor de elasticidade referente a este caso dado por

$$C_{nm} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.30})$$

B.2.6 Simetria hexagonal (VTI)

Em geofísica, esta simetria é conhecida como isotrópia transversa vertical (VTI). Ocorre freqüentemente em geofísica, uma vez que a deposição de sedimentos é feita por camadas de propriedades semelhantes. Tal fato evidencia uma importante característica da anisotropia, qual seja, o fato dela exprimir não somente uma variação de propriedades em virtude das configuração cristalina de sólidos, mas também, como neste caso, em virtude de heterogeneidades associadas a uma determinada direção preferencial. O tensor de elasticidade associado é da forma

$$C_{nm} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.31})$$

Parâmetros de Thomsen

É possível reescrever os termos do tensor de elasticidade utilizando-se parâmetros mais diretamente envolvidos com a geofísica para o caso VTI, como foi feito no artigo de THOMSEN (1986). A idéia básica foi, ao invés de utiliza-se os elementos do tensor de elasticidades, adotar como parâmetros as duas velocidades de propagação das ondas quase- P e quase- S na direção vertical e mais 3 parâmetros adimensionais

(parâmetros de thomsen) que caracterizam o grau de anisotropia, definidos como

$$\begin{aligned}
c_P &= \sqrt{\frac{c_{33}}{\rho}} \\
c_S &= \sqrt{\frac{c_{55}}{\rho}} \\
\epsilon &\equiv \frac{c_{11} - c_{33}}{2c_{33}} \\
\gamma &\equiv \frac{c_{66} - c_{55}}{2c_{55}} \\
\delta &\equiv \frac{1}{2c_{33}^2} [2(c_{13} - c_{55})^2 - (c_{33} - c_{55})(c_{11} + c_{33} - 2c_{55})].
\end{aligned} \tag{B.32}$$

O significado físico destes parâmetros pode ser encontrado por exemplo em TSVANKIN (1996) ou no livro TSVANKIN (2001). Com estas definições pode-se escrever, de forma direta, as componentes do tensor de elasticidade como

$$\begin{aligned}
c_{33} &= \rho c_P^2 \\
c_{55} &= \rho c_S^2 \\
c_{11} &= \rho c_P^2 (2\epsilon + 1) \\
c_{66} &= \rho c_S^2 (2\gamma + 1).
\end{aligned} \tag{B.33}$$

Repare que a componente c_{13} não pode ser especificada univocamente, pois é necessário conhecer o sinal da soma $c_{13} - c_{55}$. Neste sentido, a partir da última definição dada nas Eq. (B.32), pode-se escrever

$$(c_{13} - c_{55})^2 = \delta c_{33}^2 + 0,5(c_{33} - c_{55})(c_{11} + c_{33} - 2c_{55}), \tag{B.34}$$

de forma que, de acordo com o sinal da subtração mencionada, deve-se tomar a raiz positiva ou negativa para a resolução da equação acima em c_{13} . A grande maioria dos casos de interesse em geofísica apresenta $c_{13} > c_{55}$ (o sal é uma exceção), implicando em se tomar o sinal positivo, ou seja,

$$c_{13} = c_{55} + \sqrt{\delta c_{33}^2 + 0,5(c_{33} - c_{55})(c_{11} + c_{33} - 2c_{55})}. \tag{B.35}$$

Uma lista de diversos materiais com isotropia vertical transversa (VTI), que serão utilizados nas modelagens deste trabalho, é dada na Tab. B.2. Tal lista foi retirada de THOMSEN (1986), tendo sido os parâmetros das seis últimas colunas calculados a partir das definições dadas acima.

Tabela B.2: Propriedades elásticas de rochas com simetria VTI.

Id	Rocha	c_P m s^{-1}	c_S m s^{-1}	ρ kg m^{-3}	ϵ	δ adimensional	γ adimensional	R_c	ν	C_{11} $\times 10^{10} \text{kg m s}^{-2}$	C_{13} $\times 10^{10} \text{kg m s}^{-2}$	C_{33} $\times 10^{10} \text{kg m s}^{-2}$	C_{55}
1	Arenito (Taylor)	3368	1829	2500	0,110	-0,127	0,255	1,841	0,291	3,46	2,73	2,84	0,84
2	Folhelho	4529	2703	2520	0,034	0,250	0,046	1,676	0,223	5,52	6,12	5,17	1,84
3	Arenito Imaturo	4476	2814	2500	0,097	0,051	0,051	1,591	0,173	5,98	5,43	5,01	1,98
4	Calcáreo Siltico	4972	2899	2630	0,056	-0,041	0,067	1,715	0,242	7,23	6,48	6,50	2,21
5	Folhelho argiloso	3928	2055	2590	0,334	0,818	0,575	1,911	0,312	6,67	6,13	4,00	1,09
6	Siltito Laminado	4449	2585	2570	0,091	0,688	0,046	1,721	0,245	6,01	7,26	5,09	1,72
7	Arenito Calcarenoso	5460	3219	2690	0,000	-0,345	-0,007	1,696	0,234	8,02	5,06	8,02	2,79
8	Folhelho com oleo	4231	2539	2370	0,200	0,000	0,145	1,666	0,219	5,94	4,64	4,24	1,53
9	Cinza Vulcanica	4846	1856	2330	0,200	-0,003	0,105	2,611	0,414	7,66	5,98	5,47	0,80
10	Cristal	4420	2091	2790	1,120	-1,230	2,280	2,114	0,356	17,66	3,90	5,45	1,22
11	Cristal de Quartzo	6096	4481	2650	-0,096	0,169	-0,159	1,360	-0,088	7,96	11,03	9,85	5,32
12	Calcita	5334	3353	2710	0,369	0,127	0,169	1,591	0,173	13,40	9,57	7,71	3,05
13	Biotita	4054	1341	3050	1,222	-1,437	6,120	3,023	0,439	17,26	3,89	5,01	0,55
14	Apatita	6340	4389	3218	0,097	0,257	0,079	1,445	0,040	15,44	16,04	12,93	6,20
15	Gelo	3627	1676	1064	-0,038	-0,100	0,031	2,164	0,364	1,29	1,28	1,40	0,30
16	Composto Alumínio-Lucita	2868	1350	1860	0,970	-0,890	1,300	2,124	0,358	4,50	1,39	1,53	0,34
17	Arenito-Folhelho	3009	1654	2340	0,013	-0,010	0,035	1,819	0,284	2,17	2,12	2,12	0,64
18	Folhelho Anisotrópico-SS	3009	1654	2340	0,059	-0,042	0,163	1,819	0,284	2,37	2,12	2,12	0,64
19	Calcáreo-Folhelho	3306	1819	2440	0,134	-0,094	0,156	1,817	0,283	3,38	2,67	2,67	0,81
20	Folhelho Anisotrópico-LS	3306	1819	2440	0,169	-0,123	0,271	1,817	0,283	3,57	2,66	2,67	0,81
21	Folhelho Anisotrópico	2745	1508	2340	0,103	-0,073	0,345	1,820	0,284	2,13	1,76	1,76	0,53
22	Gás-Arenito-água-Arenito	1409	780	2030	0,022	-0,002	0,004	1,806	0,279	0,42	0,41	0,40	0,12
23	Material de Gipso intemperizado	1911	795	2350	1,161	-1,075	2,781	2,404	0,395	2,85	0,80	0,86	0,15

B.2.7 Simetria cúbica

O sistema cúbico apresenta 12 quantidades não nulas no tensor de elasticidade (como todos os sub-casos da simetria ortotrópica), mas apenas 3 quantidades independentes, sendo da forma

$$C_{nm} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.36})$$

B.2.8 Simetria isotrópica

O caso mais simples de meio sólido é aquele no qual as propriedades independem da direção, ou seja, as velocidades de propagação da onda não dependem da direção de propagação. Neste caso, o tensor de elasticidade é obtido lançando-se mão do conceito de tensor isotrópico, no qual as componentes são iguais em qualquer sistema de coordenadas. Excluindo o tensor nulo (trivial) o único tensor isotrópico de quarta ordem é dado pela forma geral (PUJOL, 2003)

$$c_{ijkl}(\vec{r}) = \lambda(\vec{r})\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\vec{r})\delta_{ik}\delta_{jl} + \nu(\vec{r})\delta_{il}\delta_{jk}. \quad (\text{B.37})$$

Entretanto, este tensor é mais geral do que o tensor de elasticidade procurado, uma vez que não possui todas as simetrias nos índices discutidas no início deste apêndice. O tensor que possui todas as simetrias exigidas é um caso particular do tensor acima, dado por

$$c_{ijkl}(\vec{r}) = \lambda(\vec{r})\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\vec{r})(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (\text{B.38})$$

onde λ e μ (módulo de cisalhamento) são conhecidos como parâmetros de Lamé. Em notação de Voigt, o tensor de elasticidade é escrito em função destes parâmetros como

$$C_{nm} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \quad (\text{B.39})$$

Parâmetros físicos

Acima, o tensor de elasticidade foi escrito em função dos parâmetros de Lamé. Entretanto, outros parâmetros possuem importância prática e, por esta razão, serão discutidos aqui de forma breve. Por exemplo, os parâmetros de Lamé se relacionam com o módulo de compressão adiabática do caso acústico visto anteriormente (apêndice A) através da seguinte relação

$$\kappa(\vec{r}) = \lambda(\vec{r}) + \frac{2}{3}\mu(\vec{r}). \quad (\text{B.40})$$

Na verdade, existem diversos outros parâmetros que podem ser escritos como combinações dos parâmetros de Lamé. De forma geral, pode-se representar as propriedades elásticas de um material isotrópico por quaisquer pares destes parâmetros, conforme mostra a Tab. B.3. Para uma discussão sobre os significados físicos destes novos parâmetros, deve-se recorrer aos diversos livros textos disponíveis sobre o assunto.

Uma expressão importante, adicional às apresentadas na referida tabela, é a relação entre a razão das velocidades de onda P e de onda S em função da razão de Poisson, dada por

$$\frac{c_P}{c_S} = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \right)^{1/2} = \left(\frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu} \right)^{1/2}. \quad (\text{B.41})$$

Repare que, no caso acústico, o módulo de cisalhamento é nulo, ou seja $\mu = 0$, de forma que

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \frac{1}{2}. \quad (\text{B.42})$$

Neste caso a razão das velocidades vai a infinito, o que está em total acordo com o fato de não se propagarem ondas transversais nos meios acústicos, ou seja $c_S = 0$. Outra relação útil é a relação inversa da Eq. B.41, dada por

$$\nu = \frac{R_c^2/2 - 1}{R_c^2 - 1}, \quad (\text{B.43})$$

onde R_c é a razão entre as velocidades, dada por

$$R_c = \frac{c_P}{c_S}. \quad (\text{B.44})$$

É importante observar que a razão de Poisson varia, geralmente, entre zero e 0,5 para a maioria dos materiais. Entretanto, alguns materiais podem apresentar valores maiores que 0,5 ou mesmo negativos. Tipicamente, as rochas apresentam valores de $R_c = \sqrt{3}$, o que fornece uma razão de Poisson de $\nu = 0,25$ (como pode ser facilmente verificado), embora possam existir situações onde $\nu \geq 0,35$ em subsuperfície (ver Tab. B.2).

Tabela B.3: Relação entre as propriedades elásticas de meios isotrópicos. Cada par de propriedades pode ser escrito em termos de outros pares de propriedades, onde λ (primeiro parâmetro de Lamé) e μ (módulo de cisalhamento) são os parâmetros de Lamé, E é o módulo de Young, κ é o módulo de Bulk (módulo de compressão adiabática), ν é a razão de Poisson e M é o módulo de onda P.

	(λ, μ)	(E, μ)	(κ, λ)	(κ, μ)	(λ, ν)	(μ, ν)	(E, ν)	(κ, ν)	(κ, E)	(M, μ)
$\kappa =$	$\lambda + \frac{2\mu}{3}$	$\frac{E\mu}{3(3\mu-E)}$	$-$	$-$	$\frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu}$	$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$-$	$-$	$M - \frac{4\mu}{3}$
$E =$	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$-$	$\frac{9\kappa(\kappa-\lambda)}{3\kappa-\lambda}$	$\frac{9\kappa\mu}{3\kappa+\mu}$	$\frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}$	$2\mu(1+\nu)$	$-$	$3\kappa(1-2\nu)$	$-$	$\frac{\mu(3M-4\mu)}{M-\mu}$
$\lambda =$	$-$	$\frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E}$	$-$	$\kappa - \frac{2\mu}{3}$	$-$	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{3\kappa\nu}{1+\nu}$	$\frac{3\kappa(3\kappa-E)}{9\kappa-E}$	$M - 2\mu$
$\mu =$	$-$	$-$	$\frac{3(\kappa-\lambda)}{2}$	$-$	$\frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}$	$-$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$\frac{3\kappa(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	$\frac{3\kappa E}{3\kappa-E}$	$-$
$\nu =$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\frac{E}{2\mu} - 1$	$\frac{\lambda}{3\kappa-\lambda}$	$\frac{3\kappa-2\mu}{2(3\kappa+\mu)}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\frac{6\kappa}{3\kappa-E}$	$\frac{M-2\mu}{2M-2\mu}$
$M =$	$\lambda + 2\mu$	$\frac{\mu(4\mu-E)}{3\mu-E}$	$3\kappa - 2\lambda$	$\kappa + \frac{4\mu}{3}$	$\frac{\lambda(1-\nu)}{\nu}$	$\frac{2\mu(1-\nu)}{1-2\nu}$	$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{3\kappa(1-\nu)}{1+\nu}$	$\frac{3\kappa(3\kappa+E)}{9\kappa-E}$	$-$

Velocidades de propagação

Ao invés de escrever os parâmetros do tensor de elasticidade em termos dos parâmetros de Lamé, em geral é mais adequado escrevê-los em termos dos parâmetros mais diretamente envolvidos nos estudos geofísicos, como as velocidades típicas de propagação das ondas P e S e a densidade do meio. Sabe-se que as velocidades de propagação das ondas P e S são dadas, em função dos parâmetros de Lamé e da densidade ρ , por

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (\text{B.45})$$

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (\text{B.46})$$

de forma que o tensor de elasticidade pode ser escrito em termos das velocidades de propagação e da densidade como

$$C_{nm} = \rho \begin{pmatrix} c_p^2 & c_p^2 - 2c_s^2 & c_p^2 - 2c_s^2 & 0 & 0 & 0 \\ c_p^2 - 2c_s^2 & c_p^2 & c_p^2 - 2c_s^2 & 0 & 0 & 0 \\ c_p^2 - 2c_s^2 & c_p^2 - 2c_s^2 & c_p^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_s^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.47})$$

Caso acústico

O caso acústico pode ser visto como o caso mais simples de todos, válido para quando não há resistência ao cisalhamento. Na verdade, este é o caso de meios fluidos, embora a aproximação acústica seja freqüentemente utilizada na área de sísica quando se deseja verificar apenas o comportamento das ondas P . No caso acústico, o tensor de elasticidade se simplifica para uma única quantidade independente (pode-se pensar que seja a constante da mola, na analogia feita no início do apêndice), sendo representado na notação de Voigt pela seguinte matriz

$$C_{nm} = \begin{pmatrix} \kappa & \kappa & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & \kappa & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & \kappa & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.48})$$

onde κ é o módulo de compressão adiabática (ou módulo de Bulk). Enfatiza-se que o caso acústico é também isotrópico.

B.2.9 Meios bidimensionais

Acima, foram discutidas as simetrias do tensor de elasticidade no caso tridimensional geral. Como as simulações realizadas neste trabalho se referem a meios com apenas duas dimensões (coordenadas x e z usuais da geofísica), algumas simplificações devem ser consideradas um vez que não há componentes fora do plano $x - z$, ou seja, não são considerados os índices 2, 4 e 6, associados à componente normal e às componentes cisalhantes de y na notação de Voigt. Desta forma, o tensor de elasticidade mais geral neste caso é dado por

$$C_{nm} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{15} \\ c_{13} & c_{33} & c_{35} \\ c_{15} & c_{35} & c_{55} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.49})$$

Assim, das 21 constantes independentes, apenas 6 necessitam ser consideradas neste caso. Assim, por exemplo, o caso ortotrópico em duas dimensões recai na seguinte forma da matriz de elasticidade

$$C_{nm} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{13} & 0 \\ c_{13} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & c_{55} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.50})$$

que na verdade representa uma simetria hexagonal, mas conhecida como simetria VTI, por caracterizar uma projeção no plano da simetria original. Neste sentido, a simetria ortotrópica completa só é verificada no caso tridimensional. Enfatiza-se que a utilização do termo ortotrópico neste trabalho é feita para enfatizar que os esquemas implementados em 2D (sendo, portanto, a rigor VTI) podem ser estendidos para o caso ortotrópico de forma imediata, utilizando os mesmos princípios e a mesma malha intercalada.

Apêndice C

Método das Diferenças Finitas (MDF)

Neste apêndice serão discutidas as idéias básicas do MDF. Para maior aprofundamento do tema, reporta-se à vasta bibliografia especializada sobre o tema, em especial aos excelentes livros texto de STRIKWERDA (2004), RYABEN'KII e TSYNKOV (2007) e LEVEQUE (2007), ou mesmo aos livros gerais de métodos numéricos de HAIRER *et al.* (1992), HAIRER e WANNER (2002), MYSOVSKIH (1969), ISAACSON e KELLER (1994) e BATHE (1996).

O MDF pode ser utilizado para obter soluções numéricas de uma vasta gama de equações diferenciais, sendo seu princípio básico o de que a equação diferencial que se deseja aproximar pode ser numericamente equilibrada em cada ponto discreto do modelo. Assim, o domínio é discretizado através de uma malha regularmente espaçada em cada uma das dimensões do problema, sendo as funções e propriedades de interesse consideradas apenas nestes pontos discretos. A Fig. C.1 mostra uma malha utilizada no MDF.

A partir da definição da malha, são obtidas expressões aproximadas para as derivadas da função considerada nos pontos discretos, por meio de diferenças finitas. Existem diferentes ordens de aproximação para tais expressões, dependendo do número de pontos que se utiliza para aproximar as derivadas. Abaixo, é discutido um pouco mais sobre estas aproximações, sendo apresentado um método geral para obtenção dos operadores de diferenças finitas.

Considere $f(x)$ uma função contínua, bem como suas derivadas. Pode-se expandir esta função em série de Taylor em torno do ponto x_0 , através da seguinte expressão

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^n. \quad (\text{C.1})$$

Repare que, embora se esteja usando a letra x para a variável independente, pode-se considerar o mesmo raciocínio tanto para as variáveis espaciais como para a variável

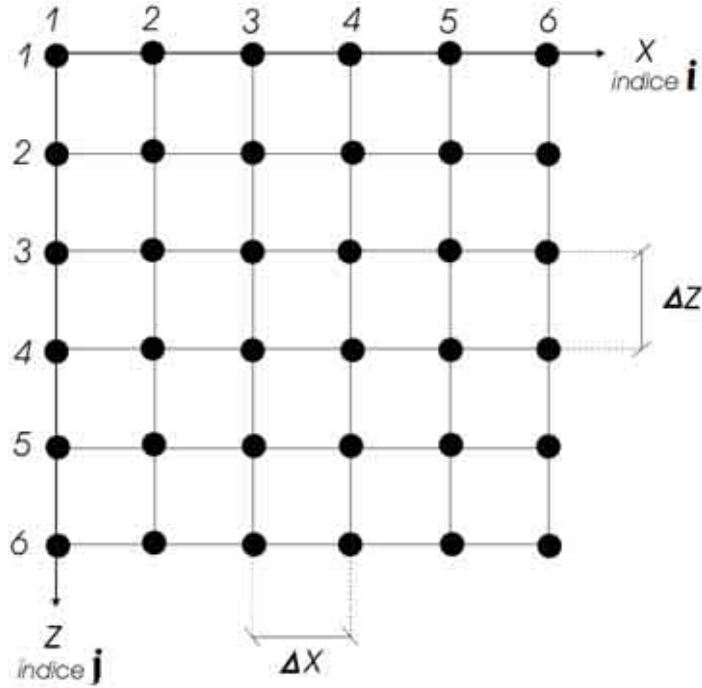


Figura C.1: Malha de Diferenças Finitas. Cada coordenada do eixo x e z é associada, respectivamente, a um subíndice i e j correspondente à coordenada dos nós, representados por pontos pretos na figura. Os espaçamentos Δx e Δz são mostrados.

temporal.

Para obter os operadores de diferenças finitas, expande-se o valor da função em diferentes pontos $x = x_i + l\Delta x$, onde $l \in \mathbb{Z}$ (malha padrão), em torno de x_i (onde x_i são os pontos discretos da malha e Δx é o espaçamento da malha), isto é,

$$f_{i \pm l} = f(x_i \pm l\Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=x_i} (\pm l\Delta x)^n. \quad (\text{C.2})$$

Soma-se, então, as diferentes expressões obtidas a fim de cancelar os termos até a ordem de interesse da derivada em questão. Como será visto, quanto maior a ordem de aproximação, mais pontos precisam ser considerados. A seguir, serão obtidos os operadores de diferenças finitas em segunda e quarta ordens¹ de aproximação em Δx , expressões estas que serão utilizadas diretamente no desenvolvimento dos esquemas numéricos utilizados neste trabalho.

Assim, considere as seguintes expansões ($l = \pm 1$ na Eq. (C.2)):

$$f_{i+1} = f_i + \frac{\Delta x}{1!} \frac{df_i}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{d^2 f_i}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{d^3 f_i}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{d^4 f_i}{dx^4} + \frac{\Delta x^5}{5!} \frac{d^5 f_i}{dx^5} + \dots \quad (\text{C.3})$$

$$f_{i-1} = f_i - \frac{\Delta x}{1!} \frac{df_i}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{d^2 f_i}{dx^2} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{d^3 f_i}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{d^4 f_i}{dx^4} - \frac{\Delta x^5}{5!} \frac{d^5 f_i}{dx^5} + \dots, \quad (\text{C.4})$$

¹ n -ésima ordem na variável x significa que o erro de truncamento da série de Taylor da aproximação via DF seja da ordem da n -ésima potência do equivalente espaçamento da malha, isto é, Δx^n .

onde daqui para a frente df_i/dx deve ser entendido como a derivada de f em relação a x calculada no ponto $x = x_i$.

C.1 Derivada primeira

Para obter a expressão em segunda ordem de aproximação para a derivada primeira de f , subtrai-se a Eq. (C.3) da Eq. (C.4), obtendo-se

$$f_{i+1} - f_{i-1} = \frac{2\Delta x}{1!} \frac{df_i}{dx} + \frac{2\Delta x^3}{3!} \frac{d^3 f_i}{dx^3} + \frac{2\Delta x^5}{5!} \frac{d^5 f_i}{dx^5} + \dots \quad (\text{C.5})$$

Isolando a derivada primeira, chega-se à

$$\frac{df_i}{dx} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{3!} \frac{d^3 f_i}{dx^3} - \frac{\Delta x^4}{5!} \frac{d^5 f_i}{dx^5} - \dots, \quad (\text{C.6})$$

que fornece a aproximação para a referida derivada em segunda ordem, isto é, com erro de truncamento da ordem Δx^2 .

Para obter aproximações de ordens superiores, é necessário considerar mais pontos discretos para o cálculo da derivada. Por exemplo, em quarta ordem considera-se, além dos pontos $x_{i\pm 1}$, os pontos $x_{i\pm 2}$ e realiza-se o mesmo procedimento, ou seja, considera-se a Eq. (C.2) nos pontos $l = \pm 2$ e subtrai-se uma equação da outra, isolando a derivada. Com isto obtém-se

$$\frac{df_i}{dx} = \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4\Delta x} - \frac{4\Delta x^2}{3!} \frac{d^3 f_i}{dx^3} - \frac{16\Delta x^4}{5!} \frac{d^5 f_i}{dx^5} - \dots, \quad (\text{C.7})$$

que inclusive pode ser obtida diretamente da Eq. (C.6) tomando os pontos $i \pm 2$ (e logicamente fazendo-se a troca $\Delta x \rightarrow 2\Delta x$). Para obter o operador com erro em Δx^4 , é necessário cancelar o termo em Δx^2 na expressão acima. Isto é obtido multiplicando a Eq. (C.6) por 4 e subtraindo da Eq. (C.7), de onde obtém-se

$$\frac{df_i}{dx} = \frac{4}{3} \left(\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \right) - \frac{1}{3} \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4\Delta x} + \frac{4\Delta x^4}{5!} \frac{d^5 f_i}{dx^5} - \dots \quad (\text{C.8})$$

ou, de maneira compacta,

$$\frac{df_i}{dx} = \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12\Delta x} + O(\Delta x^4). \quad (\text{C.9})$$

C.2 Derivada segunda

Isolando diferentes termos da expansão em série de Taylor, pode-se obter, de forma semelhante, expressões para derivadas de ordem superior. Por exemplo, somando

as Eq. (C.3) e Eq. (C.4) e isolando a derivada segunda, obtém-se

$$\frac{d^2 f_i}{dx^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} - \frac{2\Delta x^2}{4!} \frac{d^4 f_i}{dx^4} + \dots, \quad (\text{C.10})$$

que é a aproximação de segunda ordem para tal derivada. A aproximação de quarta ordem é obtida pelo mesmo processo visto para o caso da derivada primeira, resultando em

$$\frac{d^2 f_i}{dx^2} = \frac{4}{3} \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} - \frac{1}{3} \frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}}{4\Delta x^2} + O(\Delta x^4) \quad (\text{C.11})$$

ou, de forma compacta,

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} = \frac{-f_{i-2} + 16f_{i-1} - 30f_i + 16f_{i+1} - f_{i+2}}{12\Delta x^2} + O(\Delta x^4). \quad (\text{C.12})$$

C.3 Operadores de diferenças como interpolações

Nesta seção, serão discutidos os operadores de diferenças finitas a partir de outra ótica, conceitualmente muito interessante. A idéia básica será obter os operadores com base no polinômio interpolador de Lagrange $L(x)$, isto é, uma expressão analítica que ajusta uma curva de grau n passando por uma série de $n + 1$ pontos discretos.

Considere, por exemplo, um campo $p(x)$ ao longo de $k + 1$ pontos do domínio discreto em questão, definidos por $(p_0, x_0), (p_1, x_1) \dots (p_k, x_k)$. O operador de diferenças aqui desenvolvido aproxima a função p através do polinômio interpolador de Lagrange $L(x)$, cuja conhecida expressão é dada por:

$$p(x) \simeq L(x) = \sum_{i=0}^k p_i l_i(x), \quad (\text{C.13})$$

onde

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (\text{C.14})$$

é a base cuja combinação linear gera o polinômio. Como foi dito, $L(x)$ é um polinômio de grau k que passa pelos pontos $(p_0, x_0), (p_1, x_1) \dots (p_k, x_k)$.

Desenvolvendo a expressão do polinômio de Lagrange de diferentes ordens e tomando suas derivadas é possível obter diferentes ordens de aproximação dos operadores de diferenças, conforme procedimento realizado a seguir. Enfatiza-se que tal abordagem é instrutiva do ponto de vista conceitual.

C.3.1 Aproximação de quarta ordem

Para esta aproximação são considerados cinco pontos, isto é, (p_0, x_0) , (p_1, x_1) ... (p_4, x_4) , sendo, portanto, $k = 4$. Abaixo, está escrito cada um dos vetores l_i 's de base, com os quais se obtém o polinômio de lagrange via combinação linear:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$l_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \frac{x - x_3}{x_0 - x_3} \frac{x - x_4}{x_0 - x_4} \quad (\text{C.15})$$

$$l_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} \frac{x - x_4}{x_1 - x_4} \quad (\text{C.16})$$

$$l_2 = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \frac{x - x_4}{x_2 - x_4} \quad (\text{C.17})$$

$$l_3 = \frac{x - x_0}{x_3 - x_0} \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \frac{x - x_4}{x_3 - x_4} \quad (\text{C.18})$$

$$l_4 = \frac{x - x_0}{x_4 - x_0} \frac{x - x_1}{x_4 - x_1} \frac{x - x_2}{x_4 - x_2} \frac{x - x_3}{x_4 - x_3} \quad (\text{C.19})$$

Agora, aproxima-se $p(x)$ pelo polinômio interpolador de Lagrange, isto é,

$$p(x) = \sum_{i=0}^k p_i l_i(x) = p_0 l_0 + p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + p_4 l_4. \quad (\text{C.20})$$

Tomando a derivada n -ésima da Eq. (C.20), chega-se à

$$\frac{\partial^n p(x)}{\partial x^n} = p_0 \frac{\partial^n l_0}{\partial x^n} + p_1 \frac{\partial^n l_1}{\partial x^n} + p_2 \frac{\partial^n l_2}{\partial x^n} + p_3 \frac{\partial^n l_3}{\partial x^n} + p_4 \frac{\partial^n l_4}{\partial x^n}. \quad (\text{C.21})$$

Portanto, a partir das seguintes expressões

$$\frac{\partial l_0}{\partial x} = \frac{1}{24\Delta x^4} [(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) + (x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)] \quad (\text{C.22})$$

$$\frac{\partial^2 l_0}{\partial x^2} = \frac{1}{24\Delta x^4} [(x - x_3)(x - x_4) + (x - x_2)(x - x_4) + (x - x_2)(x - x_3) + (x - x_3)(x - x_4) + (x - x_1)(x - x_4) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_2)(x - x_4) + (x - x_1)(x - x_4) + (x - x_1)(x - x_2) + (x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_2)], \quad (\text{C.23})$$

pode-se obter os operadores de derivada primeira e de derivada segunda, considerando-se, por exemplo, o instante de tempo $x = x_3$ (avançado em um Δx em relação à diferença central), ou seja, fazendo-se as seguintes substituições $x - x_1 \rightarrow 2\Delta x$; $x - x_2 \rightarrow \Delta x$; $x - x_3 \rightarrow 0$; $x - x_4 \rightarrow -\Delta x$ e calculando-se os demais

termos pelas expressões. Assim, obtém-se os seguintes operadores:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{12\Delta x}(p_1 + 6p_2 - 18p_3 + 10p_4 + 3p_5) \quad (\text{C.24})$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{12\Delta x^2}(-p_1 + 4p_2 + 6p_3 - 20p_4 + 11p_5). \quad (\text{C.25})$$

Repare que utilizando $x = x_2$ (diferença central), obtém-se a conhecida fórmula de diferença central. Portanto, conceitualmente, chega-se à importante interpretação de que os operadores de diferenças finitas com aproximação de ordem *n-ésima* são dados pelas derivadas do polinômio interpolador de Lagrange de ordem *n*. Assim, tais aproximações pressupõe aproximar-se a função $p(x)$ original (solução da equação diferencial original) por uma interpolação de grau *n* ao longo de $n + 1$ pontos da malha de diferenças finitas.

C.4 Propriedades das equações de diferenças

Como foi visto, o MDF permite resolver equações diferenciais (ED) ordinárias ou parciais, através da substituição de tais equações (exatas) por equações de diferenças finitas (EDF) (aproximações). Para que a resposta destas EDF representem de forma satisfatória a solução das ED originais, é necessário que as EDF atenda a certos critérios de consistência, estabilidade e convergência numéricas. Tais exigências se relacionam a conceitos fundamentais no que diz respeito a relação entre às EDF (aproximações) e às ED originais, bem como entre a solução exata e a numérica. Nesta seção, serão discutidos tais conceitos.

- Uma EDF é consistente com uma EDP (equação diferencial parcial) se a diferença entre a EDF e a EDP (isto é, o erro de truncamento da série de Taylor) vai a zero quando o espaçamento da malha e o incremento de tempo vão a zero independentemente, ou seja

$$|\text{EDP} - \text{EDF}| \rightarrow 0 \quad \text{se} \quad \Delta t \rightarrow 0, h \rightarrow 0. \quad (\text{C.26})$$

Pode acontecer da condição acima ser satisfeita somente quando uma certa relação é satisfeita entre o espaçamento da malha e o passo de tempo. Neste caso a EDF é dita condicionalmente consistente. É claro que se o erro de truncamento das aproximações de diferenças finitas é conhecido, então a prova de consistência é direta.

- Agora, será discutido o conceito de estabilidade numérica. Tal conceito relaciona-se com o fato de que um esquema de diferenças finitas não pode

amplificar artificialmente os erros numéricos da solução, o que degradaria completamente a solução numérica do problema ao longo da análise. Neste sentido, se a solução de uma EDP é ilimitada, então a solução numérica deve ser limitada também. Como na maioria das vezes a solução de problemas físicos de interesse é limitada, como nos casos estudados neste trabalho, pode-se definir estabilidade numérica como a seguir:

Um esquema de diferenças finitas (ou EDF) é estável se produz uma solução limitada quando a solução exata é limitada, e, inversamente, é instável se produz uma solução ilimitada, sendo a solução exata limitada.

Há casos em que a estabilidade do esquema depende do espaçamento da malha e do passo de tempo, sendo tais esquemas chamados de condicionalmente estáveis. Neste sentido, o pior dos casos ocorre quando o esquema apresenta soluções numéricas ilimitadas para quaisquer valores de espaçamento da malha e incremento temporal, sendo em tais situações chamados de incondicionalmente instáveis. A chamada análise de estabilidade de von Neumann é o procedimento mais largamente empregado para provar a estabilidade de esquemas de diferenças finitas, sendo nada mais do que uma aplicação da análise de Fourier (VONNEUMANN e RICHTMYER, 1950).

- O última propriedade que uma formulação de diferenças finitas deve possuir chama-se convergência, ou seja, a solução discreta deve convergir para a solução do problema original (da EDP) quando o espaçamento da malha e o incremento temporal tenderem a zero. Entretanto, provar que um esquema é convergente é bem mais complicado do que provar a consistência e a estabilidade (pela análise de von Neumann). Neste sentido, um teorema de importância prática imensa é conhecido como Teorema da Equivalência de Lax-Richtmyer (STRIKWERDA, 2004). Tal teorema estabelece que um esquema é convergente se ele é estável e consistente. Assim, a tarefa de provar a convergência de um esquema — tarefa esta que apresenta dificuldades matemáticas consideráveis, envolvendo conceitos de análise matemática — é substituída pelas tarefas mais simples de provar a consistência e a estabilidade numérica do mesmo.

A seguir discuti-se critério práticos de não-dispersão e estabilidade numérica.

C.4.1 Critério de não-dispersão numérica

Um problema que pode ocorrer nas soluções numéricas, em virtude da discretização das equações, mesmo quando todos os critérios acima são satisfeitos é chamado de

dispersão numérica. Pode ocorrer também a chamada anisotropia numérica. Neste sentido, no caso de meios não dispersivos e isotrópicos, as velocidades de fase e de grupo (ver conceito em GRAFF (1991)) coincidem e são independentes da frequência e do ângulo de propagação.

Entretanto, quando discretiza-se o domínio do problema através do MDF, estas velocidades passam a ser função do espaçamento utilizado para a malha, além da velocidade de propagação do meio, da frequência e do ângulo de propagação, o que recebe o nome de dispersão numérica e anisotropia numérica, respectivamente. Este problema deve ser controlada para que não degrade totalmente a resposta numérica.

Para evitar que a solução numérica apresente o problema artificial de dispersão, ou seja, a dispersão numérica, existe um critério que precisa ser satisfeito. Embora tal critério seja aplicado aqui especificamente para o MDF, o mesmo é geral, e aplicável aos problemas de propagação de ondas em geral, sendo dado por

$$h \leq \frac{c_{min}}{\alpha f_{corte}}, \quad (C.27)$$

onde h é espaçamento da malha, f_{corte} é a frequência de corte da fonte, isto é, a frequência máxima presente na fonte, c_{min} é a velocidade mínima presente no modelo de velocidades e α é um parâmetro que varia de acordo com a aproximação numérica utilizada. O parâmetro α representa o número de pontos discretos por comprimento de onda, onde se considera o menor comprimento de onda, referente à menor velocidade presente no meio.

Conforme ALFORD *et al.* (1974) e VIRIEUX (1986), em esquemas de diferenças finitas utilizando operador de segunda ordem no tempo, deve-se utilizar valores próximos a $\alpha = 10$ para garantir que não haja dispersão numérica no caso de se utilizar operadores de segunda ordem no espaço, enquanto que utilizando-se a quarta ordem no espaço, $\alpha = 5$ já é suficiente. Enfatiza-se novamente que isto vai depender do esquemas numérico considerado.

C.4.2 Critério de estabilidade

Como discutido acima, o conceito da estabilidade, quando do estudo de soluções numéricas, é vinculado ao comportamento dos erros produzidos. Ao aplicar o MDF na equação da onda, por exemplo, se os cálculos pudessem ser levados a cabo com precisão infinita, a solução exata $\bar{p}_{i,j}^k$ da equação diferencial seria obtida. Entretanto, na prática, sempre existirá o erro de arredondamento, uma vez que o número de algarismos que se pode armazenar na memória do computador é finito. Portanto, a solução $p_{i,j}^k$ sempre difere da exata. A estabilidade implica que, empregando-se um determinado esquema de avanço no tempo, os erros de truncamento nas variáveis envolvida não se amplifiquem a medida que a resposta seja determinada

ao longo do tempo. Além disso, a resposta obtida para um instante de tempo não deverá ser amplificada artificialmente, afastando-se da solução do problema. Dentro deste contexto, para evitar instabilidade, deve-se exigir que seja satisfeita a seguinte condição:

$$\Delta t \leq \frac{h}{\beta c_{max}}, \quad (\text{C.28})$$

onde Δt é o intervalo de tempo, h é espaçamento da malha, c_{max} é a velocidade máxima presente no modelo de velocidades e β é um parâmetro obtido de forma empírica. A relação acima é conhecida como critério de Courant-Friedrich-Levy. Tal critério expressa a grosso modo a necessidade do intervalo de tempo considerado ter que ser menor que o tempo que a onda leva pra atravessar uma célula de diferenças finitas (considerando-se a maior velocidade presente no meio).

Conforme BULCÃO (2004), valores de $\beta = 4$ são suficientes para garantir a estabilidade da resposta numérica com elevado grau de precisão.

Apêndice D

Formulações Numéricas Clássicas

A seguir, são apresentados os esquemas numéricos implementados para comparação com os esquemas propostos neste trabalho. Primeiro mostra-se os esquemas utilizando-se malhas simples e na seqüência utilizando malhas intercaladas.

D.1 Formulações com malha simples

D.1.1 Equação da onda acústica clássica

Nesta seção, será apresentada a discretização da equação da onda acústica, que é usualmente tomada como padrão na geofísica, dada por (Eq. (A.43))

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho s. \quad (\text{D.1})$$

O esquema de diferenças finitas mais comum, e também um dos mais simples, aproxima a Eq. (D.1) utilizando quarta ordem no espaço e segunda ordem no tempo (referido simplifcadamente como 4E-2T). Neste caso, as conhecidas expressões para discretizar a Eq. (D.1) são

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{4}{3} \frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{\Delta x^2} - \frac{1}{3} \frac{p_{i+2} - 2p_i + p_{i-2}}{4\Delta x^2} \quad (\text{D.2})$$

$$= \frac{-p_{i-2} + 16p_{i-1} - 30p_i + 16p_{i+1} - p_{i+2}}{12\Delta x^2}, \quad (\text{D.3})$$

para cada derivada espacial, onde x representa as variáveis espaciais, Δx e i se referem aos respectivos espaçamentos e ao nó da malha de diferenças finitas; e

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{p^{k-1} - 2p^k + p^{k+1}}{\Delta t^2} \quad (\text{D.4})$$

para a derivada temporal, onde k e Δt representam, respectivamente, o número da iteração e o tamanho do passo de tempo. Um fato importante em relação à

discretização no tempo é que esquemas em quarta ordem (utilizando expressão análoga à Eq. (D.2) para o tempo) são incondicionalmente instáveis (ANNE *et al.*, 2000). Já as derivadas espaciais podem ser aproximadas em ordens mais elevadas sem problemas.

Neste esquema convencional, somente a velocidade c de propagação da onda é considerada, sendo este o único parâmetro que descreve o meio. Embora a densidade ρ apareça multiplicando a fonte (tal fato é inclusive muitas vezes ignorado), ela é considerada apenas no ponto de aplicação da fonte. Já a velocidade deve ser fornecida ponto a ponto no esquema.

D.1.2 Equação da onda acústica geral

Considere o caso unidimensional da Eq. (A.39) geral da onda, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{D.5})$$

No artigo de COHEN e JOLY (1990), os autores escrevem uma expressão natural para o operador espacial da Eq. (D.5), em segunda ordem de aproximação, o que resulta no seguinte esquema semi-discreto

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p_i}{\partial t^2} = \frac{\Delta t^2}{h^2} \kappa_{i,j} \left[b_{i+\frac{1}{2},j} (P_{i+1,j} - P_{i,j}) - b_{i-\frac{1}{2},j} (P_{i,j} - P_{i-1,j}) \right. \\ \left. + b_{i,j+\frac{1}{2}} (P_{i,j+1} - P_{i,j}) - b_{i,j-\frac{1}{2}} (P_{i,j} - P_{i,j-1}) \right]. \quad (\text{D.6}) \end{aligned}$$

Segundo os mesmo autores, a extensão mais direta deste esquema para quarta ordem no espaço pode obtida como uma “generalização natural do método utilizado no caso do esquema homogêneo”, sendo escrita como

$$\begin{aligned} \frac{4\kappa_i}{3\Delta x} \left[b_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x} \right) - b_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta x} \right) \right] - \\ \frac{\kappa_i}{3.2\Delta x} \left[b_{i+1} \left(\frac{p_{i+2} - p_i}{2\Delta x} \right) - b_{i-1} \left(\frac{p_i - p_{i-2}}{2\Delta x} \right) \right] = \frac{\partial^2 p_i}{\partial t^2}, \quad (\text{D.7}) \end{aligned}$$

onde b representa o inverso da densidade e as propriedades são calculadas pelas seguintes expressões de suavização

$$\kappa_i = \frac{1}{2\Delta x} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \kappa(x) dx, \quad (\text{D.8})$$

$$b_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b(x) dx. \quad (\text{D.9})$$

Entretanto, como observam os autores dos trabalhos citados acima, tal esquema apresenta instabilidade se ρ é fortemente descontínuo.

Agora um pequeno parênteses sobre a notação será feito. Na verdade, o esquema apresentado nos trabalhos citados utiliza a letra u para o campo principal descrito pela equação da onda heterogênea, sem, no entanto, deixar claro se o mesmo se refere ao campo de deslocamentos ou ao campo de pressões. Na verdade, o referido trabalho utiliza a equação da onda na seguinte forma

$$\vec{\nabla} \cdot (\kappa \vec{\nabla} u) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{D.10})$$

Apesar de similar, tal equação é diferente da equação da onda geral para meios heterogêneos em termos dos deslocamentos (dada na seção A.3.5, do apêndice A), como pode se verificar facilmente. Para compatibilizar com a Eq. D.5 tratada aqui, foram feitas as seguintes adaptações nas expressões do referido artigo:

$$u \rightarrow p \quad (\text{D.11})$$

$$\kappa \rightarrow \frac{1}{\rho} \equiv b \quad (\text{D.12})$$

$$\rho \rightarrow \frac{1}{\kappa}. \quad (\text{D.13})$$

Retomando o raciocínio sobre a instabilidade deste esquema, para regiões com altos gradientes de ρ , verifica-se que os autores citados propõem a seguinte suavização a fim de evitar a instabilidade numérica:

$$\frac{4\kappa_i}{3h} \left[b_{i+\frac{1}{2}}^{\lambda_{i+\frac{1}{2}}} \left(\frac{p_{i+1} - p_i}{h} \right) - b_{i-\frac{1}{2}}^{\lambda_{i-\frac{1}{2}}} \left(\frac{p_i - p_{i-1}}{h} \right) \right] - \frac{\kappa_i}{6h} \left[b_{i+1} \left(\frac{p_{i+2} - p_i}{2h} \right) - b_{i-1} \left(\frac{p_i - p_{i-2}}{2h} \right) \right] = \frac{\partial^2 p_i}{\partial t^2}, \quad (\text{D.14})$$

onde

$$b_{i+\frac{1}{2}}^{\lambda_{i+\frac{1}{2}}} = (1 - 2\lambda_{i+\frac{1}{2}})b_{i+\frac{1}{2}} + \lambda_{i+\frac{1}{2}}(b_{i-\frac{1}{2}} + b_{i+\frac{3}{2}}), \quad (\text{D.15})$$

$$b_{i-\frac{1}{2}}^{\lambda_{i-\frac{1}{2}}} = (1 - 2\lambda_{i-\frac{1}{2}})b_{i-\frac{1}{2}} + \lambda_{i-\frac{1}{2}}(b_{i-\frac{3}{2}} + b_{i+\frac{1}{2}}). \quad (\text{D.16})$$

Assim, se $\rho(x)$, ou equivalentemente $b(x)$, é suave no ponto em questão, os autores sugerem o seguinte valor ótimo para o parâmetro λ introduzido:

$$\lambda_{i-\frac{1}{2}} = \lambda_{i+\frac{1}{2}} = 0; \quad (\text{D.17})$$

e, se $\rho(x)$ é descontínuo no ponto em questão,

$$\lambda_{i-\frac{1}{2}} = \lambda_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{16} \left(1 + \frac{3^{1/4}}{4} \right)^{-1}. \quad (\text{D.18})$$

Para implementar o operador espacial dado pela Eq. (D.14), foram utilizadas as próprias propriedades nos pontos da malha, isto é, nos pontos i foram utilizadas as propriedades b_i e k_i , bem como a seguinte aproximação para os pontos intermediários

$$b_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b(x) dx = \frac{1}{2}(b_{i+1} + b_i). \quad (\text{D.19})$$

Com isto, pode-se escrever a Eq. (D.15) como

$$\begin{aligned} b_{i+\frac{1}{2}}^{\lambda_{i+\frac{1}{2}}} &= (1 - 2\lambda_{i+\frac{1}{2}})b_{i+\frac{1}{2}} + \lambda_{i+\frac{1}{2}}(b_{i-\frac{1}{2}} + b_{i+\frac{3}{2}}), \\ b_{i+\frac{1}{2}}^{\lambda_{i+\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{2}(1 - 2\lambda_{i+\frac{1}{2}})(b_{i+1} + b_i) + \frac{1}{2}\lambda_{i+\frac{1}{2}}(b_i + b_{i-1} + b_{i+2} + b_{i+1}) \\ b_{i+\frac{1}{2}}^{\lambda_{i+\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{2}(1 - \lambda)(b_{i+1} + b_i) + \frac{1}{2}\lambda(b_{i-1} + b_{i+2}) \\ b_{i+\frac{1}{2}}^{\lambda_{i+\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{2}[(b_{i+1} + b_i) + \lambda(b_{i-1} - b_i - b_{i+1} + b_{i+2})], \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

e, da mesma forma, a Eq. (D.16) como

$$b_{i-\frac{1}{2}}^{\lambda_{i-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}[(b_i + b_{i-1}) + \lambda(b_{i-2} - b_{i-1} - b_i + b_{i+1})], \quad (\text{D.21})$$

onde foram omitidos os índices de λ por simplicidade de notação.

Para obter a expressão final para a discretização, primeiro reescreve-se a Eq. (D.14) multiplicando-a por $12h^2/\kappa_i$, como segue

$$\begin{aligned} 16b_{i+\frac{1}{2}}^{\lambda_{i+\frac{1}{2}}}(p_{i+1} - p_i) - 16b_{i-\frac{1}{2}}^{\lambda_{i-\frac{1}{2}}}(p_i - p_{i-1}) - b_{i+1}(p_{i+2} - p_i) + \\ b_{i-1}(p_i - p_{i-2}) = \frac{12h^2}{\kappa_i} \frac{\partial^2 p_i}{\partial t^2} \end{aligned}$$

e depois, separando-se cada termo discreto de pressão, obtém-se

$$\begin{aligned} -b_{i-1}p_{i-2} + 16b_{i-\frac{1}{2}}^{\lambda_{i-\frac{1}{2}}}p_{i-1} - \left[16 \left(b_{i+\frac{1}{2}}^{\lambda_{i+\frac{1}{2}}} + b_{i-\frac{1}{2}}^{\lambda_{i-\frac{1}{2}}} \right) - b_{i+1} - b_{i-1} \right] p_i + \\ 16b_{i+\frac{1}{2}}^{\lambda_{i+\frac{1}{2}}}p_{i+1} - b_{i+1}p_{i+2} = \frac{12h^2}{\kappa_i} \frac{\partial^2 p_i}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

As propriedades nos pontos intermediários são dadas pela média mostrada nas Eq. (D.20) e Eq. (D.21), a partir das quais o termo entre colchetes pode também ser

calculado, fornecendo

$$\begin{aligned}
[\dots] &= 16 \left(b_{i+\frac{1}{2}}^{\lambda_{i+\frac{1}{2}}} + b_{i-\frac{1}{2}}^{\lambda_{i-\frac{1}{2}}} \right) - b_{i+1} - b_{i-1} \\
&= 8[(b_{i+1} + b_i) + \lambda(b_{i-1} - b_i - b_{i+1} + b_{i+2})] \\
&+ 8[(b_i + b_{i-1}) + \lambda(b_{i-2} - b_{i-1} - b_i + b_{i+1})] - b_{i+1} - b_{i-1} \\
&= 16b_i + 7(b_{i+1} + b_{i-1}) + 8\lambda(b_{i-2} - 2b_i + b_{i+2})
\end{aligned}$$

Portanto, explicitamente, a discretização espacial é dada por

$$\begin{aligned}
&- b_{i-1}p_{i-2} + 8[(b_i + b_{i-1}) + \lambda(b_{i-2} - b_{i-1} - b_i + b_{i+1})]p_{i-1} - \\
&\quad [16b_i + 7(b_{i+1} + b_{i-1}) + 8\lambda(b_{i-2} - 2b_i + b_{i+2})]p_i + \\
&8[(b_{i+1} + b_i) + \lambda(b_{i-1} - b_i - b_{i+1} + b_{i+2})]p_{i+1} - b_{i+1}p_{i+2} = \frac{12h^2}{\kappa_i} \frac{\partial^2 p_i}{\partial t^2}. \quad (\text{D.23})
\end{aligned}$$

No caso bidimensional, deve-se acrescentar o termo referente à derivada na direção z , isto é, deve discretizar a seguinte equação 2D:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{D.24})$$

Para discretizar tal equação, é utilizada a mesma aproximação dada pela Eq. (D.23), trocando-se o índice i por j para o caso da derivada na direção z . O termo contendo a derivada temporal pode ser discretizado usando o operador de diferença central de segunda ordem ou qualquer outro que forneça um esquema estável.

D.1.3 Equação elástica da onda

As discretizações da equação da onda elástica para meios isotrópicos em termos de deslocamentos, basicamente utilizam uma malha simples, sem intercalamento. Dentre os esquemas de diferenças finitas mais conhecidos, destaca-se aquele desenvolvido por BOORE (1972) e ampliado por KELLY *et al.* (1976) (KELLY e MARFURT, 1980) por ser um dos mais citados em geofísica. Desta forma, a seguir será apresentado o esquema descrito em KELLY *et al.* (1976) e suas principais características.

Como descrito no artigo de KELLY *et al.* (1976), discretiza-se a equação da onda de deslocamentos para meios isotrópicos em duas dimensões, dada pelas Eq. (2.115) e Eq. (2.116) (desconsiderando as fontes a princípio), sendo a densidade ρ considerada constante ao longo do modelo, o que reduz a generalidade do esquema, mas evita a necessidade de armazenar o modelo de densidade. Neste sentido, considerando

constante a densidade, pode-se dividir as Eq. (2.115) e Eq. (2.116) por ρ , obtendo

$$\partial_t^2 u_x = \partial_x [c_p^2 \partial_x u_x + (c_p^2 - 2c_s^2) \partial_z u_z] + \partial_z [c_s^2 (\partial_z u_x + \partial_x u_z)] \quad (\text{D.25})$$

$$\partial_t^2 u_z = \partial_x [c_p^2 \partial_z u_z + (c_p^2 - 2c_s^2) \partial_x u_x] + \partial_x [c_s^2 (\partial_x u_z + \partial_z u_x)], \quad (\text{D.26})$$

onde c_p e c_s são as velocidade de propagação da onda P e da onda S , dadas por

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (\text{D.27})$$

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (\text{D.28})$$

No esquema proposto por KELLY *et al.* (1976), são, portanto, discretizadas as Eq. (D.25) e Eq. (D.26) considerando meios com densidade constante caracterizados pelas velocidade c_p e c_s . Logicamente, não há qualquer dificuldade em discretizar diretamente as equações da onda para meios com densidade variável, dadas pelas Eq. (2.115) e Eq. (2.116), seguindo o mesmo procedimento dos autores citados. Neste trabalho, foi implementado este último caso mais geral.

Para discretizar as equações dinâmicas acima, são considerados, então, operadores de diferenças finitas dados pelas seguintes expressões em segunda ordem de aproximação

$$\partial_x (f \partial_x U) = \frac{f_{i+\frac{1}{2},j} (U_{i+1,j}^k - U_{i,j}^k) - f_{i-\frac{1}{2},j} (U_{i,j}^k - U_{i-1,j}^k)}{\Delta x^2} \quad (\text{D.29})$$

$$\partial_z (f \partial_x U) = \frac{f_{i,j+1} (U_{i+1,j+1}^k - U_{i-1,j+1}^k) - f_{i,j-1} (U_{i+1,j-1}^k - U_{i-1,j-1}^k)}{4\Delta x \Delta z}. \quad (\text{D.30})$$

Na verdade, a primeira destas expressões representa um operador de diferença central para uma malha intercalada (uma vez que aparecem termos considerados em pontos intermediários da malha padrão), sendo que o mesmo pode ser obtido pelo método descrito na seção 3.5. Já o segundo operador mostrado, por outro lado, constitui-se num operador de diferença central na malha simples. A assimetria verificada entre os dois operadores se deve ao fato deles serem obtidos considerando-se malhas diferentes e contribui para menor estabilidade numérica do esquema proposto por KELLY *et al.* (1976). Por exemplo, no esquema citado não é possível modelar o acoplamento solo-água, sendo instável nesta situação. Maiores discussões são feitas no texto da tese, seção 4.1.1, onde se desenvolve um esquema similar inteiramente na malha intercalada. Chama-se a atenção ainda para o fato de existirem erros tipográficos nas expressões finais de diferenças finitas do artigo citado. Por esta razão escrevemos abaixo as corretas expressões, para o caso de densidade constante

e considerando malha quadrada com espaçamento h , dadas por

$$\begin{aligned}
U_{i,j}^{k+1} - 2U_{i,j}^k + U_{i,j}^{k-1} &= \frac{\Delta t^2}{4h^2} \left[4\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^2 (U_{i+1,j}^k - U_{i,j}^k) - 4\alpha_{i-\frac{1}{2},j}^2 (U_{i,j}^k - U_{i-1,j}^k) \right. \\
&+ (\alpha_{i+1,j}^2 - 2\beta_{i+1,j}^2) (V_{i+1,j+1}^k - V_{i+1,j-1}^k) - (\alpha_{i-1,j}^2 - 2\beta_{i-1,j}^2) (V_{i-1,j+1}^k - V_{i-1,j-1}^k) \\
&+ \beta_{i,j+1}^2 (V_{i+1,j+1}^k - V_{i-1,j+1}^k) - \beta_{i,j-1}^2 (V_{i+1,j-1}^k - V_{i-1,j-1}^k) \\
&\left. + 4\beta_{i,j+\frac{1}{2}}^2 (U_{i,j+1}^k - U_{i,j}^k) - 4\beta_{i,j-\frac{1}{2}}^2 (U_{i,j}^k - U_{i,j-1}^k) \right] \quad (\text{D.31})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{i,j}^{k+1} - 2V_{i,j}^k + V_{i,j}^{k-1} &= \frac{\Delta t^2}{4h^2} \left[4\alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^2 (V_{i,j+1}^k - V_{i,j}^k) - 4\alpha_{i,j-\frac{1}{2}}^2 (V_{i,j}^k - V_{i,j-1}^k) \right. \\
&+ (\alpha_{i,j+1}^2 - 2\beta_{i,j+1}^2) (U_{i+1,j+1}^k - U_{i-1,j+1}^k) - (\alpha_{i,j-1}^2 - 2\beta_{i,j-1}^2) (U_{i+1,j-1}^k - U_{i-1,j-1}^k) \\
&+ \beta_{i+1,j}^2 (U_{i+1,j+1}^k - U_{i+1,j-1}^k) - \beta_{i-1,j}^2 (U_{i-1,j+1}^k - U_{i-1,j-1}^k) \\
&\left. + 4\beta_{i+\frac{1}{2},j}^2 (V_{i+1,j}^k - V_{i,j}^k) - 4\beta_{i-\frac{1}{2},j}^2 (V_{i,j}^k - V_{i-1,j}^k) \right], \quad (\text{D.32})
\end{aligned}$$

onde α e β são as velocidades c_p e c_s da onda P e S, respectivamente.

D.2 Formulações com malha intercalada

A seguir, são tratados os esquemas que utilizam malhas intercaladas, sendo feita uma revisão da literatura, referente a alguns dos esquemas mais utilizados. Serão apresentadas a formulação acústica clássica baseada na simplificação para o caso acústico da formulação apresentada por VIRIEUX (1986) e LEVANDER (1988), bem como a própria formulação elástica isotrópica tradicional. Na verdade, como visto na capítulo 3, a formulação de Virieux é a aplicação em geofísica do esquema proposto originalmente por YEE (1966) para a solução das equações de Maxwell. Além disso, tal esquema elástico engloba naturalmente, sem qualquer problema de instabilidade numérica, o acoplamento com o caso acústico, permitindo que este seja visto como um caso particular do caso elástico.

D.2.1 Formulação acústica

Para a resolução de problemas acústicos em geofísica, a grande maioria das formulações numéricas utilizadas são aquelas que lançam mão da equação da onda de segunda ordem. Raras são as abordagens que partem de outras equações, como por exemplo o sistema de equações primeira ordem para a pressão e velocidade, analogamente ao esquema de Virieux para o caso elástico (VIRIEUX, 1986).

Similarmente ao esquema proposto por (VIRIEUX, 1986), a partir do sistema de equações de primeira ordem no caso acústico dado pela Eq. (A.33) e Eq. (A.34),

isto é,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \frac{\partial i_V(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} p &= 0, \end{aligned}$$

desenvolve-se um esquema de malha intercalada para a resolução de problemas acústicos. Como discutido no apêndice A (seção A.3.1), o sistema de equações acima já incorpora possíveis heterogeneidades do meio, calculando ainda tanto o campo de pressões como o de velocidades.

É apresentado, na Fig. D.1, o esquema de discretização utilizado, mostrando onde as grandezas discretas são consideradas para as aproximações de diferenças finitas que serão apresentadas na seqüência. Repare que a malha é intercalada no espaço e no tempo, conforme mostrado abaixo. Trata-se da malha simplificação da malha de Virieux para o caso acústico, onde não há tensões cisalhantes.

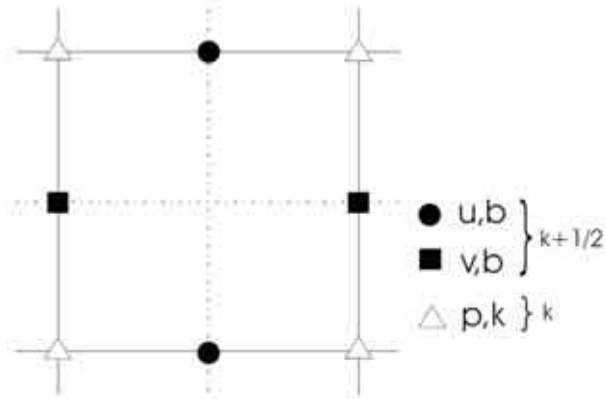


Figura D.1: Discretização na malha intercalada acústica mostrando a posição dos campos e instante de tempo em que são calculados.

Esquema 2E-2T

A discretização mais simples na malha intercalada é obtida usando diferença central de segunda ordem, ou seja

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_{i+1/2} - f_{i-1/2}}{h}, \quad (\text{D.33})$$

o que conduz às seguintes expressões de diferenças finitas:

$$u_{i-1/2,j}^{k+1/2} = u_{i-1/2,j}^{k-1/2} - b_{i-1/2,j} \frac{\Delta t}{h} (p_{i,j}^k - p_{i-1,j}^k) \quad (\text{D.34})$$

$$v_{i,j+1/2}^{k+1/2} = v_{i,j+1/2}^{k-1/2} - b_{i,j+1/2} \frac{\Delta t}{h} (p_{i,j+1}^k - p_{i,j}^k) \quad (\text{D.35})$$

$$p_{i,j}^{k+1} = p_{i,j}^k - \kappa_{i,j} \frac{\Delta t}{h} (u_{i+1/2,j}^{k+1/2} - u_{i-1/2,j}^{k+1/2} + v_{i,j+1/2}^{k+1/2} - v_{i,j-1/2}^{k+1/2}), \quad (\text{D.36})$$

onde h é o espaçamento da malha tanto na direção x quanto z , Δt é o intervalo de tempo entre passos consecutivos de tempo e $\vec{v} = (u,v)$ são as componentes do vetor velocidade. São apresentados de forma esquemática, na Fig. D.2, os pontos necessários para o cálculo de p neste esquema.

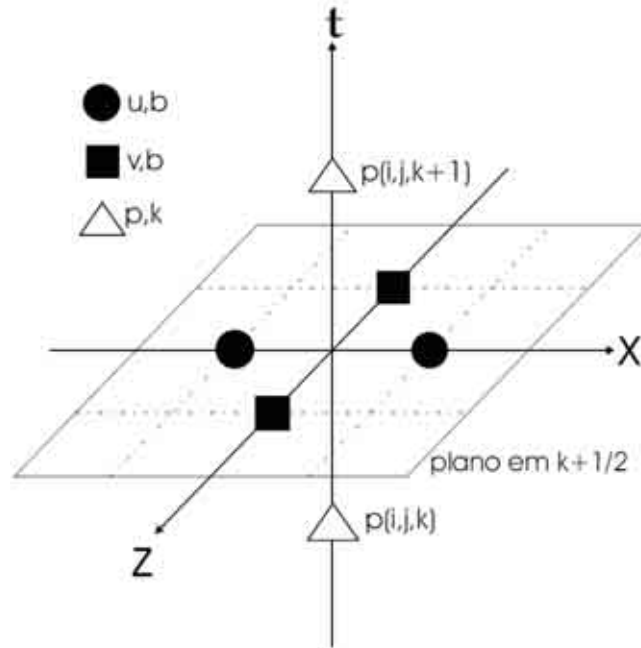


Figura D.2: Esquema do cálculo de p na malha intercalada.

Esquema 4E-2T

O operador de quarta ordem no espaço, considerando a malha intercalada, é dado pela seguinte expressão:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{-f_{i+3/2} + 27f_{i+1/2} - 27f_{i-1/2} + f_{i-3/2}}{24h}. \quad (\text{D.37})$$

Como discutido para o caso do esquema convencional (de ordem 4E-2T) da equação da onda clássica, esquemas de ordem superior no espaço podem facilmente ser obtidos. Quanto maior a ordem, maior o número de pontos que precisam ser considerados. Por exemplo, a quarta ordem acrescenta quatro pontos no cálculos

de p (dois em x e dois em z , distanciados h dos pontos extremos mostrados na Fig. D.2).

D.2.2 Formulação elástica isotrópica

Esquema de Virieux (2E-2T)

Apresenta-se neste tópico o esquema de diferenças finitas como proposto em VIRI-EUX (1986). Acrescenta-se que alguns erros tipográficos encontrados no referido artigo são devidamente corrigidos aqui.

Sejam $(v_x, v_z) = (U, V)$ o campo de velocidades, $(\tau_{xx}, \tau_{xz}, \tau_{zz}) = (X, T, Z)$ o campo de tensões e $(\lambda, \mu) = (L, M)$ os parâmetros de Lamé, as equações elásticas em termos de tensões e velocidades em duas dimensões (dadas na seção 2.3.4), na ausência do termo fonte, são dada por

$$\begin{aligned}\rho \partial_t U &= \partial_x X + \partial_z T \\ \rho \partial_t V &= \partial_x T + \partial_z Z \\ \partial_t X &= (L + 2M) \partial_x U + L \partial_z V \\ \partial_t Z &= (L + 2M) \partial_z V + L \partial_x U \\ \partial_t T &= M [\partial_x V + \partial_z U].\end{aligned}$$

Para discretizar estas equações, considera-se a malha intercalada da Fig. D.3, sendo h o espaçamento da malha e Δt o tamanho do passo no tempo. É, então, utilizado

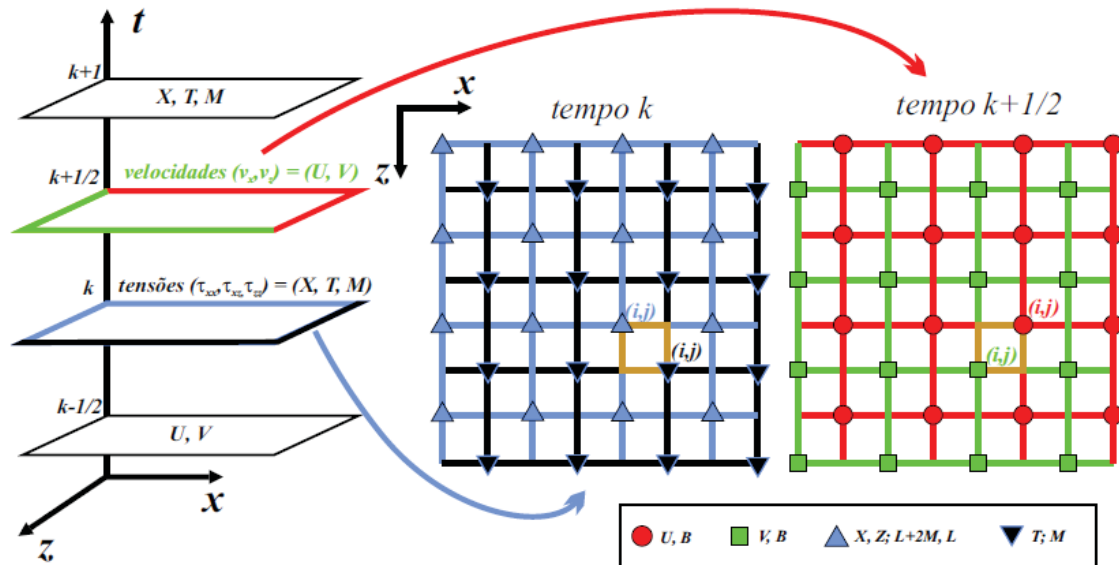


Figura D.3: Malha intercalada de Yee.

o operador de diferenças finitas de segunda ordem dado por

$$\frac{df_i}{dx} = \frac{f_{i+1/2} - f_{i-1/2}}{h}, \quad (\text{D.38})$$

donde se obtém facilmente as seguintes expressões¹ de diferenças centrais em segunda ordem de aproximação

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} &= U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} + B_{i,j} \frac{\Delta t}{h} \left(X_{i+\frac{1}{2},j}^k - X_{i-\frac{1}{2},j}^k + T_{i,j+\frac{1}{2}}^k - T_{i,j-\frac{1}{2}}^k \right) \\ V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} &= V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} + B_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{h} \left(T_{i+1,j+\frac{1}{2}}^k - T_{i,j+\frac{1}{2}}^k + Z_{i+\frac{1}{2},j+1}^k - Z_{i+\frac{1}{2},j}^k \right) \\ X_{i+\frac{1}{2},j}^{k+1} &= X_{i+\frac{1}{2},j}^k + (L + 2M)_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{h} \left(U_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + L_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{h} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\ Z_{i+\frac{1}{2},j}^{k+1} &= Z_{i+\frac{1}{2},j}^k + (L + 2M)_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{h} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + L_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{h} \left(U_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\ T_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} &= T_{i,j+\frac{1}{2}}^k + M_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{h} \left(U_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + M_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{h} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.39})$$

Esquema de Levander (4E-2T)

A extensão do esquema apresentado acima para quarta ordem no espaço foi proposta em LEVANDER (1988). Tal esquema utiliza a mesma ordem de aproximação no tempo e eleva a ordem de aproximação no espaço para quarta ordem, valendo-se naturalmente do operador de diferenças finitas correspondente, que utiliza quatro pontos para aproximar as derivadas espaciais, dado por

$$\frac{df_i}{dx} = \frac{-f_{i+3/2} + 27f_{i+1/2} - 27f_{i-1/2} + f_{i-3/2}}{24h}.$$

Com isto, a obtenção das expressões finais do esquema de Levander é direta, sendo desnecessário apresentá-las explicitamente aqui.

¹No artigo original de VIRIEUX (1986) existem erros nos índices de V nas 3 últimas equações, além de Z e T estarem trocados.

Apêndice E

Expressões de Campo Único em Quarta Ordem no Espaço

Neste apêndice serão apresentadas as expressões dos esquemas de diferenças finitas propostos e desenvolvidos neste trabalho para as equações de campo único, utilizando aproximações de quarta ordem no espaço e segunda no tempo.

E.1 Anisotropia ortotrópica

Para esquemas com anisotropia até ortotrópica, utiliza-se a malha de Virieux para discretizar as equações da onda relativa à cada componente (x e z no caso bidimensional), conforme explicado em detalhes no texto. Neste sentido, as expressões discretas finais em quarta ordem de aproximação no espaço para anisotropia ortotrópica (considerando a malha intercalada de Virieux) são obtidas utilizando-se os operadores correspondentes obtidos na seção 3.5. Explicitamente, considerando-se espaçamentos dados por $\Delta x = \Delta z = h$, a expressão para a componente x é dada

por

$$\begin{aligned}
U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} + U_{i,j}^{k-\frac{3}{2}} &= b_{i,j} \frac{\Delta t^2}{h^2} \left\{ \frac{9}{8} \left(A_{i+1/2,j} \left[\frac{9}{8} (U_{i+1,j} - U_{i,j}) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \frac{1}{24} (U_{i+2,j} - U_{i-1,j}) \right] \right) \right. \\
&\quad \left. - A_{i-\frac{1}{2},j} \left[\frac{9}{8} (U_{i,j} - U_{i-1,j}) - \frac{1}{24} (U_{i+1,j} - U_{i-2,j}) \right] \right) \\
- \frac{1}{24} \left(A_{i+\frac{3}{2},j} \left[\frac{9}{8} (U_{i+2,j} - U_{i+1,j}) - \frac{1}{24} (U_{i+3,j} - U_{i,j}) \right] \right. \\
&\quad \left. - A_{i-\frac{3}{2},j} \left[\frac{9}{8} (U_{i-1,j} - U_{i-2,j}) - \frac{1}{24} (U_{i,j} - U_{i-3,j}) \right] \right) \\
+ \frac{9}{8} \left(B_{i+\frac{1}{2},j} \left[\frac{9}{8} (V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{24} (V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}}) \right] \right. \\
&\quad \left. - B_{i-\frac{1}{2},j} \left[\frac{9}{8} (V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{24} (V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}}) \right] \right) \\
- \frac{1}{24} \left(B_{i+\frac{3}{2},j} \left[\frac{9}{8} (V_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{24} (V_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2}} - V_{i+\frac{3}{2},j-\frac{3}{2}}) \right] \right. \\
&\quad \left. - B_{i-\frac{3}{2},j} \left[\frac{9}{8} (V_{i-\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{24} (V_{i-\frac{3}{2},j+\frac{3}{2}} - V_{i-\frac{3}{2},j-\frac{3}{2}}) \right] \right) \quad (E.1) \\
+ \frac{9}{8} \left(F_{i,j+1/2} \left[\frac{9}{8} (U_{i,j+1} - U_{i,j}) - \frac{1}{24} (U_{i,j+2} - U_{i,j-1}) \right] \right. \\
&\quad \left. - F_{i,j-\frac{1}{2}} \left[\frac{9}{8} (U_{i,j} - U_{i,j-1}) - \frac{1}{24} (U_{i,j+1} - U_{i,j-2}) \right] \right) \\
- \frac{1}{24} \left(F_{i,j+\frac{3}{2}} \left[\frac{9}{8} (U_{i,j+2} - U_{i,j+1}) - \frac{1}{24} (U_{i,j+3} - U_{i,j}) \right] \right. \\
&\quad \left. - F_{i,j-\frac{3}{2}} \left[\frac{9}{8} (U_{i,j-1} - U_{i,j-2}) - \frac{1}{24} (U_{i,j} - U_{i,j-3}) \right] \right) \\
+ \frac{9}{8} \left(F_{i,j+\frac{1}{2}} \left[\frac{9}{8} (V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) - \frac{1}{24} (V_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}) \right] \right. \\
&\quad \left. - F_{i,j-\frac{1}{2}} \left[\frac{9}{8} (V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{24} (V_{i+\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}}) \right] \right) \\
- \frac{1}{24} \left(F_{i,j+\frac{3}{2}} \left[\frac{9}{8} (V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}) - \frac{1}{24} (V_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2}} - V_{i-\frac{3}{2},j+\frac{3}{2}}) \right] \right. \\
&\quad \left. - F_{i,j-\frac{3}{2}} \left[\frac{9}{8} (V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}}) - \frac{1}{24} (V_{i+\frac{3}{2},j-\frac{3}{2}} - V_{i-\frac{3}{2},j-\frac{3}{2}}) \right] \right) \left. \right\}
\end{aligned}$$

e, para para a componente z , por

$$\begin{aligned}
V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - 2V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} + V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{3}{2}} &= b_{i,j} \frac{\Delta t^2}{h^2} \left\{ \frac{9}{8} \left(F_{i+\frac{1}{2},j} \left[\frac{9}{8} \left(U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - U_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \frac{1}{24} \left(U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} - U_{i+\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}} \right) \right] \right) \right. \\
&\quad \left. - F_{i-\frac{1}{2},j} \left[\frac{9}{8} \left(U_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{24} \left(U_{i-\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} - U_{i-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}} \right) \right] \right) \\
- \frac{1}{24} \left(F_{i+\frac{3}{2},j} \left[\frac{9}{8} \left(U_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} - U_{i+\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{24} \left(U_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2}} - U_{i+\frac{3}{2},j-\frac{3}{2}} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - F_{i-\frac{3}{2},j} \left[\frac{9}{8} \left(U_{i-\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{24} \left(U_{i-\frac{3}{2},j+\frac{3}{2}} - U_{i-\frac{3}{2},j-\frac{3}{2}} \right) \right] \right) \\
+ \frac{9}{8} \left(F_{i+1/2,j} \left[\frac{9}{8} (V_{i+1,j} - V_{i,j}) - \frac{1}{24} (V_{i+2,j} - V_{i-1,j}) \right] \right. \\
&\quad \left. - F_{i-\frac{1}{2},j} \left[\frac{9}{8} (V_{i,j} - V_{i-1,j}) - \frac{1}{24} (V_{i+1,j} - V_{i-2,j}) \right] \right) \\
- \frac{1}{24} \left(F_{i+\frac{3}{2},j} \left[\frac{9}{8} (V_{i+2,j} - V_{i+1,j}) - \frac{1}{24} (V_{i+3,j} - V_{i,j}) \right] \right. \\
&\quad \left. - F_{i-\frac{3}{2},j} \left[\frac{9}{8} (V_{i-1,j} - V_{i-2,j}) - \frac{1}{24} (V_{i,j} - V_{i-3,j}) \right] \right) \\
+ \frac{9}{8} \left(B_{i,j+\frac{1}{2}} \left[\frac{9}{8} \left(U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{24} \left(U_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - B_{i,j-\frac{1}{2}} \left[\frac{9}{8} \left(U_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{24} \left(U_{i+\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}} \right) \right] \right) \\
- \frac{1}{24} \left(B_{i,j+\frac{3}{2}} \left[\frac{9}{8} \left(U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} - U_{i-\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} \right) - \frac{1}{24} \left(U_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2}} - U_{i-\frac{3}{2},j+\frac{3}{2}} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - B_{i,j-\frac{3}{2}} \left[\frac{9}{8} \left(U_{i+\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}} - U_{i-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}} \right) - \frac{1}{24} \left(U_{i+\frac{3}{2},j-\frac{3}{2}} - U_{i-\frac{3}{2},j-\frac{3}{2}} \right) \right] \right) \\
+ \frac{9}{8} \left(D_{i,j+1/2} \left[\frac{9}{8} (V_{i,j+1} - V_{i,j}) - \frac{1}{24} (V_{i,j+2} - V_{i,j-1}) \right] \right. \\
&\quad \left. - D_{i,j-\frac{1}{2}} \left[\frac{9}{8} (V_{i,j} - V_{i,j-1}) - \frac{1}{24} (V_{i,j+1} - V_{i,j-2}) \right] \right) \\
- \frac{1}{24} \left(D_{i,j+\frac{3}{2}} \left[\frac{9}{8} (V_{i,j+2} - V_{i,j+1}) - \frac{1}{24} (V_{i,j+3} - V_{i,j}) \right] \right. \\
&\quad \left. - D_{i,j-\frac{3}{2}} \left[\frac{9}{8} (V_{i,j-1} - V_{i,j-2}) - \frac{1}{24} (V_{i,j} - V_{i,j-3}) \right] \right) \left. \right\}. \tag{E.2}
\end{aligned}$$

E.2 Anisotropia geral

As expressões para a malha intercalada de quarta ordem são obtidas através das expressões de quarta ordem correspondentes, desenvolvidas na seção 3.5 e não serão apresentadas aqui por serem muito extensas.

Apêndice F

Esquema de Lax-Wendroff e Termos de Correção

Neste apêndice serão discretizados os termos de correção em 2D do sistema de equações discretizados através da malha intercalada, tanto para o caso acústico quanto para o caso elástico. Antes, porém, será apresentada uma revisão dos esquemas tipo Lax-Wendroff existentes na literatura específica de geofísica aplicados a malhas sem intercalamento.

F.1 Equação da onda acústica para densidade constante

O caso mais simples de aplicação do método da equação modificada é na equação usual da onda, Eq. (A.43), aplicado de forma pioneira em geofísica por SHUBIN e BELL (1987). A partir da expressão para a aproximação da derivada segunda do tempo em quarta ordem, obtida somando-se as Eq. (C.3) e Eq. (C.4) e isolando o termo da derivada segunda, chega-se à

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{u^{k-1} - 2u^k + u^{k+1}}{\Delta t^2} - \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 p}{\partial t^4} + O(\Delta t^4). \quad (\text{F.1})$$

Utilizando a equação da onda, dada por

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0,$$

para trocar a derivada quarta no tempo por uma correspondente no espaço, pode-se escrever

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (c^2 \nabla^2 p) = c^2 \nabla^2 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 (c^2 \nabla^2 p). \quad (\text{F.2})$$

Considerando-se c constante (ou seja um meio homogêneo), como no artigo original, pode-se escrever

$$\frac{\partial^4 p}{\partial t^4} = c^4 \nabla^2(\nabla^2 p), \quad (\text{F.3})$$

e, substituindo este resultado na Eq. (F.1), leva à

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{u^{k-1} - 2u^k + u^{k+1}}{\Delta t^2} - \frac{c^4 \Delta t^2}{12} \nabla^2(\nabla^2 p) + O(\Delta t^4).$$

Assim, se escreve a chamada equação da onda homogênea modificada como

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 p + \frac{c^4 \Delta t^2}{12} \nabla^2(\nabla^2 p) = c^2 \nabla^2 p + T_c, \quad (\text{F.4})$$

onde

$$T_c = \frac{c^4 \Delta t^2}{12} \nabla^2(\nabla^2 p), \quad (\text{F.5})$$

sendo a discretização da parte original feita em quarta ordem no espaço e segunda no tempo (exatamente como apresentado na seção D.1.1) e o operador $\nabla^2(\nabla^2 p)$, presente no termo de correção T_c , deve ser aproximado em segunda ordem, pela presença do Δt^2 . Assim, basta discretizar este termo para obter um esquema estável de quarta ordem no tempo. É importante mencionar que o termo de correção escrito na equação acima é uma aproximação para meios homogêneos, sendo a velocidade tomada como constante. No caso em que c varia, deve-se utilizar o termo de correção dado pela Eq. (F.2). Neste trabalho optou-se por utilizar a do termo de correção homogêneo, que consta no artigo original, como mostrado na seqüência.

Vê-se então que, utilizando o método da equação modificada, a aproximação de quarta ordem do operador temporal pode ser expressa pela soma do operador de segunda ordem com um termo de correção. Repare que este método pode ser utilizado para aumentar a ordem do operador temporal através da soma de termos de correção dados, no caso aqui apresentado, por termos subseqüentes na expansão dada pela Eq. (F.1).

Em uma dimensão, se chega facilmente a seguinte aproximação de segunda ordem

$$\nabla^2(\nabla^2 p) = \frac{\partial^4 p}{\partial x^4} = \frac{p_{i+2} - 4p_{i+1} + 6p_i - 4p_{i-1} + p_{i-2}}{h^4}. \quad (\text{F.6})$$

Em duas dimensões o operador contém termos cruzados, sendo a expressão correta

de segunda ordem de aproximação dada por

$$\nabla^2(\nabla^2 p) = \frac{1}{h^4} \left(p_{i+2,j} - 8p_{i+1,j} + 10p_{i,j} - 8p_{i-1,j} + p_{i-2,j} + \right. \\ \left. p_{i,j+2} - 8p_{i,j+1} + 10p_{i,j} - 8p_{i,j-1} + p_{i,j-2} + \right. \\ \left. 2(p_{i+1,j+1} + p_{i-1,j+1} + p_{i+1,j-1} + p_{i-1,j-1}) \right). \quad (\text{F.7})$$

Repare que há termos cruzados no *stencil* da aproximação dada pela Eq. F.7. Na Fig. F.1, é mostrada, de forma esquemática, a diferença entre os esquemas de segunda e quarta ordens no tempo utilizando o método da equação modificada, ambos de quarta ordem no espaço. O esquema que utiliza a equação modificada para

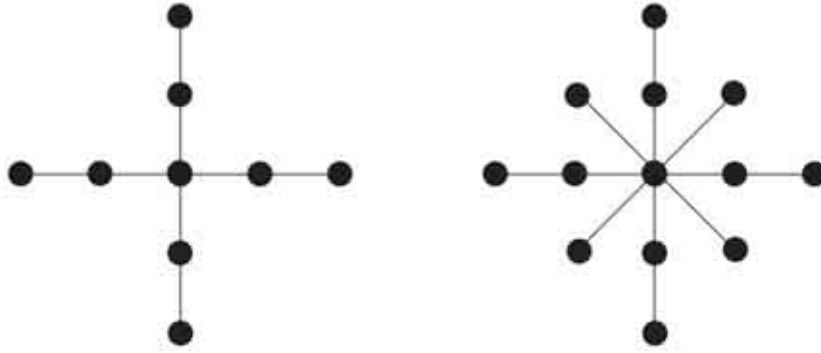


Figura F.1: Pontos utilizados nos esquemas de quarta ordem no espaço. A esquerda, são mostrados os pontos utilizados no esquema padrão 4-2 e a direita são mostrados os utilizados no esquema 4-4 com o método da equação modificada.

aumentar a ordem no tempo, diferente do esquema tradicional, considera pontos cruzados na malha do espaço para tal. Assim, enquanto o esquema tradicional utiliza 9 pontos no espaço, o esquema com equação modificada utiliza 13 pontos.

F.2 Equação da onda acústica geral

O segundo caso apresentado (COHEN e JOLY, 1990) é o da equação da onda para meios heterogêneos. A partir da expressão para a aproximação da derivada segunda no tempo em quarta ordem, dada por

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{u^{k-1} - 2u^k + u^{k+1}}{\Delta t^2} - \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 p}{\partial t^4} + O(\Delta t^4), \quad (\text{F.8})$$

Como antes, utiliza-se a equação da onda

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{F.9})$$

para trocar a derivada temporal de quarta ordem por derivadas espaciais. Isto resulta em

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right) = \kappa \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right) = \kappa \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \left[\kappa \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) \right] \right).$$

Portanto

$$\frac{\partial^4 p}{\partial t^4} = \kappa \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \left[\kappa \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) \right] \right).$$

Finalmente, a equação modificada da onda heterogênea é

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \kappa \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) + \frac{\Delta t^2}{12} \kappa \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \left[\kappa \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) \right] \right). \quad (\text{F.10})$$

Maiores detalhes sobre os esquemas apresentados nas duas seções anteriores devem ser buscados em COHEN e JOLY (1990, 1996), incluindo as expressões em uma, duas e três dimensões para a discretização do termo de correção para a equação da onda heterogênea.

F.2.1 Aplicação da fonte

Um aspecto importante, que não encontra-se descrito no paper citado se refere à aplicação de uma fonte sísmica e a conseqüente mudança no termo de correção advinda. Enfatiza-se que o procedimento exemplificado aqui deve ser feito para todos os esquemas que utilizam a formulação de Lax-Wendroff. Considere, então, a aplicação de uma fonte geofísica na Eq. (F.9), de forma que a mesma deve ser reescrita como

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \kappa \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) + F. \quad (\text{F.11})$$

Procedendo de forma semelhante ao que foi feito anteriormente, ou seja, derivando-se a Eq. (F.11) e substituindo uma equação na outra, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right) &= \kappa \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \\ &= \kappa \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \left[\kappa \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) + F \right] \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \\ &= \kappa \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \left[\kappa \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) \right] \right) + \kappa \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} F \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Portanto, além do termo de correção T_C obtido anteriormente (repetido abaixo), deve-se acrescentar um termo de correção T_C^F relativo à aplicação da fonte, dado

por

$$T_C = \frac{\Delta t^2}{12} \kappa \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \left[\kappa \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) \right] \right) \quad (\text{F.13})$$

$$T_C^F = \kappa \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} F \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}. \quad (\text{F.14})$$

As expressões discretas para os fatores de correção T_C em duas e três dimensões podem ser obtidas em COHEN e JOLY (1996). Já as expressão para o termo de correção T_C^F relativo à fonte não se encontram no referido artigo, mas podem ser obtidas sem dificuldades.

A seguir, são obtidas as expressões discretas dos termos de correção relativos à formulação na acústica e elástica isotrópica malha intercalada, formulação esta desenvolvida na seção 4.4.

F.3 Discretização do termo de correção: Caso acústico

No caso acústico, para o sistema de equações modificadas, dado pelas Eq. (4.37) e Eq. (4.38), tem-se os seguintes termos de correção:

$$T^{(1)} = \vec{\nabla} \cdot [b \vec{\nabla} (\kappa \vec{\nabla} \cdot \vec{v})] \quad (\text{F.15})$$

$$T^{(2)} = \vec{\nabla} [\kappa \vec{\nabla} \cdot (b \vec{\nabla} p)], \quad (\text{F.16})$$

que são válidos para qualquer sistema de coordenadas. A seguir, são apresentados explicitamente cada um deste termos utilizando coordenadas cartesianas em duas dimensões espaciais.

F.3.1 Termos $T^{(1)}$

Utilizando a convenção de soma de Einstein, que subentende soma sob índices repetidos, este termo é escrito em coordenadas cartesianas como

$$T^{(1)} = \vec{\nabla} \cdot [b \vec{\nabla} (\kappa \vec{\nabla} \cdot \vec{v})] = \partial_l [b \partial_l (\kappa \partial_m v_m)], \quad (\text{F.17})$$

onde os símbolos ∂_l e ∂_m representam derivadas espaciais, sendo l e m os índices que representam a coordenada em relação a qual está sendo tomada a derivada. Por

exemplo, expandindo o termo acima em duas dimensões, o seguinte escalar é obtido

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= \partial_x [b \partial_x (\kappa \partial_x v_x)] + \partial_z [b \partial_z (\kappa \partial_x v_x)] \\ &+ \partial_z [b \partial_z (\kappa \partial_z v_z)] + \partial_x [b \partial_x (\kappa \partial_z v_z)]. \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

F.3.2 Termos $T^{(2)}$

Utilizando a notação de Einstein, as componentes deste termo são escritas como

$$T_l^{(2)} = \vec{\nabla} [\kappa \vec{\nabla} \cdot (b \vec{\nabla} p)] = \partial_l [\kappa \partial_m (b \partial_m p)]. \quad (\text{F.19})$$

Expandindo em duas dimensões, resulta nas seguintes componentes

$$\begin{aligned} T^{(2)} &= \left(\partial_x [\kappa \partial_x (b \partial_x p)] + \partial_x [\kappa \partial_z (b \partial_z p)], \right. \\ &\quad \left. \partial_z [\kappa \partial_z (b \partial_z p)] + \partial_z [\kappa \partial_x (b \partial_x p)] \right). \end{aligned} \quad (\text{F.20})$$

F.3.3 Discretizações

Através das Eq. (F.18) e Eq. (F.20), observa-se que todos os termos a serem discretizados são semelhantes, podendo ser divididos em três tipos, conforme a ordem que se tomam as derivadas em cada variável, ou seja,

$$\alpha = \partial_l [f \partial_l (g \partial_l U)] \quad (\text{F.21})$$

$$\beta = \partial_l [f \partial_l (g \partial_m U)] \quad (\text{F.22})$$

$$\gamma = \partial_l [f \partial_m (g \partial_m U)], \quad (\text{F.23})$$

onde o índice l corresponde a uma determinada variável temporal (x ou z) e m corresponde a outra variável, sendo f e g funções genéricas que representam uma determinada propriedade do meio e U , a variável que representa um dos campos de propagação da onda (pressão ou componente da velocidade). É importante observar que não há soma implícita nas expressões acima.

Termo α

A seguir apresentam-se as expressões para o termo α , no caso das derivadas serem em x (ou seja, $l = x$). Discretizando tal termo no ponto i, j da malha de diferenças finitas, obtém-se

$$\alpha_{i,j} = \partial_x [f \partial_x (g \partial_x U)]_{i,j} = \partial_x [f_{i,j} F_{i,j}] = \frac{f_{i+\frac{1}{2},j} F_{i+\frac{1}{2},j} - f_{i-\frac{1}{2},j} F_{i-\frac{1}{2},j}}{h}, \quad (\text{F.24})$$

onde

$$F_{i,j} = \partial_x (g_{i,j} \partial_x U_i) = g_{i+\frac{1}{2},j} \left(\frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h^2} \right) - g_{i-\frac{1}{2},j} \left(\frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{h^2} \right), \quad (\text{F.25})$$

sendo os índices i e j referentes às coordenadas x e z nos pontos discretos dados por $x_i = ih$ e $z_j = jh$, onde h é o espaçamento da malha de diferenças finitas. Assim, substituindo a Eq. (F.25) (aplicada para o nó em questão) na Eq. (F.24), obtém-se o seguinte operador de diferenças finitas

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j} = & f_{i+\frac{1}{2},j} g_{i+1,j} \left(\frac{U_{i+\frac{3}{2},j} - U_{i+\frac{1}{2},j}}{h^3} \right) - f_{i+\frac{1}{2},j} g_{i,j} \left(\frac{U_{i+\frac{1}{2},j} - U_{i-\frac{1}{2},j}}{h^3} \right) \\ & - f_{i-\frac{1}{2},j} g_{i,j} \left(\frac{U_{i+\frac{1}{2},j} - U_{i-\frac{1}{2},j}}{h^3} \right) + f_{i-\frac{1}{2},j} g_{i-1,j} \left(\frac{U_{i-\frac{1}{2},j} - U_{i-\frac{3}{2},j}}{h^3} \right). \end{aligned} \quad (\text{F.26})$$

O termo $\partial_z [f \partial_z (g \partial_z U)]$ é obtido apenas pela troca $i \leftrightarrow j$.

Termo β

Analogamente, pode-se escrever

$$\beta_{i,j} = \partial_x [f \partial_x (g \partial_z U)]_{i,j} = \partial_x [f_{i,j} F_{i,j}] = \frac{f_{i+\frac{1}{2},j} F_{i+\frac{1}{2},j} - f_{i-\frac{1}{2},j} F_{i-\frac{1}{2},j}}{h}, \quad (\text{F.27})$$

onde

$$\begin{aligned} F_{i,j} = & \partial_x (g_{i,j} \partial_z U_{i,j}) \\ = & g_{i+\frac{1}{2},j} \left(\frac{U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - U_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{h^2} \right) - g_{i-\frac{1}{2},j} \left(\frac{U_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{h^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{F.28})$$

Logo

$$\begin{aligned} \beta_{i,j} = & f_{i+\frac{1}{2},j} g_{i+1,j} \left(\frac{U_{i+1,j+\frac{1}{2}} - U_{i+1,j-\frac{1}{2}}}{h^3} \right) - f_{i+\frac{1}{2},j} g_{i,j} \left(\frac{U_{i,j+\frac{1}{2}} - U_{i,j-\frac{1}{2}}}{h^3} \right) \\ & - f_{i-\frac{1}{2},j} g_{i,j} \left(\frac{U_{i,j+\frac{1}{2}} - U_{i,j-\frac{1}{2}}}{h^3} \right) + f_{i-\frac{1}{2},j} g_{i-1,j} \left(\frac{U_{i-1,j+\frac{1}{2}} - U_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{h^3} \right). \end{aligned} \quad (\text{F.29})$$

O termo $\partial_z [f \partial_z (g \partial_x U)]$ é obtido trocando-se $i \leftrightarrow j$.

Termo γ

Da mesma forma que antes, se escreve

$$\gamma_{i,j} = \partial_x [f \partial_z (g \partial_x U)] = \partial_x [f_{i,j} F_{i,j}], \quad (\text{F.30})$$

onde

$$F_{i,j} = \partial_z (g_{i,j} \partial_z U_{i,j}) = g_{i,j+\frac{1}{2}} \left(\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{h^2} \right) - g_{i,j-\frac{1}{2}} \left(\frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{h^2} \right). \quad (\text{F.31})$$

Logo

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j} = & f_{i+\frac{1}{2},j} g_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(\frac{U_{i+\frac{1}{2},j+1} - U_{i+\frac{1}{2},j}}{h^3} \right) - f_{i+\frac{1}{2},j} g_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(\frac{U_{i+\frac{1}{2},j} - U_{i+\frac{1}{2},j-1}}{h^3} \right) \\ & - f_{i-\frac{1}{2},j} g_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(\frac{U_{i-\frac{1}{2},j+1} - U_{i-\frac{1}{2},j}}{h^3} \right) + f_{i-\frac{1}{2},j} g_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(\frac{U_{i-\frac{1}{2},j} - U_{i-\frac{1}{2},j-1}}{h^3} \right). \end{aligned} \quad (\text{F.32})$$

Como antes, o termo $\partial_z [f \partial_x (g \partial_x U)]$ é obtido fazendo a troca $i \leftrightarrow j$.

F.3.4 Expressões finais

Através dos resultados dados pelas Eq. (F.26), Eq. (F.29) e Eq. (F.32), as expressões finais para os termos de correção $T^{(1)}$ e $T^{(2)}$ do caso acústico, dados pelas Eq. (F.18) e Eq. (F.20), podem ser obtidas. Colocando as propriedades corretas no lugar de f e g , bem como o campo correto no lugar da função U , obtém-se as expressões finais dada abaixo.

Termo $T^{(1)}$

$$\begin{aligned} T_{i,j}^{(1)} = & b_{i+\frac{1}{2},j} \kappa_{i+1,j} \left(\frac{u_{i+\frac{3}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j}}{h^3} \right) - b_{i+\frac{1}{2},j} \kappa_{i,j} \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{h^3} \right) \\ & - b_{i-\frac{1}{2},j} \kappa_{i,j} \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{h^3} \right) + b_{i-\frac{1}{2},j} \kappa_{i-1,j} \left(\frac{u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{3}{2},j}}{h^3} \right) \\ & + b_{i,j+\frac{1}{2}} \kappa_{i,j+1} \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i-\frac{1}{2},j+1}}{h^3} \right) - b_{i,j+\frac{1}{2}} \kappa_{i,j} \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{h^3} \right) \\ & - b_{i,j-\frac{1}{2}} \kappa_{i,j} \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{h^3} \right) + b_{i,j-\frac{1}{2}} \kappa_{i,j-1} \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j-1} - u_{i-\frac{1}{2},j-1}}{h^3} \right) \\ & + b_{i,j+\frac{1}{2}} \kappa_{i,j+1} \left(\frac{v_{i,j+\frac{3}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}}}{h^3} \right) - b_{i,j+\frac{1}{2}} \kappa_{i,j} \left(\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{h^3} \right) \\ & - b_{i,j-\frac{1}{2}} \kappa_{i,j} \left(\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{h^3} \right) + b_{i,j-\frac{1}{2}} \kappa_{i,j-1} \left(\frac{v_{i,j-\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{3}{2}}}{h^3} \right) \\ & + b_{i+\frac{1}{2},j} \kappa_{i+1,j} \left(\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i+1,j-\frac{1}{2}}}{h^3} \right) - b_{i+\frac{1}{2},j} \kappa_{i,j} \left(\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{h^3} \right) \\ & - b_{i-\frac{1}{2},j} \kappa_{i,j} \left(\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{h^3} \right) + b_{i-\frac{1}{2},j} \kappa_{i-1,j} \left(\frac{v_{i-1,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{h^3} \right). \end{aligned} \quad (\text{F.33})$$

Termo $T^{(2)}$

Como o termo $T^{(2)}$ possui duas componentes, pode-se escrever cada uma delas separadamente, observando-se que $T^{(2)} = (T_{(x)}^{(2)}, T_{(z)}^{(2)})$. Assim, conforme a seção D.2, a primeira componente é associada a uma equação que é considerada nos nós dados por $i - \frac{1}{2}, j$ da malha intercalada e a segunda componente é associada a uma equação que é calculada em $i, j + \frac{1}{2}$. Levando-se isto em conta, obtém-se as seguintes expressões

$$\begin{aligned}
T_{(x) i-\frac{1}{2}, j}^{(2)} &= \kappa_{i,j} b_{i+\frac{1}{2}, j} \left(\frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{h^3} \right) - \kappa_{i,j} b_{i-\frac{1}{2}, j} \left(\frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{h^3} \right) \\
&\quad - \kappa_{i-1,j} b_{i-\frac{1}{2}, j} \left(\frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{h^3} \right) + \kappa_{i-1,j} b_{i-\frac{3}{2}, j} \left(\frac{p_{i-1,j} - p_{i-2,j}}{h^3} \right) \\
&\quad + \kappa_{i,j} b_{i,j+\frac{1}{2}} \left(\frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{h^3} \right) - \kappa_{i,j} b_{i,j-\frac{1}{2}} \left(\frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{h^3} \right) \\
&\quad - \kappa_{i-1,j} b_{i-1,j+\frac{1}{2}} \left(\frac{p_{i-1,j+1} - p_{i-1,j}}{h^3} \right) + \kappa_{i-1,j} b_{i-1,j-\frac{1}{2}} \left(\frac{p_{i-1,j} - p_{i-1,j-1}}{h^3} \right) \quad (F.34)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
T_{(z) i, j+\frac{1}{2}}^{(2)} &= \kappa_{i,j+1} b_{i,j+\frac{3}{2}} \left(\frac{p_{i,j+2} - p_{i,j+1}}{h^3} \right) - \kappa_{i,j+1} b_{i,j+\frac{1}{2}} \left(\frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{h^3} \right) \\
&\quad - \kappa_{i,j} b_{i,j+\frac{1}{2}} \left(\frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{h^3} \right) + \kappa_{i,j} b_{i,j-\frac{1}{2}} \left(\frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{h^3} \right) \\
&\quad \kappa_{i,j+1} b_{i+\frac{1}{2}, j+1} \left(\frac{p_{i+1,j+1} - p_{i,j+1}}{h^3} \right) - \kappa_{i,j+1} b_{i-\frac{1}{2}, j+1} \left(\frac{p_{i,j+1} - p_{i-1,j+1}}{h^3} \right) \\
&\quad - \kappa_{i,j} b_{i+\frac{1}{2}, j} \left(\frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{h^3} \right) + \kappa_{i,j} b_{i-\frac{1}{2}, j} \left(\frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{h^3} \right). \quad (F.35)
\end{aligned}$$

F.4 Discretização do termo de correção: Caso elástico

Em primeiro lugar, estão apresentadas as componentes do termo de correção para o caso elástico geral heterogêneo e anisotrópico, provenientes das Eq. (4.51) e Eq. (4.52), ou seja

$$T_{ij}^{(3)} = c_{ijkl} \partial_l \left[\frac{1}{\rho} \partial_m (c_{kmnp} \partial_n v_p) \right] \quad (F.36)$$

$$T_i^{(4)} = \partial_j \left[c_{ijkl} \partial_l \left(\frac{1}{\rho} \partial_p \tau_{kp} \right) \right]. \quad (F.37)$$

F.4.1 Simplificações para meios isotrópicos

Neste trabalho, não foram implementados os esquemas de quarta ordem no tempo para a formulação elástica. Entretanto, serão deduzidas as expressões dos termos

de correção para o caso particular de meios isotrópicos. Para tal, primeiro serão simplificadas as expressões dos termos de correção, utilizando-se a Eq. (2.95), dada por

$$c_{ijkl}(\vec{r}) = \lambda(\vec{r})\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\vec{r})(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (\text{F.38})$$

Substituindo a Eq. (F.38) nas Eq. (F.36) e Eq. (F.37) para os termos de correção, obtém-se as expressões desejadas. Realizando-se os cálculos, chega-se às seguintes expressões

$$\begin{aligned} T_{ij}^{(3)} &= \lambda\delta_{ij}\partial_l [b(\partial_l[\lambda\partial_n v_n] + \partial_n[\mu\partial_n v_l] + \partial_n[\mu\partial_l v_n])] \\ &+ \mu\partial_i [b(\partial_j[\lambda\partial_n v_n] + \partial_n[\mu\partial_n v_j] + \partial_n[\mu\partial_j v_n])] \end{aligned} \quad (\text{F.39})$$

$$\begin{aligned} &+ \mu\partial_j [b(\partial_i[\lambda\partial_n v_n] + \partial_n[\mu\partial_n v_i] + \partial_n[\mu\partial_i v_n])] \\ T_i^{(4)} &= \delta_{ij}\partial_j [\lambda\partial_k (b\partial_p \tau_{kp})] + \partial_j [\mu(\partial_j [b\partial_p \tau_{ip}] + \partial_i [b\partial_p \tau_{jp}])] \end{aligned} \quad (\text{F.40})$$

Tais expressões estão escritas usando a convenção de soma sob índices repetidos e, portanto, possuem muitos termos mesmo em 2D. Por exemplo, o termo $T_{ij}^{(3)}$ possui $n_d = 3 \times 4 + 2 \times 6 = 24$ termos para os elementos diagonais e $n = 2 \times 6 = 12$ para os elementos fora da diagonal. Entretanto, pela simetria dos termos, diversas simplificações podem ser feitas de forma que este número se reduza. Como exemplo, examinando o termo $T_{11}^{(3)}$, ou seja

$$\begin{aligned} T_{xx}^{(3)} &= \lambda\partial_l [b(\partial_l[\lambda\partial_n v_n] + \partial_n[\mu\partial_n v_l] + \partial_n[\mu\partial_l v_n])] \\ &+ \mu\partial_x [b(\partial_x[\lambda\partial_n v_n] + \partial_n[\mu\partial_n v_x] + \partial_n[\mu\partial_x v_n])] \\ &+ \mu\partial_x [b(\partial_x[\lambda\partial_n v_n] + \partial_n[\mu\partial_n v_x] + \partial_n[\mu\partial_x v_n])] \end{aligned}$$

e observando que os dois últimos termos são iguais, chega-se à

$$\begin{aligned} T_{xx}^{(3)} &= \lambda\partial_l [b(\partial_l[\lambda\partial_n v_n] + \partial_n[\mu\partial_n v_l] + \partial_n[\mu\partial_l v_n])] \\ &+ 2\mu(\partial_x [b(\partial_x[\lambda\partial_n v_n] + \partial_n[\mu\partial_n v_x] + \partial_n[\mu\partial_x v_n])]), \end{aligned}$$

que possui $\bar{n}_d = 3 \times 4 + 2 \times 3 = 18$ termos. Fazendo o somatório, pode-se fazer outras simplificações. Assim, no caso 2D, obtém-se

$$\begin{aligned} T_{xx}^{(3)} &= \lambda\partial_x [b\partial_x (\lambda\partial_x v_x)] + \lambda\partial_z [b\partial_z (\lambda\partial_x v_x)] + \lambda\partial_x [b\partial_x (\lambda\partial_z v_z)] + \lambda\partial_z [b\partial_z (\lambda\partial_z v_z)] \\ &+ \lambda\partial_x [b\partial_x (\mu\partial_x v_x)] + \lambda\partial_z [b\partial_x (\mu\partial_x v_z)] + \lambda\partial_x [b\partial_z (\mu\partial_z v_x)] + \lambda\partial_z [b\partial_z (\mu\partial_z v_x)] \\ &+ \lambda\partial_x [b\partial_x (\mu\partial_x v_x)] + \lambda\partial_z [b\partial_x (\mu\partial_z v_x)] + \lambda\partial_x [b\partial_z (\mu\partial_x v_z)] + \lambda\partial_z [b\partial_z (\mu\partial_z v_z)] \\ &+ 2\mu\partial_x [b\partial_x (\lambda\partial_x v_x)] + 2\mu\partial_x [b\partial_x (\lambda\partial_z v_z)] + 2\mu\partial_x [b\partial_x (\lambda\partial_x v_x)] \\ &+ 2\mu\partial_x [b\partial_z (\lambda\partial_z v_x)] + 2\mu\partial_x [b\partial_x (\lambda\partial_x v_x)] + 2\mu\partial_x [b\partial_z (\lambda\partial_x v_z)] \end{aligned}$$

que simplificando resulta em

$$\begin{aligned}
T_{xx}^{(3)} = & (\lambda + 6\mu)\partial_x [b\partial_x (\lambda\partial_x v_x)] + \lambda\partial_z [b\partial_z (\lambda\partial_x v_x)] + (\lambda + 2\mu)\partial_x [b\partial_x (\lambda\partial_z v_z)] \\
& + \lambda\partial_z [b\partial_z (\lambda\partial_z v_z)] + 2\lambda\partial_x [b\partial_x (\mu\partial_x v_x)] + \lambda\partial_z [b\partial_x (\mu\partial_x v_z)] + \lambda\partial_x [b\partial_z (\mu\partial_x v_x)] \\
& + \lambda\partial_z [b\partial_z (\mu\partial_x v_x)] + \lambda\partial_z [b\partial_x (\mu\partial_z v_x)] + \lambda\partial_x [b\partial_z (\mu\partial_x v_z)] + \lambda\partial_z [b\partial_z (\mu\partial_z v_z)] \\
& + 2\mu\partial_x [b\partial_z (\lambda\partial_x v_x)] + 2\mu\partial_x [b\partial_z (\lambda\partial_x v_z)].
\end{aligned}$$

Portanto, os 24 termos são reduzidos para 13.

F.4.2 Discretizações

Além dos termos α , β e γ deduzidos acima, as Eq. (F.39) e Eq. (F.40) possuem um termo adicional que necessita ser discretizado, ou seja,

$$\delta = \partial_l [f\partial_m (g \partial_l U)]. \quad (\text{F.41})$$

Termo δ

Procedendo de maneira análoga aos casos dos termos α , β e γ , pode-se escrever

$$\delta_{i,j} = \partial_x [f\partial_z (g \partial_x U)]_{i,j} = \partial_x [f_{i,j} F_{i,j}] = \frac{f_{i+\frac{1}{2},j} F_{i+\frac{1}{2},j} - f_{i-\frac{1}{2},j} F_{i-\frac{1}{2},j}}{h}, \quad (\text{F.42})$$

onde

$$F_{i,j} = \partial_z (g_{i,j} \partial_x U_{i,j}) = \quad (\text{F.43})$$

$$g_{i,j+\frac{1}{2}} \left(\frac{U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{h^2} \right) - g_{i,j-\frac{1}{2}} \left(\frac{U_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{h^2} \right) \quad (\text{F.44})$$

Assim, substituindo a Eq. (F.43) (aplicada para o nó em questão) na Eq. (F.42), obtém-se o seguinte operador de diferenças finitas

$$\begin{aligned}
\delta_{i,j} = & f_{i+\frac{1}{2},j} g_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(\frac{U_{i+1,j+\frac{1}{2}} - U_{i,j+\frac{1}{2}}}{h^3} \right) - f_{i+\frac{1}{2},j} g_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(\frac{U_{i+1,j-\frac{1}{2}} - U_{i,j-\frac{1}{2}}}{h^3} \right) \\
& - f_{i-\frac{1}{2},j} g_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(\frac{U_{i,j+\frac{1}{2}} - U_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{h^3} \right) + f_{i-\frac{1}{2},j} g_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(\frac{U_{i,j-\frac{1}{2}} - U_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{h^3} \right) \quad (\text{F.45})
\end{aligned}$$

Claramente que o termo $\partial_z [f\partial_x (g \partial_z U)]$ pode ser obtido apenas pela troca $i \leftrightarrow j$.

F.4.3 Expressões finais

Através dos resultados dados pelas Eq. (F.26), Eq. (F.29), Eq. (F.32) e Eq. (F.45), as expressões finais para os termos de correção $T^{(3)}$ e $T^{(4)}$, do caso elástico, podem

ser obtidas. Colocando as propriedades corretas no lugar de f e g , bem como o campo correto no lugar da função U genérica, pode-se obter as expressões finais para os termos de correção. Como se vê, a inclusão do termo de correção resulta em uma formulação complicada e cara computacionalmente.