



COPPE/UFRJ

NOVOS OPERADORES DE CAPTURA VIA O MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS APLICADO A PROBLEMAS DE PROPAGAÇÃO DE ONDAS

Cid da Silva Garcia Monteiro

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientador(es): Webe João Mansur

Eduardo Gomes Dutra do Carmo

Rio de Janeiro
Setembro de 2009

NOVOS OPERADORES DE CAPTURA VIA O MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS APLICADO A PROBLEMAS DE PROPAGAÇÃO DE ONDAS

Cid da Silva Garcia Monteiro

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:



Prof. Webe João Mansur, Ph.D.



Prof. Eduardo Gomes Dutra do Carmo, D. Sc.



Prof. José Antonio Fontes Santiago, D. Sc.



Prof. Paulo Batista Gonçalves, D. Sc.



Prof. Delfim Soares Júnior, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

SETEMBRO DE 2009

Monteiro, Cid da Silva Garcia

Novos operadores de captura via o método dos elementos finitos aplicado a problemas de propagação de ondas/ Cid da Silva Garcia Monteiro. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2009

XV, 142 p.: il.; 29,7 cm

Orientadores: Webe João Mansur

Eduardo Gomes Dutra do Carmo

Tese (doutorado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Civil, 2009

Referências Bibliográficas: p. 129-134.

1. Método dos Elementos Finitos. 2. Operadores de Captura. 3. Propagação de ondas. I. Mansur, Webe João, *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título

À minha família,
João Garcia (*in memoriam*), Luiza Marreiro,
Maria Luiza e Luis Antônio

AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores, professores, Webe João Mansur e Eduardo Gomes Dutra do Carmo, por sua orientação, paciência e amizade.

À minha família, que sempre me apoiou e me deu condições para realizar este trabalho.

Agradeço de forma especial aos amigos Cleberson Dors, Wellington Pereira e André Luiz, por todo apoio e discussões, fossem de trabalho ou pessoais. Agradeço também à Kátia Inácio, Edmundo Guimarães, Leonardo Pinheiro, Fernanda Brenny entre tantos outros, pela excelente convivência ao longo dessa jornada.

À Ivone, secretária do LAMEC, que sempre me ajudou a solucionar os problemas burocráticos dentro da universidade.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

NOVOS OPERADORES DE CAPTURA VIA O MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS APLICADO A PROBLEMAS DE PROPAGAÇÃO DE ONDAS

Cid da Silva Garcia Monteiro

Setembro/2009

Orientadores: Webe João Mansur
Eduardo Gomes Dutra do Carmo

Programa: Engenharia Civil

Neste trabalho é apresentada uma metodologia para o desenvolvimento de operadores de captura de descontinuidade para a elastodinâmica geral, voltada para a formulação de elementos finitos descontínuo no tempo, sendo esses operadores destinados a problemas com fortes gradientes nas derivadas temporal e espacial.

O estudo tem como ponto de partida a metodologia de obtenção de operadores de captura desenvolvida por Dutra do Carmo e Galeão para problemas convectivos. O objetivo é aplicar essa metodologia para se obter operadores de captura para problemas elastodinâmicos, sendo inspirado no operador apresentado por Hughes e Hulbert. Mostra-se ainda que esse operador é um caso particular da metodologia aqui desenvolvida. Dentre as famílias de operadores originadas pela metodologia, é proposta uma, e a determinação dos parâmetros desse operador é feita simulando um caso teste unidimensional. É sugerida também uma extensão para obtenção de operadores para o caso n -dimensional no espaço, que utiliza os parâmetros obtidos no caso unidimensional. A formulação é aplicada à exemplos uni e bidimensionais, sendo realizadas comparações com métodos clássicos da literatura e com operador de Hughes e Hulbert. As respostas obtidas mostram que o método produz resultados superiores aos métodos clássicos para o caso unidimensional e uma performance robusta para o caso n -dimensional, com menor amortecimento numérico em relação ao operador de Hughes e Hulbert, em ambos os casos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

NEW CAPTURING OPERATORS BY THE FINITE ELEMENT METHOD APPLIED
TO WAVE PROPAGATION PROBLEMS

Cid da Silva Garcia Monteiro

September/2009

Advisors: Webe João Mansur
 Eduardo Gomes Dutra do Carmo

Department: Civil Engineering

This work presents a methodology for the development of discontinuity-capturing operators for general elastodynamics, applied to the finite element formulation discontinuous in time, these operators being indicated to problems with sharp gradients in the space and time derivatives.

The study is based in the methodology of obtaining discontinuity-capturing operators developed by Dutra do Carmo and Galeão for convective problems. The goal is to apply this methodology to obtain discontinuity-capturing operators to elastodynamic problems, and it's inspired in the operator presented by Hughes and Hulbert. It's shown that this operator is a particular case of the methodology developed here. Among all the possible families of capturing operators, it's chosen one, and its parameter is determined numerically, through a one dimensional test case. Besides, it's also suggested an extension to the n-dimensional case in space, that uses the parameters obtained for the one dimensional case. The formulation is applied to one and two-dimensional examples and the results are compared with those obtained using classic methods found in the literature, and Hughes and Hulbert's operators. The results show that the method produces better results than classic methods for the one dimensional case and presents robust performance for the n-dimensional case, with less damping than Hughes and Hulbert's operators, in both cases.

INDICE

CAPITULO I – INTRODUÇÃO.....	1
I.1 – INTRODUÇÃO.....	1
I.2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	4
I.2.a – Método das Diferenças Finitas aplicado ao domínio temporal.....	4
I.2.b – Método do Elementos Finitos aplicado ao domínio temporal.....	6
I.2.c – Método das funções de Green numéricas.....	10
I.3 – OBJETIVO.....	11
CAPITULO II – MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS DESCONTÍNUO NO TEMPO.....	13
II.1 – ESPAÇOS MATEMÁTICOS.....	13
II.2 – PROBLEMA DE VALOR INICIAL E DE CONTORNO.....	15
II.3 – FORMULAÇÃO VARIACIONAL DO PROBLEMA DE VALOR INICIAL E DE CONTORNO.....	18
II.4 – FORMULAÇÃO APROXIMADA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS – FORMULAÇÃO DE GALERKIN DESCONTÍNUO NO TEMPO.....	20
II.5 – OPERADOR DE ESTABILIZAÇÃO TIPO GLS.....	23
II.6 – OPERADOR DE CAPTURA.....	24
II.6.a – Formulação Matemática do Operador de Captura.....	24
II.6.b – Formulação Variacional Proposta.....	31
II.6.c – Famílias de Operadores de Captura.....	32
II.6.d – Operador de HUGHES e HULBERT.....	34
CAPITULO III – FORMULAÇÃO PARA O CASO UNIDIMENSIONAL.....	36
III.1 – OPERADOR DE CAPTURA: CASO UNIDIMENSIONAL.....	36
III.1.a – Exemplo Analisado.....	38
III.1.b – Determinação dos Parâmetros.....	40
III.1.c – Método de Estabilização Tipo GLS.....	42
CAPITULO IV – ANÁLISE NUMÉRICA PARA O CASO UNIDIMENSIONAL.....	47
IV.1 – BARRA HOMOGÊNEA UNIDIMENSIONAL.....	49
IV.1.a – Discretização por Elementos Espaço-Tempo.....	50

IV.1.b – Comentários sobre os resultados da barra homogênea com carregamento 1.....	65
IV.1.c – Comentários sobre os resultados da barra homogênea com carregamento 2.....	75
IV.2 – BARRA NÃO-HOMOGÊNEA UNIDIMENSIONAL.....	76
IV.2.a – Comentários sobre os resultados da barra não-homogênea com carregamento 1.....	81
IV.2.b – Comentários sobre os resultados da barra não-homogênea com carregamento 2.....	86
IV.3 – CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO.....	86
CAPITULO V – EXTENSÃO PARA O CASO n-DIMENSIONAL.....	90
V.1 – OPERADOR DE CAPTURA: CASO BIDIMENSIONAL.....	93
CAPITULO VI – ANÁLISE NUMÉRICA PARA O CASO BIDIMENSIONAL	94
VI.1 – BARRA HOMOGÊNEA BIDIMENSIONAL.....	94
VI.1.a – Discretização usando Elementos Espaço-Tempo.....	95
VI.1.b – Comentários sobre os resultados da barra homogênea.....	105
VI.2 – MEMBRANA.....	106
VI.2.a – Discretização usando Elementos Espaço-Tempo.....	107
VI.2.b – Influência da variação do intervalo de tempo.....	108
VI.1.c – Comentários sobre a variação do intervalo de tempo.....	116
VI.2.d – Influência da área da condição inicial sobre a resposta.....	116
VI.2.e – Comentários sobre a influência da condição inicial.....	124
CAPITULO VII – CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	125
VII.1 – CONCLUSÕES.....	125
VII.2 – SUGESTÕES.....	128
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	129
ANEXO A – CÁLCULO DAS DERIVADAS DE SEGUNDA ORDEM.....	135
A.1 – FUNÇÃO A DUAS VARIÁVEIS.....	135
A.2 – FUNÇÃO A TRÊS VARIÁVEIS.....	136
ANEXO B – BALANCEAMENTO DO OPERADOR DE CAPTURA.....	139
ANEXO C – SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA A BARRA HOMOGÊNEA.....	141
ANEXO D – SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA A MEMBRANA.....	142

LISTA DE FIGURAS

Nº da Figura	Página
II.1 Definição do problema de valor inicial e de contorno.....	15
II.2 Salto ou descontinuidade da função $u(t)$	18
II.3 Representação esquemática do domínio e contorno espaço-tempo.....	21
II.4 Sistema de coordenadas global e local.....	21
III.1 Descrição do problema físico.....	38
III.2 Representação da malha de elementos finitos espaço-tempo.....	39
III.3 Comportamento das funções $\mu^{+/-}(Cour)$ em função do número de Courant.....	41
III.4 Esquema de localização e interpolação dos valores das funções $\mu^{+/-}(Cour)$ em qualquer ponto do intervalo $[0,2; 4,0]$	42
IV.1 Barra homogênea engastada na extremidade esquerda.....	49
IV.2 Discretização da barra unidimensional por elementos finitos espaço-tempo.....	50
IV.3 Carregamentos aplicados na extremidade livre.....	52
IV.4 Disposição dos gráficos nas figuras para o carregamento 1.....	52
IV.5 Disposição dos gráficos nas figuras para 100 períodos de análise.....	52
IV.6 Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo Heaviside, para o número de Courant 0,27....	53
IV.7 Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo Heaviside, para o número de Courant 0,57....	54
IV.8 Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo Heaviside, para o número de Courant 0,87....	55
IV.9 Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo Heaviside, para o número de Courant 1,03....	56
IV.10 Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo Heaviside, para o número de Courant 1,57....	57
IV.11 Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo Heaviside, para o número de Courant 2,03....	58

IV.12	Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo Heaviside, para o número de Courant 2,73....	59
IV.13	Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo Heaviside, para o número de Courant 3,73....	60
IV.14	Comportamento das variáveis ao longo de 100 períodos de evolução, para o número de Courant 0,57.....	61
IV.15	Comportamento das variáveis ao longo de 100 períodos de evolução, para o número de Courant 1,03.....	62
IV.16	Comportamento das variáveis ao longo de 100 períodos de evolução, para o número de Courant 2,03.....	63
IV.17	Comportamento das variáveis ao longo de 100 períodos de evolução, para o número de Courant 3,33.....	64
IV.18	Disposição dos gráficos nas figuras para o carregamento 2.....	66
IV.19	Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo impulso, para o número de Courant 0,27.....	67
IV.20	Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo impulso, para o número de Courant 0,57.....	68
IV.21	Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo impulso, para o número de Courant 0,87.....	69
IV.22	Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo impulso, para o número de Courant 1,03.....	70
IV.23	Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo impulso, para o número de Courant 1,57.....	71
IV.24	Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo impulso, para o número de Courant 2,03.....	72
IV.25	Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo impulso, para o número de Courant 2,73.....	73
IV.26	Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo impulso, para o número de Courant 3,73.....	74
IV.27	Barra não-homogênea engastada na extremidade esquerda.....	76
IV.28	Resultados obtidos para a barra não-homogênea com o carregamento tipo Heaviside, para o número de Courant 0,57....	77

IV.29	Resultados obtidos para a barra não-homogênea com o carregamento tipo Heaviside, para o número de Courant 1,03....	78
IV.30	Resultados obtidos para a barra não-homogênea com o carregamento tipo Heaviside, para o número de Courant 1,57....	79
IV.31	Resultados obtidos para a barra não-homogênea com o carregamento tipo Heaviside, para o número de Courant 2,03....	80
IV.32	Resultados obtidos para a barra não-homogênea com o carregamento tipo impulso, para o número de Courant 0,57.....	82
IV.33	Resultados obtidos para a barra não-homogênea com o carregamento tipo impulso, para o número de Courant 1,03.....	83
IV.34	Resultados obtidos para a barra não-homogênea com o carregamento tipo impulso, para o número de Courant 1,57.....	84
IV.35	Resultados obtidos para a barra não-homogênea com o carregamento tipo impulso, para o número de Courant 2,03.....	85
IV.36	Comportamento das variáveis ao longo de 100 períodos de evolução, com elementos com interpolação linear no espaço.....	88
IV.37	Influência do fator $Cour^{-4}$ no operador de captura.....	89
VI.1	Modelo físico da barra bidimensional.....	94
VI.2	Discretização espaço-tempo com elementos hexaédricos.....	95
VI.3	Discretização espacial da barra com elementos regulares, sem a variável tempo.....	96
VI.4	Discretização espacial da barra com elementos não regulares, sem a variável tempo.....	96
VI.5	Resultados obtidos para a barra homogênea discretizada com a malha regular, Courant 0,57.....	97
VI.6	Resultados obtidos para a barra homogênea discretizada com a malha regular, Courant 1,03.....	98
VI.7	Resultados obtidos para a barra homogênea discretizada com a malha regular, Courant 2,03.....	99
VI.8	Resultados obtidos para a barra homogênea discretizada com a malha regular, Courant 3,73.....	100
VI.9	Resultados obtidos para a barra homogênea discretizada com a malha não-regular, Courant 0,57.....	101

VI.10	Resultados obtidos para a barra homogênea discretizada com a malha não-regular, Courant 1,03.....	102
VI.11	Resultados obtidos para a barra homogênea discretizada com a malha não-regular, Courant 2,03.....	103
VI.12	Resultados obtidos para a barra homogênea discretizada com a malha não-regular, Courant 3,73.....	104
VI.13	Vista em perspectiva do problema da membrana, com a região central de aplicação da condição inicial de velocidade.....	106
VI.14	Vista superior da membrana, com a região central de aplicação da condição inicial de velocidade (dimensões em metros).....	107
VI.15	Comportamento do deslocamento e velocidade para o número de Courant 0,50.....	109
VI.16	Comportamento do deslocamento e velocidade para o número de Courant 0,75.....	110
VI.17	Comportamento do deslocamento e velocidade para o número de Courant 1,00.....	111
VI.18	Comportamento do deslocamento e velocidade para o número de Courant 1,25.....	112
VI.19	Comportamento do deslocamento e velocidade para o número de Courant 1,50.....	113
VI.20	Comportamento do deslocamento e velocidade para o número de Courant 1,75.....	114
VI.21	Comportamento do deslocamento e velocidade para o número de Courant 2,00.....	115
VI.22	Áreas de atuação da condição inicial de velocidade.....	117
VI.23	Resultados obtidos para a membrana submetida a condição inicial dada pela área A_1	118
VI.24	Resultados obtidos para a membrana submetida a condição inicial dada pela área A_2	119
VI.25	Resultados obtidos para a membrana submetida a condição inicial dada pela área A_3	120
VI.26	Resultados obtidos para a membrana submetida a condição inicial dada pela área A_4	121

VI.27 Resultados obtidos para a membrana submetida a condição inicial dada pela área A_5	122
VI.28 Resultados obtidos para a membrana submetida a condição inicial dada pela área A_6	123
C.1 Barra homogênea engastada e submetida a um carregamento axial.....	141
D.1 Membrana Retangular.....	142

LISTA DE TABELAS

Nº da Tabela	Página
III.1 Resultados da calibração.....	44
IV.1 Parâmetros dos testes realizados.....	51
VI.1 Valores para a área submetida à condição inicial.....	117
B.1 Resumo das características numéricas.....	140

CAPITULO I

INTRODUÇÃO

I.1 – INTRODUÇÃO

A modelagem matemática dos problemas físicos, sejam eles estáticos ou dinâmicos, lineares ou não-lineares, geralmente resulta em sistemas de Equações Diferenciais Parciais (EDPs), que, por sua vez, devem ser resolvidos analítica ou numericamente para a obtenção de uma solução associada. No caso específico de problemas dinâmicos, estas equações são resolvidas através de algoritmos de marcha no tempo. Ressalta-se que tais tipos de equações diferenciais aparecem com frequência em modelos que descrevem quantitativamente fenômenos em diversas áreas, como por exemplo: sismologia, propagação de ondas acústicas e elásticas, mecânica dos fluidos, problemas de fluxo de calor, vibrações em estruturas, ciências econômicas e biológicas, entre outras. Como geralmente as EDPs não possuem solução analítica conhecida, salvo em alguns casos particulares; dessa forma, um caminho para resolvê-las, em aplicações práticas, é através de modelagem numérica computacional.

Um fator importante que contribuiu para a intensificação do emprego dos modelos numéricos foi o aumento expressivo e contínuo da capacidade dos computadores nas últimas décadas. Atualmente, a utilização de processadores com múltiplos núcleos, aliada ao uso de sistemas de memória distribuída (cluster de PCs) vem possibilitando um grande impulso na área de simulação numérica, permitindo que a análise de problemas reais se torne mais fiel devido a melhor descrição do modelo físico. Esta descrição passa por uma melhor representação e detalhamento do problema, o que implica em uma maior quantidade de informação a ser processada.

Dentre os vários métodos numéricos existentes para resolver os problemas de uma forma geral destacam-se, por sua generalidade, o Método das Diferenças Finitas (MDF)

[1] devido ao seu excelente desempenho computacional, e o Método dos Elementos Finitos (MEF) [2] e [3] devido à sua robustez e precisão.

A forma usual para se resolver problemas de valor inicial e de contorno, associados as EDPs, via o MEF, utiliza a técnica de separação de variáveis, aplicada as variáveis espacial e temporal; inicialmente, o domínio espacial é discretizado, isto é, ele é dividido em sub-domínios de forma geométrica conhecida, onde geralmente no caso bidimensional, são utilizados triângulos e quadriláteros, e no caso tridimensional tetraedros e hexaedros, denominados de elementos, sobre os quais incidem funções que interpolam a variável em estudo. Este processo produz um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) no tempo, ou seja, um conjunto de equações discretas no espaço e contínuas no tempo. Esta equação é conhecida como equação de equilíbrio de forças, que matematicamente é representada por um problema de valor inicial a ser resolvido no domínio temporal. Para problemas hiperbólicos de segunda ordem, tais como aqueles definidos em dinâmica estrutural e acústica, este procedimento leva a um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, com o tempo sendo a variável independente. Técnicas de integração temporal são então empregadas para se calcular a solução em tempos discretos. Este procedimento resulta no chamado método semi-discreto, maiores detalhes podem ser encontrados em [2], [3] e [4].

Neste contexto, este trabalho aborda a solução de problemas dinâmicos, mais especificamente o problema de propagação de ondas regido pela equação hiperbólica de segunda ordem, através do método de Galerkin Descontínuo no tempo, juntamente com o desenvolvimento de operadores de captura para problemas com fortes gradientes.

Ao longo das últimas décadas, várias técnicas de integração temporal foram desenvolvidas para análise da resposta dinâmica [5]. Entre elas, destacam-se duas vertentes voltadas para a resolução da equação de equilíbrio dinâmica: os métodos diretos e os indiretos.

Em geral, os métodos são classificados como diretos ou indiretos, se o sistema de equações é transformado em outro sistema para se obter a solução. O método indireto mais conhecido, em engenharia estrutural, é o método da superposição modal, que consiste em uma mudança de base, para uma base de coordenadas generalizadas. Esta

mudança é feita através de uma matriz de transformação obtida a partir da solução do problema de vibração livre associado, sem a presença de amortecimento físico. Mostra-se que a solução deste problema está relacionada a um problema de autovalores, no qual a matriz de transformação de base é aquela formada pelos respectivos autovetores, [2] e [5].

A análise através de métodos indiretos pode ser feita tanto no domínio do tempo, quanto no domínio da frequência, sendo que, nestes casos, faz-se necessária a solução de um problema de autovalores associado, o qual mesmo para sistemas de ordem elevada, o custo computacional é relativamente baixo, se técnicas de truncamento modal puderem ser aplicadas.

Já no caso dos chamados métodos diretos, como o nome sugere, a equação diferencial do movimento é resolvida diretamente nas coordenadas físicas do problema, o que resulta em uma solução discreta, normalmente obtida para intervalos de tempo igualmente espaçados. Desse modo, o processo de obtenção da solução se resumirá a uma marcha no tempo.

Uma possibilidade para se resolver a EDO, obtida a partir do processo de semi-discretização, é através do emprego de métodos de integração passo-a-passo, também conhecidos como métodos de marcha no tempo.

Comumente esses algoritmos de integração temporal são classificados como explícitos ou implícitos. Os métodos diretos são chamados explícitos quando a equação de equilíbrio é expressa no instante t e sua solução é calculada no instante $t + \Delta t$. Embora, os métodos explícitos sejam computacionalmente eficientes, sua solução é condicionalmente estável, ou seja, depende do tamanho do passo de tempo utilizado, [2]. Por outro lado, os métodos são chamados implícitos quando a solução calculada no instante $t + \Delta t$ é obtida a partir da equação de equilíbrio de forças avaliada em $t + \Delta t$, esses métodos apresentam a característica de serem incondicionalmente estáveis, ou seja, a restrição quanto ao tamanho do passo de tempo fica condicionada apenas a precisão da resposta. Entretanto, esses métodos exigem a solução de um sistema de equações a cada passo de tempo, [2] e [3], ou, na melhor das hipóteses, que é o caso

de problemas lineares, exigem o cálculo das respostas através de um algoritmo de retro-substituição.

I.2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A seguir é realizada uma descrição sucinta dos principais trabalhos, relacionados à técnicas de integração temporal. A apresentação desses trabalhos foi organizada segundo o método numérico utilizado para discretizar a variável tempo, ou seja, nos métodos baseados em diferenças finitas e elementos finitos.

I.2.a – Método das Diferenças Finitas aplicado ao domínio temporal

Dentre os algoritmos explícitos, os primeiros historicamente desenvolvidos foram baseados no emprego do Método das Diferenças Finitas para calcular, de forma aproximada, a derivada no tempo. Um dos mais conhecidos é o método da Diferença Central, no qual as derivadas temporais são aproximadas em termos da expansão em série de Taylor. Tal método é condicionalmente estável e apresenta precisão de segunda ordem no tempo, [2].

Um dos primeiros algoritmos implícitos utilizados foi o método de HOUBOLT [6] que utiliza fórmulas de diferenças finitas para aproximar a velocidade e a aceleração em função de valores ponderados de deslocamentos em três passos de tempo anteriores. Do ponto de vista da estabilidade, o método é incondicionalmente estável, e de segunda ordem de precisão.

Os algoritmos da família de NEWMARK [7] assumem a aceleração média constante no intervalo de tempo, e se baseiam em fórmulas de diferenças finitas para representar o deslocamento e a velocidade. Tal família apresenta dois parâmetros adicionais que controlam a precisão e a estabilidade, e a cada novo passo de tempo a marcha requer o conhecimento do deslocamento, velocidade e aceleração; calculados no instante de tempo anterior.

O método proposto por WILSON [8] é uma extensão da aproximação da aceleração média, no qual considera que a aceleração varia de forma linear no intervalo

$\theta \Delta t$, onde o parâmetro θ é escolhido para garantir a precisão e estabilidade do método, sendo Δt , o incremento de tempo. Para o caso limite, quando θ assume valores maiores que 1,37, o método torna-se incondicionalmente estável.

HILBER, HUGHES e TAYLOR [9] desenvolveram uma nova classe de esquemas de marcha no tempo, conhecida como HHT- α , com o objetivo de controlar o amortecimento numérico. O algoritmo resultante apresenta uma pequena modificação em relação aos algoritmos da família de Newmark, pois considera a equação do movimento ligeiramente modificada com a introdução de um novo parâmetro de controle α . Esse esquema apresenta a característica de ser incondicionalmente estável, desde que respeitadas os parâmetros definidos para o método. O algoritmo possui amortecimento numérico, controlado pelo parâmetro adicional α , quando o mesmo varia entre $[-1/3, 0]$.

Em 1980, WOOD, BOSSAK e ZIENKIEWICZ [10], apresentaram o algoritmo WBZ- α , uma variação em relação ao algoritmo de Newmark, que analogamente ao algoritmo HHT- α , também possui um parâmetro livre α que permite controlar o amortecimento artificial do método. Testes realizados mostraram que o algoritmo gerado é incondicionalmente estável, com segunda ordem de precisão.

CHUNG e HULBERT [11] apresentaram uma generalização dos métodos HHT- α e WBZ- α , denominado α -Generalizado, que é uma combinação destes dois métodos. A análise do método permite definir os valores dos parâmetros em função do raio espectral. O algoritmo é incondicionalmente estável e com segunda ordem de precisão, possuindo uma boa combinação de dissipação numérica em baixa e alta frequência. A complexidade da implementação computacional do mesmo é similar a dos outros métodos mencionados acima.

Ressalta-se que os esquemas até aqui apresentados são os mais utilizados, segundo a literatura, sendo que para uma revisão mais ampla dos demais métodos existentes, baseados em diferenças finitas, pode-se consultar TAMMA [12].

I.2.b – Método dos Elementos Finitos aplicado ao domínio temporal

O emprego do Método dos Elementos Finitos para discretizar o domínio temporal, assim como o domínio espacial, foi proposto primeiramente em 1969, por ODEN [13], ARGYRIS e SCHARPF [14] e FRIED [15], que tentaram generalizar a aplicação do MEF à variável de tempo. Estes autores desenvolveram metodologias baseadas no princípio de Hamilton para problemas dinâmicos. A formulação utilizada freqüentemente conduzia a sistemas de equações que deveriam ser resolvidos simultaneamente para todos os passos de tempo, o que exigia maior espaço de armazenamento e demandava maior tempo de processamento em relação aos esquemas clássicos existentes.

Em 1977, ZIENKIEWICZ [16] mostrou que alguns métodos tais como Houbolt, Newmark e Wilson- θ entre outros, podiam ser obtidos através da aplicação do Método dos Resíduos Ponderados (MRP) à variável temporal. Os diferentes métodos passaram a ser vistos como casos particulares podendo ser obtidos a partir da combinação de diferentes funções de interpolação e de ponderação no tempo.

Em 1988, TAMMA e NAMBURU [17] apresentaram uma nova metodologia, denominada Lax-Wenderoff/Taylor-Galerkin para a solução de problemas dinâmicos baseada na idéia proposta por LAX e WENDEROFF [18], associada à expansões em séries de Taylor e com o Método dos Elementos Finitos. Segundo os autores, o objetivo dessa metodologia era introduzir mais informação analítica na formulação numérica de forma direta e mais natural possível.

SHA, ZHOU e TAMMA, [19] e [12] apresentaram uma metodologia de integração temporal para problemas dinâmicos, baseada no que os autores denominaram de Virtual-Pulse (VIP). A idéia desta metodologia era unir as vantagens das técnicas de integração direta e de superposição modal. Essa metodologia utilizava o Método dos Resíduos Ponderados aplicado à variável temporal e, como função de ponderação utiliza deslocamentos virtuais.

Em 1996, FUNG [20] apresentou um trabalho no qual utilizou o Método dos Resíduos Ponderados aplicado à variável temporal onde a diferença em relação a outros

trabalhos foi o emprego de funções de ponderação Hermetianas de 3º grau, o que gerou algoritmos incondicionalmente estáveis de 3ª e 4ª ordens de precisão.

Até esse ponto, todos os trabalhos citados, baseados no emprego do MEF, utilizavam o Método dos Elementos Finitos contínuo no tempo. Outra aproximação de elementos finitos aplicada ao domínio temporal se baseia no método de Galerkin Descontínuo no Tempo (*Time Discontinuous Galerkin*, TDG). A idéia deste método é permitir que, matematicamente, as variáveis sejam descontínuas em tempos discretos entre dois intervalos de tempo consecutivos. Uma das motivações para o desenvolvimento de formulações descontínuas no tempo se deve ao fato de que os métodos semi-discretos, apesar de se mostrarem adequados a problemas de dinâmica estrutural, apresentam desvantagens quando aplicados a problemas cuja resposta temporal apresenta descontinuidades ou fortes gradientes em sua solução, produzindo assim oscilações numéricas indesejáveis na resposta. O método clássico de Galerkin descontínuo no tempo é capaz de reduzir substancialmente essas oscilações: entretanto, pequenas oscilações ainda persistem, próximo às descontinuidades, e para eliminá-las são introduzidos também operadores de estabilização, tipo GLS (*Galerkin Least Square*), baseados no método de mínimos quadrados e/ou operadores de captura. Os operadores de captura têm por objetivo eliminar totalmente as oscilações numéricas próximas às descontinuidades, através do controle das derivadas de segunda ordem no tempo, uma vez que os métodos tradicionais não conseguem representar tais situações.

Os primeiros trabalhos a considerar as incógnitas descontínuas no tempo foram desenvolvidos para problemas hiperbólicos de primeira ordem, [21] e [22]. Desde então, vários outros trabalhos vêm sendo desenvolvidos.

O trabalho de HUGHES e MALLETT [23] publicado em 1986 foi um dos primeiros a incorporar operadores de captura de descontinuidade ao Método dos Elementos Finitos para problemas de mecânica dos fluidos, objetivando melhorar a resposta ao longo do tempo. JONHSON e SZEPESSY [24] e GALEÃO e DUTRA do CARMO [25] e [26] desenvolveram novos operadores de captura para problemas hiperbólicos de primeira ordem. Destacando que em [25] e [26] foi apresentada uma metodologia para obtenção de operadores de captura para problemas difusivos.

HUGHES e HULBERT [27], HULBERT e HUGHES [28] e HULBERT [29] desenvolveram e apresentaram uma série de trabalhos, baseados na formulação de elementos finitos do tipo espaço-tempo para problemas de dinâmica estrutural regidos pela equação hiperbólica de segunda ordem, na qual a incógnita podia ser descontínua entre dois intervalos de tempo consecutivos. Esses trabalhos também introduziram operadores não-lineares baseado no resíduo (operadores de captura) para controlar e reduzir as oscilações numéricas induzidas pelas descontinuidades.

MASUD e HUGHES [30] apresentaram uma formulação de elementos finitos espaço-tempo baseada em Galerkin descontínuo no tempo, para a equação de Navier-Stokes em análises de escoamentos em superfície livre, problemas com variação da malha espacial e deformação da interface fluido-estrutura. Segundo os autores, a vantagem de se utilizar o método de Galerkin descontínuo no tempo é que a reconstrução da malha pode ser feita a partir de informações da deformação.

LI e WIBERG [31] apresentaram um esquema adaptativo do Método dos Elementos Finitos descontínuo no tempo aplicado à análise de problemas dinâmicos bidimensionais, o qual empregava a discretização de elementos finitos tanto ao domínio espacial, interpolado por funções contínuas, quanto o domínio temporal, que utilizava funções descontínuas apenas na interface entre os elementos temporais. Diferentemente dos trabalhos [27], [28] e [29], LI e WIBERG aplicaram a técnica de separação de variáveis entre o domínio temporal e espacial, podendo-se pensar nessa abordagem como extensão do método semi-discreto, onde o tempo é interpolado por elementos finitos descontínuos. Os exemplos numéricos realizados mostraram que essa formulação produziu resultados de segunda ordem de precisão no espaço e de terceira ordem no tempo.

Em 2000, CHIEN e WU [32] apresentaram uma melhoria em relação ao algoritmo preditor-multicorretor proposto por LI e WIBERG [31], para problemas de dinâmica estrutural, baseado no emprego do Método dos Elementos Finitos descontínuo no tempo. A diferença está no emprego do método iterativo de Gauss-Seidel para resolver o sistema de equações ao invés do método de Gauss-Jacobi.

Em 2003, CHIEN *et al.* [33] estenderam o trabalho de [32], e apresentaram a formulação de Galerkin descontínuo no tempo para problemas de elastodinâmica transiente 3D. A análise de estabilidade mostrou que o TDG é incondicionalmente estável, e também, que o mesmo é mais preciso do que a maioria dos algoritmos comumente utilizados em aplicações de dinâmica.

HUANG e COSTANZO [34] aplicaram o método de Galerkin descontínuo ao problema de dinâmica da fratura. O método dos elementos finitos descontínuo foi aplicado tanto ao domínio espacial para representação da fratura, quanto ao domínio temporal para realizar a evolução no tempo. Os resultados obtidos mostraram boa taxa de convergência e adequação a problemas de fratura por considerar elementos descontínuos no espaço.

KRIVODONOVA *et al.* [35] estudaram equações hiperbólicas de conservação e identificaram propriedades de superconvergência do método de Galerkin descontínuo na interface entre elementos, o que permite detectar descontinuidade na solução e aplicar operadores de captura em regiões específicas ao invés de todo o domínio, melhorando assim, a performance do método.

THOMPSON e HE [36] estudaram o método de Galerkin descontínuo no tempo aplicado a problemas de propagação de ondas em presença de contornos não-reflexivos, para a simulação de domínios infinitos em malhas adaptativas. Além disso, neste trabalho foram desenvolvidos esquemas iterativos para a solução dos sistemas esparsos, baseados no método de Gauss-Seidel.

MANCUSO e UBERTINI [37] desenvolveram um algoritmo iterativo, baseado no método TDG, mais eficiente para solução de problemas dinâmicos não-lineares, por manter as características de estabilidade e dissipação das componentes de altas frequências.

Em 2007, AMBATI e BOKHOVE [38] apresentaram um trabalho sobre a aplicação do método TDG ao problema de águas rasas com topográfica de fundo variada. Para detectar a descontinuidade e controlar as oscilações espúrias utilizaram o detector proposto em [35]. O método foi validado em laboratório através de ensaios.

CHIEN e WU [39] estudaram a aplicação do Método dos Elementos de Contorno em conjunto com o método de Galerkin descontínuo no tempo para problemas dinâmicos. Esses pesquisadores analisaram problemas elastodinâmicos bidimensionais utilizando o Método dos Elementos de Contorno para representar o domínio espacial, e utilizaram o Método dos Elementos Finitos descontínuo no tempo para realizar a marcha temporal. Comparações realizadas entre a aplicação do TDG e o método de HOUBOLT mostraram que o primeiro é mais estável e preciso do que o segundo.

I.2.c – Método das funções de Green numéricas

Diversas pesquisas, aplicadas a problemas dinâmicos, vêm sendo desenvolvidas ao longo dos anos. Dentre elas destacam-se aquelas que utilizam a função de Green do problema, pois estas contêm informações intrínsecas a respeito da natureza do sistema em estudo.

FUNG [40], reforçando a idéia de ZONG [41], apresentou um método de integração no tempo, denominado *Precise Time Integration Method*, do tipo passo-a-passo, no qual a resposta era calculada em função das condições iniciais e das matrizes obtidas a partir da resposta impulsiva (Função de Green), da resposta à função Heaviside e de suas respectivas derivadas. A aplicação do trabalho de ZONG [41] e posteriormente FUNG [40] apresentou limitações, pois os autores não conseguiram identificar a relação entre suas equações básicas e as representações integrais clássicas.

Mansur *et al.* [42] mostraram que a metodologia era um caso particular do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para resolver problemas dependentes do tempo [43] e [44] com o estabelecimento de uma família de métodos denominada *Explicit Green Approach* (ExGA). Esse método integra as equações do movimento para dinâmica através das matrizes de Green do problema, ou seja, funções de Green numéricas. Estes autores mostraram que o algoritmo do método ExGA, para propagação de ondas acústicas, é decorrente das expressões apresentadas por MANSUR [43], para a análise de problemas hiperbólicos com o Método dos Elementos de Contorno. Tal interpretação mostra que o algoritmo apresentado em [40], é um caso particular do Método dos Elementos de Contorno, o que deu um novo impulso a métodos de integração temporal baseados em matrizes de Green, por demonstrar que qualquer

método numérico de solução de EDPs pode ser utilizado para calcular tais matrizes gerando assim, diversas famílias baseadas na mesma equação de marcha no tempo, no caso de equações integrais do MEC.

I.3 – OBJETIVO

O objetivo do presente trabalho é desenvolver e programar algoritmos de integração temporal, do tipo passo-a-passo, utilizando o Método dos Elementos Finitos descontínuo no tempo e estender a metodologia de obtenção de operadores de captura desenvolvida por [25] e [26] para a equação da difusão-convecção, para operadores de captura destinados à elastodinâmica. A extensão é inspirada no operador apresentado em [27], [28] e [29], com o propósito de obter uma família de operadores de captura, que inclua o operador apresentado em [28] e [29] como um caso particular. Desta família, é sugerido um operador que possui propriedades equivalentes ao proposto em [29], na faixa de Courant em que este apresenta sua melhor performance, observando que nesta faixa o operador proposto por HUGHES e HULBERT, [28] e [29], possui excessiva difusividade. Além do mais, uma nova formulação variacional de elementos finitos é proposta, onde o fator que multiplica a contribuição GLS, não é mais constante, mas depende do número de Courant local, ou seja, existem dois fatores dependentes desse mínimo local, sendo que um multiplica a contribuição GLS e o outro multiplica o operador de captura.

Assim, o tipo de problema abordado será o de propagação de ondas em meios contínuos modelados pela equação hiperbólica de segunda ordem no domínio do tempo voltados para problemas que apresentem descontinuidades temporais.

A formulação adotada aqui utiliza o Método dos Elementos Finitos espaço-tempo, ou seja, os domínios espacial e temporal são discretizados conjuntamente, não sendo utilizada a técnica de separação de variáveis, comumente empregada em métodos semi-discretos.

Os resultados da formulação proposta serão comparados com método HHT [9] e o operador proposto por HUGHES e HULBERT, [28] e [29].

O texto da presente tese encontra-se elaborado e organizado em sete capítulos, referências bibliográficas e quatro anexos.

O primeiro capítulo, traz um breve resumo dos principais trabalhos na linha de métodos de integração temporal já direcionando para o método de Galerkin descontínuo no tempo. Este capítulo também apresenta uma seção que descreve o objetivo e as contribuições do trabalho. O Capítulo II traz a formulação matemática do Método dos Elementos Finitos descontínuo no tempo e uma metodologia para o desenvolvimento de operadores de captura de descontinuidade. Uma forma para se determinar as funções que compõem o operador de captura, para o caso unidimensional é desenvolvida no Capítulo III. Na seqüência, o Capítulo IV traz os resultados, para problemas unidimensionais no espaço, obtidos com a aplicação da formulação proposta a problemas que contêm descontinuidades temporais em suas soluções, sendo que esses resultados são comparados com métodos clássicos da literatura, tendo como objetivo destacar as características numéricas da metodologia aqui desenvolvida. O Capítulo V apresenta uma extensão do operador de captura para domínios espaciais de n -dimensões, baseado nos resultados obtidos com o operador unidimensional. Já no Capítulo VI, são apresentados os resultados para o caso bidimensional. Finalizando, no Capítulo VII são apresentadas as conclusões do trabalho e sugeridos alguns tópicos de pesquisa para continuidade do mesmo.

O Anexo A apresenta as expressões analíticas para o cálculo das derivadas de primeira e segunda ordem para funções a duas e três variáveis. O Anexo B traz uma forma de equilibrar a ordem de grandeza dos termos do operador de captura. O Anexo C apresenta as soluções analíticas para o deslocamento e velocidade longitudinal ao longo do tempo, de uma barra engastada em uma extremidade e submetida a um carregamento longitudinal e uniformemente distribuído na extremidade livre. O Anexo D traz as soluções analíticas para o movimento transversal de uma membrana, de formato retangular, engastada em todo o seu contorno, e submetida a condição inicial de velocidade.

CAPITULO II

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS DESCONTÍNUO NO TEMPO

Este capítulo apresenta a formulação de elementos finitos descontínuo no tempo para problemas da elastodinâmica. Inicialmente é feita uma breve descrição dos espaços matemáticos nos quais a formulação é fundamentada. Em seguida, são apresentadas as equações diferenciais e a formulação variacional associada ao problema descontínuo no tempo. O último item apresenta a metodologia para obtenção de famílias de operadores de captura para as equações gerais da elastodinâmica; mostra-se também que o operador de captura proposto por HUGHES e HULBERT é um caso particular da metodologia aqui apresentada.

II.1 – ESPAÇOS MATEMÁTICOS

Seja R^n ($n \geq 2$) o espaço Euclidiano, com produto interno e norma definidos respectivamente como:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \text{com } \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{y} \in R^n \quad (x_i \text{ e } y_i \in R) \quad (\text{II. 1})$$

e

$$|\mathbf{x}| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2} \quad (\text{II. 2})$$

onde x_i e y_i são as coordenadas cartesianas de um ponto qualquer pertencente a esse espaço.

Seja $p \in \mathbb{R}$, conjunto dos números reais, com $1 \leq p < \infty$; assim, tem-se:

$$L^p(\Omega) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mensurável e } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\} \quad (\text{II. 3})$$

sendo o conjunto das funções mensuráveis p -integráveis, e com norma definida por:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (\text{II. 4})$$

onde a integral acima é realizada no sentido de Lebesgue, ADAMS [45].

Para o caso particular quando $p = 2$ e para um subconjunto aberto $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$, tem-se o espaço de Hilbert $L^2(\Omega')$, definido como sendo o espaço das funções definidas de Ω' em \mathbb{R} , e que são quadrado integráveis, no sentido de Lebesgue em Ω' , com produto interno definido por:

$$(u, w)_{L^2(\Omega')} = \int_{\Omega'} u w d\Omega', \quad \forall u, w \in L^2(\Omega') \quad (\text{II. 5})$$

para $m \geq 1$, considere-se o espaço de Hilbert

$$H^m(\Omega') = \left\{ u \in L^2(\Omega') : D^\alpha u \in L^2(\Omega'), 1 \leq |\alpha| \leq m \right\} \quad (\text{II. 6})$$

cujo produto interno é definido como:

$$(u, w)_{H^m(\Omega')} = (u, w)_{L^2(\Omega')} + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha w)_{L^2(\Omega')} \quad (\text{II. 7})$$

onde $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ denota a derivada fraca ou no sentido das distribuições de u ,

conforme definido em [45] e, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, com α_i sendo um inteiro não negativo.

As normas induzidas pelo produto interno para estes espaços de Hilbert são dadas por:

$$\|u\|_{L^2(\Omega')} = \left((u, u)_{L^2(\Omega')} \right)^{1/2}, \quad \forall u \in L^2(\Omega') \quad (\text{II. 8.a})$$

$$\|u\|_{H^m(\Omega')} = \left((u, u)_{H^m(\Omega')} \right)^{1/2}, \quad \forall u \in H^m(\Omega') \quad (\text{II. 8.b})$$

II.2 – PROBLEMA DE VALOR INICIAL E DE CONTORNO

Seja um sólido elástico linear, homogêneo e isotrópico, representado pelo domínio $\Omega \subset R^2$ e limitado por seu contorno $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_h$ com normal unitária exterior \vec{n} , segundo a Figura II.1, e sujeito a carregamento dinâmico $f(\mathbf{x}, t)$ sobre Ω , sendo a variável temporal designada por t . Nesta figura, os trechos Γ_u e Γ_h representam, respectivamente, as partes do contorno onde a variável primária e sua derivada na direção da normal são conhecidas.

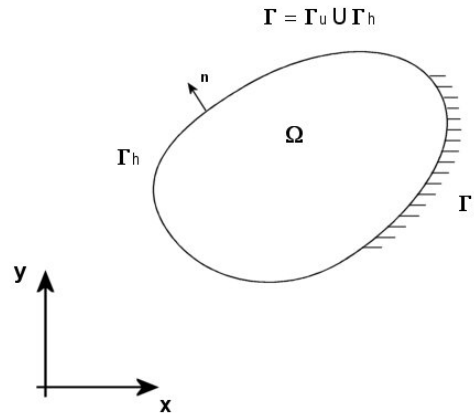


Figura II.1 – Definição do problema de valor inicial e de contorno.

A equação diferencial que descreve a propagação de ondas elásticas no sólido é expressa pela equação de equilíbrio apresentada abaixo, [46], [47] e [48], em sua forma indicial e matricial, respectivamente.

$$\sigma_{ij,j} - \rho \ddot{u}_i - f_i = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} - \rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f} = 0 \quad (\text{II. 9.a})$$

onde σ_{ij} representa as componentes do tensor de tensão, e $\boldsymbol{\sigma}$ a representação vetorial desse tensor; ρ é a densidade do meio, admitida constante; \ddot{u}_i e f_i representam, respectivamente, as componentes da derivada segunda no tempo do campo de deslocamentos do vetor \mathbf{u} e as componentes das forças de volume do vetor \mathbf{f} ; \mathbf{S} é a matriz de operadores diferenciais.

As relações deformação-deslocamento para a teoria de pequenas deformações são dadas, respectivamente, em sua forma indicial e matricial por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II. 9.b})$$

As equações constitutivas para materiais linearmente elásticos, homogêneos e isotrópicos, são dadas pelas seguintes expressões:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{II. 9.c})$$

sendo

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (\text{II. 9.d})$$

A matriz \mathbf{D} representa as propriedades do material, δ_{ij} é o delta de Kronecker, ε_{ij} são as componentes do tensor de deformações; e $\boldsymbol{\varepsilon}$ é a representação vetorial das deformações. Nas expressões (II. 9.e) e (II. 9.f), λ e μ representam as constantes de Lamé, definidas em função do módulo de Young E , e do coeficiente de Poisson ν , como abaixo.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (\text{II. 9.e})$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{II. 9.f})$$

As condições iniciais e de contorno que determinam o problema são dadas por:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{condição de contorno essencial ou Dirichlet em } \Gamma_u \quad (\text{II. 9.g})$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{h}} \quad \text{condição de contorno natural ou Neumann em } \Gamma_h \quad (\text{II. 9.h})$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{condição inicial de deslocamento em } \Omega \quad (\text{II. 9.i})$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad \text{condição inicial de velocidade em } \Omega \quad (\text{II. 9.j})$$

onde $\bar{\mathbf{u}}$ e $\bar{\mathbf{h}}$ representam, respectivamente, os deslocamentos e tensões prescritos nos contornos correspondentes de Γ ; os vetores \mathbf{u}_0 e \mathbf{v}_0 , são o deslocamento e a velocidade iniciais sobre o domínio Ω .

Uma classe de problemas, regidos pelo conjunto de equações (II. 9), que tem sido investigada com grande interesse, é aquela na qual a solução temporal apresenta descontinuidades, que em geral, são provocadas pela aplicação instantânea de uma força externa, ou pela existência de fortes gradientes em sua solução ao longo do tempo. Neste trabalho são considerados os gradientes na solução temporal.

Os métodos numéricos tradicionais de marcha, geralmente métodos semi-discretos, utilizados pra descrever tais problemas se mostram incapazes de representar descontinuidades, pois por não conseguirem representar as descontinuidades nas derivadas temporal e espaciais, geram oscilações numéricas, não presentes na solução real do problema. Desta forma, vários métodos vêm sendo pesquisados e desenvolvidos para melhor representar tais situações. O método utilizado no presente trabalho é o método de Galerkin Descontínuo no Tempo (*Time Discontinuous Galerkin*, TDG), baseado na formulação de elementos finitos. A partir desse método será desenvolvida uma classe de operadores de captura para eliminar as oscilações espúrias.

II.3 – FORMULAÇÃO VARIACIONAL DO PROBLEMA DE VALOR INICIAL E DE CONTORNO

Antes de apresentar a formulação variacional faz-se necessário definir o operador de salto ou descontinuidade temporal de uma função $u(t)$, como descrito no conjunto de equações (II. 10), e ilustrado esquematicamente na Figura II.2:

$$[[u(t_n)]] = u(t_n^+) - u(t_n^-) \quad (\text{II. 10.a})$$

onde

$$u(t_n^+) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(t_n + \varepsilon) \quad (\text{II. 10.b})$$

e

$$u(t_n^-) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} u(t_n + \varepsilon) \quad (\text{II. 10.c})$$

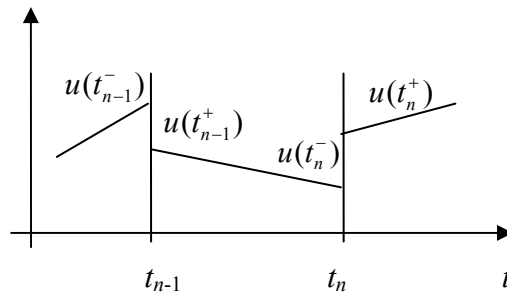


Figura II.2 – Salto ou descontinuidade da função $u(t)$.

Deve-se notar que a função $u(t)$ é contínua dentro do intervalo de tempo e descontínua apenas entre dois intervalos consecutivos.

Seja o problema bidimensional sobre um domínio Ω , definido pelo conjunto de equações e suas condições iniciais e de contorno, equação (II. 9), também conhecido como forma forte, onde as variáveis e funções pertencem aos seguintes espaços:

$$\mathbf{u} \in H^{2,2} \left(H^1(\Omega), [t_{n-1}, t_n] \right) \cap H^{1,\infty} \left(H^1(\Omega), [t_{n-1}, t_n] \right) \quad (\text{II. 11.a})$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in L^2 \left(L^2(\Omega), [t_{n-1}, t_n] \right) \quad (\text{II. 11.b})$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{n-1}^-), \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_{n-1}^-) \in H^1(\Omega) \quad (\text{II. 11.c})$$

$$\bar{\mathbf{h}} \in L^2([t_{n-1}, t_n]) \quad (\text{II. 11.d})$$

$$\rho, K \in L^\infty(L^\infty(\Omega), [t_{n-1}, t_n]) = \left\{ \rho [t_{n-1}, t_n] \mapsto L^\infty(\Omega); \sup_{t_{n-1} \leq t \leq t_n} \|\rho(x, t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty \right\} \quad (\text{II. 11.e})$$

A equação variacional ou forma fraca pode ser obtida a partir da aplicação do Método dos Resíduos Ponderados à equação de equilíbrio (II. 9), admitindo uma função de ponderação \mathbf{W} e considerando ainda os termos de salto devido às condições iniciais em cada intervalo de tempo $[t_{n-1}, t_n]$, o que resulta em:

$$\begin{aligned} & \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega} \dot{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, t) \rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) d\Omega dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega} \dot{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega dt - \\ & \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega} \dot{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\Omega dt + \int_{\Omega} \dot{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, t_{n-1}^+) \rho [\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)] d\Omega + \\ & \int_{\Omega} (\mathbf{S} \mathbf{W}(\mathbf{x}, t_{n-1}^+))^T \mathbf{D} \mathbf{S} [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (\text{II. 12})$$

Reduzindo a ordem do operador diferencial de segunda ordem no espaço, através de integração por partes da equação (II. 12) e aplicando o teorema da Divergência, chega-se à sentença fraca:

$$\begin{aligned} & \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega} \dot{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, t) \rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) d\Omega dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega} (\mathbf{S} \dot{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, t))^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega dt - \\ & \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Gamma_h} \dot{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, t) \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, t) dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega} \dot{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\Omega dt + \\ & \left(\int_{\Omega} \dot{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, t_{n-1}^+) \rho \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_{n-1}^+) d\Omega - \int_{\Omega} \dot{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, t_{n-1}^+) \rho \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_{n-1}^-) d\Omega \right) + \\ & \left(\int_{\Omega} (\mathbf{S} \mathbf{W}(\mathbf{x}, t_{n-1}^+))^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{n-1}^+) d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{S} \mathbf{W}(\mathbf{x}, t_{n-1}^+))^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{n-1}^-) d\Omega \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II. 13})$$

que pode ser representada por uma forma bi-linear, conjunto de equações (II. 14), onde o sub-escrito *TDG* representa a formulação descontínua básica, usada aqui para diferenciar da formulação que inclui o operador de captura, a qual será apresentada mais adiante no item II.6.

$$A_{TDG}(\mathbf{u}, \mathbf{W}) = F_{TDG}(\mathbf{W}) \quad (\text{II. 14.a})$$

onde

$$\begin{aligned} A_{TDG}(\mathbf{u}, \mathbf{W}) = & \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega} (\mathbf{S}\dot{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, t))^T \mathbf{D}\mathbf{S} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega dt + \\ & \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega} \dot{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, t) \rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) d\Omega dt + \\ & \int_{\Omega} \dot{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, t_{n-1}^+) \rho \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_{n-1}^+) d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{S}\mathbf{W}(\mathbf{x}, t_{n-1}^+))^T \mathbf{D}\mathbf{S} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{n-1}^+) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{II. 14.b})$$

representa os termos incógnitos e

$$\begin{aligned} F_{TDG}(\mathbf{W}) = & \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Gamma_h} \dot{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, t) \bar{\mathbf{h}}(t) dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega} \dot{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\Omega dt + \\ & \int_{\Omega} \dot{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, t_{n-1}^+) \rho \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_{n-1}^-) d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{S}\mathbf{W}(\mathbf{x}, t_{n-1}^+))^T \mathbf{D}\mathbf{S} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{n-1}^-) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{II. 14.c})$$

representa os termos conhecidos.

O próximo item é dedicado à solução numérica via elementos finitos.

II.4 – FORMULAÇÃO APROXIMADA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS – FORMULAÇÃO DE GALERKIN DESCONTÍNUO NO TEMPO

Considere o domínio temporal, $I =]0, T[$, ordenado da seguinte forma $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, sendo N o número de intervalos de tempo, para o qual tem-se o intervalo de tempo $I_n =]t_{n-1}, t_n[$ com $\Delta t = t_n - t_{n-1}$, conforme Figura II.3. O domínio e contorno espaço-tempo, representados pelos seguintes produtos cartesianos:

$$Q = \Omega \times I, Q_n = \Omega \times I_n, Q_n^e = \Omega_e \times I_n \quad (\text{Domínio espaço-tempo}) \quad (\text{II. 15.a})$$

$$Y = \Gamma \times I, Y_n = \Gamma \times I_n \quad (\text{Contorno espaço-tempo}) \quad (\text{II. 15.b})$$

$$Y_u = \Gamma_u \times I, (Y_u)_n = \Gamma_u \times I_n \quad (\text{Contorno essencial espaço-tempo}) \quad (\text{II. 15.c})$$

$$Y_h = \Gamma_h \times I, (Y_h)_n = \Gamma_h \times I_n \text{ (Contorno natural espaço-tempo)} \quad (\text{II. 15.d})$$

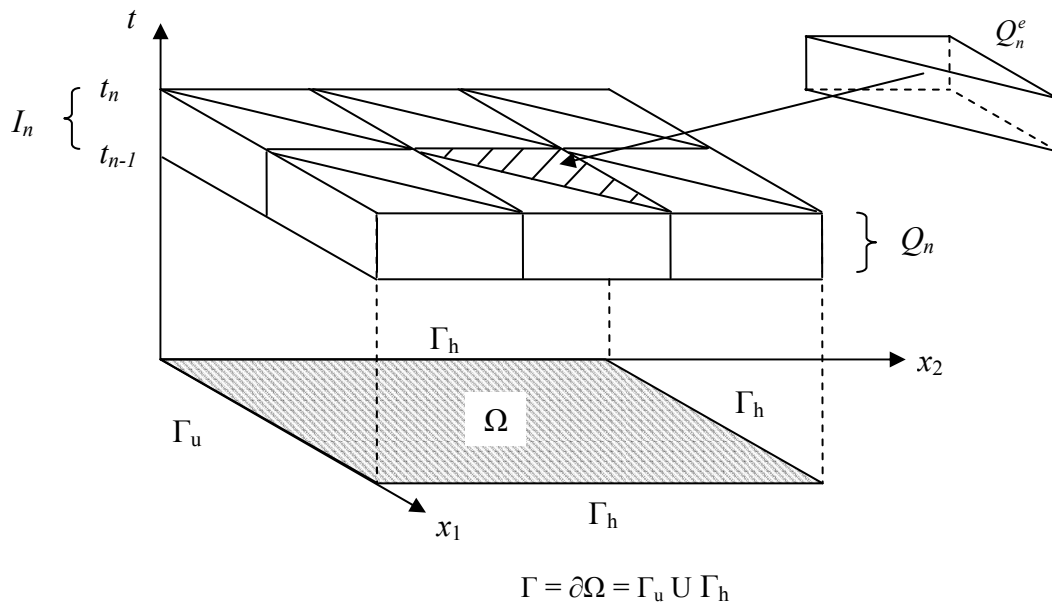


Figura II.3 – Representação esquemática do domínio e contorno espaço-tempo.

Seja $\xi_i(\mathbf{x}), (i=1, 2, \dots, n)$ o sistema de coordenadas locais que mapeia Ω_e nos elementos padrões usuais $\hat{\Omega}_e$ e $\mathbf{x} \in \Omega \subset R^n$. Na Figura II.4 é apresentado um esquema para o caso de $n = 2$.

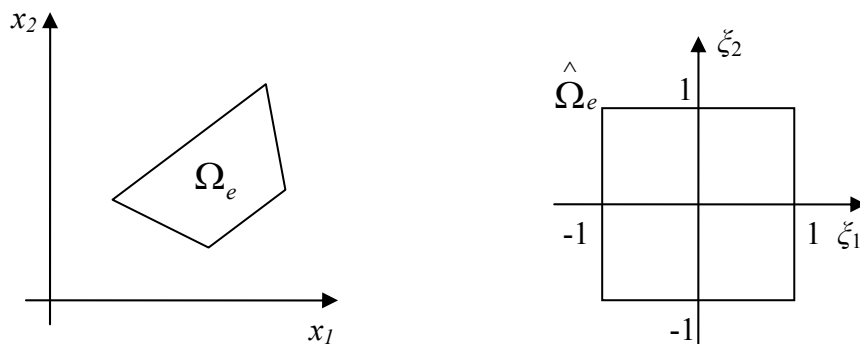


Figura II.4 – Sistema de coordenadas global e local.

Seja $k \geq 0$ um inteiro e considere $P^k(Q_e)$ definido como segue:

$$P^k(Q_e) = \left\{ Pol \in L^2(Q_e) : Pol \text{ é um polinômio de grau } \leq k \text{ nas coordenadas locais} \right\}$$

Para $k \geq 2$ considere o seguinte conjunto espaço de elementos finitos:

$$S^{h,k} = \left\{ u^h \mid u^h \in \left(C^0 \left(\bigcup_{n=1}^N Q_n \right) \right), u_e^h \in P^k(Q_n^e), u^h = \bar{u}^h \text{ em } Y_u \right\} \quad (\text{II. 16.a})$$

$$V^{h,k} = \left\{ W^h \mid W^h \in \left(C^0 \left(\bigcup_{n=1}^N Q_n \right) \right), W_e^h \in P^k(Q_n^e), W^h = 0 \text{ em } Y_u \right\} \quad (\text{II. 16.b})$$

onde \bar{u}^h denota o interpolante de \bar{u} (valor prescrito) e u_e^h denota a restrição de u^h sobre Q_n^e , tal que, pertença ao conjunto das funções contínuas sobre todo o domínio espaço-tempo. O problema variacional associado ao problema de valor de contorno definido abaixo, consiste então em se encontrar \mathbf{u}^h pertencendo a $S^{h,k}$, sendo que $V^{h,k}$ é o espaço das variações admissíveis \mathbf{W}^h . Em cada elemento espaço-tempo Q_n^e , a solução tentativa \mathbf{u}^h e as funções \mathbf{W}^h são aproximadas por polinômios de interpolação de grau k . Estas funções são supostas contínuas no intervalo de tempo $I_n =]t_{n-1}, t_n[$, porém descontínuas nas interfaces entre dois intervalos adjacentes; assim, tem-se que:

$$A_{TDG}(\mathbf{u}^h, \mathbf{W}^h)_n = F_{TDG}(\mathbf{W}^h)_n \quad (\text{II. 17.a})$$

onde

$$A_{TDG}(\mathbf{u}^h, \mathbf{W}^h)_n = \sum_{e=1}^{ne} \left[\int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega_e} (\mathbf{S}\dot{\mathbf{W}}^h(\mathbf{x}, t))^T \mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) d\Omega dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega_e} \dot{\mathbf{W}}^h(\mathbf{x}, t) \rho \ddot{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}, t) d\Omega dt + \int_{\Omega_e} \dot{\mathbf{W}}^h(\mathbf{x}, t_{n-1}^+) \rho \dot{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}, t_{n-1}^+) d\Omega + \int_{\Omega_e} (\mathbf{S}\mathbf{W}^h(\mathbf{x}, t_{n-1}^+))^T \mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t_{n-1}^+) d\Omega \right], n = 1..N \quad (\text{II. 17.b})$$

e

$$F_{TDG}(\mathbf{W}^h)_n = \sum_{e=1}^{ne} \left[\int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Gamma_{he}} \dot{\mathbf{W}}^h(\mathbf{x}, t) \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, t) d\Omega dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega_e} \dot{\mathbf{W}}^h(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\Omega dt + \int_{\Omega_e} \dot{\mathbf{W}}^h(\mathbf{x}, t_{n-1}^+) \rho \dot{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}, t_{n-1}^-) d\Omega + \int_{\Omega_e} (\mathbf{S}\mathbf{W}^h(\mathbf{x}, t_{n-1}^+))^T \mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t_{n-1}^-) d\Omega \right], n = 2..N \quad (\text{II. 17.c})$$

e quando $n = 1$, tem-se:

$$F_{TDG}(W^h)_1 = \sum_{e=1}^{ne} \left[\begin{aligned} & \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Gamma_{he}} \dot{W}^h(\mathbf{x}, t) \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, t) d\Omega dt - \\ & \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega_e} \dot{W}^h(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\Omega dt + \\ & \int_{\Omega_e} \dot{W}^h(\mathbf{x}, t_{n-1}^+) \rho \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) d\Omega + \\ & \int_{\Omega_e} (\mathbf{S}W^h(\mathbf{x}, t_{n-1}^+))^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) d\Omega \end{aligned} \right] \quad (\text{II. 17.d})$$

Existem algumas características importantes no uso de funções descontínuas no tempo, tais como: as equações são desacopladas para cada intervalo de tempo e são resolvidas separadamente para cada intervalo, dessa forma, o resultado obtido no passo anterior é utilizado como condição inicial para o intervalo seguinte, caracterizando o processo de marcha no tempo; outro destaque é a possibilidade de se ter discretizações espaciais diferentes a cada passo de tempo; outra característica é que os operadores de salto introduzem uma dissipação numérica na formulação, o que é visto como uma viscosidade artificial, e não herda as deficiências das viscosidades clássicas, HUGHES e HULBERT [28] e [29].

II.5 – OPERADOR DE ESTABILIZAÇÃO TIPO GLS

Em problemas contendo fortes gradientes ao longo do tempo, o método padrão de Galerkin descontínuo no tempo, [27] e [28], produz uma melhora significativa na resposta temporal em relação aos métodos clássicos do tipo α -Generalizado, entretanto o método não é suficiente para eliminar totalmente as oscilações próximas às discontinuidades, oscilações estas indesejáveis e que não correspondem à resposta real. A causa fundamental das oscilações espúrias para o método de Galerkin é a falta de controle de derivadas em qualquer direção. Geralmente em elementos finitos, para reduzir essas oscilações indesejadas, são utilizadas duas abordagens: a primeira é o emprego do método de Galerkin Mínimos Quadrados (*Galerkin Least Square*, GLS), e a segunda é a introdução de termos de captura de descontinuidade que permitem controlar as derivadas de segunda ordem. Ambos os métodos podem ser aplicados juntos ou separadamente. Cabe destacar que os métodos de captura introduzem um efeito difusivo

na solução e são métodos não-lineares, mesmo quando o problema é linear. Neste trabalho serão utilizados ambos os termos, mas a ênfase maior será dada à formulação do termo de captura.

II.6 – OPERADOR DE CAPTURA

Nesta seção, são apresentadas as formulações matemática e a variacional de uma classe de operador de captura.

II.6.a – Formulação Matemática do Operador de Captura

HUGHES e HULBERT ([27], [28] e [29]) desenvolveram e apresentaram um operador de captura para a equação hiperbólica de segunda ordem. O objetivo era eliminar completamente as oscilações presentes em problemas da elastodinâmica com fortes gradientes ao longo do tempo. O operador possui algumas características importantes. Em cada elemento a contribuição do operador é proporcional ao quadrado do resíduo; assim, se a solução é suave, este resíduo será pequeno, acarretando uma contribuição pequena do referido operador, o que leva a solução a ser calculada predominantemente pela formulação TDG. Já em regiões onde o gradiente ou descontinuidade são maiores, o resíduo é também maior, e o efeito do operador torna-se predominante. Nessas regiões, o operador de captura adiciona estabilidade ao controlar a segunda derivada temporal da solução. Como o operador é dependente do resíduo do elemento, a formulação resultante é não-linear, mesmo para problemas lineares.

Inspirado na idéia apresentada por [27], [28] e [29], foi desenvolvida uma classe de operadores de captura, com características particulares, sendo que a principal é que várias famílias de operadores podem ser criadas a partir da escolha da função de perturbação. Destaca-se que, inclusive, uma dessas famílias engloba o operador apresentado por HUGHES e HULBERT, sendo o mesmo um caso particular da formulação proposta neste trabalho, o que será verificado mais adiante, item II.6.d.

A seguir é apresentada uma metodologia geral para o desenvolvimento de operadores de captura para problemas da elastodinâmica.

Seja um corpo elástico ocupando uma região limitada do espaço, $\Omega \subset R^n$, onde n é o número de dimensões do espaço. O contorno de Ω é denotado por Γ , sendo Γ_u e Γ_q partes não sobrepostas deste contorno, tal que, $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_q$. O vetor deslocamento é denotado por $u(\mathbf{x}, t)$, onde $\mathbf{x} \in \Omega$ e $t \in [0, T]$, sendo $T > 0$. As componentes da tensão são então determinadas pela lei de Hook generalizada, expressa em termo de suas componentes, onde C_{ijkl} são os coeficientes elásticos, tal que:

$$\sigma_{ij} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \quad (\text{II. 18})$$

para $i, j, k, l = (1, \dots, n)$

A equação diferencial do problema de valor de contorno/inicial para a elastodinâmica é expressa pela equação a seguir:

$$\rho \ddot{u}_i - \sigma_{ij,j} = f_i \quad \text{em} \quad Q = \Omega \times I \quad (\text{II. 19})$$

Expandindo (II. 19) em termo de suas componentes, tem-se:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right] \right] = f_i \quad (\text{II. 20})$$

Seguindo a metodologia apresentada em DUTRA DO CARMO e GALEÃO, [25] e [26], e considerando uma aproximação, $\mathbf{u}^h = (u_1^h, u_2^h, \dots, u_n^h)$ para a variável \mathbf{u} e valores aproximados, C_{ijkl}^h , $\frac{\partial C_{ijkl}^h}{\partial x_i}$ e ρ_i^h , similares aos coeficientes reais, dependentes de u^h , pode-se escrever a equação de equilíbrio em função dos valores aproximados como:

$$\rho_i^h \frac{\partial^2 u_i^h}{\partial t^2} - \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[\delta_{ijkl}^h C_{ijkl}^h \frac{\partial^2 u_k^h}{\partial x_j \partial x_l} + \delta_{ij,j}^{h,j} \frac{\partial C_{ijkl}^h}{\partial x_j} \frac{\partial u_k^h}{\partial x_l} \right] \right] - f_i = 0 \quad (\text{II. 21})$$

Assim, para um dado u^h , devem-se ajustar os valores dos termos C_{ijkl}^h , $\frac{\partial C_{ijkl}^h}{\partial x_i}$ e ρ_i^h , de modo que a equação (II. 21) seja satisfeita. De outra forma, para que essas aproximações sejam as mais adequadas, deve-se exigir que o funcional J^* , formado pela diferença entre os valores reais e seus respectivos valores aproximados,

$$J^* = \sum_i^n \left\{ \sum_j^n \sum_l^n \sum_k^n \frac{[C_{ijkl}^h - C_{ijkl}]^2}{2} + \frac{\theta_i}{2} \left[\frac{\partial C_{ijkl}^h}{\partial x_j} - \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial x_j} \right]^2 \right\} + \frac{\gamma_i}{2} [\rho_i^h - \rho]^2 \quad (\text{II. 22})$$

tenha um valor de mínimo, em relação aos termos C_{ijkl}^h , $\frac{\partial C_{ijkl}^h}{\partial x_i}$ e ρ_i^h , e que satisfaça a restrição dada em (II. 21). Essa técnica de minimizar um funcional, dada uma restrição, é conhecida como multiplicadores de Lagrange. É possível mostra que o problema de minimização do funcional J^* com tal restrição, equivale a minimizar o seguinte funcional:

$$J = \sum_i^n \left[\left\{ \sum_j^n \sum_l^n \sum_k^n \frac{[C_{ijkl}^h - C_{ijkl}]^2}{2} + \frac{\theta_i}{2} \left[\frac{\partial C_{ijkl}^h}{\partial x_j} - \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial x_j} \right]^2 \right\} + \frac{\gamma_i}{2} [\rho_i^h - \rho]^2 + \lambda_i \left[- \sum_j^n \sum_k^n \sum_l^n \left[C_{ijkl}^h \delta_{ijkl}^h \left(\frac{\partial^2 u_k^h}{\partial x_j \partial x_l} \right) + \delta_{ijkl}^{h,j} \left(\frac{\partial C_{ijkl}^h}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_k^h}{\partial x_l} \right) \right] + \rho_i^h \frac{\partial^2 u_i^h}{\partial t^2} - f_i \right] \right] \quad (\text{II. 23.a})$$

onde θ_i e γ_i são parâmetros dimensionais para compatibilizar as somas das parcelas e que λ_i são multiplicadores de Lagrange, além disso, tem-se também

$$\delta_{ijkl}^h = \begin{cases} 1, & \text{se } C_{ijkl} \neq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad \delta_{ijkl}^{h,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } \frac{\partial C_{ijkl}^h}{\partial x_j} \neq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{II. 23.b})$$

Assim, minimizando o funcional J em relação a C_{ijkl}^h , $\frac{\partial C_{ijkl}^h}{\partial x_j}$, ρ_i^h e λ_i , ou seja, fazendo:

$$\frac{\partial J}{\partial C_{ijkl}^h} = 0 \Rightarrow C_{ijkl}^h - C_{ijkl} = \lambda_i \delta_{ijkl}^h \left(\frac{\partial^2 u_k^h}{\partial x_j \partial x_l} \right) \quad (\text{II. 24})$$

$$\frac{\partial J}{\partial \left(\frac{\partial C_{ijkl}^h}{\partial x_j} \right)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial C_{ijkl}^h}{\partial x_j} - \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial x_j} = \frac{\lambda_i}{\theta_i} \delta_{ijkl}^{h,j} \frac{\partial u_k^h}{\partial x_l} \quad (\text{II. 25})$$

$$\frac{\partial J}{\partial \rho_i^h} = 0 \Rightarrow \rho_i^h - \rho = -\frac{\lambda_i}{\gamma_i} \frac{\partial^2 u_i^h}{\partial t^2} \quad (\text{II. 26})$$

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda_i} = 0 \Rightarrow - \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[C_{ijkl}^h \frac{\partial^2 u_k^h}{\partial x_j \partial x_l} \delta_{ijkl}^h + \delta_{ijkl}^{h,j} \frac{\partial C_{ijkl}^h}{\partial x_j} \frac{\partial u_k^h}{\partial x_l} \right] \right] + \rho_i^h \frac{\partial^2 u_i^h}{\partial t^2} = f_i \quad (\text{II. 27})$$

e multiplicando as equações (II. 24), (II. 25) e (II. 26), respectivamente, por $\frac{\partial^2 u_k^h}{\partial x_j \partial x_l}$,

$\frac{\partial u_k^h}{\partial x_l}$ e $\frac{\partial^2 u_i^h}{\partial t^2}$, resulta em:

$$(C_{ijkl}^h - C_{ijkl}) \left(\frac{\partial^2 u_k^h}{\partial x_j \partial x_l} \right) = \lambda_i \delta_{ijkl}^h \left(\frac{\partial^2 u_k^h}{\partial x_j \partial x_l} \right)^2 \quad (\text{II. 28.a})$$

$$\left(\frac{\partial C_{ijkl}^h}{\partial x_j} - \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_k^h}{\partial x_l} \right) = \frac{\lambda_i}{\theta_i} \delta_{ijkl}^{h,j} \left(\frac{\partial u_k^h}{\partial x_l} \right)^2 \quad (\text{II. 28.b})$$

$$(\rho_i^h - \rho) \left(\frac{\partial^2 u_i^h}{\partial t^2} \right) = -\frac{\lambda_i}{\gamma_i} \left(\frac{\partial^2 u_i^h}{\partial t^2} \right)^2 \quad (\text{II. 28.c})$$

Somando as equações (II. 28.a) e (II. 28.b) e repetindo (II. 28.c), chega-se a:

$$\lambda_i \left[\delta_{ijkl}^h \left(\frac{\partial^2 u_k^h}{\partial x_j \partial x_l} \right)^2 + \frac{\delta_{ijkl}^{h,j}}{\theta_i} \left(\frac{\partial u_k^h}{\partial x_l} \right)^2 \right] = (C_{ijkl}^h - C_{ijkl}) \left(\frac{\partial^2 u_k^h}{\partial x_j \partial x_l} \right) + \left(\frac{\partial C_{ijkl}^h}{\partial x_j} - \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_k^h}{\partial x_l} \right) \quad (\text{II. 29.a})$$

$$\frac{\lambda_i}{\gamma_i} \left(\frac{\partial^2 u_i^h}{\partial t^2} \right)^2 = (\rho - \rho_i^h) \frac{\partial^2 u_i^h}{\partial t^2} \quad (\text{II. 29.b})$$

Tomando agora, a soma da equação (II. 29.a) com relação a j, k, l e somando o resultado com a equação (II. 29.b), tem-se:

$$\begin{aligned}
\lambda_i & \left[\left[\sum_j^n \sum_k^n \sum_l^n \delta_{ijkl}^h \left(\frac{\partial^2 u_k^h}{\partial x_j \partial x_l} \right)^2 + \frac{\delta_{ijkl}^{h,j}}{\theta_i} \left(\frac{\partial u_k^h}{\partial x_l} \right)^2 \right] + \frac{1}{\gamma_i} \left(\frac{\partial^2 u_i^h}{\partial t^2} \right)^2 \right] = \\
& \left(\left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[C_{ijkl}^h \left(\frac{\partial^2 u_k^h}{\partial x_j \partial x_l} \right) + \frac{\partial C_{ijkl}^h}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_k^h}{\partial x_l} \right) \right] \right] - \rho_i^h \frac{\partial^2 u_i^h}{\partial t^2} \right) + \\
& - \left(\left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[C_{ijkl} \left(\frac{\partial^2 u_k^h}{\partial x_j \partial x_l} \right) + \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_k^h}{\partial x_l} \right) \right] \right] - \rho \frac{\partial^2 u_i^h}{\partial t^2} \right)
\end{aligned} \tag{II. 30}$$

Note-se que o primeiro termo do lado direito da equação (II. 30) corresponde a equação (II. 21), ou seja, aos valores de f_i , e que somado ao segundo termo dessa equação, chega-se ao termo que corresponde ao resíduo da equação diferencial, dado por:

$$R_i(\mathbf{u}^h) = - \left[\sum_j^n \sum_k^n \sum_l^n \left[C_{ijkl} \left(\frac{\partial^2 u_k^h}{\partial x_j \partial x_l} \right) + \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial x_j} \frac{\partial u_k^h}{\partial x_l} \right] \right] + \rho \frac{\partial^2 u_i^h}{\partial t^2} - f_i \tag{II. 31}$$

Reescreve-se então, a equação (II. 30) na seguinte forma:

$$\lambda_i = R_i(\mathbf{u}^h) / \left[\left[\sum_j^n \sum_k^n \sum_l^n \delta_{ijkl}^h \left(\frac{\partial^2 u_k^h}{\partial x_j \partial x_l} \right)^2 + \frac{\delta_{ijkl}^{h,j}}{\theta_i} \left(\frac{\partial u_k^h}{\partial x_l} \right)^2 \right] + \frac{1}{\gamma_i} \left(\frac{\partial^2 u_i^h}{\partial t^2} \right)^2 \right] \tag{II. 32}$$

Analisando o denominador da equação (II. 32), verifica-se que o mesmo pode ser visto como o quadrado da norma do seguinte vetor:

$$\mathbf{U}^i(\mathbf{u}^h) = \left(\dots, \delta_{ijkl}^h \frac{\partial^2 u_k^h}{\partial x_j \partial x_l}, \dots, \frac{\delta_{ijkl}^{h,j}}{\sqrt{\theta_i}} \frac{\partial u_k^h}{\partial x_l}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\gamma_i}} \frac{\partial^2 u_i^h}{\partial t^2} \right) \tag{II. 33}$$

Assim a equação (II. 32) pode ser reescrita na forma compacta como:

$$\lambda_i = \frac{R_i(\mathbf{u}^h)}{\|\mathbf{U}^i(\mathbf{u}^h)\|^2} \quad (\text{II. 34})$$

Define-se agora, $V_p^{h,i}(\mathbf{u}^h)$ como o vetor de perturbação nos dados, ou seja, o vetor de erro entre os valores reais e os valores aproximados:

$$\mathbf{V}_p^{h,i}(\mathbf{u}^h) = \left(\dots, (C_{ijkl}^h - C_{ijkl}), \dots, \sqrt{\theta_i} \left(\frac{\partial C_{ijkl}^h}{\partial x_j} - \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial x_j} \right), \dots, \sqrt{\gamma_i} (\rho - \rho_i^h) \right) \quad (\text{II. 35})$$

Substituindo o conjunto de equações (II. 28) em (II. 33), verifica-se que λ_i é um fator comum a todos os termos do vetor resultante. Utilizando agora (II. 34), chega-se a expressão do vetor de perturbação:

$$\mathbf{V}_p^{h,i}(\mathbf{u}^h) = \frac{R_i(\mathbf{u}^h) \mathbf{U}^i(\mathbf{u}^h)}{\|\mathbf{U}^i(\mathbf{u}^h)\|^2} \quad (\text{II. 36})$$

Donde define-se, o vetor $\hat{\mathbf{V}}_p^{h,i}(\mathbf{u}^h)$ da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{V}}_p^{h,i}(\mathbf{u}^h) = \frac{\mathbf{V}_p^{h,i}(\mathbf{u}^h)}{\|\mathbf{V}_p^{h,i}(\mathbf{u}^h)\|} = \frac{R_i(\mathbf{u}^h) \mathbf{U}^i(\mathbf{u}^h)}{|R_i(\mathbf{u}^h)| \|\mathbf{U}^i(\mathbf{u}^h)\|} \quad (\text{II. 37})$$

como sendo o vetor unitário de direção de captura para o grau de liberdade i .

Seja agora o vetor $\mathbf{U}^{i,loc}(\mathbf{u}^h)$ definido da seguinte forma, nas coordenadas locais:

$$\mathbf{U}^{i,loc}(\mathbf{u}^h) = \left(\dots, \delta_{ijkl}^h \frac{\partial^2 u_k^h}{\partial \xi_j \partial \xi_l}, \dots, \frac{\partial^2 u_i^h}{\partial \xi_0^2} \right) \quad (\text{II. 38})$$

onde (ξ_1, \dots, ξ_n) são as coordenadas locais do elemento padrão, associadas às coordenadas globais (x_1, \dots, x_n) ; ξ_0 é a coordenada local do elemento padrão associada à variável tempo.

Define-se também o parâmetro de malha, através da expressão:

$$h^{loc}(\mathbf{u}^h) = \left[\frac{\mathbf{U}^{i,loc}(\mathbf{u}^h)}{\|\mathbf{U}^i(\mathbf{u}^h)\|} \right]^{1/2} \quad (\text{II. 39})$$

e os seguintes números dimensionais:

$$\tau_i(\mathbf{u}^h, \alpha_i) = \begin{cases} \left[\frac{1}{\|\mathbf{U}^i(\mathbf{u}^h)\|} \left| \frac{R_i(\mathbf{u}^h)}{\rho(\gamma_i)^{1/2}} \right| \right]^{\alpha_i}, & \text{se } \|\mathbf{U}^i(\mathbf{u}^h)\| > 0 \\ 0, & \text{se } \|\mathbf{U}^i(\mathbf{u}^h)\| = 0 \end{cases} \quad (\text{II. 40})$$

$$Cour_i = \frac{(\gamma_i)^{1/4} \Delta t}{h_{e,i}} \quad (\text{II. 41})$$

$$h_{e,i} = \text{Sup}_{x,y \in \Omega_e} |x_i - y_i| \quad (\text{II. 42})$$

onde *Sup* denota o *supremum*, e α_i é uma função do número de Courant $Cour_i$, que satisfaz a seguinte condição:

$$\alpha_i = \alpha_i(Cour_i) \geq 0 \quad (\text{II. 43})$$

Seja $R^n = R \times \dots \times R$, tal que, $\mathbf{U}^i(\mathbf{u}^h)$ é um elemento de R^n , e $\mathbf{W}_i(W^h)$ uma função vetorial, tal que $(x,t) \in \Omega \times [t_j, t_{j+1}]$, e $\mathbf{W}_i(W^h)$ é um elemento de R^n com dimensão $\mathbf{U}^i(\mathbf{u}^h)$. Considere a seguinte perturbação Petrov-Galerkin:

$$p_i(\mathbf{u}^h, W^h) = \Delta t \rho \gamma_i \tau_i(\mathbf{u}^h, \alpha_i) \left[\frac{\hat{V}_p^{h,i}(\mathbf{u}^h)}{\rho(\gamma_i)^{1/2}} \cdot \mathbf{W}_i(W^h) \right] \quad (\text{II. 44})$$

Assim, multiplicando (II. 44) pelo resíduo $R_i(\mathbf{u}^h)$, e substituindo as equações (II. 37) e (II. 40), obtem-se:

$$R_i(\mathbf{u}^h) p_i(\mathbf{u}^h, W^h) = \Delta t \rho \gamma_i \tau_i(\mathbf{u}^h, \alpha_i + 1) [\mathbf{U}^i(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{W}_i(W^h)] \quad (\text{II. 45})$$

Finalmente tem-se uma família de operadores de captura, definida para o grau de liberdade i , através da integração, no domínio espaço-tempo, do produto entre o resíduo e a função de ponderação, dada pela perturbação Petrov-Galerkin, ou seja, resíduos ponderados. Assim, para um elemento qualquer, o operador de captura é expresso por

$$A_{CD}^e(\mathbf{u}^h, W^h)_n = \sum_i \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega_e} R_i(\mathbf{u}^h) p_i(\mathbf{u}^h, W^h) d\Omega dt \quad (\text{II. 46.a})$$

$$A_{CD}^e(\mathbf{u}^h, W^h)_n = \sum_i \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega_e} \Delta t \rho \gamma_i \tau_i(\mathbf{u}^h, \alpha_i + 1) [\mathbf{U}^i(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{W}_i(W^h)] d\Omega dt \quad (\text{II. 46.b})$$

enquanto que para todo o domínio espacial tem-se:

$$A_{CD}(\mathbf{u}^h, W^h)_n = \sum_i \sum_{e=1}^{NEL} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega_e} \Delta t \rho \gamma_i \tau_i(\mathbf{u}^h, \alpha_i + 1) [\mathbf{U}^i(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{W}_i(W^h)] d\Omega dt \quad (\text{II. 46.c})$$

Deve-se notar que a cada função $\mathbf{W}_i(W^h)$ e cada função $\alpha_i(\cdot)$, tem-se um novo operador de captura.

II.6.b – Formulação Variacional Proposta

Dessa forma, o objetivo da formulação, incluindo o operador de captura, consiste em encontrar $\mathbf{u}^h \in S^{h,k}$, equação (II. 16), que satisfaça a igualdade abaixo:

$$A_{TDG+CD+GLS}(\mathbf{u}^h, W^h)_n = F_{TDG+CD+GLS}(W^h)_n \quad (\text{II. 47.a})$$

onde

$$A_{TDG+CD+GLS}(\mathbf{u}^h, W^h)_n = A_{TDG}(\mathbf{u}^h, W^h)_n + A_{GLS}(\mathbf{u}^h, W^h)_n + A_{CD}(\mathbf{u}^h, W^h)_n \quad (\text{II. 47.b})$$

$$F_{TDG+CD+GLS}(W^h)_n = F_{TDG}(W^h)_n + F_{GLS}(W^h)_n \quad (\text{II. 47.c})$$

As parcelas $A_{TDG}(\mathbf{u}^h, W^h)_n$ e $F_{TDG}(W^h)_n$ são dadas pela equação (II. 17) enquanto que as parcelas devido ao termo GLS, são dadas a seguir, pela equação (II. 48).

$$A_{GLS}(\mathbf{u}^h, W^h)_n = \sum_{e=1}^{NEL} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega_e} F_{GLS}(Cour) \frac{\Delta t}{\rho} L(\mathbf{u}^h) L(W^h) dQ \quad (\text{II. 48.a})$$

$$F_{GLS}(W^h)_n = \sum_{e=1}^{NEL} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega_e} \gamma F_{GLS}(Cour) \frac{\Delta t}{\rho} L(W^h) dQ \quad \forall W^h \in V^{h,k} \quad (\text{II. 48.b})$$

onde $F_{GLS}(Cour)$ é uma função a ser determinada e $L(\bullet)$ representa o operador da equação diferencial.

II.6.c – Famílias de Operadores de Captura

Inspirado nos trabalhos de [28] e [29], e utilizando a metodologia apresentada aqui, várias famílias de operadores de captura podem ser obtidas, definindo $\mathbf{W}_i(W^h)$ como sendo dada da seguinte forma:

$$\mathbf{W}_i(W^h) = \beta_i(Cour_i, h^{loc}(\mathbf{u}^h), \alpha_i(Cour_i)) \cdot \frac{1}{(h^{loc}(\mathbf{u}^h))^4} \frac{[\mathbf{U}^{i,loc}(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{U}^{i,loc}(W^h)]}{\mathbf{U}^i(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{U}^i(W^h)} \mathbf{U}^i(W^h) \quad (\text{II. 49})$$

onde β_i é uma função estritamente não negativa e adimensional.

Uma determinada família de operadores de captura é obtida fazendo-se a função $\alpha_i(Cour_i)$, equação (II. 43), igual a um número real, independente do número de Courant, de modo a satisfazer a seguinte condição:

$$\alpha_i(Cour_i) = \bar{\alpha} \geq 1 \quad \forall i \text{ e } \forall Cour_i \quad (\text{II. 50})$$

Para esta classe de operadores tem-se:

$$A_{CD}^e(\mathbf{u}^h, W^h) = \sum_i \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega_e} \Delta t \frac{|R_i(\mathbf{u}^h)|^{\bar{\alpha}+1} \|\mathbf{U}^i(\mathbf{u}^h)\|^{1-\bar{\alpha}}}{\rho^{\bar{\alpha}} \gamma_i^{(\bar{\alpha}-1)/2} \|\mathbf{U}^{i,loc}(\mathbf{u}^h)\|^2} \beta_i(\cdot) [\mathbf{U}^{i,loc}(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{U}^{i,loc}(W^h)] d\Omega dt \quad (\text{II. 51})$$

sendo $\beta_i(\cdot) = \beta_i(Cour_i, h^{loc}(\mathbf{u}^h), \bar{\alpha})$

Dessa forma, para essa classe, vários operadores podem ser especificados, definindo-se as funções $\bar{\alpha}$ e $\beta_i(\cdot)$.

Pode-se ainda, reescrever a equação (II. 49) em função do comprimento h^{loc} , equação (II. 39):

$$A_{CD}^e(\mathbf{u}^h, W^h) = \sum_i \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega_e} \Delta t \frac{|R_i(\mathbf{u}^h)|^{\bar{\alpha}+1} [h^{loc}(\mathbf{u}^h)]^{2(\bar{\alpha}-1)}}{\rho^{\bar{\alpha}} \gamma_i^{(\bar{\alpha}-1)/2} \|\mathbf{U}^{i,loc}(\mathbf{u}^h)\|^{1+\bar{\alpha}}} \beta_i(\cdot) [\mathbf{U}^{i,loc}(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{U}^{i,loc}(W^h)] d\Omega dt \quad (\text{II. 52.a})$$

ou

$$A_{CD}^e(\mathbf{u}^h, W^h) = \sum_i \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega_e} \frac{\beta_i(Cour_i, h^{loc}(\mathbf{u}^h), \bar{\alpha}) |R_i(\mathbf{u}^h)|^{\bar{\alpha}+1} [h^{loc}(\mathbf{u}^h)]^{(\bar{\alpha}-1)} [h^{loc}(\mathbf{u}^h)]^{(\bar{\alpha}-1)}}{\beta_i(Cour_i) \rho^{\bar{\alpha}} \gamma_i^{(\bar{\alpha}-1)/2} \|\mathbf{U}^{i,loc}(\mathbf{u}^h)\|^{\bar{\alpha}-1}} \quad (\text{II. 52.b})$$

$$\left(\beta_i(Cour_i) \Delta t \frac{|R_i(\mathbf{u}^h)|^2}{\rho \|\mathbf{U}^{i,loc}(\mathbf{u}^h)\|^2} \right) [\mathbf{U}^{i,loc}(\mathbf{u}^h) \mathbf{U}^{i,loc}(W^h)] d\Omega dt$$

A seguir é mostrado que a expressão em (II. 51) engloba o operador quadrático de HUGHES e HULBERT.

II.6.d – Operador de HUGHES e HULBERT

Em 1990, HUGHES e HULBERT apresentaram dois operadores de captura, um aplicável a números de Courant menores do que um, denominado “quadrático” e outro para números de Courant maiores ou igual que um, denominado “linear”. Essa nomenclatura está relacionada ao expoente do resíduo da equação diferencial presente nos operadores, os quais são apresentados a seguir:

Operador quadrático – Courant < 1

$$A_{CD}^H = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{\Omega} \frac{(R^h \cdot \rho^{-1} \tau R^h)}{(\nabla_{\xi^2} u^h \cdot \nabla_{\xi^2} u^h)} \nabla_{\xi^2} w^h \cdot \nabla_{\xi^2} u^h d\Omega dt \quad (\text{II. 53})$$

Operador linear – Courant ≥ 1

$$A_{CD}^H = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{\Omega} \sum_{i=0}^d \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \frac{(R^h \cdot \rho^{-1} \tau R^h)^{1/2}}{(\nabla_{\xi^2} u^h \cdot \rho^{-1} \tau \nabla_{\xi^2} u^h)^{1/2}} \nabla_{\xi^2} w^h \cdot \nabla_{\xi^2} u^h d\Omega dt \quad (\text{II. 54})$$

onde,

$$\tau = \Delta t \tau_A \quad (\text{II. 55})$$

com

$$\tau_A = \frac{1}{4 \sqrt{1 + Cour^4}} \quad (\text{II. 56})$$

sendo τ um parâmetro temporal;

$$\nabla_{\xi^2}(\cdot) = \begin{bmatrix} (\partial^2(\cdot)/\partial \xi_0^2) I_d \\ (\partial^2(\cdot)/\partial \xi_1^2) I_d \\ (\partial^2(\cdot)/\partial \xi_2^2) I_d \\ \vdots \\ (\partial^2(\cdot)/\partial \xi_d^2) I_d \end{bmatrix} \quad (\text{II. 57})$$

é o operador gradiente em coordenadas locais.

Nas expressões acima R^h é o resíduo; (ξ_1, \dots, ξ_d) são as coordenadas locais do elemento padrão, associadas as coordenadas globais (x_1, \dots, x_n) ; e ξ_0 é a coordenada local do elemento padrão associada a variável tempo; I_d é a matriz identidade, onde d é a dimensão do domínio espacial.

Mostra-se que fazendo $\bar{\alpha} = 1$ e $\beta_i(Cour_i, h^{loc}(\mathbf{u}^h), \bar{\alpha}) = \tau_A$, na equação (II. 51), e lembrando que $\nabla_{\xi^2}(\cdot)$ corresponde a $\mathbf{U}^{t,loc}(\cdot)$, equação (II. 38), tem-se o esquema de captura quadrático apresentado por [29].

Agora, se $\bar{\alpha} = 1$ e $\beta_i(Cour_i, h^{loc}(\mathbf{u}^h), \bar{\alpha}) = \bar{\beta}_i(Cour_i)$, com $0 < Cour_i < \infty$, ou seja, uma função de Courant, obtem-se uma variação ou extensão do operador de captura quadrático de HUGHES e HULBERT.

Cabe destacar que tanto a formulação proposta, quanto a de HUGHES e HULBERT, [28] e [29], têm como base a formulação TDG, ou seja, os operadores de captura são adicionados a essa formulação para controle das derivadas.

O próximo capítulo apresenta a formulação do operador de captura para o caso unidimensional.

CAPITULO III

FORMULAÇÃO PARA O CASO UNIDIMENSIONAL

Neste capítulo é apresentada a formulação do operador de captura para o caso elástico, homogêneo e isotrópico unidimensional. Inicialmente, são definidas as expressões para $\mathbf{U}(u^h)$ e $\mathbf{W}(W^h)$ desse operador. Por fim, é apresentada uma metodologia para obtenção dos parâmetros do operador de captura e a utilização do termo GLS na formulação proposta.

III.1 – OPERADOR DE CAPTURA: CASO UNIDIMENSIONAL

Para o caso elástico unidimensional, o operador de captura pode ser expresso da seguinte forma, equação (II. 46):

$$A_{CD}(u^h, W^h) = \sum_{e=1}^{NEL} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega_e} \Delta t \rho \gamma \tau(u_0^h, \alpha + 1) [\mathbf{U}(u^h) \cdot \mathbf{W}(W^h)] d\Omega dt \quad (\text{III. 1})$$

com

$$\mathbf{U}(u^h) = \left(\frac{\partial^2 u^h}{\partial x^2}, \frac{1}{\gamma^{1/2}} \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \right) \mathbf{e} \quad (\text{III. 2})$$

$$\tau(u_0^h, \alpha + 1) = \begin{cases} \left[\frac{1}{\|\mathbf{U}(u_0^h)\|} \left| \frac{R(u_0^h)}{\rho(\gamma)^{1/2}} \right| \right]^{\alpha+1}, & \text{se } \|\mathbf{U}(u_0^h)\| > 0 \\ 0, & \text{se } \|\mathbf{U}(u_0^h)\| = 0 \end{cases} \quad (\text{III. 3})$$

onde são definidas as seguintes variáveis:

u^h é o vetor contendo os valores da variável primária na iteração atual, incógnitas;

u_0^h é o vetor contendo os valores da variável primária calculados na iteração anterior;
 α é número real maior que zero, a ser determinado;

$$\gamma^{1/2} = c^2; \text{ sendo } c \text{ a velocidade de propagação da onda de compressão} \quad (\text{III. 4})$$

$$|R(u_0^h)| \text{ representa o resíduo da equação diferencial;} \quad (\text{III. 5})$$

$$\|U(u_0^h)\| = \|U(u_0^h)\|_{L^2} = \left\| \left(\frac{\partial^2 u_0^h}{\partial x^2}, \frac{1}{\gamma^{1/2}} \frac{\partial^2 u_0^h}{\partial t^2} \right) \right\| \text{ representa a norma do vetor } U(u_0^h) \quad (\text{III. 6})$$

Neste trabalho, a função $W_i(W^h)$ é definida, de tal forma que, para $Cour_i \geq 1$ e $Cour_i < 1$ tem-se funções distintas, e dependentes do número de Courant:

$$W(W^h) = \begin{cases} W_-(W^h) = \mu^-(Cour) \left(\frac{\partial^2 W^h}{\partial x^2}, \frac{Cour^4}{\gamma^{1/2}} \ddot{W}^h \right), & \text{se } Cour < 1 \\ W_+(W^h) = \mu^+(Cour) \left(Cour^{-4} \frac{\partial^2 W^h}{\partial x^2}, \frac{1}{\gamma^{1/2}} \ddot{W}^h \right), & \text{se } Cour \geq 1 \end{cases} \quad (\text{III. 7})$$

onde W^h é a função de ponderação; $Cour$ é o número de Courant, definido como, $Cour = c \Delta t / \Delta x$, sendo Δx e Δt o intervalo espacial da malha adotada e o intervalo de tempo, respectivamente, e ainda, a velocidade de propagação das ondas longitudinais, dada por $c = \sqrt{E/\rho}$; $\mu^+(Cour)$ e $\mu^-(Cour)$ são as funções adimensionais do número de Courant a serem determinadas.

Pode-se notar que os vetores $U(u^h)$ e $W(W^h)$ dependem das derivadas de segunda ordem em relação a t e x . No ANEXO A, são apresentadas as expressões para o cálculo dessas derivadas.

Os termos $Cour^{-4}$ e $Cour^4$ em $W(W^h)$ podem ser entendidos como uma forma de equilibrar a ordem de grandeza do produto escalar $U(u^h) \cdot W(W^h)$. Assim, quando

$Cour \geq 1$ tem-se $c \Delta t > \Delta x$, nessa situação, a ordem de grandeza da parcela espacial é menor do que a temporal e a soma das parcelas fica “desequilibrada”. Mostra-se (ANEXO B) que considerando o termo $Cour^{-4}$ na parcela espacial a soma fica “equilibrada” fazendo com que esta tenha a mesma ordem de grandeza da parcela temporal. Agora, quando $Cour < 1$, ou seja, $c \Delta t < \Delta x$, tem-se a situação contrária, onde a parcela temporal é menor que a espacial e pode-se mostrar também que multiplicando a parcela temporal por $Cour^4$, a respectiva soma das duas parcelas fica equilibrada.

Uma vez especificada a expressão do operador de captura, $\mathbf{W}(W^h)$, o passo seguinte consiste em obter as funções $\mu^+(Cour)$, $\mu^-(Cour)$ e o expoente α . A determinação destes valores é feita através de experimentos numéricos em um problema que possui descontinuidade em sua solução analítica, de modo a obter a melhor curva possível para as funções acima.

III.1.a – Exemplo Analisado

O exemplo utilizado é o de uma barra prismática, elástica e engastada em uma das extremidades e sujeita a um carregamento compressional, tipo Heaviside, na extremidade livre, conforme Figura III. 1. A escolha deste problema se deve ao fato de que a velocidade ao longo do tempo e a tensão na direção x ao longo da barra apresentarem saltos em suas soluções, servindo como um ótimo exemplo para avaliar a formulação proposta. O ANEXO C apresenta as expressões analíticas para o deslocamento e velocidade ao longo do tempo em qualquer ponto da barra. A seguir é apresentada a descrição do problema físico, bem como do modelo numérico utilizado para representá-lo.

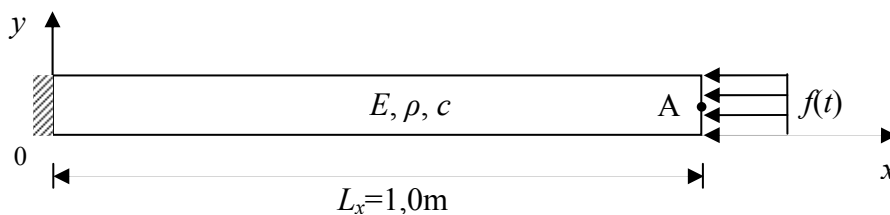


Figura III. 1 – Descrição do problema físico.

A barra apresenta comprimento de 1m e seção transversal quadrada, de área $0,01\text{m}^2$. Os valores para o módulo de elasticidade e da densidade valem, respectivamente, $E = 1\text{N/m}^2$ e $\rho = 1\text{kg/m}^3$. A carga aplicada é compressional do tipo Heaviside com intensidade igual a 1N, atuando durante todo o tempo de análise. Os resultados são medidos na extremidade livre da barra, ou seja, no ponto A. O valor do coeficiente de Poisson é considerado igual a zero, não havendo assim movimento transversal. Dessa forma, devido à geometria, condições de contorno e de aplicação da carga, não há propagação de onda secundária, e o problema se comporta como unidimensional, com uma frente de onda plana se propagando ao longo da barra.

A formulação desenvolvida utiliza elementos que descrevem o espaço e o tempo simultaneamente, diferente dos métodos semi-discretos. A malha de elementos finitos espaço-tempo utilizada para resolver este problema, consiste de 50 elementos retangulares com interpolação quadrática no tempo e no espaço; esse tipo de interpolação é necessária e será ilustrada através de resultados no capítulo IV. Uma vez estabelecido o número de elementos, o valor de Δx fica determinado, sendo igual a $0,02\text{m}$. A Figura III. 2 apresenta um esquema da discretização dos elementos e da malha adotados em um intervalo de tempo.

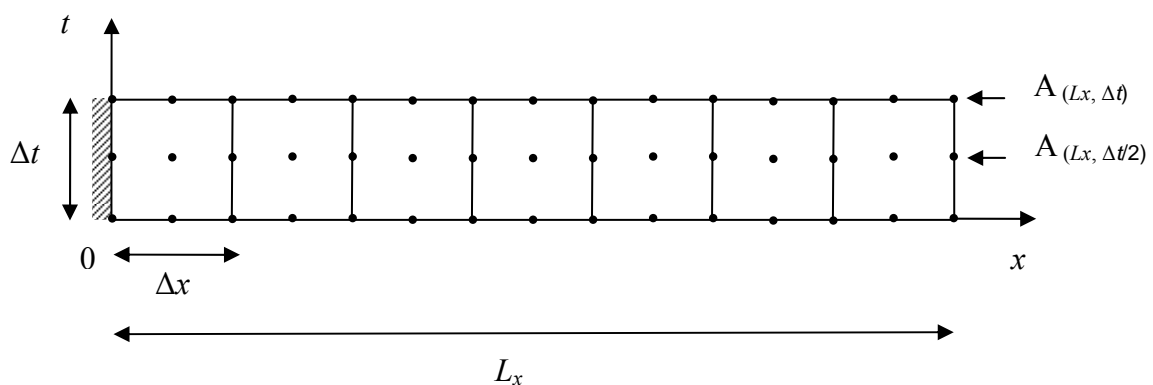


Figura III. 2 – Representação da malha de elementos finitos espaço-tempo.

A seguir é apresentada a forma utilizada para a determinação das funções $\mu^{+/-}(\text{Cour})$ e do expoente α .

III.1.b – Determinação dos Parâmetros

A determinação do parâmetro α e das funções $\mu^{+/-}(Cour)$ é baseada no número de Courant. A faixa de valores escolhida está compreendida entre [0,2 a 4,0], com variação de 0,05.

O parâmetro α é obtido da seguinte forma: fixa-se $\mu(Cour)$ igual a unidade, e para cada número de Courant, testa-se o expoente α com os valores de 0,25, 0,50 e 0,75, sendo que o melhor ajuste das curvas objetivo, ou seja, a velocidade ao longo do tempo e a tensão σ_x ao longo da barra, é obtido para $\alpha = 0,50$. Essa avaliação é feita através do menor erro quadrático entre as curvas analíticas e as curvas obtidas com a formulação.

O valor de Δt é calculado de modo a atender o número de Courant, conforme definido anteriormente. Assim, com o valor do expoente α encontrado, realiza-se a determinação das funções $\mu^{+/-}(Cour)$, da seguinte forma: para cada número de Courant dessa faixa [0,2 a 4,0], são testados vários valores para essas funções, sendo escolhido como o valor representativo, o valor que produziu o menor erro quadrático em relação à solução analítica para velocidade e para a tensão σ_x . Isto permite traçar uma curva que descreve o comportamento de $\mu^{+/-}(Cour)$ em função do número de Courant. A Figura III. 3 apresenta os valores que produziram as curvas mais próximas das respostas analíticas. Nessa figura também é mostrada a curva para o parâmetro do operador de HUGHES e HULBERT (HH), dado pela equação (II. 56).

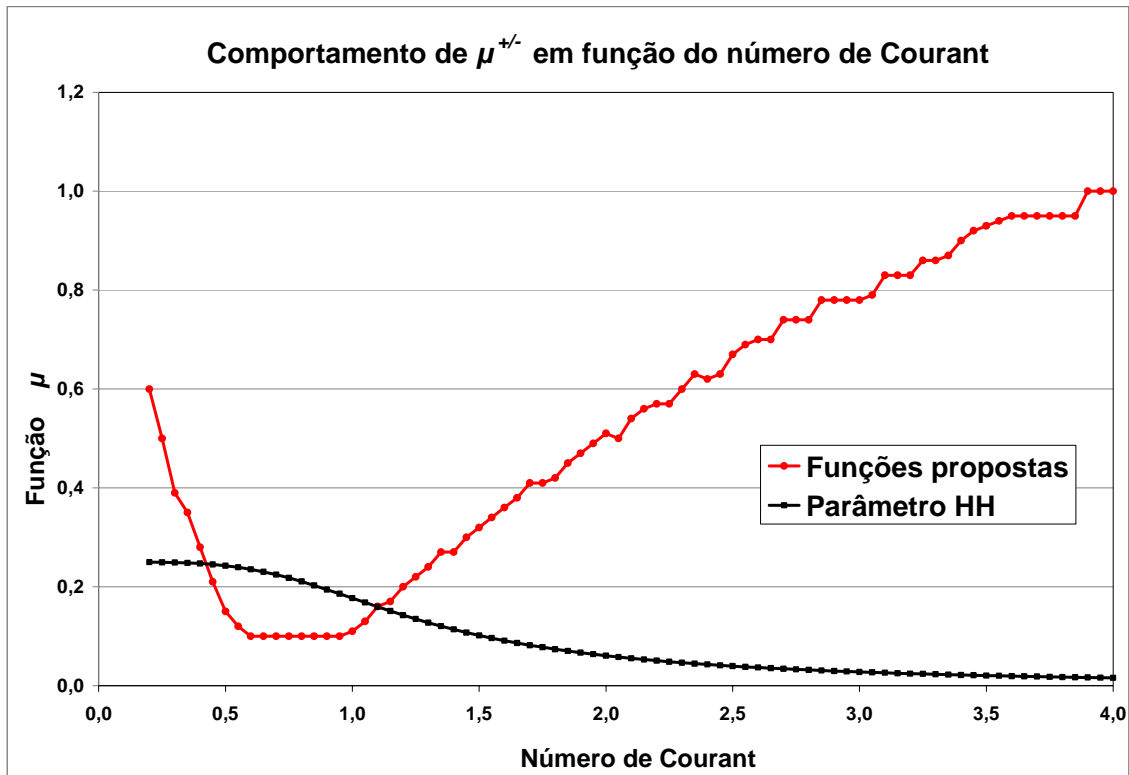


Figura III. 3 – Comportamento das funções $\mu^{+/-}(Cour)$ em função do número de Courant.

Do ponto de vista computacional, os valores obtidos permitem montar uma tabela com o número de Courant versus $\mu^{+/-}(Cour)$, a partir da qual é possível criar uma interpolação linear entre cada um dos pontos do intervalo [0,2 a 4,0], gerando uma curva quase contínua sobre a faixa especificada. Considerando ainda, o aspecto computacional, com esses valores conhecidos, pode-se montar uma outra tabela contendo os coeficientes angular, a_n , e linear, b_n , da reta que interpola cada subintervalo, montada uma única vez no início do programa, tornando assim, mais rápido o cálculo de $\mu^{+/-}(Cour)$ para qualquer ponto da faixa escolhida. A seguir, na Figura III. 4 é apresentado o esquema para detecção do intervalo n , assim como, o cálculo da respectiva função que interpola os valores de $\mu^{+/-}(Cour)$ no intervalo, sendo ambos dados por:

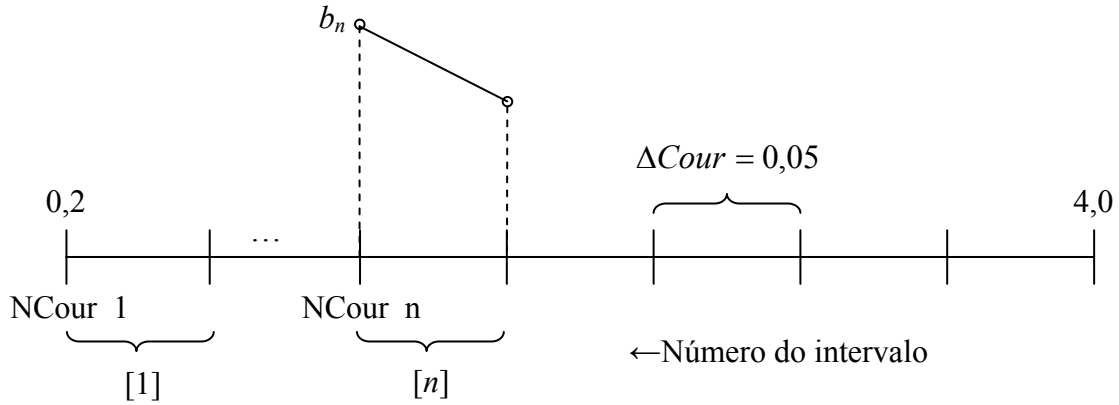


Figura III. 4 – Esquema de localização e interpolação dos valores das funções $\mu^{+/-}(Cour)$ em qualquer ponto do intervalo [0,2; 4,0].

$$n = \frac{Ncour - Ncour_1}{\Delta Cour} + 1 \quad (III. 8)$$

$$\mu(Ncour) = a_n(Ncour - Ncour_n) + b_n \quad (III. 9)$$

Deve-se destacar que esta forma de se obter a função $\mu(Cour)$, através de um processo de busca e interpolação, é mais econômica em termos de cálculo (para malhas com milhares de graus de liberdade) do que o operador apresentado por HUGHES e HULBERT, [28] e [29], que utiliza uma expressão analítica que envolve raiz quadrada e a quarta potência do número de Courant, as quais são implementadas através de séries de potência.

III.1.c – Método de Estabilização Tipo GLS

A formulação GLS foi aplicada juntamente com o método descontínuo TDG, sem o operador de captura, entretanto somente o termo de estabilização não é suficiente para reduzir as oscilações presentes na resposta, uma vez que não controla a derivada segunda temporal.

Uma vez determinados os parâmetros do operador de captura, estudou-se a influência do termo de estabilização GLS sobre os resultados. Após a realização dos testes, notou-se que não é necessário adicionar esse termo sobre toda a faixa de Courant avaliada, sendo aplicado apenas sobre uma parte restrita, o que para malhas com elevado número de graus de liberdade produz economia no processamento quando comparado com a formulação proposta por HUGHES e HULBERT, que utiliza sempre o termo de estabilização. Assim, para o operador de captura proposto, os testes realizados com termo GLS revelaram que a faixa de valores de Courant sobre a qual se faz necessário o uso desse tipo de estabilização está compreendida no intervalo [0,2 a 0,7].

A contribuição das matrizes [GLS] e [DC] pode ser vista como:

$$\mu_{GLS}(Cour)[GLS] + \mu^{-}(Cour)[DC] \quad (III. 10)$$

de outra forma:

$$\mu^{-}(Cour)(Fracao_{GLS}[GLS] + [DC]) \quad (III. 11)$$

onde, $Fracao_{GLS}$ ficou restrita a um valor entre 0 e 1, ou seja, $\mu_{GLS}(Cour)$ é uma fração da função $\mu^{-}(Cour)$. Essa abordagem permite pensar no parâmetro $Fracao_{GLS}$ como um ajuste fino da formulação.

A Tabela III.1 apresenta um resumo de todos os valores obtidos para as funções $\mu^{+}(Cour)$ e $\mu^{-}(Cour)$ e o valor da fração GLS para a faixa de valores de Courant considerada, para $\alpha = 0,5$. Nesta tabela também são apresentados o número de passos de tempo para descrever um período e o valor de Δt correspondente.

Tabela III.1 – Resultados da calibração.

Número de Courant	Número de passos para um Período	Δt	Função $\mu^{+/-}(Cour)$	Fração GLS
0,20	1000	4,00E-03	0,600	60%
0,25	800	5,00E-03	0,500	50%
0,30	667	6,00E-03	0,390	50%
0,35	571	7,00E-03	0,350	50%
0,40	500	8,00E-03	0,280	50%
0,45	444	9,00E-03	0,210	40%
0,50	400	1,00E-02	0,150	30%
0,55	364	1,10E-02	0,120	15%
0,60	333	1,20E-02	0,100	5%
0,65	308	1,30E-02	0,100	1%
0,70	286	1,40E-02	0,100	1%
0,75	267	1,50E-02	0,100	-
0,80	250	1,60E-02	0,100	-
0,85	235	1,70E-02	0,100	-
0,90	222	1,80E-02	0,100	-
0,95	211	1,90E-02	0,100	-
1,00	200	2,00E-02	0,110	-
1,05	190	2,10E-02	0,130	-
1,10	182	2,20E-02	0,160	-
1,15	174	2,30E-02	0,170	-
1,20	167	2,40E-02	0,200	-
1,25	160	2,50E-02	0,220	-
1,30	154	2,60E-02	0,240	-
1,35	148	2,70E-02	0,270	-
1,40	143	2,80E-02	0,270	-
1,45	138	2,90E-02	0,300	-
1,50	133	3,00E-02	0,320	-
1,55	129	3,10E-02	0,340	-
1,60	125	3,20E-02	0,360	-
1,65	121	3,30E-02	0,380	-
1,70	118	3,40E-02	0,410	-
1,75	114	3,50E-02	0,410	-
1,80	111	3,60E-02	0,420	-
1,85	108	3,70E-02	0,450	-
1,90	105	3,80E-02	0,470	-
1,95	103	3,90E-02	0,490	-
2,00	100	4,00E-02	0,510	-
2,05	98	4,10E-02	0,500	-
2,10	95	4,20E-02	0,540	-
2,15	93	4,30E-02	0,560	-
2,20	91	4,40E-02	0,570	-
2,25	89	4,50E-02	0,570	-
2,30	87	4,60E-02	0,600	-
2,35	85	4,70E-02	0,630	-
2,40	83	4,80E-02	0,620	-
2,45	82	4,90E-02	0,630	-
2,50	80	5,00E-02	0,670	-

2,55	78	5,10E-02	0,690	-
2,60	77	5,20E-02	0,700	-
2,65	75	5,30E-02	0,700	-
2,70	74	5,40E-02	0,740	-
2,75	73	5,50E-02	0,740	-
2,80	71	5,60E-02	0,740	-
2,85	70	5,70E-02	0,780	-
2,90	69	5,80E-02	0,780	-
2,95	68	5,90E-02	0,780	-
3,00	67	6,00E-02	0,780	-
3,05	66	6,10E-02	0,790	-
3,10	65	6,20E-02	0,830	-
3,15	63	6,30E-02	0,830	-
3,20	63	6,40E-02	0,830	-
3,25	62	6,50E-02	0,860	-
3,30	61	6,60E-02	0,860	-
3,35	60	6,70E-02	0,870	-
3,40	59	6,80E-02	0,900	-
3,45	58	6,90E-02	0,920	-
3,50	57	7,00E-02	0,930	-
3,55	56	7,10E-02	0,940	-
3,60	56	7,20E-02	0,950	-
3,65	55	7,30E-02	0,950	-
3,70	54	7,40E-02	0,950	-
3,75	53	7,50E-02	0,950	-
3,80	53	7,60E-02	0,950	-
3,85	52	7,70E-02	0,950	-
3,90	51	7,80E-02	1,000	-
3,95	51	7,90E-02	1,000	-
4,00	50	8,00E-02	1,000	-

Este capítulo apresentou a formulação do operador de captura e uma metodologia para obtenção de seus parâmetros através de um exemplo numérico aplicado a um problema que possui saltos ao longo do tempo e também do espaço. O exemplo escolhido foi o de uma barra engastada em uma extremidade e livre na outra, submetida a um carregamento compressional, modelada de forma unidimensional.

Para o operador de captura proposto determinou-se os valores das funções $\mu^{+/-}(Cour)$ e do parâmetro α , na faixa de Courant escolhida entre 0,2 até 4,0, em intervalos de 0,05, sem a influência do termo GLS, sendo sua contribuição estudada posteriormente. Verificou-se que para este operador de captura, não é necessário incorporar esse termo sobre toda a faixa testada, ficando sua utilização restrita aos números de Courant menores que 0,7. Notou-se também que a aplicação do termo GLS é incorporada de forma parcial através de um fator multiplicativo, ou seja, quando o

termo GLS é utilizado, sua contribuição na formulação proposta, não é feita de forma total.

Com relação aos termos $Cour^{-4}$ e $Cour^4$ em $\mathbf{W}(W^h)$, equação (III. 7), os testes indicaram que a partir do número de Courant igual a 3,0, o uso de tais termos torna-se importante, melhorando de forma significativa a resposta próximo às descontinuidades, reduzindo o efeito do amortecimento nessa região.

A seguir são apresentados os resultados obtidos para o caso unidimensional.

CAPITULO IV

ANÁLISE NUMÉRICA PARA O

CASO UNIDIMENSIONAL

Este capítulo apresenta os resultados obtidos com a formulação de Galerkin descontínuo no tempo com o operador de captura proposto. Para este trabalho foi desenvolvido um programa de computador em linguagem Fortran, que implementa a formulação descrita nos capítulos anteriores. A seguir são descritas algumas características do método e sua implementação.

A formulação proposta gera um sistema de equações do tipo $[A]\{u_i\} = \{f_i\}$, oriundos da formulação variacional expressa pela equação (II. 47.a), que é desacoplado em cada intervalo de tempo, resultando assim, em um algoritmo de marcha temporal. A matriz $[A]$ contém as parcelas relativas à massa e propriedades elásticas, além das parcelas relativas ao gradiente na variável primária e do termo de salto em sua derivada temporal, cabendo lembrar que esses termos geram parcelas incógnitas e conhecidas. O vetor $\{u_i\}$ representa os deslocamentos no instante t ; e $\{f_i\}$ representa o vetor de termos independentes, que contém as forças de volume, as contribuições das condições de contorno, além da contribuição do gradiente na variável primária e saltos em sua derivada temporal, obtidos no passo de tempo anterior.

O esquema adotado para a solução do sistema de equações é o método direto com eliminação de Gauss. A formulação TDG, por não empregar o operador de captura, permite que se triangularize a matriz do sistema $[A]$ uma única vez, pois a mesma não é alterada durante o processo de marcha, sendo necessário em cada passo de tempo apenas atualizar o vetor de cargas e realizar a retro-substituição. O método de Galerkin descontínuo com o operador de captura, TDG+DC, requer a montagem de um novo sistema de equações a cada passo de tempo, o qual é baseado no resíduo da equação diferencial, e conseqüentemente requer sua triangularização a cada passo, tornando o processo de solução mais lento, porém mais preciso devido à utilização do resíduo.

Para melhorar o desempenho do programa foram implementados: 1) o algoritmo *Reverse Cuthill-McKee (RCM)* [50] e [51]. Este algoritmo tem como objetivo reduzir a largura de banda da matriz do sistema, através da reordenação da numeração dos nós da malha de elementos finitos, isto é obtido através da reordenação do grafo das ligações nodais da malha; e 2) um esquema de armazenamento mais eficiente, que armazena somente os coeficientes não-nulos da matriz, linha por linha, se aproveitando assim, de uma característica das matrizes de elementos finitos, também presente no método de Galerkin descontínuo, que é a esparsidade dos coeficientes na matriz global. Assim, a matriz fica resumida a um vetor que contém somente os coeficientes diferentes de zero, o qual foi implementado, de tal forma que, não é necessário montar o sistema global para posteriormente, percorrê-lo e identificar os coeficientes não nulos para se obter o vetor de armazenamento. À medida que as matrizes locais de elementos são montadas, seus coeficientes são inseridos nas posições corretas no vetor, o qual está sempre ordenado por linha e coluna. As posições são criadas dinamicamente e mantidas na memória, através de listas duplamente encadeadas utilizando-se ponteiros. Destaca-se que as operações de triangularização da matriz, retro-substituição e produto matriz-vetor são adaptadas para esse esquema de armazenamento. Dessa forma, gera-se uma grande economia de memória, tendo como consequência direta, a redução do tempo total de análise.

A avaliação do desempenho numérico da formulação proposta foi feita utilizando dois exemplos: a) No primeiro é considerada uma barra prismática elástica e homogênea engastada em uma extremidade e submetida a um carregamento compressional aplicado longitudinalmente na extremidade livre; b) O segundo exemplo analisa uma barra prismática e não-homogênea, engastada em uma extremidade submetida ao mesmo carregamento. Em ambos os exemplos, serão aplicados dois carregamentos, [43]. Em nenhum caso é considerado o amortecimento físico. A escolha do exemplo homogêneo se deve ao fato de o mesmo possuir solução analítica para o deslocamento e velocidade para um carregamento do tipo Heaviside, [43] e [5], e ser útil como teste da formulação desenvolvida, pois a velocidade apresenta saltos em sua solução temporal.

Os métodos usados para comparação são:

- HHT, com os parâmetros $\alpha_f = -0,1$, $\beta = 0,3025$ e $\gamma = 0,6$;

- TDG, ou seja, a formulação de Galerkin descontínuo no tempo, sem o operador de captura;
- TDG+GLS+DC, a formulação descontínua usando o operador de captura proposto, DC (Discontinuity Capturing) e o termo GLS, este último usado quando necessário, lembrando que o seu uso é restrito a faixa de Courant [0,2 a 0,7];
- TDG+HH, ou seja, a formulação descontínua, o termo de estabilização GLS, e mais o operador de captura apresentado em [29]. Lembrando que o termo GLS contribui em todos os números de Courant testados. Nos gráficos, apesar dessa formulação incluir o termo de estabilização, a legenda será referenciada apenas como TDG+HH (HUGHES e HULBERT).

Cabe destacar que os resultados apresentados a seguir, são obtidos para valores do número de Courant diferentes daqueles usados na determinação dos parâmetros, $\mu^{+/-}(Cour)$, descrito no capítulo anterior. Ressalta-se também que para o método semi-discreto (HHT) foram testados outros parâmetros sem obter melhora nos resultados.

IV.1 – BARRA HOMOGÊNEA UNIDIMENSIONAL

Seja uma barra prismática engastada em sua extremidade esquerda e sujeita a um carregamento compressional uniformemente distribuído sobre a área da extremidade livre à direita, conforme Figura IV. 1. As dimensões da barra são: o comprimento $L_x=4,0m$; a altura de $0,2m$ e a seção transversal quadrada com área de $0,04m^2$. As propriedades físicas do material são o módulo de elasticidade e a massa específica, dados por $E=1,0N/m^2$ e $\rho=1,0kg/m^3$, respectivamente; sendo a velocidade de propagação do meio, na direção longitudinal, dada por $c=1,0 m/s$.

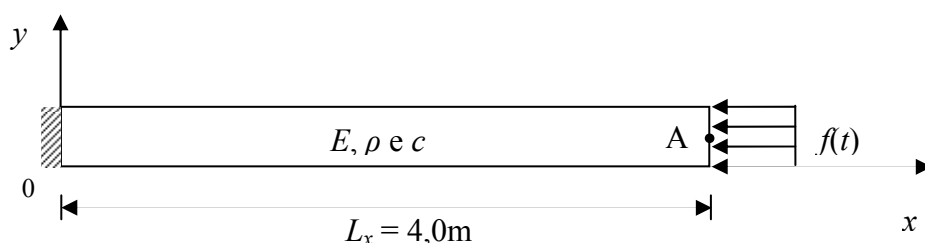


Figura IV. 1 – Barra homogênea engastada na extremidade esquerda.

IV.1.a – Discretização por Elementos Espaço-Tempo

A solução deste problema, via a formulação de Galerkin descontínuo no tempo, é feita considerando a barra como um domínio unidimensional. Nesta formulação, tanto o domínio espacial, quanto o temporal são discretizados utilizando-se elementos espaço-tempo, diferentemente da formulação semi-discreta, que utiliza o método de separação de variáveis.

Para o método HHT utilizou-se o MEF padrão com 200 elementos com interpolação quadrática, ou seja, elementos unidimensionais com três pontos nodais. Já para os métodos que utilizam a formulação descontínua, ou seja, TDG, TDG+GLS+DC e TDG+HH, utilizou-se uma malha com 200 elementos espaço-tempo para descrever a barra. Devido a questões de estabilidade, a formulação requer elementos com interpolação quadrática no tempo e no espaço, ou seja, elementos retangulares de nove nós, o que resultou em 1.203 pontos nodais para essa malha. A seguir, na Figura IV. 2, é apresentado um esquema da malha espaço-tempo utilizada.

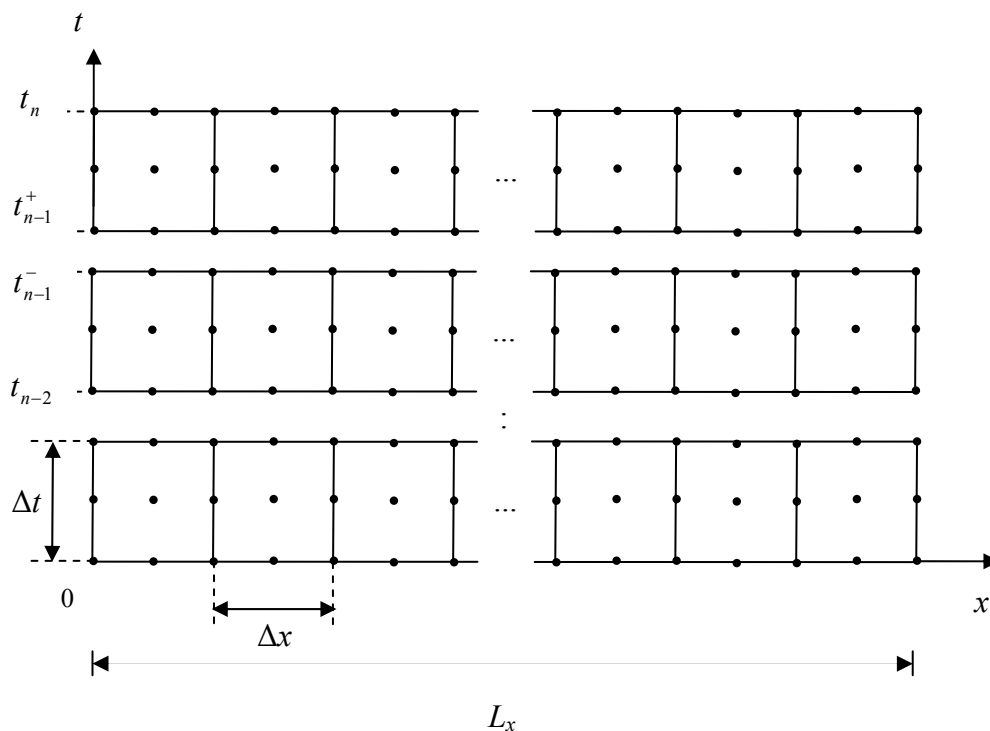


Figura IV. 2 – Discretização da barra unidimensional por elementos finitos espaço-tempo.

As variáveis usadas na comparação entre os quatro métodos são: o deslocamento e a velocidade ao longo do tempo na extremidade livre, ponto A, e a tensão σ_x ao longo da barra para um instante de tempo fixo, o qual foi escolhido como sendo 3s após o início da análise. O cálculo dessas variáveis é feito após a solução do sistema de equações.

Esses resultados foram obtidos para os números de Courant indicados na Tabela IV.1, escolhidos de tal modo a não coincidirem com os valores de Courant para os quais as funções $\mu^{+/-}(Cour)$ foram calibradas. Nesses pontos intermediários é utilizada a interpolação linear apresentada no capítulo anterior. O tempo total de análise em todos os testes realizados foi de 16s. A Tabela IV.1 apresenta o número de passos de tempo contidos em um período e o valor do passo de tempo, o qual depende do número de Courant. Cabe destacar que para Courant 0,27 e 0,57 utiliza-se a formulação TDG+GLS+DC, enquanto que no restante utiliza-se apenas a formulação TDG+DC.

Tabela IV.1 – Parâmetros dos testes realizados.

Número de Courant	Número de passos contidos em um Período	Δt
0,27	2962	5,40E-03
0,57	1405	1,14E-02
0,87	921	1,74E-02
1,03	778	2,06E-02
1,57	511	3,14E-02
2,03	395	4,06E-02
2,73	294	5,46E-02
3,73	215	7,46E-02

Os métodos são testados utilizando-se dois tipos de carregamento, ilustrados na Figura IV. 3:

Carregamento 1 (Heaviside), aplicado durante todo o tempo de análise, esse carregamento gera um salto na velocidade ao longo do tempo e na tensão σ_x ao longo da barra;

Carregamento 2 (carga de curta duração), a aplicação dessa carga no modelo é considerada apenas no primeiro intervalo de tempo e provoca um gradiente alto no deslocamento.

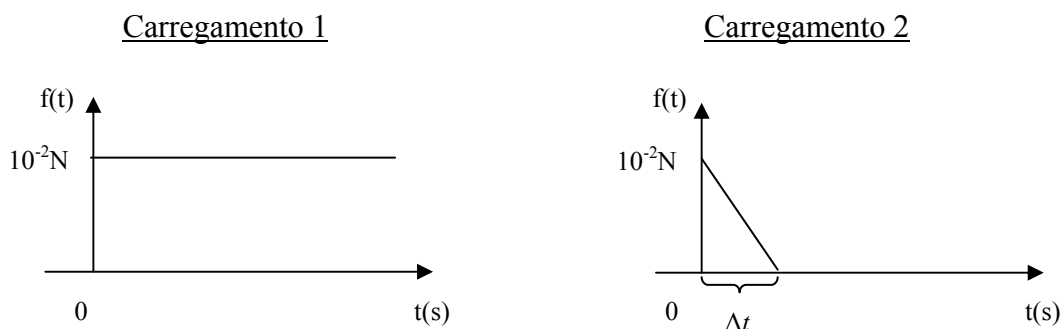


Figura IV. 3 – Carregamentos aplicados na extremidade livre.

A seguir são apresentados os resultados, da Figura IV. 6 até Figura IV. 13, obtidos para a barra homogênea sob ação do carregamento 1 em um período de análise. A Figura IV. 4 ilustra a disposição dos gráficos apresentados nas figuras. Para melhor visualização dos resultados obtidos com a formulação proposta, no 4º quadrante de cada figura é repetido o gráfico da velocidade ao longo do tempo sem a interferência dos métodos TDG e HHT.

Deslocamento ao longo do tempo Todos os métodos	Tensão σ_x ao longo da barra Todos os métodos
Velocidade ao longo do tempo Todos os métodos	Repetição da velocidade ao longo do tempo Apenas TDG+DC e TDG+HH

Figura IV. 4 – Disposição dos gráficos nas figuras para o carregamento 1.

Na seqüência, Figura IV. 14 a Figura IV. 17, são apresentados os resultados obtidos com o carregamento 1, após um longo tempo de análise, para isso foram considerados 100 períodos. Os gráficos ilustram os seis primeiros e os seis últimos períodos, sendo considerados apenas os números de Courant 0,57, 1,03, 2,03 e 3,33, para avaliar o amortecimento numérico dos métodos ao longo do tempo.

Deslocamento ao longo do tempo Primeiros 6 Períodos	Deslocamento ao longo do tempo Últimos 6 Períodos
Velocidade ao longo do tempo Primeiros 6 Períodos	Velocidade ao longo do tempo Últimos 6 Períodos

Figura IV. 5 – Disposição dos gráficos nas figuras para 100 períodos de análise.

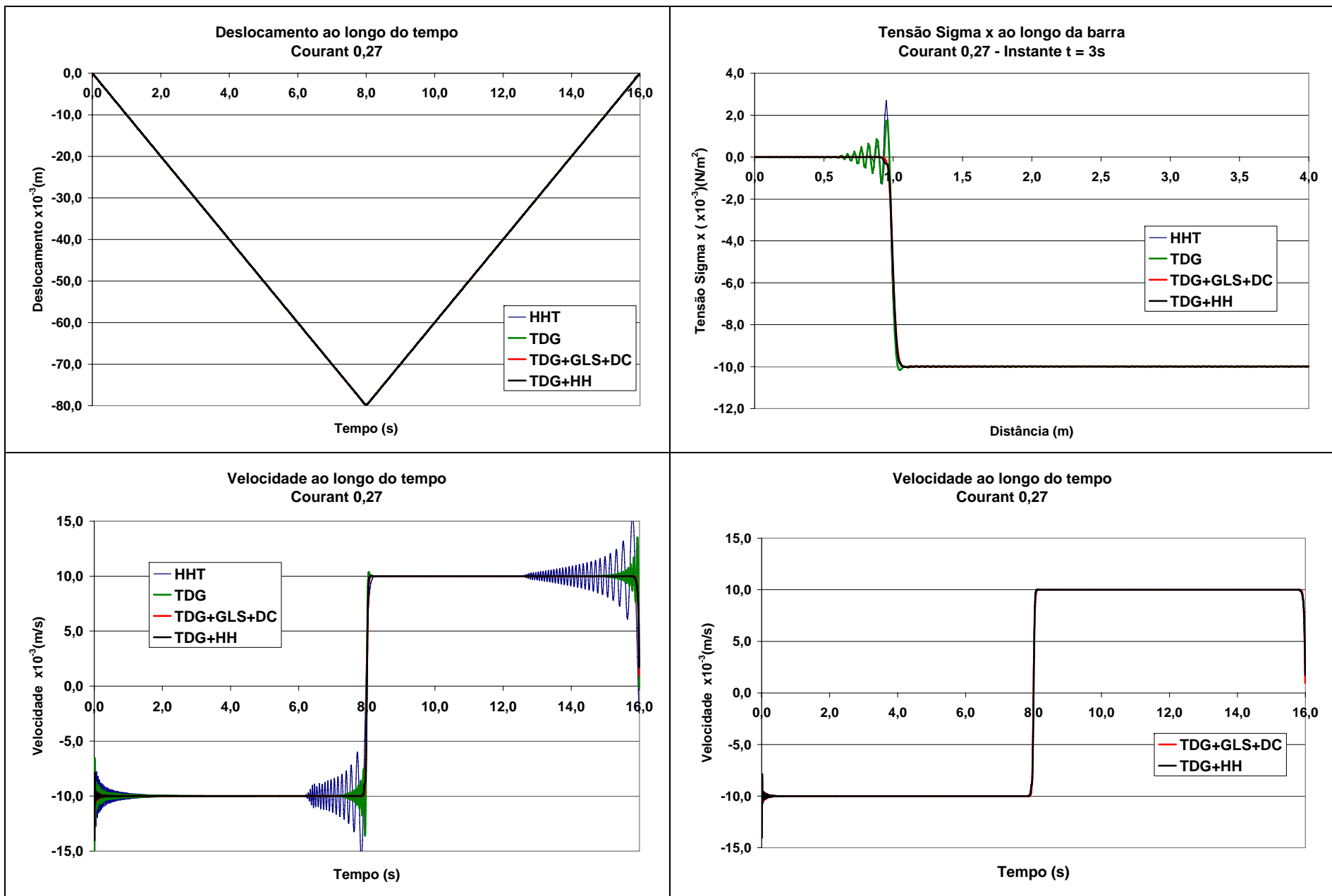


Figura IV. 6 – Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo Heaviside, para o número de Courant 0,27.

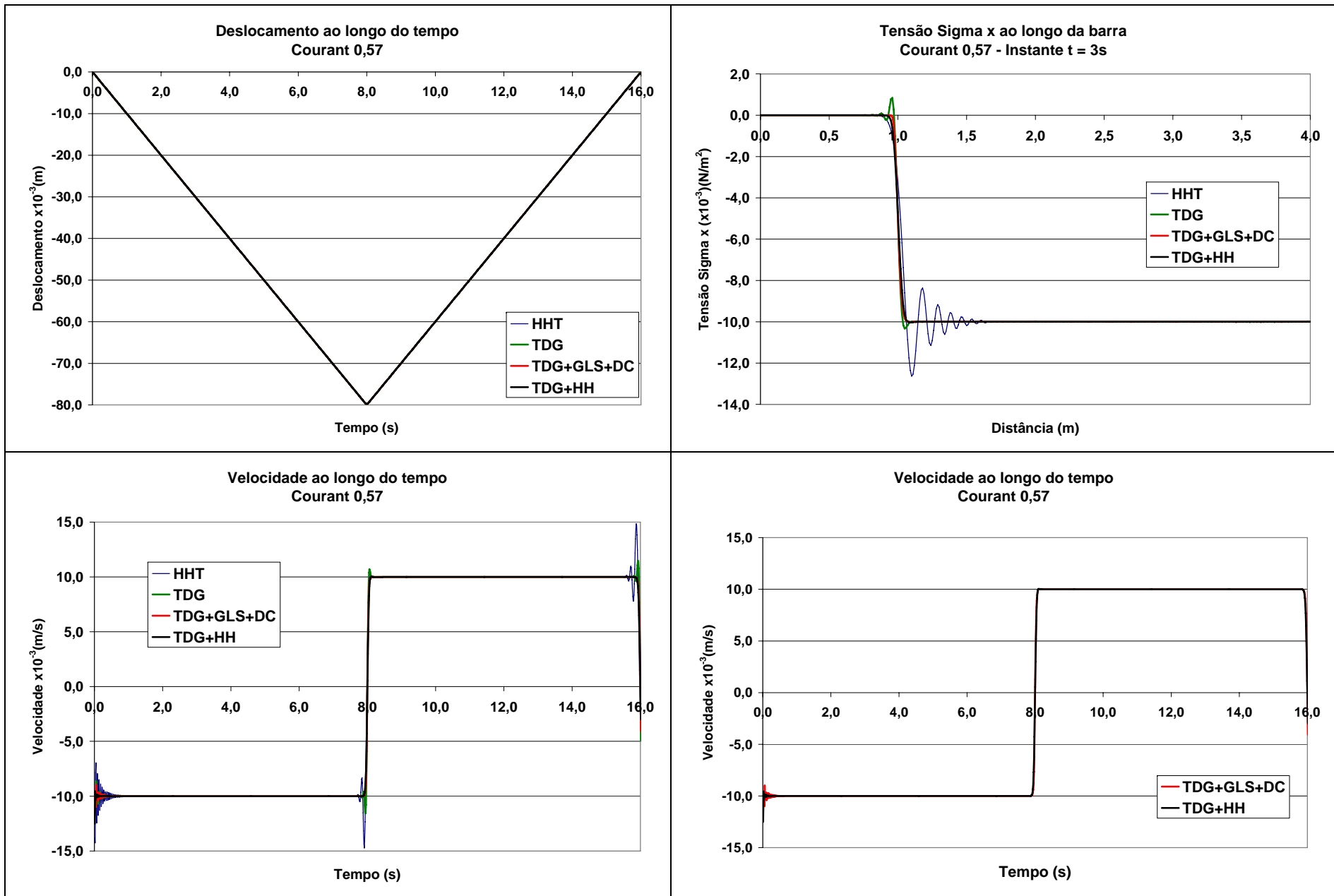


Figura IV. 7 – Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo Heaviside, para o número de Courant 0,57.

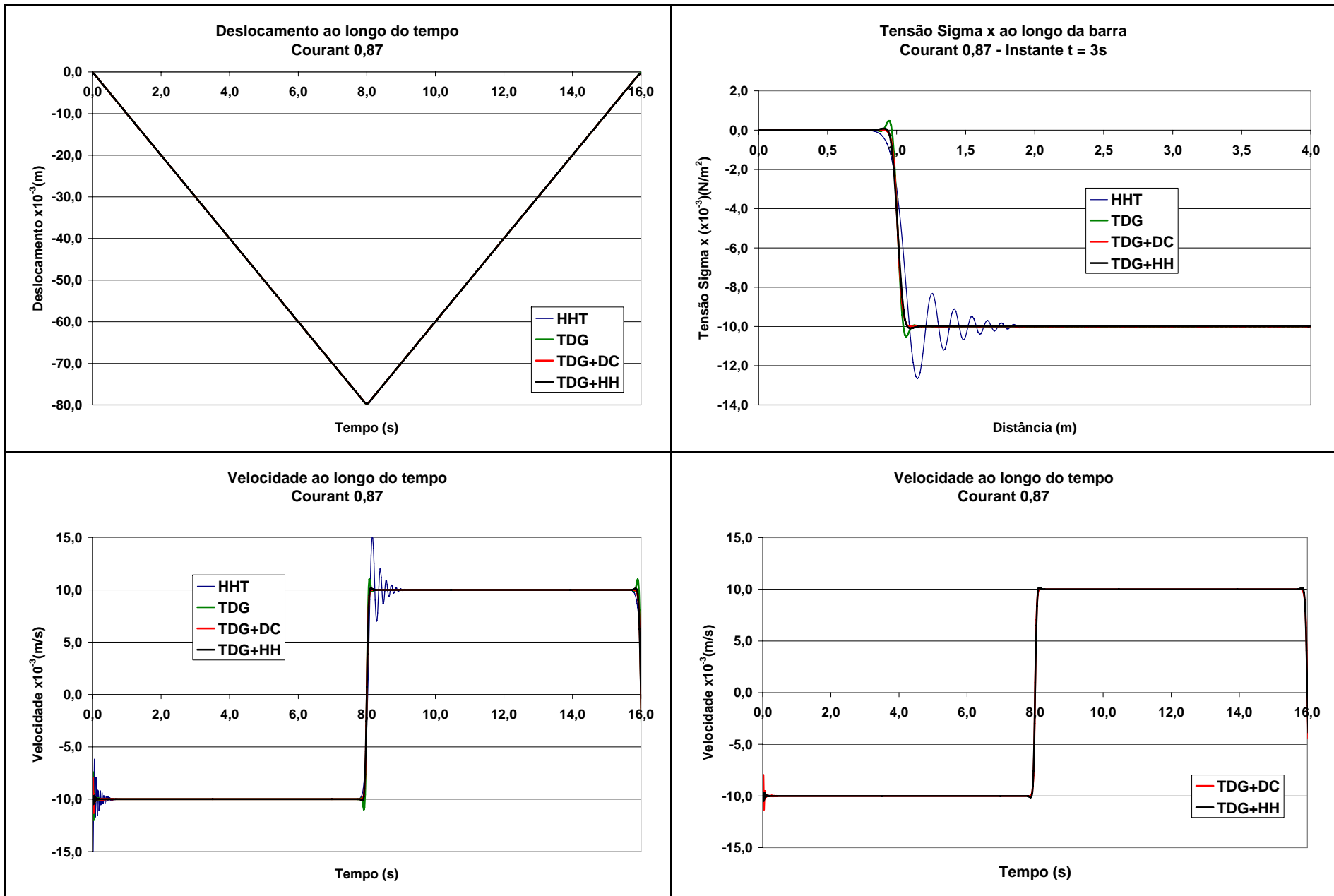


Figura IV. 8 – Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo Heaviside, para o número de Courant 0,87.

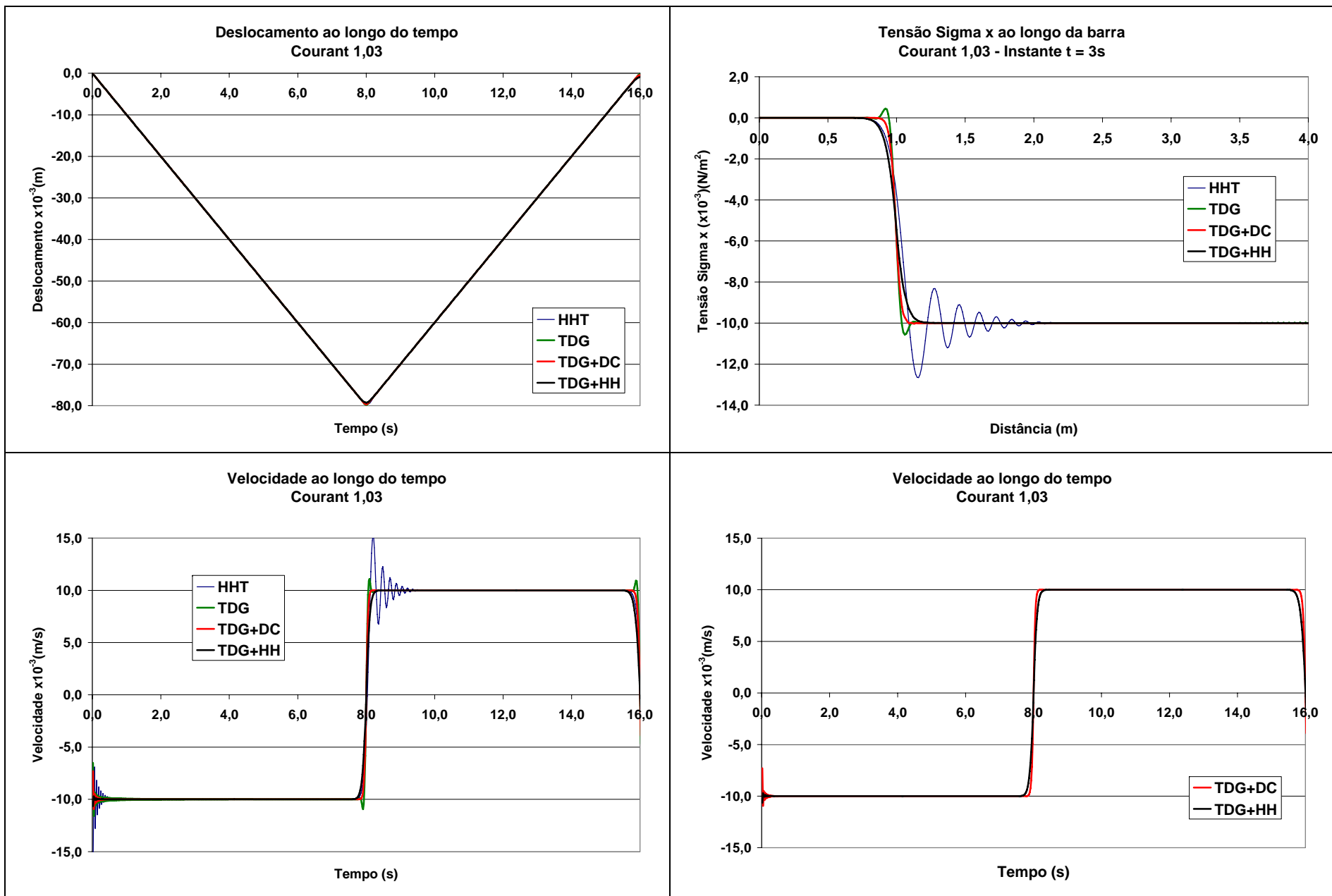


Figura IV. 9 – Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo Heaviside, para o número de Courant 1,03.

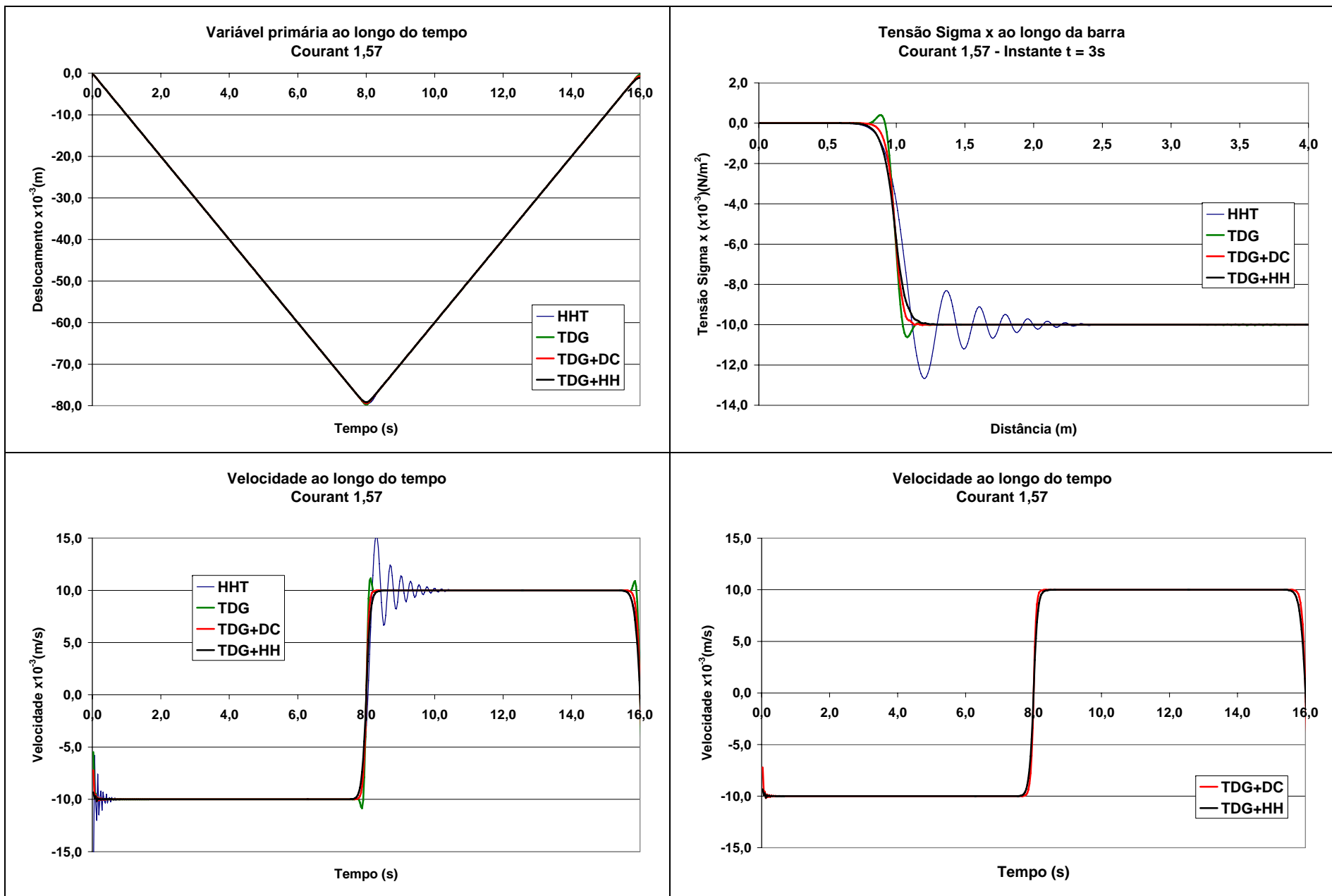


Figura IV. 10 – Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo Heaviside, para o número de Courant 1,57.

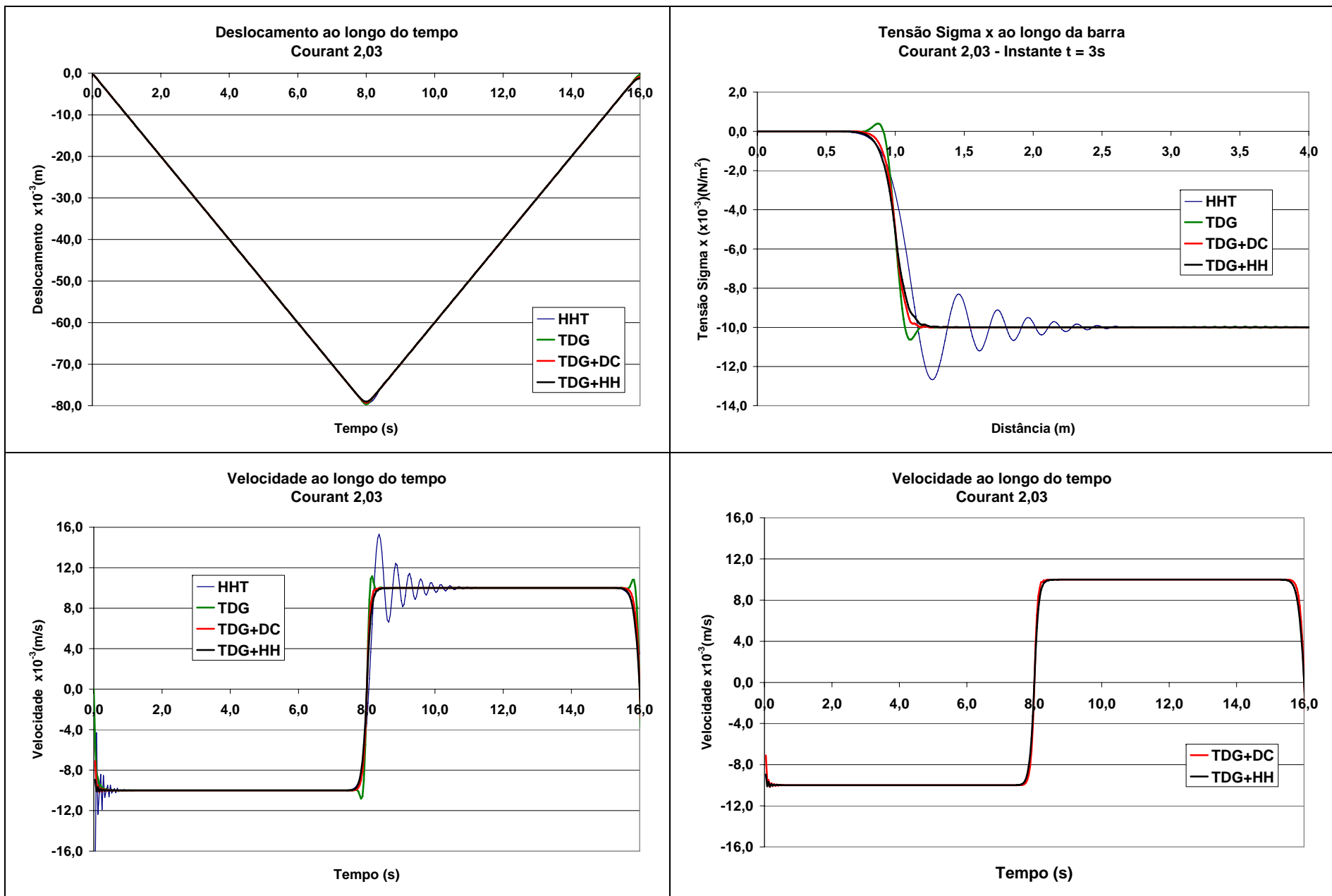


Figura IV. 11 – Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo Heaviside, para o número de Courant 2,03.

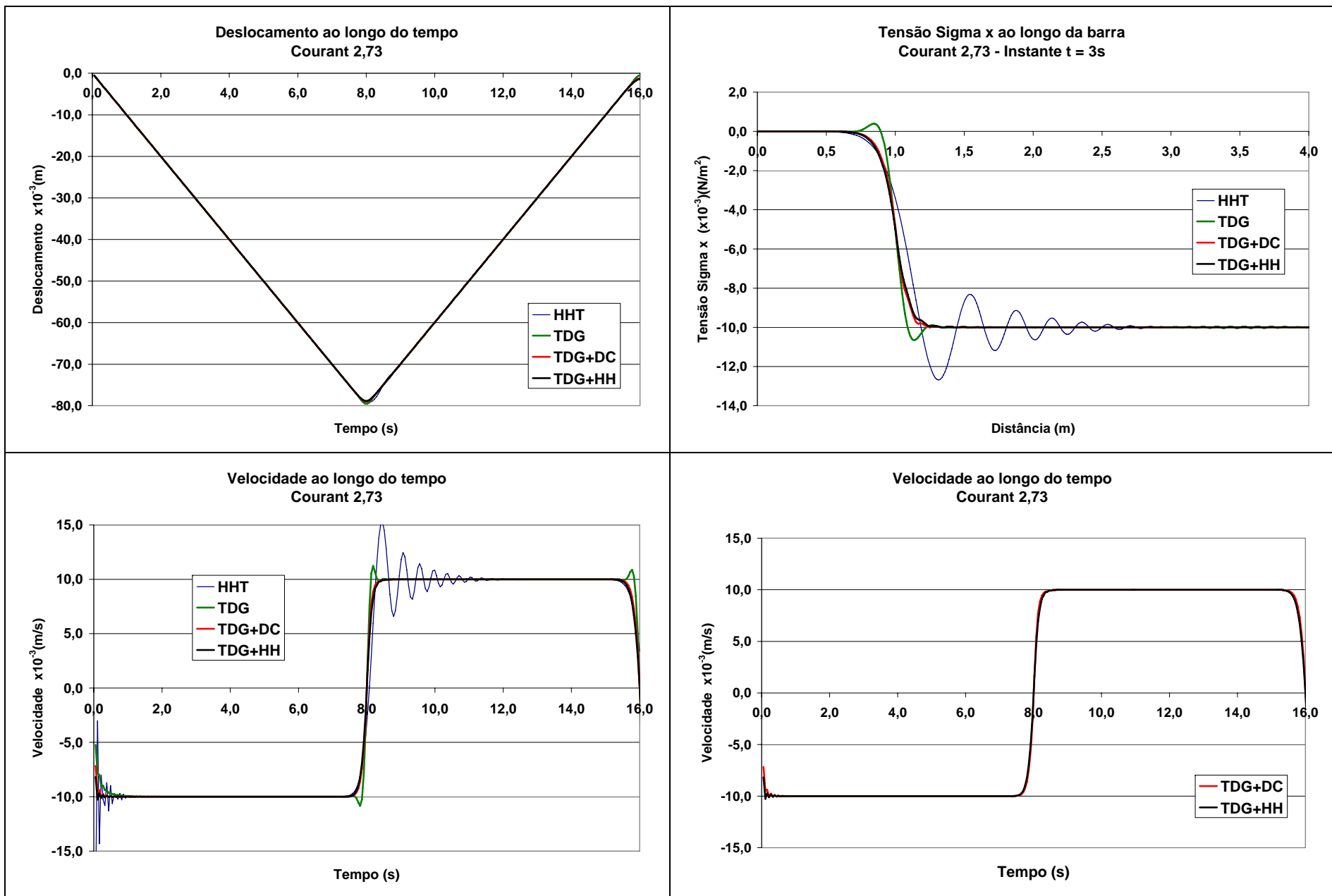


Figura IV. 12 – Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo Heaviside, para o número de Courant 2,73.

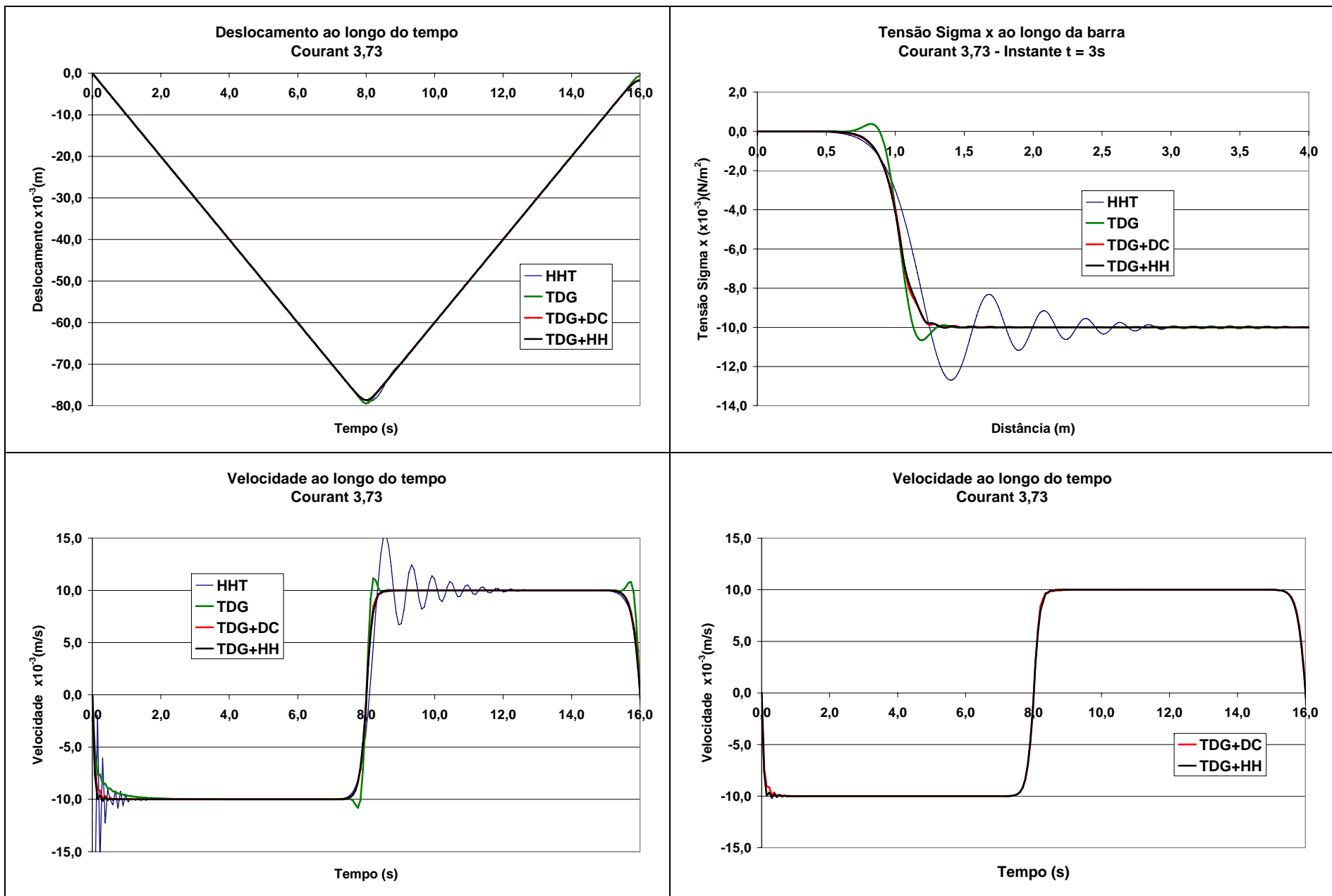


Figura IV. 13 – Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo Heaviside, para o número de Courant 3,73.

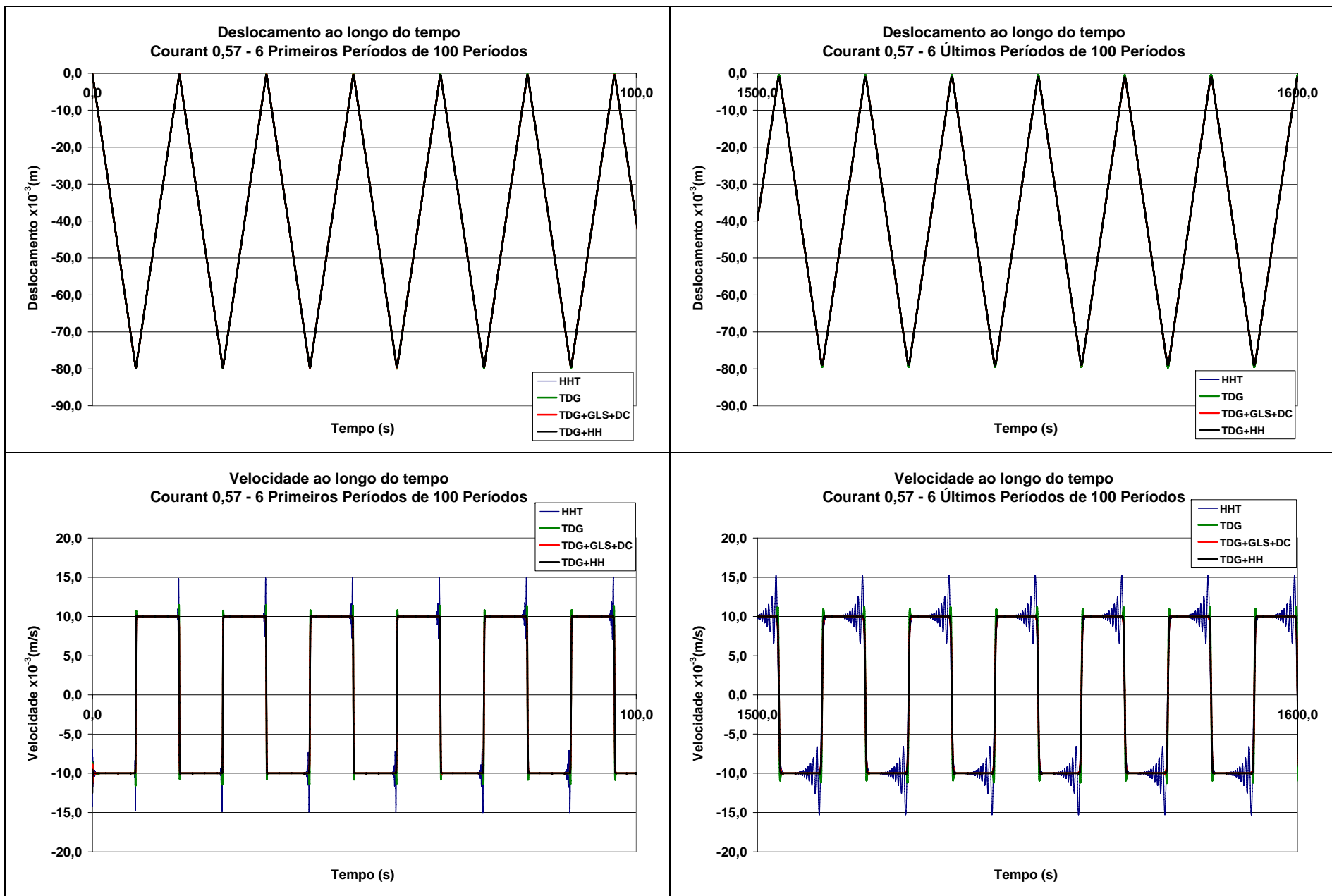


Figura IV. 14 – Comportamento das variáveis ao longo de 100 períodos de evolução, para o número de Courant 0,57.

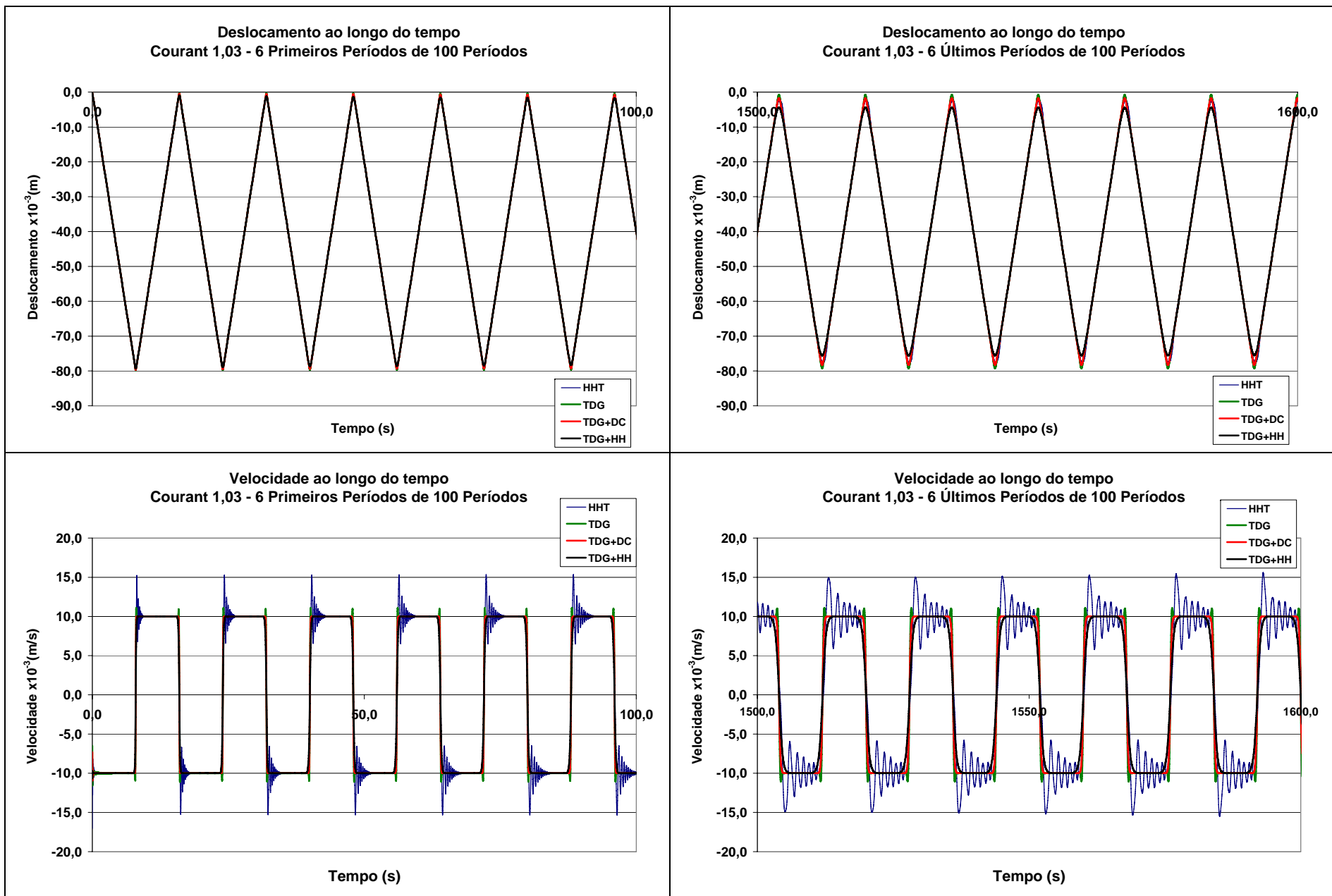


Figura IV. 15 – Comportamento das variáveis ao longo de 100 períodos de evolução, para o número de Courant 1,03.

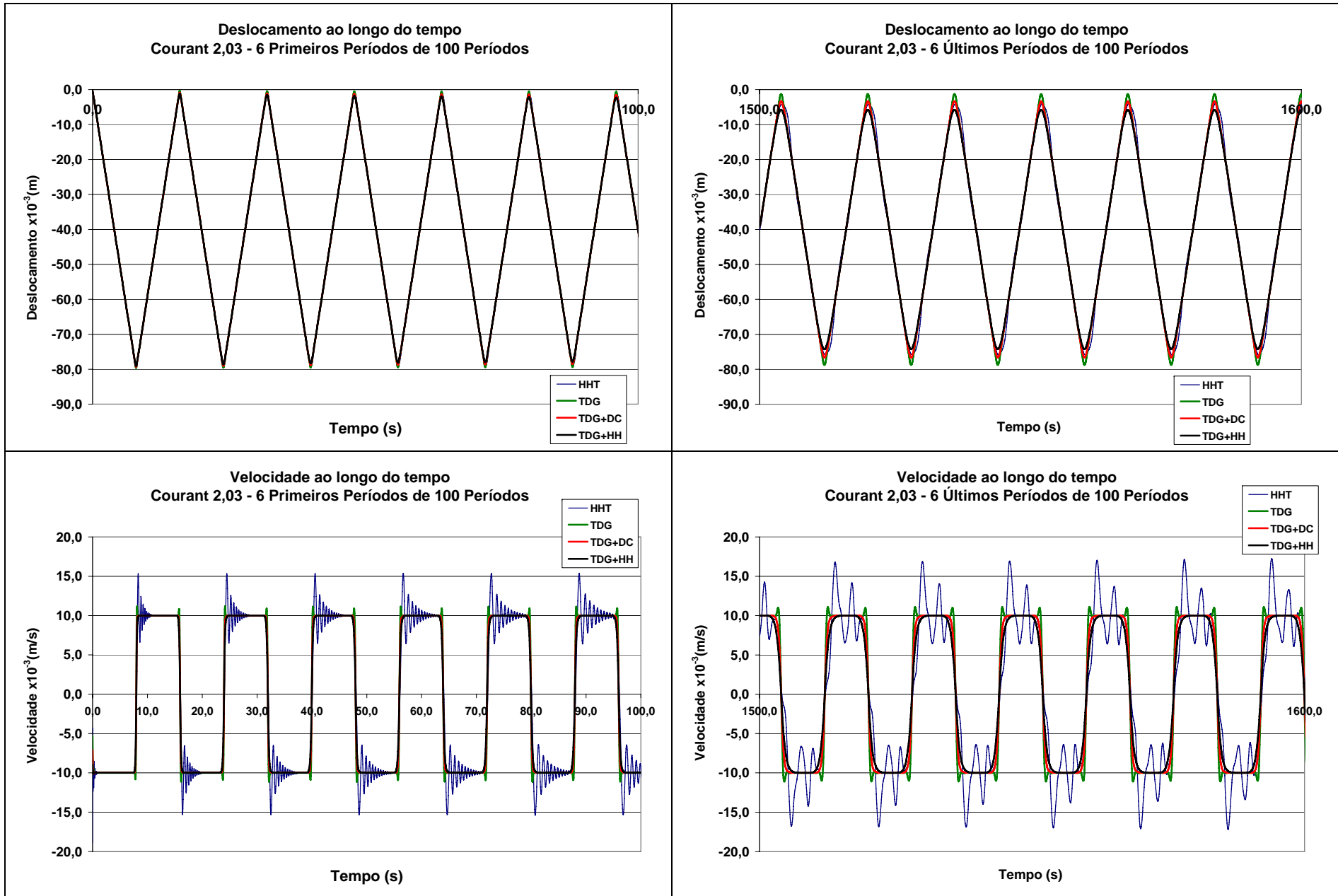


Figura IV. 16 – Comportamento das variáveis ao longo de 100 períodos de evolução, para o número de Courant 2,03.

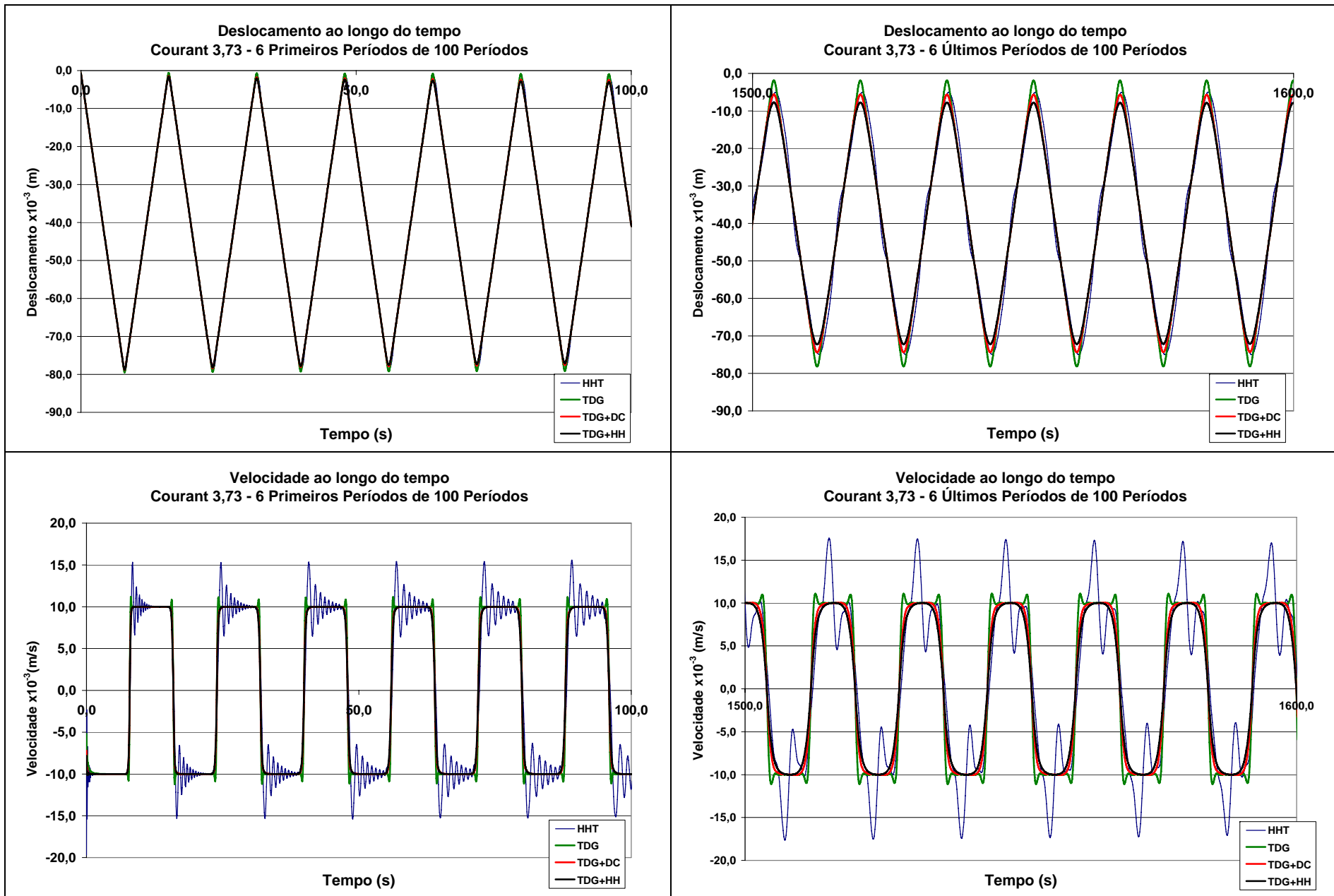


Figura IV. 17 – Comportamento das variáveis ao longo de 100 períodos de evolução, para o número de Courant 3,73.

IV.1.b – Comentários sobre os resultados da barra homogênea com carregamento 1

O deslocamento ao longo do tempo foi bem representado por todos os métodos para Courant variando de 0,27 a 2,03, produzindo praticamente o mesmo resultado. Acima de 2,03, perceber-se uma ligeira defasagem produzida pelo método HHT.

Analisando a velocidade ao longo do tempo e a tensão σ_x ao longo da barra, nota-se que o método HHT não consegue reproduzir a descontinuidade nessas duas variáveis, oscilando demasiadamente em todos os casos. O método de Galerkin descontínuo no tempo (TDG), sem os termos de estabilização e de captura, apresentou para a faixa de Courant de 0,57 a 3,73, uma única oscilação, próximo à descontinuidade (tanto antes quanto depois), cujo valor máximo é, na pior situação, para Courant 0,57, igual a 10% da solução analítica. Abaixo de Courant 0,57, essa oscilação não só tende a aumentar em amplitude, quanto em número de ciclos próximo a descontinuidade, mas ainda assim, o TDG fornece resultados que os obtidos com o método HHT.

Para as faixas de Courant [0,27 a 0,87] e [2,73 a 3,73], ambas os operadores de captura, TDG+DC e TDG+HH, apresentaram resultados muito próximos para a velocidade e para a σ_x , já no intervalo de [1,03 a 2,03], a formulação desenvolvida nesse trabalho apresentou um melhor resultado para as duas variáveis em questão, ou seja, menor amortecimento numérico.

Para este carregamento testou-se também o comportamento do deslocamento e velocidade ao longo de 100 períodos de evolução. Pelos gráficos nota-se que para os números de Courant 1,03, 2,03 e 3,73, tanto a variável primária quanto sua derivada temporal foram bem representados pela formulação proposta, apresentando um comportamento melhor, ou seja, menos amortecido do que a formulação TDG+HH, ressaltando que nessa faixa de Courant, o operador proposto não utiliza o termo GLS, conforme descrito no Capítulo III.

O método de Galerkin descontínuo, sem operador de captura, foi o que apresentou menor amortecimento ao longo do tempo entre todos os métodos, para todos os casos testados, mas apresenta uma pequena oscilação próxima a descontinuidade na derivada

temporal. O método HHT, além de apresentar oscilações na velocidade em todos os testes realizados, também apresentou amplificação da amplitude em torno, às vezes superior a 50% no final do período de análise. Já a variável primária começou a exibir uma defasagem em relação aos outros métodos, para Courant 2,03 e 3,73.

A seguir, Figura IV. 19 a Figura IV. 26, são apresentados os resultados obtidos para a barra homogênea submetida ao carregamento de curta duração, tipo impulso. A disposição dos gráficos de deslocamento, velocidade e tensão é dada na Figura IV. 18.

Deslocamento ao longo do tempo Todos os métodos	Repetição do deslocamento ao longo do tempo Apenas TDG+DC e TDG+HH
Velocidade ao longo do tempo Todos os métodos	Tensão σ_x ao longo da barra Todos os métodos

Figura IV. 18 – Disposição dos gráficos nas figuras para o carregamento 2.

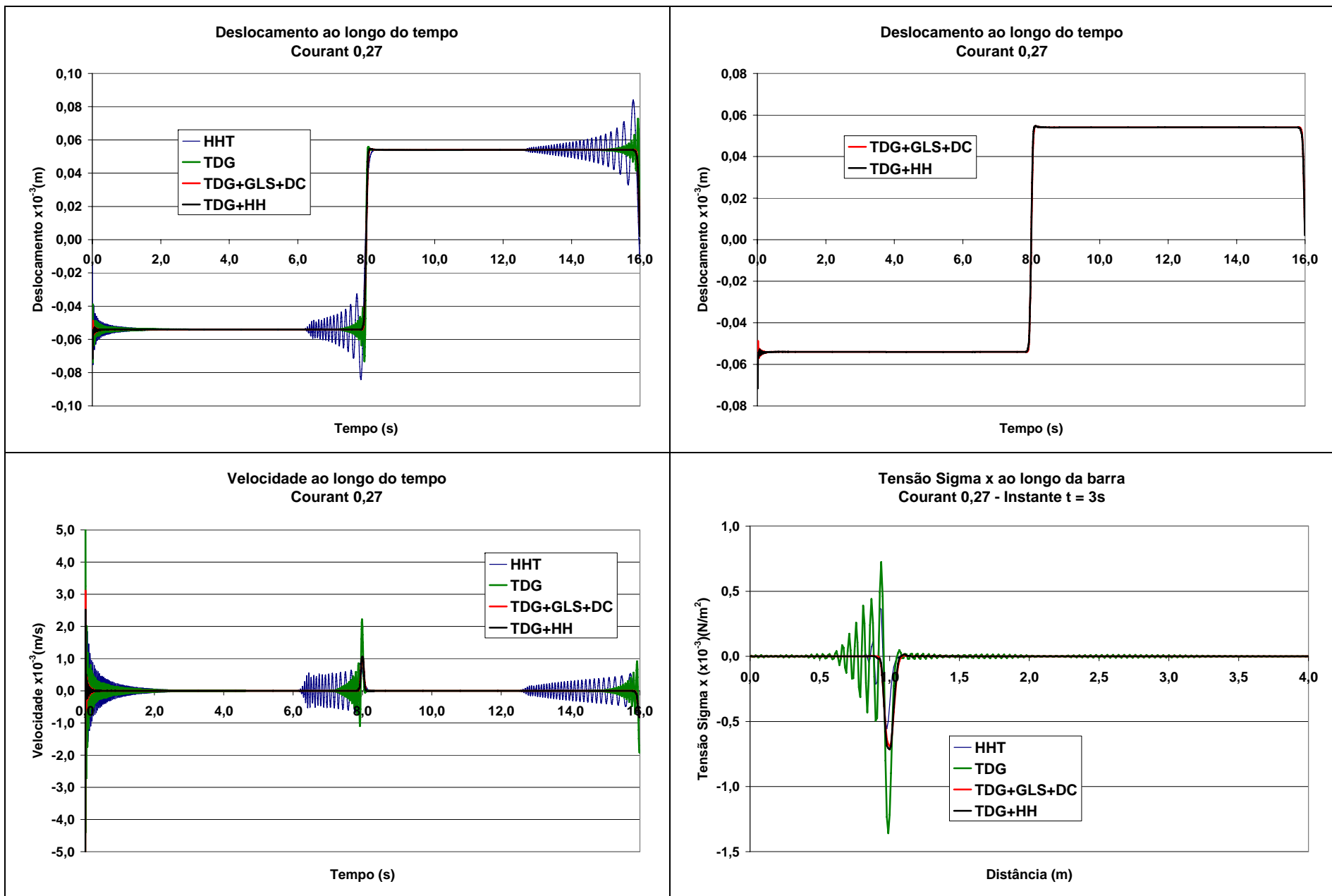


Figura IV. 19 – Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo impulso, para o número de Courant 0,27.

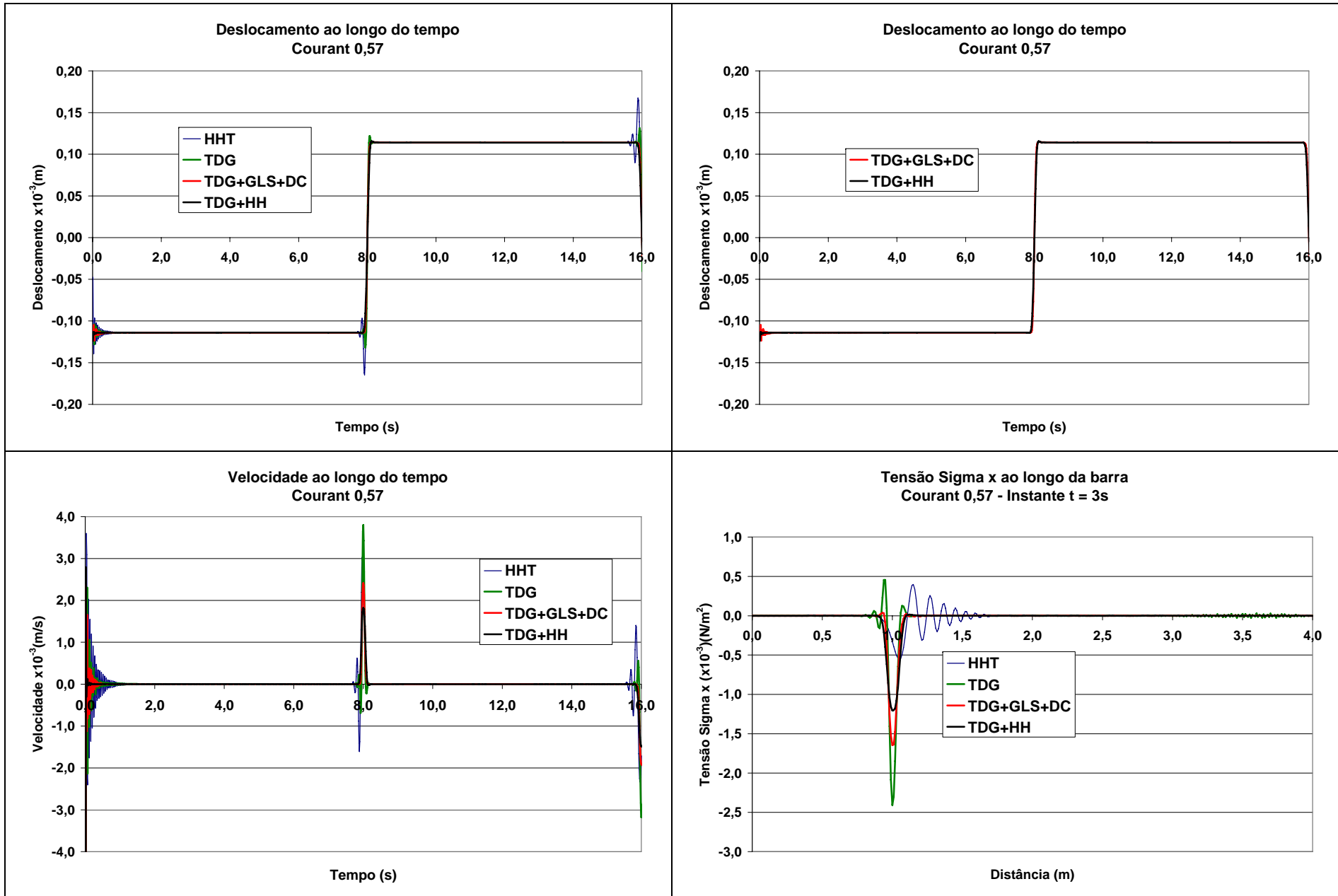


Figura IV. 20 – Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo impulso, para o número de Courant 0,57.

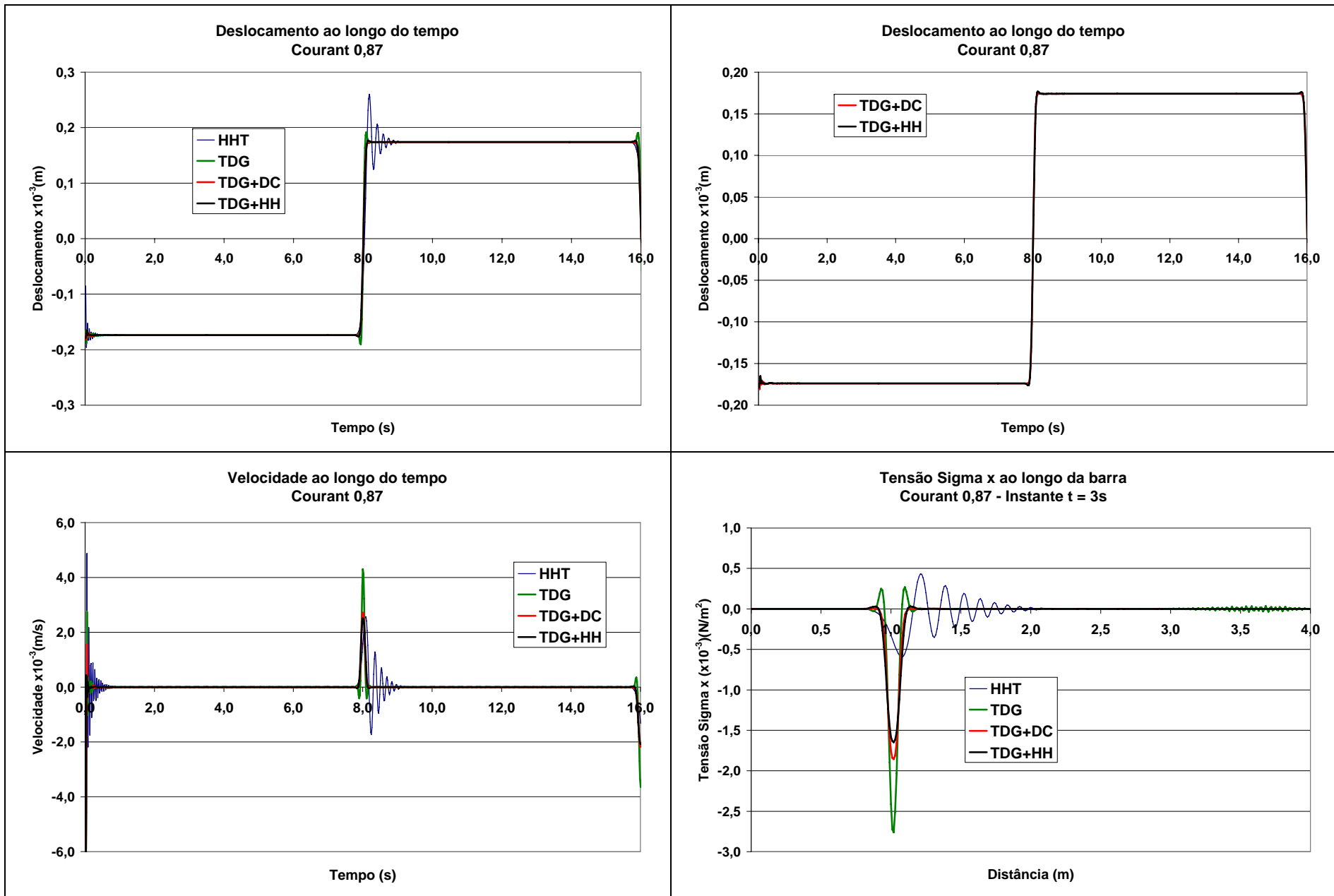


Figura IV. 21 – Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo impulso, para o número de Courant 0,87.

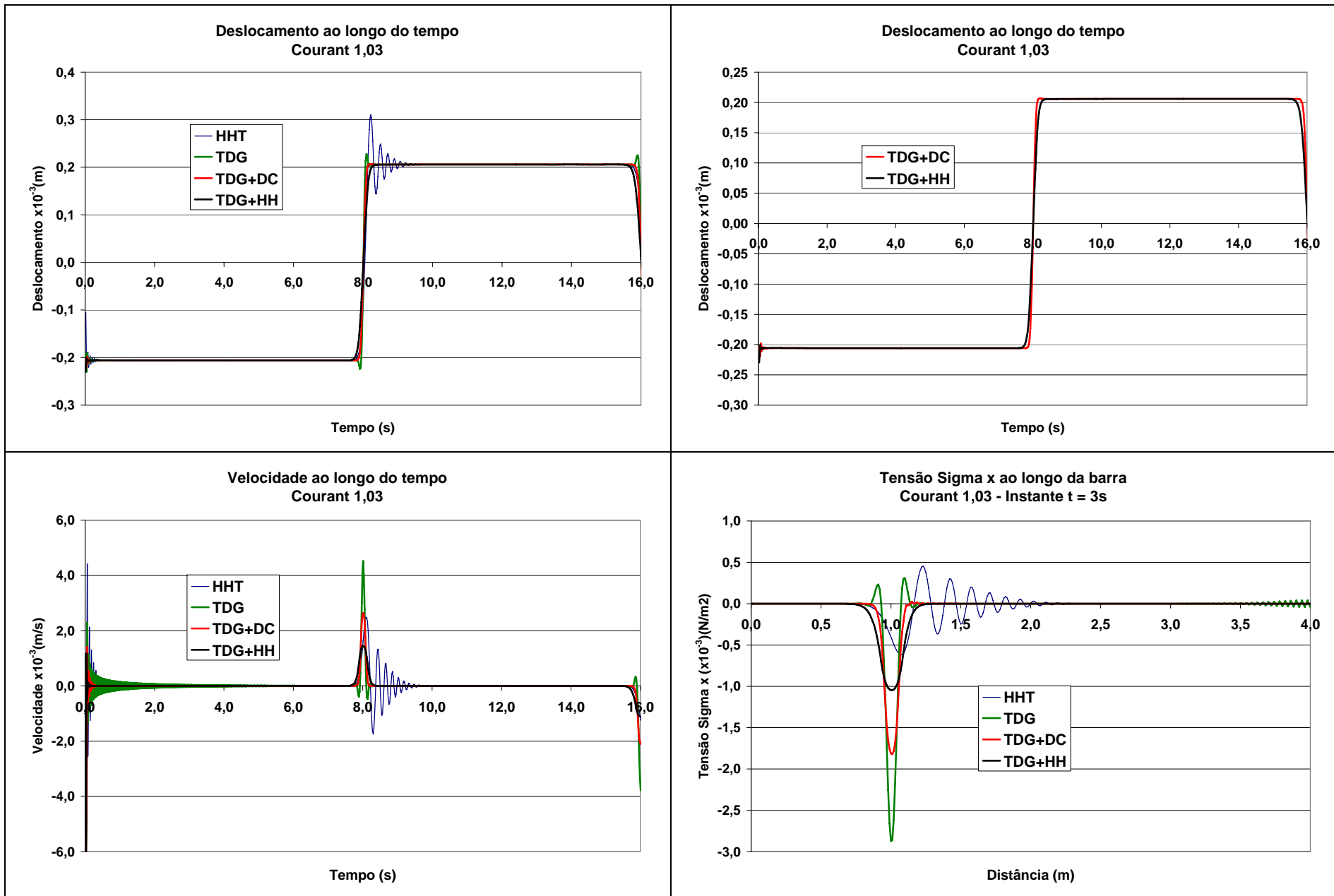


Figura IV. 22 – Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo impulso, para o número de Courant 1,03.

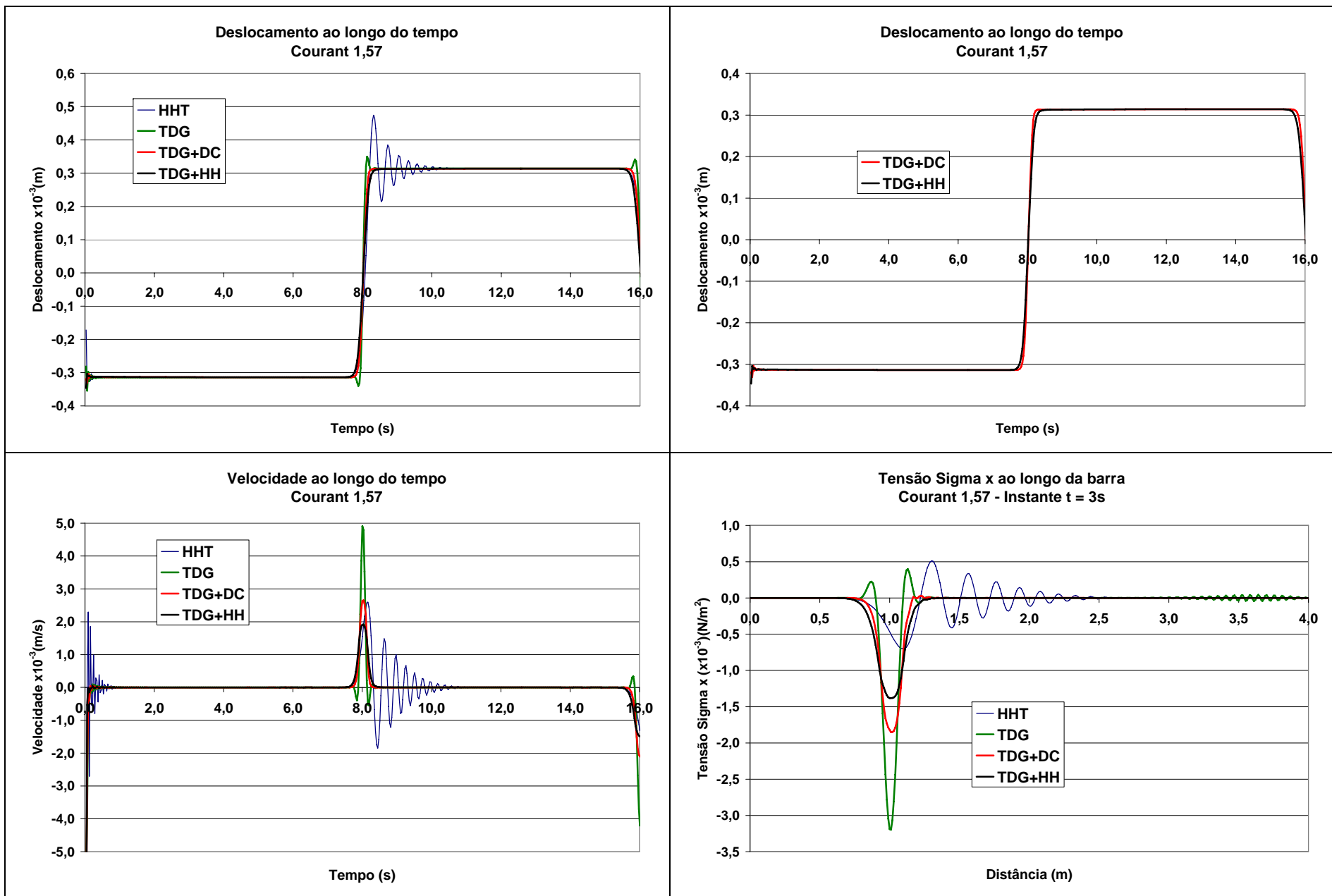


Figura IV. 23 – Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo impulso, para o número de Courant 1,57.

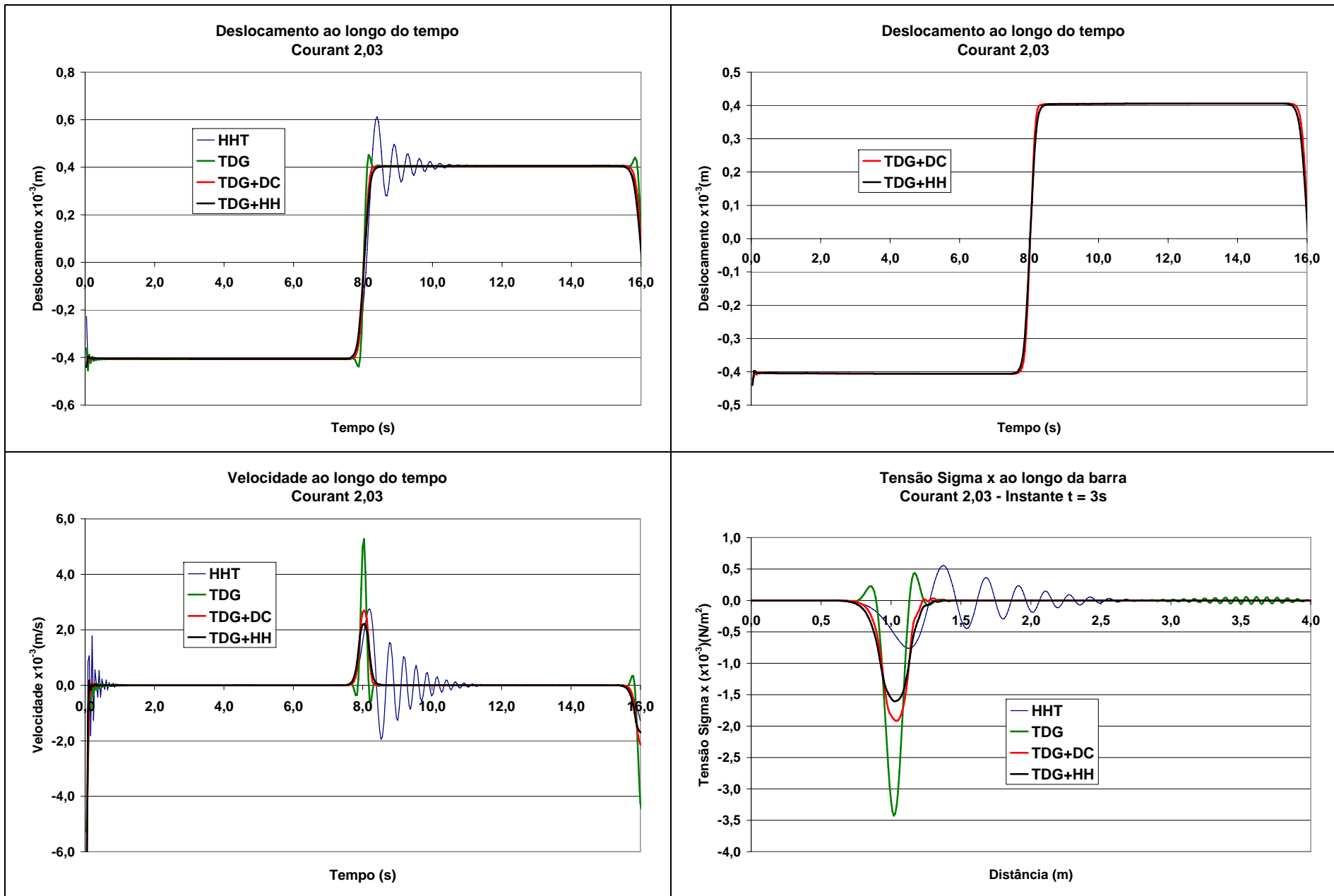


Figura IV. 24 – Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo impulso, para o número de Courant 2,03.

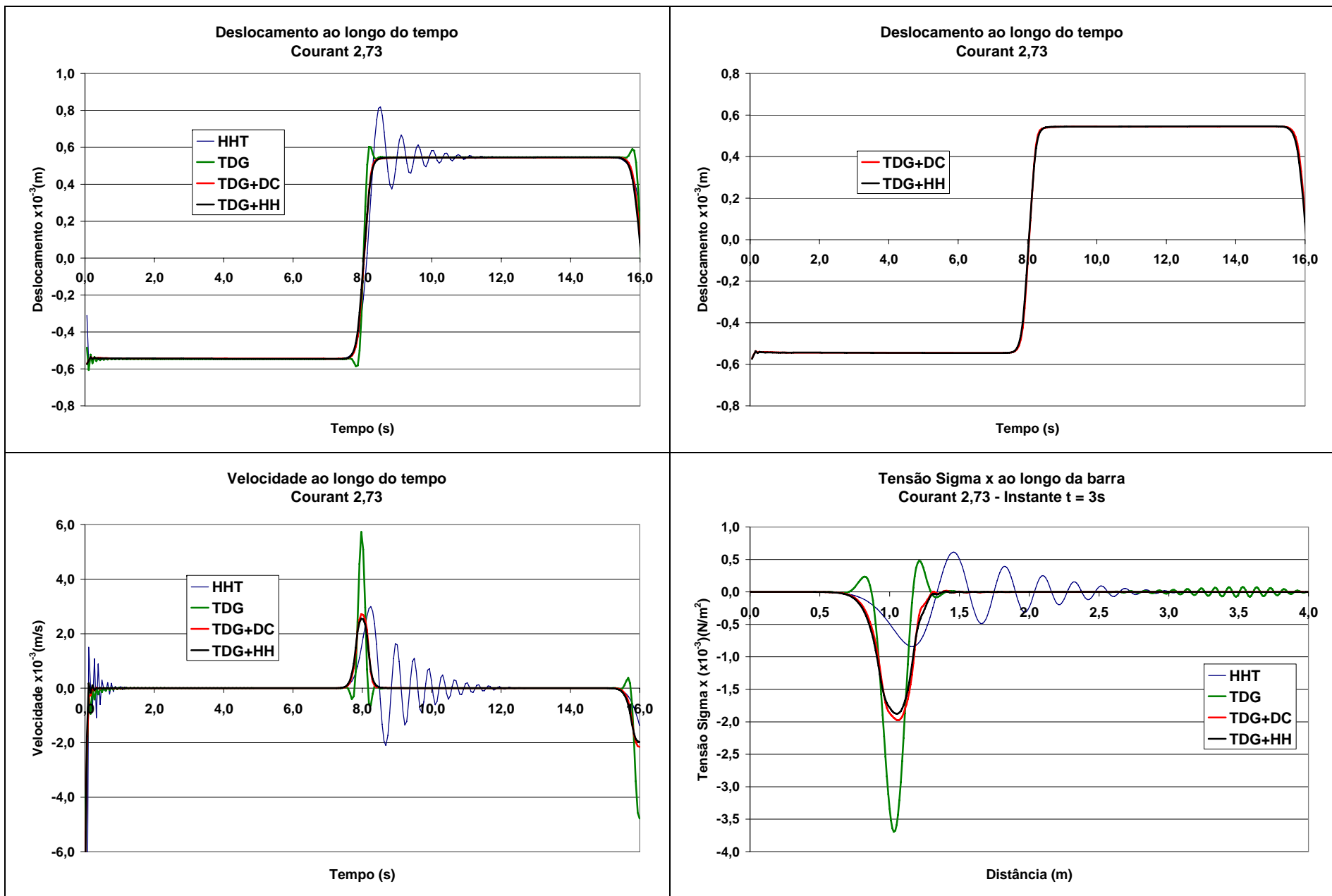


Figura IV. 25 – Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo impulso, para o número de Courant 2,73.

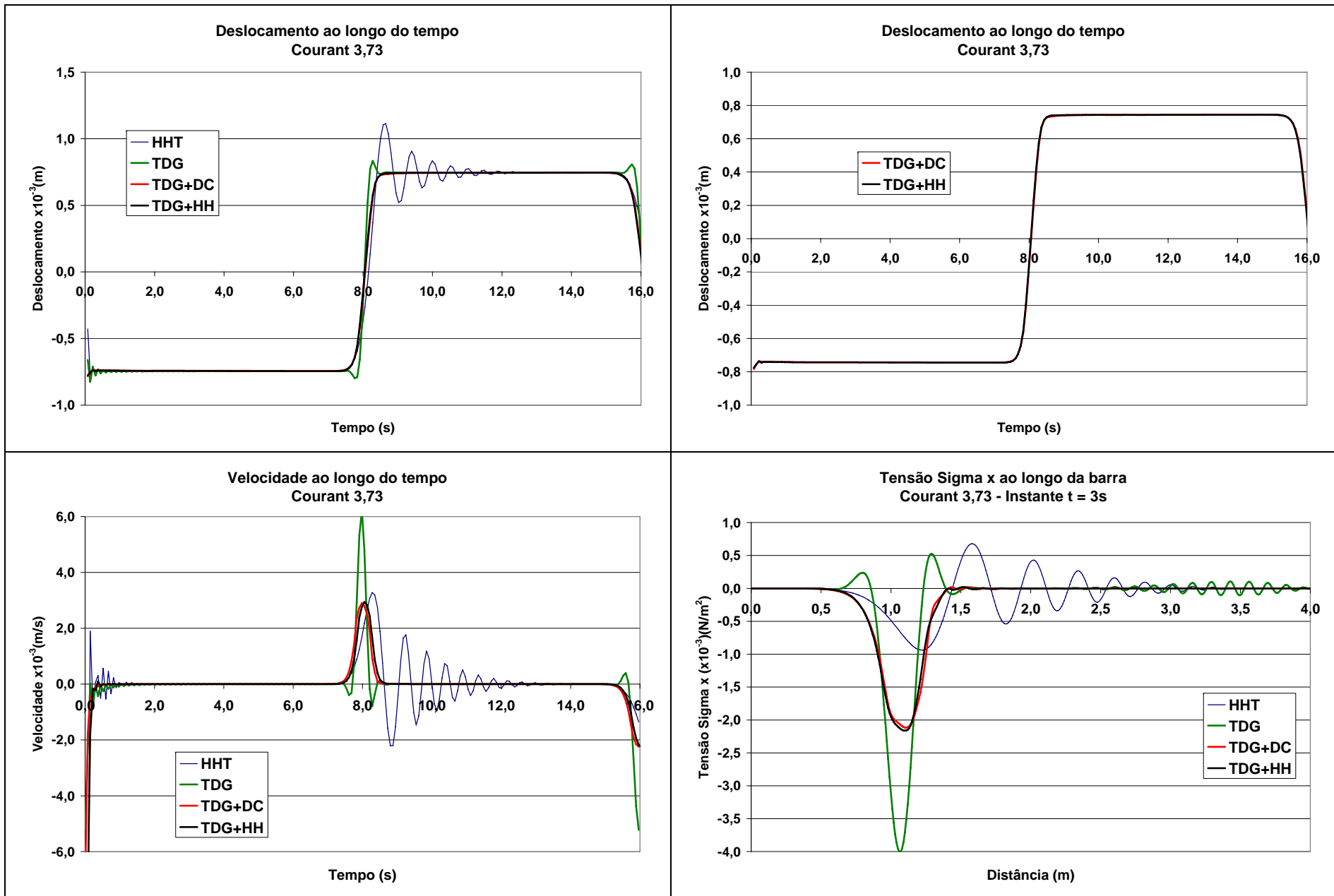


Figura IV. 26 – Resultados obtidos para a barra homogênea com o carregamento tipo impulso, para o número de Courant 3,73.

IV.1.c – Comentários sobre os resultados da barra homogênea com carregamento 2

Este tipo de carregamento produz um gradiente forte no deslocamento. Para se perceber melhor os resultados produzidos pela formulação proposta, o gráfico do deslocamento foi repetido somente com as curvas obtidas com o operador proposto e o operador HUGHES e HULBERT.

Para todos os números de Courant testados e para todas as variáveis analisadas, o método HHT produziu oscilações muito fortes em comparação com os outros métodos.

A formulação TDG produziu uma única oscilação em torno da descontinuidade no deslocamento para a faixa de Courant de 0,57 a 3,73, sendo que abaixo desse limite inferior o número de oscilações aumenta. Já para a velocidade e para a tensão σ_x tem-se uma única oscilação na faixa de 1,57 a 3,73, donde se tem que para os valores menores, as oscilações aumentam, à medida que o número de Courant diminui. Deve-se notar que a tensão representa a forma da carga aplicada, após esta ter se propagado por 3s a partir do início da análise.

Já o operador DC produziu resultados melhores para o deslocamento, quando comparado com o operador HH, na faixa de Courant de 1,03 a 2,03. Para a velocidade e tensão, a formulação proposta nesse trabalho também apresentou resultados melhores na faixa de 0,27 a 2,73, ficando equivalente ao operador HH para o valor de 3,73.

IV.2 - BARRA NÃO-HOMOGÊNEA UNIDIMENSIONAL

Seja agora uma barra prismática, composta de dois materiais elásticos, Figura IV. 27, engastada em sua extremidade esquerda e sujeita a um carregamento compressional uniformemente distribuído sobre a área da extremidade livre à direita. Neste problema são considerados para análise os dois tipos de carregamentos utilizados no exemplo anterior, dados na Figura IV. 3. As dimensões da barra são: o comprimento $L=4,0\text{m}$, a altura $h=0,2\text{m}$ e a área da seção transversal $A=0,04\text{m}^2$. Aqui, o valor do coeficiente de Poisson é igual a zero, sendo os demais parâmetros listados abaixo.

Material 1: $E = 4 \text{ N/m}^2$; $\rho = 1,0 \text{ kg/m}^3$; $c = 2,0 \text{ m/s}$

Material 2: $E = 1 \text{ N/m}^2$; $\rho = 1,0 \text{ kg/m}^3$; $c = 1,0 \text{ m/s}$

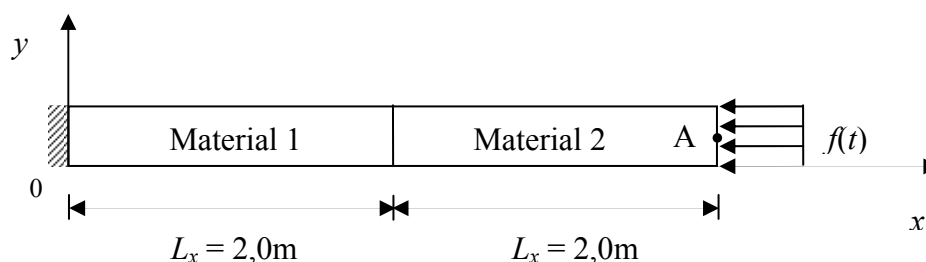


Figura IV. 27 – Barra não-homogênea engastada na extremidade esquerda.

A discretização da barra é feita com 200 elementos espaço-tempo, sendo 100 elementos para o material 1 e 100 para o material 2.

As variáveis observadas são o deslocamento e a velocidade ao longo do tempo, medidas na extremidade livre, ponto A, Figura IV. 27, e a tensão σ_x ao longo da barra medido no instante 2,5s após o início da análise.

A seqüência que vai da Figura IV. 28 à Figura IV. 31 ilustra o comportamento das variáveis para o carregamento 1, para os números de Courant 0,57, 1,03, 1,57 e 2,03. Nas análises não são examinados os resultados além do número de Courant 2,03, pois para o material 2 e Courant 2,03 tem-se um $\Delta t = 0,0406\text{s}$, adotando-se esse valor para o passo de tempo da análise, o número de Courant para o material 1 resulta em 4,06, ou seja, acima do valor máximo da Tabela III.1.

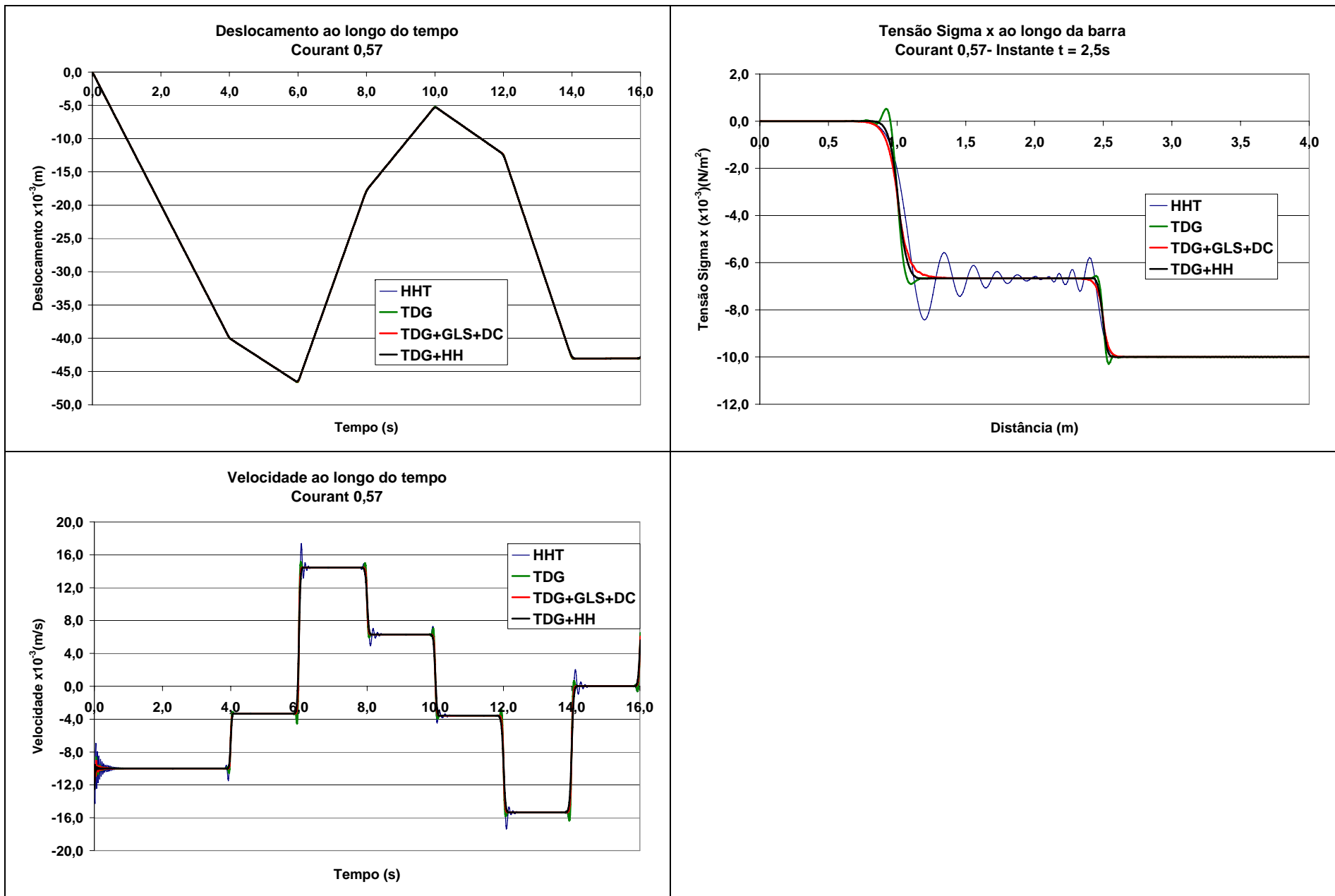


Figura IV. 28 – Resultados obtidos para a barra não-homogênea com o carregamento tipo Heaviside, para o número de Courant 0,57.

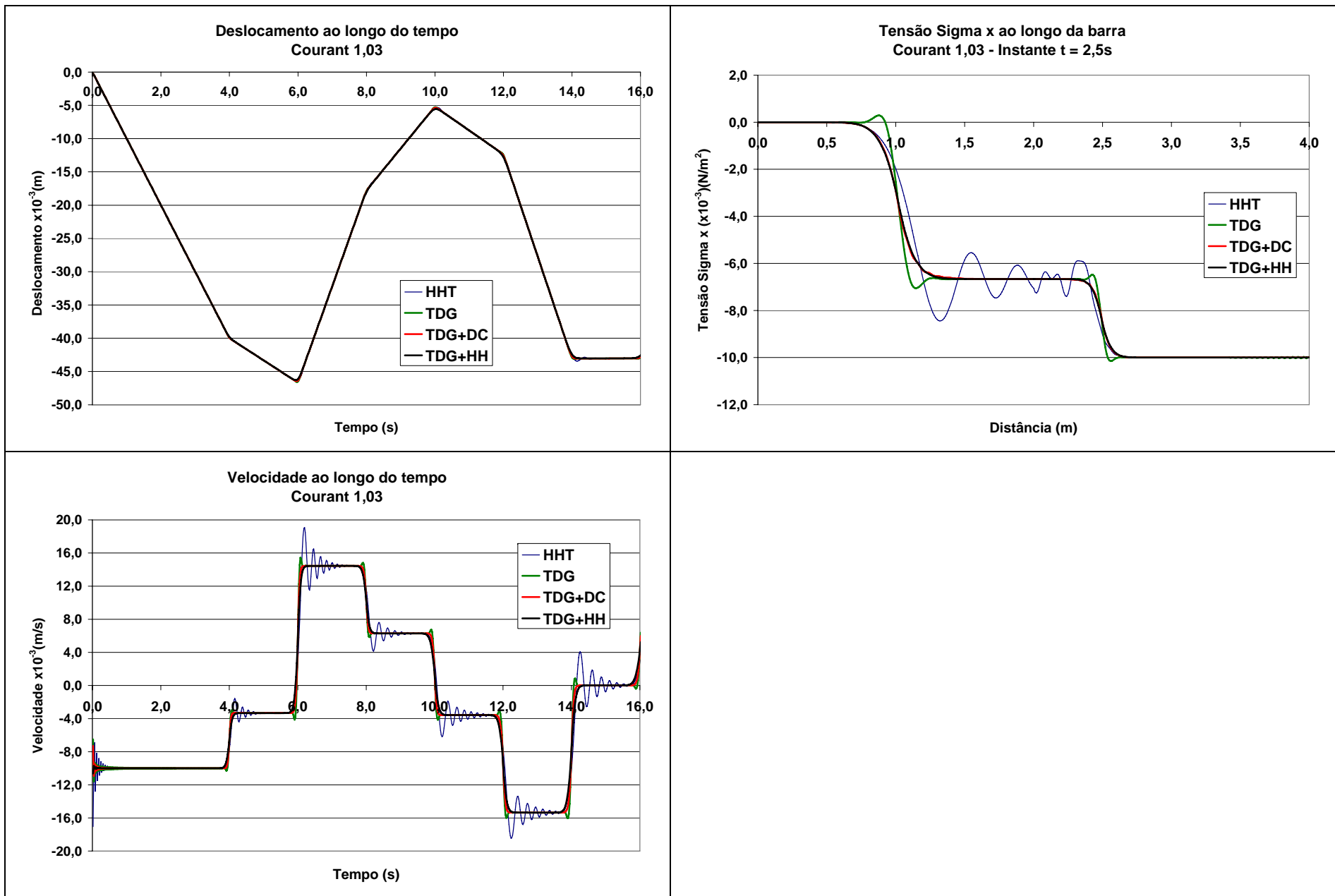


Figura IV. 29 – Resultados obtidos para a barra não-homogênea com o carregamento tipo Heaviside, para o número de Courant 1,03.

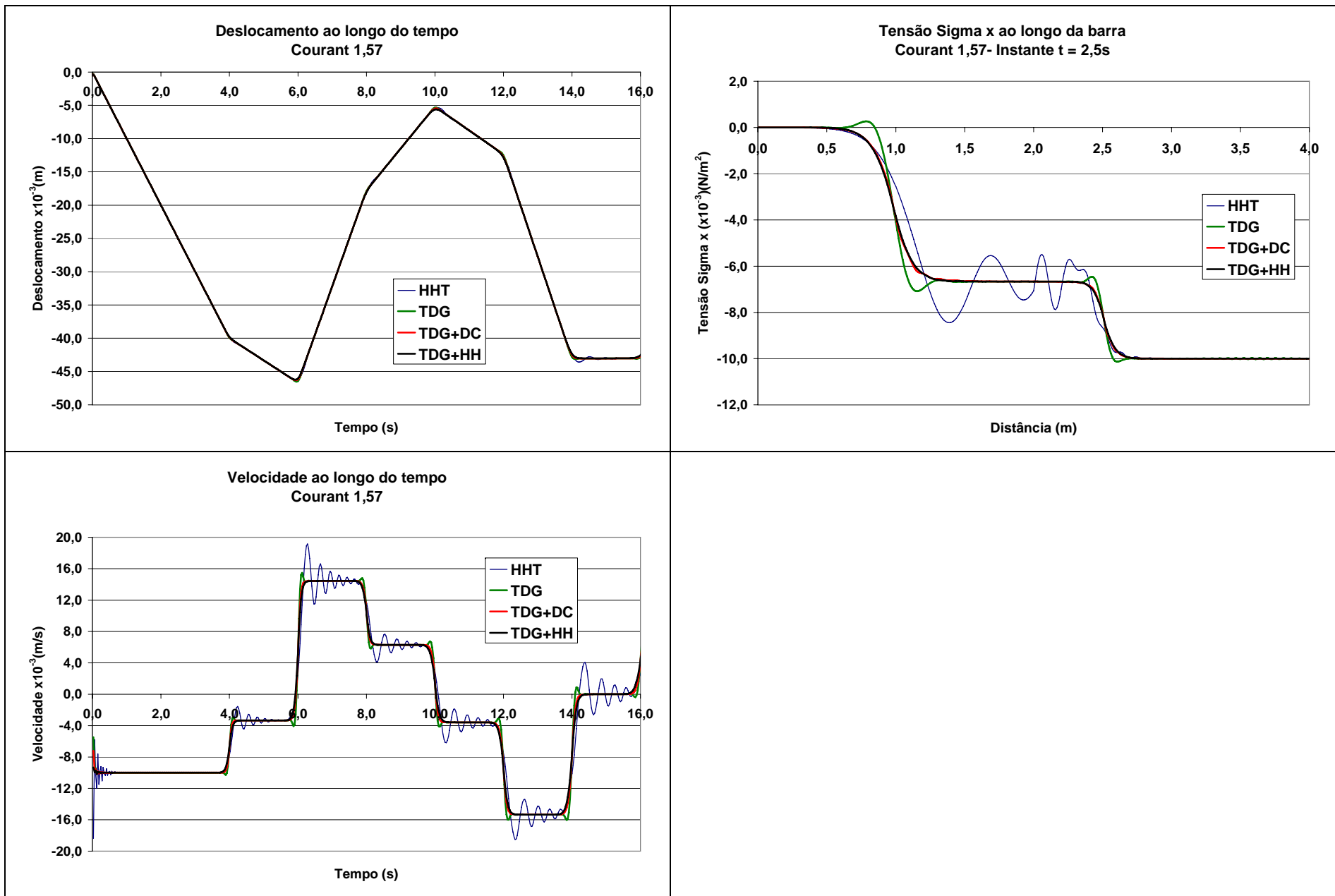


Figura IV. 30 – Resultados obtidos para a barra não-homogênea com o carregamento tipo Heaviside, para o número de Courant 1,57.

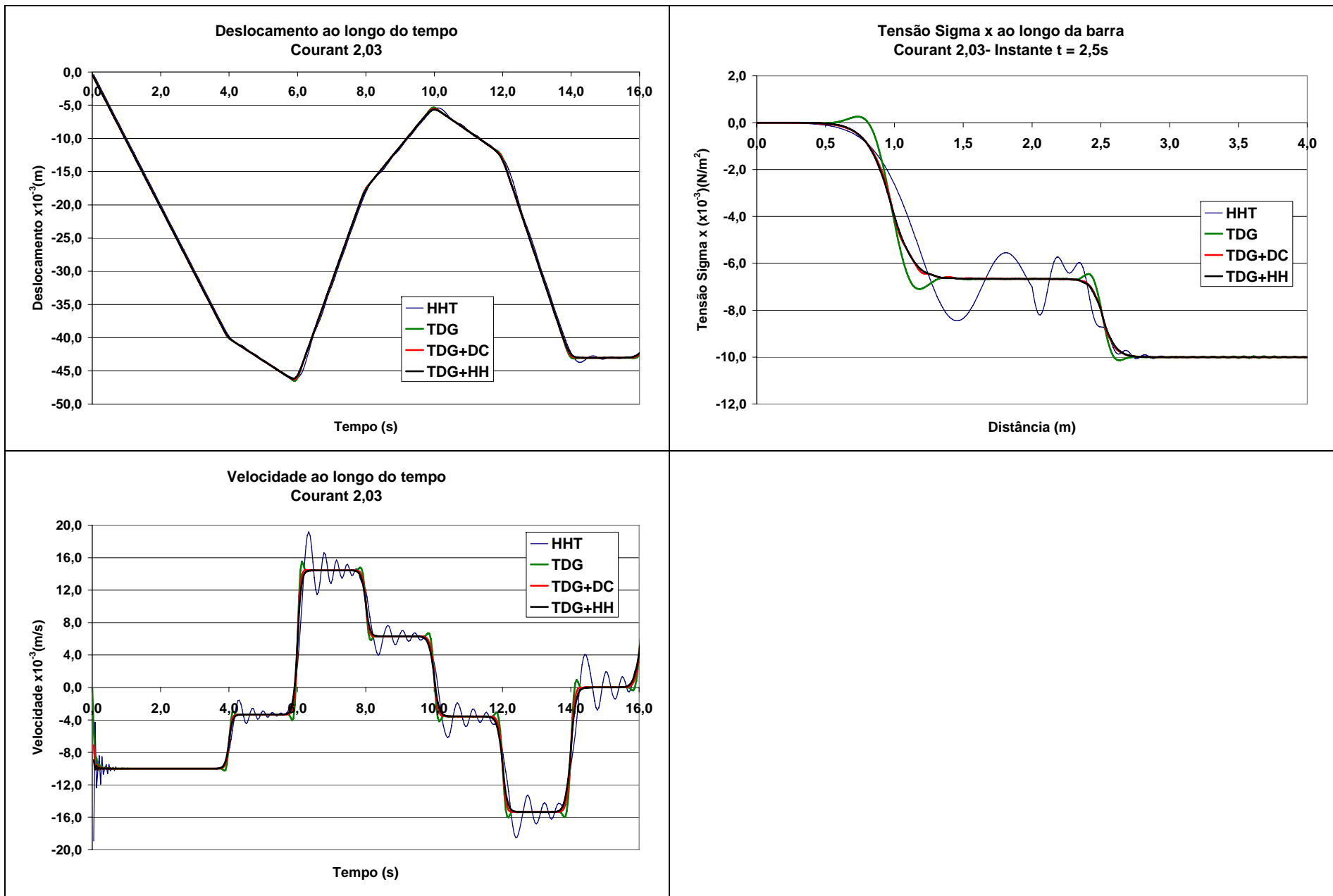


Figura IV. 31 – Resultados obtidos para a barra não-homogênea com o carregamento tipo Heaviside, para o número de Courant 2,03.

IV.2.a – Comentários sobre os resultados da barra não-homogênea com carregamento 1

O deslocamento foi bem representado por todos os métodos, pois este não contém saltos ou descontinuidades.

Novamente, o método HHT não conseguiu reproduzir as variáveis que representam as derivadas, oscilando bastante próximo às descontinuidades.

Para a velocidade, o método TDG apresentou uma única oscilação em torno da descontinuidade, com amplitude consideravelmente menor do que o método HHT.

Já os operadores DC e HH, não exibiram oscilações na velocidade ao longo do tempo e na tensão ao longo da barra. Neste caso, o método proposto apresentou uma ligeira melhora em relação operador de captura HH.

A seguir, da Figura IV. 32 a Figura IV. 35, são apresentados os resultados obtidos para a barra não-homogênea sob ação da carga de curta duração, tipo impulso.

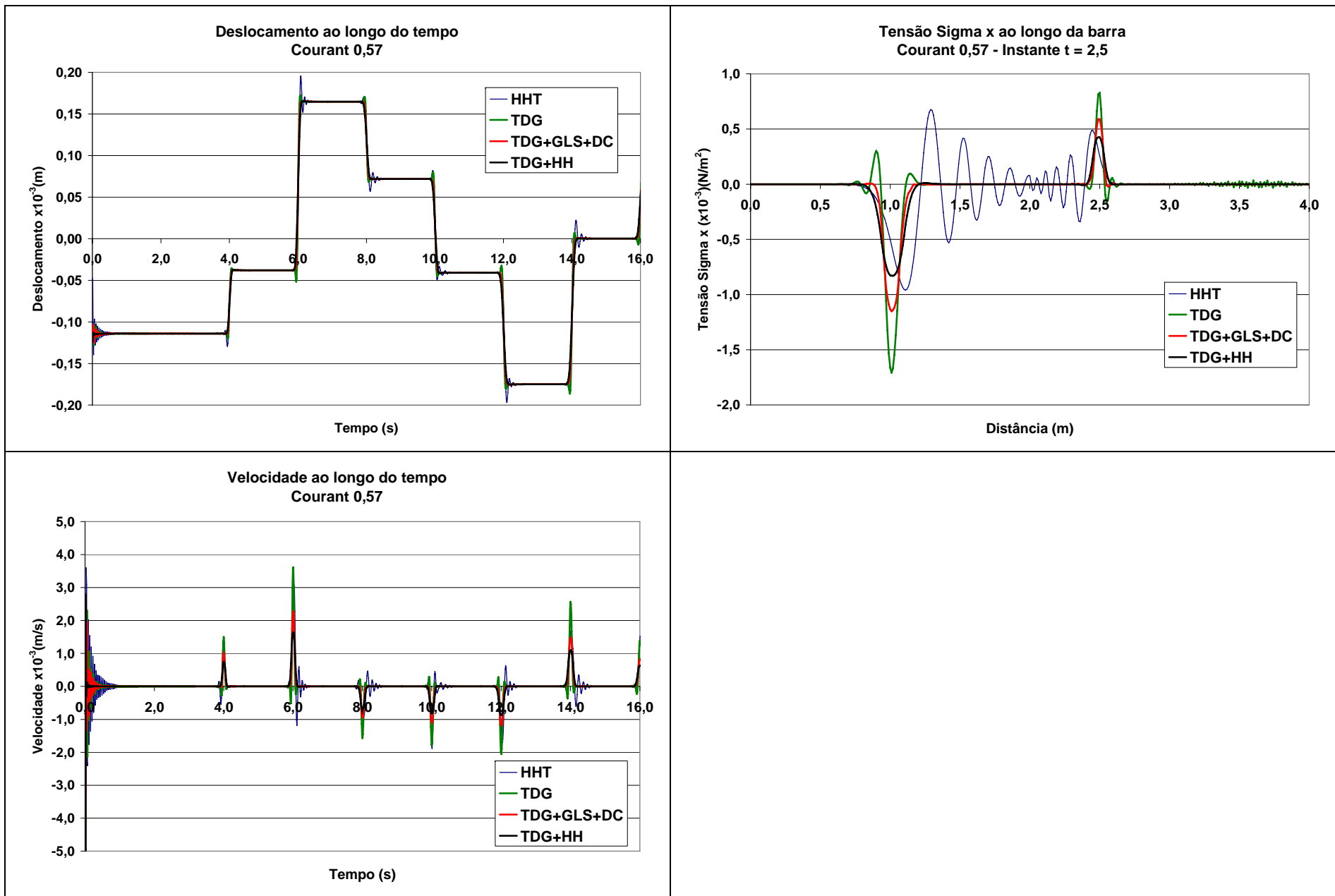


Figura IV. 32 – Resultados obtidos para a barra não-homogênea com o carregamento tipo impulso, para o número de Courant 0,57.

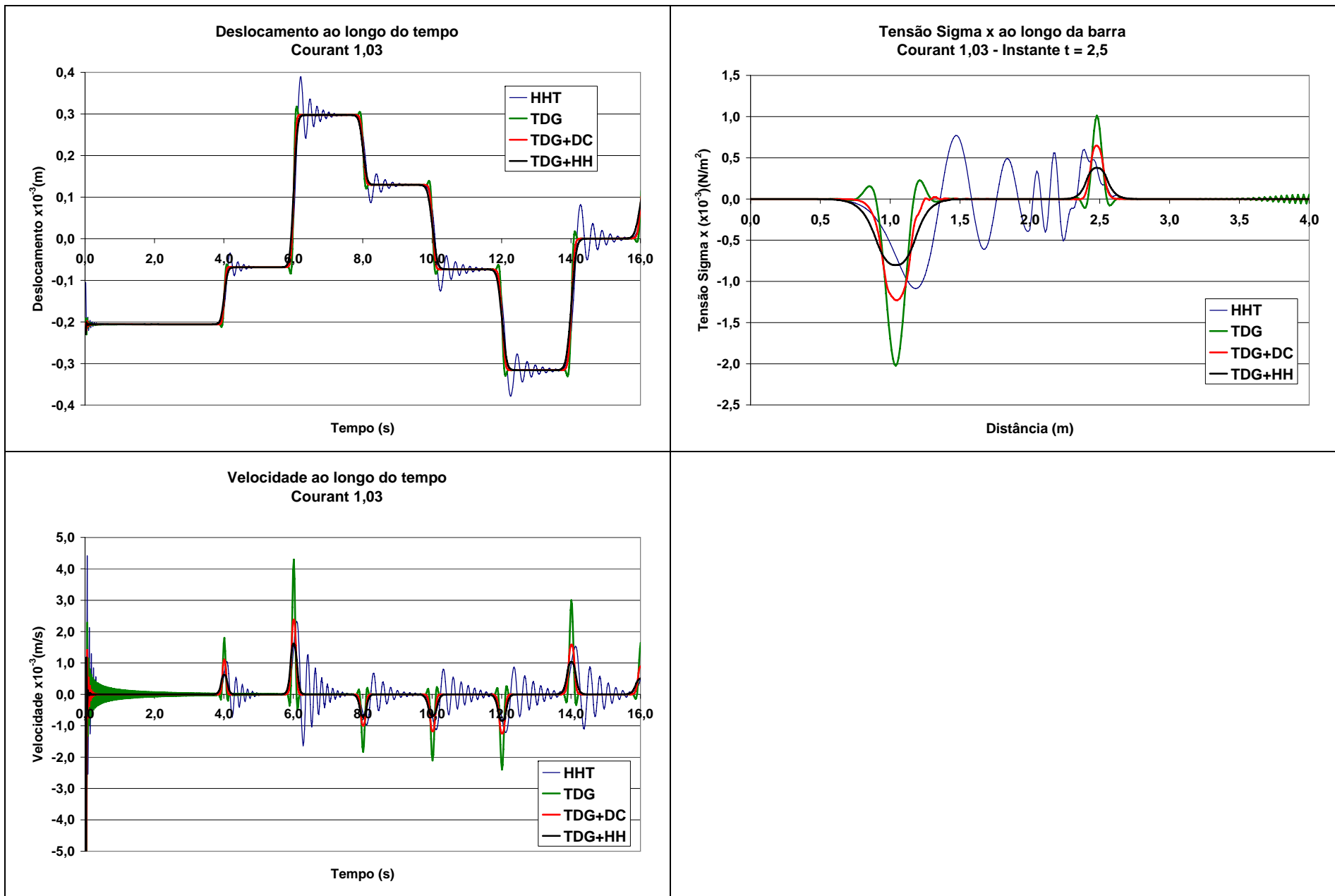


Figura IV. 33 – Resultados obtidos para a barra não-homogênea com o carregamento tipo impulso, para o número de Courant 1,03.

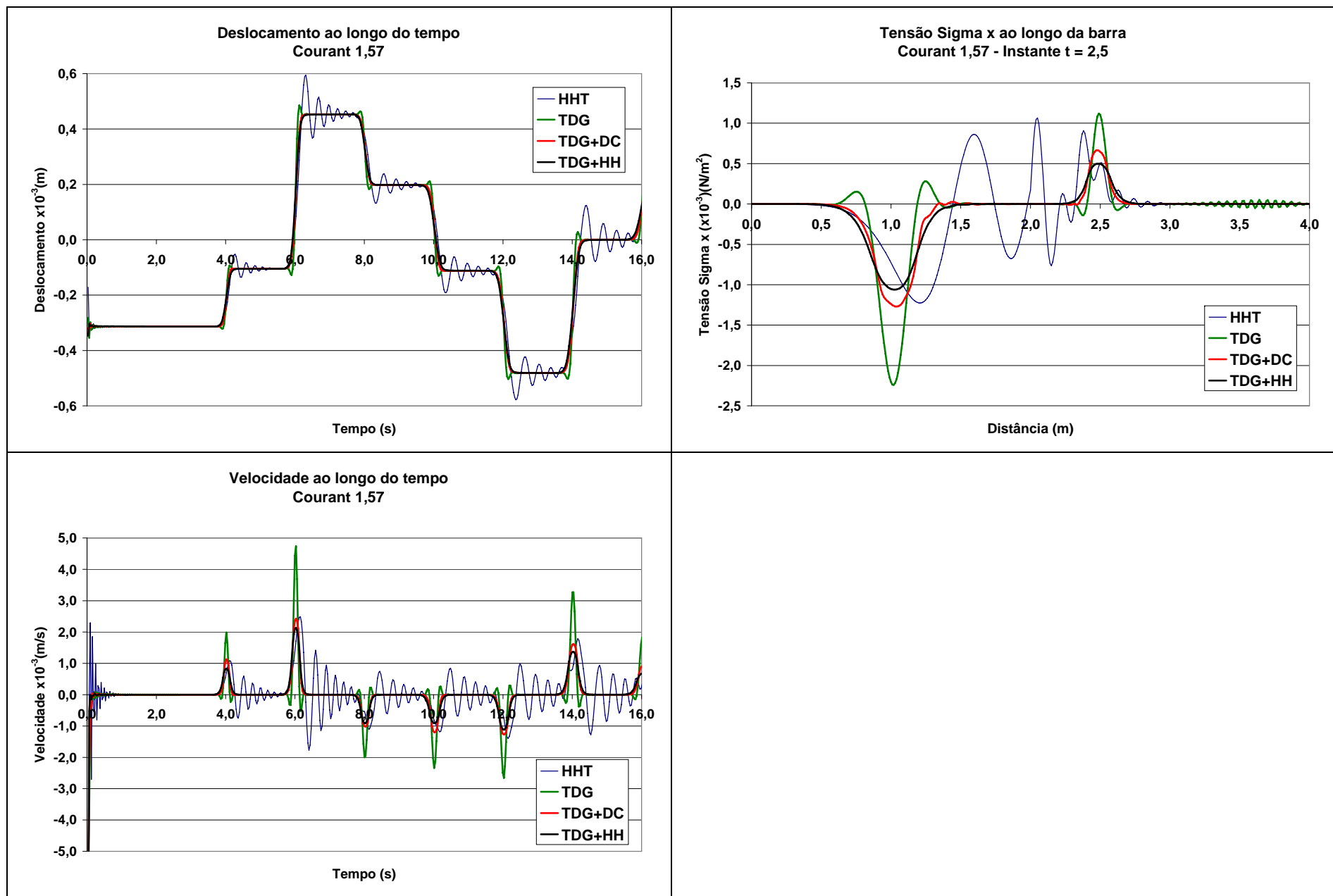


Figura IV. 34 – Resultados obtidos para a barra não-homogênea com o carregamento tipo impulso, para o número de Courant 1,57.

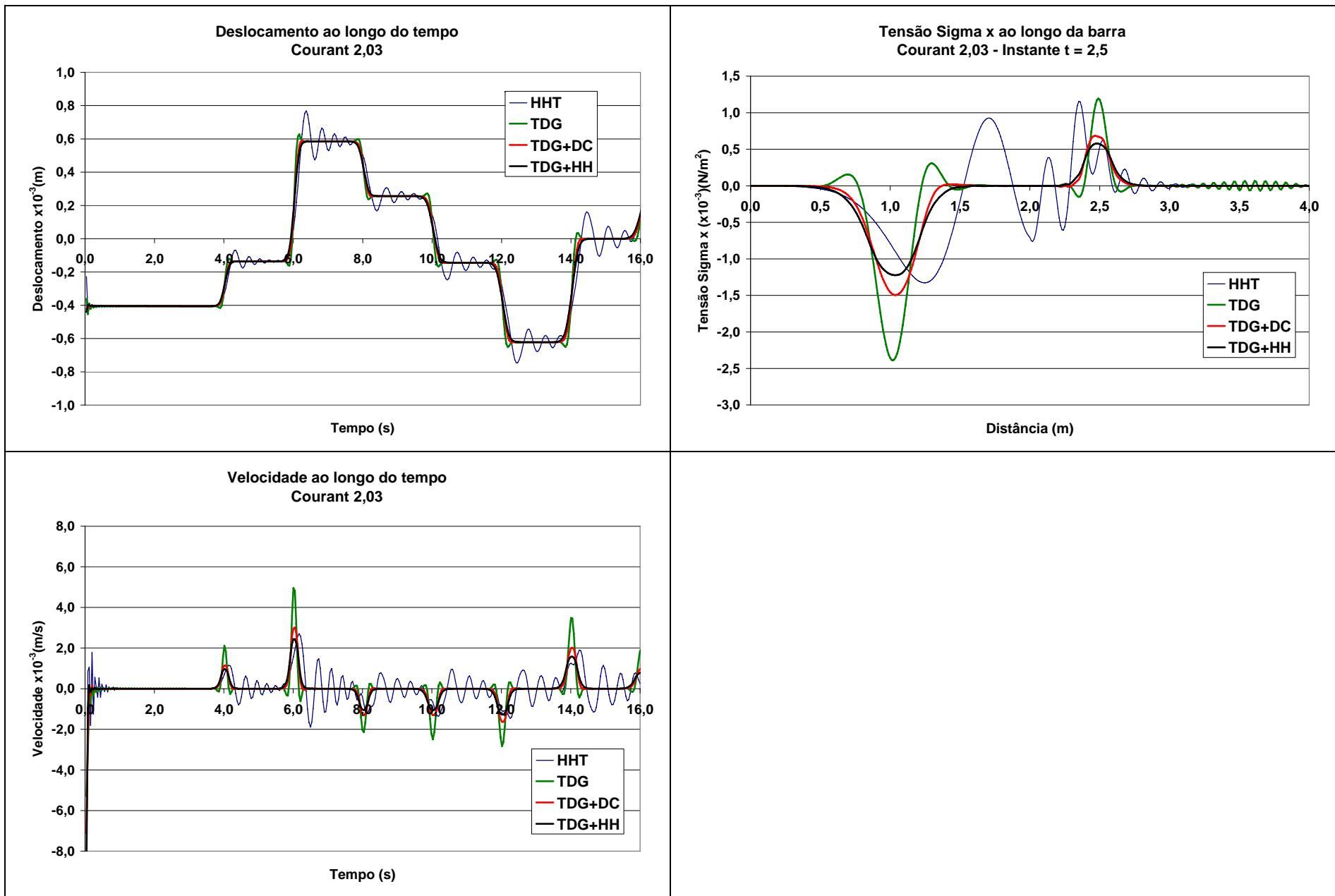


Figura IV. 35 – Resultados obtidos para a barra não-homogênea com o carregamento tipo impulso, para o número de Courant 2,03.

IV.2.b – Comentários sobre os resultados da barra não-homogênea com carregamento 2

Para esse caso, a tensão σ_x foi medida no instante de tempo 2,5s contados a partir do início da análise. Esse instante permitiu visualizar a reflexão da frente de onda sobre a interface entre os dois meios, que ocorre na metade da barra, lembrando que, inicialmente, a onda se propaga da direita para a esquerda. Nos gráficos, vê-se nitidamente a onda refletida posicionada em 2,5m e a onda transmitida posicionada em 1,0m. Nota-se também a inversão de fase na onda refletida na interface entre o dois materiais.

Novamente o método HHT oscilou em todas as variáveis analisadas, além disso, nas derivadas ao longo do tempo e da barra, o método não foi capaz de reproduzir a forma correta da resposta esperada, produzindo resultados completamente errados.

A formulação descontínua, TDG, conseguiu representar a resposta para todos os números de Courant, mas contem pequenas oscilações nas variáveis analisadas somente próximo a descontinuidade.

Os operadores de captura DC e HH conseguiram representar todas as variáveis sem oscilações. Entretanto, a formulação desenvolvida neste trabalho apresentou resultados com menos dispersão nas derivadas do que o operador HH e com amplitude da resposta também melhor, com a vantagem de não utilizar o método GLS.

IV.3 – CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Neste item são apresentadas algumas observações baseadas nos resultados.

Como mencionado anteriormente, a formulação descontínua utiliza elementos com interpolação quadrática no tempo e no espaço. Este tipo de interpolação se faz necessária devido às derivadas segundas no tempo e no espaço presentes na equação diferencial. Com o enfraquecimento da ordem do operador diferencial no espaço na formulação variacional, poder-se-ia pensar em utilizar polinômio interpolador de 1º grau

no espaço; entretanto, testes mostram que isso não é possível devido ao amortecimento numérico.

Testes realizados com a formulação TDG para a barra homogênea, considerando número de Courant igual a um, e utilizando elementos com interpolação quadrática no tempo e linear no espaço, em 100 períodos de análise, mostram que essa interpolação apresenta um amortecimento maior do que aquela obtida com elementos que utilizam funções de interpolação quadrática no espaço e no tempo, Figura IV. 36, resultando, além do maior amortecimento, em oscilações espúrias na velocidade, que não só aumentam em amplitude à medida que se avança no tempo, como também se propagam pela resposta.

Conforme mostrado na equação (III. 7), as funções de ponderação, $W_{+/-}(W^h)$, apresentam os fatores $Cour^4$ e $Cour^{-4}$, que têm como objetivo equilibrar a ordem de grandeza da soma das parcelas temporal e espacial no operador de captura. A seguir, mostra-se a influência em usar esses fatores.

O exemplo analisado foi o da barra homogênea com carregamento Heaviside, considerando apenas a formulação proposta, TDG+DC, sendo examinados os números de Courant 0,5, 1,0, 2,0, 3,0 e 4,0. A Figura IV. 37 ilustra a influência para Courant 3,0 e 4,0, pois para esses valores têm-se um desequilíbrio maior entre as parcelas temporal e espacial, ficando mais nítida a sua influência nos testes realizados, sendo comparados os resultados com e sem tais fatores.

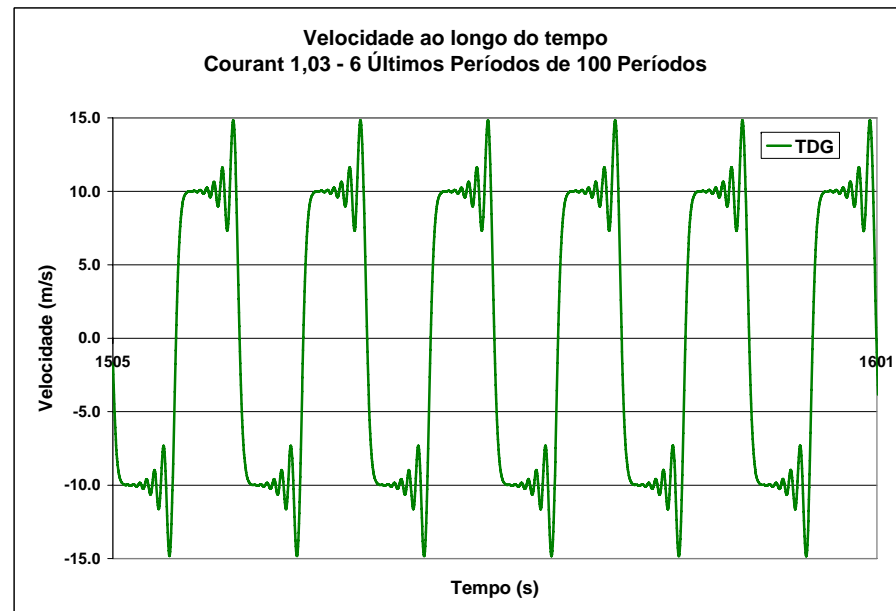
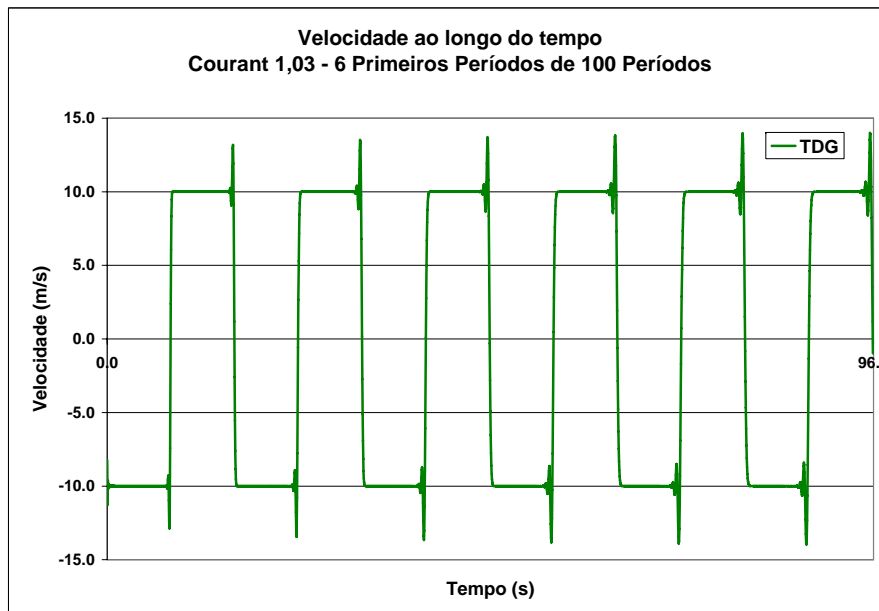
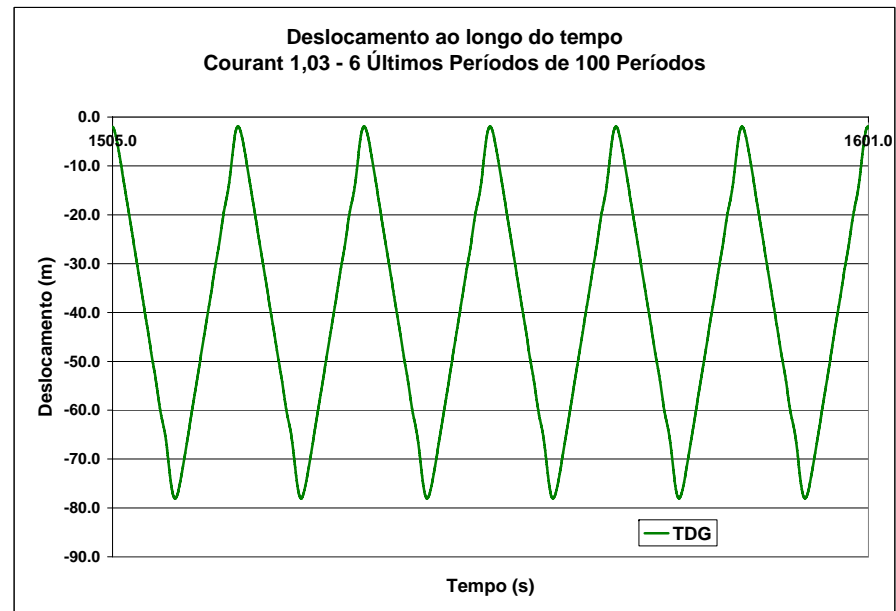
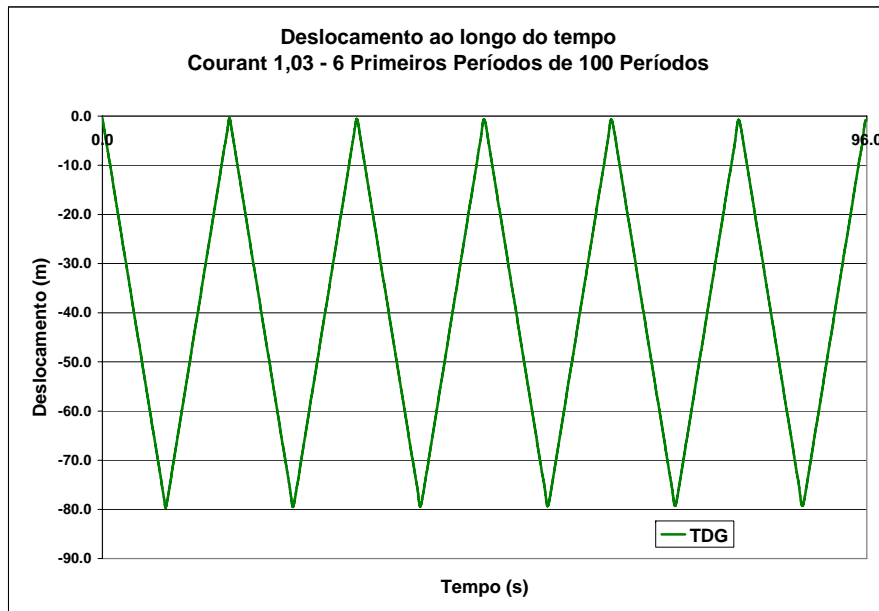


Figura IV. 36 – Comportamento das variáveis ao longo de 100 períodos de evolução, com elementos com interpolação linear no espaço.

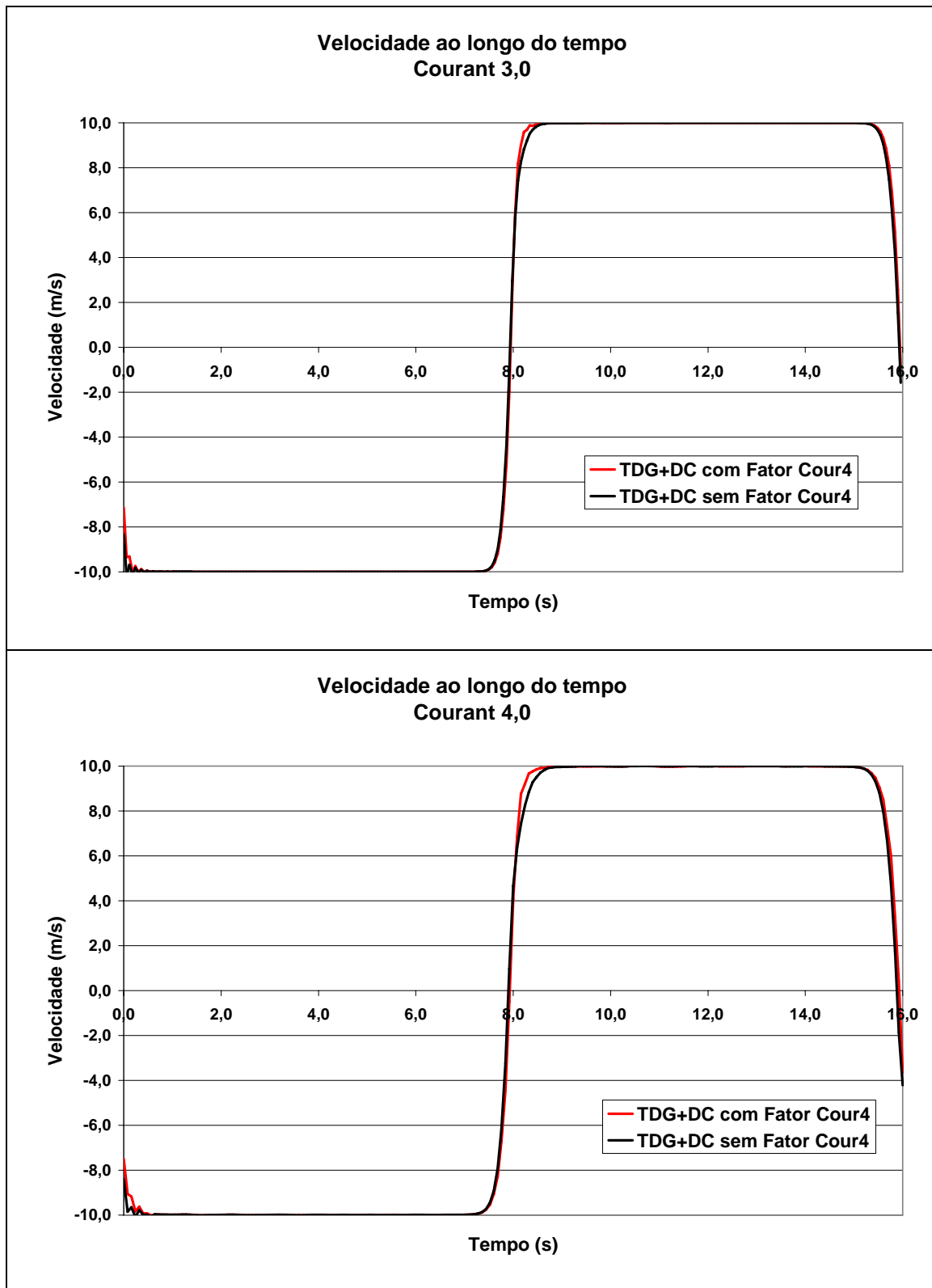


Figura IV. 37 – Influência do fator $Cour^{-4}$ no operador de captura.

Este capítulo apresentou os resultados obtidos com a aplicação da metodologia para problemas unidimensionais. A seguir, no Capítulo V é sugerida uma extensão para o caso n -dimensional.

CAPITULO V

EXTENSÃO PARA O CASO n -DIMENSIONAL

Neste capítulo é proposta uma extensão do operador de captura para o caso n -dimensional, sendo n o número de dimensões espaciais. Essa extensão é baseada nos resultados obtidos para o caso unidimensional, Capítulo III, ou seja, esses valores serão utilizados para se obter os parâmetros para o caso com n -dimensões, não sendo assim necessário calculá-los e ajustá-los.

Conforme visto, a partir da equação (II. 46), diversas famílias de operadores de captura de descontinuidade podem ser criadas, bastando para isso definir as expressões para $W_i(\cdot, \cdot)$ e $\alpha_i(\cdot)$. A extensão é feita considerando-se as seguintes definições:

Seja uma função vetorial $V(\varphi)$ tal que,

$$V(\varphi) = \begin{pmatrix} V_1(\varphi) \\ \vdots \\ V_i(\varphi) \\ \vdots \\ V_n(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}, \quad (\text{V. 1})$$

sendo φ uma função escalar. $V_J(\varphi)$ é dado por:

$$V_J(\varphi) = [\mathbf{J}]V(\varphi) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n J_{1k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k^2} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n J_{ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k^2} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n J_{nk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k^2} \end{pmatrix} \quad (\text{V. 2})$$

onde $[\mathbf{J}]$ é a matriz jacobiana. $V(\varphi)$ e $V_J(\varphi)$ permitem a definição do comprimento $H(\varphi)$ conforme indicado abaixo:

$$H(\varphi) = \begin{cases} 2 \frac{\|V_J(\varphi)\|}{\|V(\varphi)\|}, & \text{se } \|V(\varphi)\| > 0 \\ 2 \|\mathbf{J}\|, & \text{se } \|V(\varphi)\| = 0 \end{cases} \quad (\text{V. 3})$$

Considere o tensor de propriedades físicas \mathbf{K} e o tensor de massa $\boldsymbol{\rho}$, através dos quais é possível definir o número de Courant para o espaço de dimensão n , como sendo:

$$Cour(\varphi) = \left(\frac{\|\mathbf{K}\|}{\|\boldsymbol{\rho}\|} \right)^{1/2} \frac{\Delta t}{H(\varphi)} \quad (\text{V. 4})$$

Sejam $\mu^{+/-}(Cour)$, os valores determinados para cada número de Courant obtidos no caso unidimensional. Assim, os fatores nas direções $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ denotados por $F_1(\varphi), \dots, F_i(\varphi), \dots, F_n(\varphi)$ são definidos como:

$$F_i(\varphi) = \begin{cases} \mu^{+/-}(Cour(\varphi)) \frac{|V_{J_i}(\varphi)|}{\|V_J(\varphi)\|}, & \text{se } \|V_J(\varphi)\| > 0 \\ 0 & , \text{ se } \|V_J(\varphi)\| = 0 \end{cases} \quad (\text{V. 5})$$

Finalmente, sejam os fatores $F_i(\varphi)$ e $F_{mk}(\varphi)$ dados da seguinte forma:

$$F_i(\varphi) = \text{Max}\{F_1(\varphi), \dots, F_i(\varphi), \dots, F_n(\varphi)\} \quad (\text{V. 6})$$

$$F_{mk}(\varphi) = (F_m(\varphi) F_k(\varphi))^{1/2} \quad (\text{V. 7})$$

Além de $F_t(\varphi)$ e $F_{mk}(\varphi)$ definidos acima, o operador de captura definido aqui também utiliza o vetor $\mathbf{U}(\mathbf{u}_e)$ definido abaixo:

$$\mathbf{U}(\mathbf{u}_e) = \left(\dots, \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_m \partial x_k}, \dots, \frac{\|\boldsymbol{\rho}\|}{\|\mathbf{K}\|} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \dots \right) \quad (\text{V. 8})$$

onde $m, k \in \{1, \dots, n\}$ e $i \in \{1, \dots, ngl\}$, onde ngl é o número de graus de liberdade.

Assim, a função $\mathbf{W}(W^h)$ é definida para $Cour_i < 1$ e $Cour_i \geq 1$, tal como no caso unidimensional, da seguinte forma:

$$\mathbf{W}(W^h) = \begin{cases} \mathbf{W}_-(W^h), & \text{se } Cour_i < 1 \\ \mathbf{W}_+(W^h), & \text{se } Cour_i \geq 1 \end{cases} \quad (\text{V. 9.a})$$

onde

$$\mathbf{W}_-(W^h) = \left(\begin{array}{c} \dots, F_{mk}(W_i^h) \delta_{ijkl}^h \frac{\partial^2 W_i^h}{\partial x_m \partial x_k}, \\ \dots, \\ \dots, F_t(W_i^h) (Cour_i)^4 \frac{\|\boldsymbol{\rho}\|}{\|\mathbf{K}\|} \frac{\partial^2 W_i^h}{\partial t^2} \\ \dots, \end{array} \right) \quad (\text{V. 9.b})$$

e

$$\mathbf{W}_+(W^h) = \left(\begin{array}{c} \dots, F_{mk}(W_i^h) (Cour_i)^{-4} \delta_{ijkl}^h \frac{\partial^2 W_i^h}{\partial x_m \partial x_k}, \\ \dots, \\ \dots, F_t(W_i^h) \frac{\|\boldsymbol{\rho}\|}{\|\mathbf{K}\|} \frac{\partial^2 W_i^h}{\partial t^2} \\ \dots, \end{array} \right) \quad (\text{V. 9.c})$$

Pode-se mostrar que as expressões dadas por (V. 8) e (V. 9) recaem no caso unidimensional, equações (III. 2) e (III. 7), quando $n = 1$.

V.1 – OPERADOR DE CAPTURA: CASO BIDIMENSIONAL

Neste item são apresentadas as expressões do operador de captura para o caso acústico bidimensional, seguindo a mesma idéia do caso unidimensional. Para isso, considere a equação (II. 46), onde o vetor $\mathbf{U}(u^h)$ é dado por:

$$\mathbf{U}(u^h) = \left(\frac{\partial^2 u^h}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u^h}{\partial y^2}, \frac{1}{\gamma^{1/2}} \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \right) \quad (\text{V. 10})$$

$$\gamma^{1/2} = \frac{K}{\rho} \quad (\text{V. 11})$$

$$\|\mathbf{U}(u_0^h)\| = \|\mathbf{U}(u_0^h)\|_{L^2} = \left\| \left(\frac{\partial^2 u_0^h}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_0^h}{\partial y^2}, \frac{1}{\gamma^{1/2}} \frac{\partial^2 u_0^h}{\partial t^2} \right) \right\| \quad (\text{representa a norma}) \quad (\text{V. 12})$$

$$\mathbf{W}(W^h) = \begin{cases} \mathbf{W}_-(W^h) = \left(F_{11} \frac{\partial^2 W^h}{\partial x^2}, F_{22} \frac{\partial^2 W^h}{\partial y^2}, F_t \frac{Cour^4}{\gamma^{1/2}} \ddot{W}^h \right), \text{ se } Cour < 1 \\ \mathbf{W}_+(W^h) = \left(F_{11} Cour^{-4} \frac{\partial^2 W^h}{\partial x^2}, F_{22} Cour^{-4} \frac{\partial^2 W^h}{\partial y^2}, F_t \frac{1}{\gamma^{1/2}} \ddot{W}^h \right), \text{ se } Cour \geq 1 \end{cases} \quad (\text{V. 13})$$

onde os parâmetros F_t , F_{11} e F_{22} são dados pelas equações (V. 6) e (V. 7).

Concluindo, as expressões (V. 10) a (V. 13) indicam a proposta do operador de captura para problemas n -dimensionais no espaço, tendo como base os resultados obtidos para o caso unidimensional. As expressões (V. 10) a (V. 13) fornecem o operador de captura para o caso particular, quando $n = 2$.

CAPITULO VI

ANÁLISE NUMÉRICA PARA O

CASO BIDIMENSIONAL

Este capítulo apresenta os resultados obtidos com a extensão da formulação de operadores de captura para o caso bidimensional. São apresentados dois exemplos, o primeiro descreve uma barra bidimensional engastada em uma extremidade e livre na outra. O segundo exemplo analisado é o de uma membrana submetida a condição inicial de velocidade.

VI.1 – BARRA HOMOGENEA BIDIMENSIONAL

Esse exemplo considera uma barra elástica, modelada de forma bidimensional, ou seja, a dimensão na direção y também é considerada. A barra está submetida a um carregamento aplicado subitamente na direção longitudinal, uniformemente distribuído sobre a extremidade livre e mantido constante durante o tempo de análise, conforme ilustrado na Figura VI. 1.

As dimensões da barra são: comprimento, $L_x=4,0\text{m}$, altura $L_y=0,02\text{m}$, seção transversal quadrada com área igual a $4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, e suas propriedades físicas são: $E = 1 \text{ N/m}^2$ e $\rho = 1,0 \text{ kg/m}^3$. A velocidade de propagação do meio na direção longitudinal é $c = 1,0 \text{ m/s}$. No problema, o valor do coeficiente de Poisson é igual a zero. O carregamento utilizado é a função Heaviside ao longo do tempo, conforme Figura IV. 3.

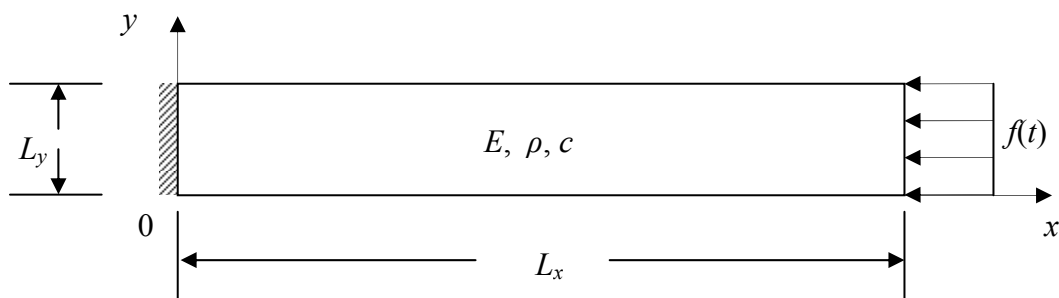


Figura VI. 1 – Modelo físico da barra bidimensional.

VI.1.a – Discretização usando Elementos Espaço-Tempo

Nesse caso, a solução via formulação de Galerkin descontínuo no tempo, é feita considerando a barra como um domínio bidimensional. Assim, como no caso unidimensional, a variável de tempo e agora as duas variáveis espaciais são representadas juntas, utilizando-se agora elementos hexaédricos espaço-tempo de 27 nós. A Figura VI. 2 ilustra a malha de elementos finitos espaço-tempo para esse exemplo. Nessa figura estão apresentados somente os nós funcionais das faces visíveis.

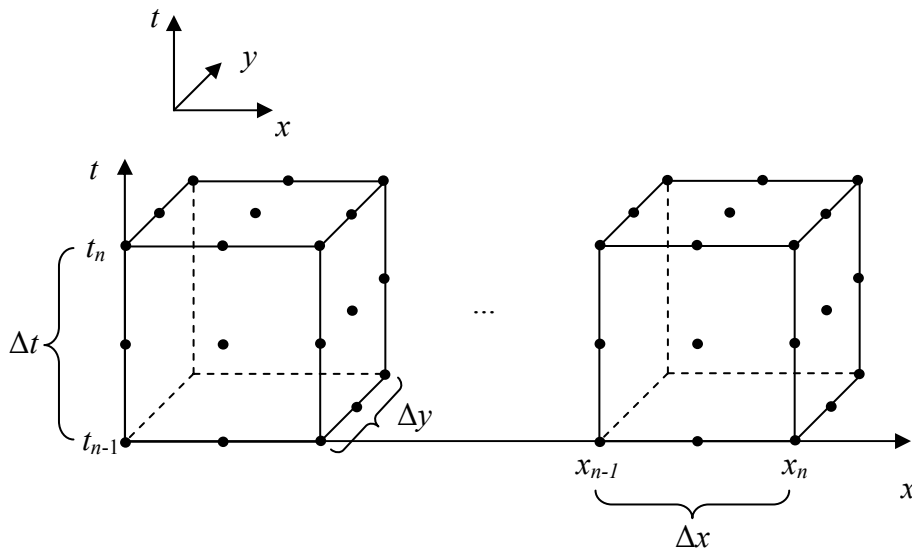


Figura VI. 2 – Discretização espaço-tempo com elementos hexaédricos.

Para representar o domínio espacial são consideradas duas malhas, uma utilizando elementos regulares, Figura VI. 3 e a outra, com elementos não-regulares, Figura VI. 4. Em ambas as malhas são utilizados 200 elementos espaço-tempo, com 3.609 pontos nodais, sendo a variável temporal considerada regular, ou seja, não é considerada distorção na representação da variável tempo.

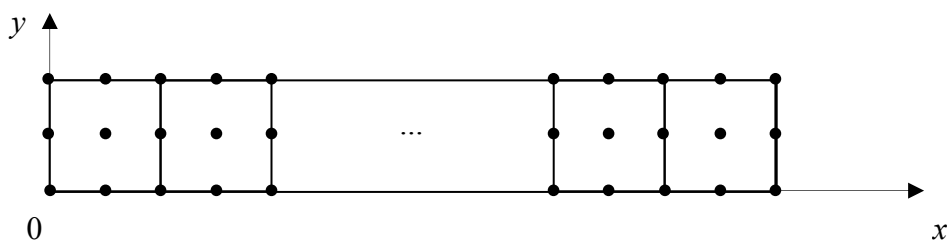


Figura VI. 3 – Discretização espacial da barra com elementos regulares, sem a variável tempo.

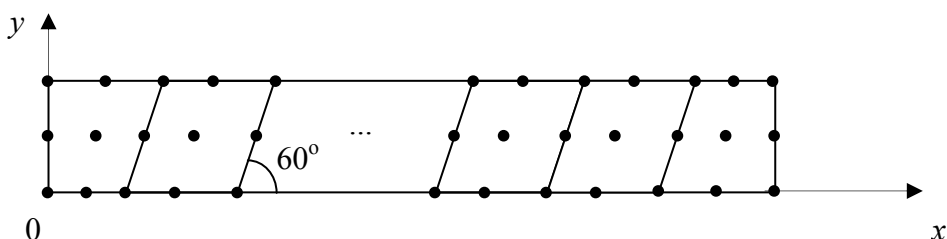


Figura VI. 4 – Discretização espacial da barra com elementos não-regulares, sem a variável tempo.

Para este exemplo, tanto para malha regular quanto para malha distorcida, foram realizados testes com 4 métodos:

- HHT, com parâmetros $\alpha_f = -0,1$, $\beta = 0,3025$ e $\gamma = 0,6$;
- TDG, formulação descontínua sem operador de captura;
- TDG+GLS+DC, formulação descontínua, com o operador proposto DC, mais o termo de estabilização GLS, este último quando necessário;
- TDG+HH, formulação descontínua, com o termo de estabilização GLS, em todos os casos testados, mais o operador de captura HH.

Os resultados a seguir ilustram o comportamento do deslocamento e da velocidade ao longo do tempo para o carregamento tipo Heaviside aplicado na extremidade livre. As respostas foram obtidas para os números de Courant 0,57, 1,03, 1,57 e 2,03. Da Figura VI. 5 à Figura VI. 8 estão ilustrados o comportamento das variáveis para a malha espacial com elementos regulares, enquanto que da Figura VI. 9 até a Figura VI. 12 estão apresentados os resultados para a malha distorcida no espaço.

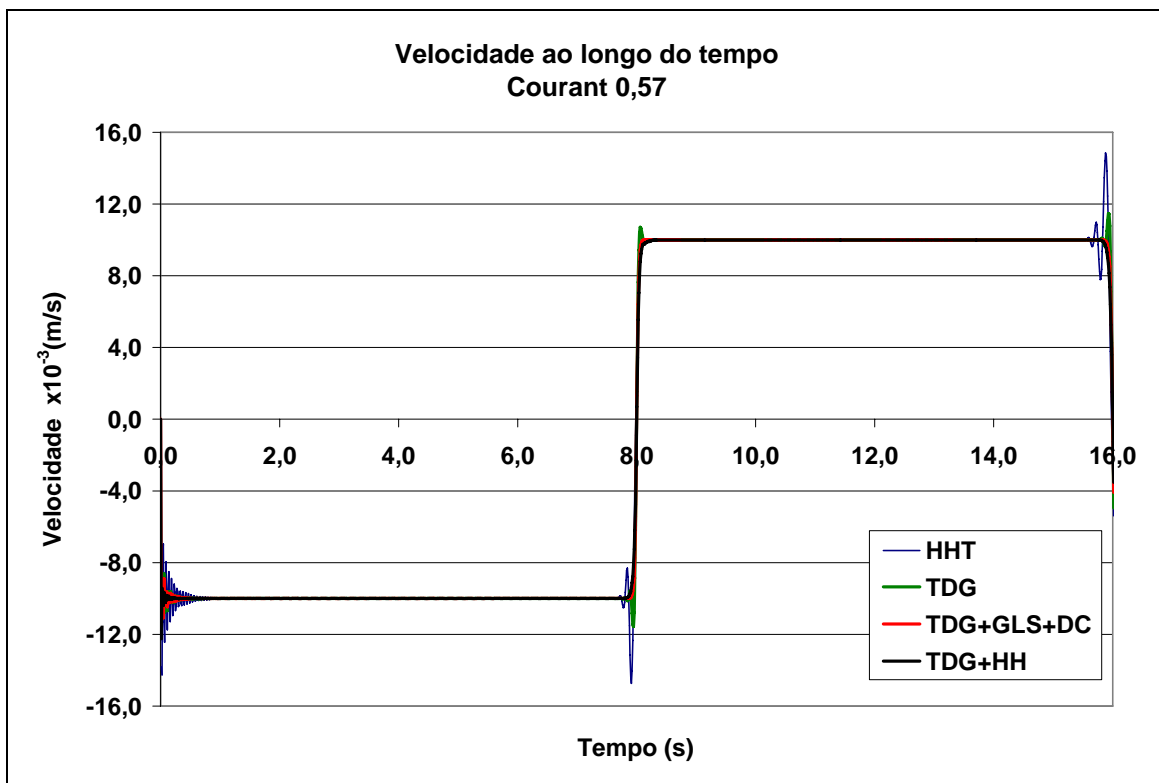
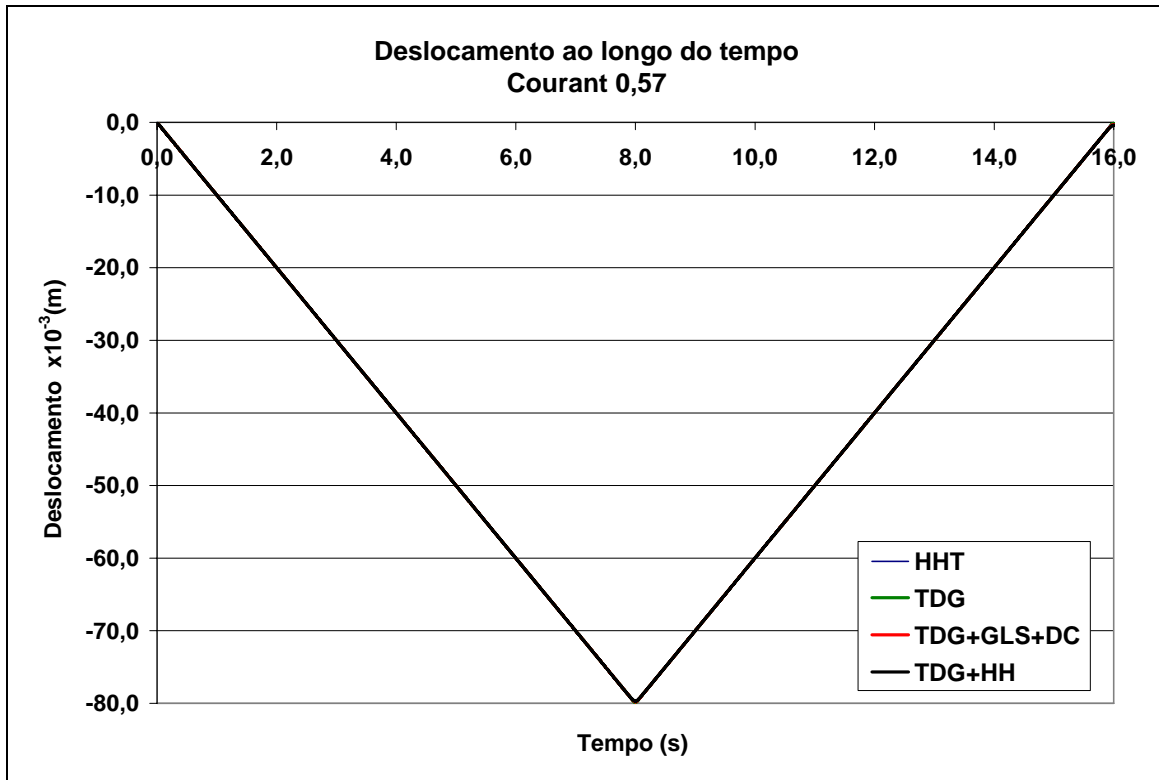


Figura VI. 5 – Resultados obtidos para a barra homogênea discretizada com a malha regular, para o número de Courant 0,57.

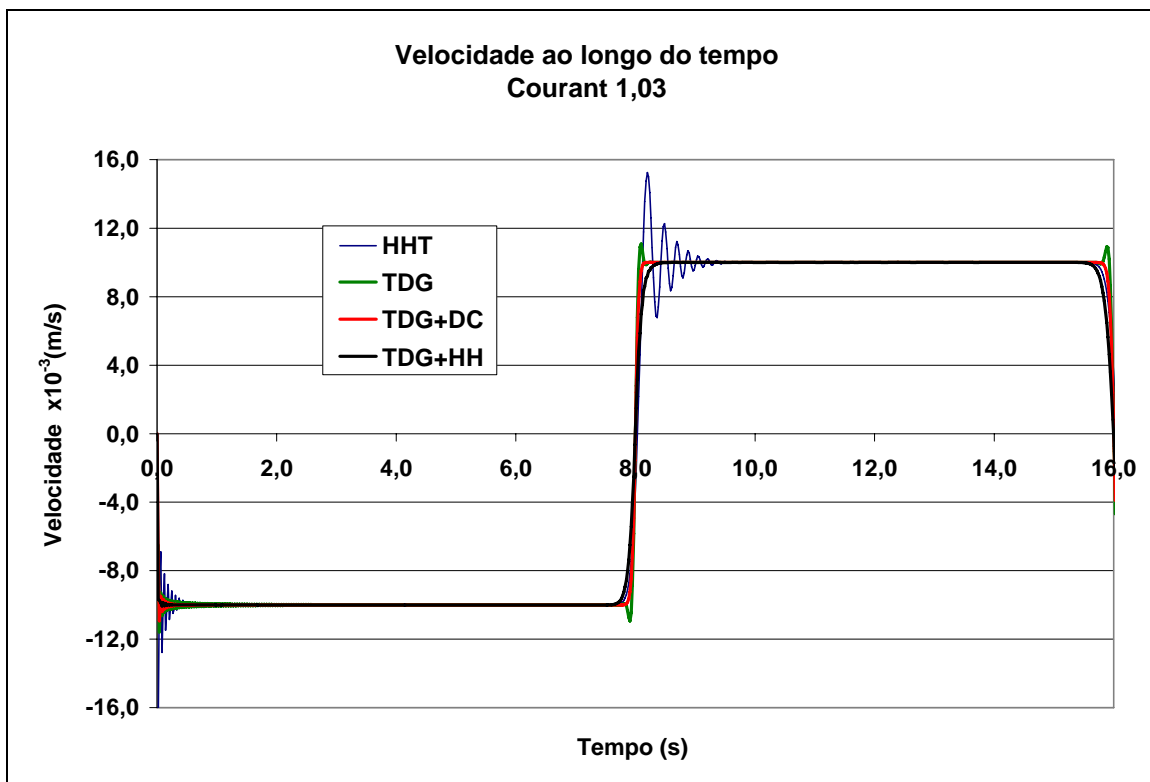
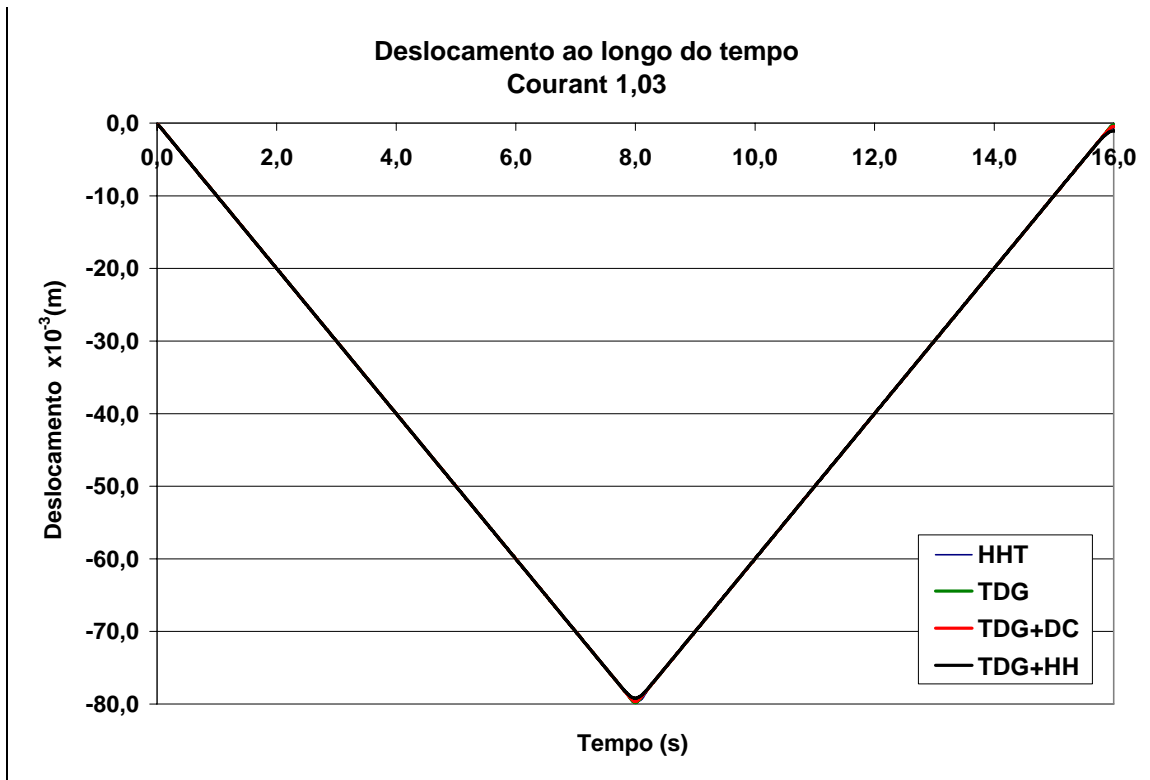


Figura VI. 6 – Resultados obtidos para a barra homogênea discretizada com a malha regular, para o número de Courant 1,03.

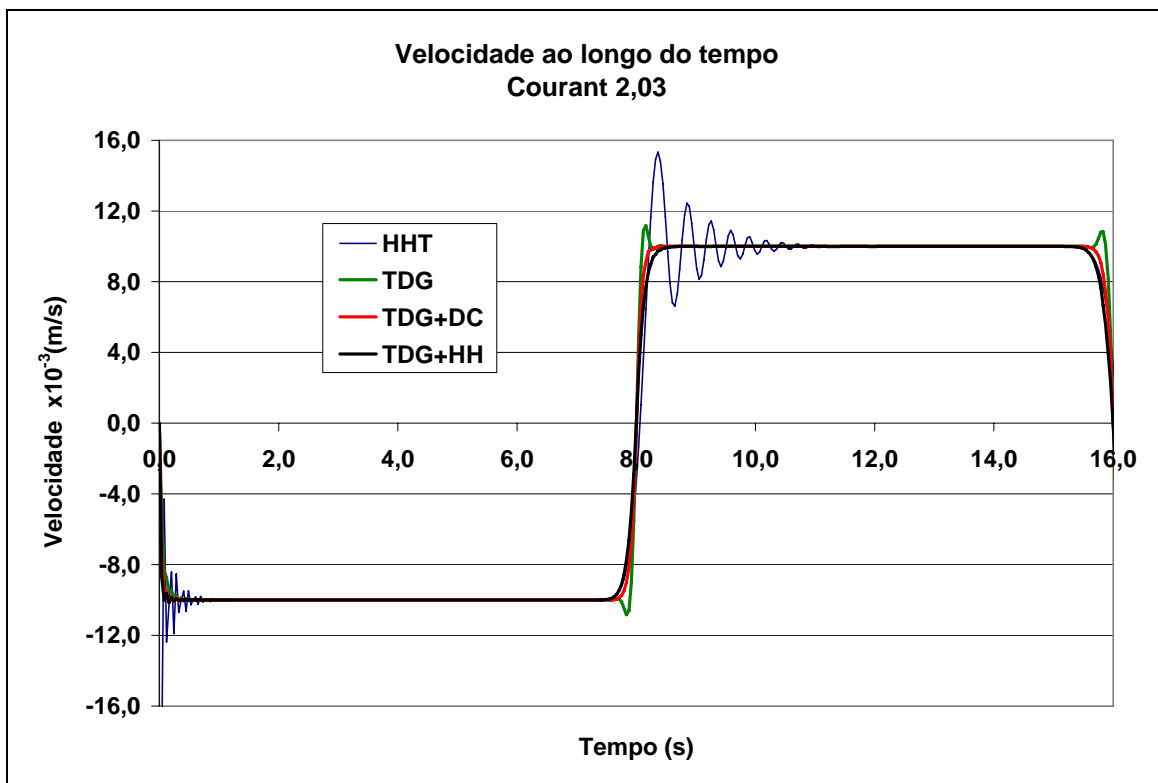
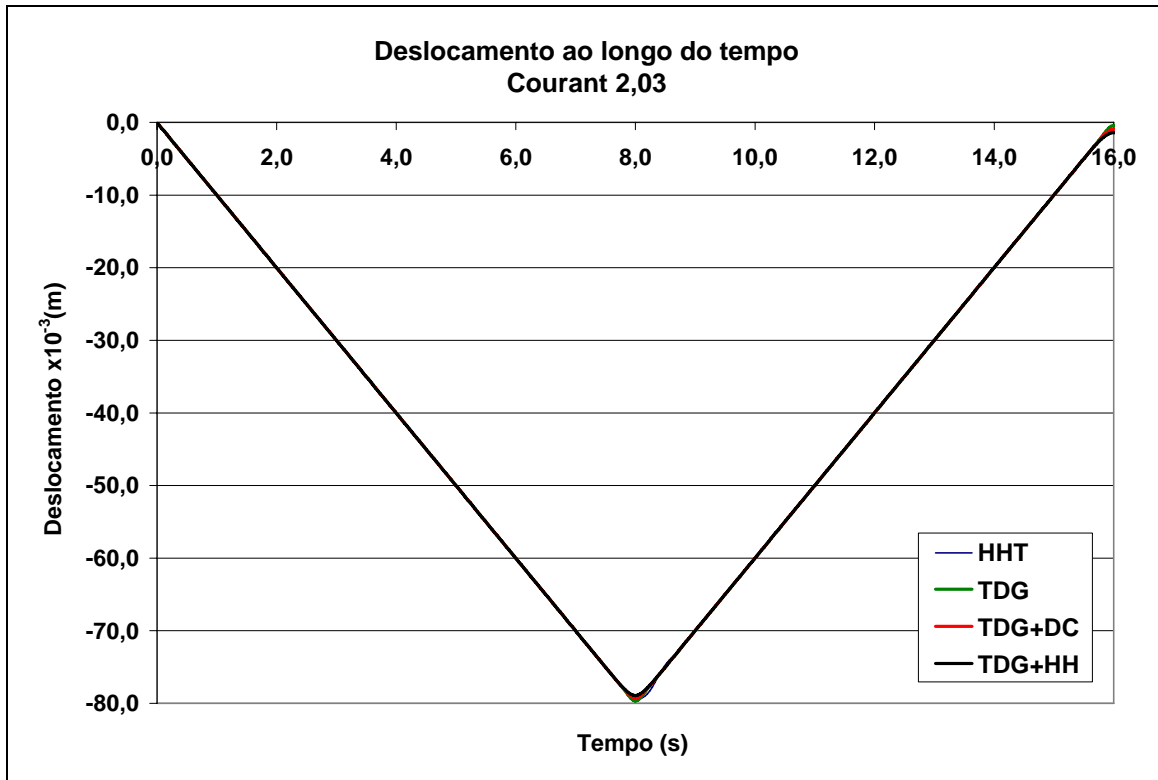


Figura VI. 7 – Resultados obtidos para a barra homogênea discretizada com a malha regular, para o número de Courant 2,03.

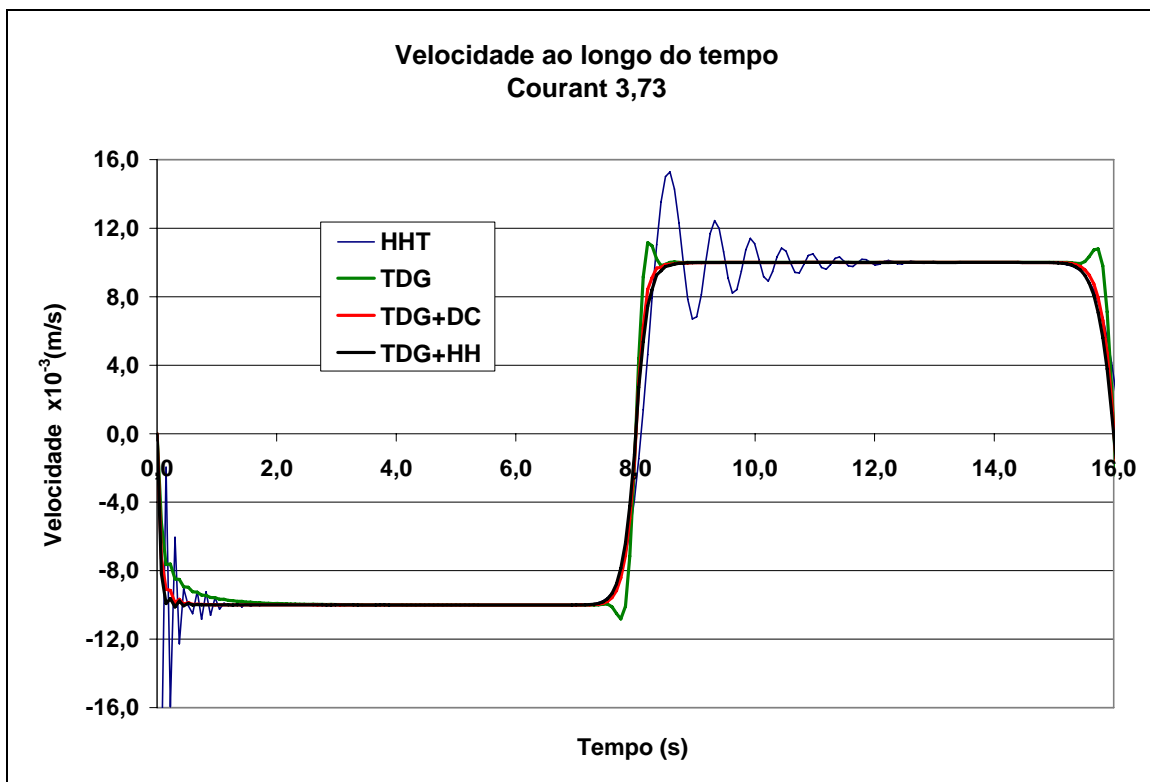
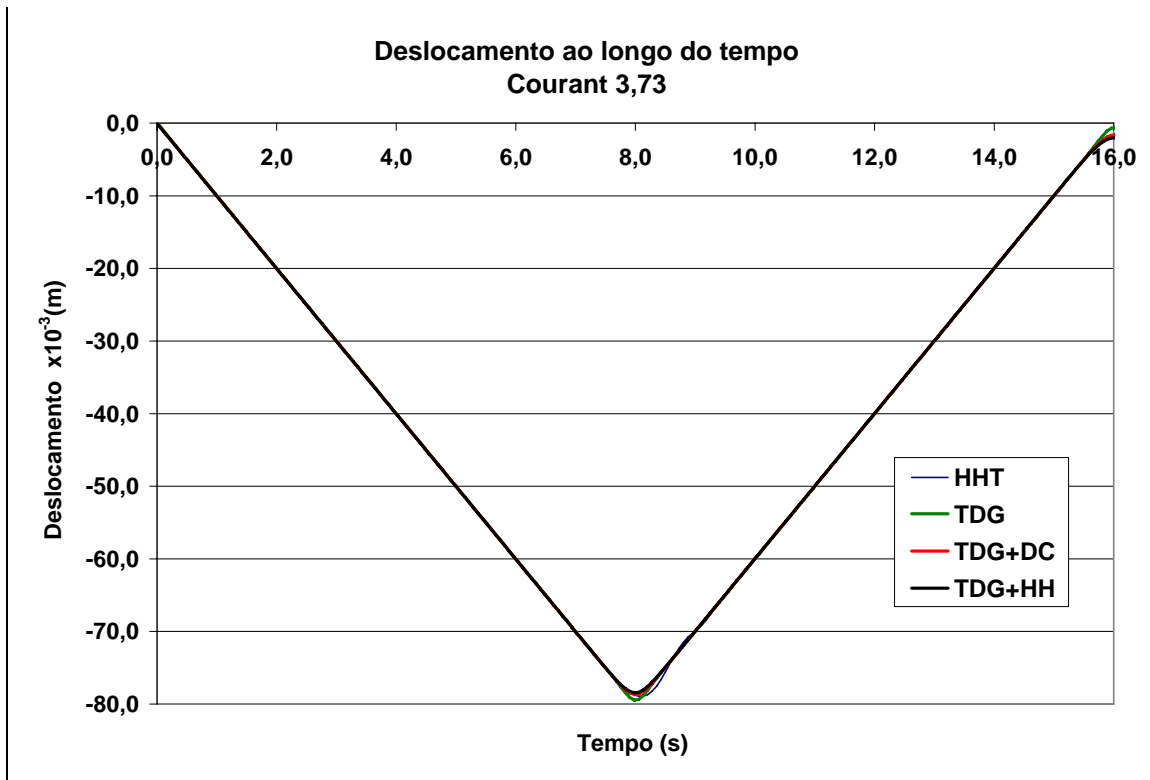


Figura VI. 8 – Resultados obtidos para a barra homogênea discretizada com a malha regular, para o número de Courant 3,73.

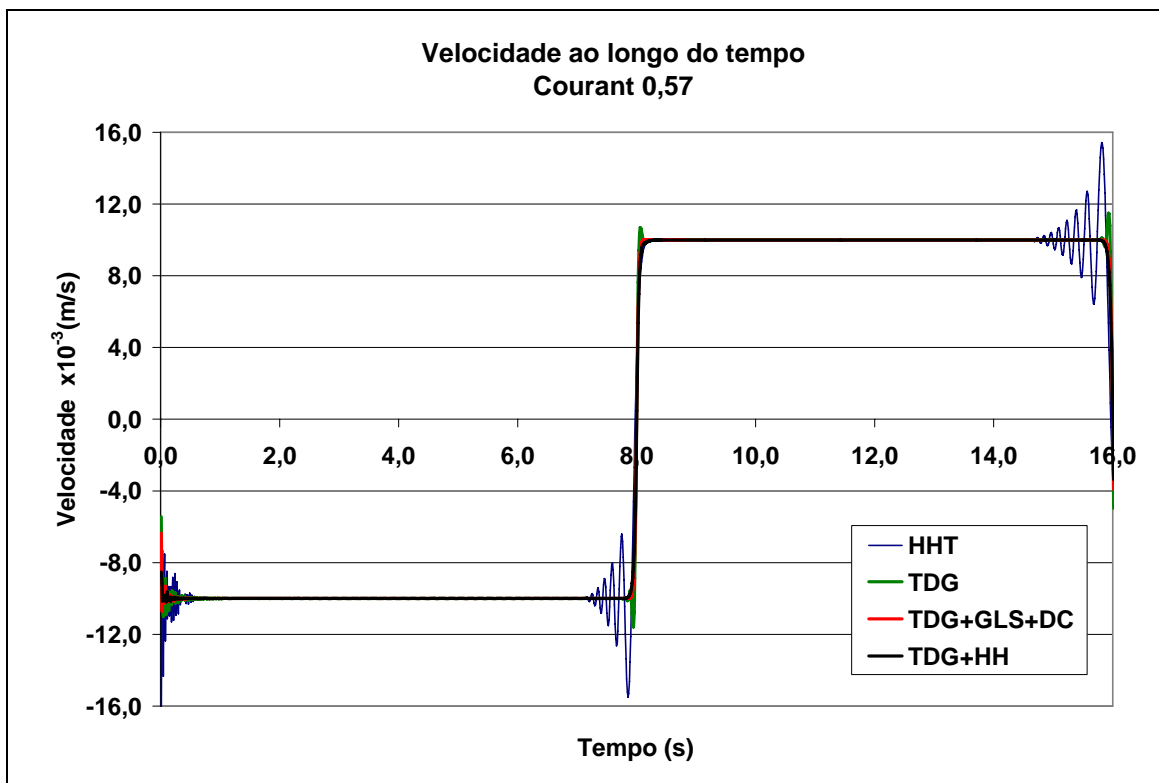
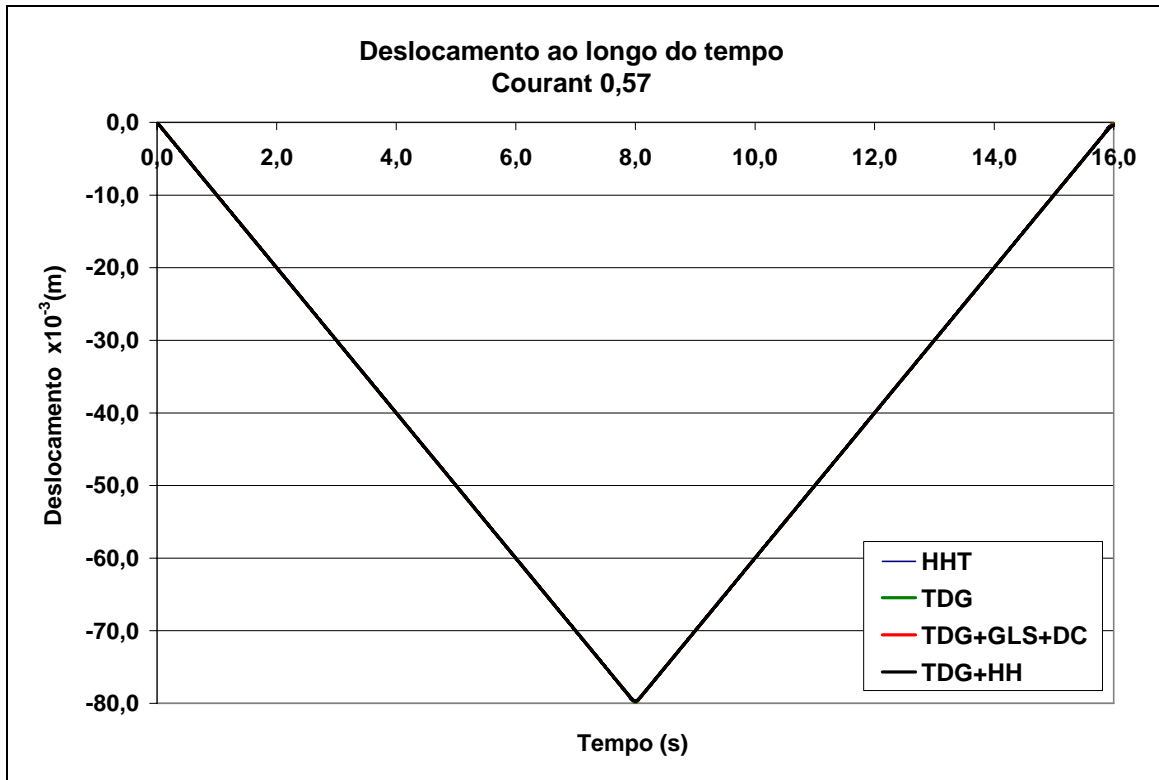


Figura VI. 9 – Resultados obtidos para a barra homogênea discretizada com a malha não-regular, para o número de Courant 0,57.

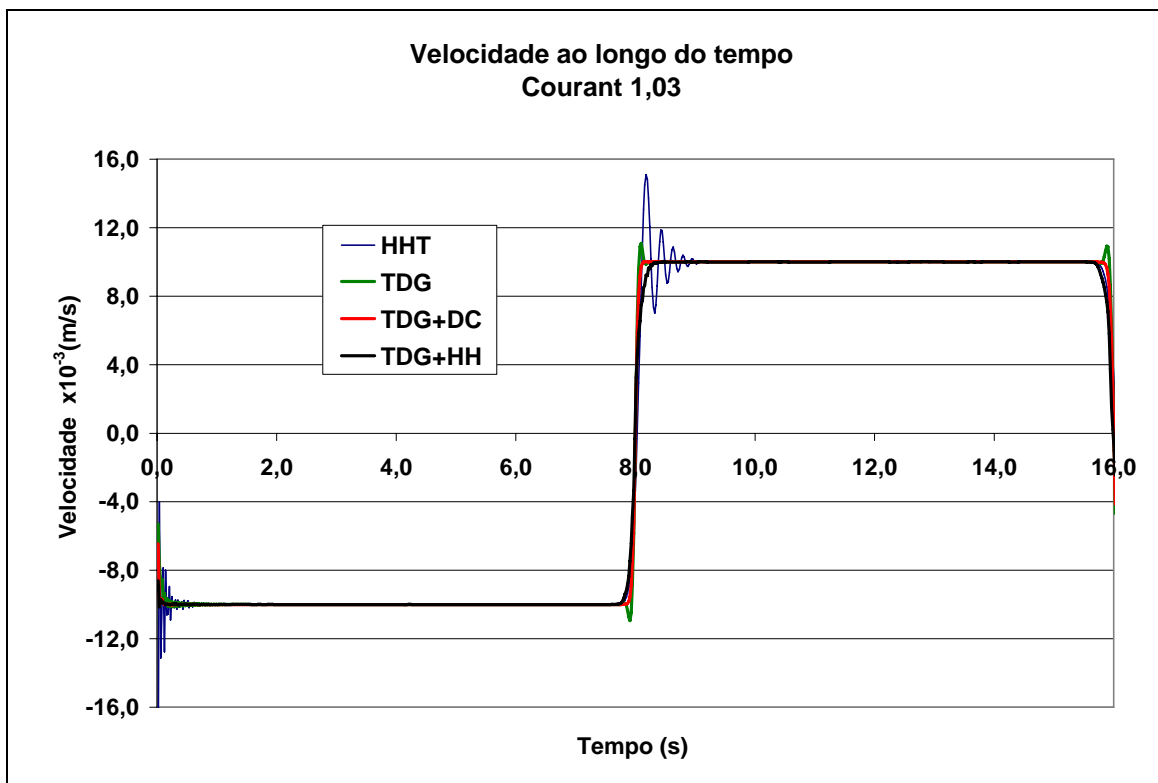
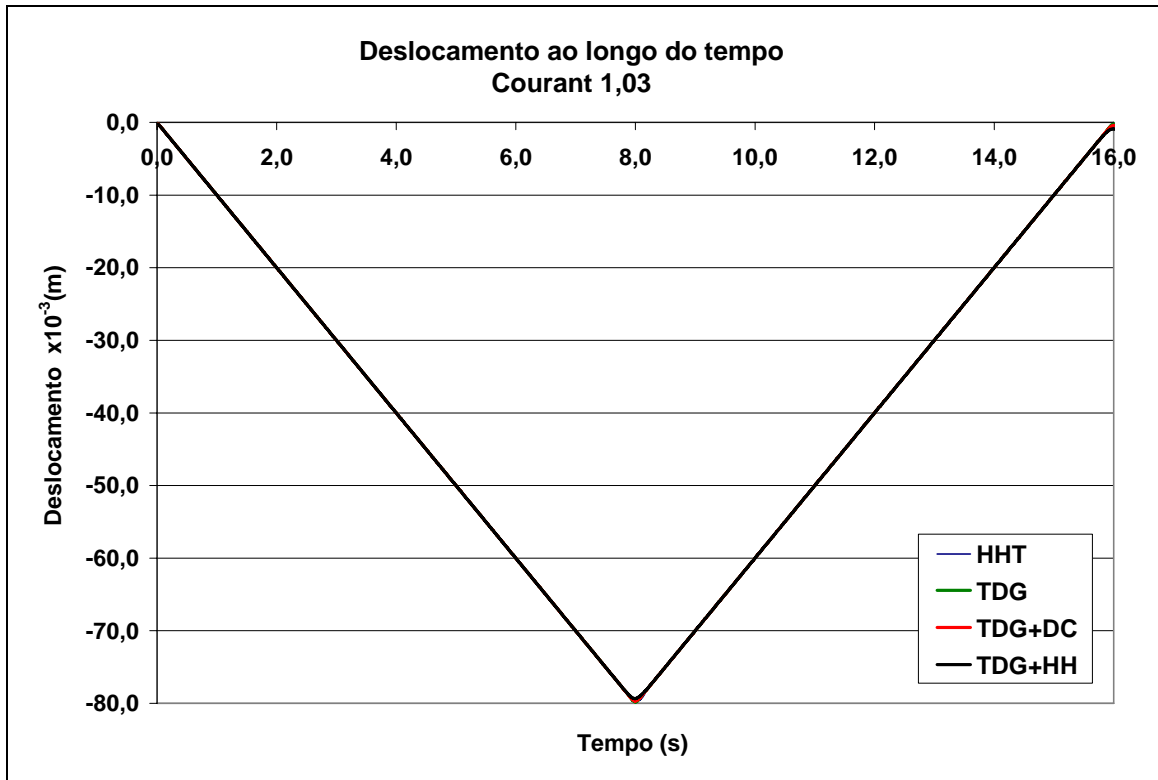


Figura VI. 10 – Resultados obtidos para a barra homogênea discretizada com a malha não-regular, para o número de Courant 1,03.

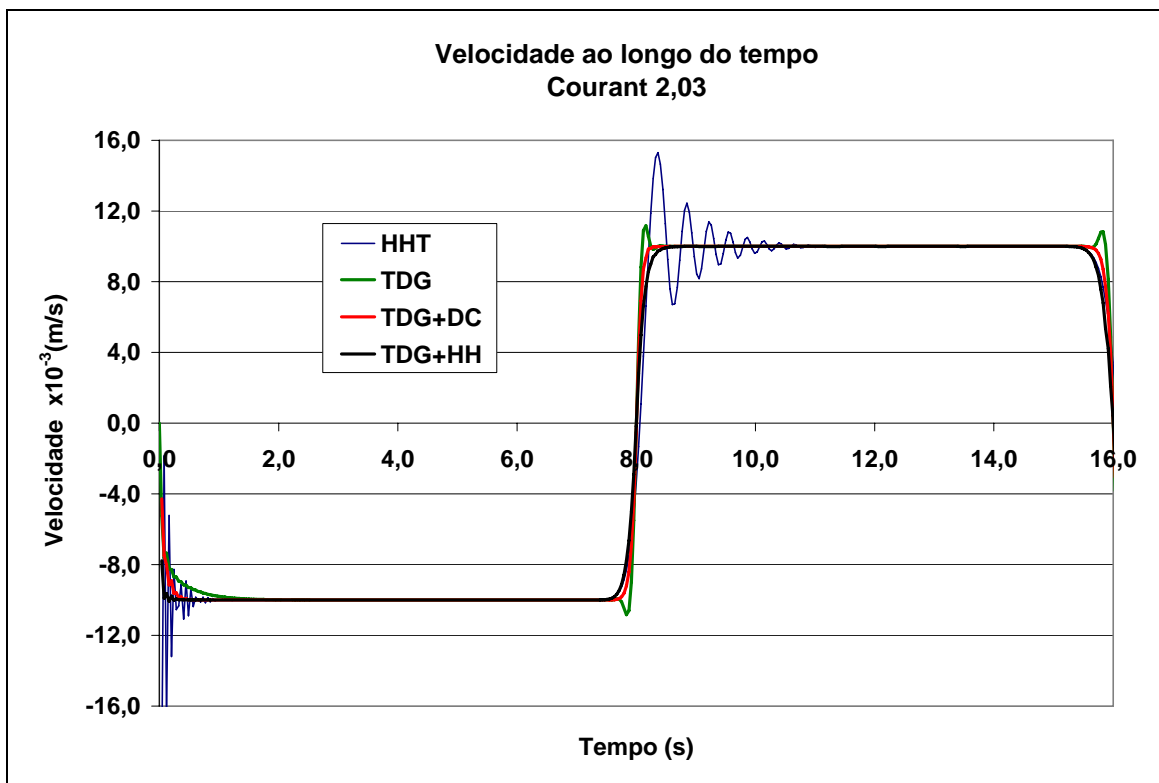
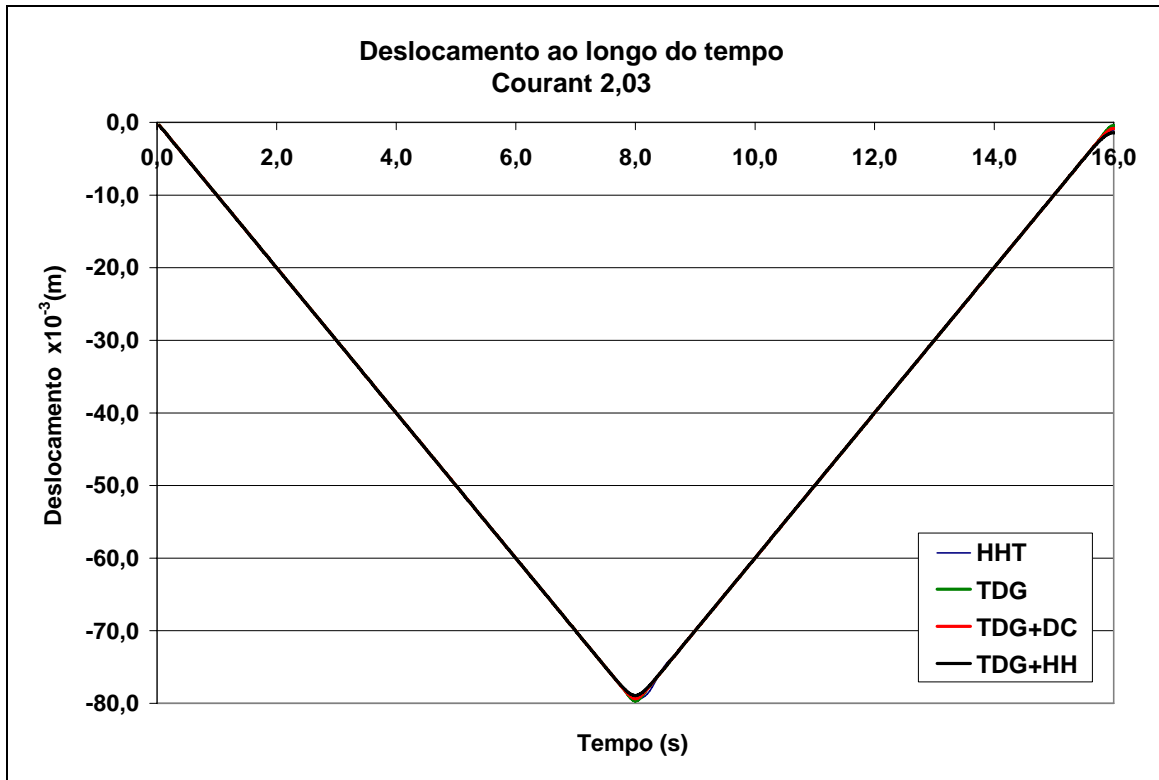


Figura VI. 11 – Resultados obtidos para a barra homogênea discretizada com a malha não-regular, para o número de Courant 2,03.

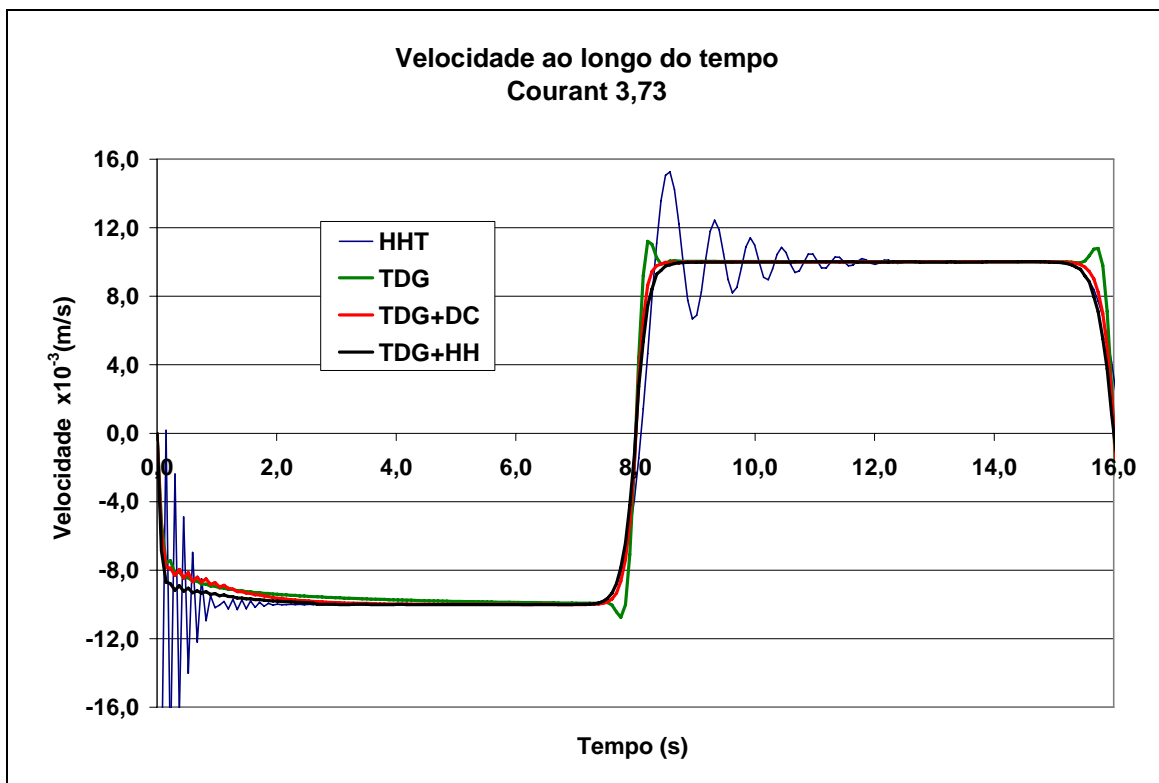
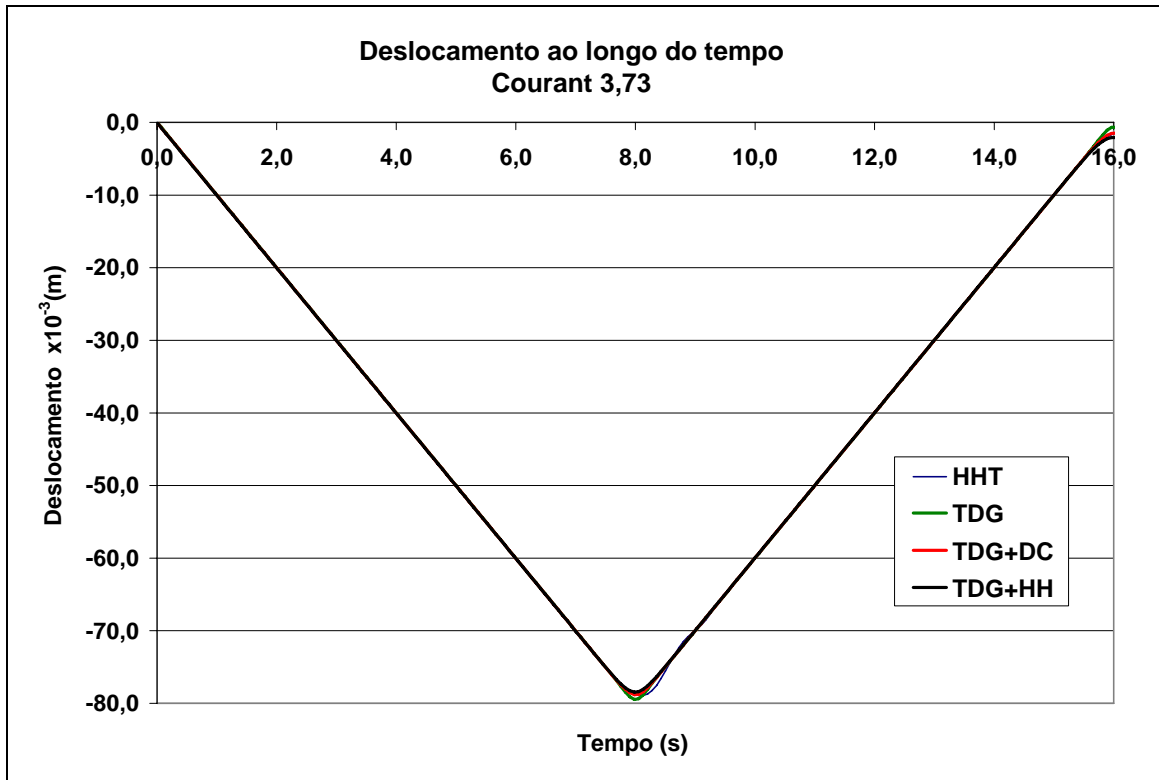


Figura VI. 12 – Resultados obtidos para a barra homogênea discretizada com a malha não-regular, para o número de Courant 3,73.

VI.1.b – Comentários sobre os resultados da barra homogênea

O comportamento do deslocamento, para ambas as malhas espaciais, regular e distorcida, se mostrou equivalente, já que esta variável tem um comportamento suave ao longo do tempo. Para Courant 0,57 todos os métodos representam bem a variável deslocamento. Para Courant 1,03 nota-se um pequeno amortecimento produzido pelo operador HH em relação aos outros métodos. Para Courant 2,03 e 3,73 percebe-se uma defasagem para o método HHT, e um ligeiro amortecimento para os métodos TDG+DC e TDG+HH, enquanto que o método TDG permanece mais próximo da solução analítica.

Com relação à velocidade, para Courant 0,57, as formulações que utilizam operadores de captura, ou seja, TDG+DC e TDG+HH, têm um excelente desempenho, já o método HHT apresenta oscilações próximas às descontinuidades, sendo estas mais pronunciadas para a malha distorcida. Para os números de Courant 1,03 e 2,03, o operador proposto neste trabalho apresentou melhor desempenho, com menos amortecimento do que o operador HH para ambas as malhas. Para Courant 3,73 todos os métodos começam a apresentar amortecimento. Essas conclusões foram observadas nos instantes $t = 8,0$ e $16,0s$.

De uma forma geral, os resultados obtidos com o operador de captura foram melhores em relação os outros métodos. Percebe-se que para os instantes iniciais da análise, a malha regular produziu menos oscilações na velocidade e se manteve mais próxima da solução analítica do que os mesmos resultados obtidos com a malha distorcida.

VI.2 – MEMBRANA

O próximo exemplo analisado é o de uma membrana quadrada fixada em todo o seu contorno e submetida a condição inicial de velocidade. As variáveis estudadas são o deslocamento e velocidade transversais ao longo do tempo. Para essa condição inicial, a velocidade apresenta descontinuidades e variações rápidas de sentido, servindo dessa forma para avaliar a formulação proposta. Destaca-se que o movimento transversal da membrana é descrito pela equação da onda acústica bidimensional e que a mesma possui soluções analíticas para as variáveis citadas via série de potências (ANEXO D), cujos valores máximos dos somatórios foram determinados como sendo igual a 2.000 termos, acima desse valor não se notou diferença nas respostas obtidas, maiores detalhes podem ser encontrados em [43] e [46].

A membrana utilizada possui comprimento, L_x , e largura, L_y iguais a 1m, e sua velocidade de propagação é de 1m/s, sendo submetida a uma condição inicial de velocidade, de valor unitário, aplicada subitamente sobre uma área quadrada A, cujo centro coincide com o centro da membrana, ilustrado em perspectiva na Figura VI. 13. As bordas são fixas, e as variáveis observadas são o deslocamento e velocidade, no centro da mesma, posição (0,5m, 0,5m), identificado pelo ponto B, ver Figura VI.14. O tempo total de análise é de 2,0s.

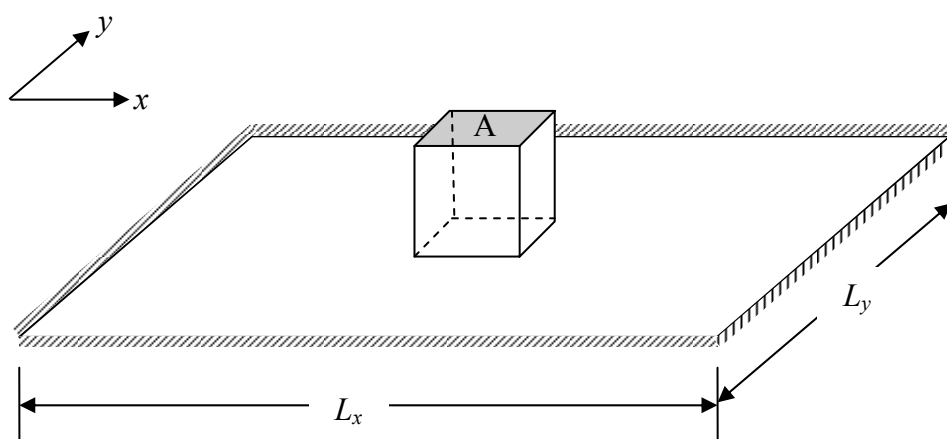


Figura VI. 13 – Vista em perspectiva do problema da membrana, com a região central de aplicação da condição inicial de velocidade.

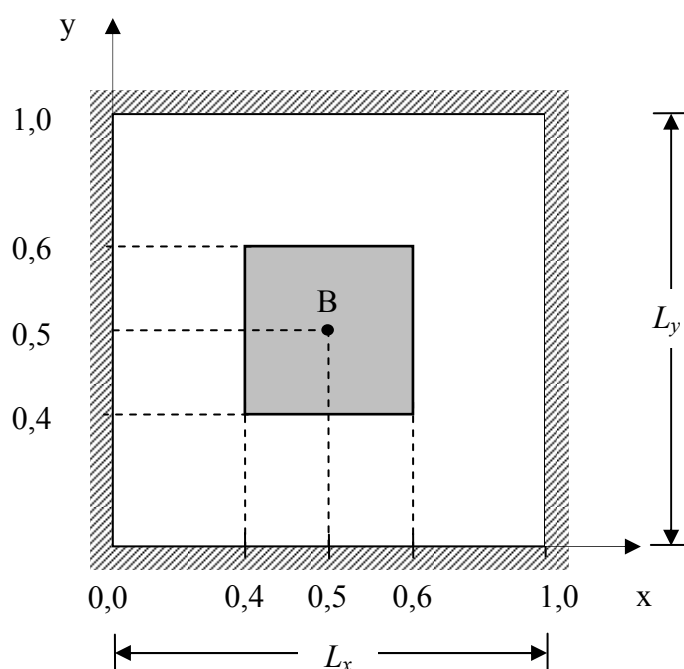


Figura VI. 14 – Vista superior da membrana, com a região central de aplicação da condição inicial de velocidade (dimensões em metros).

Para esse exemplo são feitos dois testes, o primeiro considera a influência do tamanho do passo de tempo nas respostas. E o segundo, avalia o comportamento das variáveis, em função da área de aplicação da condição inicial, o que permite verificar a capacidade de resposta dos métodos.

VI.2.a – Discretização usando Elementos Espaço-Tempo

Devido às condições de simetria do problema, apenas um quarto da membrana foi discretizado por elementos finitos. A solução por Galerkin descontínuo é feita utilizando-se elementos hexaédricos espaço-tempo de 27 nós, similar à Figura VI. 2. A malha que descreve a parte simétrica utiliza 40 elementos em cada direção, $\Delta x = \Delta y = 1,25 \times 10^{-2} \text{m}$, totalizando 1.600 elementos e 19.683 pontos nodais. Para o método semi-discreto, foi utilizada também a condição de simetria em uma malha de elementos finitos padrão, com 40×40 elementos com interpolação quadrática.

Neste exemplo foram aplicados os métodos:

- HHT, com os parâmetros $\alpha_f = -0,1$, $\beta = 0,3025$ e $\gamma = 0,6$;

- TDG, ou seja, a formulação de Galerkin descontínua no tempo, sem o operador de captura;
- TDG+GLS+DC, a formulação descontínua usando o operador de captura DC e o termo GLS, este último usado quando necessário, lembrando que o uso do operador GLS é restrito a faixa de Courant [0,2 a 0,7];
- TDG+HH, ou seja, a formulação descontínua, o termo de estabilização GLS, mais o operador de captura apresentado em [28] e [29].

Ressalta-se que nesse exemplo, utilizou-se o operador de captura HH, com o seu parâmetro τ , o qual foi aplicado em ambas as direções de propagação, pois tal parâmetro foi especificado apenas para o caso unidimensional e não foi apresentada, por aqueles autores, uma expressão para esse parâmetro, τ , para o caso n -dimensional.

VI.2.b – Influência da variação do intervalo de tempo

Este exemplo avalia o comportamento do deslocamento e velocidade ao longo do tempo em função da variação do passo de tempo. Para isto, considerou-se os números de Courant 0,50, 0,75, 1,00, 1,25, 1,50, 1,75 e 2,00. O tempo total de análise é de 2,0s. Cabe destacar que as curvas analíticas foram obtidas para os valores de Δt associados ao número de Courant.

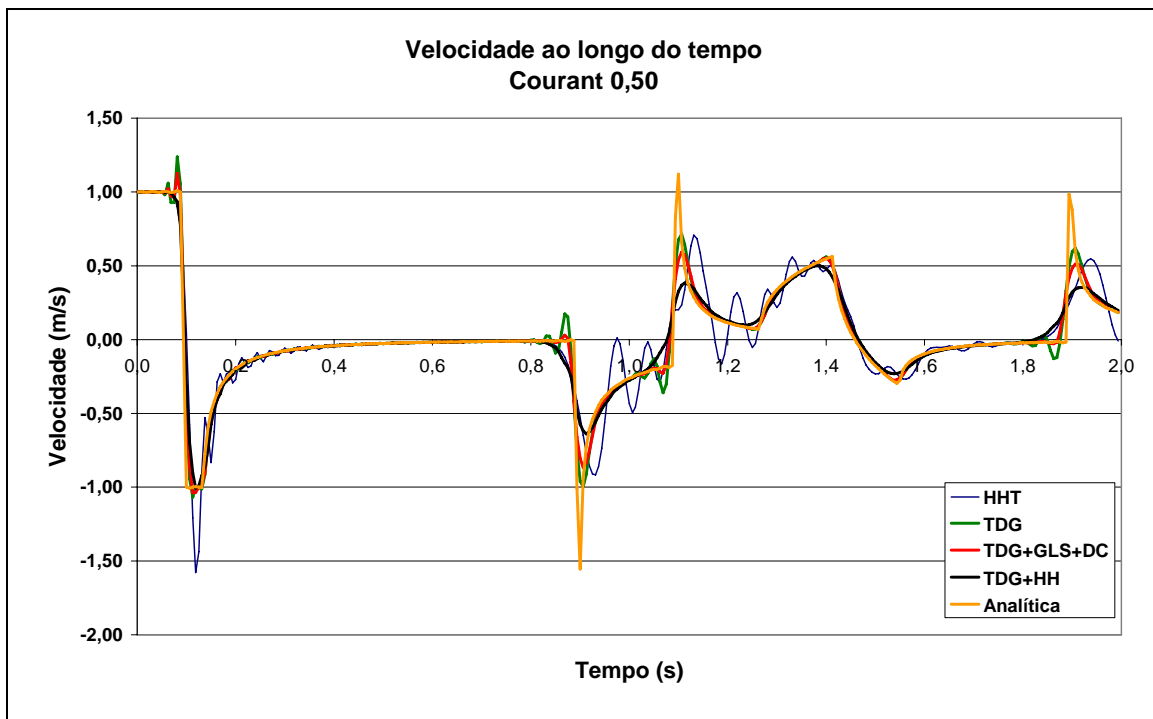
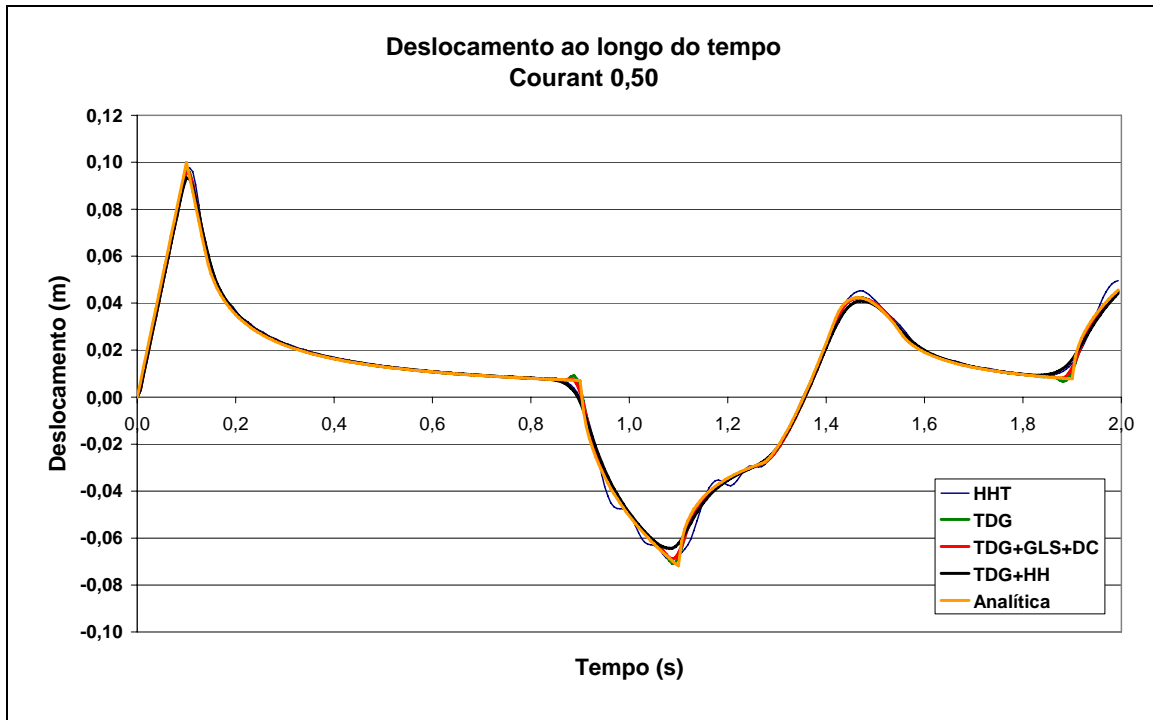


Figura VI. 15 – Comportamento do deslocamento e velocidade para o número de Courant 0,50.

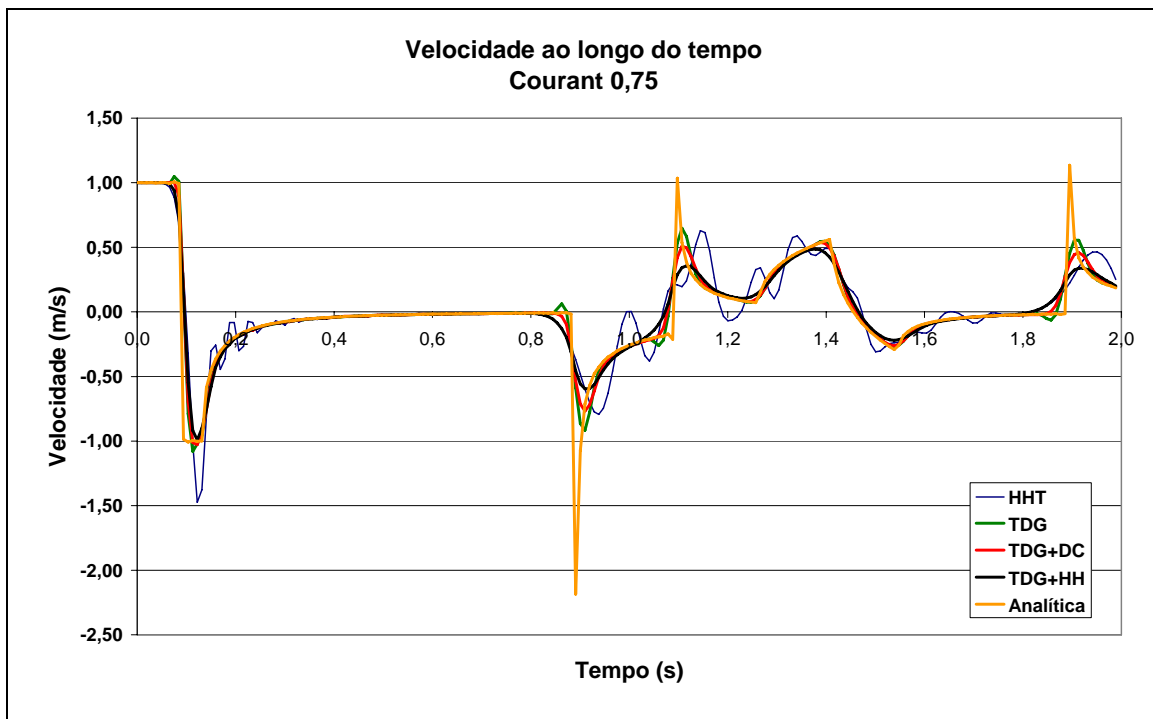
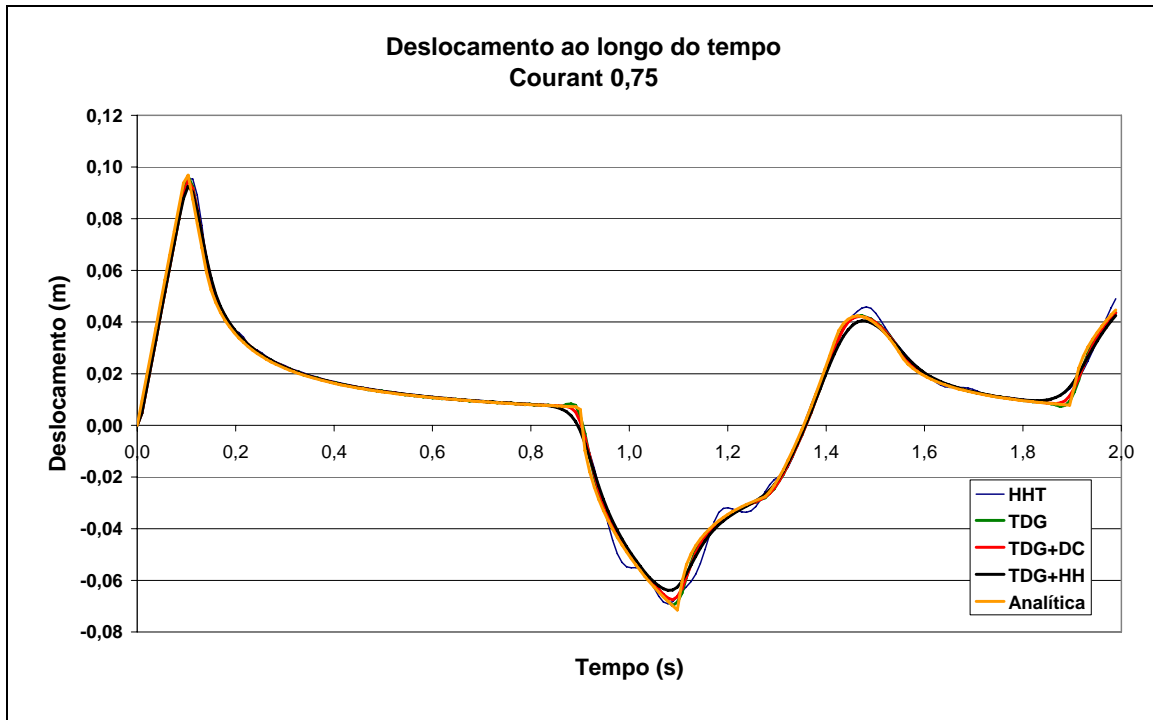


Figura VI. 16 – Comportamento do deslocamento e velocidade para o número de Courant 0,75.

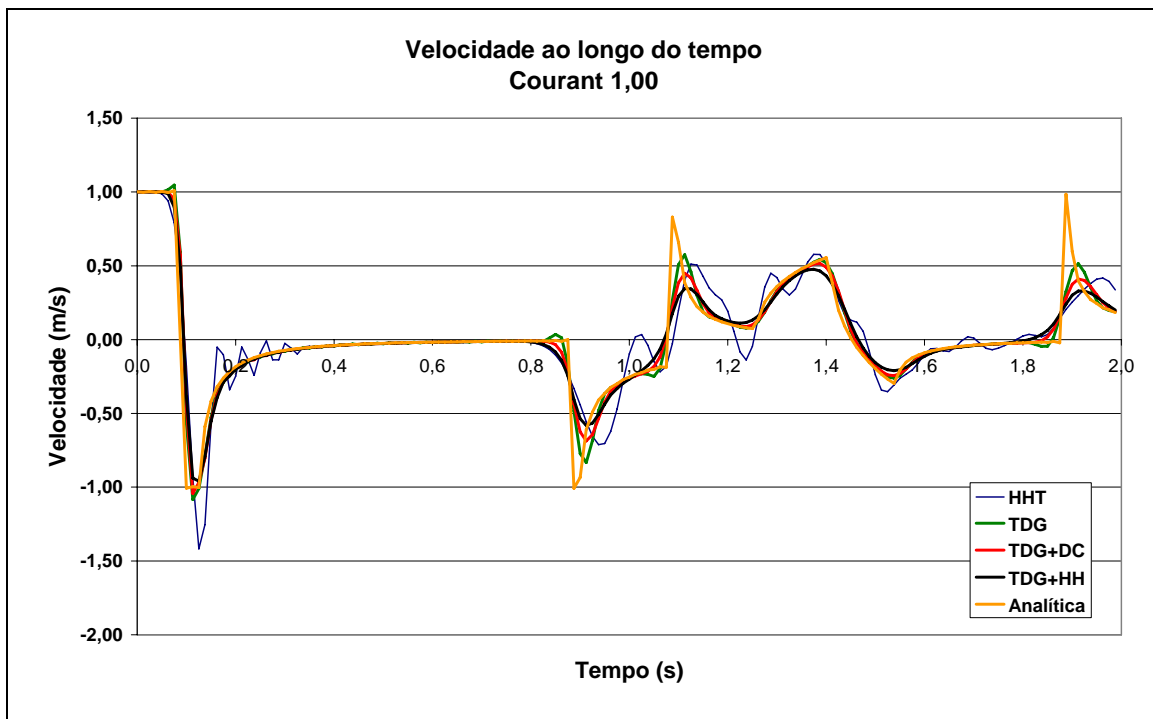
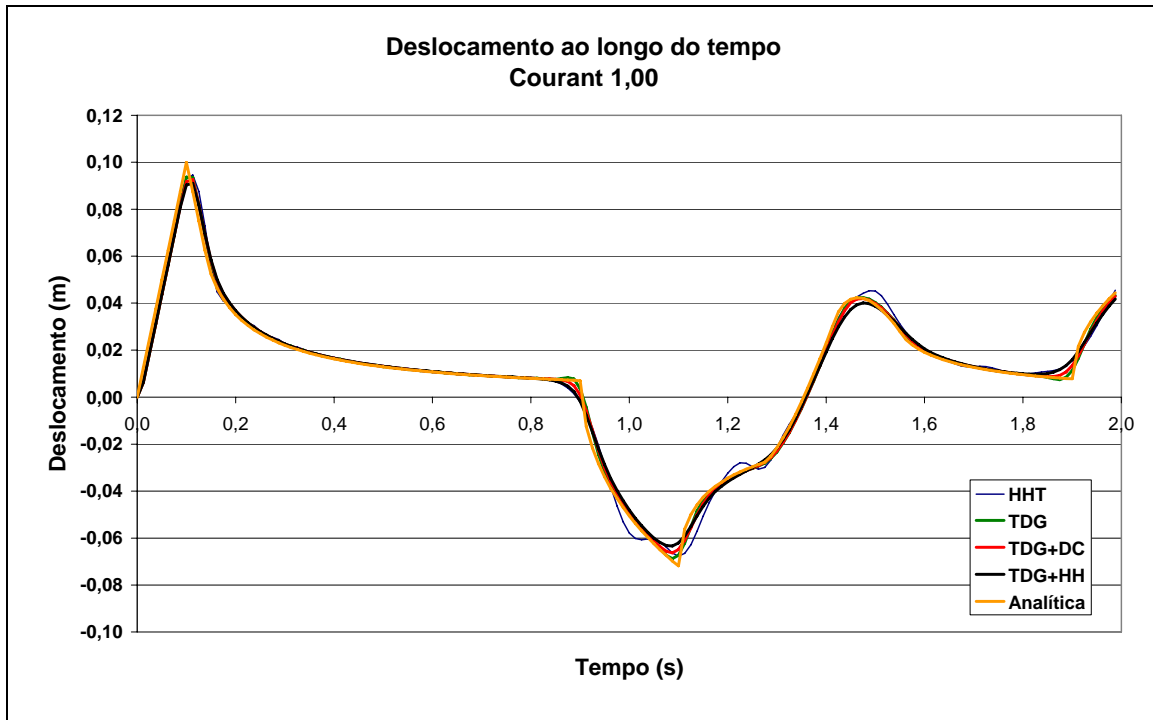


Figura VI. 17 – Comportamento do deslocamento e velocidade para o número de Courant 1,00.

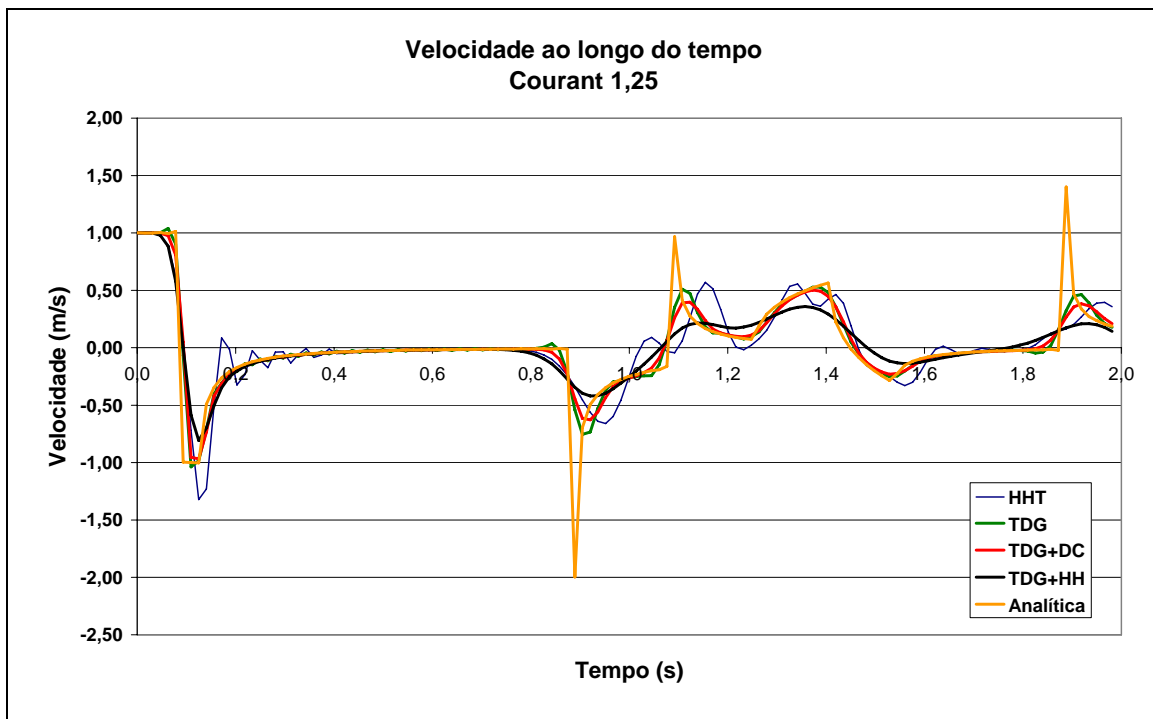
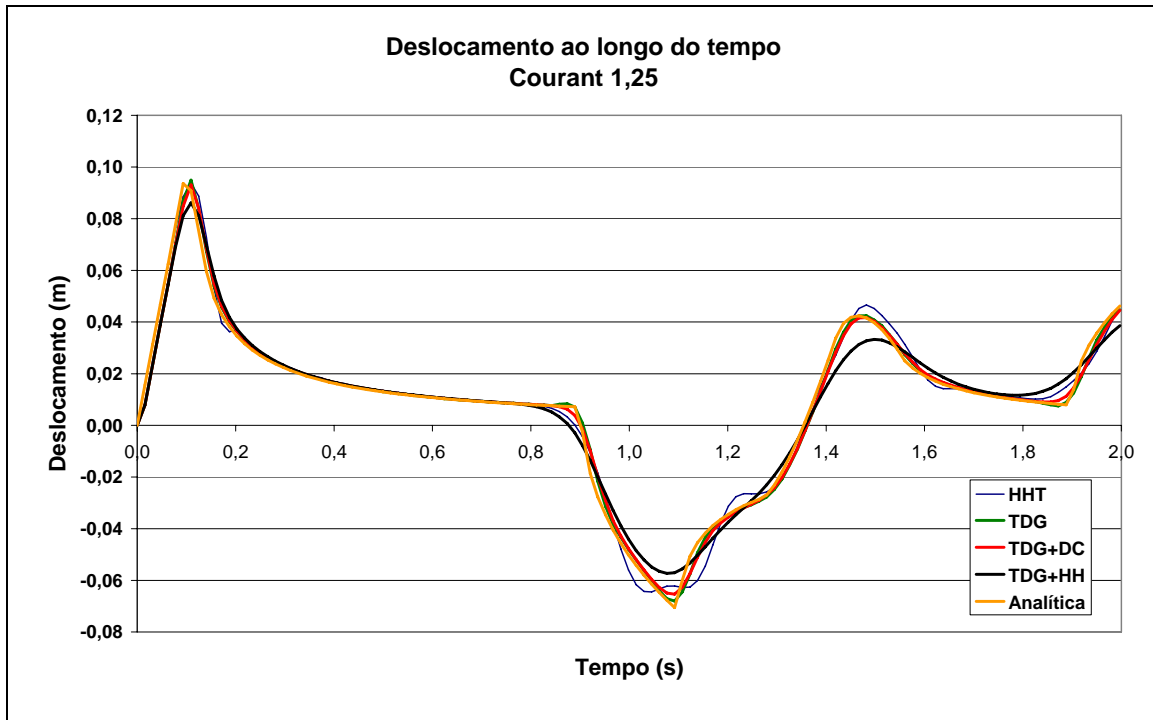


Figura VI. 18 – Comportamento do deslocamento e velocidade para o número de Courant 1,25.

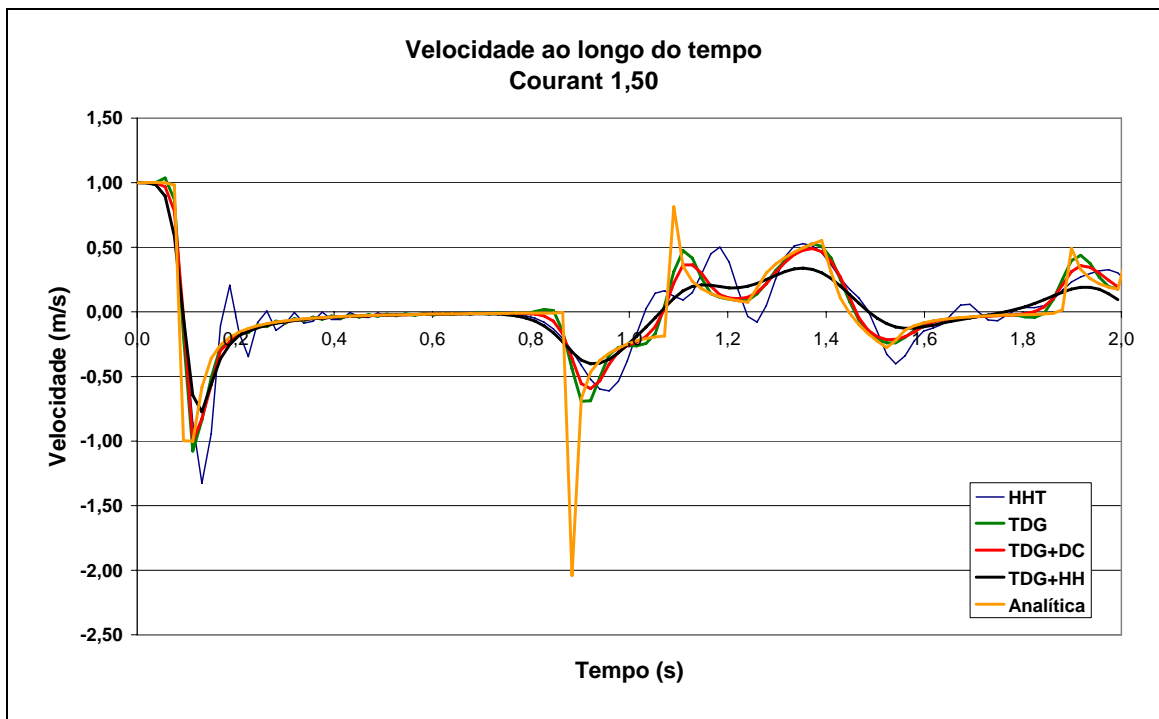
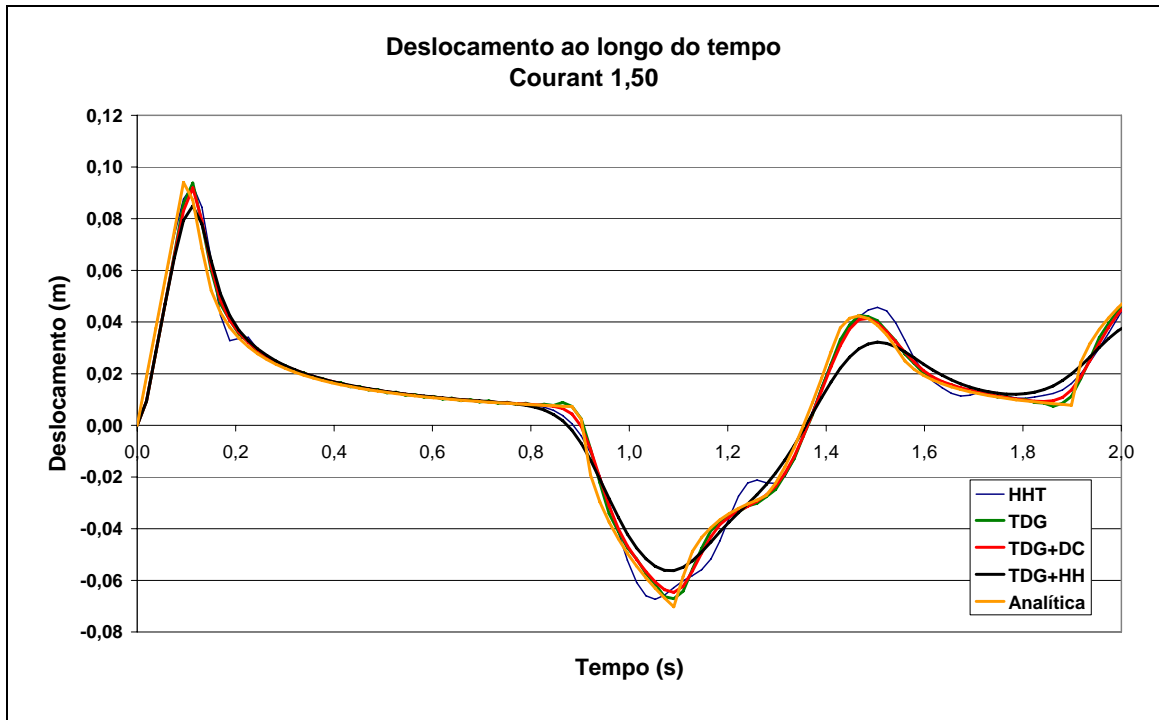


Figura VI. 19 – Comportamento do deslocamento e velocidade para o número de Courant 1,50.

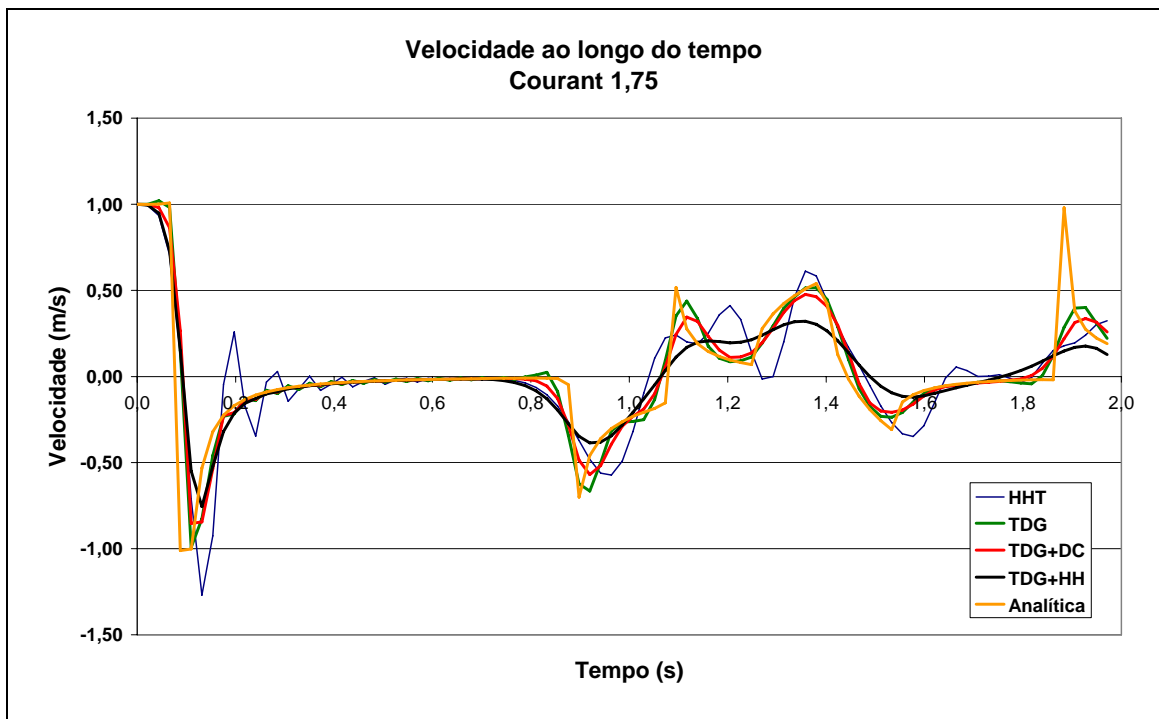
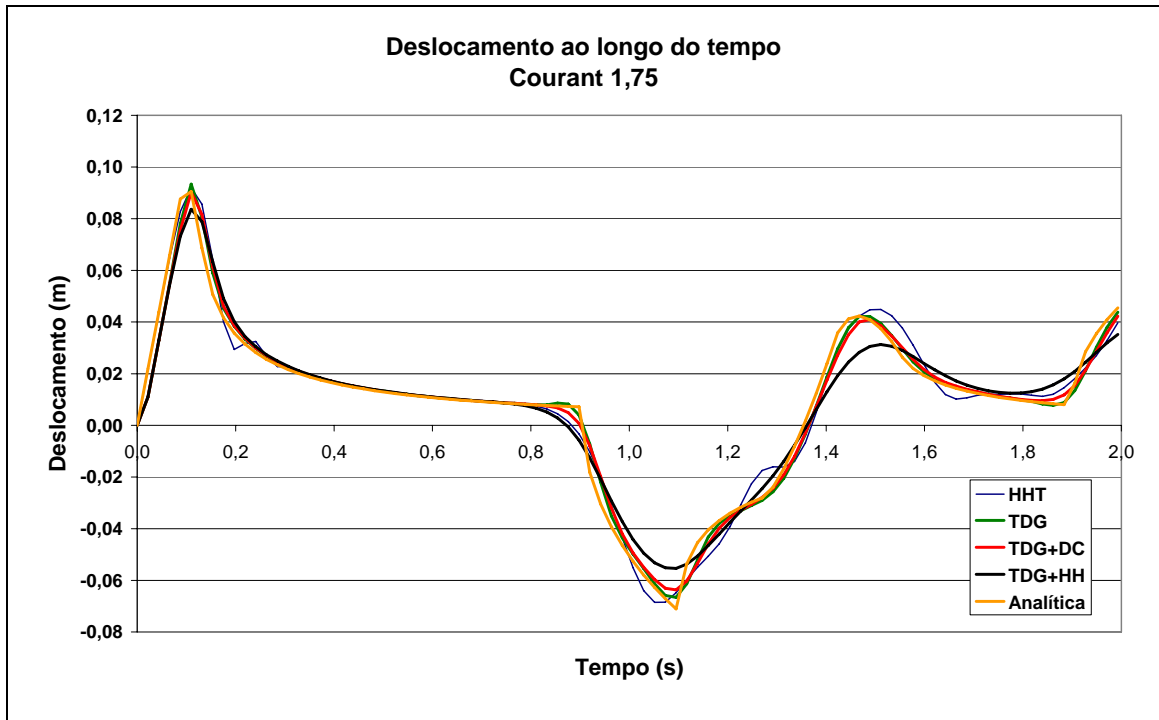


Figura VI. 20 – Comportamento do deslocamento e velocidade para o número de Courant 1,75.

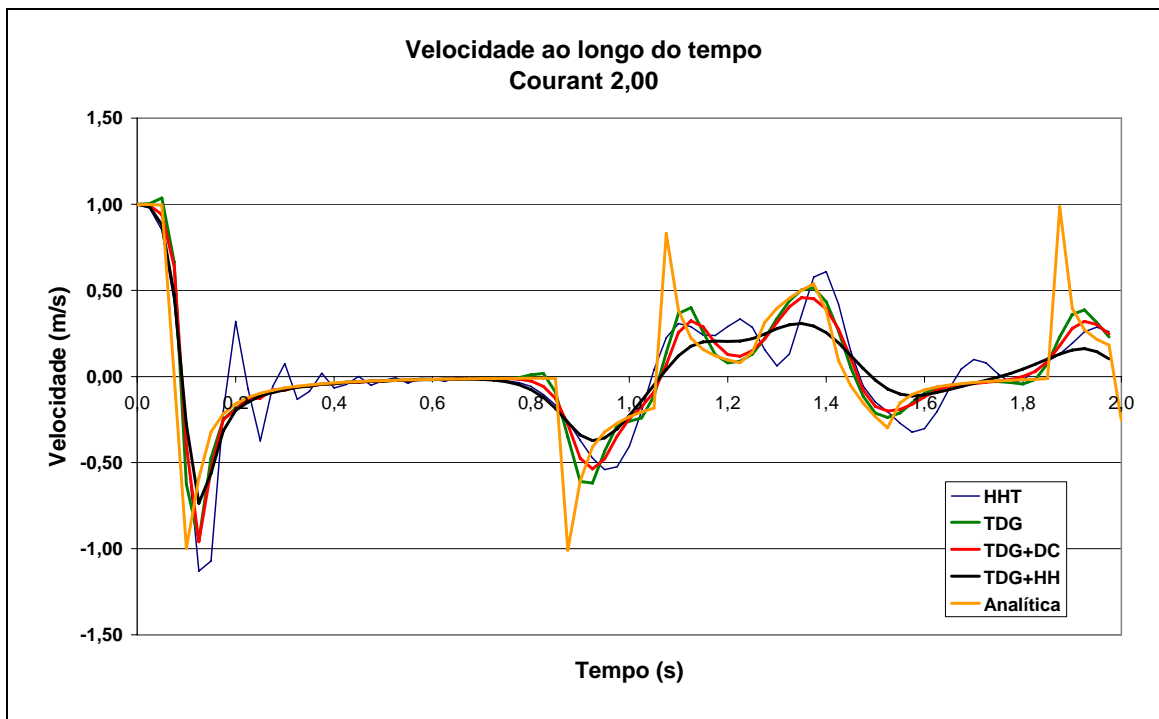
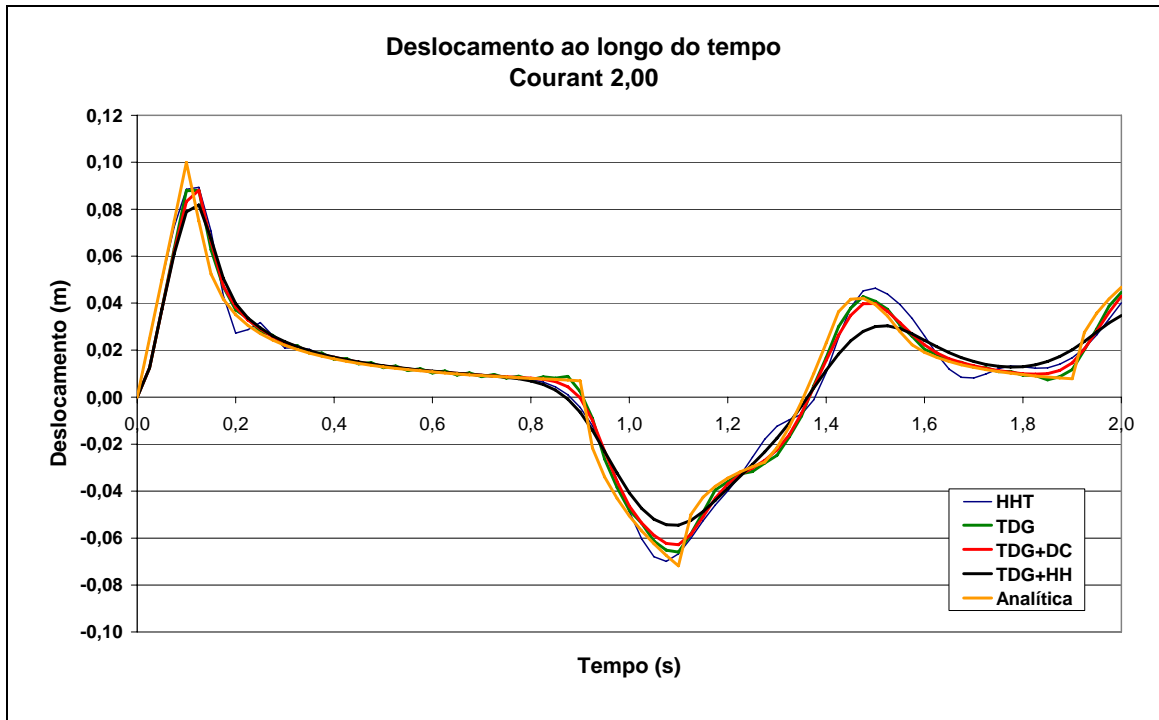


Figura VI. 21 – Comportamento do deslocamento e velocidade para o número de Courant 2,00.

VI.2.c – Comentários sobre a variação do intervalo de tempo

Para os números de Courant menores (0,50, 0,75 e 1,00) todos os métodos tendem a reproduzir o deslocamento. Dentre os métodos descontínuos, o operador proposto apresentou um amortecimento menor em relação ao operador HH. Ressalta-se ainda nessa faixa, que o método semi-discreto apresenta algumas oscilações, influenciado pelas variações na derivada temporal. A partir de Courant 1,25, a formulação TDG+HH exibe um amortecimento cada vez maior, enquanto que o operador proposto tende a se manter próximo à solução analítica. O método HHT apresenta mais oscilações e maior defasagem na resposta.

A velocidade contém variações rápidas de sentido e próximas entre si, dificultando os métodos em acompanhar tais variações. Diante disso, o método semi-discreto não conseguiu reproduzir adequadamente essa variável, apresentando amplitudes maiores, oscilações e defasagens em relação à solução analítica, para todos os casos analisados. Já para os métodos descontínuos, o operador proposto apresentou melhor comportamento em relação ao operador HH, com menor amortecimento em todos os casos.

VI.2.d – Influência da área da condição inicial sobre a resposta

Este exemplo considera a variação da área, sujeita à condição inicial, sobre as respostas. Os centros de todas elas coincidem com o centro da membrana. Inicialmente, é considerada uma velocidade inicial prescrita sobre toda a membrana, sendo referenciada no texto como A_1 , de valor $1,00\text{m}^2$, na seqüência, as áreas são reduzidas até a área denominada A_6 de valor $0,01\text{m}^2$. O objetivo é verificar a capacidade dos métodos em responder as variações rápidas, principalmente na velocidade. Em todas as análises, utilizou-se o número de Courant igual a 1,0. A malha adotada para representar a parte simétrica consistiu de 50 elementos por direção, $\Delta x = \Delta y = 0,01\text{m}$, totalizando 2.500 elementos e 30.603 pontos nodais. Para o método semi-discreto, foi utilizada também a condição de simetria em uma malha de elementos finitos padrão, com 50×50 elementos com interpolação quadrática.

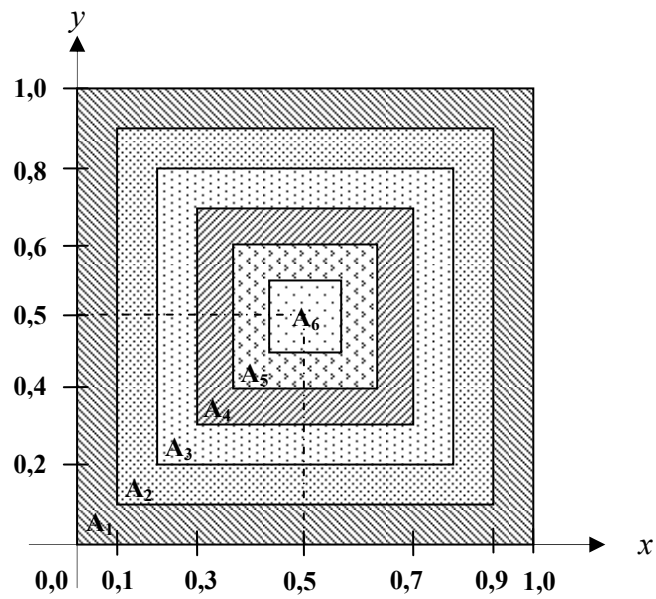


Figura VI. 22 – Áreas de atuação da condição inicial de velocidade.

Os valores dos comprimentos e das respectivas áreas, submetidas a condição inicial prescrita são apresentados na Tabela VI.1.

Tabela VI.1 – Valores para a área submetida à condição inicial.

Denominação	Comprimento $L(m)$	Área(m^2)
A_1	1,00	1,00
A_2	0,80	0,64
A_3	0,60	0,36
A_4	0,40	0,16
A_5	0,20	0,04
A_6	0,10	0,01

A seguir são apresentados os gráficos de resultados obtidos nesse teste.

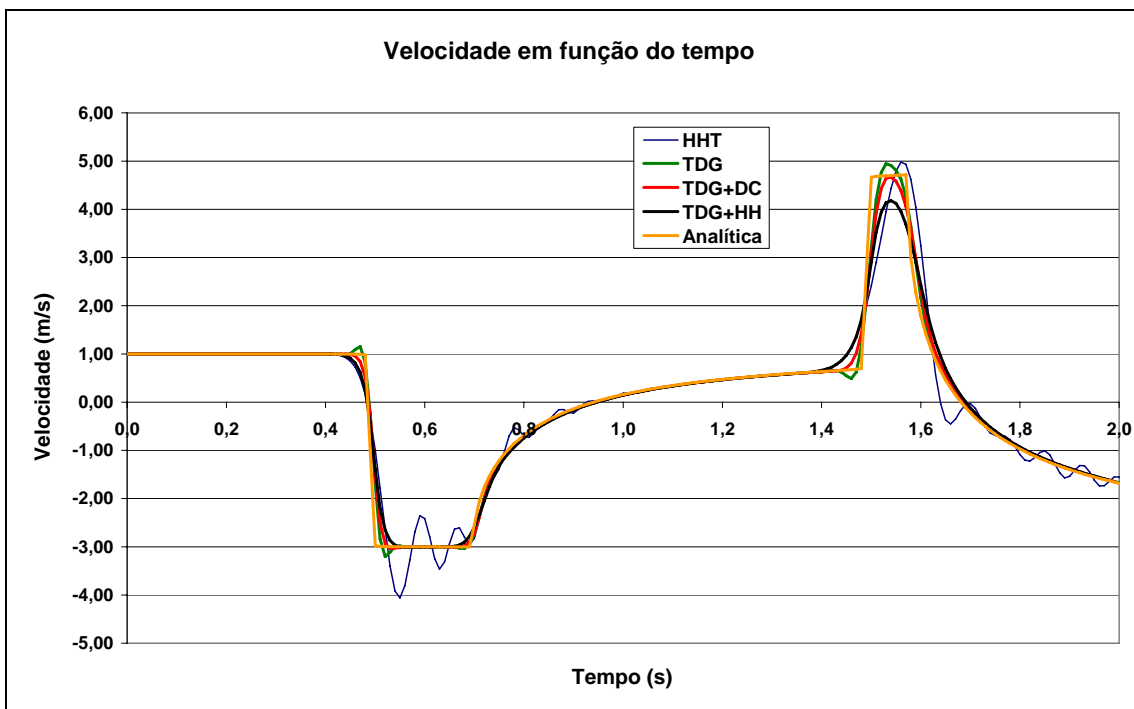
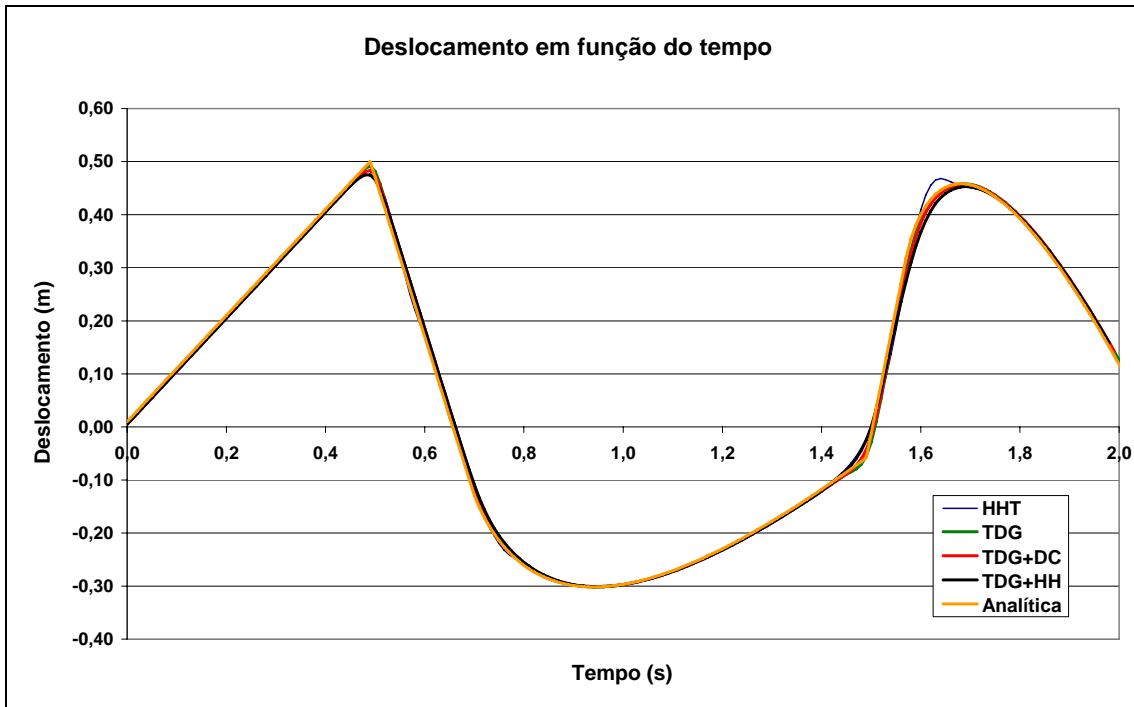


Figura VI. 23 – Resultados obtidos para a membrana submetida a condição inicial dada pela área A_1 .

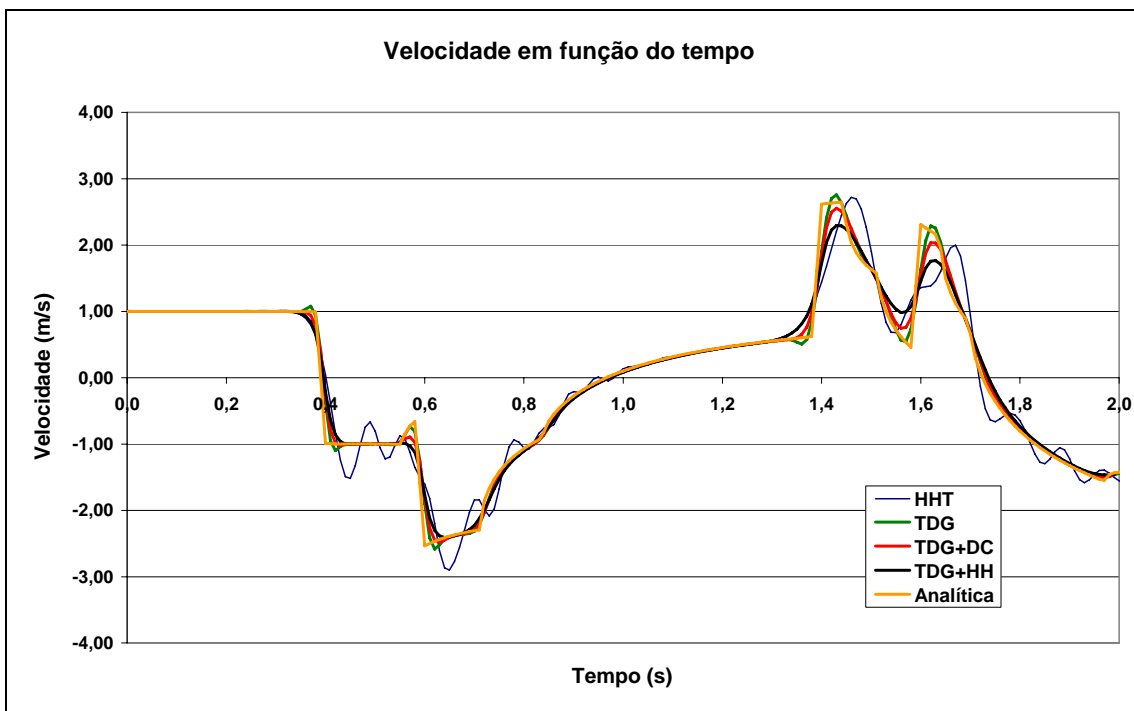
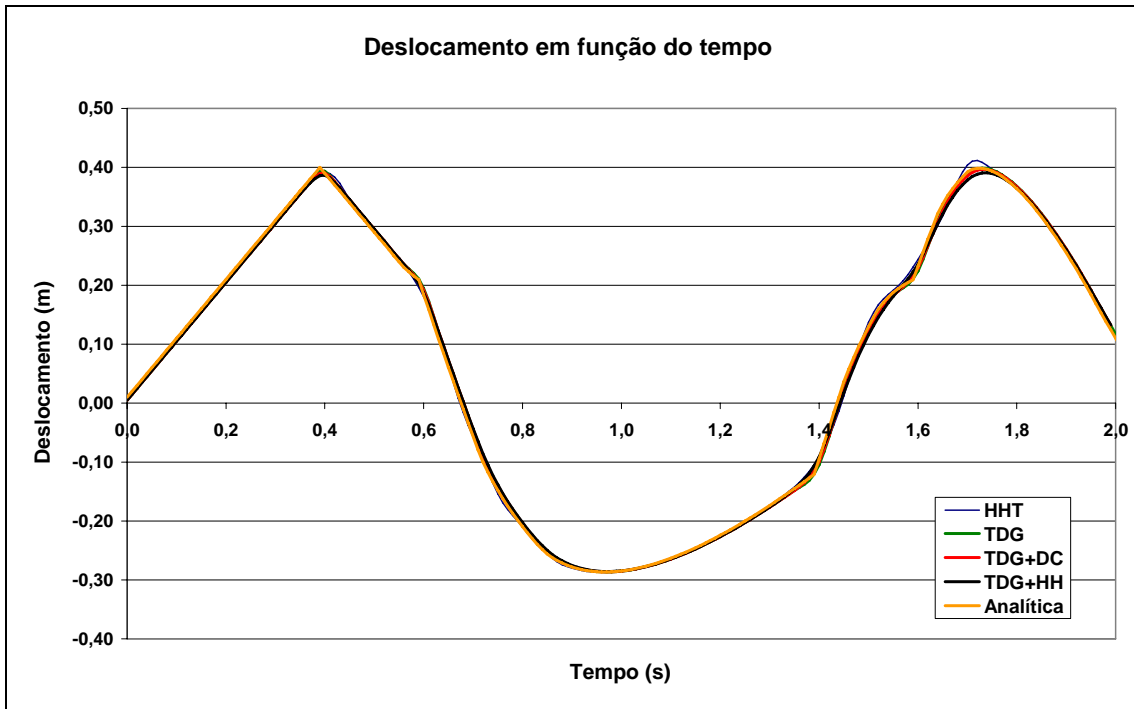


Figura VI. 24 – Resultados obtidos para a membrana submetida a condição inicial dada pela área A_2 .

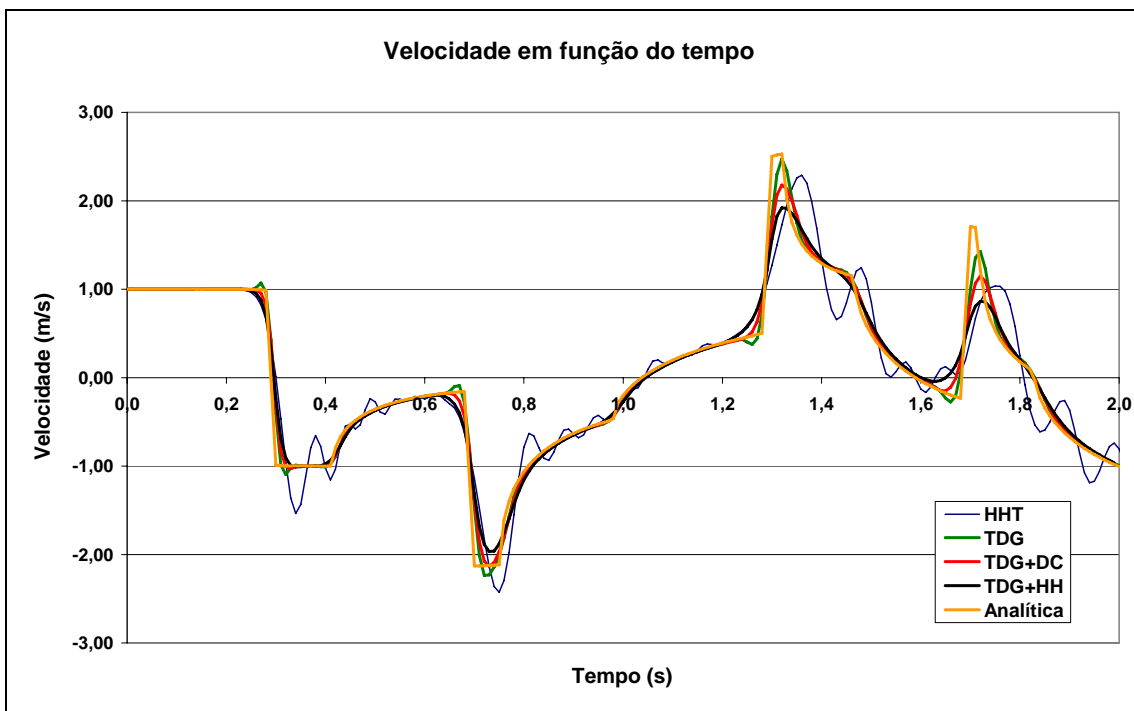
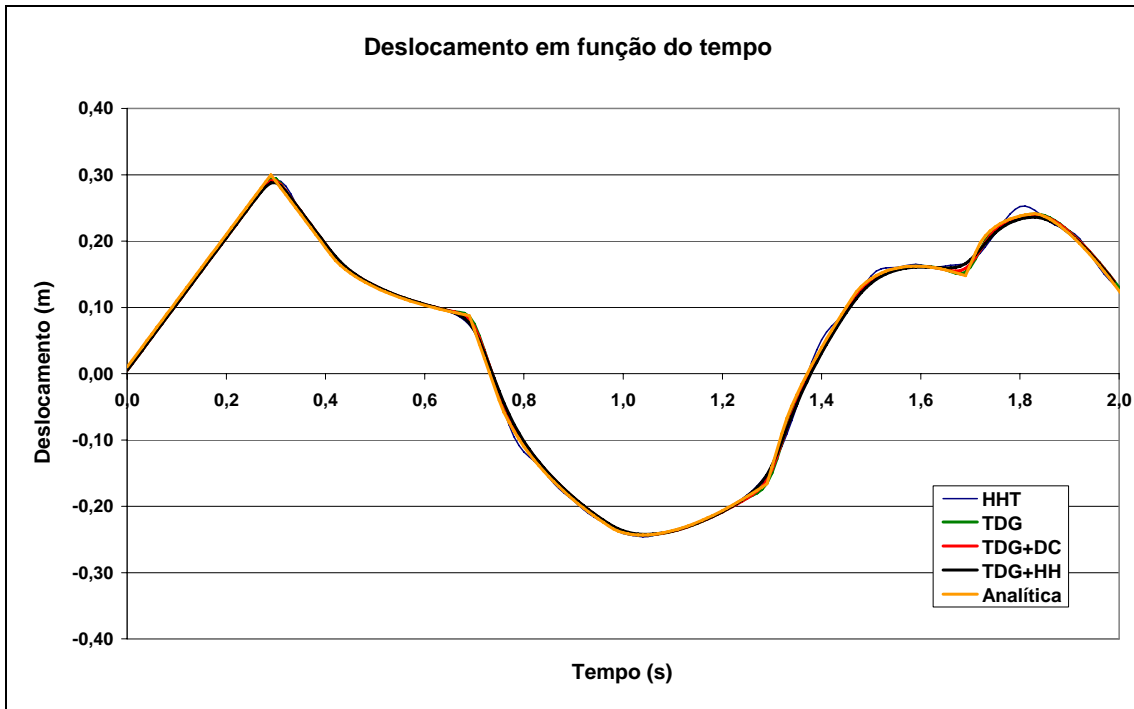


Figura VI. 25 – Resultados obtidos para a membrana submetida a condição inicial dada pela área A_3 .

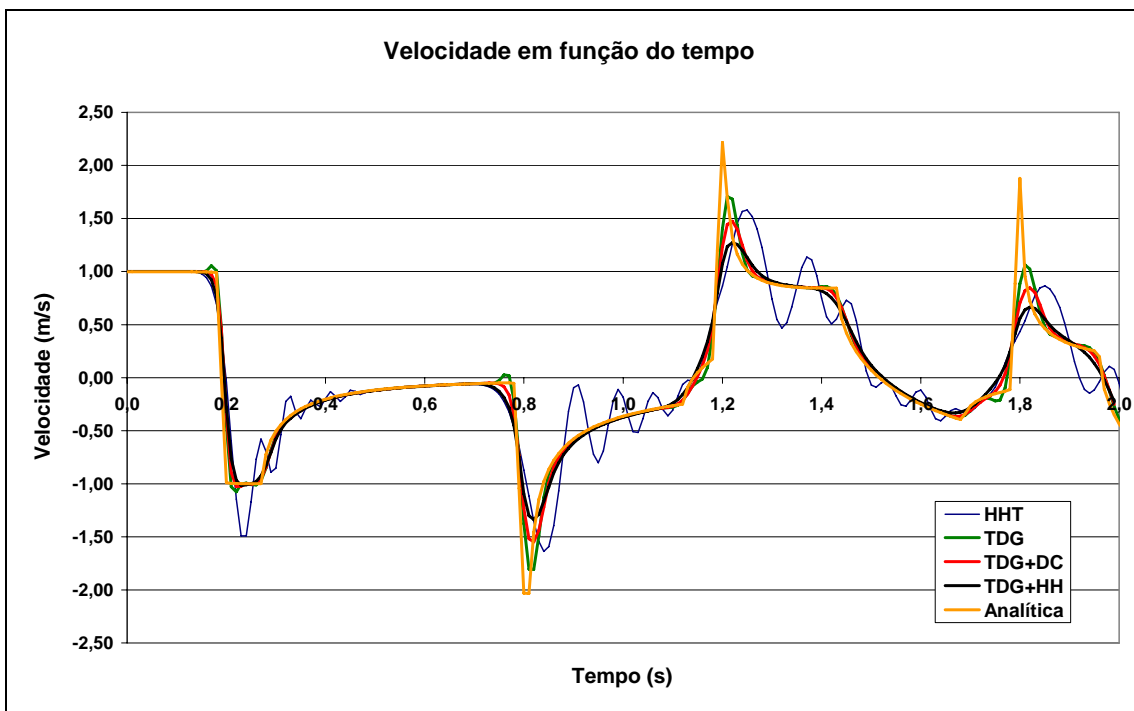
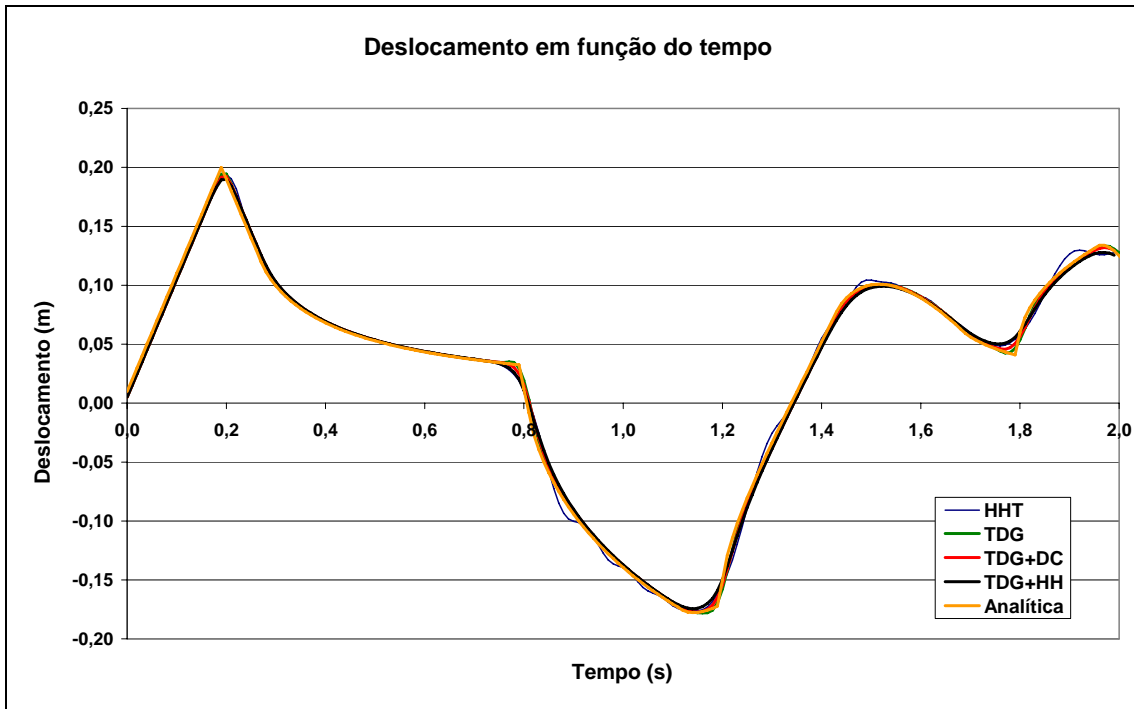


Figura VI. 26 – Resultados obtidos para a membrana submetida a condição inicial dada pela área A₄.

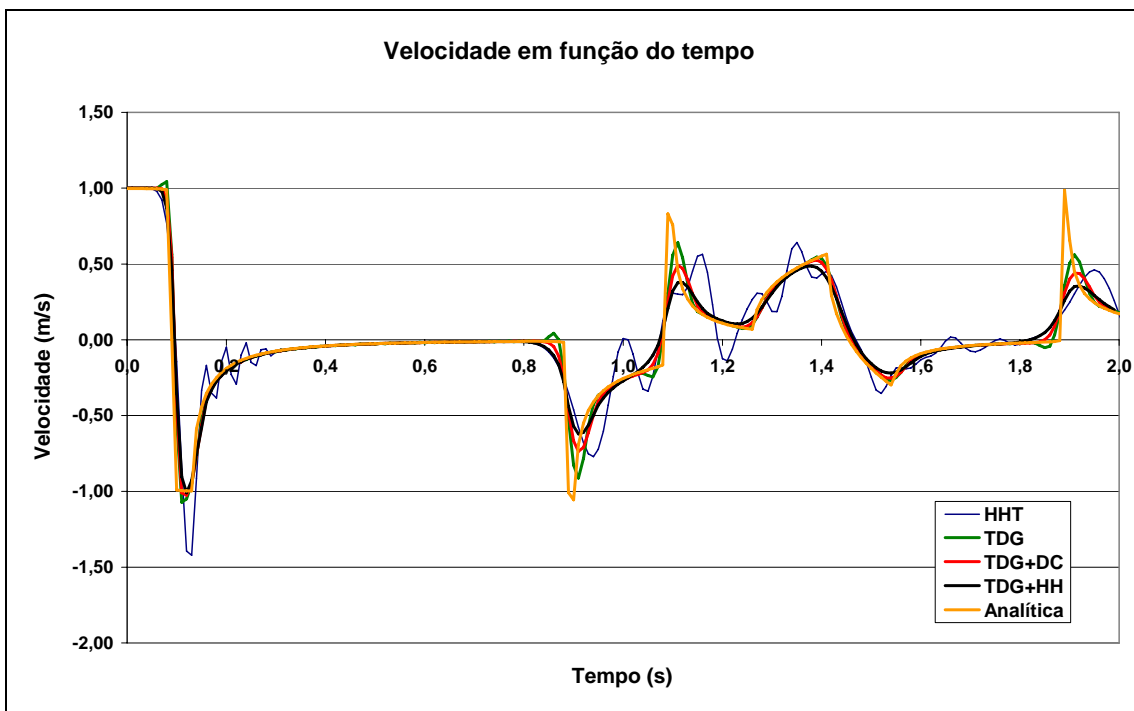
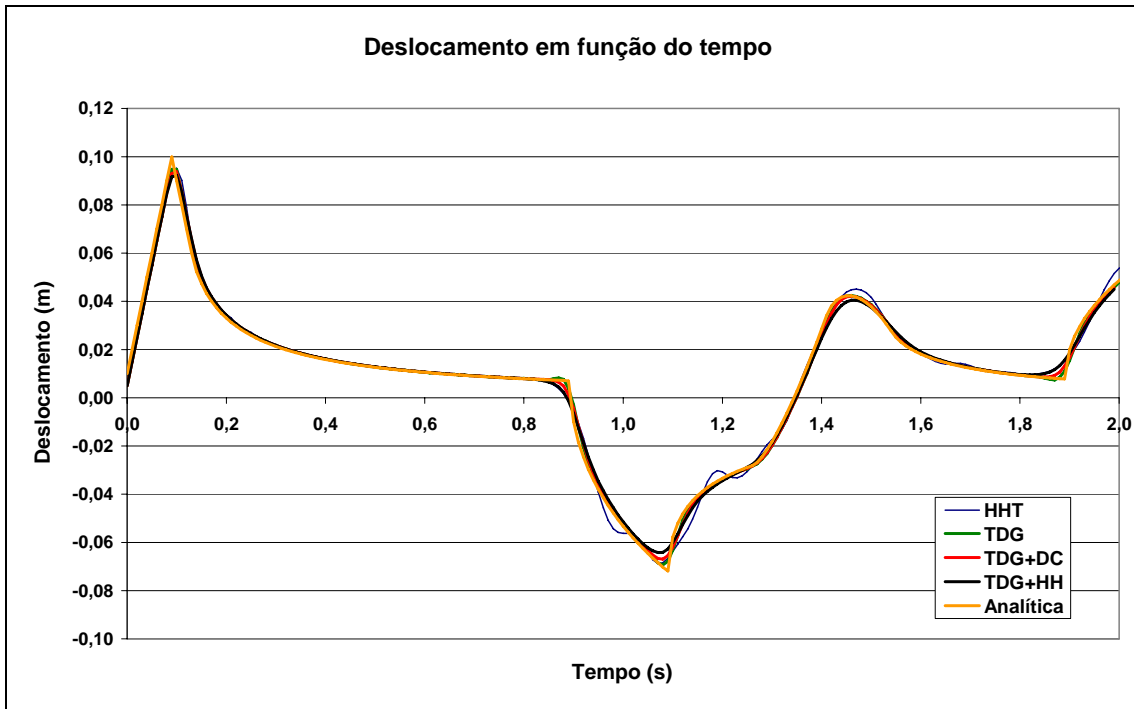


Figura VI. 27 – Resultados obtidos para a membrana submetida a condição inicial dada pela área A₅.

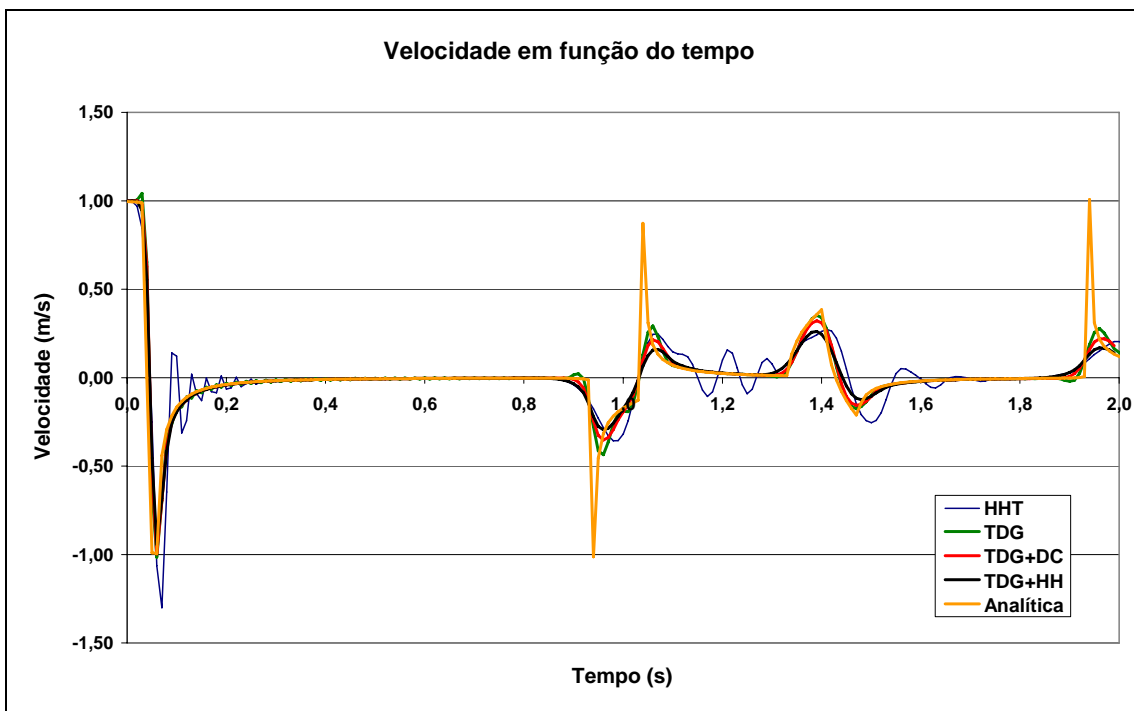
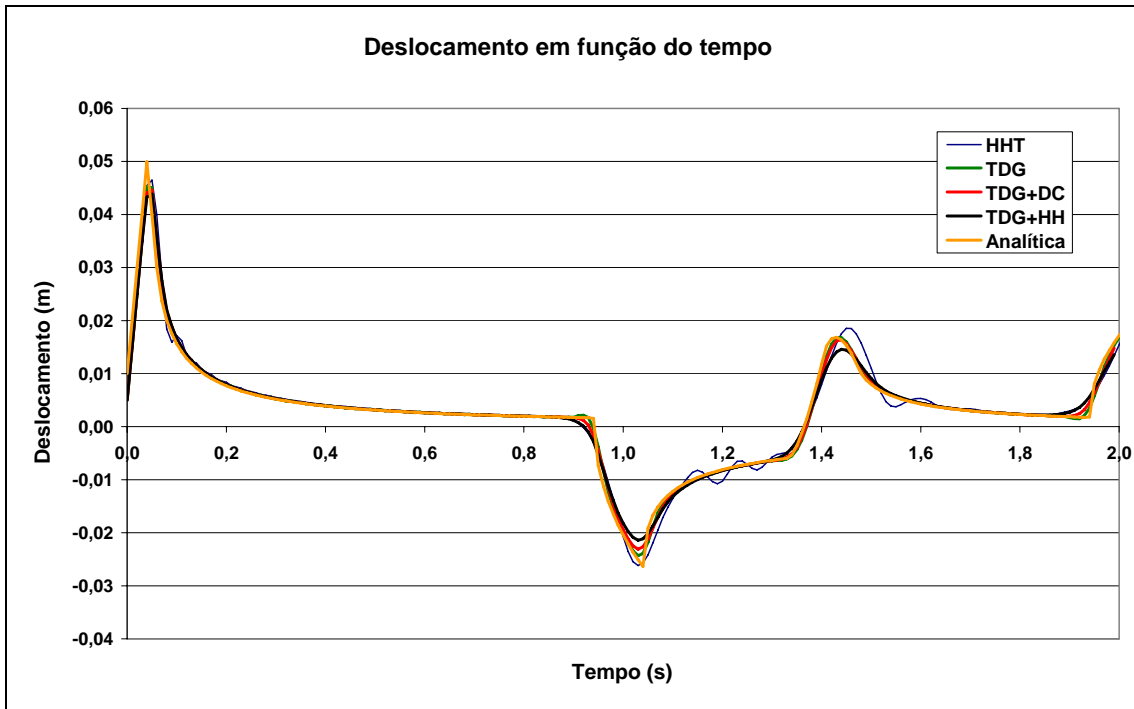


Figura VI. 28 – Resultados obtidos para a membrana submetida a condição inicial dada pela área A₆.

VI.2.e – Comentários sobre a influência da condição inicial

Em todos os testes considerados, o deslocamento foi melhor representado pelos métodos, em relação a velocidade, pois apresenta um comportamento mais suave. Entretanto, à medida que a área sujeita a condição inicial é reduzida, o deslocamento produzido pelo método semi-discreto tem dificuldade em acompanhar a solução analítica, apresentando oscilações numéricas.

Para a velocidade, o método semi-discreto apresentou oscilações, amplificação de resultados e defasagens em relação à solução analítica, revelando a dificuldade de tais métodos em representar soluções com variações rápidas.

Já para os métodos descontínuos, o deslocamento é bem representado por todos os métodos, tendo o operador HH um pequeno amortecimento até A4. Para A5 e A6, os operadores DC e HH começam a apresentar um amortecimento maior em relação ao TDG, tendo a formulação TDG+DC um desempenho melhor que a de HUGHES e HULBERT.

Com relação à velocidade, o operador DC foi superior ao operador HH, em todos os casos, apresentando um amortecimento menor, e tendo um comportamento mais próximo a solução analítica.

CAPITULO VII

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

VII.1 – CONCLUSÕES

Neste trabalho foi desenvolvida uma metodologia geral para obtenção de operadores de captura de descontinuidade para problemas regidos pela equação hiperbólica de segunda ordem no tempo, ou seja, problemas de propagação de ondas, e que apresentam fortes gradientes ou saltos em sua solução temporal. Destaca-se que a formulação aqui apresentada é voltada para o Método dos Elementos Finitos.

O estudo teve como ponto de partida a metodologia de obtenção de operadores de captura desenvolvida por DUTRA DO CARMO e GALEÃO, [25] e [26], para problemas convectivos. O objetivo da tese foi aplicar essa metodologia para se obter operadores de captura para problemas elastodinâmicos, sendo inspirado no operador apresentado por HUGHES e HULBERT, [27], [28] e [29].

A metodologia desenvolvida permite obter diversas famílias de operadores de captura, e mostra-se que o operador apresentado por HUGHES e HULBERT é um caso particular da metodologia aqui desenvolvida, sendo inclusive sugerida uma extensão para o mesmo.

A formulação foi aplicada à problemas uni e bidimensionais e, em ambos os casos, escolheu-se operadores que dependessem do número de Courant. Para o caso unidimensional, as funções que compõem o operador foram determinadas numericamente para um exemplo que possui solução analítica e também descontinuidade. Ainda para o caso unidimensional, cabe destacar que o operador de HUGHES e HULBERT não é contínuo em Courant igual a 1,0, sendo apresentados dois operadores, um para valores do número de Courant menores do que um, denominado operador quadrático, e um para valores maiores ou igual a um, denominado operador linear e que nesse ponto, não recaem no mesmo operador. A formulação desenvolvida

no trabalho, apesar de conter dois operadores, um para cada faixa de Courant, é contínua e ambos recaem no mesmo operador naquele ponto.

O operador apresentado por HUGHES e HULBERT utiliza o método de estabilização do tipo mínimos quadrados (GLS), sobre toda a faixa de Courant. Já a formulação desenvolvida aqui, só utiliza o método de estabilização até o valor de Courant igual a 0,7, a partir deste valor, não é necessário incluir o operador GLS, pois notou-se que sua utilização não produz melhoria na resposta. Isso acarreta economia no processamento, já que não é necessário calcular a matriz GLS para cada elemento. Destaca-se ainda que o operador GLS, na faixa em que é utilizado, não é incluído integralmente na formulação, ou seja, é inserida apenas uma fração desse operador.

Na formulação de HUGHES e HULBERT, o fator proposto τ é uma fórmula analítica que contém cinco operações: uma potência a quarta, uma soma, uma operação de raiz quadrada, um produto e uma divisão. As operações de radiciação e potenciação, são realizadas através de funções implícitas da linguagem e são implementadas através de séries de potência. No presente trabalho, o operador proposto utiliza uma interpolação linear para obter os parâmetros $\mu^{+/-}(Cour)$ para qualquer valor dentro da faixa de estudo [0,2 a 4,0]. Dessa forma, o cálculo é realizado de forma mais rápida do que a função analítica.

Em todas as análises realizadas para o caso unidimensional, a formulação descontínua (TDG e TDG+GLS+DC) produziu resultados superiores em presença de descontinuidade ao longo do tempo e do espaço, em relação à formulação clássica (semi-discreta, aqui representada pelo método HHT), com parâmetros escolhidos de modo a resultar em um método de 2ª ordem de precisão.

Com o esquema de solução adotado, método direto com eliminação de Gauss, a formulação descontínua sem operador de captura, TDG, é mais eficiente, do ponto de vista computacional, do que a formulação TDG+GLS+DC, pois para aquela, pode-se triangularizar o sistema de equações uma única vez, antes do processo de marcha, enquanto que o mesmo não é possível na formulação TDG+GLS+DC, que depende do resíduo da equação em cada passo de tempo. Entretanto, em termos de precisão, a

formulação com captura apresenta resultados mais precisos do que a formulação TDG. Uma alternativa ao uso de métodos diretos é o uso de algoritmos preditores-multicorretores.

Do ponto de vista computacional, o operador desenvolvido no trabalho apresenta melhor desempenho, pois não precisa utilizar o operador GLS em todos os números de Courant. Em termos de precisão de resultados, nota-se que para números de Courant menores do que um, ambas as formulações apresentam resultados muito próximos. Para a faixa de Courant entre um e dois, o operador desenvolvido aqui é superior ao apresentado por HUGHES e HULBERT. Acima de Courant igual a dois, os dois operadores voltam a ficar equivalentes.

Para longos períodos de análise, o operador DC apresentou menor amortecimento numérico do que o operador HH, tanto para o deslocamento quanto para a velocidade, principalmente para números de Courant maiores do que um.

Para a formulação descontínua, TDG, foram realizados testes no qual se utilizou elementos espaço-tempo com interpolação linear no espaço e quadrática no tempo, com o objetivo de reduzir o esforço computacional, e manter a mesma qualidade da resposta. Infelizmente, os testes revelaram que esse tipo de interpolação, apesar de apresentar resultados melhores do que os métodos semi-discretos, também exibiu um comportamento crescente, deteriorando a resposta.

Foi sugerida uma extensão para o caso n -dimensional no espaço baseada nas funções obtidas para o caso unidimensional. Deve-se lembrar que o fator τ , sugerido por HUGHES e HULBERT foi proposto unicamente para o caso unidimensional, sem a indicação de como obtê-lo para problemas multidimensionais.

A extensão n -dimensional foi aplicada em casos bidimensionais com descontinuidade temporal, nesse caso a formulação apresentada é superior aos métodos clássicos. Já entre os métodos descontínuos, o operador sugerido apresentou menor amortecimento em relação ao operador de HUGHES e HULBERT em todos os casos apresentados.

VII.2 – SUGESTÕES

Como proposta para trabalhos futuros são sugeridos:

- Estudar outras famílias de operadores de captura disponíveis pela metodologia proposta;
- O estudo de detectores de descontinuidade, o que permitirá ativar e desativar o operador de captura somente nos intervalos de tempo em que se faça necessário, permitindo assim a redução do tempo total gasto na análise;
- Aplicar a formulação descontínua para obter as funções de Green do sistema;
- Aplicar a formulação descontínua com a metodologia de operadores de captura para outros tipos de problemas, como, por exemplo, a propagação de ondas eletromagnéticas;
- Estender a formulação e os operadores propostos para problemas não-lineares;
- Utilizar algoritmos preditores-multicorretores que permitam trabalhar com problemas de grande porte;
- Desenvolver uma versão do programa utilizando MPI (*Message Passing Interface*) que permita a execução em *cluster* de PCs, em conjunto com diretivas de compilação, do tipo OpenMP, para processadores com múltiplos núcleos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] HALL, D., *Basic Acoustics*, 1^a ed, Malabar, Florida, Krieger Publishing Company, 1987.
- [2] BATHE, K. J., *Finite Element Procedures*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1996.
- [3] HUGHES, T. J. R., *The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Dover Publications Inc. 2000.
- [4] BELYTSCHKO, T., “An Overview of Semidiscretization and Time Integration Procedures”, In: *Computational Methods for Transient Analysis*, v. 1, *Computational Methods in Mechanics*, North-Holland, pp. 1-63, 1983.
- [5] CLOUGH, R.W., PENZIEN, J., *Dynamics of Structures*, 2^a ed, University of California, Berkeley, McGraw-Hill, 1993.
- [6] HOUBOLT, J. C., “A Recurrence Matrix Solution for the Dynamic Response of Elastic Aircraft”, *Journal of the Aeronautical Sciences*, n. 17, pp. 540-550, 1950.
- [7] NEWMARK, N. M., “A method of Computation for Structural Dynamics”, *ASCE SEM*, pp. 67-94, 1959.
- [8] WILSON, E. L., “A Computer Program for the Dynamic Stress Analysis of Underground Structures”, SESM Report n. 68, *Division Structural Engineering and Structural Mechanics*, University of California, Berkeley, 1968.
- [9] HILBER, H. M., HUGHES, T. J. R., TAYLOR, R. L., “Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 5, pp. 283-292, 1977.

- [10] WOOD, W. L., BOSSAK, M., ZIENKIEWICZ, O. C., “An Alpha Modification of Newmark’s Method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 15, pp. 1562-1566, 1980.
- [11] CHUNG, J., HULBERT, G. M., “A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics with Improved Numerical Dissipation: The Generalizes- α method”, *Journal of Applied Mechanics*, v. 60, pp. 371-375, 1993.
- [12] TAMMA, K. K., ZHOU, X., SHA, D., “The Time Domain: A Theory Towards The Evolution, Classification, Characterization and Design of Computational Algorithms for Transient/Dynamic Applications”, *Archives of Computational Methods in Engineering*, v.7, n. 2, pp. 67-290, 2000.
- [13] ODEN, J. T., “A General Theory of Finite Elements Part II”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 1, pp. 247-259, 1969.
- [14] ARGYRIS, J. H., SCHARPF, D. W., “Finite Elements in Time and Space”, *Nuclear Engineering and Design*, n. 10, pp. 456-464, 1969.
- [15] FRIED, I., “Finite Element Analysis of Time-Dependent Phenomena”, *AIAA Journal*, v. 13, pp. 1154-1157, 1969.
- [16] ZIENKIEWICZ, O. C., “A New Look at The Newmark, Houbolt, and Other Time Stepping Formulas. A Weighted Residual Approach”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.5, pp. 413-418, 1977.
- [17] TAMMA, K. K., NAMBURU, R. R., “A New Finite Element Based Lax-Wendroff/Taylor-Galerkin Methodology for Computational Dynamics”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, n. 71, pp. 137-150, 1988.
- [18] LAX, P. D., WENDROFF, B., “Difference Schemes for Hyperbolic Equations with High Order of Accuracy”, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v.17, pp. 381-398, 1964.

- [19] SHA, D., ZHOU, X., TAMMA, K. K., “A New Virtual-Pulse Time Integral Methodology: A New Approach for Computational Dynamics”, *Finite Elements in Analysis and Design*, n. 20, pp. 179-194, 1995.
- [20] FUNG, T. C., “Unconditionally Stable high-Order Accurate Hermitian Time Finite Elements”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 39, pp. 3475-3495, 1996.
- [21] REED, W. H., HILL, T. R., “Triangular mesh methods for the neutron transport equation”, Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, 1973.
- [22] LESAINTE, P., RAVIART, P. A., “On a finite element method for solving the neutron transport equation” in C. de Boor ed. *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations* (Academic Press, New York), pp. 89-123, 1974.
- [23] HUGHES, T. J. R., MALLETT, M., “A new finite element formulation for computational fluid dynamics: IV. A discontinuity-capturing operator for multidimensional advective-diffusive systems”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, n. 58, pp. 329-336, 1986.
- [24] JONHSON, C., SZEPESSY, A., “On the convergence of a finite element method for a nonlinear hyperbolic conservation law”, *Mathematics of Computation*, v. 49, pp. 427-444, 1987.
- [25] DUTRA DO CARMO, E. G., GALEÃO, A. C., “A consistent formulation of the finite element method to solve convective-diffusive transport problems” *Revista Brasileira Ciência Mecânica* v. 4, pp. 309-340, 1986.
- [26] GALEÃO, A. C., DUTRA DO CARMO, E. G., “A consistent approximate upwind Petrov-Galerkin method for convection-dominated problems” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, n. 68, pp. 83-95, 1988.

- [27] HUGHES, T. J. R., HULBERT, G. M., “Space-Time Finite Element Methods for Elastodynamics: Formulations and Error Estimates”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, n. 66, pp. 339-363, 1988.
- [28] HULBERT, G. M., HUGHES, T. J. R., “Space-Time Finite Element Methods for Second-order Hyperbolic Equations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, n. 84, pp. 327-348, 1990.
- [29] HULBERT, G. M., “Discontinuity-capturing Operators for elastodynamics”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, n. 96, pp. 409-426, 1992.
- [30] MASUD, A., HUGHES, T. J. R., “A space-time Galerkin/least-squares finite element formulation of the Navier-Stokes equations for moving domain problems”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 146, pp. 91-126, 1997.
- [31] Li, X. D., WIBERG, N. E., “Implementation and adaptivity of a space-time finite element method for structural dynamics”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 156, pp. 211-229, 1998.
- [32] CHIEN, C. C., WU, T. Y., “An Improved Predictor/Corrector Algorithm for a Time-Discontinuous Galerkin Finite Element Method in Structural Dynamics”, *Computational Mechanics*, n. 25, pp. 430-437, 2000.
- [33] CHIEN C. C., YANG C. S., TANG J. H., “Three-dimensional transient elastodynamic analysis by a space and time-discontinuous Galerkin finite element method”, *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 39 pp. 561–580, 2003.
- [34] HUANG, H., COSTANZO, F., “On the use of space-time finite elements in the solution of elasto-dynamic fracture problems”, *International Journal of Fracture*, v. 127, pp. 119–146, 2004.

- [35] KRIVODONOVA, L., XIN, J., REMACLE, J. F., CHEVAUGEON, N., FLAHERTY, J. E., “Shock detection and limiting with discontinuous Galerkin methods for hyperbolic conservation laws”, *Applied Numerical Mathematics*, v. 48, pp. 323–338, 2004.
- [36] THOMPSON, L. L., HE, D., “Adaptive space–time finite element methods for the wave equation on unbounded domains”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 194, pp. 1947-2000, 2005.
- [37] MANCUSO, M., UBERTINI, F., “An efficient time discontinuous Galerkin procedure for non-linear structural dynamics”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, pp. 6391-6406, 2006.
- [38] AMBATI, V. R., BOKHOVE, O., “Space–time discontinuous Galerkin finite element method for shallow water flows”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 204, pp. 452–462, 2007.
- [39] CHIEN, C. C., WU, T. Y., “A particular integral BEM/time discontinuous FEM methodology for solving 2-D elastodynamics problems”, *International Journal of Solids and Structures*, n. 38, pp. 289-306, 2001.
- [40] FUNG, T. C., “A precise time-step integration method by step-response and impulsive-response matrices for dynamic problems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, pp. 4501-4527, 1997.
- [41] ZONG, W. X., WILLIAMS, F. W., “A precise time step integration method”, *Journal of Mechanical Engineering Science*, v. 208, pp. 427-450, 1994.
- [42] MANSUR, W. J., LOUREIRO, F. S., SOARES, D., “Explicit time-domain approaches based on numerical Green's functions computed by finite differences - The ExGA family”, *Journal of Computational Physics*, v. 227, pp. 851-870, 2007.

- [43] MANSUR, W. J., *A Time-Stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method*, Ph. D. Thesis, University of Southampton, England, 1983.
- [44] WROBEL, L. C., *Potential and Viscous Flow Problems Using the Boundary Element Method*, Ph. D. Thesis , University of Southampton, England, 1981
- [45] ADAMS, R. A., *Sobolev Spaces*, New York, Academic Press, 1975.
- [46] GRAFF, K. F., *Wave Motion, In Elastic Solids*, New York, Dover Publications, 1991.
- [47] NOWACKI, W., *Dynamic of Elastic Systems*, New York, John Wiley & Sons. Inc., 1963.
- [48] VILLAÇA, S. F., TABORDA GARCIA, L. F., *Introdução à Teoria da Elasticidade*, 4ª ed, Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, 2000.
- [49] XIA, K., YAO, H., “A Galerkin/least square finite element formulation for nearly incompressible elasticity/stokes flow”, *Applied Mathematical Modeling*, n. 31, pp. 513-529, 2007.
- [50] CUTHILL, E., MCKEE, J., “Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices”, Proceedings of the 1969, 24th national conference, pp. 157-172, August 26-28, 1969, ACM - Association for Computing Machinery.
- [51] CHAN, W. M., GEORGE, A., “A linear time implementation of the Reverse Cuthill-McKee”, Department of computer science, University of Waterloo, Canadá, 1979.

ANEXO A

CÁLCULO DAS DERIVADAS DE SEGUNDA ORDEM

Este anexo apresenta as fórmulas para o cálculo da derivada segunda das funções de forma a duas e três variáveis, presentes no operador de captura.

A.1 – FUNÇÃO A DUAS VARIÁVEIS

A seguir são apresentadas as expressões para o cálculo da derivada primeira e segunda de uma função qualquer, $N(x, y)$, em relação às variáveis globais, em função de suas derivadas nas coordenadas locais ξ, η .

Cálculo das derivadas de primeira ordem:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Jacobiano:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Inversa do jacobiano:

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Cálculo das derivadas de segunda ordem em relação às variáveis globais:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = -[M_2][M_1][J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{bmatrix} + [M_2] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

onde

Matriz $[M_1]$:

$$[M_1] = \begin{bmatrix} \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} x_i & \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} y_i \\ \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta^2} x_i & \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta^2} y_i \\ \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi \partial \eta} x_i & \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi \partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Matriz $[M_2]$:

$$[M_2] = \begin{bmatrix} j_{11}^2 & j_{12}^2 & 2j_{11}j_{12} \\ j_{21}^2 & j_{22}^2 & 2j_{21}j_{22} \\ j_{11}j_{21} & j_{12}j_{22} & j_{11}j_{22} + j_{21}j_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

A.2 – FUNÇÃO A TRÊS VARIÁVEIS

A seguir são apresentadas as expressões para o cálculo da derivada primeira e segunda de uma função qualquer, $N(x, y, z)$, em relação às variáveis globais em função de suas derivadas nas coordenadas locais ξ, η, κ . Essas expressões foram apresentadas por XIA e YAO [49]. Entretanto, deduzindo as expressões, notou-se que a matriz $[M_2]$ apresentada no artigo continha erros em alguns coeficientes ($M_2[6,1]$, $M_2[6,2]$, $M_2[6,3]$ e $M_2[4,4]$). Na seqüência, é apresentada a matriz $[M_2]$ com os coeficientes corretos.

Cálculo das derivadas de primeira ordem:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N}{\partial \kappa} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Jacobiano:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \kappa} & \frac{\partial y}{\partial \kappa} & \frac{\partial z}{\partial \kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \kappa} x_i & \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \kappa} y_i & \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \kappa} z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Inversa do jacobiano:

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22}J_{33} - J_{32}J_{23} & J_{13}J_{32} - J_{12}J_{33} & J_{12}J_{23} - J_{13}J_{22} \\ J_{31}J_{23} - J_{21}J_{33} & J_{11}J_{33} - J_{13}J_{31} & J_{21}J_{13} - J_{23}J_{11} \\ J_{21}J_{32} - J_{31}J_{22} & J_{12}J_{31} - J_{32}J_{11} & J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Cálculo das derivadas de segunda ordem em relação às variáveis globais:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial z \partial x} \end{bmatrix} = -[M_2][[M_1][J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N}{\partial \kappa} \end{bmatrix} + [M_2] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial \kappa^2} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial \eta \partial \kappa} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial \kappa \partial \xi} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Onde a Matriz $[M_1]$:

$$[M_1] = \begin{bmatrix} \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} x_i & \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} y_i & \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} z_i \\ \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta^2} x_i & \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta^2} y_i & \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta^2} z_i \\ \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial \kappa^2} x_i & \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial \kappa^2} y_i & \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial \kappa^2} z_i \\ \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi \partial \eta} x_i & \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi \partial \eta} y_i & \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi \partial \eta} z_i \\ \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta \partial \kappa} x_i & \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta \partial \kappa} y_i & \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta \partial \kappa} z_i \\ \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial \kappa \partial \xi} x_i & \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial \kappa \partial \xi} y_i & \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial \kappa \partial \xi} z_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Matriz $[M_2]$:

$$[M_2] = \begin{bmatrix} j_{11}^2 & j_{12}^2 & j_{13}^2 & 2j_{11}j_{12} & 2j_{12}j_{13} & 2j_{13}j_{11} \\ j_{21}^2 & j_{22}^2 & j_{23}^2 & 2j_{21}j_{22} & 2j_{22}j_{23} & 2j_{23}j_{21} \\ j_{31}^2 & j_{32}^2 & j_{33}^2 & 2j_{31}j_{32} & 2j_{32}j_{33} & 2j_{33}j_{31} \\ j_{11}j_{21} & j_{12}j_{22} & j_{13}j_{23} & j_{11}j_{22} + j_{21}j_{12} & j_{12}j_{23} + j_{13}j_{22} & j_{11}j_{23} + j_{13}j_{21} \\ j_{21}j_{31} & j_{22}j_{32} & j_{23}j_{33} & j_{21}j_{32} + j_{22}j_{31} & j_{22}j_{33} + j_{23}j_{32} & j_{21}j_{33} + j_{23}j_{31} \\ j_{11}j_{31} & j_{12}j_{32} & j_{13}j_{33} & j_{11}j_{32} + j_{12}j_{31} & j_{12}j_{33} + j_{13}j_{32} & j_{11}j_{33} + j_{13}j_{31} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

ANEXO B

BALANCEAMENTO DO OPERADOR DE CAPTURA

Este anexo apresenta uma forma de tornar equilibrada a ordem de grandeza das parcelas temporal e espacial contida na soma do produto interno do operador de captura. Este equilíbrio se dá pela menor dimensão entre as parcelas. Considere assim o produto interno $\mathbf{U}(u^h) \cdot \mathbf{W}(W^h)$ para o caso unidimensional:

$$\left(\frac{\partial^2 u^h}{\partial x^2}, \frac{1}{\gamma^{1/2}} \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \right) \left(A \frac{\partial^2 W^h}{\partial x^2}, \frac{B}{\gamma^{1/2}} \frac{\partial^2 W^h}{\partial t^2} \right) \quad (\text{B.1})$$

onde A e B são duas constantes, que quando iguais a unidade, tem-se a expressão em sua forma original. Expandindo o produto interno, obtém-se:

$$\left(A \frac{\partial^2 u^h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W^h}{\partial x^2} + \frac{B}{\gamma} \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \frac{\partial^2 W^h}{\partial t^2} \right) \quad (\text{B.2})$$

Representando agora as derivadas em sua forma discreta:

$$\left(A \frac{\Delta x}{\Delta x^2} \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{B}{\gamma} \frac{\Delta x}{\Delta t^2} \frac{1}{\Delta t^2} \right) \quad (\text{B.3})$$

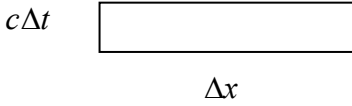
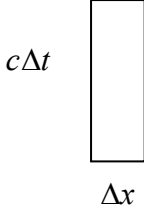
e lembrando que o número de Courant é expresso por $\gamma^{1/4} \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Quando a dimensão espacial for muito maior que a dimensão temporal e $A = B = 1$, verifica-se que a soma fica desequilibrada. Entretanto, fazendo-se $A = 1$ e $B = Cour^4$, a parcela espacial P_x passa a ter a ordem de grandeza da parcela temporal P_t , ver Tabela B.1.

Agora, considerando a situação inversa, ou seja, a dimensão temporal muito maior que a dimensão espacial com $A = 1$ e $B = 1$, de novo, a soma das parcelas fica desequilibrada. Fazendo então $A = Cour^{-4}$ e $B = 1$, as parcelas P_x e P_t passam a ter a

mesma ordem de grandeza. Para tanto o resumo dessa descrição é apresentado na Tabela B.1.

Tabela B.1 – Resumo das características numéricas.

$c \Delta t \ll \Delta x$	$c \Delta t \gg \Delta x$
<p>Elemento</p>  <p>$c\Delta t$</p> <p style="text-align: center;">Δx</p>	<p>Elemento</p>  <p>$c\Delta t$</p> <p style="text-align: center;">Δx</p>
$\left(A \frac{\Delta x}{\Delta x^2} \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{B}{\gamma} \frac{\Delta x}{\Delta t^2} \frac{1}{\Delta t^2} \right)$	$\left(A \frac{\Delta x}{\Delta x^2} \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{B}{\gamma} \frac{\Delta x}{\Delta t^2} \frac{1}{\Delta t^2} \right)$
$P_x \ll P_t$	$P_x \gg P_t$
Fazendo $A = 1$ e $B = Cour^4$,	Fazendo $A = Cour^4$ e $B = 1$,
$\left(\frac{\Delta x}{\Delta x^2} \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{\gamma \Delta t^4}{\Delta x^4} \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta x}{\Delta t^2} \frac{1}{\Delta t^2} \right)$	$\left(\frac{\Delta x^4}{\gamma \Delta t^4} \frac{\Delta x}{\Delta x^2} \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta x}{\Delta t^2} \frac{1}{\Delta t^2} \right)$
Que resulta em:	Que resulta em:
$\left(\frac{\Delta x}{\Delta x^2} \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{\Delta x}{\Delta x^2} \frac{1}{\Delta x^2} \right)$	$\left(\frac{\Delta x}{\gamma \Delta t^4} + \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta x}{\Delta t^2} \frac{1}{\Delta t^2} \right)$

ANEXO C

SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA A BARRA HOMOGÊNEA

Este anexo apresenta a solução analítica para o deslocamento e sua derivada temporal de uma barra homogênea, engastada em uma extremidade e submetida a um carregamento axial uniformemente distribuída sobre a seção reta na outra extremidade. Seja uma barra de comprimento L , módulo de elasticidade E , massa específica ρ e área da seção transversal igual a A . Dessa forma, a velocidade de propagação do meio é dada por $c = \sqrt{E/\rho}$.

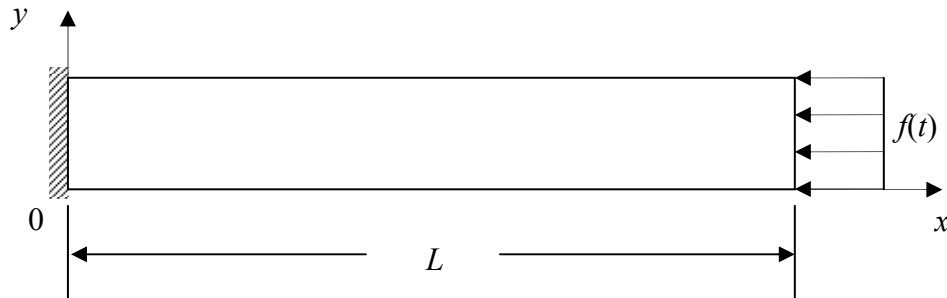


Figura C.1 – Barra homogênea engastada e submetida a um carregamento axial.

A força $f(t)$ aplicada na extremidade livre é do tipo Heaviside, dada por $f(t) = f_0 H(t)$, sendo f_0 a amplitude da função Heaviside $H(t)$, definida como sendo zero para $t < 0$ e um para $t \geq 0$. As expressões para o deslocamento e a velocidade axiais em qualquer posição da barra e para qualquer instante de tempo são dadas pelas equações (C.1) e (C.2), e a partir da expressão C3, é possível obter a tensão σ_x , para maiores detalhes, ver NOWACKI [47].

$$u(x,t) = \frac{8 f_0 L}{\pi^2 E A} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin\left(\frac{(2n-1) \pi x}{2 L}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{(2n-1) \pi c t}{2 L}\right)\right) \right] \quad (C.1)$$

$$\frac{du(x,t)}{dt} = \frac{4 f_0 c}{\pi E A} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} \sin\left(\frac{(2n-1) \pi x}{2 L}\right) \left(\sin\left(\frac{(2n-1) \pi c t}{2 L}\right)\right) \right] \quad (C.2)$$

$$\frac{du(x,t)}{dx} = \frac{4 f_0}{\pi E A} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} \cos\left(\frac{(2n-1) \pi x}{2 L}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{(2n-1) \pi c t}{2 L}\right)\right) \right] \quad (C.3)$$

ANEXO D

SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA A MEMBRANA

Este anexo apresenta a solução analítica para o movimento transversal de uma membrana retangular fixada em todo o seu perímetro. O deslocamento inicial é considerado nulo em todos os pontos do domínio e a membrana apresenta uma condição inicial de velocidade v_0 sobre a área A_0 , Figura D.1. As expressões foram apresentadas em MANSUR [43], para maiores detalhes ver [46].

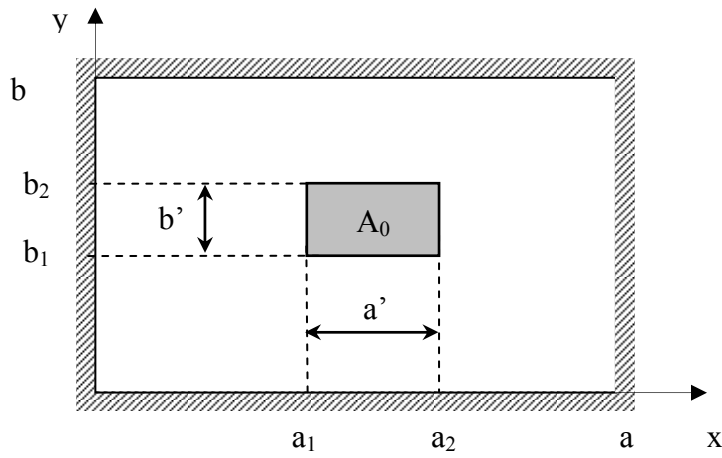


Figura D.1 – Membrana Retangular.

O deslocamento e a velocidade ao longo do tempo em um ponto qualquer (x, y) da membrana, são dados por:

$$u(x, y, t) = \frac{2v_0}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m n v_{mn}} \text{sen}\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi n y}{b}\right) G_{mn} \quad (\text{D.1})$$

$$v(x, y, t) = \frac{4v_0}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m n} \text{sen}\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \dot{G}_{mn} \quad (\text{D.2})$$

$$G_{mn} = \left(\cos\left(\frac{n \pi b_2}{b}\right) - \cos\left(\frac{n \pi b_1}{b}\right) \right) \left(\cos\left(\frac{m \pi a_2}{a}\right) - \cos\left(\frac{m \pi a_1}{a}\right) \right) \text{sen}(2 \pi v_{mn} t) \quad (\text{D.3})$$

$$\dot{G}_{mn} = \left(\cos\left(\frac{n \pi b_2}{b}\right) - \cos\left(\frac{n \pi b_1}{b}\right) \right) \left(\cos\left(\frac{m \pi a_2}{a}\right) - \cos\left(\frac{m \pi a_1}{a}\right) \right) \cos(2 \pi v_{mn} t) \quad (\text{D.4})$$

$$v_{mn} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (\text{D.5})$$