

FERRAMENTAS NUMÉRICAS PARA ANÁLISE E PROJETO DE DUTOS E RISERS
NA EXPLORAÇÃO DE PETRÓLEO

Sérgio Murilo Santos Freitas

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
CIVIL.

Aprovada por:



Prof. Breno Pinheiro Jacob, D.Sc.



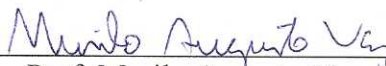
Dr. Adilson Carvalho Benjamin, D.Sc.



Prof. Gilberto Bruno Ellwanger, D.Sc.



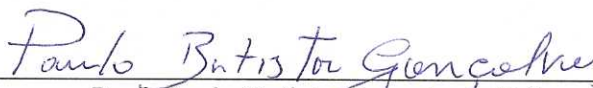
Prof. Beatriz de Souza Leite Pires de Lima, D.Sc.



Prof. Murilo Augusto Vaz, Ph.D.



Prof. Andrea Ferreira Borges, D.Sc.



Prof. Paulo Batista Gonçalves, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JUNHO DE 2006

FREITAS, SÉRGIO MURILO SANTOS

Ferramentas Numéricas para Análise e
Projeto de Dutos e Risers na Exploração
de Petróleo [Rio de Janeiro] 2006

XIX, 242 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,
Engenharia Civil, 2006)

Tese - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Dutos Aquecidos
2. Risers
3. Análise Não-Linear
4. Elementos Finitos
5. Flambagem

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

A Patrícia Matta, as minhas filhas Shantal e Shaina Freitas e a minha Família, pelo apoio e carinho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por tudo.

A Petrobras, pelo apoio.

Ao orientador Professor Breno Pinheiro Jacob, pela motivação, amizade e contribuições importantes, que foram indispensáveis para realização deste trabalho.

A Engenheiro Adilson Carvalho Benjamin, pela amizade, pelo apoio, pelas sugestões e dedicação na co-orientação.

Ao Engenheiro Divino Cunha, pela importante colaboração na aplicação do programa Abaqus.

A Engenheira Patrícia Matta, pela amizade e carinho nos momentos difíceis durante a realização deste trabalho.

Aos meus amigos José Ricardo, Tereza, Jahir, Alice e a pequena Maria Alice, pelo carinho que me motivou sempre, principalmente nos momentos difíceis.

Aos amigos Antonio Cláudio, Armando Prestes e Andrea Borges, pelas contribuições nas correções do texto, sugestões e incentivo.

Ao Engenheiro José Roberto Silvestre, pela contribuição na aplicação do programa Abaqus.

A todos os meus amigos das Petrobras, em especial a Francisco Henriques, Marcos Dantas, Marcos Soares, Araken, Karen Lobato, Marcus Alcure, Flávio, Rodrigo, Júlio César e Lincoln, pelo apoio e incentivo.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

FERRAMENTAS NUMÉRICAS PARA ANÁLISE E PROJETO DE DUTOS E
RISERS NA EXPLORAÇÃO DE PETRÓLEO

Sérgio Murilo Santos Freitas

Junho/2006

Orientadores: Breno Pinheiro Jacob

Adilson Carvalho Benjamin

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho apresenta um conjunto de ferramentas para análise de dutos e *risers*, incluindo um elemento de pórtico isoparamétrico não-linear geométrico de quatro nós. Neste conjunto, estão inseridos os carregamentos de onda e corrente, carregamento térmico e tensões iniciais, que são importantes nas análises destes tipos de estrutura. O elemento isoparamétrico se apresenta como alternativa aos elementos convencionais na análise de estruturas esbeltas. O capítulo de aplicações mostra resultados que comprovam a eficiência da ferramenta numérica, através de estudos paramétricos com exemplos acadêmicos e reais complexos. Comparações com outros elementos e com soluções analíticas mostram as vantagens e a capacidade de representação dos problemas estruturais das ferramentas implementadas.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

NUMERICAL TOOLS FOR ANALYSIS AND DESIGN OF PIPELINES AND
RISERS IN PETROLEUM EXPLORATION

Sérgio Murilo Santos Freitas

June/2006

Advisors: Breno Pinheiro Jacob
Adilson Carvalho Benjamin

Department: Civil Engineering

This work presents a group of tools for analysis and design of pipelines and risers, that include an isoparametric geometric nonlinear finite element beam with four nodes. In this group are included environmental (wave and current) and thermal loads and initial stress, that are important for the analysis of this type of structures. The isoparametric beam is presented as an alternative for conventional beams on the analysis of slender structures. The application chapter presents results where it is possible to see the efficiency of the numerical tools, through a parametric analysis, with academic examples and real cases. Comparisons with other elements results and analytical solutions show the advantages and the representation capacity of the structural tools implemented.

ÍNDICE

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | <i>Introdução</i> | 1 |
| 1.1 | Motivação e Objetivos | 1 |
| 1.2 | Histórico e Revisão Bibliográfica | 3 |
| 1.3 | Organização do Texto | 7 |
| 2 | <i>Análise de Dutos e Risers</i> | 9 |
| 2.1 | Introdução | 9 |
| 2.2 | Análise de Dutos | 9 |
| 2.2.1 | Flambagem de Dutos Aquecidos | 9 |
| 2.2.2 | Métodos Analíticos para Análise de Flambagem | 14 |
| 2.2.3 | Método Analítico de Hobbs para Análise de Flambagem Lateral e Vertical | 17 |
| 2.2.4 | Instabilidade da Configuração Fletida | 27 |
| 2.3 | Análise de <i>Risers</i> | 32 |
| 3 | <i>Interação Solo-Duto</i> | 38 |
| 3.1 | Introdução | 38 |
| 3.2 | Interação Solo-Duto na Direção Axial | 40 |
| 3.3 | Interação Solo-Duto na Direção Lateral | 44 |
| 3.4 | Interação Solo-Duto na Direção Vertical | 48 |
| 4 | <i>Formulação do Elemento Isoparamétrico de 4 Nós com Seções Transversais Retangular e Circular</i> | 52 |
| 4.1 | Introdução | 52 |
| 4.2 | Hipóteses Básicas e Sistemas de Referência | 53 |
| 4.3 | Campo de Geometria para o Elemento de Seção Retangular | 55 |
| 4.4 | Campo de Geometria para o Elemento de Seção Circular | 57 |
| 4.5 | Cossenos Diretores dos Eixos dos Sistemas de Referência Locais | 58 |
| 4.6 | Campo de Deslocamentos para o Elemento de Seção Retangular | 61 |
| 4.7 | Campo de Deslocamentos para o Elemento de Seção Circular | 66 |
| 4.8 | Derivadas dos Deslocamentos, Elemento de Seção Retangular | 68 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.9 | Derivadas dos Deslocamentos, Elemento de Seção Circular | 71 |
| 4.10 | Campo de Deformações | 74 |
| 4.11 | Campo de Tensões e Equações Constitutivas | 81 |
| 4.12 | Matriz de Rigidez Linear e Vetor de Forças Internas | 89 |
| 4.13 | Matriz de Rigidez Não-Linear | 90 |
| 4.14 | Integração Numérica | 94 |
| 4.15 | Exemplo | 98 |
| 5 | <i>Formulações Específicas para Análise de Dutos e Risers</i> | 101 |
| 5.1 | Introdução | 101 |
| 5.2 | Carregamento de Onda e Corrente | 102 |
| 5.2.1 | Generalidades | 102 |
| 5.2.2 | Implementação no Elemento Isoparamétrico | 104 |
| 5.2.3 | Exemplo | 105 |
| 5.3 | Carregamento Térmico | 108 |
| 5.3.1 | Implementação no Elemento Isoparamétrico | 108 |
| 5.3.2 | Exemplo | 109 |
| 5.4 | Tensões e Curvaturas Iniciais Aplicadas a <i>Risers</i> | 112 |
| 6 | <i>Estratégia de Solução Não-Linear</i> | 114 |
| 6.1 | Introdução | 114 |
| 6.2 | Solução Incremental Iterativa | 114 |
| 6.3 | Método de Newton-Raphson | 116 |
| 6.4 | Técnica do Comprimento de Arco Constante (<i>Arc-Length Method</i>) | 118 |
| 6.4.1 | Técnica do Comprimento de Arco Cilíndrico | 123 |
| 6.4.2 | Determinação do Sinal do Incremento Inicial do Parâmetro de Carga | 124 |
| 6.4.3 | Controle do Deslocamento Tangente | 124 |
| 6.5 | Critérios de Convergência | 126 |
| 7 | <i>Aplicações – Casos Estudados</i> | 128 |
| 7.1 | Introdução | 128 |
| 7.2 | Viga Engastada e Livre | 128 |
| 7.2.1 | Descrição do Problema | 129 |
| 7.2.2 | Resultados Obtidos | 131 |

| | | |
|------------|---|------------|
| 7.3 | Coluna de Euler | 136 |
| 7.3.1 | Descrição do Problema | 136 |
| 7.3.2 | Resultados Obtidos | 138 |
| 7.3.3 | Estudo Paramétrico | 143 |
| 7.4 | Viga Balcão | 148 |
| 7.4.1 | Descrição do Problema | 149 |
| 7.4.2 | Resultados Obtidos | 150 |
| 7.5 | Arco Abatido Bi-Rotulado sob Carga Concentrada Excêntrica | 158 |
| 7.5.1 | Descrição do Problema | 158 |
| 7.5.2 | Resultados Obtidos | 159 |
| 7.5.3 | Verificação da Gradação da Malha | 162 |
| 7.6 | Duto Aquecido Parcialmente Enterrado Sujeito a Flambagem Lateral | 165 |
| 7.6.1 | Descrição do Problema | 166 |
| 7.6.2 | Sensibilidade à Gradação da Malha | 176 |
| 7.6.3 | Sensibilidade a Amplitude da Imperfeição Inicial | 191 |
| 7.7 | Riser Rígido na Configuração Catenária | 206 |
| 7.7.1 | Definição do Problema | 207 |
| 7.7.2 | Resultados Obtidos | 211 |
| 7.7.3 | Sensibilidade à Gradação da Malha | 215 |
| 8 | Conclusões | 230 |
| 8.1 | Considerações Gerais | 230 |
| 8.2 | Comentários Finais | 231 |
| 8.3 | Sugestões para Trabalhos Futuros | 233 |
| 8.4 | Referências Bibliográficas | 237 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 2.1 – Desenho esquemático da atuação da força normal devido ao aquecimento _____ | 11 |
| Figura 2.2 – Modos de flambagem que um duto pode assumir _____ | 11 |
| Figura 2.3 – Configurações parcialmente e totalmente enterrada dos dutos _____ | 13 |
| Figura 2.4 – Desenho esquemático de uma configuração de flambagem de um duto _____ | 14 |
| Figura 2.5 – Desenho esquemático do modelo de viga de base elástica _____ | 15 |
| Figura 2.6 – Relação entre ΔT_f e L para os 4 primeiros modos de flambagem, com penetração de 0,25 m _____ | 26 |
| Figura 2.7 – Relação entre ΔT_f e L para o modo 2 de flambagem correspondente a penetração de 0,25 m _____ | 28 |
| Figura 2.8 – Relação entre ΔT_f e Y_{max} para o modo 2 de flambagem correspondente a penetração de 0,25 m e curvas hipotéticas para dutos com imperfeição inicial _____ | 30 |
| Figura 2.9 – <i>Riser</i> rígido de perfuração _____ | 33 |
| Figura 2.10 – <i>Riser</i> flexível de produção _____ | 33 |
| Figura 2.11 – Catenária Livre _____ | 34 |
| Figura 2.12 – Configurações Lazy S (a) e Steep S (b) _____ | 35 |
| Figura 2.13 – Configurações Lazy Wave (a) e Steep Wave (b) _____ | 35 |
| Figura 2.14 – Sistema híbrido de <i>risers</i> (SLHR) _____ | 37 |
| Figura 2.15 – Sistema híbrido de <i>risers</i> (TLR) _____ | 37 |
| | |
| Figura 3.1 – Desenho esquemático da lei constitutiva de Coulomb em termos do coeficiente de atrito axial equivalente _____ | 42 |
| Figura 3.2 – Desenho esquemático da lei constitutiva plástico-perfeito com deslocamento de mobilização em termos do coeficiente de atrito axial equivalente _____ | 43 |
| Figura 3.3 – Desenho esquemático do comportamento da reação lateral de dutos parcialmente enterrados leves e pesados em termos do coeficiente de atrito lateral equivalente _____ | 46 |

| | |
|--|-----|
| Figura 3. 4 – Desenho mostrando os esforços atuantes na configuração deformada, considerando imperfeição inicial e variação da resistência vertical ascendente durante o deslocamento vertical | 50 |
| Figura 3.5 – Curvas relacionando a reação vertical e o deslocamento de um duto totalmente enterrado para solos arenosos e argilosos | 50 |
| Figura 4.1 – Orientação do sistema local na seção transversal | 54 |
| Figura 4.2 – Esquema de distribuição dos nós do elemento | 54 |
| Figura 4.3 – Relação entre as coordenadas retangulares e polar na seção transversal do elemento | 57 |
| Figura 4.4 – Esquema dos deslocamentos na seção transversal | 62 |
| Figura 4.5 – Desenho esquemático da integração numérica na seção circular do elemento | 97 |
| Figura 4.6 – Viga bi-apoiada submetida a flexão | 98 |
| Figura 4.7 – Configurações original e deformada referente ao incremento de carga 50 | 99 |
| Figura 4.8 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento u na extremidade A | 100 |
| Figura 4.9 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v no ponto C | 100 |
| Figura 5.1 – Viga engastada e livre com carregamento distribuído | 105 |
| Figura 5.2 – Relação Parâmetro de Carga versus Deslocamento w na extremidade A | 107 |
| Figura 5.3 – Duto mono engastado, mono engastado com mola e bi engastado | 110 |
| Figura 6.1 – Esquema representativo do método de Newton-Raphson Padrão | 117 |
| Figura 6.2 – Esquema representativo do método de Newton-Raphson Modificado | 117 |
| Figura 6.3 – Caso em que o método de Newton-Raphson Modificado diverge afastando-se da solução exata | 118 |

| | |
|---|-----|
| Figura 6.4 – Interpretação geométrica da técnica do controle do arco constante aplicado a um problema de um grau de liberdade _____ | 120 |
| Figura 7.1 – Viga engastada _____ | 129 |
| Figura 7.2 – Função de carregamento aplicada a carga P _____ | 130 |
| Figura 7.3 – Configuração original e deformadas (incrementos 15, 30, 45 e 60) _____ | 131 |
| Figura 7.4 – Curva Carga versus Deslocamento u , no ponto de aplicação da carga _____ | 132 |
| Figura 7.5 – Curva Carga versus Deslocamento v , no ponto de aplicação da carga _____ | 133 |
| Figura 7.6 – Coluna de Euler _____ | 136 |
| Figura 7.7 – Função de carregamento aplicada a carga P _____ | 137 |
| Figura 7.8 – Configuração original e deformadas (incrementos 10, 20, 23, 30, 40 e 50) _____ | 138 |
| Figura 7.9 – Curva Carga versus Deslocamento v , no ponto de aplicação da carga _____ | 139 |
| Figura 7.10 – Curva Carga versus Deslocamento v , no ponto de aplicação da carga _____ | 140 |
| Figura 7.11 – Curva Deslocamento v (em B) versus Número de Nós _____ | 144 |
| Figura 7.12 – Desempenho dos elementos isoparamétrico e de 2 nós com a variação do coeficiente de esbeltez da coluna de Euler _____ | 146 |
| Figura 7.13 – Viga balcão _____ | 148 |
| Figura 7.14 – Função de carregamento aplicada à carga P _____ | 149 |
| Figura 7.15 – Configurações original (vermelha) e deformadas (azul) (incrementos 30 e 60), vista xy _____ | 150 |
| Figura 7.16 – Configurações original (vermelha) e deformadas (azul) (incrementos 30 e 60), vista yz _____ | 151 |
| Figura 7.17 – Curva Carga versus Deslocamento u , no ponto de aplicação da carga _____ | 152 |
| Figura 7.18 – Curva Carga versus Deslocamento v , no ponto de aplicação da carga _____ | 153 |

| | |
|--|-----|
| Figura 7.19 – Curva Carga versus Deslocamento w , no ponto de aplicação da carga _____ | 154 |
| Figura 7.20 – Arco abatido _____ | 158 |
| Figura 7.21 – Configurações original e deformadas nos incrementos 47 e 134 _____ | 160 |
| Figura 7.22 – Curva Parâmetro de Carga versus Deslocamento v , em B _____ | 161 |
| Figura 7.23 – Curva Parâmetro de Carga versus Rotação rw , em B _____ | 161 |
| Figura 7.24 – Esquema de refinamento do modelo _____ | 162 |
| Figura 7. 25 – Curva Parâmetro de Carga versus Deslocamento v , em B , com o elemento isoparamétrico _____ | 163 |
| Figura 7.26 – Curva Parâmetro de Carga versus Deslocamento v , em B , com o elemento convencional _____ | 164 |
| Figura 7.27 – Desenho esquemático do duto enterrado, com imperfeição inicial, submetido a um carregamento térmico _____ | 165 |
| Figura 7.28 – Forma da imperfeição inicial no trecho central _____ | 166 |
| Figura 7.29 – Função de carregamento aplicada, com variação de temperatura de 50 °C _____ | 167 |
| Figura 7.30 – Curvas Reações Axial e Lateral versus Deslocamento, para representação do solo _____ | 169 |
| Figura 7.31 – Esquema do refinamento aplicado ao duto _____ | 170 |
| Figura 7.32 – Configurações original e deformadas nos incrementos de carga 250 e 500 _____ | 171 |
| Figura 7.33 – Curva Força Normal versus Comprimento do Duto _____ | 172 |
| Figura 7.34 – Curva Momento versus Comprimento do Duto _____ | 173 |
| Figura 7.35 – Curvas Força Normal versus Deslocamento v , no ponto A _____ | 174 |
| Figura 7.36 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v , no ponto A _____ | 175 |
| Figura 7.37 – Curvas Força Normal versus Deslocamento v , no ponto A , com o amplitude de imperfeição de 0,1 m, utilizando o elemento isoparamétrico _____ | 178 |
| Figura 7.38 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v , no ponto A , com o amplitude de imperfeição de 0,1 m, utilizando o elemento isoparamétrico _____ | 179 |
| Figura 7.39 – Curvas Força Normal versus Deslocamento v , no ponto A , com o amplitude de imperfeição de 0,3 m, utilizando o elemento isoparamétrico _____ | 180 |

| | |
|--|-----|
| Figura 7.40 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v , no ponto A , com o amplitude de imperfeição de 0,3 m, utilizando o elemento isoparamétrico | 181 |
| Figura 7.41 – Curvas Força Normal versus Deslocamento v , no ponto A , com amplitude de imperfeição de 0,1 m, utilizando o elemento PIPE31 (ABAQUS) | 183 |
| Figura 7.42 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v , no ponto A , com amplitude de imperfeição de 0,1 m, utilizando o elemento PIPE31 (ABAQUS) | 184 |
| Figura 7.43 – Curvas Força Normal versus Deslocamento v , no ponto A , com amplitude de imperfeição de 0,3 m, utilizando o elemento PIPE31 (ABAQUS) | 185 |
| Figura 7.44 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v , no ponto A com amplitude de imperfeição de 0,3 m, utilizando o elemento PIPE31 (ABAQUS) | 186 |
| Figura 7.45 – Relação entre ΔT crítico e o nível de refinamento do modelo | 189 |
| Figura 7.46 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v , no ponto A , com amplitudes de imperfeição de 0,1 e 0,3 m, comparando os elementos isoparamétrico e PIPE31 (ABAQUS) | 190 |
| Figura 7.47 – Forma e amplitude da imperfeição inicial na metade do trecho central do duto para L igual a 50 m | 192 |
| Figura 7.48 – Curvas Força Normal versus Deslocamento v para os 7 níveis de amplitude da imperfeição inicial | 193 |
| Figura 7.49 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v para os 7 níveis de imperfeição inicial | 194 |
| Figura 7.49 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v para os 7 níveis de imperfeição inicial comparando os resultados com a curva analítica de HOBBS para o modo 3 de flambagem | 195 |
| Figura 7.50 – Curvas Força Normal versus Deslocamento v para os 7 níveis de imperfeição inicial | 196 |
| Figura 7.51 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v para os 7 níveis de imperfeição inicial | 197 |
| Figura 7.52 – Forma da imperfeição inicial na metade do trecho central para os modelos com comprimento de imperfeição de 50, 70 e 90 m | 199 |
| Figura 7.53 – Curvas Força Normal versus Deslocamento v , em A , para os 3 níveis de extensão de imperfeição com amplitude igual a 0,1 m | 201 |
| Figura 7.54 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v , em A , para os 3 níveis de extensão de imperfeição com amplitude igual a 0,1 m | 202 |

| | |
|--|-----|
| Figura 7.55 – Curvas Força Normal versus Deslocamento v , em A , para os 3 níveis de extensão de imperfeição com amplitude igual a 0,3 m _____ | 203 |
| Figura 7.56 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v , em A , para os 3 níveis de extensão de imperfeição com amplitude igual a 0,3 m _____ | 204 |
| Figura 7.57 – Linha flexível em catenária na configuração inicial _____ | 206 |
| Figura 7.58 – Desenho esquemático do carregamento ambiental aplicado a estrutura _____ | 207 |
| Figura 7.59 – Desenho esquemático da discretização da malha de <i>riser</i> _____ | 209 |
| Figura 7.60 – Configurações original e deformadas com os elementos isoparamétrico e convencional no incremento 100 _____ | 211 |
| Figura 7.61 – Curva Tração versus Comprimento do <i>Riser</i> para os elementos isoparamétrico e convencional _____ | 212 |
| Figura 7.62 – Curva Tração versus Comprimento do <i>Riser</i> para os elementos isoparamétrico e convencional, entre 1.600 e 3.000 m do comprimento do <i>riser</i> _____ | 213 |
| Figura 7.63 – Curva Momento versus Comprimento do <i>Riser</i> para os elementos isoparamétrico e convencional _____ | 214 |
| Figura 7.64 – Curva Momento versus Comprimento do <i>Riser</i> para os elementos isoparamétrico e convencional, entre 1.600 e 3.000 m do comprimento do <i>riser</i> _____ | 214 |
| Figura 7.65 – Curva Tração versus Comprimento do <i>Riser</i> para o elemento convencional _____ | 216 |
| Figura 7.66 – Curva Tração versus Comprimento do <i>Riser</i> para o elemento convencional, entre 1.600 e 3.000 m do comprimento do <i>riser</i> _____ | 217 |
| Figura 7.67 – Curva Momento versus Comprimento do <i>Riser</i> para o elemento convencional _____ | 218 |
| Figura 7.68 – Curva Momento versus Comprimento do <i>Riser</i> para o elemento convencional, entre 1.600 e 3.000 m do comprimento do <i>riser</i> _____ | 218 |
| Figura 7.69 – Curva Tração versus Comprimento do <i>Riser</i> para o elemento isoparamétrico _____ | 219 |
| Figura 7.70 – Curva Tração versus Comprimento do <i>Riser</i> para o elemento isoparamétrico, entre 1.600 e 3.000 m do comprimento do <i>riser</i> _____ | 220 |
| Figura 7.71 – Curva Momento versus Comprimento do <i>Riser</i> para o elemento isoparamétrico _____ | 221 |
| Figura 7.72 – Curva Momento versus Comprimento do <i>Riser</i> para o elemento isoparamétrico, entre 1.600 e 3.000 m do comprimento do <i>riser</i> _____ | 221 |

| | |
|--|-----|
| Figura 7.73 – Curva Tração versus Comprimento do <i>Riser</i> para os elementos isoparamétrico e convencional, nível de refinamento 2 | 222 |
| Figura 7.74 – Curva Tração versus Comprimento do <i>Riser</i> para os elementos isoparamétrico e convencional, nível de refinamento 2 | 223 |
| Figura 7.75 – Curva Tração versus Comprimento do <i>Riser</i> para os elementos isoparamétrico e convencional, nível de refinamento 3 | 223 |
| Figura 7.76 – Curva Tração versus Comprimento do <i>Riser</i> para os elementos isoparamétrico e convencional, nível de refinamento 4 | 224 |
| Figura 7.77 – Curva Tração versus Comprimento do <i>Riser</i> para os elementos isoparamétrico e convencional, nível de refinamento 5 | 224 |
| Figura 7.78 – Curva Momento versus Comprimento do <i>Riser</i> para os elementos isoparamétrico e convencional, nível de refinamento 1 | 225 |
| Figura 7.79 – Curva Momento versus Comprimento do <i>Riser</i> para os elementos isoparamétrico e convencional, nível de refinamento 2 | 226 |
| Figura 7.80 – Curva Momento versus Comprimento do <i>Riser</i> para os elementos isoparamétrico e convencional, nível de refinamento 3 | 226 |
| Figura 7.81 – Curva Momento versus Comprimento do <i>Riser</i> para os elementos isoparamétrico e convencional, nível de refinamento 4 | 227 |
| Figura 7.82 – Curva Momento versus Comprimento do <i>Riser</i> para os elementos isoparamétrico e convencional, nível de refinamento 5 | 227 |

ÍNDICE DE TABELAS

| | |
|---|-----|
| Tabela 2.1 – Valores de k_n definidos para os quatro modos de flambagem | 20 |
| Tabela 2.2 – Características do duto | 23 |
| Tabela 2.3 – Reações axial e lateral do duto | 24 |
| Tabela 2.4 – Resultados analíticos para penetração e de 0,10 m | 24 |
| Tabela 2.5 – Resultados analíticos para penetração e de 0,25 m | 24 |
| Tabela 2.6 – Resultados analíticos para penetração e de 0,50 m | 25 |
| | |
| Tabela 4. 1 – Esquema dos pontos de integração de Gauss | 95 |
| Tabela 4. 2 – Coordenadas e fatores de ponderação dos pontos de Gauss, em r, s e t | 95 |
| Tabela 4.3 – Esquema dos pontos de integração de Gauss e Newton-Cotes | 96 |
| Tabela 4.4 – Coordenadas e fatores de ponderação dos pontos de Newton-Cotes para integração na direção θ da seção transversal do elemento com seção circular | 96 |
| | |
| Tabela 5. 1 – Relação força-deslocamento da mola axial | 111 |
| Tabela 5. 2 – Comparação entre as soluções numéricas e analíticas | 111 |
| | |
| Tabela 7.1– Parâmetros de análise | 130 |
| Tabela 7.2 – Resultados numéricos e analíticos referentes ao deslocamento u na extremidade da estrutura | 134 |
| Tabela 7.3 – Resultados numéricos e analíticos referentes ao deslocamento v na extremidade da estrutura | 135 |
| Tabela 7.4 – Parâmetros de análise | 138 |
| Tabela 7.5 – Resultados numéricos referentes ao deslocamento u na extremidade A da estrutura | 141 |
| Tabela 7.6 – Resultados numéricos e analíticos referentes ao deslocamento v no centro da estrutura, em B | 142 |

| | |
|---|-----|
| Tabela 7.7 – Dados de refinamento dos modelos _____ | 143 |
| Tabela 7.8 – Resultados do deslocamento v no último incremento de carga (incremento 50) _____ | 145 |
| Tabela 7.9 – Número médio de iterações para os 8 níveis de coeficientes de esbeltez _____ | 147 |
| Tabela 7.10 – Parâmetros de análise _____ | 150 |
| Tabela 7.11 – Resultados numéricos referentes ao deslocamento u na extremidade da estrutura _____ | 155 |
| Tabela 7.12 – Resultados numéricos referentes ao deslocamento v na extremidade da estrutura _____ | 156 |
| Tabela 7.13 – Resultados numéricos e analíticos referentes ao deslocamento w na extremidade da estrutura _____ | 157 |
| Tabela 7.14 – Parâmetros utilizados no <i>Arch-Lengh</i> _____ | 158 |
| Tabela 7.15 – Características físicas e geométricas do duto _____ | 168 |
| Tabela 7.16 – Reações axial e lateral do duto _____ | 169 |
| Tabela 7.17 – Dados do refinamento do modelo _____ | 170 |
| Tabela 7.18 – Parâmetros de análise _____ | 170 |
| Tabela 7.19 – Dados de refinamento do modelo _____ | 176 |
| Tabela 7.20 – Valores de parâmetro de carga limite e de ΔT crítico para os modelos com amplitudes de imperfeição de 0,1 m com o elemento isoparamétrico _____ | 182 |
| Tabela 7.21 – Valores de parâmetro de carga e temperatura crítica para os modelos com amplitude de imperfeição de 0,1 m com o elemento PIPE31 (ABAQUS) _____ | 187 |
| Tabela 7.22 – Valores de temperatura crítica comparando os elementos isoparamétrico e PIPE31 (ABAQUS) _____ | 188 |
| Tabela 7.23 – Níveis de imperfeição inicial aplicados ao duto _____ | 191 |
| Tabela 7.24 – Valores limite do parâmetro de carga e de ΔT crítico para os 7 níveis de amplitude de imperfeição _____ | 198 |
| Tabela 7.25 – Dados de refinamento do modelo _____ | 200 |
| Tabela 7.26 – Valores do parâmetro de carga e ΔT Crítico _____ | 205 |
| Tabela 7.27 – Propriedades físicas, geométricas e hidrodinâmicas da linha _____ | 208 |

| | |
|---|-----|
| Tabela 7.28 – Malha base utilizada no modelo _____ | 209 |
| Tabela 7.29 – Discretização das malhas utilizadas nos modelos _____ | 215 |
| Tabela 7.30 – Valores de tração no topo no incremento 100 _____ | 229 |
| Tabela 7.31 – Valores máximos de momento no TDP no incremento 100 _____ | 229 |

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação e Objetivos

O desenvolvimento de novos campos de petróleo, muitos deles em águas profundas e ultraprofundas, e neste momento, motivados pelas altas cotações do preço do petróleo, tem levado a indústria à aplicação e ao desenvolvimento de *risers* e linhas flexíveis para funcionamento em condições cada vez mais extremas. Tal condição vem fazendo com que os recursos disponíveis para o projeto e avaliação sejam cada vez mais sofisticados e continuamente melhorados.

Assim, como vem acontecendo na área de *risers* nos últimos anos, a análise de dutos vem se tornando uma atividade de grande importância na indústria de petróleo no Brasil. Os acidentes ocorridos, em particular o acontecido com o duto da Baía de Guanabara, em janeiro de 2000, duto PE-2, provocaram grandes danos ambientais e uma forte crítica por parte da sociedade, dentro e fora do país, estimulando as atividades de reavaliação de projetos existentes. Além disso, o aumento das atividades da Petrobras, com a conseqüente construção de novos dutos, vem ampliando a atividade de projeto, exigindo cada vez mais profissionais especializados e a aplicação de ferramentas mais sofisticadas.

Entre vários projetos de pesquisa e desenvolvimento em que a PETROBRAS vem investindo, encontra-se o de *risers* para campos em águas ultraprofundas e de dutos. Esses projetos destinam-se à elaboração de especificações técnicas, programas de qualificação, desenvolvimento de metodologias e critérios de projeto para novos produtos a serem empregados nos recentes empreendimentos. No caso de *risers*, o foco principal é a concepção estrutural do tubo que deve suportar as cargas de flexão e compressão axial típicas da região de contato com o leito marinho (*touch down point* – TDP).

Todo este desenvolvimento cria a necessidade de novas ferramentas numéricas que possam auxiliar o dimensionamento e projeto destas estruturas, permitindo a instalação e operação, em condições seguras, com o máximo de desempenho possível.

O método dos elementos finitos tem se mostrado como uma ferramenta poderosa para solução de problemas estruturais, incluindo casos com não-linearidades geométrica, física e/ou de contato. Uma quantidade muito grande de formulações de elementos tem sido desenvolvida na tentativa de melhor representar problemas físicos específicos. Alguns tipos de elementos de pórtico, por exemplo, se aplicam melhor a estruturas rígidas reticuladas, outros a *risers* e dutos, e com isso, cria-se a necessidade de se disponibilizarem as várias alternativas possíveis em termos de formulação.

Este trabalho mostra uma destas alternativas, através de uma formulação de elementos finitos de um elemento isoparamétrico de quatro nós com eixo curvo, com as ferramentas necessárias para o estudo de *risers*, linhas flexíveis e dutos. Este elemento tem potencial para ser uma alternativa ao elemento convencional de dois nós, hoje amplamente utilizado, podendo obter soluções mais precisas, com modelos pouco refinados. Este potencial é garantido pelo caráter matemático e pelo rigor técnico da formulação.

O estudo de casos clássicos e problemas estruturais reais mostram o potencial das ferramentas desenvolvidas. Estudos paramétricos realizados com estes casos geram conhecimento de análise, definindo a importância de cada um dos parâmetros avaliados na análise do comportamento de cada estrutura. São feitas comparações com um elemento convencional de dois nós, e com o isoparamétrico de dois nós PIPE31 do programa ABAQUS [1]. Resultados analíticos e numéricos encontrados na literatura também são utilizados como parâmetro de comparação.

1.2 Histórico e Revisão Bibliográfica

A literatura que envolve o estudo de *risers* e flambagem de dutos aquecidos é bastante vasta. Inúmeros trabalhos podem ser encontrados em fontes especializadas. No que diz respeito a *risers*, podem-se citar facilmente várias teses e artigos. Na área de dutos, a quantidade de trabalhos disponíveis é menor, porém com grande número de publicações.

O estudo de *risers* utilizando elementos finitos teve início na década de 70 com programas de aplicação geral como ABAQUS [1] e FENRIS [2]. Logo depois apareceram programas semelhantes incorporando facilidades específicas para este tipo de problema, como FLEXRISER[3], RISERF [4], ANFLEX [5] e outros. Mais tarde, os programas que se mantiveram no mercado incorporaram novas formulações, adequando-se as novas tecnologias que foram surgindo com a exploração de petróleo em lâminas d'água cada vez mais profundas. Trabalhos como os de MOURELLE [6], em 1993, e de KAYSER JUNIOR [7], em 2003, propuseram novas formulações com importante contribuição para esta linha de pesquisa.

A flambagem de dutos aquecidos é um problema que vem sendo estudado desde a década de 80, com uma parte do conhecimento oriundo de áreas correlatas. Fazendo parte desta literatura, por exemplo, existem os artigos sobre flambagem de trilhos de trem publicados por KERR [10,11,12], na década de 70. Um trabalho clássico, já aplicado a dutos, foi publicado por HOBBS [11], em 1984, onde foram propostas equações analíticas para solução do problema. Outros trabalhos importantes foram desenvolvidos por PALMER e BALDRY [12] em 1974, JU e KYRIAKIDES [13] em 1988, PEDERSEN e JENSEN [14] em 1988 e por PALMER et al. [15] em 1990.

A seguir, são apresentados os resumos de alguns trabalhos publicados. Muitos destes forneceram exemplos e modelos que podem ser vistos nas aplicações, e contribuíram com informações relevantes para a qualidade desta dissertação.

Em 1974, PALMER e BALDRY [12] mostraram os efeitos da pressão interna na flambagem de dutos. Este artigo abordou de forma objetiva o problema, apresentando resultados analítico e experimental para validação.

Em 1984, SPARKS [16] abordou em seu artigo a influência da tração, pressão e do peso nas tensões e deformações de dutos e *risers*. Ele destacou a maneira incorreta como este problema vinha sendo tratado, e mostrou uma forma simplificada, incluindo a análise de casos.

Em 1988, JU e KYRIAKIDES [13] publicaram um trabalho sobre flambagem de dutos *offshore* aquecidos. Eles trataram a estrutura como uma viga longa e pesada, com extremidades restringidas, sobre uma fundação rígida. A restrição axial foi modelada como um atrito de Coulomb. O estudo foi focado na influência da imperfeição inicial na estabilidade estrutural, considerando trechos localizados da estrutura. Na presença da imperfeição inicial, o estudo foi caracterizado pelo acréscimo de temperatura requerida para iniciar o levantamento, e a temperatura além da qual a estrutura ficava instável. Os valores de temperatura foram apresentados como função da geometria e da magnitude das imperfeições iniciais, e das características inelásticas do material.

Em 1988, PEDERSEN e JENSEN [14] apresentaram um artigo sobre flambagem vertical de dutos enterrados aquecidos com imperfeição inicial. Baseado num estudo de interação solo-duto, os autores apresentaram um procedimento para o projeto de dutos aquecido apoiados sobre o solo marinho. Neste trabalho os modelos matemáticos levavam em consideração a imperfeição inicial, a profundidade de enterramento e as condições de restrição. Este foi um dos importantes trabalhos publicados no início dos estudos de flambagem térmica de dutos.

Em 1993, MOURELLE [6] desenvolveu algoritmos para a análise dinâmica não-linear de linhas flexíveis através do método dos elementos finitos para um elemento de pórtico co-rotacionado. Neste trabalho foram discutidos o tratamento das rotações no espaço e a incorporação ao elemento. Por fim, foram realizados testes e aplicações a casos reais.

Em 2001, BENJAMIN e ANDRADE [17] escreveram sobre a flambagem de dutos aquecidos, mostrando uma versão modificada do método analítico proposto por HOBBS [11], para flambagem lateral de dutos aquecidos. Usando este método modificado, os autores realizaram um estudo de sensibilidade dos parâmetros representativos da flambagem lateral de dutos às variações do seu grau de penetração no

solo. Este trabalho mostra também uma descrição do fenômeno denominado de instabilidade da configuração fletida do duto, que é uma característica importante do comportamento da flambagem lateral de dutos.

Em 2003, KAYSER JUNIOR [7] estudou em sua tese de doutorado um elemento de pórtico isoparamétrico não-linear geométrico híbrido para análise de linhas flexíveis. Este trabalho apresentou um detalhado estudo paramétrico e de sensibilidade de casos que envolveram desde configurações simples a complexas de linhas flexíveis e *risers*. Como conclusão, mostrou-se a robustez do elemento quando aplicado às estruturas muito esbeltas, diante do elemento de pórtico convencional com dois nós.

Em 2004, BENJAMIN et al. [18] escreveram um artigo mostrando uma investigação da sensibilidade de um duto aquecido em zig-zag, chamado PE-3, instalado na Baía de Guanabara, a imperfeições iniciais. Neste trabalho, chegou-se à conclusão que a configuração em *zig-zag* é geometricamente estável quando os dutos são submetidos às condições extremas de pressão e temperatura definidas no projeto. Foi concluído também que as tensões de Von Mises calculadas na análise estavam abaixo da tensão de escoamento do material.

Em 2004, BELMONT et al. [19] apresentaram um procedimento para o tratamento do problema de flambagem vertical de dutos utilizando elementos finitos. Neste trabalho, o duto foi considerado apoiado sobre uma fundação elástica, considerando não-linearidades. Os problemas foram resolvidos utilizando o programa comercial ABAQUS. Os resultados numéricos foram comparados com soluções analíticas.

Em 2004, OLIVEIRA et al. [20] estudaram o fenômeno de flambagem lateral em dutos aquecidos. Neste trabalho, foi aplicado um modelo não-linear de elementos finitos, onde o duto foi modelado como uma viga apoiada sobre uma fundação não-linear. Foi estudada a influência da imperfeição inicial na temperatura de segurança, considerando diferentes formas de imperfeições.

Em 2005, SOUTO [21] apresentou em sua dissertação de mestrado um estudo numérico do problema de flambagem vertical de dutos submarinos enterrados quando sujeitos à expansão térmica. Foram apresentados problemas envolvendo imperfeição inicial e modelagem do solo, entre eles a análise de um caso real de duto.

Em 2005, CARDOSO [22] apresentou os avanços na avaliação do comportamento estrutural de dutos aquecidos submetidos ao fenômeno de flambagem. CARDOSO avaliou o comportamento estrutural dos dutos através de implementações no programa AEEPECD, que permitiu tratar as não-linearidades que envolvem o problema e os efeitos acoplados momento-pressão e leis constitutivas para a consideração da interação solo-duto. Foram avaliados os estados limites de flambagem local e de fadiga devidos aos ciclos de aquecimento/pressurização e desaquecimento/depressurização em dutos submarinos instalados sobre os solos argilosos da Bacia de Campos. As implementações feitas no programa AEEPECD foram validadas com soluções analíticas e com o programa comercial ABAQUS.

Em 2005, SOLANO [23] investigou a flambagem e pós-flambagem de vigas esbeltas submetidas à variação de temperatura através de soluções analíticas e numéricas. Este trabalho mostrou, como um dos resultados, um estudo paramétrico e uma análise de sensibilidade de um projeto de duto da Petrobras, onde se avaliaram detalhadamente diversos níveis de imperfeições iniciais e definiram-se os níveis de cobertura mínimos que limitam os deslocamentos e asseguravam a integridade do duto.

1.3 Organização do Texto

Este trabalho está dividido em 8 capítulos, os quais mostram os aspectos teóricos, aplicações e conclusões.

O capítulo 2 apresenta os aspectos teóricos da análise de dutos e *risers* mostrando conceitos, modelos analíticos para o tratamento de flambagem de dutos aquecidos e procedimentos de análise. Um caso de flambagem de dutos aquecidos é resolvido através da aplicação do modelo analítico de HOBBS Modificado [17].

No capítulo 3 são mostradas as formas possíveis de representação da interação solo-duto, considerando as direções de movimento do duto. São apresentadas leis constitutivas, características dos solos, que relacionam reação com deslocamento.

O capítulo 4 apresenta a formulação do elemento finito isoparamétrico de 4 nós, não-linear geométrico, com seções transversais retangular e circular.

O capítulo 5 mostra implementações específicas para a aplicação do elemento isoparamétrico a casos de *risers* e dutos, apresentando, em alguns casos, exemplos para validação.

No capítulo 6, estão as estratégias utilizadas para a obtenção da solução do problema não-linear. São mostrados os métodos de Newton-Raphson Padrão e Modificado, a técnica de controle de comprimento de arco (*arc-length method*) e os critérios de convergência.

O capítulo 7 apresenta os seis casos estudados através de simulações numéricas feitas com o elemento isoparamétrico implementado no programa PROSIM [24], baseado em elementos finitos para análise estática e dinâmica de sistemas *off-shore*. Paralelamente, foram realizadas simulações com uso dos elementos de pórtico convencional, que já se encontrava implementado no programa PROSIM, e PIPE31 do ABAQUS. Foram feitos estudos paramétricos a fim de caracterizar o comportamento de cada elemento, sendo comparadas as respostas obtidas por um e outro na maior parte das situações. As simulações também serviram para a validação das formulações aqui desenvolvidas. Os quatro primeiros exemplos estudados são aplicações clássicas já

apresentados em muitos trabalhos da literatura. Os dois casos seguintes são aplicações práticas da indústria do petróleo.

O capítulo 8 contém as conclusões referentes à aplicabilidade das ferramentas numéricas desenvolvidas, com comentários acerca da sua robustez e precisão. Além disso, são colocadas sugestões para continuação deste trabalho.

2 ANÁLISE DE DUTOS E *RISERS*

2.1 Introdução

Este capítulo apresenta fundamentos da análise de dutos e *risers*, mostrando tópicos sobre flambagem de dutos aquecidos, métodos analíticos para análise da flambagem destes dutos e conceitos e configurações de *risers*.

2.2 Análise de Dutos

O fenômeno de flambagem de dutos aquecidos, sob certas condições de contorno, decorrentes do contato solo-duto, é iniciado por um carregamento térmico produzido pelo deslocamento de um fluido em seu interior. Este fluido se desloca numa temperatura acima da temperatura de montagem do duto, transferindo calor para o aço e gerando esforços, que por sua vez podem levar o duto a flambar. Este item mostra, de forma geral, o problema de flambagem de dutos quando submetidos a este carregamento térmico.

2.2.1 Flambagem de Dutos Aquecidos

Flambagem é um fenômeno de instabilidade geométrica que leva uma estrutura a passar repentinamente de uma configuração de equilíbrio instável para uma configuração de equilíbrio estável, com grandes deslocamentos. No caso de dutos aquecidos, esta instabilidade ocorre quando um duto, inicialmente reto, sob certas condições de restrição ao deslocamento axial, imposta pelo solo, é submetido a uma variação de temperatura ΔT , acima da crítica. Portanto, as condições para que ocorra a flambagem são as seguintes:

- Duto reto;
- Duto submetido a um acréscimo de temperatura ΔT ;

- Deslocamento axial restrito, total ou parcialmente.

Como é impossível construir um duto sem imperfeições geométricas iniciais, um duto perfeitamente reto é uma idealização que só existe nos modelos matemáticos. A construção e montagem de um duto são realizadas de forma que o desvio da forma reta seja pequeno, ou melhor, que os trechos curvos tenham grandes raios de curvatura.

O comportamento de flambagem de dutos aquecidos é muito sensível a imperfeições geométricas iniciais. A existência de pequenas curvaturas iniciais, sejam elas no plano vertical ou horizontal, tem influência na definição do plano preferencial de flambagem. Curvaturas iniciais grandes no plano horizontal dificultam a ocorrência de flambagem no plano vertical, pois com esse tipo de imperfeição, o duto se desloca preferencialmente no plano horizontal. Por outro lado, a flambagem no plano horizontal também se torna difícil de ocorrer porque o duto já se encontra numa configuração inicial fletida.

O esforço axial produzido pelo acréscimo na temperatura em um duto axialmente restringido é dado pela Equação (2.1). A Figura 2.1 mostra o esquema da força normal que surge devido ao acréscimo de temperatura.

$$N = E A \alpha \Delta T \quad (2. 1)$$

onde:

E – módulo de elasticidade longitudinal;

A – área da seção transversal;

α – coeficiente de dilatação térmica;

ΔT – acréscimo de temperatura acima da temperatura de montagem.

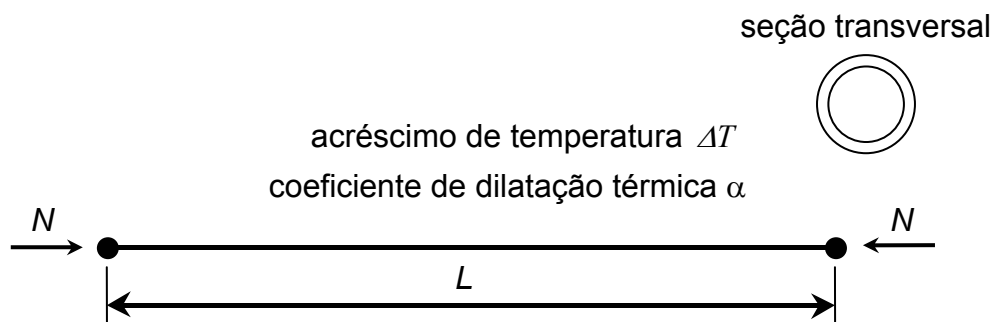


Figura 2.1 – Desenho esquemático da atuação da força normal devido ao aquecimento

A flambagem ocorre quando a força normal N se iguala ao esforço de flambagem N_f . Neste momento, o duto sofre deslocamentos laterais ou verticais ao longo de um pequeno trecho de dezenas de metros de comprimento, e se mantém reto nos trechos adjacentes. O duto pode assumir várias configurações deformadas, chamadas de modos de flambagem.

Os modos de flambagem lateral [8] possíveis de ocorrer podem ser constituídos por uma ou várias meias ondas. O modo 1 é constituído por uma meia onda, o modo 2 por duas meias ondas e assim por diante. A Figura 2.2 mostra quatro modos de flambagem lateral que podem ser assumidos num trecho de um duto. O comprimento L representa o tamanho da maior meia onda.

Os modos de flambagem vertical também podem ser constituídos por várias meias ondas. No entanto, nos métodos analíticos, para reduzir a complexidade das equações, em geral, considera-se apenas o modo 1.

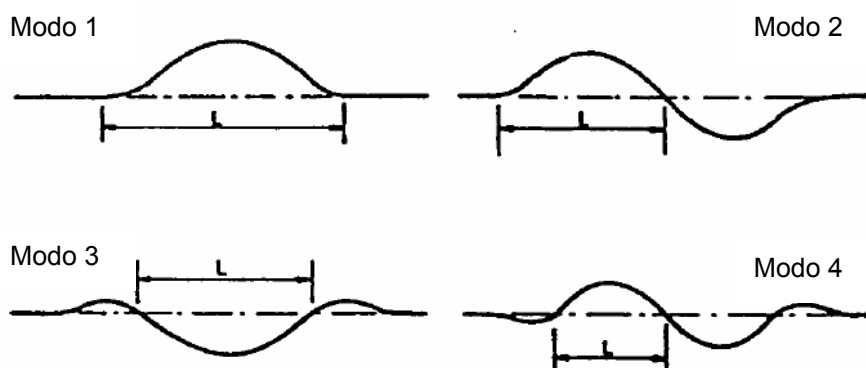


Figura 2.2 – Modos de flambagem que um duto pode assumir

No trecho fletido, uma parte da expansão térmica, antes restringida, é liberada, o que faz com que o esforço normal neste trecho sofra redução, tornando-se menor que N_f .

Os modos de flambagem localizados são típicos de flambagem de dutos aquecidos. É comum que, em um duto aquecido com vários quilômetros de extensão, ocorra flambagem em um ou mais trechos pequenos, de dezenas de metros, em vez de ocorrer flambagem segundo um modo periódico, com meias ondas ao longo de toda a sua extensão.

A flambagem de dutos aquecidos tem pontos comuns com a flambagem de colunas e de trilhos de trem. Comparando com colunas, a flambagem de dutos é bem mais complexa. As colunas têm apoios discretos, situados em posições conhecidas, os quais definem as seções em que os deslocamentos axiais e laterais estão restringidos, definindo assim o seu comportamento de flambagem. Os dutos encontram-se em contato com o solo, um meio contínuo, que reage de forma não-linear ao deslocamento do duto. Por este motivo, o comprimento de flambagem e os pontos de ancoragem fazem parte das incógnitas do problema.

Conforme encontra-se ilustrado na Figura 2.3, o duto pode estar parcialmente ou totalmente enterrado.

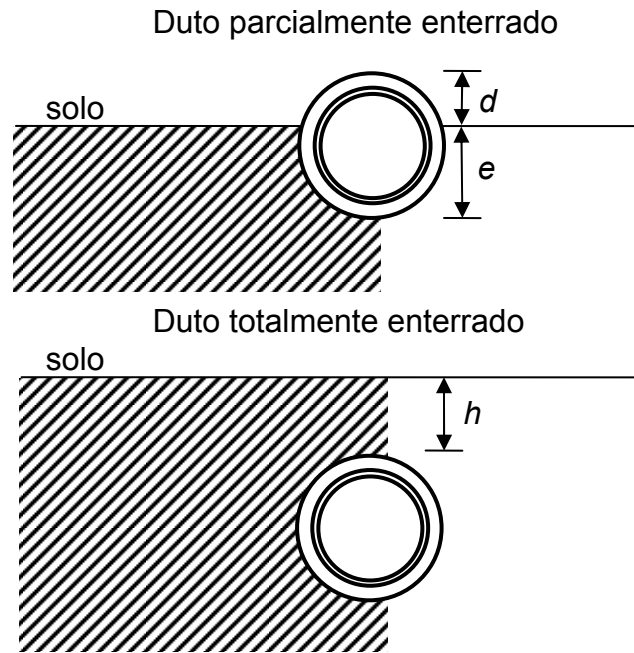


Figura 2.3 – Configurações parcialmente e totalmente enterrada dos dutos

Um duto totalmente enterrado, em geral, flamba verticalmente, devido à contenção lateral exercida pelo solo, que neste caso é grande. O peso próprio do duto e da camada de solo que se encontra sobre ele não são suficientes para impedir a flambagem vertical.

Num duto parcialmente enterrado, a flambagem pode ocorrer tanto verticalmente quanto lateralmente. Existe uma competição entre dois mecanismos de contenção da flambagem: a ação do peso próprio do duto e a reação lateral do solo. O peso próprio do duto se opõe à flambagem vertical, enquanto o solo se opõe à flambagem lateral, ocorrendo a flambagem no plano de menor contenção. Para valores de penetração maiores ou iguais a meio diâmetro [25], é mais provável que a flambagem vertical ocorra. A flambagem lateral depende de certas condições, tais como: duto parcialmente enterrado, duto reto, duto submetido a um acréscimo de temperatura, deslocamento axial parcialmente ou totalmente restringido e flambagem vertical impedida pela ação do peso próprio.

2.2.2 Métodos Analíticos para Análise de Flambagem

Inicialmente, este fenômeno foi estudado para trilhos de trem KERR [8], e posteriormente o conhecimento foi adaptado para dutos. Hoje, o estudo através de métodos analíticos está separado em dois grupos, que são os modelos de base rígida e modelos de base elástica. Os modelos analíticos são comumente utilizados em estudos preliminares de casos simples de flambagem de dutos aquecidos.

Em seu primeiro trabalho, KERR desenvolveu um modelo de base rígida para uma viga com rigidez a flexão EI sujeita a uma carga compressiva N_0 e ao peso próprio por unidade de comprimento W constante, conforme a Equação (2.2), diferencial ordinária linear e de quarta ordem.

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = -W \quad (2.2)$$

A Figura 2.4 mostra esquematicamente uma configuração de flambagem de um duto inicialmente reto, submetido aos carregamentos citados.

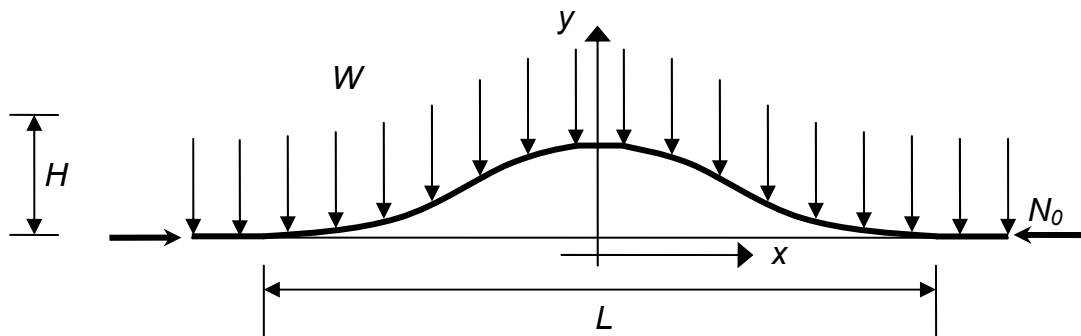


Figura 2.4 – Desenho esquemático de uma configuração de flambagem de um duto

Partindo das equação de KERR, um outro modelo de base rígida foi descrito por HOBBS [11] para o tratamento de dutos enterrados, considerando uma carga axial compressiva com resultado de uma variação de temperatura e da diferença entre as pressões internas e externas.

KERR também desenvolveu um modelo de base elástica, cuja diferença em relação ao primeiro está no carregamento vertical distribuído, que deixa de ser apenas o peso próprio e passa a ser uma força proporcional ao deslocamento vertical da viga,

simulando assim a reação do solo. A Figura 2.5 mostra esquematicamente o modelo de base elástica de KERR.

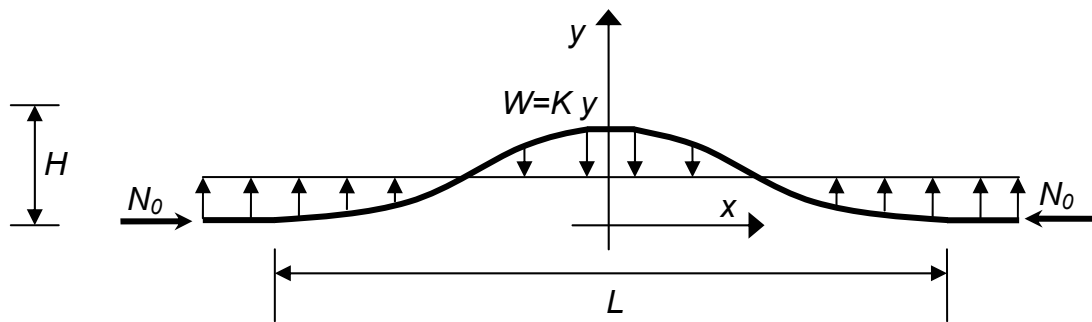


Figura 2.5 – Desenho esquemático do modelo de viga de base elástica

As equações dos modelos de base rígida e elástica são semelhantes, sendo que no modelo de base elástica, além do peso próprio W , foi adicionada uma força proporcional ao deslocamento, que representa a reação do solo. Desta forma, este modelo fica definido pela Equação (2.3).

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} + Ky = 0 \quad (2.3)$$

Apesar do modelo de base elástica ser uma evolução em relação ao de base rígida, ainda não representa muito bem a realidade do problema, pois não é válido para grandes deslocamentos, já que a força vertical não varia linearmente com o deslocamento, e não considera imperfeições iniciais.

TVERGAARD e NEEDLEMAN [26] modificaram o modelo de base elástica de KERR [8], inserindo uma imperfeição inicial senoidal de amplitude a , e comprimento L , e uma reação não-linear para o solo utilizando dados de campo.

O modelo de TVERGAARD e NEEDLEMAN, por sua vez, foi modificado por MALTBY [27][28], mantendo-se a qualidade dos resultados. Neste modelo, admite-se o solo com comportamentos bi-linear e exponencial. Um trabalho semelhante foi desenvolvido paralelamente por PALMER et al. [29].

A aproximação desenvolvida por PALMER et al. possui algumas limitações, como a que assume que o duto apresenta apenas comportamento elástico e

admite um perfil bastante simplificado para representação da imperfeição, quando na realidade este perfil é bastante complexo.

Apesar destes desenvolvimentos, os métodos analíticos sempre apresentam limitações, não sendo capazes de representar casos reais complexos. Por este motivo, muitas vezes se faz necessário aplicar o método dos elementos finitos através de programas comerciais, tais como ABAQUS, ANSYS, MARC ou NASTRAN, ou programas desenvolvidos especificamente para o problema. A flambagem é um fenômeno de instabilidade onde é muito importante que o modelo adotado considere os efeitos de mudança de geometria em relação às forças internas que tem origem na variação de temperatura do duto.

A seguir, será apresentado o método analítico de HOBBS [11] para o tratamento de flambagem vertical e horizontal de dutos aquecidos, uma aplicação deste método e considerações sobre instabilidade da configuração fletida de dutos. Outros métodos analíticos como o de PEDERSEN e JENSEN [30] e JIP-SHELL [25] [29], de igual importância, também poderiam ser abordados, porém sairiam do foco deste trabalho. Como a proposta não é fazer um estudo detalhado destes métodos, será mostrada apenas uma aplicação do método de HOBBS modificado.

2.2.3 Método Analítico de Hobbs para Análise de Flambagem Lateral e Vertical

O método analítico de HOBBS [11] para análise de flambagem lateral e vertical é uma adaptação do método proposto por KERR [8] [10] para análise de flambagem de trilhos de trem, com equações transformadas para o formato de HOBBS.

Em 1984, HOBBS propôs um método analítico para avaliação da flambagem lateral de dutos aquecidos. Neste método, a representação da interação solo-duto é feita com base em duas hipóteses. Na primeira hipótese, supõe-se que o duto encontra-se simplesmente apoiado sobre um solo rígido, que reage aos deslocamentos do duto com uma força de atrito de Coulomb f_s ($f_s = \mu w$). Na segunda hipótese, supõe-se que o coeficiente de atrito μ , entre o duto e o solo, é igual na direção axial e na direção transversal ao duto, ou seja, as reações do solo aos deslocamentos axial e lateral do duto, R_{axi} e R_{lat} respectivamente, são iguais entre si. A hipótese de que o duto encontra-se simplesmente apoiado sobre um solo rígido corresponde a uma condição muito idealizada. Mesmo que o duto tenha sido lançado sobre a superfície do solo, na maioria dos tipos de solo, exceção feita apenas para alguns solos arenosos, o peso próprio faz o duto penetrar no solo. No entanto, como em dutos parcialmente enterrados, as reações R_{axi} e R_{lat} são maiores ou iguais à força de atrito de Coulomb entre o duto e um solo rígido fictício, as hipóteses são conservadoras.

Aqui apresenta-se uma versão modificada do método analítico de HOBBS, proposto por BENJAMIN e CUNHA [31][32][33]. Neste método modificado, as reações do solo aos deslocamentos axial e lateral do duto são fornecidas como dados do problema e podem assumir valores diferentes entre si. Isto permite representar de forma mais realista as situações encontradas no campo, pois as reações R_{axi} e R_{lat} podem ser determinadas, por meio de análises numéricas ou de equações empíricas, levando-se em consideração o grau de penetração do duto no solo e também o tipo de solo.

Na adaptação do método de HOBBS, adotaram-se as seguintes hipóteses:

1. Penetração uniforme do duto ao longo de toda a sua extensão;
2. Solo rígido-plástico;

3. Material do duto elástico;
4. Duto sem imperfeição geométrica inicial (eixo reto);
5. Configuração pré-flambagem sem tensões de flexão;
6. Seção transversal do duto sem ovalização;
7. Duto sem perdas de espessura causadas por corrosão;
8. Duto sem moossa, sulco, covas e trincas;
9. Equilíbrio realizado na configuração pós-flambagem;
10. Interação solo-duto desprezada na direção axial nas meias ondas de flambagem.

No método de HOBBS, assim como nos trabalhos de KERR, foram estudadas 4 configurações de flambagem lateral, de acordo com a Figura 2.2. Como pode ser visto, o modo 1 é constituído por uma meia onda, o modo 2 por duas meia ondas, e assim por diante. Para o caso de flambagem vertical, apenas uma configuração, que corresponde ao modo 1.

A aplicação deste método aos casos de flambagem lateral é feita através das Equações (2.4), (2.5) e (2.6). Para os caso de flambagem vertical, utilizam-se as Equações (2.7), (2.8), (2.9).

Equações para o tratamento de flambagem lateral (para cada modo)

$$N_{fr} = k_1 \frac{EI}{L^2} \quad (2.4)$$

$$N_f = N_{fr} + k_3 R_{axi} L \left[\left(1.0 + k_2 \frac{EA}{R_{axi}} \frac{R_{lat}^2}{(EI)^2} L^5 \right)^{1/2} - 1.0 \right] \quad (2.5)$$

$$\Delta T_f = \frac{N_f}{EA\alpha} \quad (2.6)$$

Equações para o tratamento de flambagem vertical (para cada modo)

$$N_{fr} = k_1 \frac{EI}{L^2} \quad (2.7)$$

$$N_f = N_{fr} + \frac{L}{EI} \left[1,597 \times 10^{-5} EA W^2 R_{axi} L^5 - 0,25(R_{axi} EI)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.8)$$

$$\Delta T_f = \frac{N_f}{EA\alpha} \quad (2.9)$$

onde:

ΔT_f – acréscimo de temperatura efetivo e flambagem;

L – comprimento da meia onda e flambagem mais significativa;

N_{fr} – esforço normal de compressão no trecho fletido do duto correspondente ao ΔT_f ;

N_f – esforço normal de compressão no trecho ancorado do duto correspondente ao ΔT_f ;

R_{axi} – reação do solo ao deslocamento axial do duto;

R_{lat} – reação do solo ao deslocamento lateral do duto;

I – momento de inércia;

E – módulo de elasticidade longitudinal;

A – área da seção transversal;

α – coeficiente de dilatação térmica;

k_1, k_2, k_3, k_4 – constantes que assumem valores diferentes para os 4 modos de flambagem;

W – peso submerso por unidade de comprimento do duto.

Determinado o valor do acréscimo de temperatura ΔT_f , calcula-se a amplitude Y_{max} da meia onda mais significativa através da Equação (2.10) para o caso de flambagem lateral e da Equação (2.11) para o caso de flambagem vertical.

Caso de flambagem lateral

$$Y_{max} = k_4 \frac{R_{lat} L^4}{EI} \quad (2.10)$$

Caso de flambagem vertical

$$Y_{max} = k_4 \frac{WL^4}{EI} \quad (2.11)$$

Os valores das constantes k_n são definidos para os quatro modos de flambagem para o problema de dutos, e podem ser vistos na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Valores de k_n definidos para os quatro modos de flambagem

| Modo | k_1 | k_2 | k_3 | k_4 |
|------|-------|-----------|-------|-----------|
| 1 | 80,76 | 6,391e-5 | 0,500 | 2,408e-3 |
| 2 | 39,48 | 17,430e05 | 1,000 | 5,532e-3 |
| 3 | 34,06 | 16,680e-5 | 1,294 | 10,320e-3 |
| 4 | 28,20 | 21,440e-5 | 1,608 | 10,470e-3 |

A determinação do acréscimo de temperatura efetivo de flambagem, para cada modo, é feita através do procedimento a seguir:

1. Escolher os limites inferior L_{inf} e superior L_{sup} de um intervalo para variação do comprimento da meia onda de flambagem, de forma que $L_{inf} \leq L \leq L_{sup}$;
2. Fazer $(L)_i$ variar de L_{inf} a L_{sup} e determinar, para cada valor de $(L)_i$ os esforços $(N_{fr})_i$ e $(N_{fr})_i$ e o acréscimo de temperatura $(\Delta T_f)_i$, usando as Equações (2.4) a (2.9), respectivamente;

3. Tomar para o valor do acréscimo de temperatura ΔT_f o menor valor de $(\Delta T_f)_i$, calculado no passo 2.

O procedimento descrito pode ser facilmente implementado em planilhas eletrônicas. É importante notar que para cada modo de flambagem de um duto sem imperfeições iniciais, existem infinitas configurações de equilíbrio. Adota-se a configuração correspondente ao menor acréscimo de temperatura como a configuração de flambagem, pois esta é a opção mais conservadora.

2.2.3.1 Efeito da Pressão Interna na Flambagem do Duto

Como se pode notar, o efeito da pressão interna na flambagem do duto não foi incluído explicitamente nas equações. Para efeitos práticos pode ser incorporado implicitamente na força de compressão N_f e no acréscimo de temperatura ΔT_f , que é determinado a partir desta força. Desta forma, o acréscimo de temperatura efetivo ΔT_f é na realidade constituído por duas parcelas, conforme a Equação (2.12).

$$\Delta T_f = \Delta T_{crit} + \Delta T_p \quad (2.12)$$

onde:

ΔT_{crit} – acréscimo de temperatura crítico;

ΔT_p – acréscimo de temperatura equivalente ao efeito da pressão interna na flambagem do duto. O acréscimo de temperatura é ΔT_p calculado de acordo com a Equação (2.13).

$$\Delta T_p = \frac{p(D_e - t)}{4tE\alpha}(1 - 2\nu) \quad (2.13)$$

onde:

p – pressão interna do duto;

D_e – diâmetro externo do duto;

t – espessura do duto;

ν – coeficiente de Poisson.

Conhecendo-se ΔT_f e ΔT determina-se o acréscimo crítico ΔT_{crit} de acordo com (2.14).

$$\Delta T_{crit} = \Delta T_f - \Delta T_p \quad (2.14)$$

O acréscimo de temperatura ΔT_{crit} é o valor a partir do qual o fenômeno de flambagem lateral pode ocorrer. Para determinação da temperatura admissível T_{oper} de operação do duto, é recomendável a aplicação de um fator de segurança sobre o valor de ΔT_{crit} , conforme apresentado em (2.15).

$$T_{oper} = T_{mont} + f_s \Delta T_{crit} \quad (2.15)$$

onde:

T_{oper} – temperatura admissível de operação do duto;

T_{mon} – temperatura de montagem;

f_s – fator de segurança (menor que a unidade);

O fator de segurança f_s fornece uma margem de segurança 100 $(1 - f_s)\%$ em relação ao acréscimo de temperatura crítica ΔT_{crit} , e é importante para absorver pequenos desvios que possam ocorrer no campo em relação às hipóteses básicas estabelecidas no início deste item.

2.2.3.2 *Aplicação do Método de Hobbs Modificado para o Caso de Flambagem Lateral*

Neste método, as reações R_{lat} e R_{axi} são fornecidas como dados do problema e podem ser determinadas em função do grau de penetração do duto no solo e do tipo de solo, através de métodos numéricos ou até mesmo de experimentos. Assim, esta aplicação mostra um estudo da sensibilidade dos parâmetros que comandam a flambagem de um duto aquecido a variações no seu grau de penetração no solo. Neste estudo, as reações do solo foram determinadas através de métodos numéricos.

Nesta aplicação, foi utilizado um duto submarino de 16” (0,4064 m) de diâmetro, cujas características podem ser vista na Tabela 2.2. Na Tabela 2.3, encontram-se os valores das reações do solo considerando três níveis de penetração e do duto no solo: 0,10 m, de 0,25 m e de 0,50 m. Em todos os casos de penetração, considera-se o duto parcialmente enterrado num solo argiloso.

Tabela 2.2 – Características do duto

| Característica | Unidade | -- |
|---|---------------------|--------------------|
| Tipo de aço | -- | API 5L X 52 |
| Módulo de elasticidade E | MPa | 200.000 |
| Coefficiente de Poisson ν | -- | 0,3 |
| Coefficiente de dilatação térmica α | 1/°C | 1,19 E-5 |
| Diâmetro externo D_e | m | 0,4064 |
| Espessura t | m | 0,00792 |
| Área da seção transversal A | m ² | 0,0099147 |
| Momento de inércia I | m ⁴ | 0,00019687 |
| Peso submerso do duto W_{sub} | kN/m | 1,457 |
| Temperatura de montagem do duto T_{mont} | °C | 20 |
| Temperatura máxima de operação na parede de aço $T_{aço}$ | °C | 60 |
| Pressão interna de operação do duto p_{oper} | Kgf/cm ² | 35 |

O cálculo das reações tomou como base um estudo sobre interação solo-duto, para um duto com as características apresentadas na Tabela 2.2, parcialmente enterrado em um solo constituído por uma argila orgânica. O cálculo da reação R_{axi} do solo ao deslocamento lateral do duto foi realizado a partir da resistência não-drenada do solo S_u ($R_{axi} = A_{lateral} S_u$), tomando-se para S_u o valor de 1,4 kPa. A reação do solo R_{lat} foi determinada a partir da curva da reação do solo em função do deslocamento lateral do duto, usando um modelo não-linear de elementos finitos. Foi considerado para R_{lat} , o valor da reação correspondente ao deslocamento de 0,012 m, a partir do qual considera-se a ruptura do solo. Este trabalho de determinação das reações foi realizado por AMARAL e COSTA [34].

Tabela 2.3 – Reações axial e lateral do duto

| Condição de apoio do duto | e (m) | R_{axi} (kN/m) | R_{lat} (kN/m) |
|---|---------|------------------|------------------|
| Parcialmente enterrado em solo argiloso | 0,10 | 0,6491 | 0,7611 |
| Parcialmente enterrado em solo argiloso | 0,25 | 1,0996 | 1,8413 |
| Totalmente enterrado em solo argiloso | 0,50 | 2,1991 | 4,1998 |

Aplicando-se as equações do Método de HOBBS Modificado, determinam-se os valores de L , N_{fr} , N_f , ΔT_f , Y_{max} , a e L_{total} que se encontram nas Tabelas 2.4, 2.5 e 2.6. Como se podem verificar, os valores dos parâmetros L , N_{fr} , N_f , ΔT_f , Y_{max} , a e L_{total} , correspondentes a cada modo de flambagem, variam com o aumento da penetração do duto no solo, enquanto a meia onda de flambagem L , os comprimentos a e L_{total} decrescem. Os esforços normais N_{fr} e N_f e o acréscimo de temperatura ΔT_f crescem. Sem apresentar uma tendência definida, o deslocamento Y_{max} varia pouco.

Tabela 2.4 – Resultados analíticos para penetração e de 0,10 m

| Modo | L (m) | N_{fr} (N) | N_f (N) | ΔT_f (°C) | Y_{max} (m) | a (m) | L_{total} (m) |
|------|---------|--------------|-----------|-------------------|---------------|---------|-----------------|
| 1 | 75,30 | 5,606e5 | 8,620e5 | 36,529 | 1,496 | 464,286 | 1.004,0 |
| 2 | 53,30 | 5,470e5 | 8,344e5 | 35,362 | 0,863 | 442,837 | 992,3 |
| 3 | 50,00 | 5,362e5 | 8,210e5 | 34,793 | 1,247 | 438,720 | 1.007,0 |
| 4 | 45,30 | 5,409e5 | 8,202e5 | 34,760 | 0,853 | 430,343 | 1.006,0 |

Tabela 2.5 – Resultados analíticos para penetração e de 0,25 m

| Modo | L (m) | N_{fr} (N) | N_f (N) | ΔT_f (°C) | Y_{max} (m) | a (m) | L_{total} (m) |
|------|---------|--------------|-----------|-------------------|---------------|---------|-----------------|
| 1 | 61,30 | 8,459e5 | 1,311e6 | 55,572 | 1,590 | 423,256 | 907,813 |
| 2 | 43,30 | 8,288e5 | 1,271e6 | 53,850 | 0,910 | 401,873 | 890,345 |
| 3 | 40,60 | 8,133e5 | 1,251e6 | 53,023 | 1,312 | 398,230 | 901,491 |
| 4 | 36,60 | 8,286e5 | 1,251e6 | 52,999 | 0,879 | 383,800 | 885,305 |

Tabela 2.6 – Resultados analíticos para penetração e de 0,50 m

| Modo | L (m) | N_{fr} (N) | N_f (N) | ΔT_f (°C) | Y_{max} (m) | a (m) | L_{total} (m) |
|------|---------|--------------|-----------|-------------------|---------------|---------|-----------------|
| 1 | 49,60 | 1,292e6 | 2,005e6 | 84,963 | 1,554 | 324,137 | 697,874 |
| 2 | 35,00 | 1,269e6 | 1,942e6 | 82,285 | 0,886 | 306,108 | 682,216 |
| 3 | 32,60 | 1,261e6 | 1,911e6 | 80,989 | 1,244 | 295,427 | 675,191 |
| 4 | 29,60 | 1,267e6 | 1,910e6 | 80,932 | 0,858 | 292,361 | 679,916 |

Avaliando-se as Tabelas 2.4, 2.5 e 2.6 separadamente, nota-se que para os três valores da penetração e , os acréscimos de temperatura ΔT_f correspondentes ao modo 4 de flambagem são os que têm menor valor. Porém, como os ΔT_f correspondentes aos modos 2 e 3 têm valores muito próximos aos correspondentes ao modo 4, numa situação real qualquer um dos três modos pode ocorrer. Entretanto, como por motivos práticos é necessário ter-se um único valor para o ΔT_f , considera-se que o acréscimo de temperatura efetivo de flambagem para o duto, em determinada condição de apoio, é igual ao menor dos ΔT_f calculados para os quatro modos de flambagem. Assim, considera-se que os acréscimos de temperatura ΔT_f para as penetrações estudadas do duto no solo de 0,10 m, 0,25 m e 0,50 m são, 34,76 °C, 53,00 °C e 80,93 °C, respectivamente.

O gráfico da Figura 2.6 mostra o processo de determinação do valor de ΔT_f , apresentando as curvas de ΔT_f versus L , para os quatro primeiros modos de flambagem correspondente à penetração de 0,25 m. Como se verifica neste gráfico, os valores mínimos de ΔT_f determinados nos cálculos são iguais aos valores mínimos identificado nas curvas.

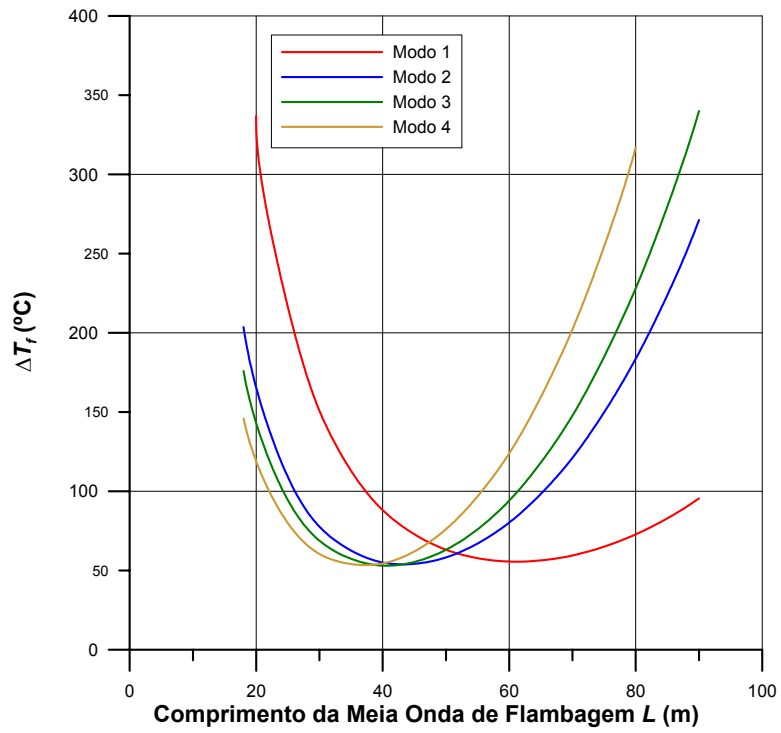


Figura 2.6 – Relação entre ΔT_f e L para os 4 primeiros modos de flambagem, com penetração de 0,25 m

2.2.4 Instabilidade da Configuração Fletida

Num duto parcialmente enterrado, submetido a um carregamento térmico, o comportamento de flambagem é muito mais complexo do que pode se notar pelo exemplo anterior. Os cálculos apresentados permitem a determinação do acréscimo de temperatura efetivo ΔT_f , do comprimento da meia onda de flambagem L e da amplitude da meia onda de flambagem Y_{max} , que são parâmetros importantes para uma avaliação quantitativa deste fenômeno. Mas, conforme já foi evidenciado em trabalhos clássicos [8] [11], existe uma característica mais sutil deste fenômeno que pode ser identificada por meio de um exame mais detalhado dos resultados fornecidos pelos métodos analíticos. Tal característica será apresentada neste trabalho, sendo denominada de instabilidade da configuração fletida do duto [33].

Fazendo uso dos resultados apresentados na aplicação do item anterior, foi traçada a curva ΔT_f versus L para o modo 2 de flambagem para a penetração e do duto no solo de 0,25 m, conforme se verifica na Figura 2.7. Esta curva representa um subconjunto das configurações de equilíbrio pós-flambagem possíveis para o modo 2, do duto perfeitamente reto, ou seja, sem imperfeição geométrica inicial. Assim, é importante deixar claro que não se trata de uma seqüência de configurações obtidas em um processo incremental de aplicação do carregamento térmico, como numa análise numérica. Esta curva, assim como as que relacionam ΔT_f com Y_{max} , geralmente é utilizada como uma ilustração do processo de determinação do valor mínimo de ΔT_f , como mostrado anteriormente.

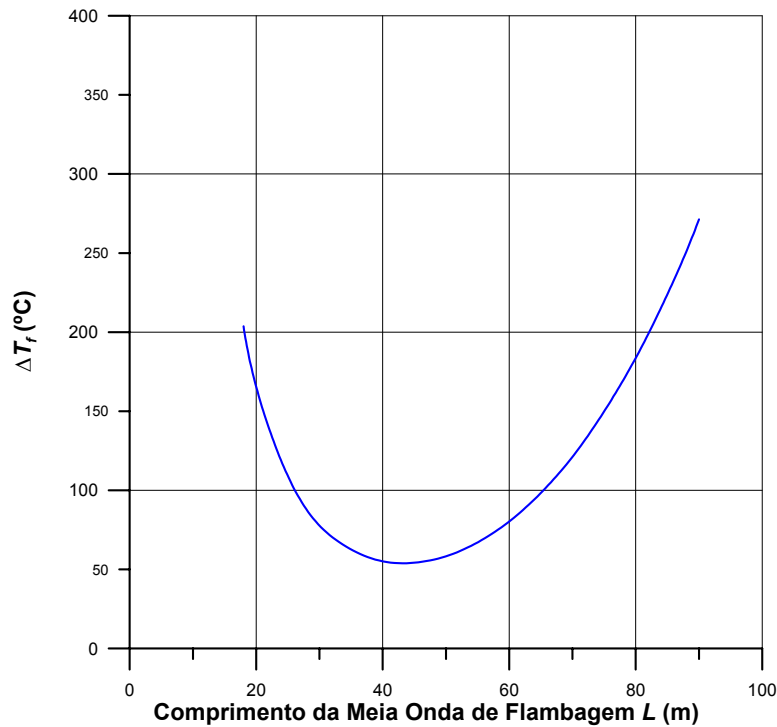


Figura 2.7 – Relação entre ΔT_f e L para o modo 2 de flambagem correspondente a penetração de 0,25 m

Conforme pode ser visto na Figura 2.7, os pontos correspondentes às configurações retas do duto encontram-se sobre o eixo das ordenadas enquanto os pontos correspondentes às configurações fletidas encontram-se sobre a curva de ΔT_f versus L . Para valores pequenos de L , esta curva se aproxima do eixo das ordenadas porém não chega a interceptá-lo. Segundo KERR [8], isto ocorre por causa da hipótese adotada no método analítico de que a reação máxima ao deslocamento lateral do duto ou do trilho do trem, no problema estudado por ele, é totalmente mobilizada para qualquer valor do deslocamento lateral.

Supõe-se, para efeitos práticos, que depois que o acréscimo de temperatura ultrapassa o valor mínimo de ΔT_f , a configuração reta do duto torna-se instável e, qualquer perturbação, por menor que seja, leva o duto a assumir uma configuração que se encontra sobre a curva de ΔT_f versus L . Observando novamente a Figura 2.7, verifica-se que para cada valor de ΔT_f , acima do valor mínimo, existem duas configurações fletidas do duto. Configurações que se encontram no ramo da curva à esquerda do valor de L correspondente ao ΔT_f mínimo são instáveis, enquanto que as do ramo à direita são estáveis. Assumindo-se uma configuração fletida instável, situada no

ramo esquerdo da curva, para poder continuar absorvendo temperatura, o duto dá um salto, passando para a configuração fletida estável, que está no lado direito da curva.

Desta forma, através do método analítico aqui investigado, um duto perfeitamente reto submetido a um acréscimo de temperatura maior que o ΔT_f mínimo, sofre instabilidade duas vezes consecutivas. Na primeira, passa de um configuração reta para uma configuração fletida instável. Na segunda, para uma outra configuração fletida, porém estável. A primeira configuração fletida tem uma meia onda de flambagem com comprimento menor que o L correspondente ao ΔT_f mínimo. Estas constatações foram feitas tomando-se como base a curva de ΔT_f versus L , porém poderiam ser feitas examinando-se a curva de ΔT_f versus Y_{max} .

A hipótese de que o duto é perfeitamente reto só pode ser satisfeita em um modelo matemático, pois na prática não existe um duto perfeitamente reto. Por este motivo, para que estas constatações possam ser generalizadas é necessário examinar se o mesmo tipo de instabilidade pode ocorrer em dutos com imperfeições geométricas iniciais.

A aplicação do Método de Hobbs Modificado ou do Método de Hobbs está restrita apenas a dutos perfeitamente retos. Entretanto, é possível, por meio de uma avaliação qualitativa baseada nestes métodos, mostrar que os dutos com imperfeições geométricas iniciais também estão sujeitos à instabilidade da configuração fletida.

De modo a facilitar a compreensão do fenômeno da instabilidade da configuração fletida do duto com imperfeições geométricas iniciais, sua descrição será feita tomando-se como base a curva de ΔT_f versus Y_{max} apresentada na Figura 2.8. Fazendo uso dos resultados obtidos no item anterior, foi traçada a curva de ΔT_f versus Y_{max} para o modo 2 de flambagem, do duto perfeitamente reto, correspondente à penetração e de 0,25 m. Ademais, foram traçadas duas curvas hipotéticas para este mesmo duto com imperfeições geométricas iniciais, na mesma condição de contorno.

Observa-se que existe uma diferença fundamental entre a curva para o duto perfeitamente reto e as curvas para o duto com imperfeições geométricas iniciais. A curva para o duto perfeitamente reto representa um subconjunto das configurações de equilíbrio pós-flambagem possíveis para o modo 2 de flambagem, não se tratando de

uma seqüência de configurações obtidas em um processo incremental de aplicação da carga térmica.

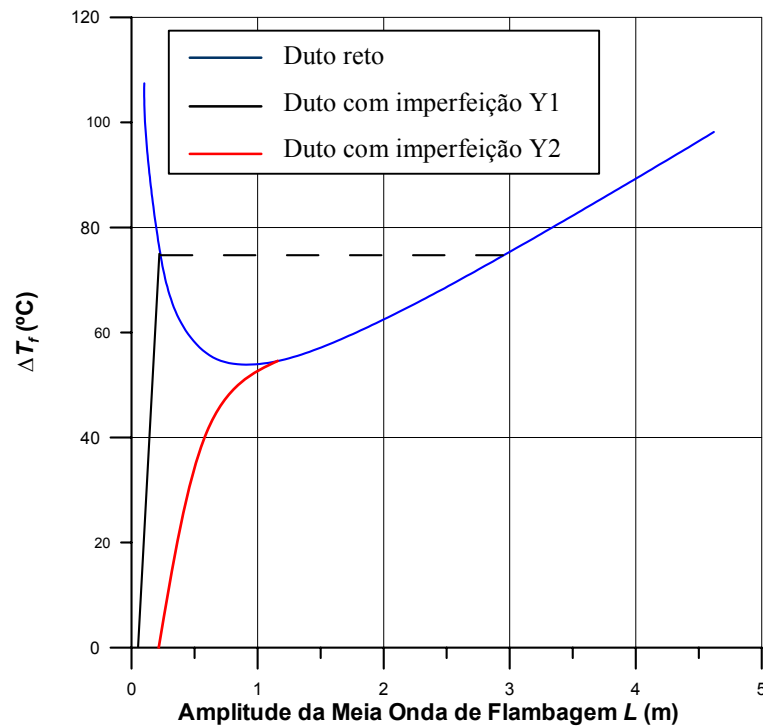


Figura 2.8 – Relação entre ΔT_f e Y_{max} para o modo 2 de flambagem correspondente a penetração de 0,25 m e curvas hipotéticas para dutos com imperfeição inicial

Para o duto com imperfeições geométricas iniciais, as curvas representam seqüências de configurações de equilíbrio obtidas a partir de um processo incremental de aplicação do carregamento térmico. Neste caso, o eixo das ordenadas corresponde aos acréscimos de temperatura seqüencial de uma análise incremental. Estas curvas hipotéticas correspondem a duas situações do duto com imperfeição inicial. Na situação 1, o duto tem imperfeição geométrica inicial na forma do modo 2, com comprimento de meia onda igual a L_1 e amplitude inicial δ_1 . Já na situação 2, o duto também tem imperfeição geométrica inicial na forma do modo 2, mas com comprimento de meia onda L_2 e amplitude inicial δ_2 maiores.

Já que em um duto com imperfeição geométrica inicial, os deslocamentos laterais começam a surgir desde o início da aplicação do carregamento térmico, não existe flambagem, no sentido de passagem de uma configuração reta para uma fletida.

Conforme pode ser visto na Figura 2.8, a curva correspondente à imperfeição com amplitude δ_1 mostra que, quando a imperfeição inicial é pequena, o duto se mantém estável apenas enquanto não é atingido o limite definido pelo ramo esquerdo da curva de ΔT_f versus Y_{max} do duto perfeitamente reto. Quando as duas curvas se encontram, ocorre uma instabilidade que faz com que o duto passe de forma abrupta para a configuração de mesmo ΔT situada no ramo direito da curva de ΔT_f versus Y_{max} do duto perfeitamente reto. Em geral, este salto é catastrófico e leva o duto à ruptura por plastificação da seção transversal seguida de flambagem local.

Ainda na Figura 2.8, a curva correspondente à imperfeição com amplitude δ_2 mostra que, quando a imperfeição inicial é grande, o duto se mantém estável ao longo de todo o processo de aplicação do carregamento térmico, atingindo o ramo direito da curva de ΔT_f versus Y_{max} do duto perfeitamente reto sem passar pelo ramo esquerdo.

Mesmo sendo definido para ser aplicado apenas a dutos perfeitamente retos, o Método de HOBBS ou sua versão modificada pode ser usado também para fornecer informações importantes para o acompanhamento de análises por elementos finitos de dutos com imperfeições iniciais.

2.3 Análise de *Risers*

Risers são estruturas tubulares utilizadas na indústria do petróleo que conectam o poço a unidade flutuante, permitindo o transporte de fluidos. Estas estruturas são flexíveis, podendo assumir diversas configurações, de acordo com as necessidades operacionais e de projeto. As condições de operação podem ser extremamente severas, quando instalado em lâmina d'água profunda, sujeito a carregamentos ambientais e movimentos da unidade flutuante.

No que se refere ao tipo, os risers podem ser rígidos ou flexíveis. Os rígidos são formados por seqüências de tubos de aço de aproximadamente 12 m, geralmente unidos por solda de topo ou flanges, como na Figura 2.9. Os flexíveis, como se verifica na Figura 2.10, são mangotes especiais compostos por várias camadas intercaladas de diferentes materiais. Este exemplo é composto por armaduras que conferem a resistência aos esforços axiais, constituídas por tramas metálicas, e revestimentos (interno e externo) feitos de polímeros.

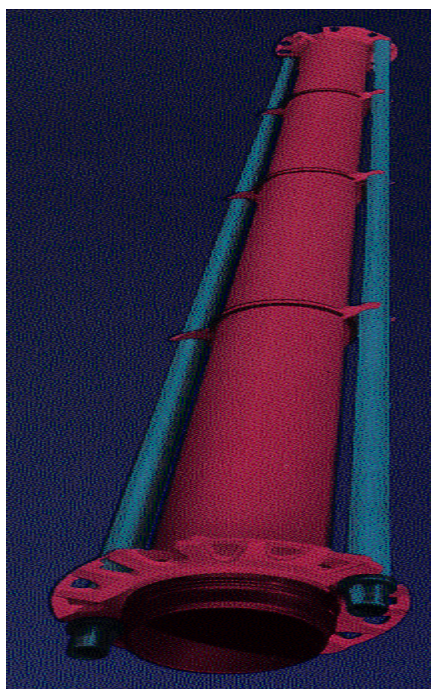


Figura 2.9 – Riser rígido de perfuração

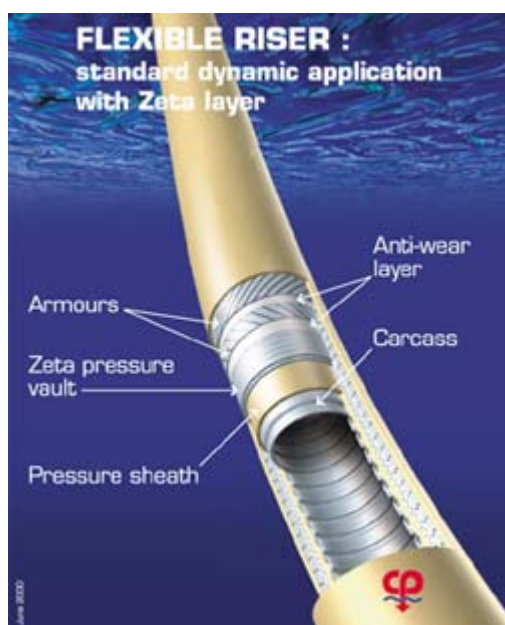


Figura 2.10 – Riser flexível de produção

No que se refere à função, podem ser utilizados em atividades tanto de perfuração quanto em atividades de produção e intervenção, podendo estar envolvidos

por flutuadores, quando em lâminas d'água profundas, reduzindo a carga sobre a unidade a qual está conectado.

Em atividades de produção, para transportar o óleo do fundo do mar até às unidades flutuantes, são empregados risers dispostos em configurações em catenária que podem ser flexíveis ou rígidos. A Figura 2.11 mostra esquematicamente este tipo de configuração.

Os risers de produção conectados a unidades flutuantes podem assumir diferentes configurações em catenária, como a seguir:

- Catenária Livre – Possui instalação simples, porém apresentam maiores esforços na conexão com a plataforma (Figura 2.11)
- *Lazy S* e *Steep S* – Apresentam uma seção intermediária que passa por um arco com flutuadores, cujo empuxo alivia o peso suportado pelo sistema flutuante, e contribui com o momento restaurador quando sob solicitações laterais. Na configuração *Lazy* (Figura 2.12 a), dupla catenária, há um tensionador sustentando o arco flutuador. Já na configuração *Steep* (Figura 2.12 b), o próprio *riser* tensiona o arco flutuador.
- *Steep Wave* e *Lazy Wave* – Estas configurações tem comportamento semelhante às configurações *Lazy s* e *Steep s*, mas o arco é substituído por uma seção intermediária com flutuadores distribuídos, simplificando a instalação. O desenho da Figura 2.13 mostra estas configurações.

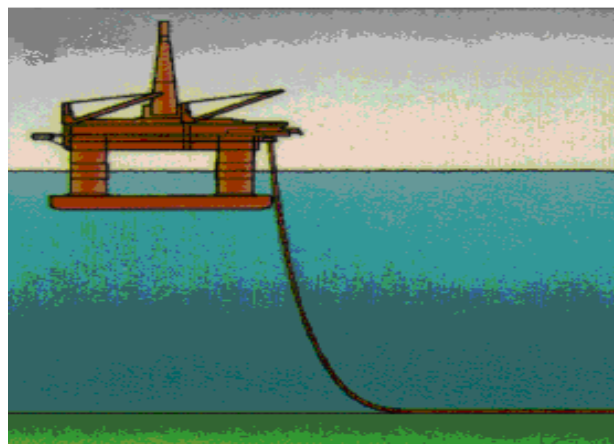


Figura 2.11 – Catenária Livre

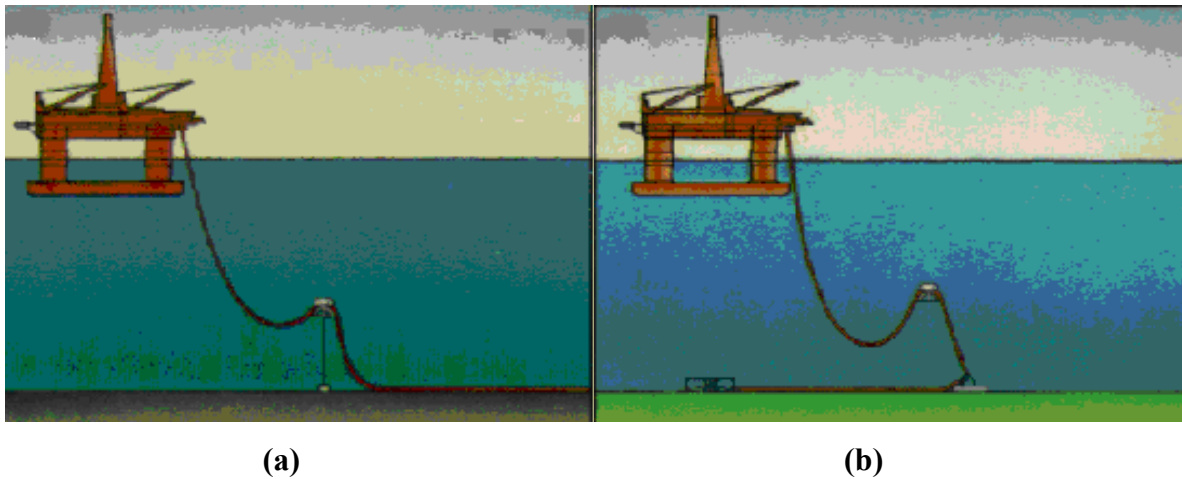


Figura 2.12 – Configurações Lazy S (a) e Steep S (b)

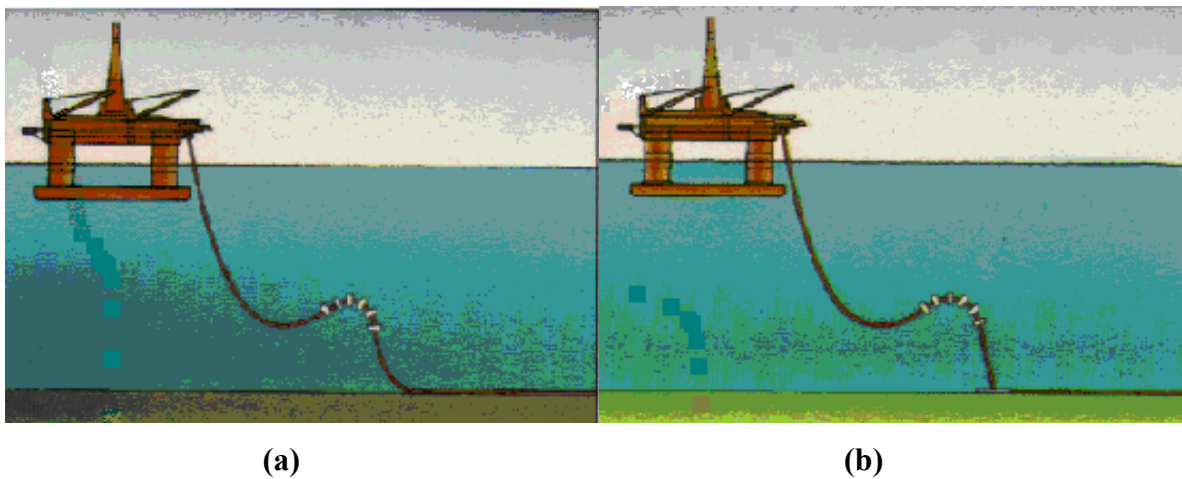


Figura 2.13 – Configurações Lazy Wave (a) e Steep Wave (b)

Estudos sobre a utilização de *risers* flexíveis ligando as unidades flutuantes diretamente ao fundo do mar foram realizados [35], mas tem sido reconhecido que esta solução pode alcançar ou exceder seus limites de viabilidade técnica e econômica em águas ultraprofundas. Desta forma, vem se buscando alternativas ao uso de *risers* flexíveis em situações que exijam linhas de grande diâmetro, particularmente quando associadas a altas temperaturas e pressões internas, com o objetivo de contornar a limitação do diâmetro imposta pelo processo de fabricação de um *riser* flexível, reduzir o custo dos *risers*, e também aumentar a capacidade de resistência às severas condições de serviço impostas aos *risers*.

Uma alternativa é a utilização de *risers* rígidos em catenária (*SCRs*) ligados à unidade flutuante [35]. Os *risers* rígidos em catenária constituem uma alternativa mais econômica à opção convencional de linha flexível, e seu uso vem se estabelecendo para uso em plataformas semi-submersíveis.

Em plataformas baseadas em navios, caracterizados por grande *offsets* estáticos e movimentos verticais maiores, foram observados problemas no comportamento estrutural dinâmico quando se empregam configurações em catenária livre. Os principais problemas estão relacionados com a flexão excessiva e compressão dinâmica dos *risers* junto ao *touch-down point* (TDP), devidos a raios de curvatura muito pequenos, e às tensões no topo dos *risers* geradas pelo *offset* e pelos movimentos angulares.

Para contornar esses problemas, configurações alternativas vem sendo estudadas, como a utilização de um sistema híbrido ou misto, utilizando combinações de *riser* rígido e flexível, baseadas em bóias submersas, como mostram a Figura 2.14 e 2.15. A Figura 2.14 apresenta o conceito de bóia de sub-superfície, que consiste de uma grande bóia submersa ancorada ao fundo do mar por tendões, suportando *risers* de aço em catenária (*SCRs*) entre o fundo do mar e a bóia, e *jumpers* flexíveis conectando os *SCR's* à unidade flutuante. Os *jumpers* flexíveis são capazes de absorver grande parte dos movimentos gerados pela unidade flutuante, sendo transmitido apenas uma parcela destes movimentos à bóia, diminuindo deste modo o comportamento dinâmico da bóia. Deste modo, é possível contornar os problemas observados no comportamento estrutural dinâmico de *risers* em catenária simples que conectam o fundo diretamente à unidade flutuante.

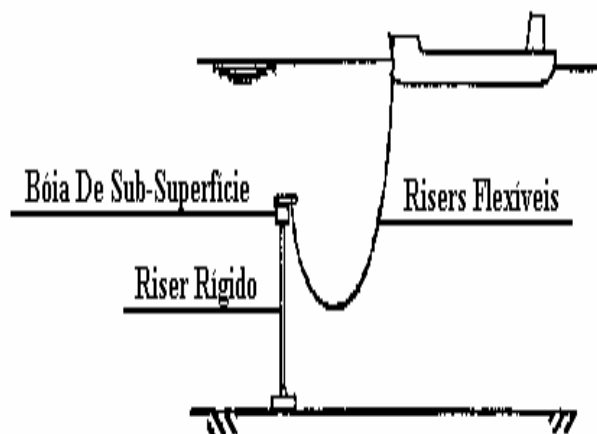


Figura 2.14 – Sistema híbrido de risers (SLHR)

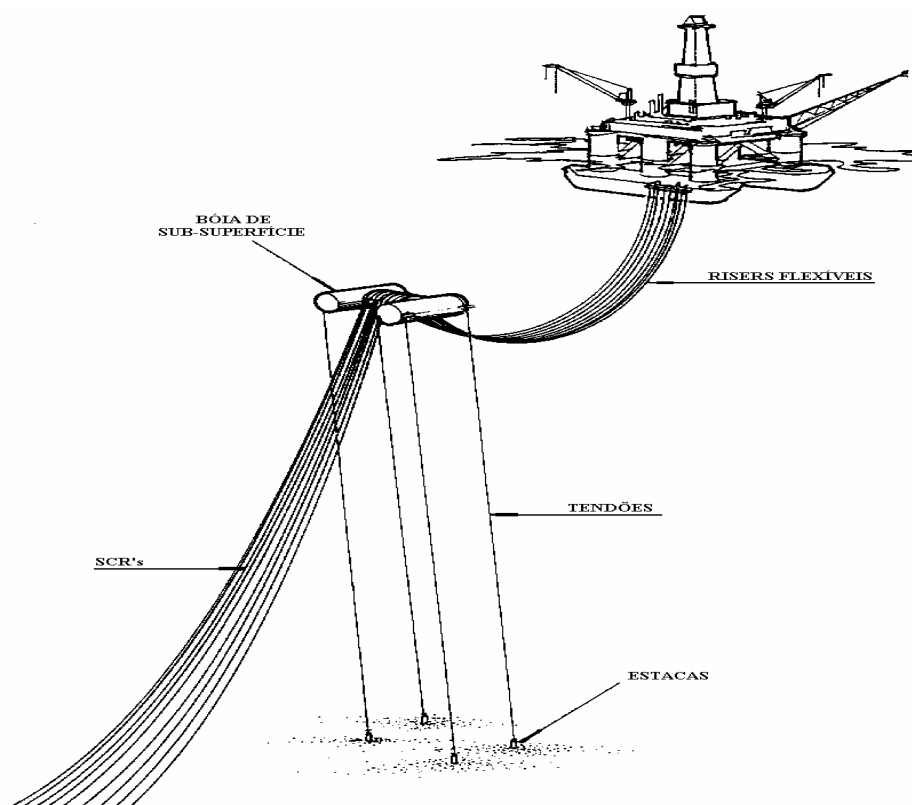


Figura 2.15 – Sistema híbrido de risers (TLR)

Para o dimensionamento e verificações estruturais dos risers conectados a unidades flutuantes, são necessárias ferramentas específicas que considerem o efeito não-linear e dinâmico dos movimentos impostos por estas unidades ao topo dos risers, além do efeito das ondas e correnteza agindo diretamente sobre estas linhas. Espera-se que o elemento de pórtico isoparamétrico desenvolvido neste trabalho contribua neste sentido, compondo uma ferramenta de análise mais robusta.

3 INTERAÇÃO SOLO-DUTO

3.1 Introdução

Um dos pontos de grande importância na simulação do comportamento de dutos aquecidos é a correta representação da interação solo-duto. O solo tem duas funções opostas na interação com dutos aquecidos. Por um lado, pode restringir a movimentação do duto, efeito que é benéfico quando a restrição é eficiente. Por outro lado, cria condições de contorno necessárias para que a flambagem ocorra, quando a restrição do solo é parcial, sendo insuficiente para impedir que o duto se movimente. Quando o solo restringe a movimentação axial do duto, ocorrem esforços de compressão, que dependendo das reações lateral ou vertical e das imperfeições iniciais podem vencer a resistência do solo iniciando o processo de flambagem.

O caráter da interação solo-duto pode ser positivo ou negativo, no processo de flambagem, dependendo do nível de restrição que o solo exerça sobre o duto. Quando o solo tem a capacidade de impedir movimentos significativos ao duto, caso que geralmente ocorre com dutos enterrados, o solo agirá de forma positiva, impedindo a flambagem. Quando o duto está parcialmente enterrado ou simplesmente apoiado sobre o solo, como no caso comum de dutos submarinos com elevada lâmina d'água, o solo passa a ser um indutor de flambagem, gerando esforços compressivos, não sendo capaz de restringir a sua movimentação e a conseqüente flambagem.

A representação do solo geralmente aplicada nos modelos analíticos, como HOBBS [36], KYRIAKIDES [13], PALMER [37] PENDERSEN [38], e numéricos, utilizam modelos de fricção de Morh-Coulomb. Esta forma de representação do comportamento do solo nem sempre é apropriada, pois nem sempre representa todas as situações do comportamento, principalmente quando ocorrem grandes deslocamentos.

Neste item, será abordado o comportamento da interação solo-duto, dando ênfase à interação com solos argilosos, já que este representa a maior parte dos solos

brasileiros. As leis constitutivas que serão apresentadas servem para qualquer tipo de solo, argiloso ou arenoso, pois representam apenas as curvas de reação versus deslocamento da interação solo-duto, tornando independente do tipo de solo.

3.2 Interação Solo-Duto na Direção Axial

A resistência axial do solo, que é contrária à expansão térmica do duto, tende a gerar um esforço de compressão na linha que é função do enterramento e parâmetros de resistência do solo. A reação axial máxima, de um modo geral é dada pela lei de atrito de Coulomb (CARDOSO [22]), conforme apresentada pela Equação (3.1).

$$F_{axial} = \int_A \tau dA \quad (3.1)$$

onde:

$$\tau = c + \sigma_n \operatorname{tg}\phi \quad (3.2)$$

A partir das Equações (3.1) e (3.2), verifica-se que a reação axial depende da área de contato solo-duto e do peso submerso expresso pela distribuição da tensão normal efetiva no contato. A Equação (3.1) pode ser simplificada mostrando formas mais conhecidas no cálculo da reação axial. Para materiais argilosos em condições não-drenadas, fazendo $c = S_u$ e $\phi = 0$, a reação axial fica definida pela Equação (3.3).

$$F_{axial} = \int_A S_u dA \quad (3.3)$$

sendo:

S_u – a resistência não-drenada no contato solo-duto;

A – a área lateral por unidade de comprimento do contato solo-duto.

Para o caso onde a resistência não-drenada é constante a reação axial passa a ser definida pela Equação (3.4).

$$F_{axial} = S_u A \quad (3.4)$$

Quando se trata de materiais arenosos, que tem o comportamento drenado, fazendo $c=0$, chega-se à Equação (3.5).

$$F_{axial} = \int_A \sigma_n \operatorname{tg} \phi dA \quad (3.5)$$

Para o caso onde se tem uma distribuição aproximadamente uniforme de tensão normal no contato solo-duto, tem-se (3.6).

$$F_{axial} = \mu_{axi} W_{sub} \quad (3.6)$$

sendo:

W_{sub} – o peso submerso por unidade de comprimento;

μ_{axial} – o coeficiente de atrito axial no contato solo-duto.

Segundo CARDOSO, a questão da reação axial em dutos ainda não é muito bem compreendida, principalmente em solos argilosos, no qual o valor da reação pode mudar ao longo do tempo devido ao processo de adensamento, que dissipa poropressões.

Quando se trata de análise de dutos, é comum a utilização do conceito de atrito axial equivalente (CARDOSO), que quantifica a interação solo-duto independente de seu comportamento drenado ou não-drenado. O cálculo do coeficiente de atrito equivalente é feito dividindo-se a reação axial máxima pelo peso submerso do duto. Segundo CARDOSO, esta forma de representar a interação solo-duto pode levar a obtenção de coeficientes de atrito maiores que um, dependendo do enterramento e parâmetro de resistência do solo, porém é muito útil, pois fornece um valor adimensional mais fácil de ser comparado, pois levam em conta as características do solo e do duto, sendo mais prático do que a simples utilização da reação axial.

Através do conceito de coeficiente de atrito equivalente, pode-se utilizar a lei de Coulomb na representação da interação solo-duto na direção axial conforme apresentada na Figura 3.1, onde se pode verificar que os deslocamentos axiais relativos solo-duto só ocorrem quando a reação máxima axial é mobilizada.

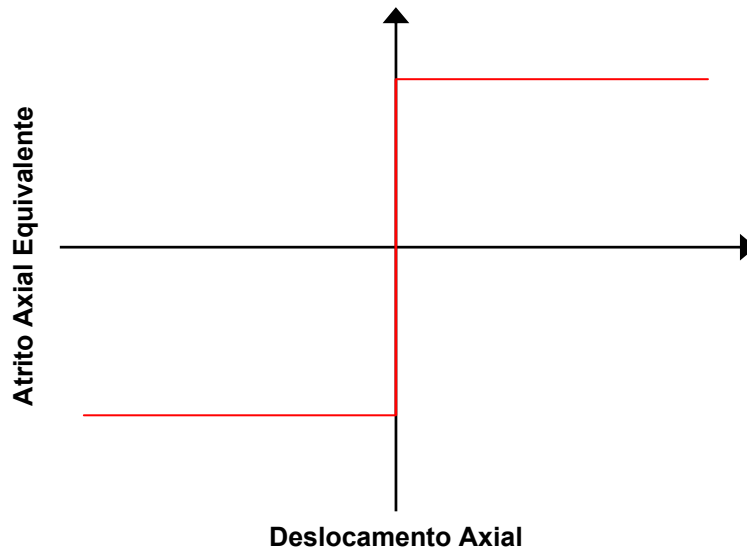


Figura 3.1 – Desenho esquemático da lei constitutiva de Coulomb em termos do coeficiente de atrito axial equivalente

O comportamento real do solo na direção axial tem semelhança com a lei constitutiva apresentada na Figura 3.2, onde se pode verificar a existência de um deslocamento de mobilização que delimita as regiões elástica e plástica. Verifica-se também a existência de uma região de transição entre a região com resistência de pico e a resistência residual, que define o comportamento de expansão do duto na direção axial e conseqüentemente no processo de flambagem. A forma da lei constitutiva e o valor do deslocamento de mobilização apresentam influência significativa apenas na iniciação do processo de flambagem [39].

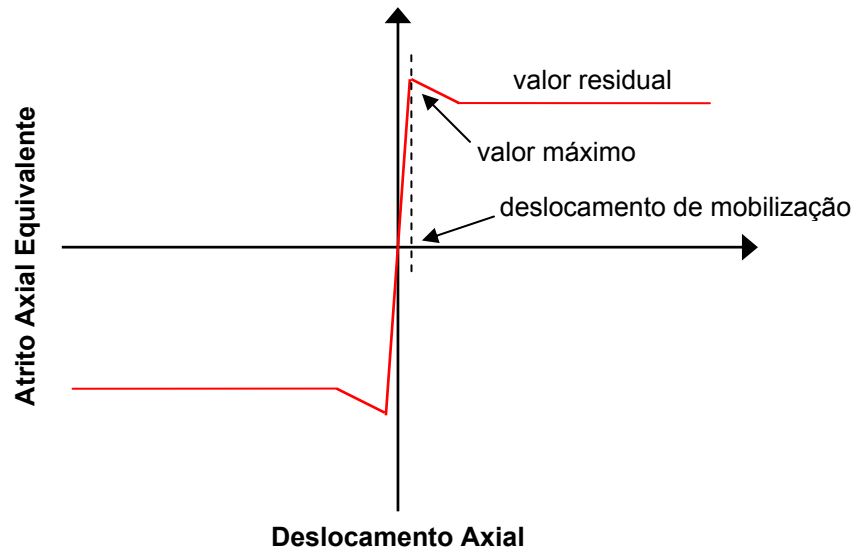


Figura 3.2 – Desenho esquemático da lei constitutiva plástico-perfeita com deslocamento de mobilização em termos do coeficiente de atrito axial equivalente

3.3 Interação Solo-Duto na Direção Lateral

Para a compreensão do mecanismo da reação lateral do solo desenvolvido pela movimentação do duto, CARDOSO preferiu dividir esta em duas parcelas, sendo a primeira semelhante à existente na direção axial e comandada pelo atrito no contato solo-duto, e a segunda dada pela mobilização da resistência ao cisalhamento do meio contínuo ao redor do duto, conhecida como resistência passiva.

A Equação (3.7) mostra a contribuição das duas parcelas, de atrito e resistência passiva do solo, definindo a resistência lateral desenvolvida pelo solo no início do processo de flambagem.

$$F_{\text{lat}} = F_{\mu} + F_p \quad (3.7)$$

A parcela da equação F_{μ} depende do atrito no contato solo-duto e do peso submerso do duto. A parcela F_p depende da resistência passiva do solo, sendo função do diâmetro externo do duto, dos parâmetros de resistência do solo e do nível de enterramento. Dependendo do nível de enterramento do duto, a maior parte da reação do solo é devido a componentes de resistência passiva. De um modo geral, a reação lateral é função do tipo de carregamento imposto pelo duto ao solo. Em solos argilosos, caso o carregamento seja rápido, de modo a não permitir a dissipação de poropressões, pode-se utilizar a resistência não drenada do material, sendo este o caso mais frequente. Nos casos em que ocorre a dissipação de poropressões com o adensamento do solo, a obtenção da reação lateral torna-se mais complexa, e, desta forma, não existe uma metodologia adequada para o tratamento do problema.

Assim como apresentada para a reação axial, a reação lateral é geralmente expressa em termos de um coeficiente de atrito lateral equivalente devido ao peso submerso do duto pelo valor da reação lateral, de acordo com Equação (3.8).

$$F_{\text{lat}} = \mu_{\text{lat}} W_{\text{sub}} \quad (3.8)$$

Na literatura, pode ser encontrada uma série de formulações semi-empíricas para determinar o valor da reação passiva do solo baseado em experimentos e

formulações de equilíbrio limite através da definição de superfícies de ruptura [40][42][41].

A Equação (3.9), apresentada por VERLEY et al [40], mostra como obter a reação lateral passiva de dutos apoiados sobre solo argilosos até enterramentos em torno de 30% do diâmetro do duto considerando propriedade não-drenadas.

$$\frac{F_p}{D_e S_u} = 4.13 \left(\frac{S_u}{D_e \gamma} \right)^{-0,392} \left(\frac{z}{D_e} \right)^{1,31} \quad (3.9)$$

A resistência lateral passiva vista na Equação (3.9) depende da resistência não-drenada (S_u), do diâmetro externo do duto (D_e) e do enterramento (z). As formulações semi-empíricas podem fornecer resultados não satisfatórios, em muitos casos devido à grande dispersão existente nos resultados experimentais em que são baseados e nas hipóteses simplificadoras adotadas, segundo BOLTON et al [41].

O comportamento da reação lateral de dutos parcialmente enterrados através do coeficiente de atrito equivalente para dutos que apresentam peso submerso suficiente para continuar empurrando o solo, no caso de dutos pesados, sem sair da vala formada pela sua própria movimentação, e de dutos leves que, durante o processo de flambagem, ultrapassam a mesma vala, pode ser visto na Figura 3.3 [22]. Como se pode observar, caso o duto tenha peso suficiente para continuar na vala, a reação lateral continua aumentando devido ao acréscimo de resistência passiva mobilizada pelo duto. Por outro lado, caso o duto seja leve o suficiente para escapar da vala, a reação lateral tende a apresentar uma queda devido à desmobilização da resistência passiva do solo.

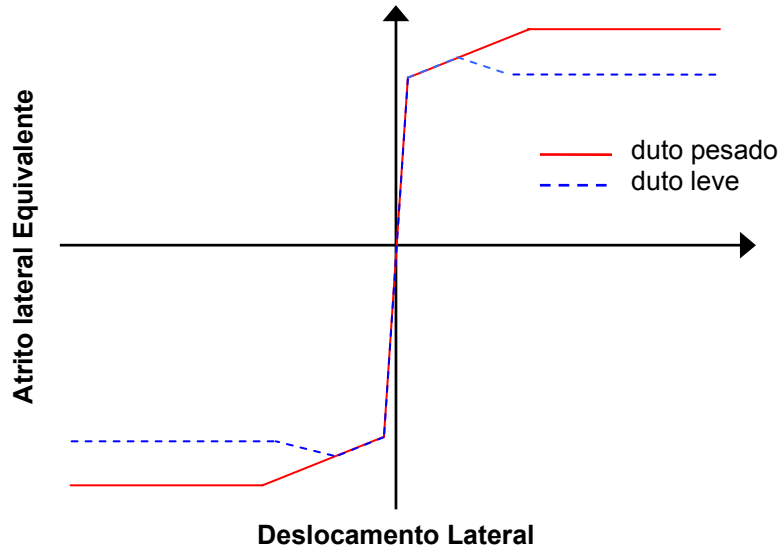


Figura 3.3 – Desenho esquemático do comportamento da reação lateral de dutos parcialmente enterrados leves e pesados em termos do coeficiente de atrito lateral equivalente

No caso de dutos enterrados, a reação lateral é essencialmente devido à componente passiva, apresentado comportamento semelhante ao observado em dutos pesados. A Equação (3.10), recomendada pela ASCE [42], permite obter a reação lateral passiva para o caso de dutos totalmente enterrados.

$$F_p = N_{ch} c D_e + N_{qh} \bar{\gamma}_s H D_e \quad (3.10)$$

sendo:

N_{ch} , N_{qh} – fatores de capacidade de carga dependem do nível de enterramento H do duto e do ângulo de atrito interno do material.

Formas simplificadas para casos específicos podem ser obtidas para a Equação (3.10). As Equações (3.11) e (3.12) foram obtidas a partir desta, e podem ser aplicadas para solos arenosos e argilosos, respectivamente. A recomendação da ASCE [42] também estima o valor do deslocamento elástico máximo lateral do solo em função do enterramento do duto.

$$F_p = N_{qh} \bar{\gamma}_s H D_e \quad (3.11)$$

$$F_p = N_{ch} S_u D_e \quad (3.12)$$

Em (3.6), definida para solos argilosos, observa-se que a resistência lateral passiva em dutos totalmente enterrados depende da resistência não-drenada do material (S_u), do diâmetro externo do duto (D_e) e do fator de capacidade de carga que é função do enterramento (H) e do ângulo de atrito interno do material. A equação para a reação lateral de dutos totalmente enterrados possui uma forma semelhante à verificada para dutos parcialmente enterrados, diferenciando-se apenas nos fatores existentes em cada expressão, que ajustam os resultados, adequando para cada caso, parcialmente enterrado ou totalmente enterrado.

3.4 Interação Solo-Duto na Direção Vertical

A reação vertical do solo é função da direção de mobilização do solo dada pela movimentação do duto. No caso em que o duto se movimenta no sentido de aumentar o seu enterramento, tem-se a reação denominada vertical descendente. Caso contrário, quando o duto se movimenta no sentido de diminuir o seu enterramento, temos a reação vertical chamada ascendente. Em geral, estas duas reações são diferentes, porém para dutos muito enterrados, com enterramentos superiores a 3 diâmetros, as reações máximas do solo tendem a ser iguais nos dois sentidos [42].

Para o caso de dutos apoiados no solo ou parcialmente enterrados, a reação vertical mais significativa é a reação ao movimento descendente. A reação ao movimento vertical ascendente é secundária e de difícil obtenção, pois depende essencialmente da sucção no contato solo-duto, sendo em geral desprezada para enterramentos inferiores a meio diâmetro. Em dutos totalmente enterrados, a reação do solo, tanto ascendente como descendente, pode ser obtida através de formulações analíticas baseadas em ensaios experimentais e modelos teóricos, ou por modelagem numérica utilizando modelos de elementos finitos.

Pode-se obter várias reações verticais em dutos enterrados utilizando expressões analíticas, sendo a principal referência a ASCE [42]. Estas expressões são baseadas em testes experimentais em escala reduzida e modelos matemáticos para a obtenção da reação máxima. São propostas também expressões para o cálculo do deslocamento e mobilização correspondente à reação vertical máxima.

De acordo com a ASCE [42], a reação vertical ao movimento ascendente proposta para dutos em enterramentos moderados é dada pela Equação (3.13).

$$F_{va} = N_{cv} cD_e + N_{qv} \bar{\gamma}_s H D_e \quad (3.13)$$

sendo:

N_{cv} , N_{qv} – fatores de capacidade de carga;

H – enterramento referente ao centro do duto.

A Equação (3.13) pode ser adaptada para casos específicos de solos arenosos e argilosos, resultando, respectivamente, nas Equações (3.14) e (3.15).

$$F_{va} = N_{qv} \overline{\gamma_s} H D_e \quad (3.14)$$

$$F_{va} = N_{cv} S_u D_e \quad (3.15)$$

A reação vertical ao movimento descendente pode se calculada, de acordo com proposta da ASCE [42], pela Equação (3.16).

$$F_{vd} = N_c c D_e + N_q \gamma_s H D_e + N_\gamma \overline{\gamma_s} \frac{D_e^2}{2} \quad (3.16)$$

sendo:

N_c , N_q e N_γ – fatores de capacidade de carga.

A Equação (3.16) é clássica para o cálculo de capacidade de carga em fundações rasas [43], e pode ser simplificada para casos específicos de solos arenosos e argilosos, resultando nas Equações (3.17) e (3.18), respectivamente.

$$F_{vd} = N_q \gamma_s H D_e + N_\gamma \overline{\gamma_s} \frac{D_e^2}{2} \quad (3.17)$$

$$F_{vd} = N_c S_u D_e + N_q \gamma_s H D_e \quad (3.18)$$

Através das Equações (3.17) e (3.18), são obtidas as reações verticais máximas do solo. Caso o duto apresente deslocamentos elevados, pode ocorrer o rompimento das camadas de solo sobrejacente, alterando a reação vertical ascendente de forma significativa. Para representar corretamente a reação vertical do solo durante o processo de flambagem vertical, deve-se considerar uma possível perda de suporte vertical com a movimentação do duto. A Figura 3.4 mostra os esforços atuantes em um duto com imperfeição inicial sofrendo flambagem vertical. A Figura 3.5 mostra esquematicamente a reação vertical de solos arenosos e argilosos de dutos totalmente enterrados durante o deslocamento vertical.

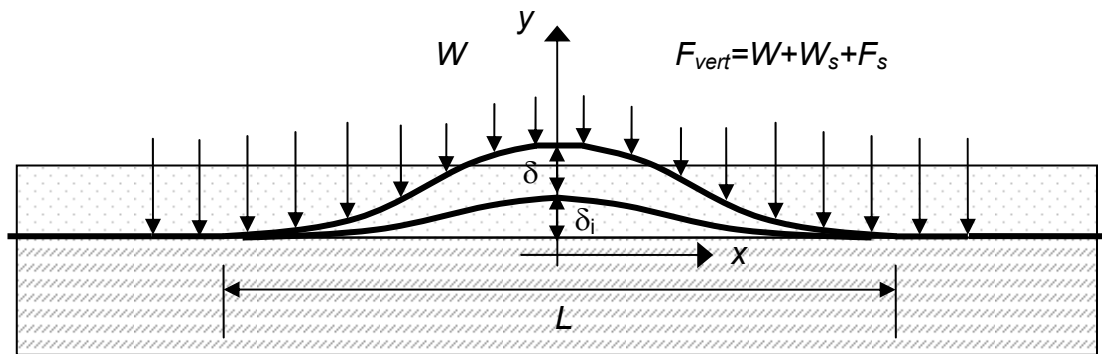


Figura 3.4 – Desenho mostrando os esforços atuantes na configuração deformada, considerando imperfeição inicial e variação da resistência vertical ascendente durante o deslocamento vertical

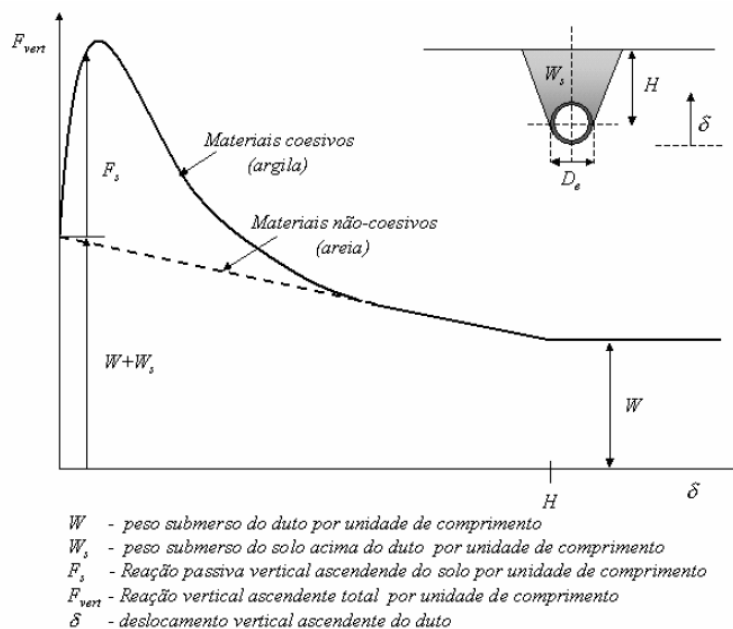


Figura 3.5 – Curvas relacionando a reação vertical e o deslocamento de um duto totalmente enterrado para solos arenosos e argilosos

Em geral, utiliza-se o método dos elementos finitos para a obtenção de reações do solo, devido à sua capacidade de representar condições que não são cobertas por formulações analíticas. Geralmente, os parâmetros de resistência do solo variam com a profundidade, influenciando no resultado da reação. Os modelos numéricos são capazes de representar a plasticidade do solo e a interação solo-duto, através de elementos de contato especiais, de forma bastante precisa, sendo validado por experimentos. As formulações analíticas servem para obter valores aproximados de forma bastante simples quando não se dispõe de uma ferramenta numérica e para solos com propriedades constantes.

As reações do solo podem sofrer variações significativas quando ocorrem deslocamentos da ordem de vários diâmetros, principalmente as reações laterais, em caso de dutos parcialmente enterrados, e na componente vertical ao movimento ascendente de dutos totalmente enterrados. Nos outros casos, as reações são relativamente estáveis, até mesmo para grandes deslocamentos.

4 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO DE 4 NÓS COM SEÇÕES TRANSVERSAIS RETANGULAR E CIRCULAR

4.1 Introdução

Este capítulo apresenta a formulação de elementos finitos do elemento isoparamétrico de pórtico não-linear geométrico, com 4 nós, e com seções transversais retangular e circular.

A formulação para o elemento de seção retangular foi apresentada por BENJAMIN [44]. No presente trabalho, foi desenvolvida a formulação para o elemento de seção circular, que se aplica na análise de dutos e *risers*.

Ambas as formulações foram implementadas no programa PROSIM [24], voltado para a análise de unidades flutuantes ancoradas, considerando o acoplamento do modelo hidrodinâmico do casco da unidade flutuante com modelos de elementos finitos de *risers* e linhas de ancoragem.

Ao final deste e do próximo capítulo, são apresentados exemplos numéricos que validam partes da implementação. As soluções obtidas foram comparadas com um elemento convencional de dois nós implementado no PROSIM e com soluções analíticas.

4.2 Hipóteses Básicas e Sistemas de Referência

Esta formulação utiliza a descrição de movimento lagrangeana total, onde as deformações em duas configurações consecutivas são referenciadas à configuração inicial. Isto é feito através do tensor de deformação de Green [6] [45] [46][47].

O elemento isoparamétrico desenvolvido possui quatro nós, com seis graus de liberdade em cada nó: três translações e três rotações. O número total de graus de liberdade, portanto, é vinte e quatro.

A formulação do elemento pode ser deduzida a partir de um elemento isoparamétrico tridimensional, degenerado em duas dimensões. A seguir estão apresentadas as hipóteses básicas nas quais se baseiam a degeneração deste elemento:

As seções normais às duas superfícies médias do elemento (na largura e na altura) permanecem planas durante a deformação;

A energia de deformação correspondente às tensões perpendiculares às duas superfícies médias é desprezada.

Para exprimir a geometria do elemento, emprega-se um sistema global de coordenadas cartesianas fixas, onde ${}^N x_i^k$ representa um vetor com as coordenadas globais de um nó k , na etapa N do procedimento de análise não-linear.

Além deste sistema global, empregam-se dois sistemas de referência locais: um sistema de coordenadas naturais para o elemento, curvilíneo, e um sistema cartesiano móvel para cada nó do elemento.

No sistema local curvo, a direção r coincide com o eixo do elemento. As direções s e t são perpendiculares à direção r , e correspondem às direções principais de inércia da seção transversal, como pode ser visto Figura 4.1.

O sistema local cartesiano é definido em cada ponto nodal, correspondendo aos eixos locais da seção transversal. Na configuração original correspondente à etapa 0 da análise não-linear, estes eixos são definidos por cossenos diretores fornecidos pelo usuário como parte dos dados do problema. Durante a análise, ao longo do processo

incremental, os cossenos diretores são atualizados de modo a determinar a configuração deformada do elemento.

Como pode ser visto na Figura 4.1, na etapa 0 as direções dos sistemas locais nos pontos nodais são coincidentes.

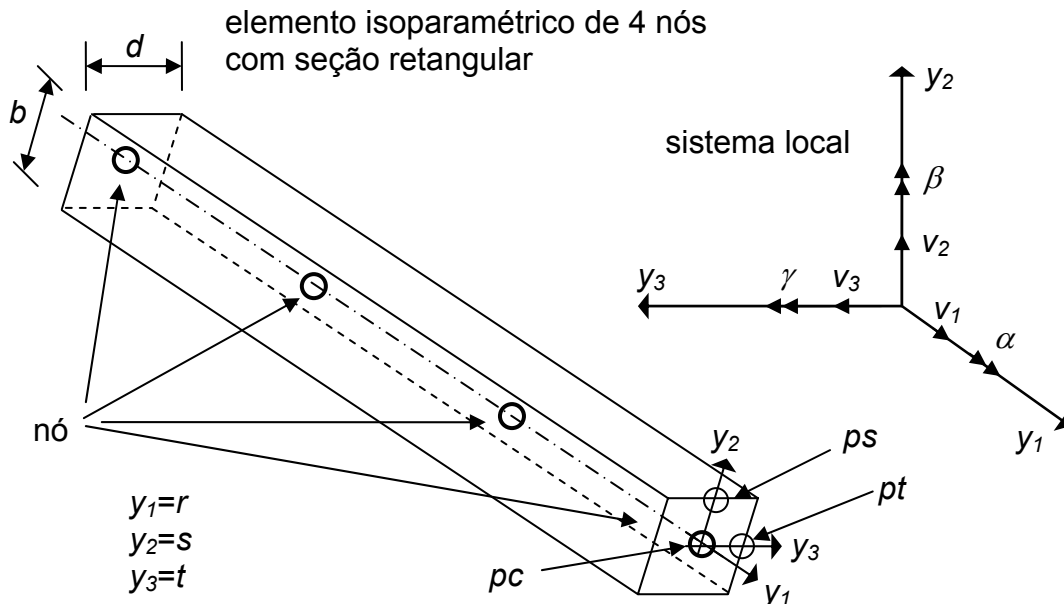


Figura 4.1 – Orientação do sistema local na seção transversal

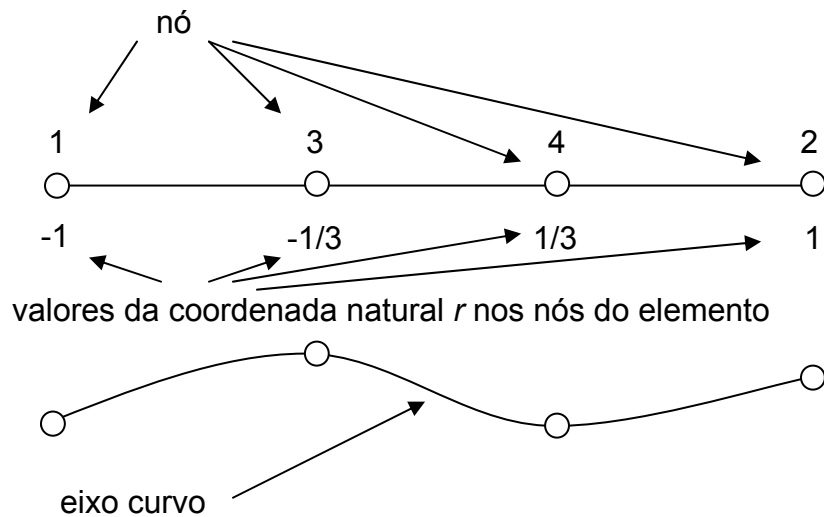


Figura 4.2 – Esquema de distribuição dos nós do elemento

4.3 Campo de Geometria para o Elemento de Seção Retangular

O campo de geometria, que determina as posições de um ponto qualquer do eixo do elemento em função das coordenadas dos nós, é definido pela seguinte equação:

$${}^N x_i = \sum_{k=1}^n h_k {}^N x_i^k + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^n b_k h_k {}^N v_{2i}^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^n d_k h_k {}^N v_{3i}^k \quad (i=1, 2, 3) \quad (4.1)$$

sendo:

n – número de nós do elemento ($n=4$).

${}^N x_i$ – coordenadas cartesianas dos pontos situados no eixo do elemento, na etapa N , referidas ao sistema global;

${}^N x_i^k$ – coordenadas cartesianas do nó k , na etapa N , referidas ao sistema global;

b_k – altura da seção transversal correspondente ao nó k ;

d_k – largura da seção transversal correspondente ao nó k ;

${}^N v_{1i}$ – componentes cartesianas do vetor ${}^N v_{1i}$ com os co-senos diretores do eixo r , do sistema de referência cartesiano local do nó k , na etapa N ;

${}^N v_{2i}$ – componentes cartesianas do vetor ${}^N v_{2i}$ com os co-senos diretores do eixo s , do sistema de referência cartesiano local do nó k , na etapa N

${}^N v_{3i}$ – componentes cartesianas do vetor ${}^N v_{3i}$ com os co-senos diretores do eixo t , do sistema de referência cartesiano local do nó k , na etapa N ;

h_k – funções de interpolação correspondente ao nó k , definidas em relação à coordenada r do sistema de referência local curvo, medida ao longo do eixo do elemento. As funções de interpolação são polinômios de terceiro grau, uma para cada nó do elemento (segundo a numeração da Figura 4.2):

$$h_1 = \frac{1}{16} (-1 + r + 9r^2 - 9r^3) \quad (4.2)$$

$$h_2 = \frac{1}{16}(-1 - r + 9r^2 + 9r^3) \quad (4.3)$$

$$h_3 = \frac{1}{16}(9 - 27r - 9r^2 + 27r^3) \quad (4.4)$$

$$h_4 = \frac{1}{16}(9 + 27r - 9r^2 - 27r^3) \quad (4.5)$$

4.4 Campo de Geometria para o Elemento de Seção Circular

A relação entre as coordenadas polares e cartesianas dos elementos de seção circular se dá de acordo com as equações apresentadas a seguir: O desenho da Figura 4.3 mostra esquematicamente esta relação.

$$r = r \quad (4.6)$$

$$s = R \cos \theta \quad (4.7)$$

$$t = R \sin \theta \quad (4.8)$$

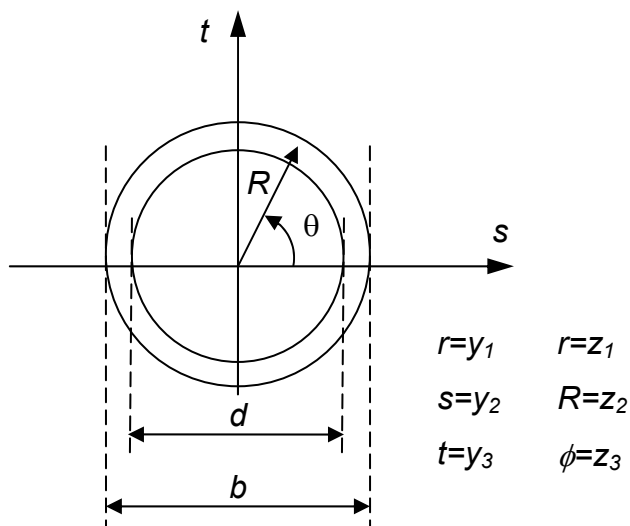


Figura 4.3 – Relação entre as coordenadas retangulares e polar na seção transversal do elemento

Tendo em vista estas expressões, o campo de geometria para o elemento com seção circular, que determina as posições de um ponto qualquer do eixo do elemento em função das coordenadas dos nós, é definido pela seguinte equação:

$${}^N X_i = \sum_{k=1}^n h_k {}^N X_i^k + \frac{R \cos \theta}{2} \sum_{k=1}^n b_k h_k {}^N v_{2i}^k + \frac{R \sin \theta}{2} \sum_{k=1}^n b_k h_k {}^N v_{3i}^k \quad (4.9)$$

4.5 Cossenos Diretores dos Eixos dos Sistemas de Referência Locais

Os cossenos diretores dos eixos do sistema de referência cartesiano de cada nó são calculados utilizando-se as coordenadas dos pontos auxiliares PC , PS e PT , definidos para as seções transversais correspondentes aos nós do elemento, como indicado nas expressões a seguir. Um esquema ilustrativo dos pontos auxiliares pode ser visto na Figura 4.1.

$${}^N \mathbf{v}_2^k = \frac{1}{\|{}^N \mathbf{V}_2^k\|} {}^N \mathbf{V}_2^k \quad (4.10)$$

$${}^N \mathbf{v}_3^k = \frac{1}{\|{}^N \mathbf{V}_3^k\|} {}^N \mathbf{V}_3^k \quad (4.11)$$

$${}^N \mathbf{v}_1^k = {}^N \mathbf{v}_2^k \times {}^N \mathbf{v}_3^k \quad (4.12)$$

onde:

$${}^N \mathbf{V}_2^k = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}_{PS}^k - \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}_{PC}^k = \frac{\mathbf{b}_k}{2} {}^N \mathbf{v}_2^k \quad (4.13)$$

$${}^N \mathbf{V}_3^k = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}_{PT}^k - \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}_{PC}^k = \frac{\mathbf{d}_k}{2} {}^N \mathbf{v}_3^k \quad (4.14)$$

As coordenadas dos pontos auxiliares, que inicialmente, na etapa 0, fazem parte da entrada de dados do problema, variam durante o processo incremental. Sendo assim, ${}^N \mathbf{V}_2^k$ e ${}^N \mathbf{V}_3^k$ devem ser atualizados constantemente.

Utilizando-se a hipótese de seções planas e supondo que as tangentes dos ângulos incrementais de rotações são iguais aos próprios ângulos, chegamos às Equações (4.15), (4.16).

$${}^{N+1} \mathbf{V}_2^k = {}^N \mathbf{V}_2^k + \frac{\mathbf{b}_k}{2} {}^N \mathbf{v}_1^k (-\gamma^k) + \frac{\mathbf{b}_k}{2} {}^N \mathbf{v}_3^k (\alpha^k) \quad (4.15)$$

$${}^{N+1}\mathbf{V}_3^k = {}^N\mathbf{V}_3^k + \frac{\mathbf{b}_k}{2} {}^N\mathbf{v}_1^k(\beta^k) + \frac{\mathbf{d}_k}{2} {}^N\mathbf{v}_2^k(\alpha^k) \quad (4.16)$$

Substituindo-se as Equações (4.13) e (4.14) em (4.15) e (4.16) obtêm-se (4.17) e (4.18).

$${}^{N+1}\mathbf{V}_2^k = \frac{\mathbf{b}_k}{2} \begin{bmatrix} {}^N\mathbf{v}_1^k & {}^N\mathbf{v}_2^k & {}^N\mathbf{v}_3^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\gamma^k \\ 1 \\ \alpha^k \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$${}^{N+1}\mathbf{V}_3^k = \frac{\mathbf{d}_k}{2} \begin{bmatrix} {}^N\mathbf{v}_1^k & {}^N\mathbf{v}_2^k & {}^N\mathbf{v}_3^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^k \\ -\alpha^k \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Calculando-se as normas de ${}^{N+1}\mathbf{V}_2^k$ e ${}^{N+1}\mathbf{V}_3^k$, chega-se a (4.19), (4.20).

$$\|{}^{N+1}\mathbf{V}_2^k\| = \frac{\mathbf{b}_k}{2} \left[(\gamma^k)^2 + 1 + (\alpha^k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.19)$$

$$\|{}^{N+1}\mathbf{V}_3^k\| = \frac{\mathbf{d}_k}{2} \left[(\beta^k)^2 + (\alpha^k)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.20)$$

Para obtenção das equações que definem os vetores \mathbf{v}_2^k e \mathbf{v}_3^k atualizados, são substituídas as Equações (4.17), (4.18), (4.19) e (4.20) em (4.10) e (4.11).

$${}^{N+1}\mathbf{v}_2^k = \frac{1}{\left[(\gamma^k)^2 + 1 + (\alpha^k)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} {}^N\mathbf{v}_1^k & {}^N\mathbf{v}_2^k & {}^N\mathbf{v}_3^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\gamma^k \\ 1 \\ \alpha^k \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$${}^{N+1}\mathbf{v}_3^k = \frac{1}{\left[(\beta^k)^2 + (\alpha^k)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} {}^N\mathbf{v}_1^k & {}^N\mathbf{v}_2^k & {}^N\mathbf{v}_3^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^k \\ -\alpha^k \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

O vetor \mathbf{v}_1^k , correspondente ao eixo r , continua sendo determinado pelo produto vetorial, como em (4.12).

$${}^{N+1}\mathbf{v}_1^k = {}^{N+1}\mathbf{v}_2^k \times {}^{N+1}\mathbf{v}_3^k \quad (4.23)$$

Na etapa 0, a direção do vetor ${}^N v_j^k$ coincide exatamente com a direção do eixo do elemento o que nas etapas seguintes geralmente não ocorre. Isto ocorre porque as seções, que permanecem planas durante a deformação, não se mantêm perpendiculares ao eixo.

4.6 Campo de Deslocamentos para o Elemento de Seção Retangular

Como é característica de elementos com formulação isoparamétrica, os deslocamentos são interpolados pelas mesmas funções que definem a geometria.

As translações e as rotações são interpoladas independentemente por funções de mesmo grau. A interpolação das rotações de maneira independente faz com que as seções, inicialmente normais às superfícies médias, não mantenham necessariamente esta perpendicularidade durante a deformação, apesar de continuarem planas. Isto permite que a deformação causada pelo esforço cortante seja considerada.

A seguinte equação define o campo de deslocamentos, que determina o incremento de deslocamentos de um ponto qualquer do eixo do elemento em função dos valores correspondentes nos nós:

$$\Delta u_i = \sum_{k=1}^n h_k \Delta u_i^k + \sum_{k=1}^n h_k \left[{}^N v_{1i}^k (u' + u'') + {}^N v_{2i}^k v'' + {}^N v_{3i}^k w' \right] \quad (i=1, 2, 3) \quad (4.24)$$

sendo:

Δu_i – componentes do vetor de deslocamentos incrementais de um ponto qualquer situado no eixo do elemento, referidas ao sistema global;

Δu_i^k – componentes de translação do vetor de deslocamentos incrementais do nó k , referidas ao sistema global.

Os deslocamentos u' , u'' , v'' e w' em pontos da seção transversal são calculados em função das rotações em cada seção nodal do elemento, de acordo com as Equações a seguir, utilizando-se a hipótese das seções planas. A Figura 4.4 ilustra estes deslocamentos.

$$u' = -\frac{1}{2} b_k s \operatorname{tg}(\gamma^k) \quad (4.25)$$

$$u'' = \frac{1}{2} d_k t \operatorname{tg}(\beta^k) \quad (4.26)$$

$$v'' = -\frac{1}{2} d_k t \operatorname{tg}(\alpha^k) \quad (4.27)$$

$$w' = \frac{1}{2} b_k s \operatorname{tg}(\alpha^k) \quad (4.28)$$

Sendo as rotações incrementais pequenas o suficiente, pode-se fazer $\operatorname{tg}\theta = \theta$ nestas Equações, obtendo-se:

$$u' = -\frac{1}{2} b_k s \gamma^k \quad (4.29)$$

$$u'' = \frac{1}{2} d_k t \beta^k \quad (4.30)$$

$$v'' = -\frac{1}{2} d_k t \alpha^k \quad (4.31)$$

$$w' = \frac{1}{2} b_k s \alpha^k \quad (4.32)$$

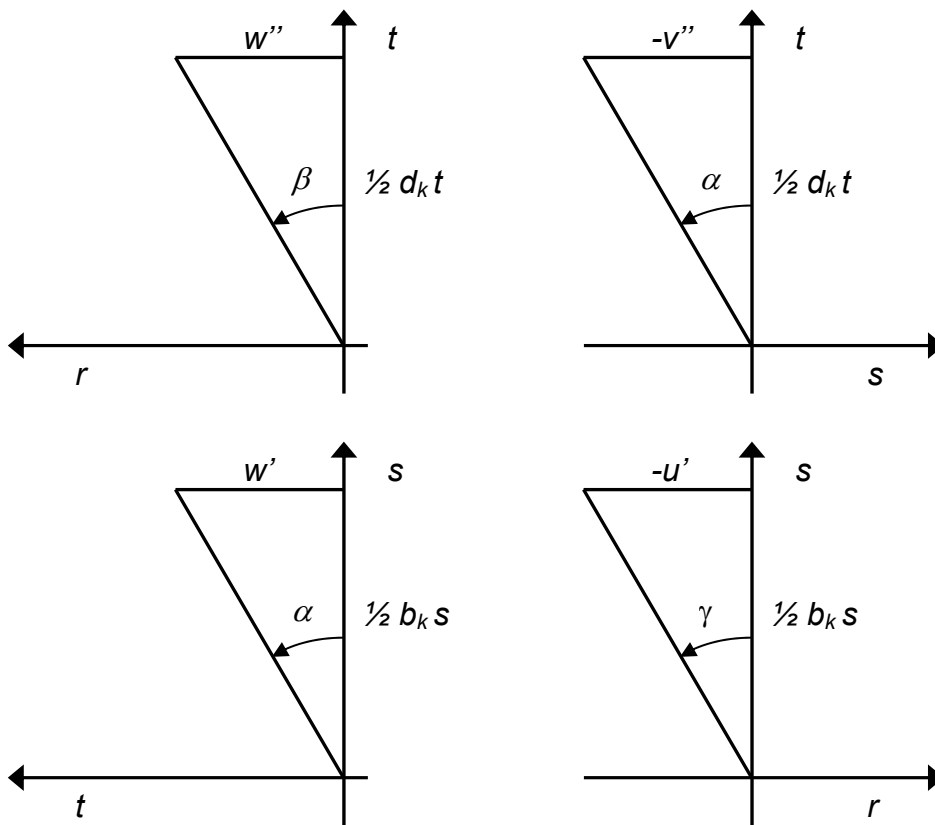


Figura 4.4 – Esquema dos deslocamentos na seção transversal

Substituindo-se estas expressões em (4.24) e operando, tem-se:

$$\Delta u_i = \sum_{k=1}^n h_k \Delta u_i^k + \sum_{k=1}^n h_k {}^N f_{im}^k \Delta \alpha_m^k \quad (i=1, 2, 3) \quad (4.33)$$

onde, além das quantidades Δu_i e Δu_i^k já definidas anteriormente, tem-se:

$\Delta \alpha_m^k$ – componentes de rotação do vetor de deslocamentos incrementais do nó k , referidas ao sistema local ($\Delta \alpha_1^k = \alpha^k$, $\Delta \alpha_2^k = \beta^k$, $\Delta \alpha_3^k = \gamma^k$);

${}^N f_{im}^k$ – coeficientes de uma matriz ${}^N F^k$, que efetua a transformação das rotações do sistema de referencia local para o sistema global.

Além de efetuar a transformação de rotações do sistema local para o global, essa matriz ${}^N F^k$ funciona como uma “matriz de posição”, selecionando os coeficientes que vão exercer influência sobre cada direção.

Mais adiante vamos apresentar as expressões que definem esta matriz ${}^N F^k$ e seus coeficientes. Antes disso, vamos explicitar os somatórios da Equação (4.33), obtendo-se a seguinte expressão compacta do campo de deslocamentos, em termos de uma matriz H :

$$\Delta u = H \Delta u^k \quad (4.34)$$

onde Δu é o vetor de deslocamentos incrementais de um ponto qualquer no eixo do elemento:

$$\Delta u^T = [\Delta u_1 \quad \Delta u_2 \quad \Delta u_3] \quad (4.35)$$

e Δu^k é o vetor de deslocamentos incrementais dos nós do elemento, com componentes de translação e rotação:

$$\Delta U^{kT} = [\Delta u_1^1 \quad \Delta u_2^1 \quad \Delta u_3^1 \quad \Delta \alpha_1^1 \quad \Delta \alpha_2^1 \quad \Delta \alpha_3^1 \quad \dots \quad \Delta u_1^4 \quad \Delta u_2^4 \quad \Delta u_3^4 \quad \Delta \alpha_1^4 \quad \Delta \alpha_2^4 \quad \Delta \alpha_3^4] \quad (4.36)$$

A matriz H tem a seguinte forma geral:

$$H = [H^1 \quad H^2 \quad H^3 \quad H^4] \quad (4.37)$$

Cada uma das submatrizes H^k ($k=1,4$) tem a seguinte forma, em termos das funções de interpolação h_k e dos coeficientes da matriz ${}^N F^k$:

$$H^k = \begin{bmatrix} h_k & 0 & 0 & h_k f_{11}^k & h_k f_{12}^k & h_k f_{13}^k \\ 0 & h_k & 0 & h_k f_{21}^k & h_k f_{22}^k & h_k f_{23}^k \\ 0 & 0 & h_k & h_k f_{31}^k & h_k f_{32}^k & h_k f_{33}^k \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Como era de se esperar, os coeficientes destas submatrizes H^k que afetam as translações contém apenas as funções de interpolação h_k , enquanto os coeficientes que afetam as rotações contém também os coeficientes da matriz ${}^N F^k$ que efetua a transformação das rotações do sistema de referencia local para o sistema global. Os coeficientes destas submatrizes H^k também podem ser escritos como

$$H^k = \begin{bmatrix} h_{a+1}^1 & 0 & 0 & h_{a+4}^1 & h_{a+5}^1 & h_{a+6}^1 \\ 0 & h_{a+2}^2 & 0 & h_{a+4}^2 & h_{a+5}^2 & h_{a+6}^2 \\ 0 & 0 & h_{a+3}^3 & h_{a+4}^3 & h_{a+5}^3 & h_{a+6}^3 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

sendo: $a=0$ para $k=1$, $a=6$ para $k=2$, $a=12$ para $k=3$ e $a=18$ para $k=4$.

Para concluir a expressão do campo de deslocamentos (4.34), resta apenas apresentar as expressões a seguir, que definem a matriz ${}^N F^k$ e seus coeficientes:

$${}^N F^k = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} td_k & -\frac{1}{2} sb_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} td_k & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \frac{1}{2} sb_k & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

$${}^N f_{11}^k = -\frac{1}{2} td_k {}^N v_{21}^k + \frac{1}{2} sb_k {}^N v_{31}^k \quad (4.41)$$

$${}^N f_{12}^k = \frac{1}{2} td_k {}^N v_{11}^k \quad (4.42)$$

$${}^N f_{13}^k = -\frac{1}{2} sb_k {}^N v_{11}^k \quad (4.43)$$

$${}^N f_{21}^k = -\frac{1}{2} td_k {}^N v_{22}^k + \frac{1}{2} sb_k {}^N v_{32}^k \quad (4.44)$$

$${}^N f_{22}^k = \frac{1}{2} td_k {}^N v_{12}^k \quad (4.45)$$

$${}^N f_{23}^k = -\frac{1}{2} sb_k {}^N v_{12}^k \quad (4.46)$$

$${}^N \mathbf{f}_{31}^k = -\frac{1}{2} \mathbf{t} \mathbf{d}_k {}^N \mathbf{v}_{23}^k + \frac{1}{2} \mathbf{s} \mathbf{b}_k {}^N \mathbf{v}_{33}^k \quad (4.47)$$

$${}^N \mathbf{f}_{32}^k = \frac{1}{2} \mathbf{t} \mathbf{d}_k {}^N \mathbf{v}_{23}^k \quad (4.48)$$

$${}^N \mathbf{f}_{33}^k = -\frac{1}{2} \mathbf{s} \mathbf{b}_k {}^N \mathbf{v}_{13}^k \quad (4.49)$$

4.7 Campo de Deslocamentos para o Elemento de Seção Circular

As equações que definem o campo de deslocamento são redefinidas utilizando-se o sistema de coordenadas polares definido pelas equações (4.6), (4.7) e (4.8). Partimos da mesma expressão (4.24) que determina as translações de um ponto qualquer do interior do elemento:

$$\Delta u_i = \sum_{k=1}^n h_k \Delta u_i^k + \sum_{k=1}^n h_k \left[{}^N v_{1i}^k (u' + u'') + {}^N v_{2i}^k v'' + {}^N v_{3i}^k w' \right] \quad (4.50)$$

onde, como já definido anteriormente, Δu_i são as componentes do vetor de deslocamentos incrementais de um ponto qualquer situado no eixo do elemento, referidas ao sistema global; Δu_i^k são as componentes de translação do vetor de deslocamentos incrementais do nó k , referidas ao sistema global; e os deslocamentos de pontos da seção transversal, u' , u'' , v'' e w' , agora são definidos pelas seguintes expressões:

$$u' = -\frac{1}{2} b_k R \cos \theta \gamma^k \quad (4.51)$$

$$u'' = \frac{1}{2} b_k R \operatorname{sen} \theta \beta^k \quad (4.52)$$

$$v'' = -\frac{1}{2} b_k R \operatorname{sen} \theta \alpha^k \quad (4.53)$$

$$w' = \frac{1}{2} b_k R \cos \theta \alpha^k \quad (4.54)$$

Substituindo-se estas equações em (4.50), obtém-se uma expressão semelhante à (4.33).

$$\Delta u_i = \sum_{k=1}^n h_k \Delta u_i^k + \sum_{k=1}^n h_k {}^N f_{im}^k \Delta \alpha_m^k \quad (4.55)$$

onde as quantidades $\Delta \alpha_m^k$ e ${}^N f_{im}^k$ têm o mesmo significado definido anteriormente para o elemento com seção retangular: respectivamente componentes de rotação do vetor de

deslocamentos incrementais do nó k , referidas ao sistema local ($\Delta\alpha_1^k = \alpha^k$, $\Delta\alpha_2^k = \beta^k$, $\Delta\alpha_3^k = \gamma^k$), e componentes da matriz ${}^N F^k$, que efetua a transformação das rotações do sistema de referência local para o sistema global.

Sendo assim, a mesma expressão compacta do campo de deslocamentos (4.34) pode ser definida em termos da matriz H , cujos coeficientes também podem ser obtidos pelas expressões (4.37) e (4.38), mas agora com os coeficientes da matriz ${}^N F^k$ como definido a seguir:

$${}^N F^k = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} R \text{sen} \theta b_k & -\frac{1}{2} R \cos \theta b_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} R \text{sen} \theta b_k & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \frac{1}{2} R \cos \theta b_k & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$${}^N f_{11}^k = -\frac{1}{2} R \text{sen} \theta b_k {}^N v_{21}^k + \frac{1}{2} R \cos \theta b_k {}^N v_{31}^k \quad (4.57)$$

$${}^N f_{12}^k = \frac{1}{2} R \text{sen} \theta b_k {}^N v_{11}^k \quad (4.58)$$

$${}^N f_{13}^k = -\frac{1}{2} R \cos \theta b_k {}^N v_{11}^k \quad (4.59)$$

$${}^N f_{21}^k = -\frac{1}{2} R \text{sen} \theta b_k {}^N v_{22}^k + \frac{1}{2} R \cos \theta b_k {}^N v_{32}^k \quad (4.60)$$

$${}^N f_{22}^k = \frac{1}{2} R \text{sen} \theta b_k {}^N v_{12}^k \quad (4.61)$$

$${}^N f_{23}^k = -\frac{1}{2} R \cos \theta b_k {}^N v_{12}^k \quad (4.62)$$

$${}^N f_{31}^k = -\frac{1}{2} R \text{sen} \theta b_k {}^N v_{23}^k + \frac{1}{2} R \cos \theta b_k {}^N v_{33}^k \quad (4.63)$$

$${}^N f_{32}^k = \frac{1}{2} R \text{sen} \theta b_k {}^N v_{23}^k \quad (4.64)$$

$${}^N f_{33}^k = -\frac{1}{2} R \text{sen} \theta b_k {}^N v_{13}^k \quad (4.65)$$

4.8 Derivadas dos Deslocamentos, Elemento de Seção Retangular

A seguinte expressão define as derivadas dos deslocamentos incrementais em relação às coordenadas do sistema local:

$$\Delta u_{,y}^T = \left[\frac{\partial \Delta u_1}{\partial y_1} \quad \frac{\partial \Delta u_1}{\partial y_2} \quad \frac{\partial \Delta u_1}{\partial y_3} \quad \frac{\partial \Delta u_2}{\partial y_1} \quad \frac{\partial \Delta u_2}{\partial y_2} \quad \frac{\partial \Delta u_2}{\partial y_3} \quad \frac{\partial \Delta u_3}{\partial y_1} \quad \frac{\partial \Delta u_3}{\partial y_2} \quad \frac{\partial \Delta u_3}{\partial y_3} \right] \quad (4.66)$$

Estas derivadas podem ser relacionadas aos deslocamentos incrementais através da seguinte equação:

$$\Delta u_{,y} = HD \Delta U^k \quad (4.67)$$

As matrizes HD^k são obtidas derivando-se as matrizes H^k , definidas em (4.38) e (4.39):

$$HD^k = \begin{bmatrix} h_{k,1} & 0 & 0 & h_{k,1} f_{11} & h_{k,1} f_{12} & h_{k,1} f_{13} \\ 0 & 0 & 0 & h_k f_{11,2} & h_k f_{12,2} & h_{k,1} f_{13,2} \\ 0 & 0 & 0 & h_k f_{11,3} & h_k f_{12,3} & h_{k,1} f_{13,3} \\ 0 & h_{k,1} & 0 & h_{k,1} f_{21} & h_{k,1} f_{22} & h_{k,1} f_{23} \\ 0 & 0 & 0 & h_k f_{21,2} & h_k f_{22,2} & h_{k,1} f_{23,2} \\ 0 & 0 & 0 & h_k f_{21,3} & h_k f_{22,3} & h_{k,1} f_{23,3} \\ 0 & 0 & h_{k,1} & h_{k,1} f_{31} & h_{k,1} f_{32} & h_{k,1} f_{33} \\ 0 & 0 & 0 & h_k f_{31,2} & h_k f_{32,2} & h_{k,1} f_{33,2} \\ 0 & 0 & 0 & h_k f_{31,3} & h_k f_{32,3} & h_{k,1} f_{33,3} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Os coeficientes de HD^k estão definidos a seguir:

$$HD_{a+1}^1 = h_{k,1} \quad (4.69)$$

$$HD_{a+2}^4 = h_{k,1} \quad (4.70)$$

$$HD_{a+3}^7 = h_{k,1} \quad (4.71)$$

$$HD_{a+4}^1 = \left(-\frac{1}{2} t d_k^N v_{21}^k + \frac{1}{2} s b_k^N v_{31}^k \right) h_{k,1} \quad (4.72)$$

$$HD_{a+4}^2 = \frac{1}{2} b_k^N v_{31}^k h_{k,1} \quad (4.73)$$

$$\text{HD}_{a+4}^3 = \frac{1}{2} \mathbf{d}_k^N \mathbf{v}_{21}^k \mathbf{h}_{k,1} \quad (4.74)$$

$$\text{HD}_{a+4}^4 = \left(-\frac{1}{2} \mathbf{t} \mathbf{d}_k^N \mathbf{v}_{22}^k + \frac{1}{2} \mathbf{s} \mathbf{b}_k^N \mathbf{v}_{32}^k \right) \mathbf{h}_{k,1} \quad (4.75)$$

$$\text{HD}_{a+4}^5 = \frac{1}{2} \mathbf{b}_k^N \mathbf{v}_{32}^k \mathbf{h}_k \quad (4.76)$$

$$\text{HD}_{a+4}^6 = -\frac{1}{2} \mathbf{d}_k^N \mathbf{v}_{22}^k \mathbf{h}_k \quad (4.77)$$

$$\text{HD}_{a+4}^7 = \left(-\frac{1}{2} \mathbf{t} \mathbf{d}_k^N \mathbf{v}_{23}^k + \frac{1}{2} \mathbf{s} \mathbf{b}_k^N \mathbf{v}_{33}^k \right) \mathbf{h}_{k,1} \quad (4.78)$$

$$\text{HD}_{a+4}^8 = \frac{1}{2} \mathbf{b}_k^N \mathbf{v}_{33}^k \mathbf{h}_k \quad (4.79)$$

$$\text{HD}_{a+4}^9 = -\frac{1}{2} \mathbf{d}_k^N \mathbf{v}_{23}^k \mathbf{h}_k \quad (4.80)$$

$$\text{HD}_{a+5}^1 = \frac{1}{2} \mathbf{t} \mathbf{d}_k^N \mathbf{v}_{11}^k \mathbf{h}_{k,1} \quad (4.81)$$

$$\text{HD}_{a+5}^2 = 0 \quad (4.82)$$

$$\text{HD}_{a+5}^3 = \frac{1}{2} \mathbf{d}_k^N \mathbf{v}_{11}^k \mathbf{h}_k \quad (4.83)$$

$$\text{HD}_{a+5}^4 = \frac{1}{2} \mathbf{t} \mathbf{d}_k^N \mathbf{v}_{12}^k \mathbf{h}_{k,1} \quad (4.84)$$

$$\text{HD}_{a+5}^5 = 0 \quad (4.85)$$

$$\text{HD}_{a+5}^6 = \frac{1}{2} \mathbf{d}_k^N \mathbf{v}_{12}^k \mathbf{h}_k \quad (4.86)$$

$$\text{HD}_{a+5}^7 = \frac{1}{2} \mathbf{t} \mathbf{d}_k^N \mathbf{v}_{13}^k \mathbf{h}_{k,1} \quad (4.87)$$

$$\text{HD}_{a+5}^8 = 0 \quad (4.88)$$

$$\text{HD}_{a+5}^9 = \frac{1}{2} \mathbf{d}_k^N \mathbf{v}_{13}^k \mathbf{h}_k \quad (4.89)$$

$$\text{HD}_{a+6}^1 = -\frac{1}{2} s b_k {}^N v_{11}^k h_{k,1} \quad (4.90)$$

$$\text{HD}_{a+6}^2 = -\frac{1}{2} b_k {}^N v_{11}^k h_k \quad (4.91)$$

$$\text{HD}_{a+6}^3 = 0 \quad (4.92)$$

$$\text{HD}_{a+6}^4 = -\frac{1}{2} s b_k {}^N v_{12}^k h_{k,1} \quad (4.93)$$

$$\text{HD}_{a+6}^5 = -\frac{1}{2} b_k {}^N v_{12}^k h_k \quad (4.94)$$

$$\text{HD}_{a+6}^6 = 0 \quad (4.95)$$

$$\text{HD}_{a+6}^7 = -\frac{1}{2} s b_k {}^N v_{13}^k h_{k,1} \quad (4.96)$$

$$\text{HD}_{a+6}^8 = -\frac{1}{2} b_k {}^N v_{13}^k h_k \quad (4.97)$$

$$\text{HD}_{a+6}^9 = 0 \quad (4.98)$$

sendo: $a=0$ para $k=1$, $a=6$ para $k=2$, $a=12$ para $k=3$ e $a=18$ para $k=4$.

4.9 Derivadas dos Deslocamentos, Elemento de Seção Circular

De modo similar ao apresentado no caso do elemento de seção retangular, as derivadas dos deslocamentos em relação às coordenadas cilíndricas do sistema de referência local estão relacionadas com os deslocamentos incrementais através das seguintes equações:

$$\Delta u_{,y} = HD\Delta U^k \quad (4.99)$$

A matriz HD tem a mesma forma geral de (4.68), mas agora suas componentes são obtidas derivando-se as matrizes H^k de (4.38) e (4.39) em coordenadas cilíndricas:

$$HD_{a+1}^1 = h_{k,1} \quad (4.100)$$

$$HD_{a+2}^4 = h_{k,1} \quad (4.101)$$

$$HD_{a+3}^7 = h_{k,1} \quad (4.102)$$

$$HD_{a+4}^1 = \left(-\frac{1}{2}R\text{sen}\theta b_k^N v_{21}^k + \frac{1}{2}R\text{cos}\theta b_k^N v_{31}^k \right) h_{k,1} \quad (4.103)$$

$$HD_{a+4}^2 = \frac{1}{2}b_k^N v_{31}^k h_{k,1} \quad (4.104)$$

$$HD_{a+4}^3 = -\frac{1}{2}b_k^N v_{21}^k h_{k,1} \quad (4.105)$$

$$HD_{a+4}^4 = \left(-\frac{1}{2}R\text{sen}\theta b_k^N v_{22}^k + \frac{1}{2}R\text{cos}\theta b_k^N v_{32}^k \right) h_{k,1} \quad (4.106)$$

$$HD_{a+4}^5 = \frac{1}{2}b_k^N v_{32}^k h_k \quad (4.107)$$

$$HD_{a+4}^6 = -\frac{1}{2}b_k^N v_{22}^k h_k \quad (4.108)$$

$$HD_{a+4}^7 = \left(-\frac{1}{2}R\text{sen}\theta b_k^N v_{23}^k + \frac{1}{2}R\text{cos}\theta b_k^N v_{33}^k \right) h_{k,1} \quad (4.109)$$

$$HD_{a+4}^8 = \frac{1}{2}b_k^N v_{33}^k h_k \quad (4.110)$$

$$\text{HD}_{a+4}^9 = -\frac{1}{2} \mathbf{b}_k^N \mathbf{v}_{23}^k \mathbf{h}_k \quad (4.111)$$

$$\text{HD}_{a+5}^1 = \frac{1}{2} R \text{sen} \theta \mathbf{b}_k^N \mathbf{v}_{11}^k \mathbf{h}_{k,1} \quad (4.112)$$

$$\text{HD}_{a+5}^2 = 0 \quad (4.113)$$

$$\text{HD}_{a+5}^3 = \frac{1}{2} \mathbf{b}_k^N \mathbf{v}_{11}^k \mathbf{h}_k \quad (4.114)$$

$$\text{HD}_{a+5}^4 = \frac{1}{2} R \text{sen} \theta \mathbf{b}_k^N \mathbf{v}_{12}^k \mathbf{h}_{k,1} \quad (4.115)$$

$$\text{HD}_{a+5}^5 = 0 \quad (4.116)$$

$$\text{HD}_{a+5}^6 = \frac{1}{2} \mathbf{b}_k^N \mathbf{v}_{12}^k \mathbf{h}_k \quad (4.117)$$

$$\text{HD}_{a+5}^7 = \frac{1}{2} R \text{sen} \theta \mathbf{b}_k^N \mathbf{v}_{13}^k \mathbf{h}_{k,1} \quad (4.118)$$

$$\text{HD}_{a+5}^8 = 0 \quad (4.119)$$

$$\text{HD}_{a+5}^9 = \frac{1}{2} \mathbf{b}_k^N \mathbf{v}_{13}^k \mathbf{h}_k \quad (4.120)$$

$$\text{HD}_{a+6}^1 = -\frac{1}{2} s \mathbf{b}_k^N \mathbf{v}_{11}^k \mathbf{h}_{k,1} \quad (4.121)$$

$$\text{HD}_{a+6}^2 = -\frac{1}{2} \mathbf{b}_k^N \mathbf{v}_{11}^k \mathbf{h}_k \quad (4.122)$$

$$\text{HD}_{a+6}^3 = 0 \quad (4.123)$$

$$\text{HD}_{a+6}^4 = -\frac{1}{2} s \mathbf{b}_k^N \mathbf{v}_{12}^k \mathbf{h}_{k,1} \quad (4.124)$$

$$\text{HD}_{a+6}^5 = -\frac{1}{2} \mathbf{b}_k^N \mathbf{v}_{12}^k \mathbf{h}_k \quad (4.125)$$

$$\text{HD}_{a+6}^6 = 0 \quad (4.126)$$

$$\text{HD}_{a+6}^7 = -\frac{1}{2} s \mathbf{b}_k^N \mathbf{v}_{12}^k \mathbf{h}_{k,1} \quad (4.127)$$

$$\text{HD}_{a+6}^8 = -\frac{1}{2} \mathbf{b}_k^N \mathbf{v}_{13}^k \mathbf{h}_k \quad (4.128)$$

$$\text{HD}_{a+6}^9 = 0 \quad (4.129)$$

sendo: $a=0$ para $k=1$, $a=6$ para $k=2$, $a=12$ para $k=3$ e $a=18$ para $k=4$.

4.10 Campo de Deformações

As componentes do vetor de deformações incrementais Δe_{ij} são dadas pela equação a seguir:

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i} \right) \quad (4.130)$$

Esta equação pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$\Delta e_v = M \Delta U_{,x} \quad (4.131)$$

onde o incremento de deformações é dado por:

$$\Delta e_v^T = [\Delta e_{11} \quad \Delta e_{22} \quad \Delta e_{33} \quad 2\Delta e_{12} \quad 2\Delta e_{23} \quad 2\Delta e_{13}] \quad (4.132)$$

e as derivadas dos deslocamentos com respeito às coordenadas do sistema global são dadas por uma expressão análoga à (4.66):

$$\Delta U_{,x}^T = \left[\frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_3} \quad \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_3} \quad \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_3} \right] \quad (4.133)$$

A matriz M relaciona os incrementos de deformação às derivadas dos deslocamentos incrementais, e é dada por:

$$M = M_0 + M_D \quad (4.134)$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.135)$$

$$M_D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & d_{21} & 0 & 0 & d_{31} & 0 & 0 \\ 0 & d_{12} & 0 & 0 & d_{22} & 0 & 0 & d_{32} & 0 \\ 0 & 0 & d_{13} & 0 & 0 & d_{23} & 0 & 0 & d_{33} \\ d_{13} & d_{11} & 0 & d_{22} & d_{21} & 0 & d_{32} & d_{31} & 0 \\ 0 & d_{13} & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{22} & 0 & d_{33} & d_{32} \\ d_{13} & 0 & d_{11} & d_{23} & 0 & d_{21} & d_{33} & 0 & d_{31} \end{bmatrix} \quad (4.136)$$

Observa-se portanto que as componentes da matriz M_D são derivadas dos deslocamentos em relação às coordenadas do sistema global:

$$d_{ij} = \frac{\partial^N u_i}{\partial^0 x_j} \quad (4.137)$$

Como estas derivadas d_{ij} estão definidas em relação ao sistema global, é necessário transformá-las para o sistema local, de modo que posteriormente a expressão (4.67) seja substituída em (4.131) para obter a expressão do campo de deformações, ou seja, as deformações de um ponto qualquer situado no eixo do elemento em função dos deslocamentos incrementais dos nós do elemento.

Esta transformação de coordenadas é feita através da matriz jacobiana J , de acordo com as expressões apresentadas nos quadros a seguir, respectivamente para a seção retangular e para a seção circular.

Para o elemento de seção retangular

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \frac{\partial}{\partial y_3} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (4.138)$$

onde:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_3} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{bmatrix} \quad y_1=r, y_2=s \text{ e } y_3=t \quad (4.139)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^* \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \frac{\partial}{\partial y_3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}^* = \mathbf{J}^{-1} \quad (4.140)$$

Para o elemento de seção circular

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} = J_c \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (4.141)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} = J_r \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (4.142)$$

onde:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} = J_c J_r \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (4.143)$$

$$J_r = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial r} \\ \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial s} & \frac{\partial x_3}{\partial s} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial x_2}{\partial t} & \frac{\partial x_3}{\partial t} \end{bmatrix} \quad y_1=r, y_2=s \text{ e } y_3=t \quad (4.144)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} = J^* \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad J^*(J) \quad (4.145)$$

Podemos então obter as derivadas dos deslocamentos com respeito às coordenadas globais que aparecem na equação (4.137). Para isto vamos escrever a

expressão que determina as translações na etapa N a partir das coordenadas nas etapas 0 e N :

$${}^N u_i = {}^N x_i - {}^0 x_i \quad (4.146)$$

Fazendo uso das expressões do campo de geometria (4.1) nas etapas 0 e N ; empregando a expressão (4.146); determinando-se a derivada com respeito às coordenadas locais, e empregando as expressões (4.140) e (4.145) que relacionam as derivadas “locais” às derivadas “globais”, obtém-se, para o elemento de seção retangular:

$${}^N x_i = \sum_{k=1}^4 h_k {}^N x_i^k + \sum_{k=1}^4 h_k s \frac{b_k}{2} {}^N v_{i2}^k + \sum_{k=1}^4 h_k t \frac{d_k}{2} {}^N v_{i3}^k \quad (4.147)$$

$${}^0 x_i = \sum_{k=1}^4 h_k {}^0 x_i^k + \sum_{k=1}^4 h_k s \frac{b_k}{2} {}^0 v_{i2}^k + \sum_{k=1}^4 h_k t \frac{d_k}{2} {}^0 v_{i3}^k \quad (4.148)$$

$${}^N u_i = \sum_{k=1}^4 h_k {}^N u_i^k + \sum_{k=1}^4 h_k s \frac{b_k}{2} ({}^N v_{i2}^k - {}^0 v_{i2}^k) + \sum_{k=1}^4 h_k t \frac{d_k}{2} ({}^N v_{i3}^k - {}^0 v_{i3}^k) \quad (4.149)$$

$$\frac{\partial {}^N u_i}{\partial {}^0 x_j} = \sum_{k=1}^4 J^*_{ji} h_{k,1} {}^N u_i^k + \sum_{k=1}^4 (s J^*_{ji} h_{k,1} + h_k J^*_{j2}) ({}^N v_{i2}^k - {}^0 v_{i2}^k) \frac{b_k}{2} + \sum_{k=1}^4 (t J^*_{ji} h_{k,1} + h_k J^*_{j3}) ({}^N v_{i3}^k - {}^0 v_{i3}^k) \frac{d_k}{2} \quad (4.150)$$

Procedendo de modo semelhante para o elemento de seção circular obtemos:

$${}^N X_i = \sum_{k=1}^4 h_k {}^N X_i^k + \sum_{k=1}^4 h_k R \cos \theta \frac{b_k}{2} {}^N v_{i2}^k + \sum_{k=1}^4 h_k R \operatorname{sen} \theta \frac{b_k}{2} {}^N v_{i3}^k \quad (4.151)$$

$${}^0 X_i = \sum_{k=1}^4 h_k {}^0 X_i^k + \sum_{k=1}^4 h_k R \cos \theta \frac{b_k}{2} {}^0 v_{i2}^k + \sum_{k=1}^4 h_k R \operatorname{sen} \theta \frac{b_k}{2} {}^0 v_{i3}^k \quad (4.152)$$

$${}^N u_i = \sum_{k=1}^4 h_k {}^N u_i^k + \sum_{k=1}^4 h_k R \cos \theta \frac{b_k}{2} ({}^N v_{i2}^k - {}^0 v_{i2}^k) + \sum_{k=1}^4 h_k R \operatorname{sen} \theta \frac{b_k}{2} ({}^N v_{i3}^k - {}^0 v_{i3}^k) \quad (4.153)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^N u_i}{\partial {}^0 X_j} = & \sum_{k=1}^4 J_{j1}^* h_{k,1} {}^N u_i^k + \sum_{k=1}^4 (R \cos \theta J_{j1}^* h_{k,1} + h_k J_{j2}^*) ({}^N v_{i2}^k - {}^0 v_{i2}^k) \frac{b_k}{2} + \\ & \sum_{k=1}^4 (R \operatorname{sen} \theta J_{j1}^* h_{k,1} + h_k J_{j3}^*) ({}^N v_{i3}^k - {}^0 v_{i3}^k) \frac{b_k}{2} \end{aligned} \quad (4.154)$$

As expressões (4.150) e (4.154) fornecem as derivadas dos deslocamentos em relação às coordenadas globais, ou seja, os coeficientes d_{ij} (Equação 2.123) da matriz M_D de (4.136), a partir do qual se pode obter uma expressão desenvolvida para o campo de deformações (4.131).

Uma expressão compacta para o campo de deformações pode ser deduzida escrevendo a relação entre os vetores com derivadas dos deslocamentos com respeito às coordenadas do sistema local $\Delta u_{,y}$ e vetores com derivadas dos deslocamentos com respeito às coordenadas do sistema global $\Delta U_{,x}$, fazendo uso da relação (4.140) ou (4.145) que emprega a inversa do Jacobiano:

$$\Delta U_{,x} = AJ \Delta u_{,y} \quad (4.155)$$

onde a matriz AJ é definida como:

$$AJ = \begin{bmatrix} J^* & 0 & 0 \\ 0 & J^* & 0 \\ 0 & 0 & J^* \end{bmatrix} \quad (4.156)$$

Com isso, a expressão compacta para o campo de deformações, que relaciona Δe_v aos deslocamentos incrementais, é estabelecida substituindo sucessivamente as Equações (4.67) em (4.155), e o resultado em (4.131):

$$\Delta e_v = M \ A J \ H D \ \Delta U^k \quad (4.157)$$

de onde se deduz que a matriz deformação x deslocamento B_L , empregada na implementação computacional, é definida por:

$$B_L = M \ A J \ H D \quad (4.158)$$

e a expressão para o campo de deformações fica simplesmente:

$$\Delta e_v = B_L \ \Delta U^k \quad (4.159)$$

4.11 Campo de Tensões e Equações Constitutivas

Com a degeneração do elemento isoparamétrico tridimensional obteve-se um elemento de viga. Portanto é razoável supor que ao nível do sistema de referência local existam apenas as tensões que agem sobre a seção transversal, ou seja, uma tensão normal e duas tensões cisalhantes. Esta hipótese satisfaz, simultaneamente, a teoria técnica das vigas e a necessidade de se desprezar a energia de deformação correspondente às tensões perpendiculares às duas superfícies médias.

As componentes do segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff são determinadas de maneira incremental:

$${}^{N+1}S' = {}^N S' + \Delta S' \quad (4.160)$$

onde as equações constitutivas na forma incremental são dadas por:

$$\Delta S' = C' \Delta e' \quad (4.161)$$

o incremento de tensões é dado por:

$$\Delta S'^T = [\Delta S'_{11} \quad \Delta S'_{22} \quad \Delta S'_{33} \quad \Delta S'_{12} \quad \Delta S'_{23} \quad \Delta S'_{13} \quad \Delta S'_{21} \quad \Delta S'_{32} \quad \Delta S'_{31}] \quad (4.162)$$

o incremento de deformações é dado por:

$$\Delta e'^T = [\Delta e'_{11} \quad \Delta e'_{22} \quad \Delta e'_{33} \quad \Delta e'_{12} \quad \Delta e'_{23} \quad \Delta e'_{13} \quad \Delta e'_{21} \quad \Delta e'_{32} \quad \Delta e'_{31}] \quad (4.163)$$

e C é a matriz constitutiva dada por:

$$C' = \begin{bmatrix} C'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C'_{22} & C'_{22} \\ 0 & C'_{22} & C'_{22} \end{bmatrix} \quad (4.164)$$

$$C'_{11} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.165)$$

$$C'_{22} = \begin{bmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (4.166)$$

sendo:

E – módulo de elasticidade longitudinal;

G – módulo de elasticidade transversal $\left(G = \frac{E}{2(1+\nu)} \right)$;

ν – coeficiente de Poisson.

As Equações (4.161) e (4.162) estão definidas em relação ao sistema de referência local curvo e, portanto, é necessário transformá-las para o sistema global. Como os tensores ΔS e Δe são tensores de segunda ordem, estes se comportam como tal em relação à mudança de referencial. Esta transformação está definida a seguir:

$$\Delta S'_{ij} = R_{ik} \Delta S_{kl} R_{jl} \quad \text{ou} \quad \Delta S' = RT \Delta S \quad (4.167)$$

$$\Delta e'_{ij} = R_{ik} \Delta e_{kl} R_{jl} \quad \text{ou} \quad \Delta e' = RT \Delta e \quad (4.168)$$

onde RT é a matriz de rotação, composta por submatrizes R_{ij} que transformam as coordenadas do sistema de referência global em coordenadas do sistema de referência local curvo:

$$RT = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \quad (4.169)$$

$$R_{11} = \begin{bmatrix} R_{11}R_{11} & R_{12}R_{12} & R_{13}R_{13} \\ R_{21}R_{21} & R_{22}R_{22} & R_{23}R_{23} \\ R_{31}R_{31} & R_{32}R_{32} & R_{33}R_{33} \end{bmatrix} \quad (4.170)$$

$$R_{12} = \begin{bmatrix} R_{11}R_{12} & R_{12}R_{13} & R_{11}R_{13} \\ R_{21}R_{22} & R_{22}R_{23} & R_{21}R_{23} \\ R_{31}R_{32} & R_{32}R_{33} & R_{31}R_{33} \end{bmatrix} \quad (4.171)$$

$$R_{21} = \begin{bmatrix} R_{11}R_{21} & R_{12}R_{13} & R_{13}R_{23} \\ R_{21}R_{31} & R_{22}R_{32} & R_{23}R_{33} \\ R_{11}R_{31} & R_{12}R_{32} & R_{13}R_{33} \end{bmatrix} \quad (4.172)$$

$$\mathbf{R}_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}\mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12}\mathbf{R}_{23} & \mathbf{R}_{11}\mathbf{R}_{23} \\ \mathbf{R}_{21}\mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{22}\mathbf{R}_{33} & \mathbf{R}_{21}\mathbf{R}_{33} \\ \mathbf{R}_{11}\mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{12}\mathbf{R}_{33} & \mathbf{R}_{11}\mathbf{R}_{33} \end{bmatrix} \quad (4.173)$$

$$\mathbf{R}_{23} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{12}\mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{13}\mathbf{R}_{22} & \mathbf{R}_{13}\mathbf{R}_{21} \\ \mathbf{R}_{22}\mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{23}\mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{23}\mathbf{R}_{31} \\ \mathbf{R}_{12}\mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{13}\mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{13}\mathbf{R}_{31} \end{bmatrix} \quad (4.174)$$

Substituindo-se as Equações (4.167) e (4.168) em (4.161) tem-se.

$$\Delta S = C \Delta e \quad (4.175)$$

onde:

$$\mathbf{C} = \mathbf{R}\mathbf{T}^T\mathbf{C}'\mathbf{R}\mathbf{T} \quad (4.176)$$

é a matriz constitutiva no sistema global, com os seguintes coeficientes:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{C}_{22} \\ \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \quad (4.177)$$

$$\mathbf{C}_{11} = \mathbf{R}_{11}^T\mathbf{C}'_{11}\mathbf{R}_{11} + (2\mathbf{R}_{21}^T)\mathbf{C}'_{22}(2\mathbf{R}_{21}) \quad (4.178)$$

$$\mathbf{C}_{12} = \mathbf{R}_{11}^T\mathbf{C}'_{11}\mathbf{R}_{12} + (2\mathbf{R}_{21}^T)\mathbf{C}'_{22}(\mathbf{R}_{22} + \mathbf{R}_{23}) \quad (4.179)$$

$$\mathbf{C}_{22} = \mathbf{R}_{12}^T\mathbf{C}'_{11}\mathbf{R}_{12} + (\mathbf{R}_{22}^T + \mathbf{R}_{23}^T)\mathbf{C}'_{22}(\mathbf{R}_{33} + \mathbf{R}_{22}) \quad (4.180)$$

Utilizando-se a simetria de ΔS , Δe e C , as equações (4.161) podem ser reescritas na seguinte forma vetorial:

$$\Delta \mathbf{S}'_V = \mathbf{C}'' \Delta \mathbf{e}'_V \quad (4.181)$$

$$\Delta \mathbf{S}'_V{}^T = [\Delta \mathbf{S}'_{11} \quad \Delta \mathbf{S}'_{22} \quad \Delta \mathbf{S}'_{33} \quad \Delta \mathbf{S}'_{12} \quad \Delta \mathbf{S}'_{23} \quad \Delta \mathbf{S}'_{13}] \quad (4.182)$$

$$\Delta \mathbf{e}'_V{}^T = [\Delta \mathbf{e}'_{11} \quad \Delta \mathbf{e}'_{22} \quad \Delta \mathbf{e}'_{33} \quad 2\Delta \mathbf{e}'_{12} \quad 2\Delta \mathbf{e}'_{23} \quad 2\Delta \mathbf{e}'_{13}] \quad (4.183)$$

$$C'' = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (4.184)$$

Por sua vez, as equações (4.175) também podem ser reescritas em forma vetorial:

$$\Delta S_V = C \Delta e_V \quad (4.185)$$

$$\Delta S_V^T = [\Delta S_{11} \quad \Delta S_{22} \quad \Delta S_{33} \quad \Delta S_{12} \quad \Delta S_{23} \quad \Delta S_{13}] \quad (4.186)$$

$$\Delta e_V^T = [\Delta e_{11} \quad \Delta e_{22} \quad \Delta e_{33} \quad 2\Delta e_{12} \quad 2\Delta e_{23} \quad 2\Delta e_{13}] \quad (4.187)$$

$$C = TR^T C'' TR \quad (4.188)$$

$$TR = \begin{bmatrix} R_{11}R_{11} & R_{12}R_{12} & R_{13}R_{13} & R_{11}R_{12} & R_{12}R_{13} & R_{11}R_{13} \\ R_{21}R_{21} & R_{22}R_{22} & R_{23}R_{23} & R_{21}R_{22} & R_{22}R_{23} & R_{21}R_{23} \\ R_{31}R_{31} & R_{32}R_{32} & R_{33}R_{33} & R_{31}R_{32} & R_{32}R_{33} & R_{31}R_{33} \\ 2R_{21}R_{11} & 2R_{12}R_{22} & 2R_{13}R_{23} & R_{11}R_{22} + R_{21}R_{12} & R_{12}R_{23} + R_{22}R_{13} & R_{11}R_{23} + R_{21}R_{13} \\ 2R_{21}R_{31} & 2R_{22}R_{32} & 2R_{23}R_{33} & R_{21}R_{32} + R_{22}R_{31} & R_{22}R_{33} + R_{32}R_{23} & R_{21}R_{33} + R_{31}R_{23} \\ 2R_{11}R_{31} & 2R_{12}R_{32} & 2R_{13}R_{33} & R_{11}R_{32} + R_{31}R_{12} & R_{12}R_{33} + R_{32}R_{13} & R_{11}R_{33} + R_{31}R_{13} \end{bmatrix} \quad (4.189)$$

As linhas das matrizes R apresentadas em (4.175) são constituídas pelas componentes dos vetores v_1 , v_2 e v_3 com cossenos diretores dos eixos y_i :

$$R = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_2 \end{bmatrix} \quad (4.190)$$

Os cossenos diretores variam de ponto para ponto no elemento, já que o elemento é curvo. A determinação dos cossenos diretores de cada um dos eixos y_i , em um ponto qualquer do elemento, é feita através do produto vetorial de dois vetores

tangentes à superfície cuja direção normal coincide com este eixo. A superfície é obtida tomando-se as coordenadas x_i que descrevem um volume e fazendo s ou t constante.

Tomando-se $s = \text{constante}$ temos os cossenos diretores do eixo y_2 :

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (4.191)$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{V}_2}{\|\mathbf{V}_2\|} = \begin{bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{bmatrix} \quad (4.192)$$

Tomando-se $t = \text{constante}$ temos os cossenos diretores do eixo y_3 :

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s} \\ \frac{\partial x_3}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (4.193)$$

$$\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{V}_3}{\|\mathbf{V}_3\|} = \begin{bmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (4.194)$$

Efetuada o produto vetorial de \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 , obtemos os cossenos diretores do eixo y_1 :

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} \quad (4.195)$$

Nos quadros a seguir, apresentam-se as expressões desenvolvidas para a obtenção das componentes dos cossenos diretores das Equações (4.190), respectivamente para o elemento de seção retangular e para o elemento de seção circular. Observa-se que os cossenos diretores v_i são calculados na configuração

indeformada do elemento, correspondente à etapa 0. Os cossenos diretores calculados nos nós correspondem a ${}^0v_i^k$.

Finalmente, a expressão desejada para o campo de tensões é obtida substituindo a Equação (4.159) (com o campo de deformações) em (4.185):

$$\Delta S_v = C B_L \Delta U^k \quad (4.196)$$

Para o elemento de seção retangular

$$\frac{\partial x_1}{\partial r} = \sum_{k=1}^4 h_{k,1} \left({}^0x_1^k + s \frac{b_k}{2} v_{12}^k + t \frac{d_k}{2} v_{13}^k \right) \quad (4.197)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial r} = \sum_{k=1}^4 h_{k,1} \left({}^0x_2^k + s \frac{b_k}{2} v_{22}^k + t \frac{d_k}{2} v_{23}^k \right) \quad (4.198)$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial r} = \sum_{k=1}^4 h_{k,1} \left({}^0x_3^k + s \frac{b_k}{2} v_{32}^k + t \frac{d_k}{2} v_{33}^k \right) \quad (4.199)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial s} = \sum_{k=1}^4 h_k \frac{b_k}{2} v_{12}^k \quad (4.200)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial s} = \sum_{k=1}^4 h_k \frac{b_k}{2} v_{22}^k \quad (4.201)$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial s} = \sum_{k=1}^4 h_k \frac{b_k}{2} v_{32}^k \quad (4.202)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = \sum_{k=1}^4 h_k \frac{d_k}{2} v_{13}^k \quad (4.203)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = \sum_{k=1}^4 h_k \frac{d_k}{2} v_{23}^k \quad (4.204)$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial t} = \sum_{k=1}^4 h_k \frac{d_k}{2} v_{33}^k \quad (4.205)$$

Para o elemento de seção circular

$$\frac{\partial x_1}{\partial r} = \sum_{k=1}^4 h_{k,1} ({}^0x_1^k + R \cos \theta \frac{b_k}{2} {}^0v_{12}^k + R \operatorname{sen} \theta b_k \frac{b_k}{2} {}^0v_{13}^k) \quad (4.206)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial r} = \sum_{k=1}^4 h_{k,1} ({}^0x_2^k + R \cos \theta \frac{b_k}{2} {}^0v_{22}^k + R \operatorname{sen} \theta \frac{b_k}{2} {}^0v_{23}^k) \quad (4.207)$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial r} = \sum_{k=1}^4 h_{k,1} ({}^0x_3^k + R \cos \theta \frac{b_k}{2} {}^0v_{32}^k + R \operatorname{sen} \theta b_k \frac{b_k}{2} {}^0v_{33}^k) \quad (4.208)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial s} = \sum_{k=1}^4 h_k \frac{b_k}{2} {}^0v_{12}^k \quad (4.209)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial s} = \sum_{k=1}^4 h_k \frac{b_k}{2} {}^0v_{12}^k \quad (4.210)$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial s} = \sum_{k=1}^4 h_k \frac{b_k}{2} {}^0v_{22}^k \quad (4.211)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = \sum_{k=1}^4 h_k \frac{b_k}{2} {}^0v_{13}^k \quad (4.212)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = \sum_{k=1}^4 h_k \frac{b_k}{2} {}^0v_{23}^k \quad (4.213)$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial t} = \sum_{k=1}^4 h_k \frac{b_k}{2} {}^0v_{33}^k \quad (4.214)$$

4.12 Matriz de Rigidez Linear e Vetor de Forças Internas

Para se determinar a matriz de rigidez e o vetor de forças internas é seguido o procedimento comumente utilizado para elementos isoparamétricos, empregando-se as seguintes expressões:

$$K_L = \int_V B_L^T C B_L dV \quad (4.215)$$

$$F = \int_V B_L^T S_v dV \quad (4.216)$$

O domínio de integração com coordenadas globais deve ser modificado, de modo a satisfazer as variáveis das funções de interpolação, que estão definidas em relação ao sistema local curvo. Esta modificação é apresentada na seguinte expressão, que liga os dois sistemas.

$$\int_V G(x_1, x_2, x_3) dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(r, s, t) J dr ds dt \quad (4.217)$$

sendo:

J – determinante da matriz jacobiana.

Como está sendo utilizada uma formulação Lagrangeana, durante todo o processo incremental o determinante da matriz jacobiana é mantido constante.

Utilizando-se a relação da Equação (4.217), em (4.215) e (4.216), obtém-se as expressões que definem a matriz de rigidez elástica e o vetor de forças internas no sistema local curvo:

$$K_L = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_L^T C B_L J dr ds dt \quad (4.218)$$

$$F = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_L^T S_L J dr ds dt \quad (4.219)$$

4.13 Matriz de Rigidez Não-Linear

A matriz de rigidez não-linear, ou matriz de rigidez geométrica, resulta da discretização da seguinte parcela da equação de energia [47]:

$$\int_V^N S_{ij} \delta \Delta n_{ij} dV = (\delta \Delta U^k)^T \left(\int_V B_{NL}^T S_M B_{NL} dV \right) \Delta U^k \quad (4.220)$$

A partir daí pode-se deduzir a expressão usualmente estabelecida na formulação de elementos finitos para definir a matriz de rigidez não-linear [46][47]:

$$K_{NL} = \int_V B_{NL}^T S_M B_{NL} dV \quad (4.221)$$

onde a matriz S_M é montada agrupando de forma conveniente as componentes do tensor de tensões de Piola-Kirchhoff $S_{11} \dots S_{33}$:

$$S_M = \begin{bmatrix} S_{11} I_3 & S_{12} I_3 & S_{13} I_3 \\ S_{12} I_3 & S_{22} I_3 & S_{23} I_3 \\ S_{13} I_3 & S_{23} I_3 & S_{33} I_3 \end{bmatrix} \quad (4.222)$$

onde:

I_3 – matriz identidade 3x3:

$$S_M = S_{11} (M^1)^T M^1 + S_{22} (M^2)^T M^2 + S_{33} (M^3)^T M^3 + S_{12} \left[(M^1)^T M^2 + (M^2)^T M^1 \right] + S_{23} \left[(M^2)^T M^3 + (M^3)^T M^2 \right] + S_{13} \left[(M^1)^T M^3 + (M^3)^T M^1 \right] \quad (4.223)$$

$$M^1 = [I_3 \quad 0 \quad 0] \quad (4.224)$$

$$M^2 = [0 \quad I_3 \quad 0] \quad (4.225)$$

$$M^3 = [0 \quad 0 \quad I_3] \quad (4.226)$$

0 – uma matriz nula também 3x3.

Aplicando-se a transformação definida em (4.217) a (4.222), obtém-se

$$\mathbf{K}_{NL} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{S}_M \mathbf{B}_{NL} \mathbf{J} dr ds dt \quad (4.227)$$

Explicitando-se as operações do lado esquerdo da equação (4.221) chega-se

a

$$\int_V^N \mathbf{S}_{ij} \delta \Delta n_{ij} dV = \int_V \left(\mathbf{S}_{11} \delta \Delta n_{11} + \mathbf{S}_{22} \delta \Delta n_{22} + \mathbf{S}_{33} \delta \Delta n_{33} + 2\mathbf{S}_{12} \delta \Delta n_{12} + 2\mathbf{S}_{23} \delta \Delta n_{23} + \mathbf{S}_{13} \delta \Delta n_{13} \right) dV \quad (4.228)$$

As componentes Δn_{ij} são dadas por:

$$\Delta n_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (4.229)$$

ou:

$$\Delta n_{ij} = \frac{1}{2} \Delta u_{,i}^T \Delta u_{,j} = \frac{1}{2} \Delta u_{,j}^T \Delta u_{,i} \quad (4.230)$$

onde:

$$\Delta u_{,i}^T = \left[\frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_i} \quad \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_i} \quad \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_i} \right] \quad (4.231)$$

$$\Delta u_{,j}^T = \left[\frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_j} \quad \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_j} \quad \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_j} \right] \quad (4.232)$$

Considerando o vetor com derivadas dos deslocamentos incrementais escrito da forma

$$\Delta u_{,x}^T = \left[\Delta u_{,1}^T \quad \Delta u_{,2}^T \quad \Delta u_{,3}^T \right], \quad (4.233)$$

podemos empregar as matrizes M^i definidas nas equações (4.224) a (4.226) e escrever

$$\Delta u_{,i} = M^i \Delta u_{,x} \quad (4.234)$$

$$\Delta u_{,i} = \Delta u_{,x}^T M^{iT} \quad (4.235)$$

$$\Delta u_{,j} = M^j \Delta u_{,x} \quad (4.236)$$

$$\Delta u_{,j} = \Delta u_{,x}^T M^{jT} \quad (4.237)$$

Podemos escrever também

$$\Delta u_{,x} = MP \Delta U_{,x} \quad (4.238)$$

onde

$$MP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.239)$$

Tomando-se a primeira variação das equações (4.230), (4.235), (4.237), obtem-se

$$\delta \Delta n_{ij} = \frac{1}{2} \left[(\delta \Delta u_{,i}^T) \Delta u_{,j} + (\delta \Delta u_{,j}^T) (\Delta u_{,i}) \right] \quad (4.240)$$

onde:

$$\delta \Delta u_{,i}^T = \delta \Delta u_{,x}^T (M^i)^T \quad (4.241)$$

$$\delta \Delta u_{,j}^T = \delta \Delta u_{,x}^T (M^j)^T \quad (4.242)$$

Substituindo (4.234), (4.236), (4.241) e (4.242) em (4.240), obtém-se

$$\delta \Delta n_{ij} = \frac{1}{2} \delta \Delta u_{,x}^T \left[(M^i)^T M^j + (M^j)^T M^i \right] \Delta u_{,x} \quad (4.243)$$

Através das equações (4.99) (com as derivadas dos deslocamentos no sistema local), (4.141) e (4.238) obtém-se a relação entre $\Delta u_{,x}$ e os deslocamentos nodais incrementais:

$$\Delta u_{,x} = MP AJHD \Delta U^k \quad (4.244)$$

ou

$$\Delta u_{,x}^T = (\Delta U^k)^T HD^T AJ^T MP^T \quad (4.245)$$

A primeira variação da equação (4.245) é dada por

$$\delta \Delta u_{,x}^T = (\delta \Delta U^k)^T HD^T AJ^T MP^T \quad (4.246)$$

Substituindo-se as equações (4.230) e (4.232) em (4.229) chega-se a

$$\delta \Delta n_{ij} = \frac{1}{2} (\delta \Delta U^k)^T HD^T AJ^T MP^T \left[(M^i)^T M^j + (M^j)^T M^i \right] MP AJHD \Delta U^k \quad (4.247)$$

Fazendo-se a variação dos índices i e j na equação (4.247) e substituindo-se em (4.228) chega-se a

$$\int_V {}^N S_{ij} \delta \Delta n_{ij} dV = (\delta \Delta U^k)^T \left[\int HD^T AJ^T MP^T \begin{bmatrix} S_{11} (M^1)^T M^1 + \\ S_{22} (M^2)^T M^2 + \\ S_{33} (M^3)^T M^3 + \\ S_{12} \left[(M^1)^T M^2 + (M^2)^T M^1 \right] + \\ S_{23} \left[(M^2)^T M^3 + (M^3)^T M^2 \right] + \\ S_{13} \left[(M^1)^T M^3 + (M^3)^T M^1 \right] \end{bmatrix} MP AJHD dV \right] \Delta U^k \quad (4.248)$$

Finalmente, comparando-se as equações (4.221) e (4.248), deduz-se a expressão da matriz B_{NL} necessária para a implementação computacional do cálculo da matriz de rigidez não-linear:

$$B_{NL} = MP AJHD \quad (4.249)$$

4.14 Integração Numérica

As Equações (4.140), (4.141) e (4.145) para o elemento de seção retangular são calculadas pelo procedimento de integração numérica de Gauss. O princípio básico deste procedimento, para integrar uma função qualquer $F(\xi)$, consiste em determinar as coordenadas de um certo número de pontos de integração $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)$ e passar um polinômio $\psi(\xi)$ pelos valores correspondentes a estes pontos $(F(\xi_1), F(\xi_2), F(\xi_3), \dots, F(\xi_n))$. A aproximação exata deste polinômio é obtida de acordo com a seguinte expressão:

$$\int_{-1}^1 F(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^m \alpha_i F(\xi_i) \quad (4.250)$$

onde:

ξ_i – coordenadas naturais dos pontos de integração;

α_i – fatores de ponderação;

m – número total de pontos de integração.

A integral é calculada tomando-se o somatório de valores da função $F(\xi)$ nos pontos de integração, afetados pelos fatores de ponderação α . O número de pontos selecionados, bem como as posições destes pontos, determinam a precisão da aproximação entre o polinômio $\psi(\xi)$ e a função $F(\xi)$.

A Tabela 4.1 apresenta o número de pontos de integração nas direções dos eixos locais r, s e t , para o elemento de seção retangular.

Tabela 4.1– Esquema dos pontos de integração de Gauss

| Direção | Número de pontos de integração |
|---------|--------------------------------|
| r | 3 ou 4 |
| s | 2 |
| t | 2 |

A Tabela 4.2 mostra as coordenadas dos pontos de integração e os fatores de ponderação aplicados as coordenada naturais r , s e t , definidas para o elemento isoparamétrico.

Tabela 4.2 – Coordenadas e fatores de ponderação dos pontos de Gauss, em r , s e t

| Pontos de integração em r , com 3 pontos | Pontos de integração em r , com 4 pontos | Pontos de integração em s e t , com 2 pontos | Fatores de ponderação em r , com 3 pontos | Fatores de ponderação em r , com 4 pontos | Fatores de ponderação em s e t , com 2 pontos |
|--|--|--|---|---|---|
| -0,7745966692 41483 | -0,8611363115 94 | -0,5773502691 89626 | 0,34785484513 7454 | 0,5555555555 5556 | 1,0 |
| 0,0 | -0,3399810435 84856 | 0,57735026918 9626 | 0,65214515486 2546 | 0,8888888888 8889 | 1,0 |
| 0,77459666924 1483 | 0,33998104358 4856 | *** | 0,65214515486 2546 | 0,5555555555 5556 | *** |
| *** | 0,86113631159 4 | *** | 0,34785484513 7454 | *** | *** |

O elemento de seção circular segue um procedimento de integração semelhante ao apresentado para o elemento de seção retangular, mas utilizando integração de Gauss nas direções locais r e R , e integração de Newton-Cotes na direção θ .

A Tabela 4.3 apresenta o número *default* de pontos de integração nas direções r , R e θ considerado na implementação atual do elemento isoparamétrico. Observa-se que a escolha por apenas um ponto de integração na direção radial R se aplica bem a dutos de parede pouco espessa. Para aplicações a dutos de parede espessa, recomenda-se o uso de dois ou três pontos na direção R . Como o número de pontos de integração é um dado lido pelo programa, é possível redefinir esses valores de acordo com a conveniência do usuário: por exemplo definindo mais pontos em R , ou mesmo na direção θ .

A Tabela 4.4 apresenta as coordenadas dos pontos de integração em θ , e os correspondentes fatores de ponderação do método de Newton-Cotes. As coordenadas e fatores de ponderação na direção R são calculados em função dos diâmetros interno e externo, como indicado na Figura 4.5.

Tabela 4.3 – Esquema dos pontos de integração de Gauss e Newton-Cotes

| Direção | Num. de pontos de integração |
|----------|------------------------------|
| r | 3 ou 4 |
| R | 1 |
| θ | 8 |

Tabela 4.4 – Coordenadas e fatores de ponderação dos pontos de Newton-Cotes para integração na direção θ da seção transversal do elemento com seção circular

| Coordenadas dos Pontos de Integração | Fatores de Ponderação |
|--------------------------------------|-----------------------|
| $-\pi$ | 1/8 |
| $-\pi * (3/4)$ | 1/8 |
| $-\pi * (1/2)$ | 1/8 |
| $-\pi * (1/4)$ | 1/8 |
| 0,000 | 1/8 |
| $\pi * (1/4)$ | 1/8 |
| $\pi * (1/2)$ | 1/8 |
| $\pi * (3/4)$ | 1/8 |

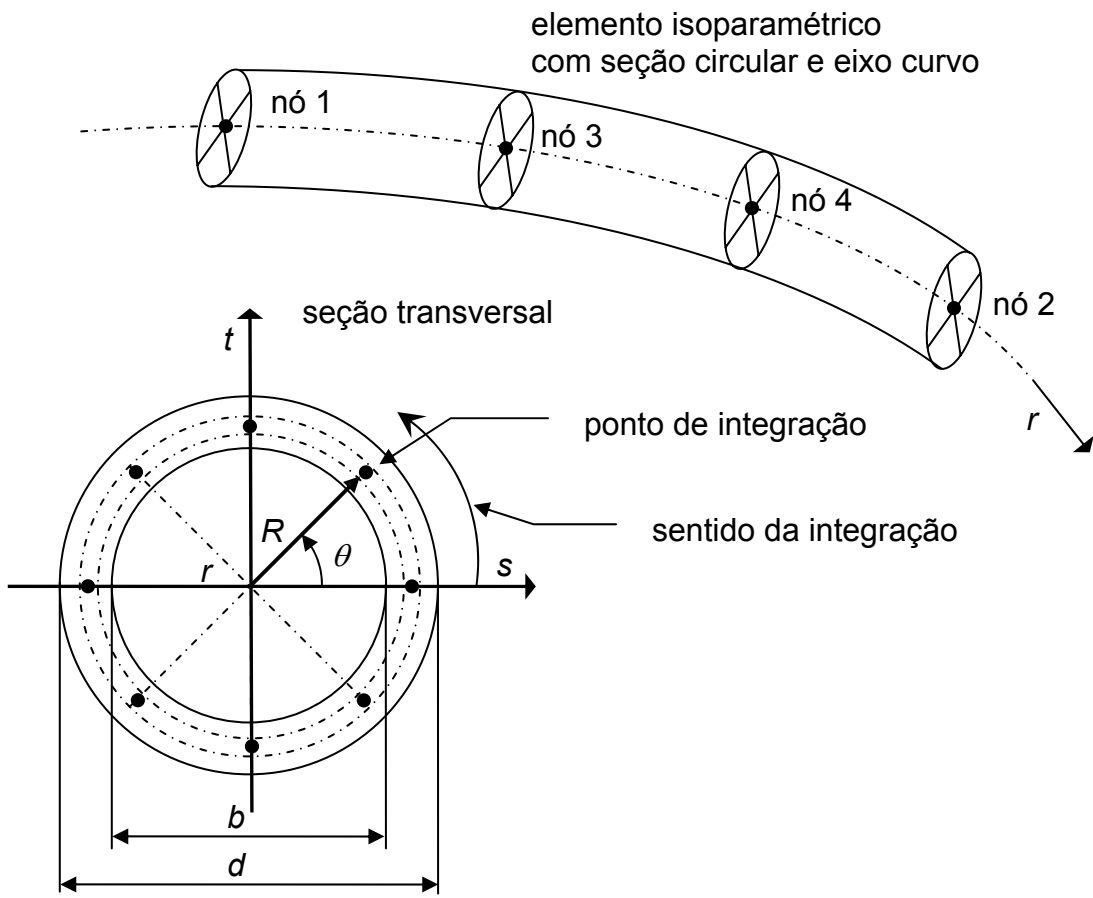
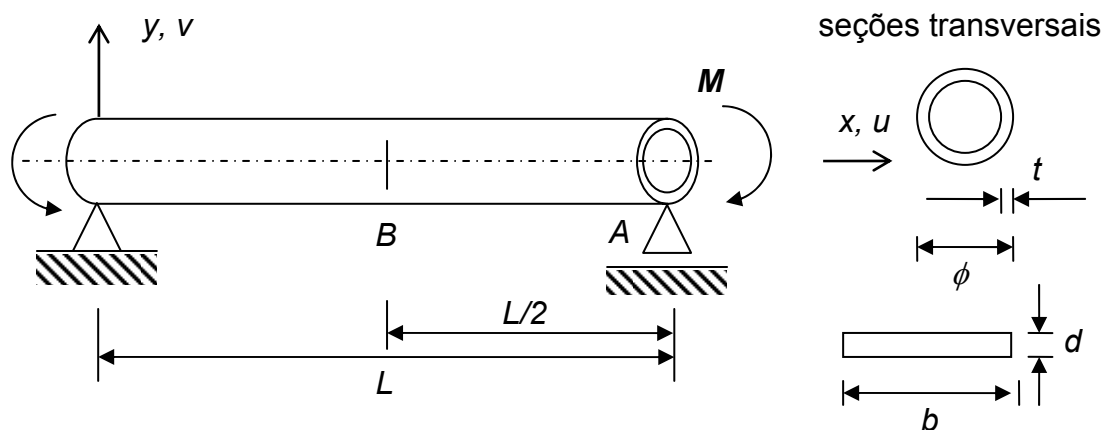


Figura 4.5 – Desenho esquemático da integração numérica na seção circular do elemento

4.15 Exemplo

A seguir, apresenta-se uma aplicação simples do elemento isoparamétrico com seções retangular e circular, em uma estrutura com grandes deslocamentos, comparando os resultados de ambas as implementações. O objetivo não é efetuar a validação da implementação, o que será feito mais adiante no capítulo de aplicações, mas sim ilustrar a aplicação a um caso prático. A Figura 4.6 mostra o desenho esquemático da estrutura.



$$E = 210 \text{ GPa}; L = 1.000 \text{ mm}; M = 11.000.000,00 \text{ g x mm}; \phi = 10 \text{ mm}; \\ t = 0,174735 \text{ mm}; b = 50,0 \text{ mm}; d = 2,5 \text{ mm}; I = 65,1042 \text{ mm}^4$$

Figura 4.6 – Viga bi-apoiada submetida a flexão

A estrutura foi modelada com 4 elementos.

A carga foi aplicada em 50 incrementos iguais. Foram utilizados como parâmetros de convergência para os critérios de força e deslocamento 10^{-2} e 10^{-3} , respectivamente.

As configurações original e deformada, referente ao incremento de carga 50, podem ser vistas na Figura 4.7.

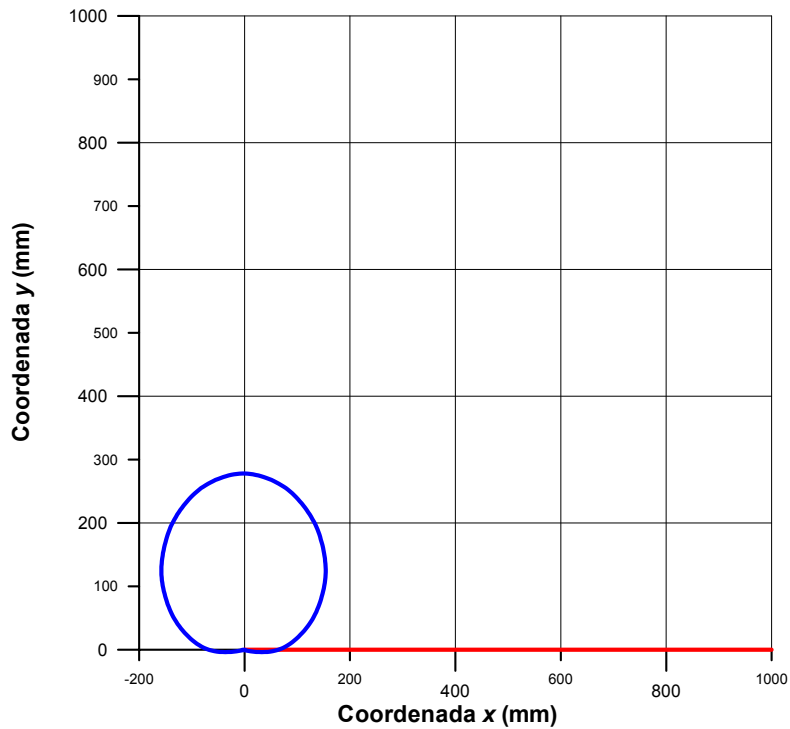


Figura 4.7 – Configurações original e deformada referente ao incremento de carga 50

As curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento u no pontos A podem ser vistas na Figura 4.8. A Figura 4.9 mostra as curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento Comparando v no ponto C . Os dois gráficos mostram a coerência das duas implementações, seções retangular e circular, verificando-se quase que a igualdade das soluções.

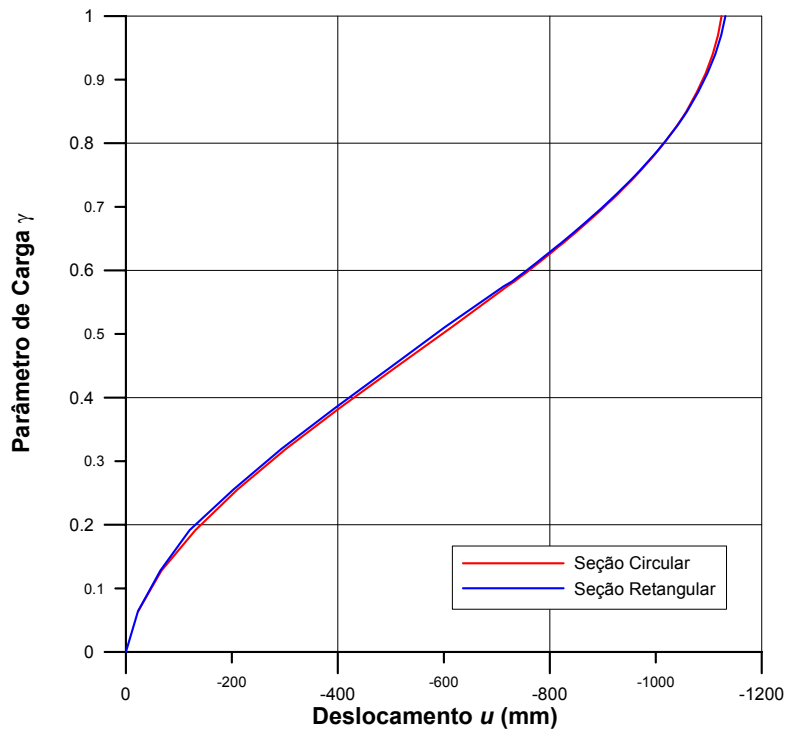


Figura 4.8 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento u na extremidade A

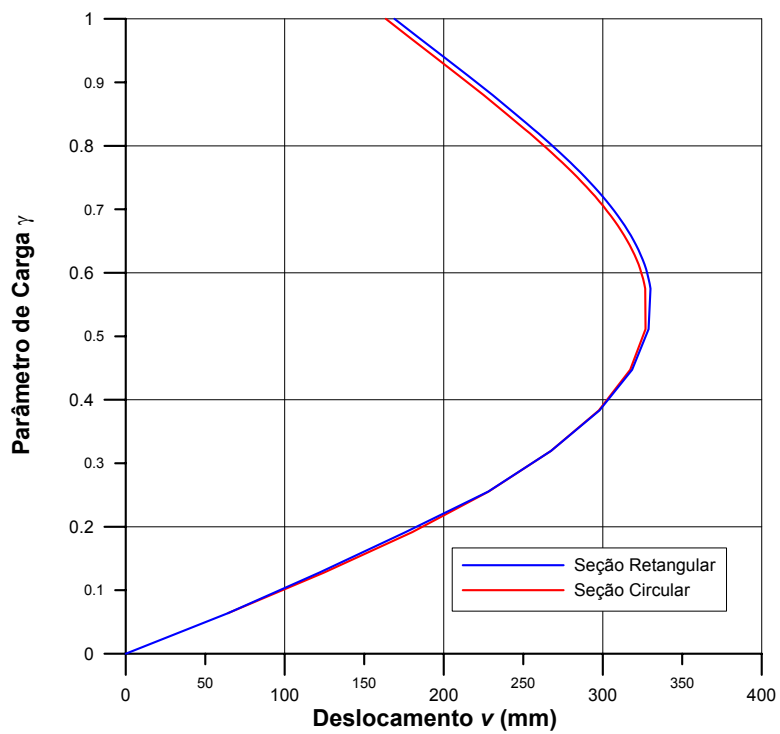


Figura 4.9 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v no ponto C

5 FORMULAÇÕES ESPECÍFICAS PARA ANÁLISE DE DUTOS E *RISERS*

5.1 Introdução

Este capítulo apresenta formulações específicas que foram desenvolvidas para a análise de dutos e *risers*, e sem as quais os principais problemas propostos no capítulo de aplicações não seriam resolvidos. No decorrer do texto são apresentadas as seguintes formulações:

- Carregamento de onda e corrente;
- Carregamento térmico;
- Curvaturas e tensões iniciais aplicadas a *risers*.

A implantação dos carregamentos de onda e corrente e térmico foram validadas neste capítulo através de exemplos criados especificamente para este fim, com respostas do elemento convencional existente no programa PROSIM [24], e soluções analíticas, respectivamente. No capítulo de aplicações, foi validada a implementação das tensões iniciais aplicadas a *risers* com o elemento convencional do PROSIM. O carregamento térmico foi novamente validado com o elemento isoparamétrico de dois nós PIPE31 do programa ABAQUS [1].

5.2 Carregamento de Onda e Corrente

5.2.1 Generalidades

As forças externas atuando em *risers* são devidas, principalmente, à movimentação do fluido induzida pelas ondas e pela correnteza. Para o cálculo destas forças, é necessário inicialmente formular e resolver um modelo matemático que representa o comportamento de ondas no mar. Este modelo é definido em termos de um Problema de Valor de Contorno (PVC), que consiste em uma equação diferencial e condições de contorno associadas. Tal modelo permite, a partir dos parâmetros que representam uma onda regular (altura H e período T), calcular as velocidades e acelerações das partículas do fluido induzido pela onda. O procedimento de solução mais usual, e que atende à prática de projeto de sistemas *offshore*, consiste em empregar a Teoria Linear de Airy. Tal procedimento encontra-se implementado no programa PROSIM [24]; detalhes podem ser encontrados em [24].

Em seguida, o cálculo das forças atuando sobre os risers, a partir das velocidades e acelerações das partículas do fluido, é efetuado empregando-se a formulação de MORISON [48]. Esta formulação é bastante difundida em aplicações práticas para o cálculo das forças de fluidos em corpos esbeltos, com dimensão transversal característica D pequena em comparação com o comprimento de onda λ (por exemplo, com $D/\lambda < 5$). Nestes casos, a formulação de MORISON assume que as forças podem ser computadas através de uma aproximação na qual os parâmetros importantes do fluxo na superfície do corpo, tais como pressão, velocidade e aceleração, podem ser aproximados pelo valor correspondente calculado no eixo da seção transversal do corpo esbelto.

A formulação de MORISON considera que a força de onda é composta pela soma de duas parcelas:

1. Uma parcela de arraste associada a efeitos viscosos, proporcional às velocidades do fluido e do corpo;
2. Uma parcela de inércia, proporcional às acelerações do fluido e do corpo.

A equação de MORISON pode ser expressa da seguinte forma:

$$F = \frac{1}{2} \rho_w D C_d |\dot{u} - \dot{x}| (\dot{u} - \dot{x}) + \rho_w \frac{\pi D^2}{4} C_m \ddot{u} - \rho_w C_a \ddot{x} \frac{\pi D^2}{4} \quad (5.1)$$

Nesta expressão, ρ_w é a massa específica do fluido; D é uma dimensão transversal característica do corpo (usualmente o diâmetro do *riser*); e \dot{u} , \dot{x} , \ddot{u} e \ddot{x} são respectivamente as velocidades e acelerações do fluido e do *riser*. O primeiro termo do lado direito desta equação (proporcional às velocidades) corresponde, portanto, à parcela de arraste; o segundo e terceiro termos (proporcionais às acelerações) correspondem à parcela de inércia.

A formulação de MORISON é considerada semi-empírica, já que as parcelas de arraste e inércia são afetadas por coeficientes adimensionais C_d , C_m e C_a , que devem ser calibrados a partir da observação de resultados experimentais. Por exemplo, na análise de linhas de ancoragem e *risers*, usualmente empregam-se valores de C_d variando entre 0,7 e 1,2, e valores de C_m em torno de 2,0. O terceiro termo, afetado pelo coeficiente C_a (usualmente definido como $C_m - 1$) é proporcional às acelerações do corpo e está associado a efeitos de massa adicionada.

Na aplicação da fórmula de MORISON, as cargas de correnteza podem ser consideradas diretamente no cálculo da parcela de arraste que leva em conta as velocidades relativas fluido-estrutura, simplesmente efetuando uma soma vetorial das velocidades de correnteza com as velocidades do fluido, devidas à onda, e as velocidades da estrutura.

A equação de MORISON tem apresentado bons resultados em aplicações práticas tais como membros de plataformas fixas reticuladas (as *jaquetas*), e linhas de ancoragem e *risers* modelados por elementos finitos. Nestas aplicações, no entanto, devem-se ter em mente os seguintes aspectos:

- A Fórmula de MORISON considera que a resposta do *riser* está alinhada com a direção do fluxo incidente. Portanto, omite forças de *lift* (sustentação) e forças de arrasto devido à vibração induzida por vórtices (VIV), que podem ser importantes em muitas situações.
- Não incorpora o efeito da esteira de interferência entre *risers* muito próximos (o que pode influenciar a parcela de arrasto). Um *riser* na esteira de outro pode

receber menos carga, o que pode levar à colisão (clashing) entre os *risers*. Este efeito poderia ser modelado empiricamente, variando os valores do coeficiente C_d .

Mais detalhes sobre o desenvolvimento da formulação de MORISON, e sua implementação no programa PROSIM, podem ser encontrados em [24].

5.2.2 Implementação no Elemento Isoparamétrico

Resumindo o que foi apresentado no item anterior, a partir dos parâmetros das ondas (altura e período), a Teoria de Airy fornece as velocidades e acelerações das partículas do fluido; somando as velocidades da correnteza e aplicando a Fórmula de Morison, obtém-se as ordenadas de carga distribuída geradas pelas ondas e correnteza.

Uma vez calculadas estas ordenadas de carga distribuída, as cargas nodais equivalentes são calculadas seguindo um procedimento semelhante ao apresentado na literatura [45], que se baseia na solução da seguinte integral:

$$R_s = \int_S H^{S^T} f^S dS \quad (5.251)$$

onde:

f^S – vetor de carga externa na superfície do elemento;

H^S – matriz contendo as funções de interpolação.

Na implementação do cálculo de cargas nodais equivalentes ao carregamento de onda e corrente no PROSIM, foram adotados os seguintes procedimentos:

1. As ordenadas de carga distribuída são calculadas em cada um dos quatro nós do elemento, a partir dos valores nodais de velocidades relativas fluido-estrutura e de acelerações do fluido, de acordo com a Fórmula de MORISON;
2. As ordenadas calculadas nos nós são interpoladas para os pontos de Gauss ao longo da coordenada natural (curva) r , compondo o integrando da equação (5.2);

- Finalmente, a integral é resolvida pelo procedimento de integração numérica de Gauss, como descrito no item 4.14.

5.2.3 Exemplo

O modelo construído para validar o carregamento de onda e corrente foi uma coluna engastada no fundo do mar, conforme o desenho esquemático da Figura 5.1. O carregamento de onda e corrente foi aplicado em 10 incrementos. Os parâmetros de convergência aplicados para os critérios de força e deslocamento foram 10^{-2} e 10^{-3} , respectivamente.

Foram gerados modelos empregando elementos convencionais de 2 nós, e o elemento isoparamétrico de 4 nós apresentado neste trabalho. Todos os modelos foram montados com 31 nós igualmente espaçados. O modelo com o isoparamétrico empregou 10 elementos, enquanto o com elemento convencional, 30.

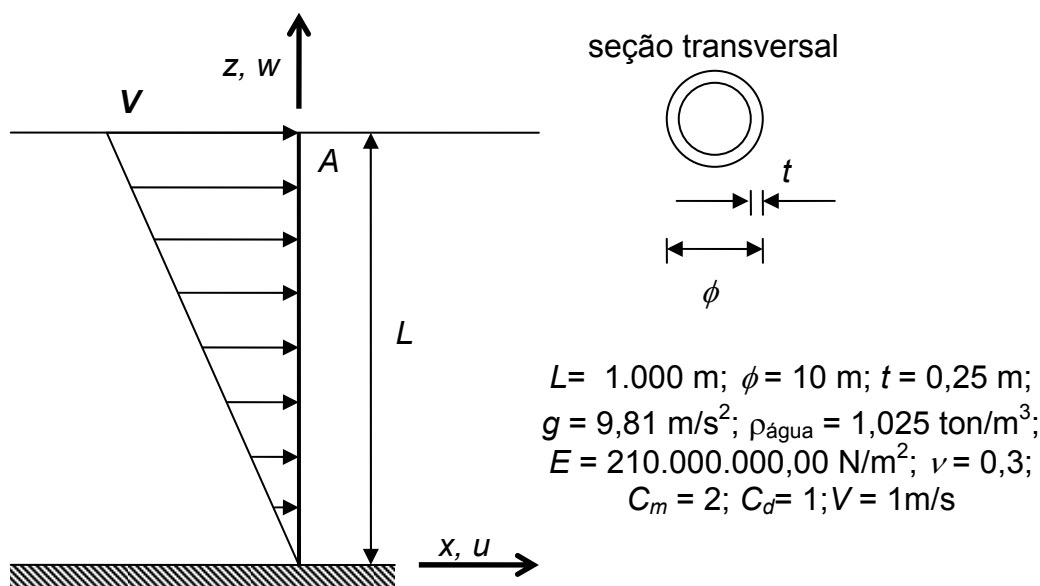


Figura 5.1 – Viga engastada e livre com carregamento distribuído

Os resultados obtidos estão apresentados e comparados nos gráficos da Figura 5.2, em termos da relação entre parâmetro de carga λ e os deslocamentos u e w no nó A .

Analisando os resultados para o grau de liberdade u , que apresenta deslocamentos significativos, graficamente não se observam diferenças. Quanto aos deslocamentos para o grau de liberdade w , observam-se diferenças da ordem de até

10%, que são pouco relevantes tendo em vista os pequenos valores de deslocamentos. Como os resultados para carregamentos de onda e correnteza com o elemento de dois nós já foram bastante testados e validados com o uso prático, esta comparação indica a coerência e precisão na implementação do procedimento de cálculo de cargas de onda e correnteza para o elemento isoparamétrico de quatro nós.

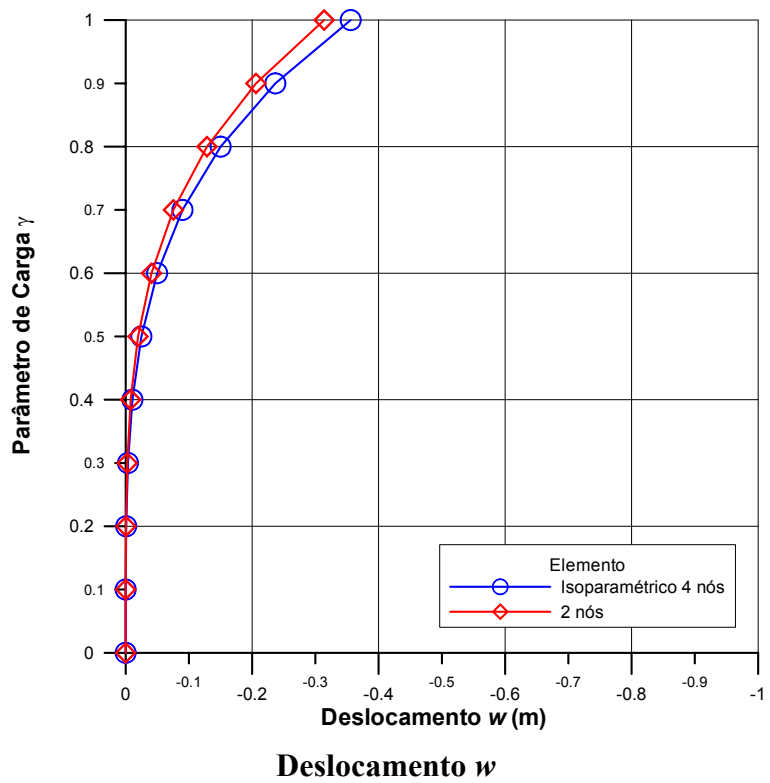
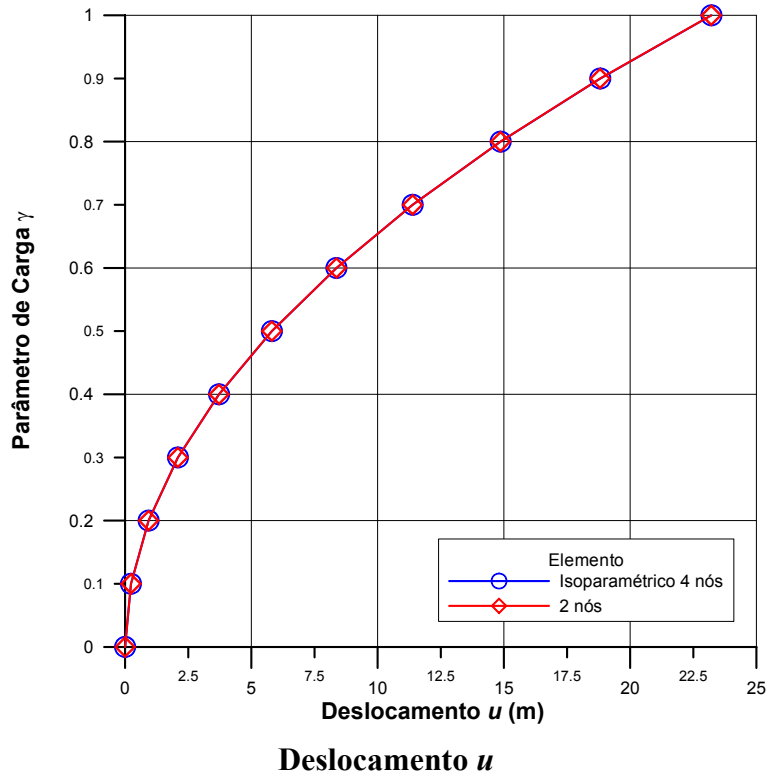


Figura 5.2 – Relação Parâmetro de Carga versus Deslocamento w na extremidade A

5.3 Carregamento Térmico

5.3.1 Implementação no Elemento Isoparamétrico

Um procedimento tradicionalmente empregado para o tratamento de cargas térmicas no elemento convencional de dois nós pode ser descrito da seguinte forma:

1. Cálculo de cargas nodais concentradas equivalentes ao carregamento térmico, acumulando-as no *array* de cargas externas aplicadas na estrutura;
2. Armazenamento destas cargas em um *array* de forças de engastamento perfeito;
3. Ao calcular os esforços para impressão, descontar estas cargas assim armazenadas.

A implementação do carregamento térmico no elemento isoparamétrico segue um procedimento diferente do descrito acima. No procedimento implementado, o carregamento térmico é tratado como tensões iniciais, através dos seguintes passos:

1. As variações de temperatura aplicadas nos nós são interpoladas e levadas para os pontos de Gauss ao longo da coordenada natural (curva) r , utilizando-se as funções de interpolação do elemento, definidas nas Equações de (4.2) a (4.5);
2. Em cada ponto de Gauss, calcula-se o incremento de tensão térmica através da seguinte expressão:

$$\sigma_T = E \alpha \Delta T \quad (5. 252)$$

onde:

E – módulo de elasticidade do material;

α – coeficiente de expansão térmica linear;

ΔT – variação de temperatura no ponto de Gauss.

3. Levando em conta o processo de aplicação incremental da temperatura, a tensão assim calculada é afetada por um multiplicador correspondente ao incremento do parâmetro de carga, de acordo com a função de carregamento definida.
4. O incremento de tensão térmica, calculado no sistema local, é transportado para o sistema global empregando a transformação de coordenadas definida pelas equações (4.191), (4.194) e (4.195).
5. Finalmente, o incremento de tensão térmica no sistema global é acumulado no vetor que armazena as tensões nos pontos de Gauss dos elementos.

Este procedimento é realizado apenas na primeira iteração de cada incremento de carga. As tensões assim calculadas irão, portanto afetar diretamente o cálculo da matriz de rigidez geométrica e do vetor de esforços internos do elemento.

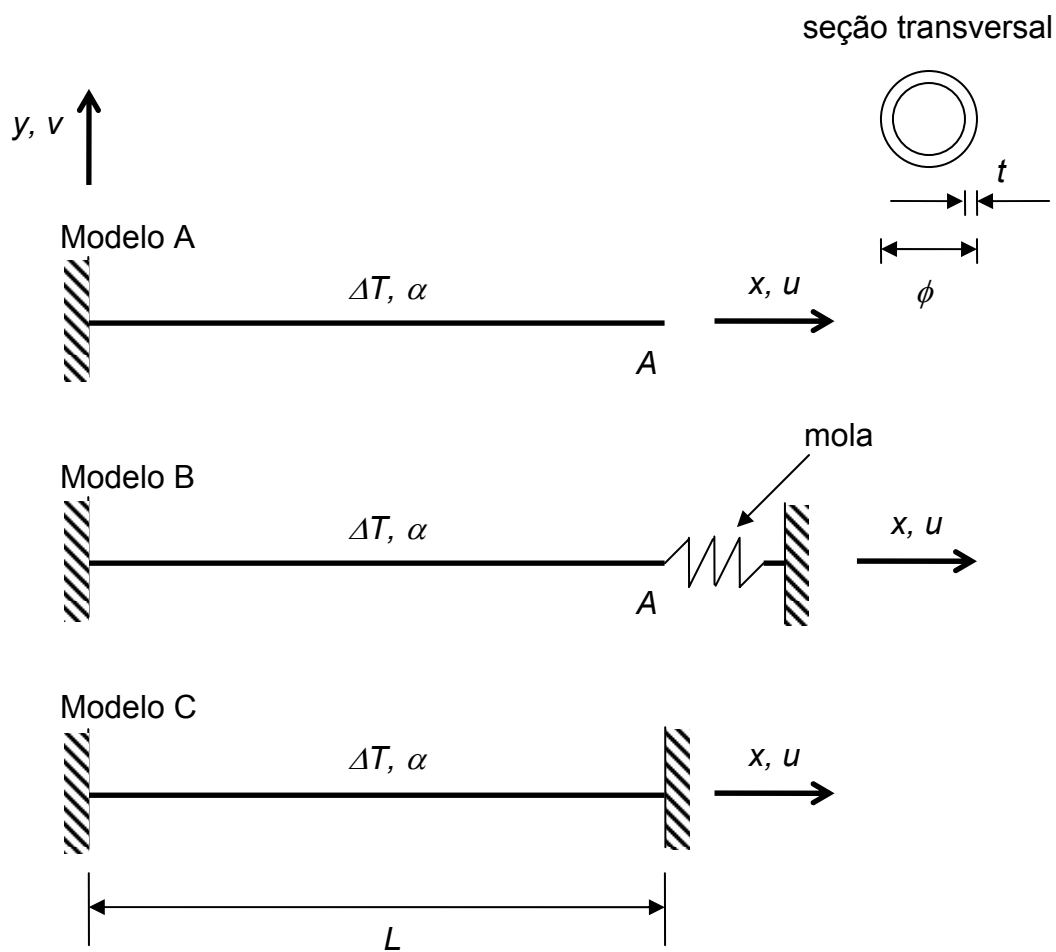
5.3.2 Exemplo

A validação desta implementação foi realizada através de três modelos de duto, conforme se verifica no desenho da Figura 5.3:

- O modelo A representa um duto engastado e livre;
- O modelo B representa um duto engastado com uma mola na extremidade livre (definida por uma função deslocamento-força apresentada na Tabela 5.1), e
- O modelo C representa um duto bi engastado.

Portanto, o modelo B corresponde a uma situação intermediária entre os modelos A e C; depois de aplicado o carregamento térmico, se tem deslocamentos e reações nos apoios.

Os dutos são perfeitamente retos, e estão apoiados num solo sem atrito. Os três casos foram modelados por apenas um elemento. O carregamento térmico (ΔT) foi aplicado em 10 incrementos iguais.



$$E = 210 \text{ GPa}; L = 505 \text{ m}; \Delta T = 50 \text{ }^\circ\text{C}; \alpha = 1,19 \cdot 10^{-5}/^\circ\text{C};$$

$$\nu = 0,3; \phi = 0,4064 \text{ m}; t = 7,92 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Figura 5.3 – Duto mono engastado, mono engastado com mola e bi engastado

A mola definida na Tabela 5. 1, aplicada ao modelo B, cria uma situação em que, quando o duto se desloca na extremidade A metade do deslocamento que teria se estivesse livre (modelo A), a reação da mola é correspondente a metade da reação se o duto estivesse livre (modelo C).

Tabela 5. 1 – Relação força-deslocamento da mola axial

| R_{axi} (kN/m) | u (m) |
|------------------|------------|
| -589.927,625 | -6,0 |
| -589.927,625 | -0,1502375 |
| 0,000 | 0,000 |
| 589.927,625 | 0,1502375 |
| 589.927,625 | 6,0 |

Os resultados obtidos encontram-se na Tabela 5. 2, onde podem ser vistos os valores numéricos e analíticos. Conforme se verifica, as soluções são praticamente iguais, validando a implementação do carregamento térmico.

Tabela 5. 2 – Comparação entre as soluções numéricas e analíticas

| Modelo | Solução Numérica | Solução Analítica |
|---|------------------|-------------------|
| A (deslocamento em A (m)) | 0,3004 | 0,3005 |
| B (deslocamento em A (m) / reação (kN)) | 0,1502 / 589.928 | 0,1503 / 589.928 |
| C (reação (kN)) | 1.179.854 | 1.179.856 |

5.4 Tensões e Curvaturas Iniciais Aplicadas a *Risers*

Na análise de dutos, normalmente se parte de uma malha de elementos finitos para uma configuração reta, ou com pequenas imperfeições geométricas, e não se leva em conta tensões e curvaturas iniciais.

Na análise de *risers* em catenária, no entanto, uma particularidade do processo de geração torna imprescindível o uso de recursos para tratar um estado de trações e curvaturas iniciais. Isso ocorre porque as malhas de elementos finitos não correspondem a uma configuração inicialmente reta e livre de tensões, mas sim a uma configuração equilibrada sob peso próprio; estas malhas são geradas por pré-processadores baseados nas equações da catenária.

É o caso, por exemplo, do sistema SITUA [49], que compõe a interface gráfica e de pré-processamento do programa PROSIM [24]. O SITUA grava, no arquivo de leitura de dados do PROSIM, as coordenadas dos nós da malha, bem como os valores de curvatura e força de tração.

Assim, na implementação do elemento isoparamétrico, uma vez efetuada a leitura destes dados, inicialmente as curvaturas e trações nodais lidas são interpoladas para os pontos de Gauss ao longo da coordenada natural (curva) r , utilizando-se as funções de interpolação do elemento, definidas nas Equações de (4.2) a (4.5).

Em seguida, a curvatura interpolada é transformada em momento, e logo depois, em tensão normal nos pontos de Gauss, utilizando as seguintes Equações:

$$M = EI\theta \quad (5.253)$$

$$\sigma = \frac{My}{I} \quad (5.254)$$

sendo:

θ – curvatura interpolada para o ponto de Gauss, a partir da curvatura nodal inicial fornecida pelo pré-processador SITUA;

E – módulo de elasticidade;

I – momento de inércia (também interpolado para o ponto de Gauss);

y – altura onde está sendo calculada a tensão, medida a partir do eixo do elemento, determinada a partir das coordenadas dos pontos de Gauss s e t (ou R e θ) da seção transversal.

A esta componente de tensão correspondente à curvatura, é somada a componente correspondente à tração inicial, pela seguinte expressão:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (5. 255)$$

sendo:

P –Tração interpolada para o ponto de Gauss, a partir da tração nodal inicial fornecida pelo pré-processador SITUA;

A – área da seção transversal do elemento (também interpolada para o ponto de Gauss).

As tensões assim obtidas a partir da curvatura e da força de tração são somadas, obtendo-se a tensão inicial no sistema de referência local. Como o problema é resolvido no sistema global, as tensões iniciais são em seguida transportadas para este sistema empregando a transformação de coordenadas definida pelas Equações (4.191), (4.194) e (4.195).

Evidentemente, este procedimento é realizado apenas uma vez, na primeira iteração do primeiro incremento de carga.

6 ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO NÃO-LINEAR

6.1 Introdução

Neste capítulo, serão apresentadas as estratégias de solução de problemas não-lineares que foram utilizadas na solução dos problemas estruturais com elementos finitos descrita no capítulo 4. Serão apresentados os métodos Newton-Raphson Padrão e Modificado, a técnica de continuação de Controle de Comprimento de Arco e os critérios de convergência que definem o nível de precisão desejado para solução [50].

6.2 Solução Incremental Iterativa

Considerando-se a estrutura em equilíbrio, numa etapa t de aplicação de cargas externas, tem-se a Equação (6.1).

$${}^tF - {}^tR = 0 \quad (6.1)$$

onde:

tF – é o vetor resultante das cargas aplicadas à estrutura na etapa t ;

tR – é o vetor de forças internas da estrutura, obtido a partir da contribuição de todos os elementos finitos na etapa de incremento de carga t .

Na etapa de carga t , o vetor de cargas externas da estrutura é definido pela contribuição linear dos n vetores de referência de cargas, da seguinte maneira:

$${}^tF = {}^t\lambda_1 f_1 + {}^t\lambda_2 f_2 + {}^t\lambda_3 f_3 + \dots + {}^t\lambda_n f_n \quad (6.2)$$

onde f_i é o vetor de referência de carga para a carga i aplicada na estrutura e ${}^t\lambda_i$ é o parâmetro multiplicador da carga i na etapa de incremento de carga t .

Os parâmetros multiplicadores das cargas de referência possibilitam variar os carregamentos de acordo com as necessidades da análise não-linear, principalmente nas análises de estabilidade estrutural.

O incremento do vetor de deslocamentos da estrutura ${}^{t+\Delta t}\Delta u$ pode ser obtido de forma aproximada, utilizando-se a matriz de rigidez tangente da estrutura, definida na Equação (6.3).

$${}^tK_T {}^{t+\Delta t}\Delta u = {}^{t+\Delta t}F - {}^tR \quad (6.3)$$

onde:

tK_T – é a matriz tangente da estrutura, obtida a partir do estado geométrico e físico da estrutura na etapa t .

Na etapa de carga $t + \Delta t$, o vetor de deslocamentos da estrutura é dado por (6.4).

$${}^{t+\Delta t}u = {}^t u + {}^{t+\Delta t}\Delta u \quad (6.4)$$

6.3 Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson estabelece um ciclo iterativo que tem o intuito de, através de aproximações sucessivas, conduzir a resposta numérica para um erro mínimo segundo os critérios de convergência. Considerando esta técnica dentro de um processo incremental iterativo, as equações de equilíbrio estático não-lineares (6.3) e (6.4) podem ser reescritas nas formas (6.5), (6.6) e (6.7).

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T^{(k-1)}\Delta\mathbf{u}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(k-1)} \quad (6.5)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k-1)} + \Delta\mathbf{u}^{(k)} \quad (6.6)$$

$$\Delta\mathbf{u}^{(k)} = \Delta\mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}^{(k)} \quad (6.7)$$

onde k representa a iteração dentro do passo de carga $t + \Delta t$. As condições iniciais para cada incremento de carga são dadas por (6.8), (6.9), (6.10) e (6.11).

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(0)} = {}^t\mathbf{u} \quad (6.8)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(0)} = {}^t\mathbf{R} \quad (6.9)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T^{(0)} = {}^t\mathbf{K}_T \quad (6.10)$$

$$\delta\mathbf{u}^{(0)} = 0 \quad (6.11)$$

Como se pode observar, o sistema não-linear é resolvido por uma sucessão de problemas lineares. Os esforços numéricos maiores consistem na geração e triangularização da matriz tangente. Como em geral a tangente ao caminho de equilíbrio pouco se modifica no intervalo de um incremento, é possível considerá-la constante, e assim agilizar o processo de cálculo, ficando desta forma definido o método de Newton-Raphson Modificado.

As Figura 6.1 e Figura 6.2 mostram uma representação gráfica das aproximações sucessivas segundo os métodos Newton-Raphson Padrão e Modificado.

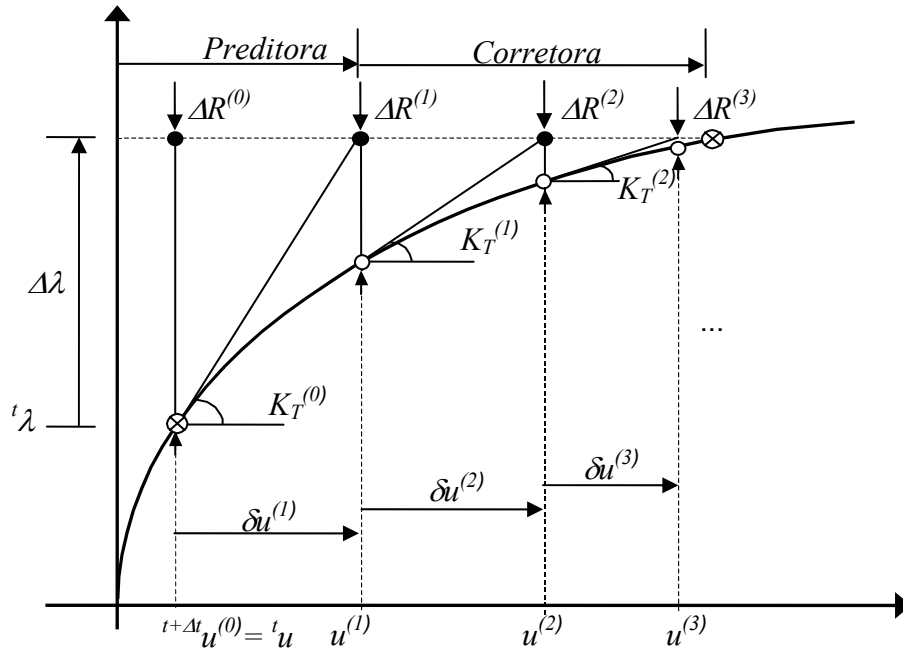


Figura 6.1 – Esquema representativo do método de Newton-Raphson Padrão

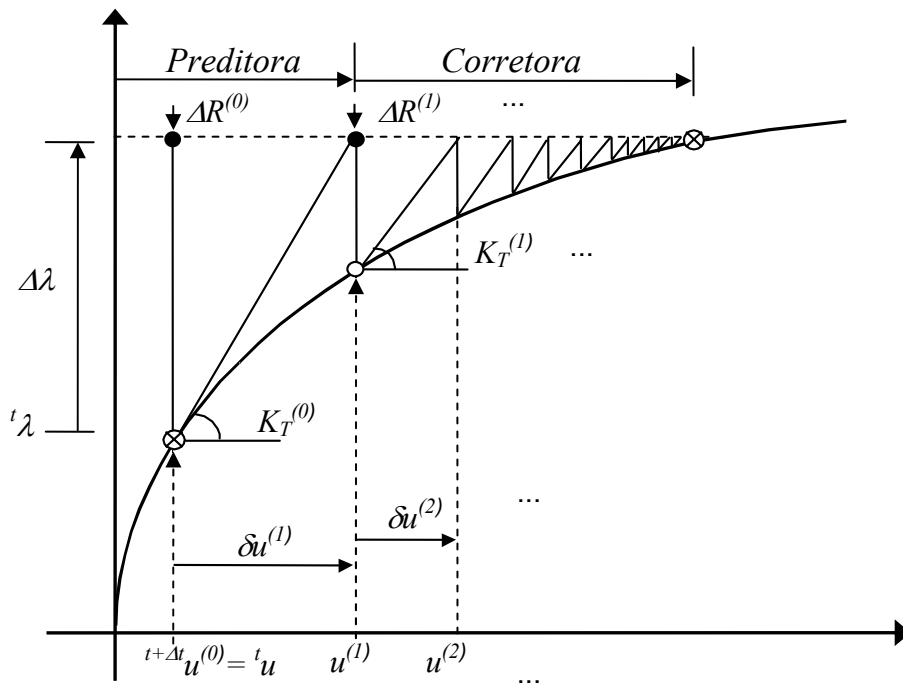


Figura 6.2 – Esquema representativo do método de Newton-Raphson Modificado

É fácil verificar a tendência da necessidade de um maior número de iterações para o método Newton-Raphson Modificado. De qualquer forma, esta técnica se torna bastante veloz por não atualizar a matriz de rigidez tangente, o que, em geral,

torna este método mais vantajoso. Porém, este método tem maior propensão a apresentar problemas de divergência. Um exemplo típico deste problema é apresentado na Figura 6.3, onde este método diverge da solução. De forma contrária, o método de Newton-Raphson Padrão convergiria sem problemas.

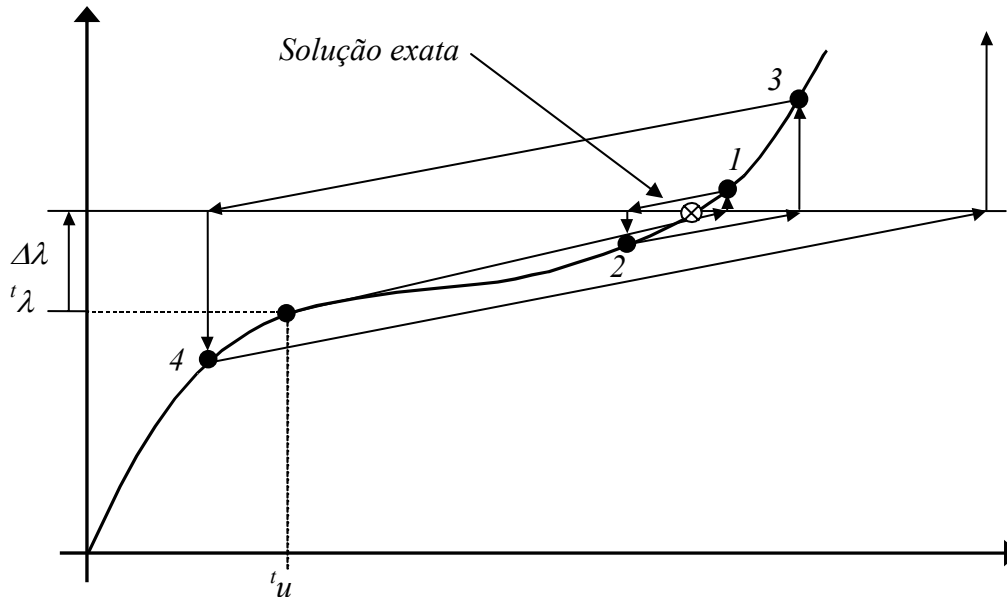


Figura 6.3 – Caso em que o método de Newton-Raphson Modificado diverge afastando-se da solução exata

6.4 Técnica do Comprimento de Arco Constante (*Arc-Length Method*)

O método de controle de comprimento de arco teve origem na técnica de controle de deslocamento sugerida por BATOZ e DHATT [51] em 1979, onde um determinado deslocamento é controlado e o processo incremental determina a intensidade da carga correspondente. A desvantagem do controle de deslocamento é que o deslocamento do grau de liberdade controlado tem que ser crescente, o que em alguns casos não ocorre, necessitando de uma avaliação prévia do problema.

Com base nos trabalhos de BATOZ e DHATT, RIKS [52] e WEMPNER [53] buscaram resolver os problemas não solucionados com a técnica de controle de deslocamento, através do controle de comprimento de um arco entre dois pontos consecutivos numa trajetória de equilíbrio. Modificações posteriores foram apresentadas

por CRISFIELD [54] e RAMM [55] que tornaram a técnica bastante simples para a implementação em um programa de elementos finitos.

A idéia básica deste método é tratar o parâmetro de carga como uma variável adicional, controlando não o incremento do parâmetro de carga, nem o incremento de uma determinada componente j do vetor de deslocamento Δu^k_j , mas sim o comprimento do vetor que une o ponto conhecido da trajetória ao ponto incógnito desejado, ou seja, a corda do arco da trajetória a ser determinada. Para equilibrar o número de equações e o número de incógnitas, uma equação de restrição é somada às equações de equilíbrio originais, de acordo com a Equação (6.12).

$$\alpha \|\Delta u\|^2 + \beta \Delta \lambda^2 \|f\|^2 = \Delta_l^2 \quad (6.12)$$

onde:

Δu – é vetor de deslocamento incremental;

$\Delta \lambda$ – é o incremento do parâmetro de carga;

f – é o vetor de carga de referência;

Δ_l – é a corda do arco;

α e β – são fatores de escala ou de ponderação ajustáveis que podem ser empregados para homogeneizar as dimensões e a magnitude numérica das parcelas da equação.

A Figura 6.4 mostra a interpretação geométrica da técnica do controle do arco constante aplicada a um problema de um grau de liberdade. A equação de restrição define uma superfície, muitas vezes denominada de hipersuperfície de restrição. As iterações de equilíbrio são executadas ao longo desta superfície.

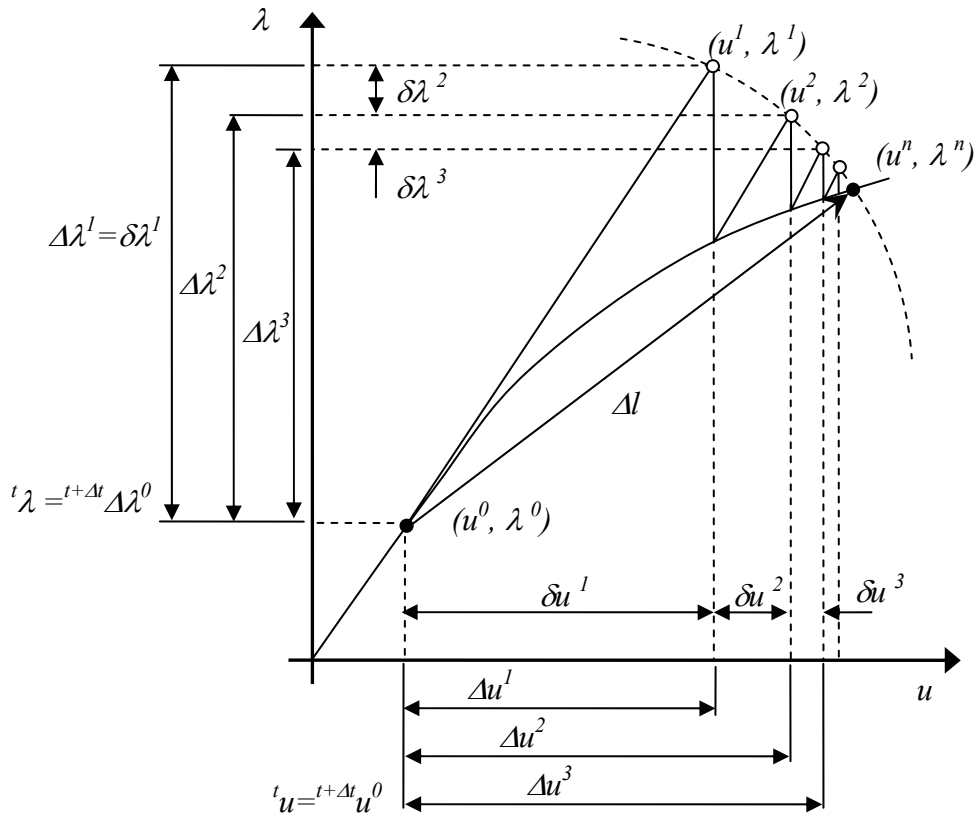


Figura 6.4 – Interpretação geométrica da técnica do controle do arco constante aplicado a um problema de um grau de liberdade

Existem várias versões da técnica do controle do arco constante, de acordo com os diferentes valores atribuídos aos fatores de escala α e β . A técnica do comprimento de arco elíptico é a forma mais geral da técnica do controle do arco constante, com a equação de restrição, que representa uma elipsóide no espaço tridimensional, definida em (6.12).

Para a técnica do comprimento de arco esférico, a equação de restrição representa uma esfera no espaço tridimensional e a equação de restrição assume a forma (6.13), o que significa assumir α e β igual a 1 na Equação (6.12).

$$\|\Delta u\|^2 + \Delta \lambda^2 \|f\|^2 = \Delta_1^2 \quad (6.13)$$

Para a técnica do comprimento de arco cilíndrico a equação de restrição representa um cilindro no espaço tridimensional. Neste caso a equação de restrição é dada por (6.14), com $\alpha = 1$ e $\beta = 0$.

$$\|\Delta u^k\|^2 = \Delta_1^2 \quad (6.14)$$

Para a técnica do comprimento de arco linearizado, as iterações são efetuadas em um plano tangente, que pode ser constante, técnica do plano normal constante ou atualizado em cada iteração, técnica do plano normal atualizado.

A técnica do plano normal constante emprega a equação de restrição esférica apenas na primeira iteração de cada incremento. Nas iterações seguintes toma-se uma expressão que considera quantidades iterativas (da primeira iteração e da iteração corrente), ao invés de tomar as quantidades incrementais atualizadas. A versão linearizada da equação de restrição, correspondente à técnica do plano normal constante, é definida de acordo com a Equação (6.15).

$$\delta u^{(1)T} \delta u^k + \delta \lambda^1 \delta \lambda^k f^T f = 0 \quad (6.15)$$

onde:

δu^k - é o vetor de deslocamento da iteração k ;

$\delta \lambda^k$ - é o parâmetro de carga da iteração k .

Isto equivale a fazer com que a solução de cada iteração $(\delta u^k, \delta \lambda^k)$ seja ortogonal à solução da primeira iteração $(\delta u^1, \delta \lambda^1)$, ou à solução predita. A hipersuperfície de restrição é, então, um hiperplano normal à tangente da trajetória de equilíbrio no ponto correspondente à última configuração conhecida.

A técnica do plano normal atualizado, proposta por RAMM [55], consiste em substituir a solução da primeira iteração pela solução incremental da iteração anterior:

$$\Delta u^{(k-1)T} \delta u^k + \delta \lambda^{k-1} \delta \lambda^k f^T f = 0 \quad (6.16)$$

Neste caso, o hiperplano de restrição é normal a uma secante que passa pela solução incremental da iteração anterior, e não mais à tangente da trajetória de equilíbrio. Ao contrário da proposta original de RIKS, o plano normal é atualizado em cada iteração.

Embora a versão linearizada seja mais fácil de implementar, ela não é tão robusta quanto a versão original não-linear (ou quadrática) da técnica do controle do arco constante, pois tem sido observado que as técnicas quadráticas são mais estáveis e convergem mais facilmente do que as versões linearizadas.

O sistema de equações completo (de ordem “ $n+1$ ”) é dado (6.17).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{f} \\ \delta \mathbf{u}^{(1)T} & \delta \lambda^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}^k \\ \delta \lambda^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{R}^k \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (6.17)$$

onde:

\mathbf{R}^k – é o vetor de carga desequilibrado;

\mathbf{K} – é matriz de rigidez tangente.

Percebe-se que mesmo que a matriz de rigidez tangente seja singular, a matriz total pode não ser. Esta é uma das razões pela qual esta técnica é muito eficiente para se encontrarem pontos limites.

De acordo com BATOZ e DHATT [51], a solução do sistema de equações (6.17), que passa a ser não-simétrico, é obtido através da decomposição do vetor de deslocamento em dois termos, de acordo com a Equação (6.18).

$$\delta \mathbf{u}^k = \left({}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{k-1} \right)^{-1} \left[\left({}^{t+\Delta t} \lambda^{k-1} + \delta \lambda^k \right) \mathbf{f} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^{k-1} \right] \quad (6.18)$$

ou

$$\delta \mathbf{u}^k = \left({}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{k-1} \right)^{-1} \left[{}^{t+\Delta t} \lambda^{k-1} \mathbf{f} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^{k-1} + \delta \lambda^k \mathbf{f} \right] \quad (6.19)$$

$$\delta \mathbf{u}^k = \delta \mathbf{u}^{\prime k} + \delta \lambda^k \delta \mathbf{u}^{\prime \prime k} \quad (6.20)$$

com

$$\delta \mathbf{u}^{\prime k} = \left({}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{k-1} \right)^{-1} \left[{}^{t+\Delta t} \lambda^{k-1} \mathbf{f} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^{k-1} \right] \quad (6.21)$$

$$\delta \mathbf{u}^{\prime \prime k} = \left({}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{k-1} \right)^{-1} \mathbf{f} \quad (6.22)$$

A primeira parcela da Equação (6.20) corresponde à variação dos deslocamentos incrementais que se obtém utilizando-se a técnica do controle de carga, e a segunda, é a solução tangente.

A substituição da equação (6.18) na equação de restrição linearizada da técnica do controle do arco constante (4.15) torna possível a determinação de δu^k e $\delta \lambda^k$. O vetor dos deslocamentos totais é atualizado, e o novo vetor de carga desequilibrado é calculado. Iterações são efetuadas até que o critério de convergência adotado seja satisfeito.

6.4.1 Técnica do Comprimento de Arco Cilíndrico

Quando a Equação (6.20) é substituída na equação de restrição geral não-linear da técnica do comprimento de arco, Equações (6.13) a (6.15), obtém-se uma equação quadrática (6.23), em termos de $\delta \lambda^k$.

$$A[\delta \lambda^k]^2 + B\delta \lambda^k + C = 0 \quad (6.23)$$

onde os coeficientes são dados, no caso da técnica do comprimento do arco cilíndrico, por (6.24), (6.25) e (6.26).

$$A = \|\delta u^{*k}\|^2 \quad (6.24)$$

$$B = 2\delta u^{*kT}(\Delta u^{k-1} + \delta u^{*k}) \quad (6.25)$$

$$C = \|\Delta u^{(k-1)} + \delta u^{*k}\|^2 - \Delta l^2 \quad (6.26)$$

A raiz escolhida deve ser aquela que corresponde à menor mudança na direção do vetor de deslocamento da iteração k em relação ao vetor de deslocamento anterior, o que equivale a determinar o menor ângulo entre as duas soluções, prevalecendo a que conduzir à maior projeção do vetor de deslocamento incremental atual sobre a direção do vetor do deslocamento incremental da iteração anterior ou o maior valor para $\cos \theta$ nas equações (6.27) e (6.28).

$$\cos \theta_1 = \Delta u^{(k-1)T}(\Delta u^k)_1 \quad (6.27)$$

$$\cos\theta_2 = \Delta u^{(k-1)T} (\Delta u^k)_2 \quad (6.28)$$

LAM e MORLEY [56] apresentaram uma metodologia para se lidar com as raízes complexas que podem aparecer na equação quadrática mencionada anteriormente. Uma vantagem das versões linearizadas é que, quando K é positiva, a obtenção de $\delta\lambda^k$ não passa pela solução de uma equação quadrática, e portanto, não existe o problema da escolha da raiz apropriada.

6.4.2 Determinação do Sinal do Incremento Inicial do Parâmetro de Carga

A determinação do sinal do parâmetro de incremento de carga na primeira iteração de cada passo deve ser feita de acordo com algum critério, pois a escolha errada deste sinal conduzirá à convergência em pontos previamente calculados. Um dos critérios mais empregados é o que utiliza o sinal do determinante da matriz de rigidez corrente para determinar o sinal do incremento de carga. Este procedimento funciona muito bem na maioria dos casos, porém, em alguns casos o critério falha, por exemplo, quando solucionadores iterativos são empregados com procedimento incremental-iterativos em técnicas de continuação. Neste trabalho, o sinal do incremento de carga inicial foi determinado a partir do produto interno, $({}^t \delta u''^{(1)})^T \cdot ({}^{t+\Delta t} \delta u''^{(1)})$, ou seja, o sinal do produto interno do deslocamento tangente da primeira iteração do penúltimo passo pelo deslocamento tangente, na primeira iteração do passo atual. Quando o sinal deste produto interno é negativo, significa que um ponto limite foi ultrapassado e, então, o sinal do parâmetro de carga é modificado.

6.4.3 Controle do Deslocamento Tangente

Existe a possibilidade de que o deslocamento tangente tenda a infinito em pontos próximos a um ponto limite da trajetória de equilíbrio. Para evitar que isto ocorra, pode-se limitar este deslocamento a um valor máximo $\delta u''_{max}$, de forma que se $\|\delta u''\| > \delta u''_{max}$, então:

$$\delta\lambda = \frac{\delta u''_{max}}{\|\delta u''\|} \delta\lambda^{(1)} \quad (6.29)$$

O valor de $\delta u''_{max}$ pode ser considerado como um múltiplo do deslocamento tangente da primeira iteração do primeiro passo, ${}^1\delta u''^{(1)}$.

6.5 Critérios de Convergência

Nos processos iterativos, com controle de carga ou de comprimento de arco, é sempre necessário a cada iteração verificar se o algoritmo atingiu a convergência para os valores de tolerância prescritos ou mesmo se este divergiu, atingindo o limite de iterações pré-estabelecido para o passo de carga. No intuito de verificar a convergência existem varias implementações possíveis. As mais usuais são:

- Critério de deslocamentos;
- Critério de força;
- Critério de energia (uma combinação dos critérios de deslocamento e força).

Para o critério de deslocamentos, exige-se que a razão entre as normas Euclidianas dos deslocamentos incrementais e dos deslocamentos totais da etapa de carga $t + \Delta t$, na iteração k , seja menor ou igual à tolerância ε_d (6.45).

$$\frac{\|\delta \mathbf{u}^{(k)}\|}{\|\mathbf{u}^{(k)}\|} \leq \varepsilon_d \quad (6.30)$$

Para o critério de força, compara-se a razão entre as normas Euclidianas do vetor de desequilíbrio de forças ou resíduo no passo de carga $t + \Delta t$, na iteração k e do início do incremento de carga $t + \Delta t$, com a tolerância de forças ε_f (6.46).

$$\frac{\|\Delta \mathbf{R}^{(k)}\|}{\|\Delta \mathbf{R}^{(0)}\|} \leq \varepsilon_f \quad (6.31)$$

O critério de energia proposto por BATHE [45], procura englobar de uma só vez os critérios de deslocamento e de força. Neste compara-se o incremento de energia interna no passo de carga k , ou seja, a cada iteração com o incremento de energia inicial (6.47).

$$\frac{\|(\delta \mathbf{u}^{(k)})^T \Delta \mathbf{R}^{(k)}\|}{\|(\delta \mathbf{u}^{(1)})^T \Delta \mathbf{R}^{(1)}\|} \leq \varepsilon_e \quad (6.32)$$

Antes de concluir esse item, chama-se a atenção para o fato de que o uso de um ou mais desses critérios de convergência não garante a exatidão da solução numérica, mas sim um melhor grau de precisão da mesma, desde que os métodos numéricos em geral conduzem para soluções aproximadas no que se trata de problemas não lineares. Desta forma, em geral, recomenda-se a utilização dos três métodos.

7 APLICAÇÕES – CASOS ESTUDADOS

7.1 Introdução

Este capítulo apresenta as aplicações que mostram a eficiência do elemento isoparamétrico de 4 nós de seção circular no tratamento dos problemas não-lineares propostos neste trabalho. Os casos 7.2 a 7.5 mostram as aplicações a problemas acadêmicos que validam as implementações através de comparações com soluções analíticas e numéricas. Os casos de 7.6 e 7.7 mostram as aplicações a problemas reais de dutos aquecidos e *risers*.

Em quase todos os casos, foram gerados modelos com o elemento convencional de 2 nós para comparação dos resultados. Para que estas comparações fossem justas, procurou-se igualar a quantidade de nós em todos os modelos.

7.2 Viga Engastada e Livre

Este caso mostra uma viga engastada e livre sendo flexionada por uma carga concentrada, de acordo com a Figura 7.1. Este exemplo foi analisado por BENJAMIN [1] e por autores como BATHE e BOLOURCHI [57], ORAN e KASSIMALI [58] e BISSHOPP e DRUCKER [59]. BENJAMIN estudou este caso com um elemento isoparamétrico de 4 nós com seção retangular (Figura 7.1), BATHE e BOLOURCHI utilizaram elementos finitos convencionais, ORAN e KASSIMALI através do método da viga-coluna e BISSHOPP e DRUCKER através de integrais elípticas.

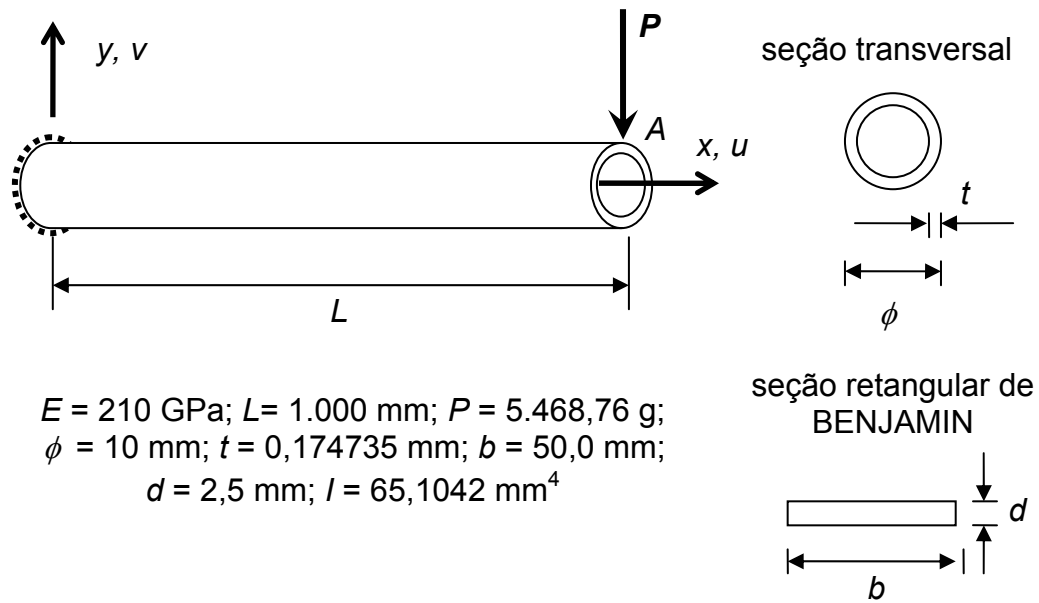


Figura 7.1 – Viga engastada

7.2.1 Descrição do Problema

7.2.1.1 Carregamento

A carga P foi aplicada em 60 passos, com incrementos iguais, de acordo com a função de carregamento apresentada no gráfico da Figura 7.2.

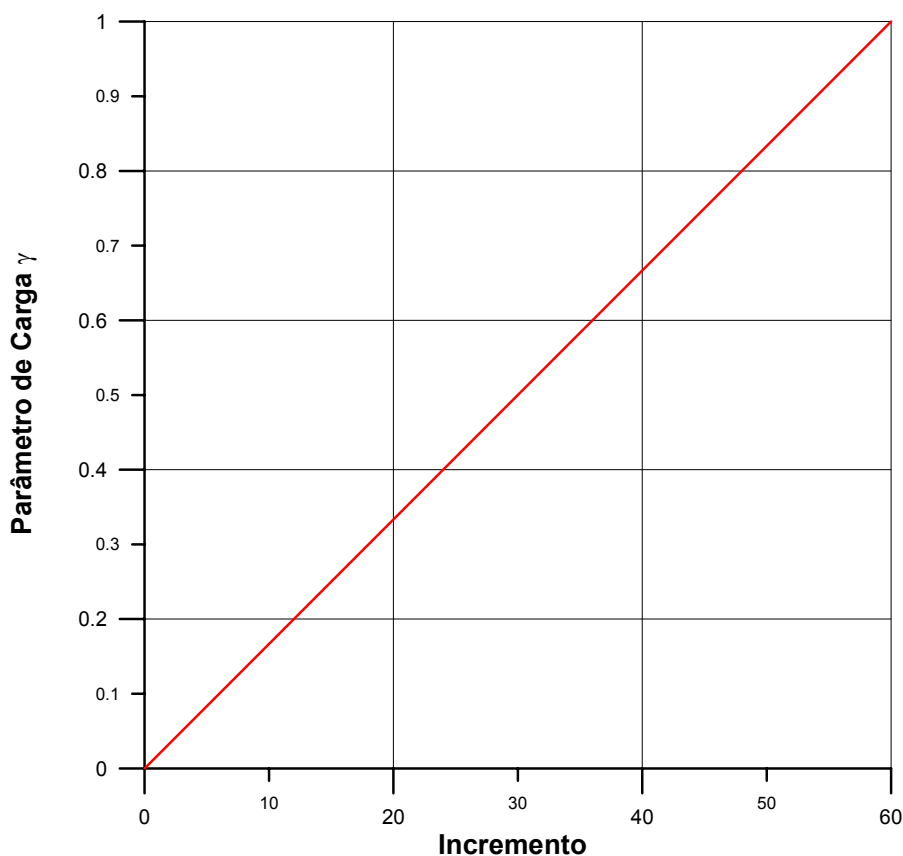


Figura 7.2 – Função de carregamento aplicada a carga P

7.2.1.2 *Análise do Problema*

As análises foram realizadas com um modelo discretizado com 1 elemento, como fez BENJAMIN. O modelo de comparação com o elemento convencional foi discretizado com 3 elementos, mantendo-se a igualdade dos nós.

Para o critério de deslocamento foi utilizada a mesma tolerância de BENJAMIN. Para o critério de força, seguiu-se o trabalho de FREITAS [50], que teve a oportunidade de avaliar níveis de tolerância para problemas semelhantes. As tolerâncias utilizadas estão na Tabela 7.1.

Tabela 7.1– Parâmetros de análise

| Trabalho | Tolerância critério de força | Tolerância critério de deslocamento |
|-----------------|-------------------------------------|--|
| Este trabalho | 10^{-3} | 10^{-4} |
| BENJAMIN | Não | 10^{-4} |

7.2.2 Resultados Obtidos

A Figura 7.3 mostra a configuração original e deformadas nos incrementos de carga 15, 30, 45 e 60. Como pode ser visto, a estrutura apresenta grandes deslocamento nos graus de liberdade u e v .

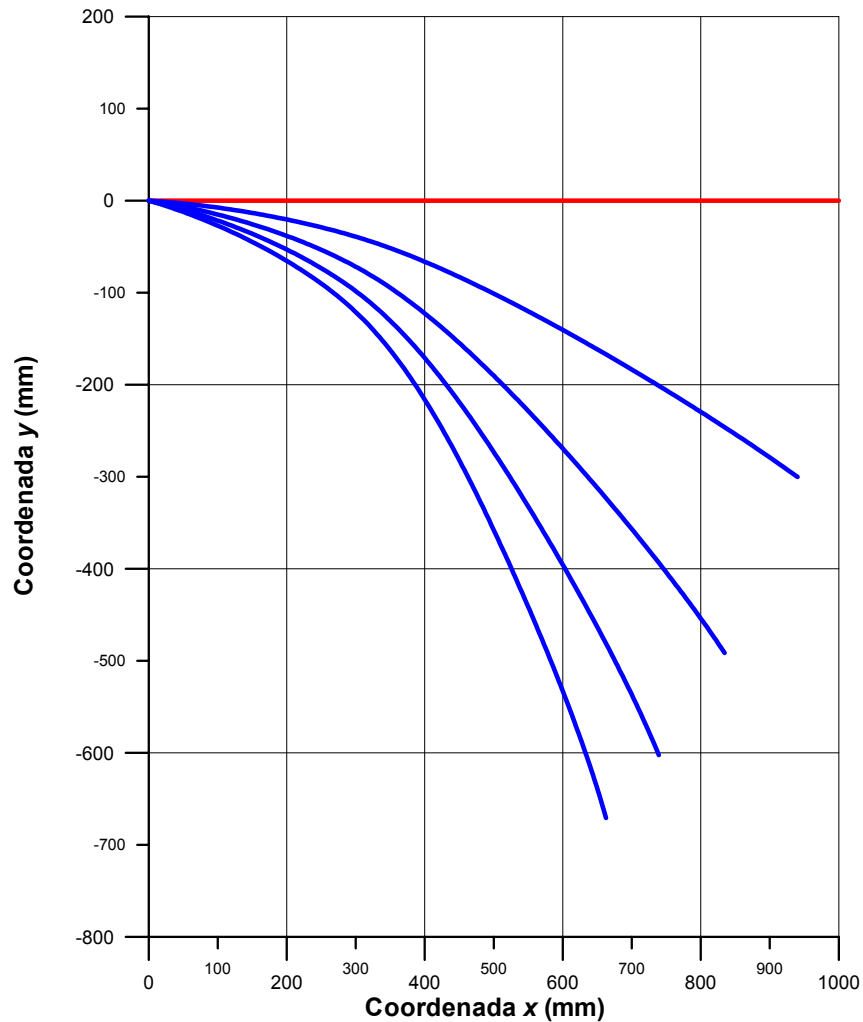


Figura 7.3 – Configuração original e deformadas (incrementos 15, 30, 45 e 60)

O gráfico da Figura 7.4 mostra a curva Carga versus Deslocamento u , no ponto de aplicação da carga, onde podem ser vistos também os resultados obtidos por BENJAMIN e com o elemento convencional de 2 nós.

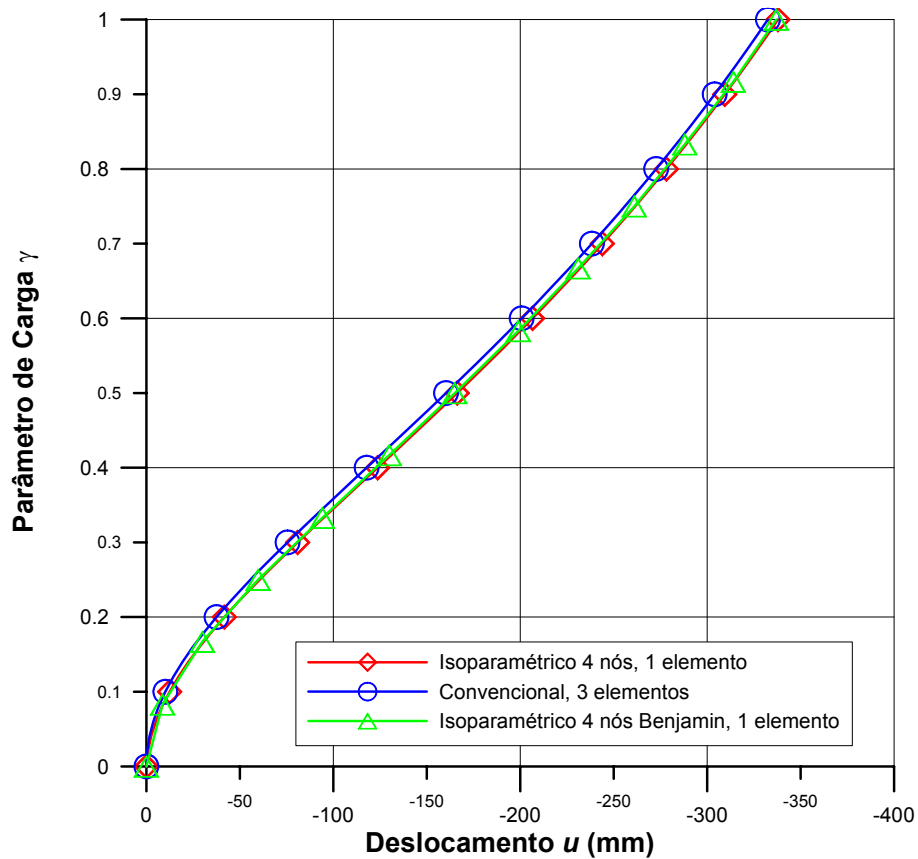


Figura 7.4 – Curva Carga versus Deslocamento u , no ponto de aplicação da carga

Analisando os resultados, verifica-se que a resposta do elemento isoparamétrico é praticamente igual à de BENJAMIN e muito próxima da resposta do elemento convencional. A resposta do elemento convencional se afasta do elemento isoparamétrico ao longo de quase toda a curva. Este resultado mostra a capacidade do elemento isoparamétrico de representar problemas com grandes deslocamentos mesmo utilizando baixa discretização.

O gráfico da Figura 7. 5 mostra a curva Carga versus Deslocamento v , no ponto de aplicação da carga, onde podem ser vistos os resultados obtidos por BENJAMIN, BISSHOPP e DRUCKER e com os elementos isoparamétrico convencional [24].

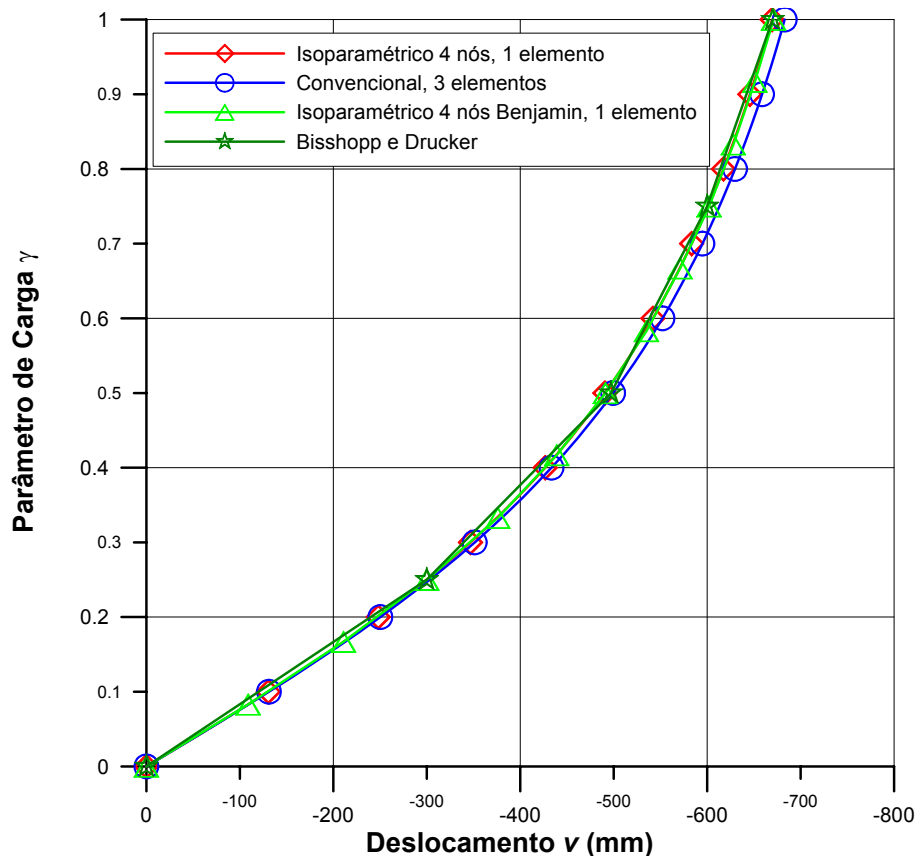


Figura 7.5 – Curva Carga versus Deslocamento v , no ponto de aplicação da carga

Verifica-se que as curvas, com exceção da resposta do elemento convencional, são praticamente iguais. Nota-se que os dois elementos isoparamétricos se aproximam muito da solução analítica, mesmo utilizando-se um único elemento. A resposta analítica é formada por poucos pontos, e no intervalo entre estes pontos se afasta um pouco da resposta do elemento isoparamétrico, pois estes são ligados por retas. No exemplo 5.2.3, apresentado no capítulo 5, verificou-se que este grau de liberdade apresenta maior diferença nos resultados quando se compara o elemento isoparamétrico com o convencional.

As Tabelas 7.2 e 7.3 mostram os resultados numéricos referentes aos deslocamentos u e v , respectivamente. Conforme se verifica, o elemento isoparamétrico se aproxima mais da solução analítica que o elemento convencional, o que se deve ao seu carácter matemático. A resposta de BENJAMIN é praticamente igual à resposta deste trabalho, pois os dois elementos utilizam formulações muito parecidas, com diferenças no que se refere ao tipo de seção.

Tabela 7.2 – Resultados numéricos e analíticos referentes ao deslocamento u na extremidade da estrutura

| Incremento | Parâmetro de Carga | Deslocamento u (mm) | | |
|------------|--------------------|---|--|--------------------------|
| | | Elemento isoparamétrico, com 1 elemento | Elemento convencional, com 3 elementos | BENJAMIN, com 1 elemento |
| 5 | 0,083 | -8,698 | -7,099 | -8,690 |
| 10 | 0,167 | -29,989 | -26,864 | -30,000 |
| 15 | 0,250 | -59,876 | -55,631 | -59,800 |
| 20 | 0,333 | -94,276 | -89,389 | -94,200 |
| 25 | 0,417 | -130,117 | -124,965 | -130,000 |
| 30 | 0,500 | -165,476 | -160,292 | -165,000 |
| 35 | 0,583 | -199,309 | -194,205 | -199,000 |
| 40 | 0,667 | -231,132 | -226,140 | -231,000 |
| 45 | 0,750 | -260,786 | -255,894 | 261,000 |
| 50 | 0,833 | -288,293 | -283,464 | -288,000 |
| 55 | 0,917 | -313,759 | -308,949 | -314,000 |
| 60 | 1,000 | -337,333 | -332,497 | -337,000 |

Tabela 7.3 – Resultados numéricos e analíticos referentes ao deslocamento v na extremidade da estrutura

| Incremento | Parâmetro de Carga | Deslocamento v (mm) | | | |
|------------|--------------------|-----------------------------------|------------------------------------|--------------------------|--------------------|
| | | Elemento de 4 nós, com 1 elemento | Elemento de 2 nós, com 3 elementos | BENJAMIN, com 1 elemento | BISSHOPP e DRUCKER |
| 5 | 0,083 | -109,524 | -109,810 | -109,000 | -- |
| 10 | 0,167 | -211,090 | -212,436 | -211,000 | -- |
| 15 | 0,250 | -300,270 | -303,225 | -300,000 | -300,000 |
| 20 | 0,333 | -375,931 | -380,674 | -376,000 | -- |
| 25 | 0,417 | -439,050 | -445,481 | -439,000 | -- |
| 30 | 0,500 | -491,453 | -499,338 | -491,000 | -491,000 |
| 35 | 0,583 | -535,060 | -544,138 | -535,000 | -- |
| 40 | 0,667 | -571,576 | -581,605 | -571,000 | -- |
| 45 | 0,750 | -602,400 | -613,179 | -602,000 | -600,000 |
| 50 | 0,833 | -628,649 | -640,018 | -628,000 | -- |
| 55 | 0,917 | -651,199 | -663,037 | -651,000 | -- |
| 60 | 1,000 | -670,736 | -682,953 | -671,000 | -670,000 |

7.3 Coluna de Euler

Este exemplo mostra uma coluna de Euler ou viga coluna, conforme o desenho da Figura 7.6. Este modelo foi estudado por BENJAMIN [44] utilizando o elemento isoparamétrico com seção retangular (Figura 7.6), e por DYM e SHAMES [60], através de soluções analíticas.

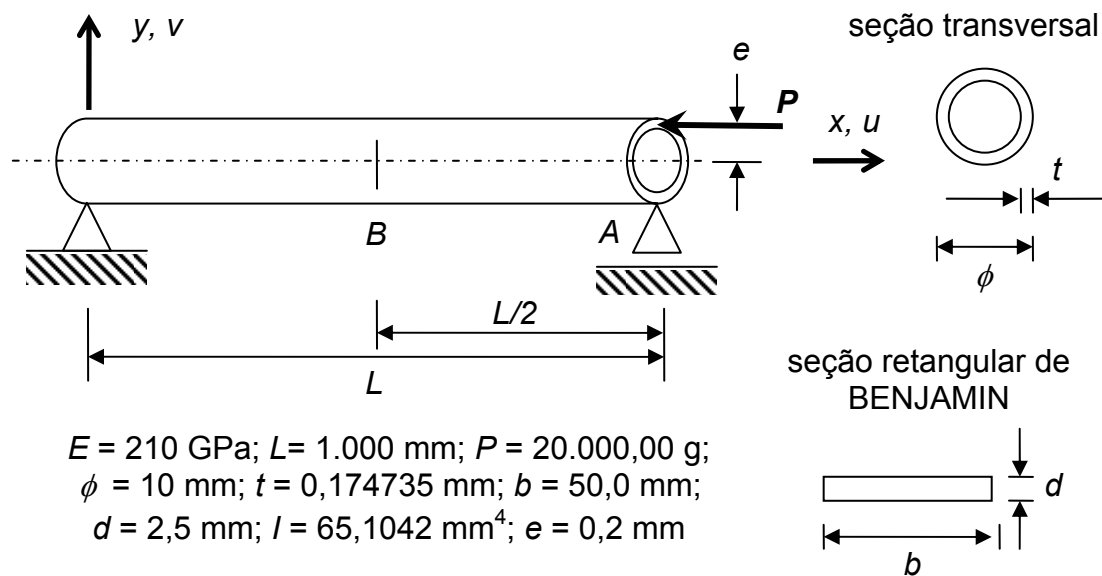


Figura 7.6 – Coluna de Euler

7.3.1 Descrição do Problema

7.3.1.1 Carregamento

A Figura 7.7 mostra a função de carregamento aplicada à estrutura. Como pode ser visto, a carga não foi aplicada em incrementos iguais. Na proximidade da carga crítica de Euler (Equação 7.1), cujo valor, 13.493.636 g, corresponde a 67% da carga máxima aplicada à estrutura, o incremento foi reduzido para facilitar a obtenção da solução. Após a carga crítica, o incremento também foi reduzido, já que neste trecho o algoritmo também encontrava dificuldade para convergência. Neste trecho, a relação entre o deslocamento e a carga aplicada é relativamente grande. O gráfico com a função de carregamento mostra como estão distribuídos os incrementos de carga. Os símbolos sobre a curva indicam os pontos de aplicação de carga.

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (7.1)$$

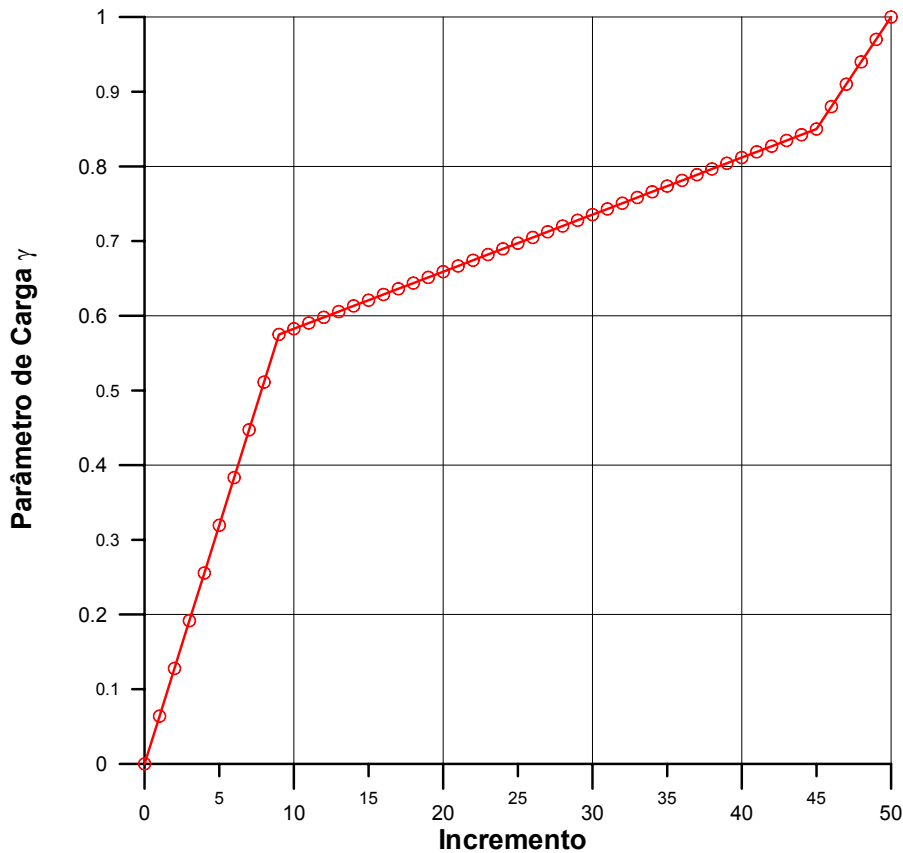


Figura 7.7 – Função de carregamento aplicada a carga P

7.3.1.2 *Análise do Problema*

O modelo numérico foi discretizado com 8 elementos, diferentemente de BENJAMIN, que utilizou 4 elementos. O modelo de comparação, com elemento de 2 nós, foi discretizado com 24 elementos, mantendo-se a igualdade dos nós. A excentricidade da carga foi representada através de momentos equivalentes.

Como no caso anterior, utilizou-se o mesmo valor de tolerância para o critério de deslocamento utilizado por BENJAMIN e por FREITAS [50][61] para o critério de força. A Tabela 7.4 mostra os parâmetros de análise utilizados.

Tabela 7.4 – Parâmetros de análise

| Elemento | Tolerância critério de força | Tolerância critério de deslocamento |
|----------------------|-------------------------------------|--|
| Isoparamétrico 4 nós | 10^{-3} | 10^{-4} |
| BENJAMIN | Não | 10^{-4} |

7.3.2 Resultados Obtidos

O gráfico da Figura 7.8 mostra a configuração original e as deformadas referentes aos incrementos de carga 10, 20, 23, 30, 40 e 50. A deformada 23, curva verde no gráfico, corresponde à carga crítica de Euler.

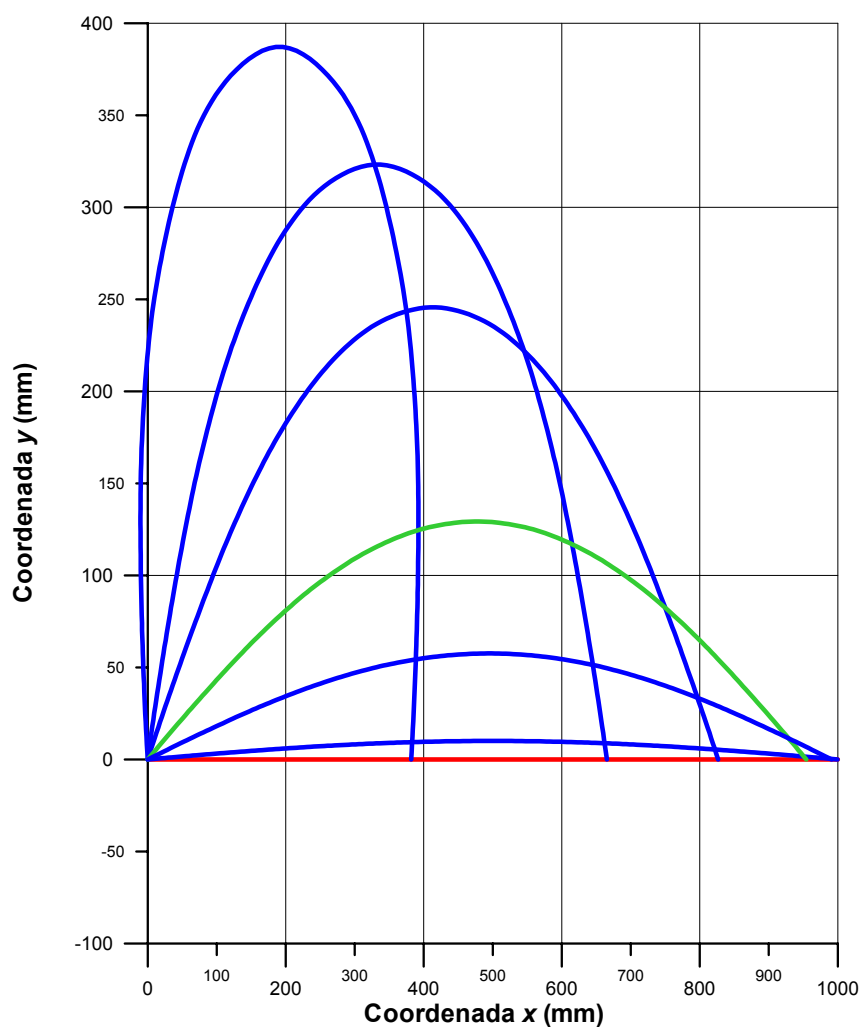


Figura 7.8 – Configuração original e deformadas (incrementos 10, 20, 23, 30, 40 e 50)

A Figura 7.9 mostra as curvas Carga versus Deslocamento u em A , comparando as soluções dos elementos isoparamétrico e de 2 nós. Analisando este gráfico, verifica-se que os resultados são praticamente iguais, com uma inexpressiva diferença no final das curvas.

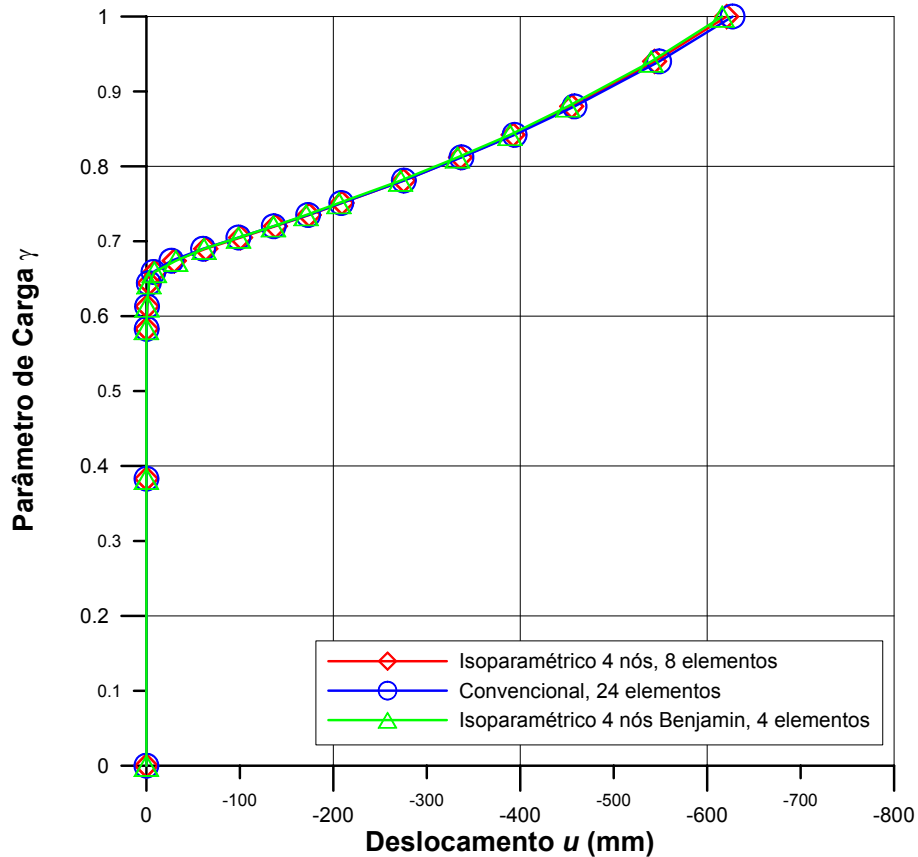


Figura 7.9 – Curva Carga versus Deslocamento v , no ponto de aplicação da carga

A Figura 7.10 mostra as curvas Carga versus Deslocamento v em B . Como pode ser visto, também para este grau de liberdade, as soluções se aproximam bastante. A solução de DYM e SHAMES [60] é apresentada apenas por pontos, por não apresentar uma quantidade de pontos suficiente para se traçar uma curva que represente bem a solução. No trecho final da curva, os modelos com elemento isoparamétrico se aproximam mais da solução analítica que o elemento convencional.

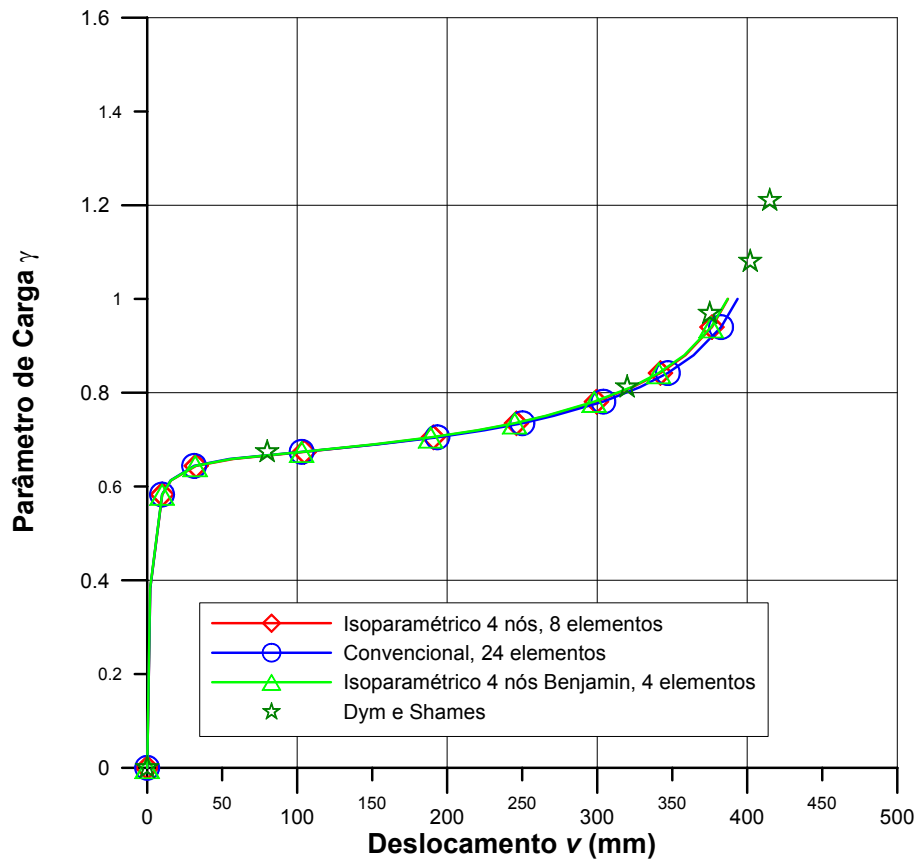


Figura 7.10 – Curva Carga versus Deslocamento v , no ponto de aplicação da carga

A Tabela 7.5 apresenta os resultados numéricos referentes ao deslocamento u no ponto A da estrutura. Estes valores mostram, que no início do incremento de carga, até o incremento 14, o elemento isoparamétrico se aproxima mais da resposta do elemento convencional. Depois deste incremento, a aproximação é melhor como a resposta de BENJAMIN.

Tabela 7.5 – Resultados numéricos referentes ao deslocamento u na extremidade A da estrutura

| Incremento | Parâmetro de Carga | Deslocamento u (mm) | | |
|------------|--------------------|--------------------------------------|----------------------------|-----------------------|
| | | Isoparamétrico de 4 nós, 8 elementos | Convencional, 24 elementos | BENJAMIN, 2 elementos |
| 6 | 0,383 | -0,080 | -0,078 | -0,020 |
| 10 | 0,583 | -0,386 | -0,348 | -0,029 |
| 14 | 0,613 | -0,785 | -0,708 | -0,670 |
| 18 | 0,644 | -2,941 | -2,540 | -2,740 |
| 20 | 0,659 | -9,047 | -7,571 | -8,510 |
| 22 | 0,674 | -29,919 | -26,724 | -31,500 |
| 24 | 0,690 | -63,645 | -60,654 | -61,800 |
| 26 | 0,705 | -100,771 | -98,444 | -98,700 |
| 28 | 0,720 | -137,937 | -136,233 | -136,000 |
| 30 | 0,735 | -174,170 | -173,023 | -171,000 |
| 32 | 0,751 | -209,180 | -208,524 | -206,000 |
| 36 | 0,781 | -275,242 | -275,443 | -272,000 |
| 40 | 0,812 | -336,165 | -337,111 | -333,000 |
| 44 | 0,842 | -392,368 | -393,966 | -389,000 |
| 46 | 0,880 | -455,122 | -458,078 | -451,000 |
| 48 | 0,940 | -543,770 | -548,611 | -540,000 |
| 50 | 1,000 | -620,844 | -627,161 | -616,000 |

A Tabela 7.6 apresenta os resultados numéricos referentes ao deslocamento v no ponto B da estrutura. Nesta tabela, além das soluções numéricas, é apresentada a solução analítica de DYM e SHAMES [60]. Conforme se verifica, o elemento isoparamétrico se aproxima muito mais da solução analítica do que o elemento convencional.

Tabela 7.6 – Resultados numéricos e analíticos referentes ao deslocamento v no centro da estrutura, em B

| Incremento | Parâmetro de Carga | Deslocamento v (mm) | | | |
|------------|--------------------|--------------------------------------|----------------------------|-----------------------|--------------|
| | | Isoparamétrico de 4 nós, 8 elementos | Convencional, 24 elementos | BENJAMIN, 2 elementos | DYM e SHAMES |
| 6 | 0,383 | 2,067 | 2,058 | 2,000 | -- |
| 10 | 0,583 | 10,075 | 9,927 | 10,000 | -- |
| 14 | 0,613 | 15,903 | 15,547 | 15,800 | -- |
| 18 | 0,644 | 32,634 | 31,306 | 32,100 | -- |
| 20 | 0,659 | 57,655 | 54,823 | 56,300 | -- |
| 22 | 0,674 | 102,782 | 102,989 | 102,000 | 80,000 |
| 24 | 0,690 | 152,555 | 153,692 | 151,000 | -- |
| 26 | 0,705 | 190,787 | 193,472 | 189,000 | -- |
| 28 | 0,720 | 221,265 | 224,763 | 220,000 | -- |
| 30 | 0,735 | 246,148 | 250,129 | 245,000 | -- |
| 32 | 0,751 | 266,891 | 271,181 | 266,000 | -- |
| 36 | 0,781 | 299,467 | 304,122 | 298,000 | -- |
| 40 | 0,812 | 323,700 | 328,554 | 323,000 | 320,000 |
| 44 | 0,842 | 342,160 | 347,122 | 341,000 | -- |
| 46 | 0,880 | 358,735 | 364,256 | 358,000 | -- |
| 48 | 0,940 | 376,463 | 382,572 | 376,000 | -- |
| -- | 0,969 | -- | -- | -- | 375,000 |
| 50 | 1,000 | 380,749 | 393,560 | 387,000 | -- |
| -- | 1,080 | -- | -- | -- | 402,000 |
| -- | 1,210 | -- | -- | -- | 415,000 |

7.3.3 Estudo Paramétrico

7.3.3.1 Refinamento

Este estudo tem como objetivo mostrar a capacidade do elemento isoparamétrico de representar o problema estrutural relacionado ao refinamento da malha, comparando com o elemento convencional. Para isto, foram construídos 7 modelos variando a gradação da malha conforme a Tabela 7.7, onde pode ser visto o número de elementos e de nós associados ao tipo de elemento. O modelo 3 foi utilizado no estudo anterior.

Tabela 7.7 – Dados de refinamento dos modelos

| Modelo | Número de elementos / Número de nós | |
|--------|-------------------------------------|--------------|
| | Isoparamétrico 4 nós | Convencional |
| 1 | 2/7 | 6/7 |
| 2 | 4/13 | 12/13 |
| 3 | 8/25 | 24/25 |
| 4 | 12/37 | 36/37 |
| 5 | 16/49 | 48/49 |
| 6 | 20/61 | 60/61 |
| 7 | 24/73 | 72/73 |

O gráfico da Figura 7.11 mostra as curvas Deslocamento v (em B) versus Número de Nós do modelo, no último incremento de carga. Como se verifica, o elemento isoparamétrico converge para a solução utilizando malha com menor número de nós que o elemento convencional. Este comportamento se deve, em grande parte às funções de interpolação cúbicas utilizadas pelo elemento. Além disso, o modelo 1 com elemento convencional, não convergiu pela baixa discretização.

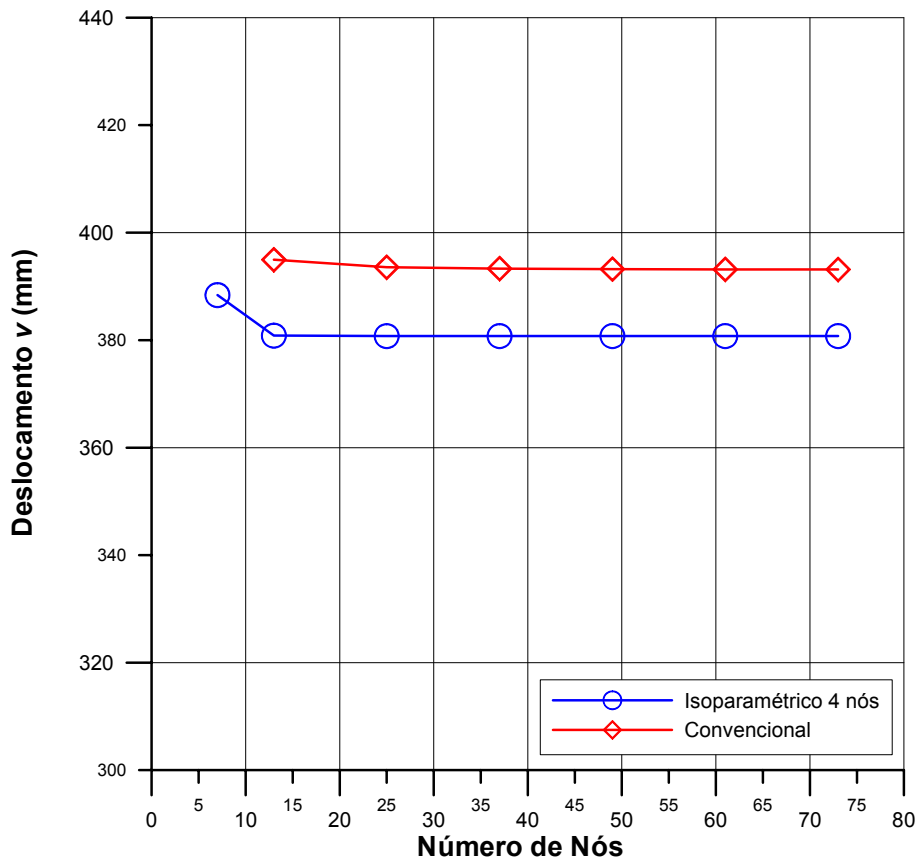


Figura 7.11 – Curva Deslocamento v (em B) versus Número de Nós

A Tabela 7.8 mostra os resultados numéricos do deslocamento v , para o último incremento de carga, com os quais foram traçadas as curvas do gráfico anterior. Os números entre parênteses mostram a relação das respostas com o modelo mais refinado (modelo 7). A diferença entre as soluções dos modelos 7 ficou próximo de 3%.

Este estudo mostra, mais uma vez, a maior capacidade de representação do problema oferecida pelo elemento isoparamétrico. Em termos de tempo de processamento, embora não tenha sido registrado, o elemento isoparamétrico é mais oneroso. Cabe salientar que as rotinas implementadas neste trabalho no PROSIM não estão otimizadas, o que contribui muito para o aumento do tempo de análise.

Tabela 7.8 – Resultados do deslocamento v no último incremento de carga (incremento 50)

| Modelo | Deslocamento v | |
|--------|----------------------|-----------------|
| | Isoparamétrico 4 nós | Convencional |
| 1 | 388,380 (1,020) | Não convergiu |
| 2 | 380,839 (1,000) | 394,964 (1,005) |
| 3 | 380,749 (1,000) | 393,559 (1,001) |
| 4 | 380,753 (1,000) | 393,304 (1,000) |
| 5 | 380,754 (1,000) | 393,214 (1,000) |
| 6 | 380,754 (1,000) | 393,173 (1,000) |
| 7 | 380,754 (1,000) | 393,151 (1,000) |

7.3.3.2 Esbeltez

Para finalizar este exemplo, foi realizado um estudo paramétrico onde se avaliou a capacidade do elemento isoparamétrico na representação de estruturas esbeltas (característica de dutos e *risers*). Neste sentido, variou-se o parâmetro L , comprimento da viga, obtendo-se coeficientes de esbeltez variando entre 1×10^2 e 1×10^9 . Os resultados foram confrontados com modelos semelhantes, construídos com o elemento convencional. Para este estudo, foram criados 4 modelos, sendo 2 com o elemento isoparamétrico, com 2 e 8 elementos, e 2 com o elemento convencional, com 6 e 24 elementos.

O gráfico da Figura 7.12 mostra o resultado deste estudo relacionando o coeficiente de esbeltez com o número médio de iterações para realizar toda a análise. Em geral, o elemento isoparamétrico fez mais iterações que o elemento convencional, porém resolveu praticamente todos os casos, com exceção do modelo mais refinado e mais esbelto. O resultado deste modelo com 2 elementos (nível de esbeltez 8) não foi colocado na curva para facilitar a visualização das demais curvas, porém o seu valor está na Tabela 7.9, que será apresentada adiante.

Cabe observar que este elemento isoparamétrico é sensível à definição da função de carga, podendo realizar uma análise ou não em função da forma de carregamento definida. Quase que a totalidade dos casos só roda com a função definida na Figura 7.7. Já com o elemento convencional ocorre o contrário, quase que a totalidade dos casos só roda com uma função linear. Esta observação foi feita quando se

tentaram viabilizar algumas análises que apresentavam dificuldade de realizar todos os incrementos de carga. Fica evidente assim, que as análises foram realizadas com funções de carregamento diferentes, embora tivessem o mesmo valor de carga no último incremento.

O modelo com elemento convencional com 6 elementos resolveu apenas os 3 primeiros níveis de esbeltez, provavelmente pelo baixo nível de gradação da malha. Com os modelos de 24 elementos todos os casos foram resolvidos. Em geral, este elemento resolveu os problemas com baixo número médio de iterações, independente do nível de esbeltez.

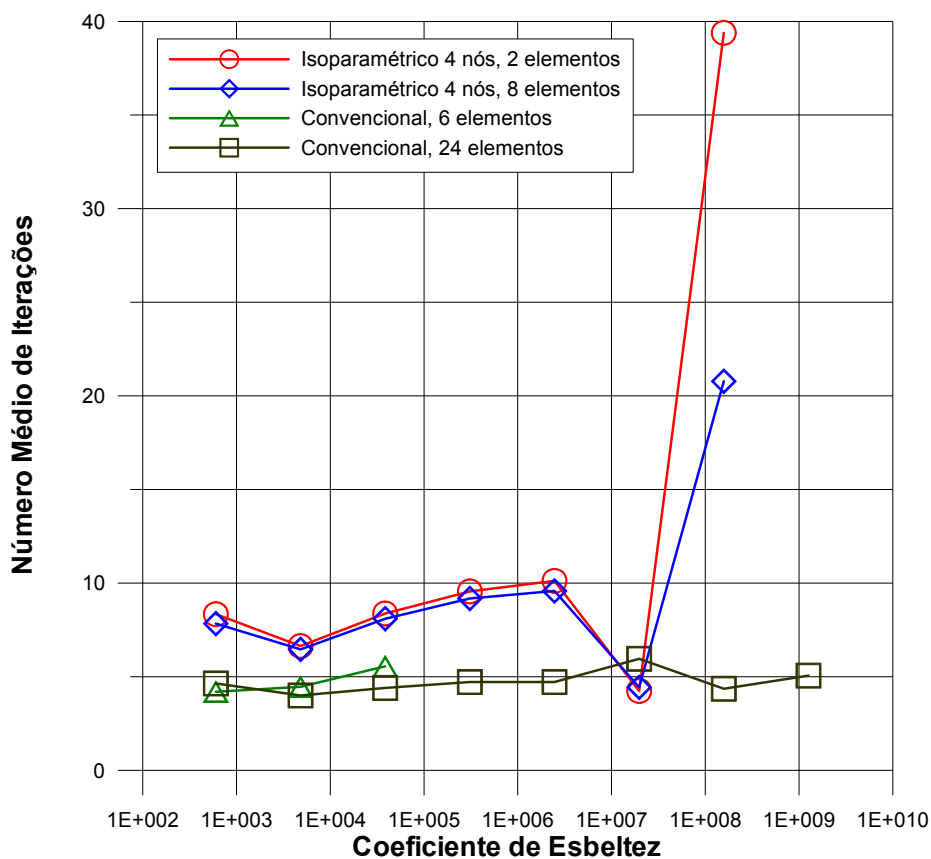


Figura 7.12 – Desempenho dos elementos isoparamétrico e de 2 nós com a variação do coeficiente de esbeltez da coluna de Euler

A Tabela 7.9 mostra o número médio de iterações para os 8 níveis de esbeltez. O caso com o elemento isoparamétrico que não convergiu poderia ter sido resolvido com mudanças na função de carga. A não convergência dos casos com o elemento convencional não está associada à função de carregamento, e sim ao refinamento.

Tabela 7.9 – Número médio de iterações para os 8 níveis de coeficientes de esbeltez

| Nível de esbeltez | Coeficiente de esbeltez | Número médio de iterações (50 incrementos) | | | |
|-------------------|-------------------------|---|--------------|--------------|--------------|
| | | Isoparamétrico | | 2 nós | |
| | | 2 elementos | 8 elementos | 6 elementos | 24 elementos |
| 1 | 602 | 8,34 | 7,84 | 4,20 | 4,64 |
| 2 | 4.814 | 6,64 | 6,46 | 4,46 | 4,00 |
| 3 | 38.513 | 8,38 | 8,10 | 5,56 | 4,40 |
| 4 | 308.104 | 9,56 | 9,18 | Não converge | 4,72 |
| 5 | 2.464.835 | 10,12 | 9,58 | Não converge | 4,72 |
| 6 | 19.718.684 | 4,24 | 4,44 | Não converge | 5,96 |
| 7 | 157.749.472 | 39,39 | 20,78 | Não converge | 4,36 |
| 8 | 1.261.995.782 | 85,95 | Não converge | Não converge | 5,06 |

7.4 Viga Balcão

A estrutura estudada neste caso é uma viga balcão com carga concentrada na extremidade. O desenho esquemático apresentado na Figura 7.13 mostra a representação espacial da estrutura e suas características físicas e geométricas.

Este caso foi selecionado por ser um modelo espacial, com todos os graus de liberdade, excluídos os do engaste, sendo calculados durante o carregamento. Este exemplo permite avaliar o cálculo de todos os coeficientes da matriz de rigidez, do vetor de esforços internos e das matrizes que atualizam o movimento da estrutura.

Este problema foi estudado por BENJAMIN [44] (elemento com seção retangular, Figura 7.13) e BATHE e BOLOURCHI [57], que utilizaram elementos finitos.

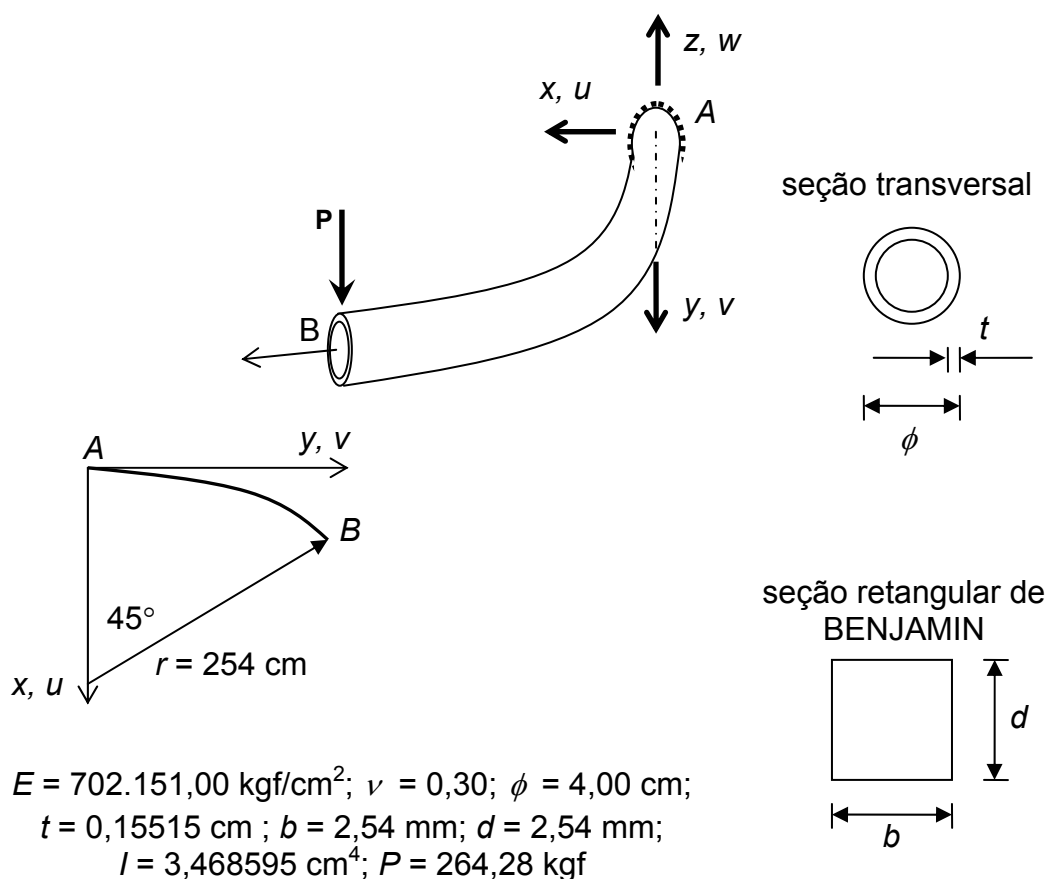


Figura 7.13 – Viga balcão

7.4.1 Descrição do Problema

7.4.1.1 Carregamento

A estrutura foi carregada em 60 incrementos iguais, seguindo a análise feita por BENJAMIN. A Figura 7.14 mostra a função de carregamento aplicada à estrutura.

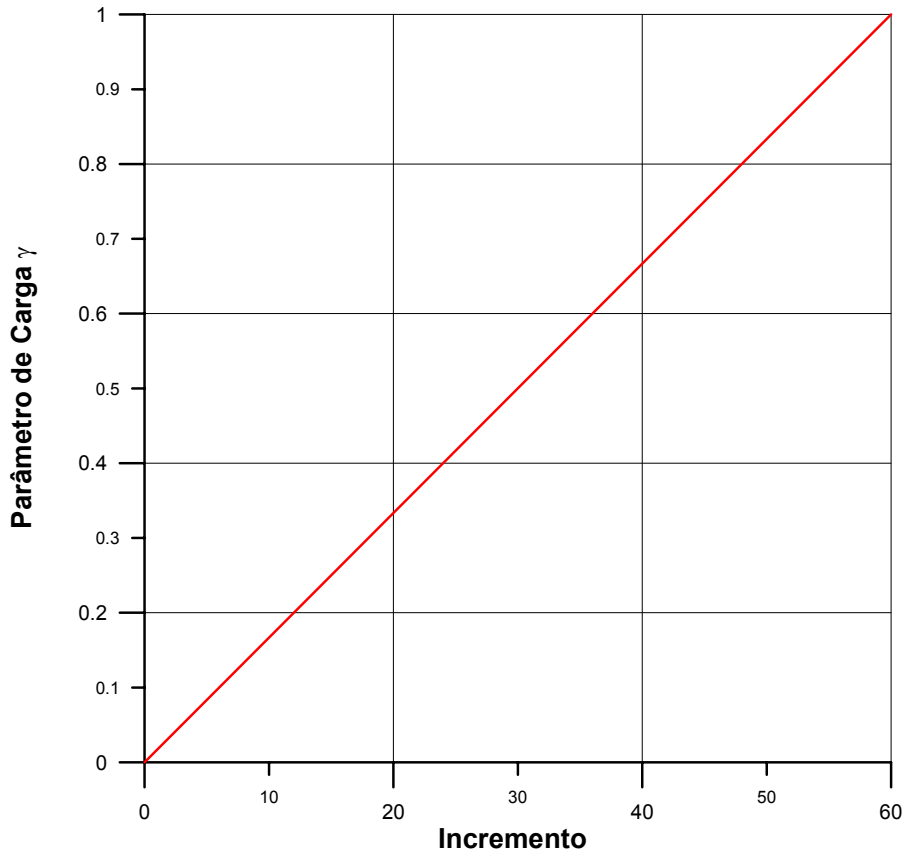


Figura 7.14 – Função de carregamento aplicada à carga P

7.4.1.2 Análise do Problema

Os modelos deste trabalho e o de BENJAMIN foram discretizados com 1 elemento. O modelo de BENJAMIN foi analisado com seção retangular. Foram utilizados 2 modelos de comparação com o elemento convencional, sendo discretizados um com 3 e outro com 12 elementos.

Neste caso foram aplicadas as tolerâncias utilizadas por BENJAMIN e por FREITAS [50]. A Tabela 7.10 mostra os valores utilizados nas análises.

Tabela 7.10 – Parâmetros de análise

| Elemento | Tolerância critério de força | Tolerância critério de deslocamento |
|----------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| Isoparamétrico 4 nós | 10^{-3} | 10^{-4} |
| Benjamin | Não | 10^{-4} |

7.4.2 Resultados Obtidos

Os gráficos das Figuras 7.15 e 7.16 mostram as configurações original (em vermelho) e deformadas, incrementos 30 e 60, nas vistas xy e yz , respectivamente.

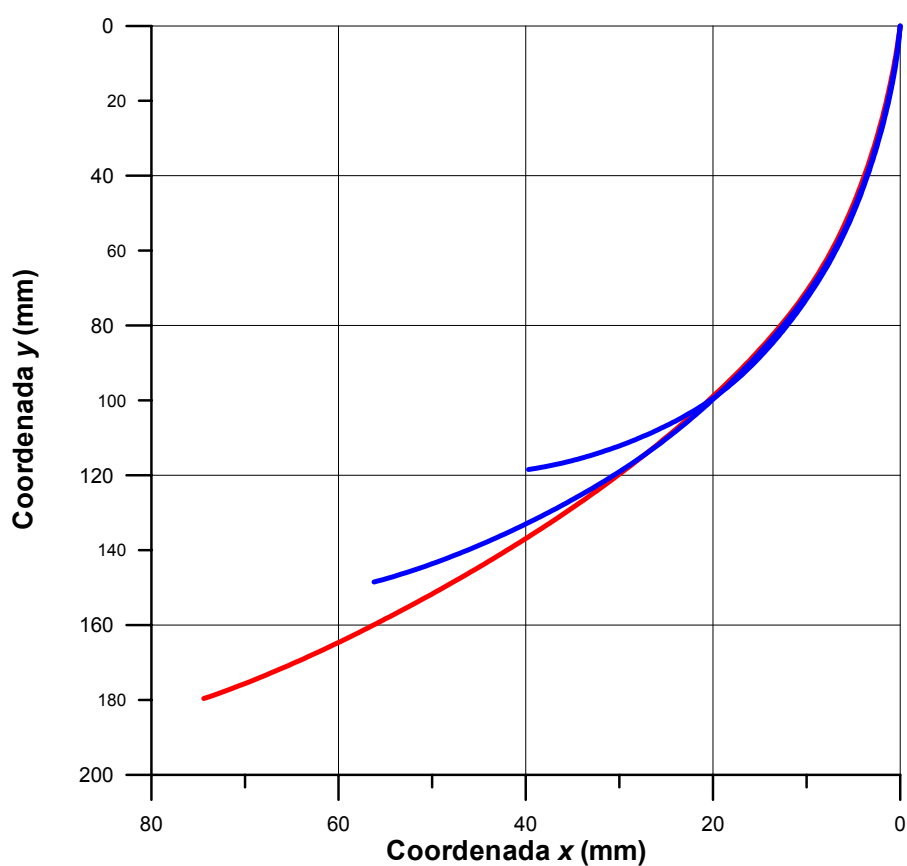


Figura 7.15 – Configurações original (vermelha) e deformadas (azul) (incrementos 30 e 60), vista xy

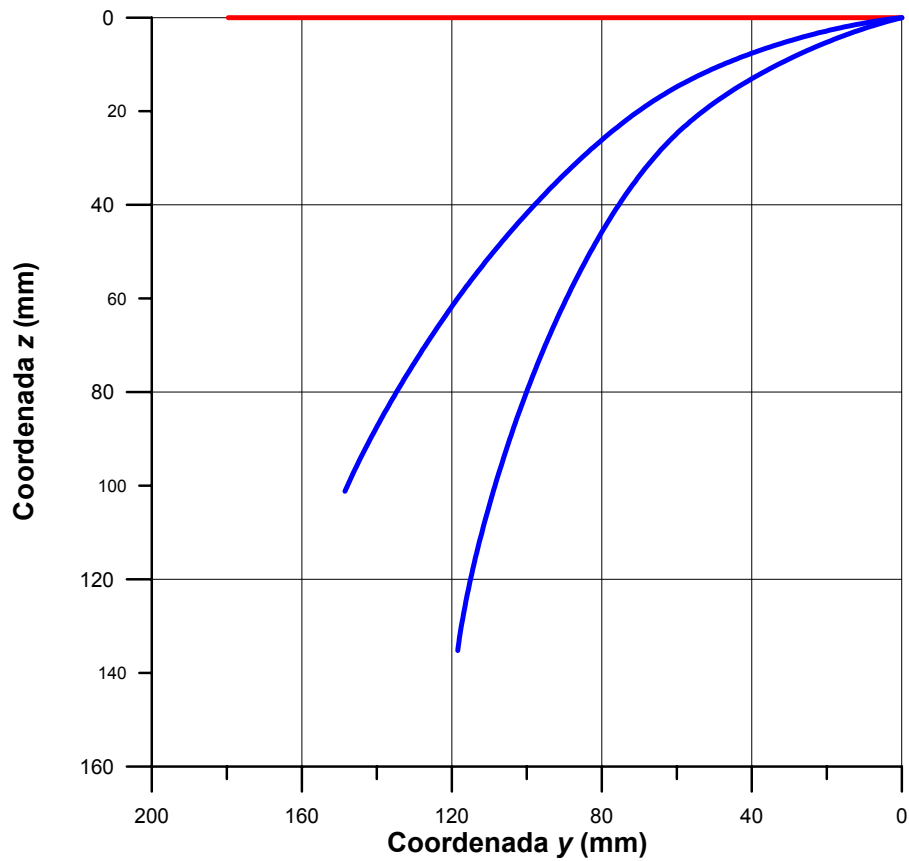


Figura 7.16 – Configurações original (vermelha) e deformadas (azul) (incrementos 30 e 60), vista yz

O gráfico da Figura 7.17 mostra as curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento u na extremidade da estrutura. Estas curvas mostram que todas as respostas se aproximam bem, exceto a de BATHE e BOLOURCHI, que apresenta uma pequena divergência no início do carregamento, até 0,4 do parâmetro de carga.

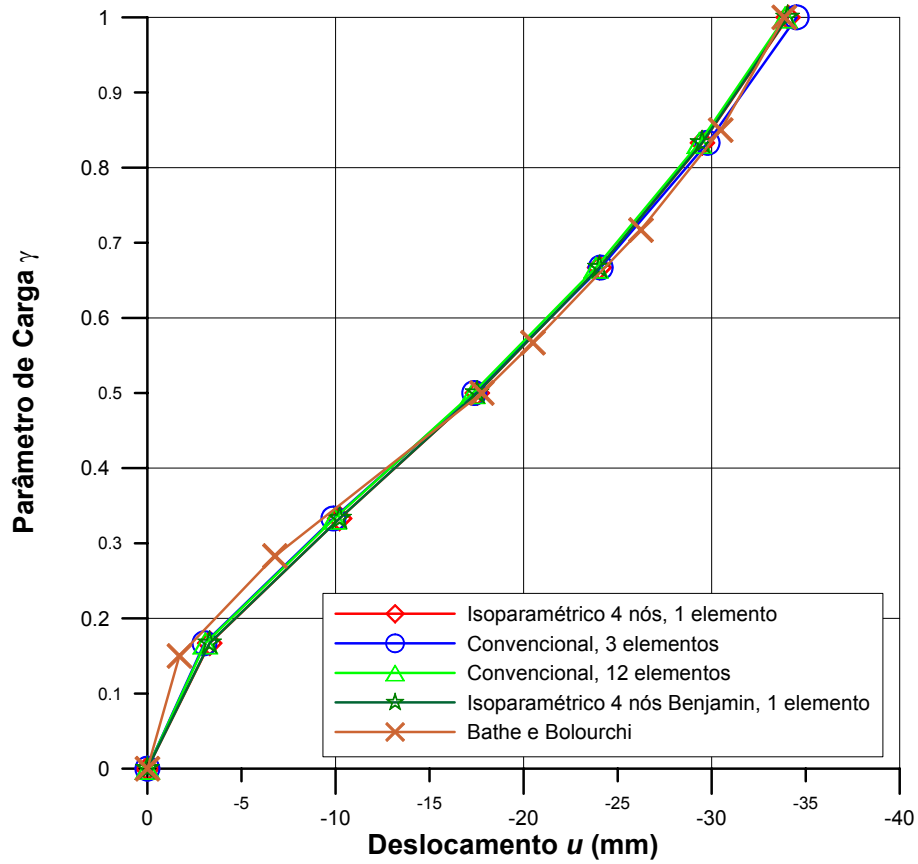


Figura 7.17 – Curva Carga versus Deslocamento u , no ponto de aplicação da carga

O Gráfico da Figura 7.18 mostra as curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v na extremidade da estrutura. Para este grau de liberdade os resultados se aproximaram bastante, sendo que a curva de BATHE e BOLOURCHI é a que mais se distingue das demais.

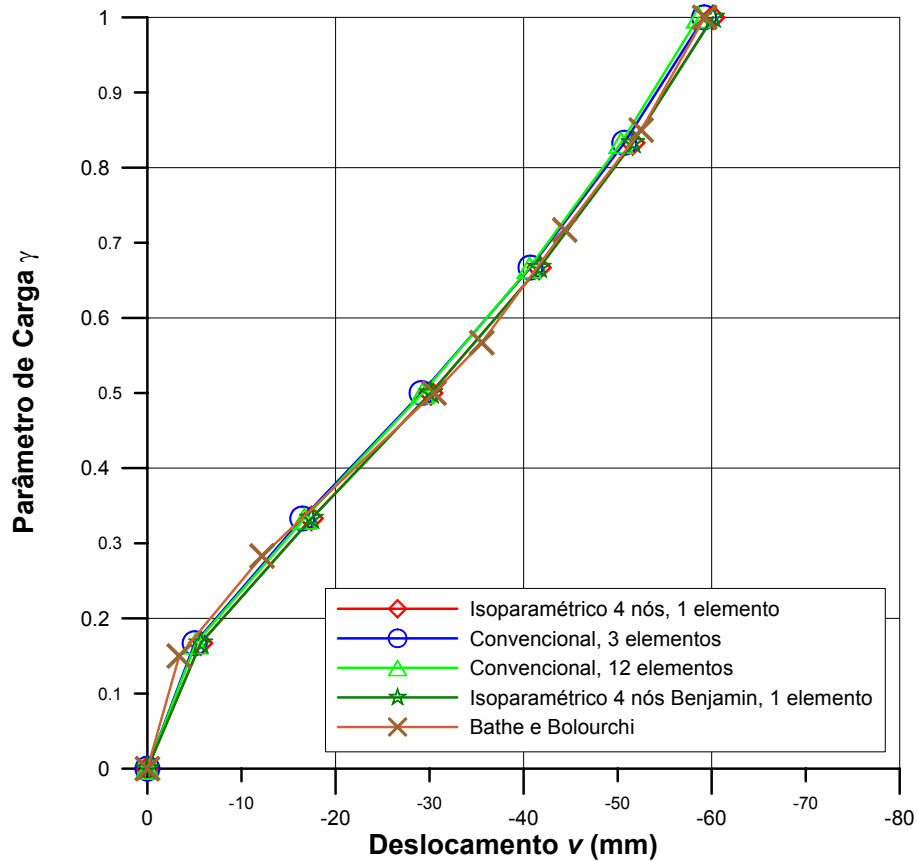


Figura 7.18 – Curva Carga versus Deslocamento v , no ponto de aplicação da carga

O gráfico Figura 7.19 mostra a curva Parâmetro de Carga versus Deslocamento w na extremidade da estrutura. Para este grau de liberdade, as curvas se aproximam mais que nos demais (u e v). Apenas a curva obtida com o elemento convencional com 3 elementos se afasta um pouco das outras soluções no trecho final da curva.

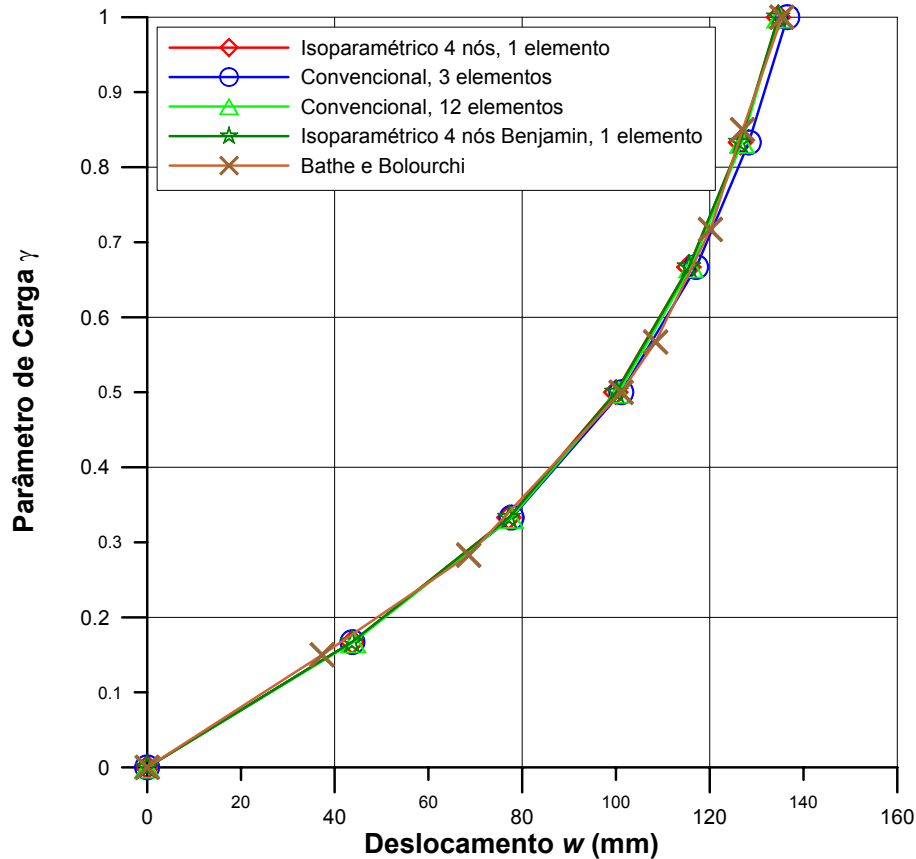


Figura 7.19 – Curva Carga versus Deslocamento w , no ponto de aplicação da carga

As Tabelas 7.10 a 7.12 mostram os resultados numéricos referentes aos deslocamentos u , v e w , respectivamente. Não se verifica uma aproximação bem definida do modelo com o elemento isoparamétrico com os modelos com o elemento convencional com 3 elementos e 12 elementos. Para o grau de liberdade u , na maioria dos pontos, a aproximação é maior com o modelo com 3 elementos. Quando se considera o grau de liberdade v , observa-se o mesmo comportamento. Já para o grau de liberdade w , em todos os pontos o elemento isoparamétrico se aproxima mais do modelo com 12 elementos. Quando se compara com a resposta de BATHE e BOLOURCHI o melhor resultado é do elemento isoparamétrico.

Tabela 7.11 – Resultados numéricos referentes ao deslocamento u na extremidade da estrutura

| Incremento | Parâmetro de Carga | Deslocamento u (mm) | | | | |
|------------|--------------------|-----------------------|------------------------------------|-------------------------------------|----------|-------------------|
| | | Elemento de 4 nós | Elemento de 2 nós, com 3 elementos | Elemento de 2 nós, com 12 elementos | Benjamin | Bathe e Bolourchi |
| -- | 0,150 | -- | -- | -- | -- | -1,702 |
| 10 | 0,167 | -3,546 | -3,033 | -3,081 | -3,302 | -- |
| -- | 0,283 | -- | -- | -- | -- | -6,782 |
| 20 | 0,333 | -10,727 | -9,889 | -9,937 | -10,211 | -- |
| 30 | 0,500 | -18,187 | -17,377 | -17,303 | -17,526 | -17,780 |
| -- | 0,567 | -- | -- | -- | -- | -20,498 |
| 40 | 0,667 | -24,712 | -24,098 | -23,844 | -24,028 | -- |
| -- | 0,717 | -- | -- | -- | -- | -26,238 |
| 50 | 0,833 | -30,159 | -29,780 | -29,339 | -29,489 | -- |
| -- | 0,850 | -- | -- | -- | -- | -30,480 |
| 60 | 1,000 | -34,673 | -34,516 | -33,904 | -34,036 | -33,858 |

Tabela 7.12 – Resultados numéricos referentes ao deslocamento v na extremidade da estrutura

| Incremento | Parâmetro de Carga | Deslocamento v (mm) | | | | |
|------------|--------------------|-----------------------|------------------------------------|-------------------------------------|----------|-------------------|
| | | Elemento de 4 nós | Elemento de 2 nós, com 3 elementos | Elemento de 2 nós, com 12 elementos | Benjamin | Bathe e Bolourchi |
| -- | 0,150 | -- | -- | -- | -- | -3,378 |
| 10 | 0,167 | -5,939 | -5,021 | -5,141 | -5,664 | -- |
| -- | 0,283 | -- | -- | -- | -- | -12,192 |
| 20 | 0,333 | -18,152 | -16,466 | -16,682 | -17,450 | -- |
| 30 | 0,500 | -31,119 | -29,146 | -29,264 | -30,150 | -30,480 |
| -- | 0,567 | -- | -- | -- | -- | -35,560 |
| 40 | 0,667 | -42,744 | -40,728 | -40,632 | -41,681 | -- |
| -- | 0,717 | -- | -- | -- | -- | -44,374 |
| 50 | 0,833 | -52,697 | -50,708 | -50,362 | -51,638 | -- |
| -- | 0,850 | -- | -- | -- | -- | -52,502 |
| 60 | 1,000 | -61,156 | -59,196 | -58,600 | -60,147 | -59,258 |

Tabela 7.13 – Resultados numéricos e analíticos referentes ao deslocamento w na extremidade da estrutura

| Incremento | Parâmetro de Carga | Deslocamento w (mm) | | | | |
|------------|--------------------|-----------------------|------------------------------------|-------------------------------------|----------|-------------------|
| | | Elemento de 4 nós | Elemento de 2 nós, com 3 elementos | Elemento de 2 nós, com 12 elementos | Benjamin | Bathe e Bolourchi |
| -- | 0,150 | -- | -- | -- | -- | 37,338 |
| 10 | 0,167 | 44,847 | 43,793 | 43,993 | 43,688 | -- |
| -- | 0,283 | -- | -- | -- | -- | 68,580 |
| 20 | 0,333 | 78,498 | 77,749 | 77,658 | 77,216 | -- |
| 30 | 0,500 | 101,170 | 101,1476 | 100,558 | 100,076 | 101,092 |
| -- | 0,567 | -- | -- | -- | -- | 108,458 |
| 40 | 0,667 | 116,509 | 117,108 | 116,046 | 115,57 | -- |
| -- | 0,717 | -- | -- | -- | -- | 120,142 |
| 50 | 0,833 | 127,294 | 128,337 | 126,889 | 126,492 | -- |
| -- | 0,850 | -- | -- | -- | -- | 127,000 |
| 60 | 1,000 | 135,206 | 136,557 | 134,792 | 134,620 | 135,382 |

7.5 Arco Abatido Bi-Rotulado sob Carga Concentrada Excêntrica

Este caso mostra um arco abatido bi-rotulado submetido a uma carga concentrada excêntrica, conforme mostra a Figura 7.20. Este modelo foi estudado por RODRIGUES [62], e tem como objetivo mostrar a aplicação da técnica de controle de comprimento de arco ao elemento isoparamétrico.

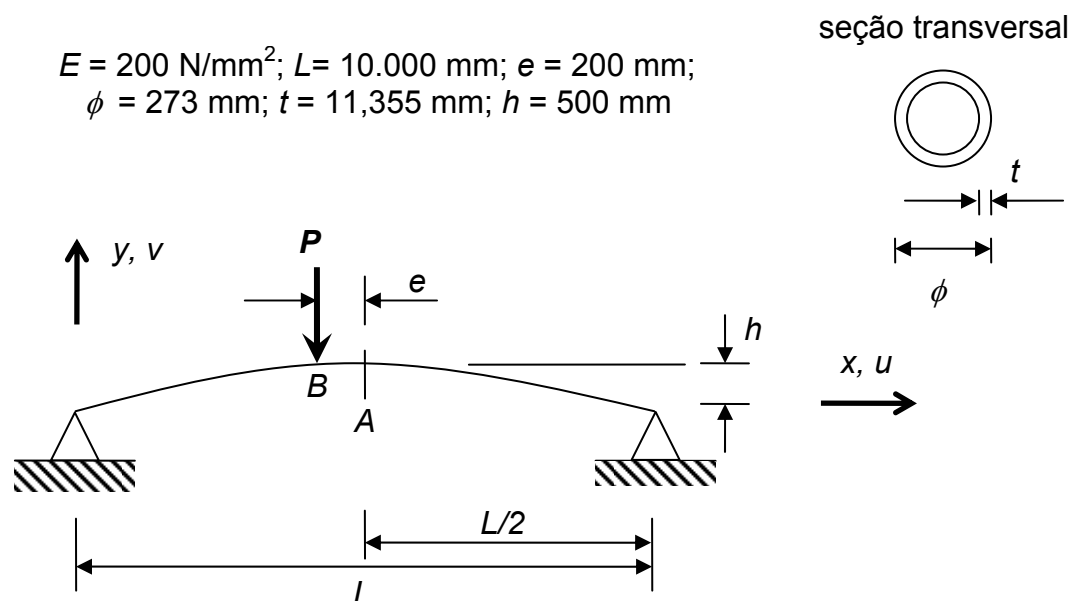


Figura 7.20 – Arco abatido

7.5.1 Descrição do Problema

7.5.1.1 Carregamento

A carga foi aplicada conforme os parâmetros da Tabela 7.14, que foram baseados no trabalho de RODRIGUES, que utilizou, além da técnica de controle de comprimento de arco, técnica adaptativa para definir automaticamente os comprimentos de arco após o primeiro.

Tabela 7.14 – Parâmetros utilizados no *Arch-Lengh*

| Incremento inicial do parâmetro de carga $\delta\lambda$ | Número de incrementos de carga | Deslocamento tangente máximo | ζ (da estratégia adaptativa) |
|--|--------------------------------|------------------------------|------------------------------------|
| -400 | 100 | 1,0 | 0,1 |

7.5.1.2 *Análise do Problema*

Este exemplo foi modelado com 50 elementos, todos com o mesmo tamanho. Foram utilizados como parâmetros de convergência para os critérios de força e deslocamento 0,01 e 0,001, respectivamente.

7.5.2 **Resultados Obtidos**

A resposta deste exemplo está de acordo com a obtida por RODRIGUES, que obteve no primeiro ponto limite de carga o parâmetro igual a -1.206,72, enquanto o elemento isoparamétrico, -1.190,79. A diferença destes dois valores em relação a resposta de RODRIGUES é de 1,3 %. Cabe ressaltar que as duas respostas, além de utilizarem elementos diferentes, as propriedades geométricas, como área da seção transversal e inércia, não foram exatamente iguais. A Figura 7.21 mostra as configurações original e deformadas nos incrementos 47 e 134, correspondentes aos dois primeiros pontos limites.

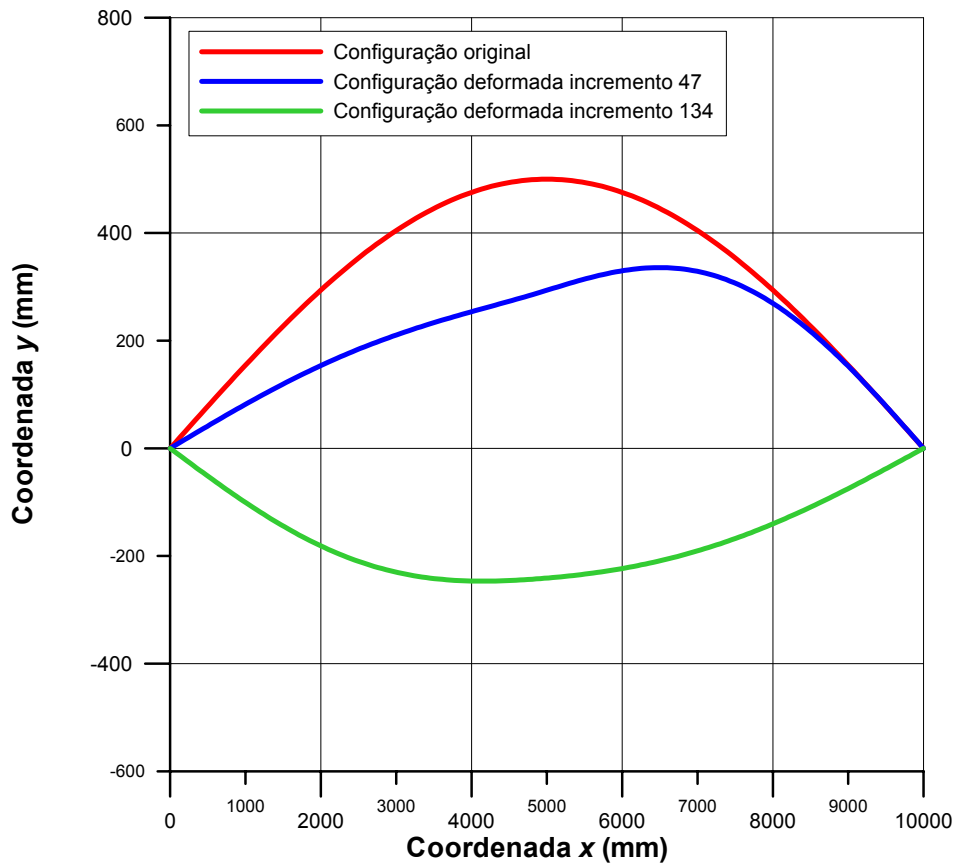


Figura 7.21 – Configurações original e deformadas nos incrementos 47 e 134

A relação entre o parâmetro de carga e o deslocamento v no ponto B pode ser vista na Figura 7.22. Como se verifica, trata-se de uma boa aplicação para se testar a técnica de comprimento de arco, com solução que não seria obtida nem com controle de carga nem com controle de deslocamento [61], as quais não permitem redução do parâmetro de carga nem do deslocamento, respectivamente.

A Figura 7.23 a curva Parâmetro de Carga versus Rotação em B .

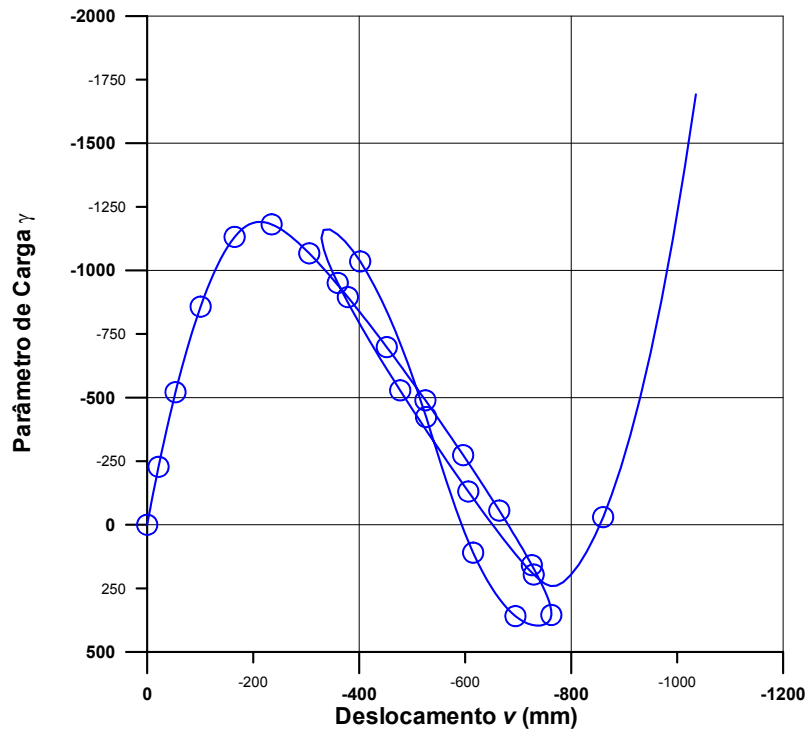


Figura 7.22 – Curva Parâmetro de Carga versus Deslocamento v , em B

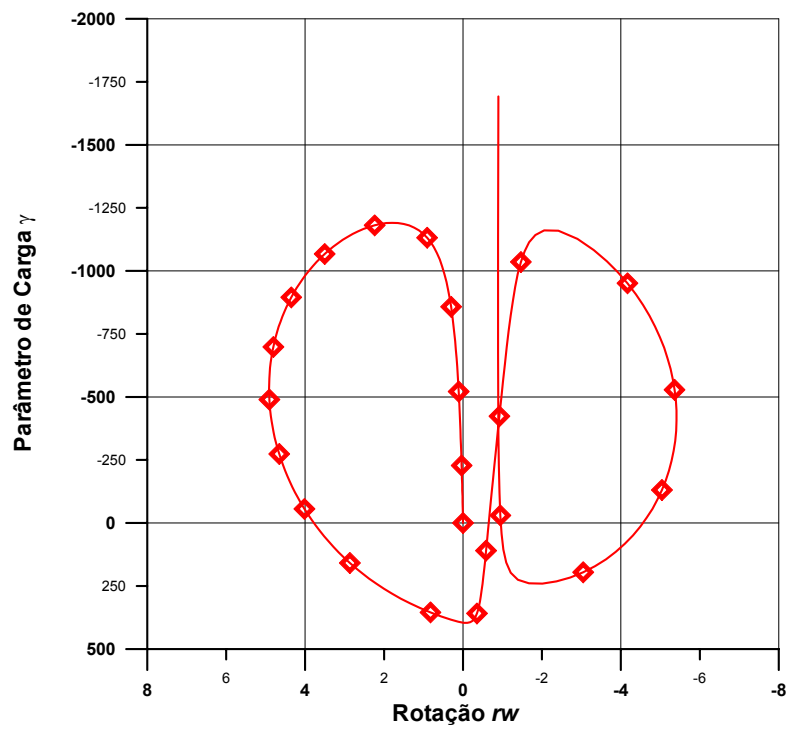


Figura 7.23 – Curva Parâmetro de Carga versus Rotação rw , em B

7.5.3 Verificação da Gradação da Malha

Para verificação do refinamento da malha, foi gerado um outro modelo com 4 elementos, mantendo-se todas as outras características do anterior, com 50 elementos. O modelo foi criado com malha não uniforme, com 2 elementos de 4.800 mm, sendo 1 em cada extremidade do modelo, e dois elementos centrais, com 200 mm cada. A Figura 7.24 mostra esquematicamente a discretização.

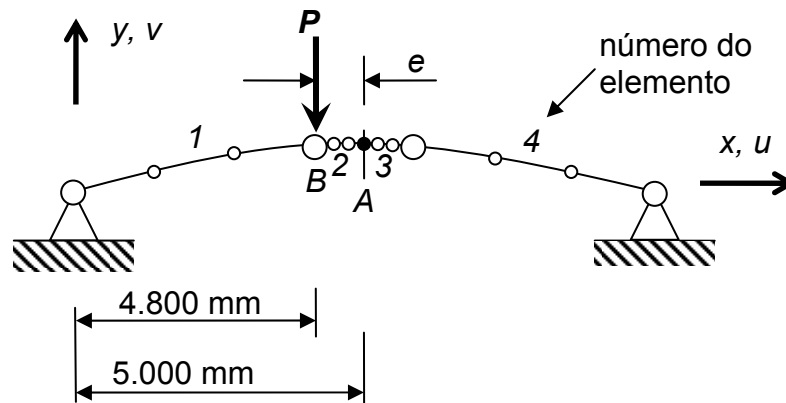


Figura 7.24 – Esquema de refinamento do modelo

A comparação das respostas dos dois modelos pode ser vista na Figura 7.25, onde se verificam as relações entre os parâmetros de carga e os deslocamentos v , no ponto de aplicação da carga. Estes resultados mostram que o elemento isoparamétrico é capaz de resolver problemas fortemente não-lineares utilizando poucos elementos, com malha não uniforme, sem apresentar alterações sensíveis na resposta.

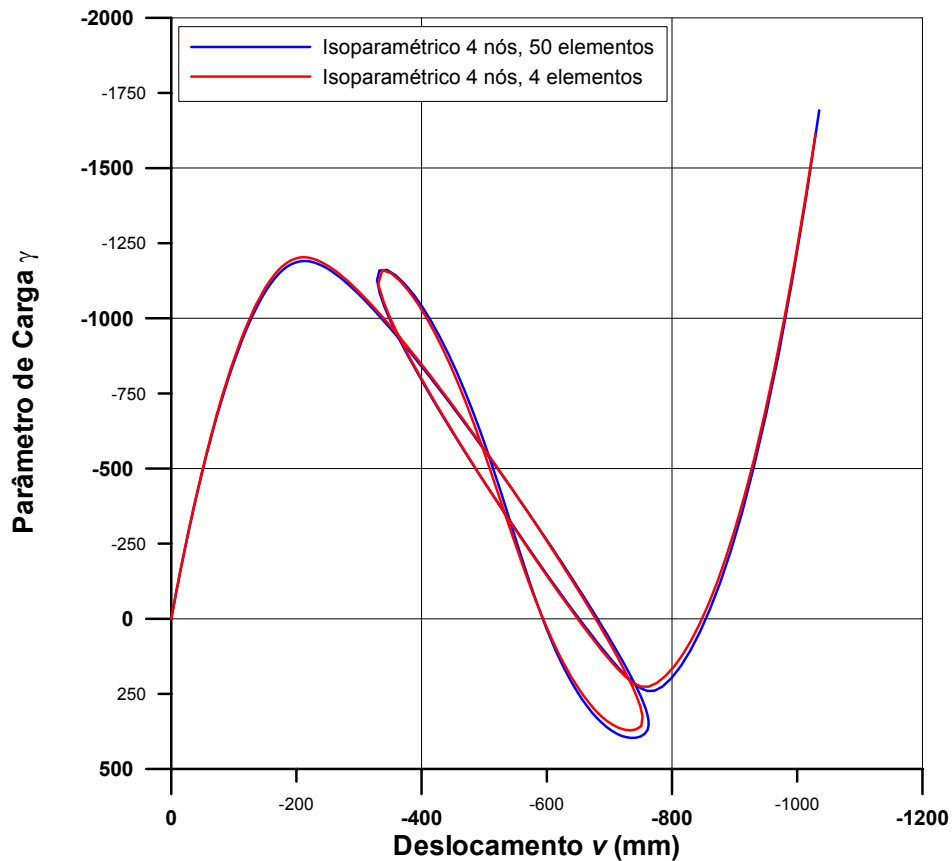


Figura 7.25 – Curva Parâmetro de Carga versus Deslocamento v , em B , com o elemento isoparamétrico

Uma avaliação semelhante foi feita com o elemento convencional, conforme se verifica na Figura 7.26. Utilizaram-se dois modelos, com 12 e 150 elementos. O modelo com 150 elementos apresentou solução próxima à obtida com o modelo equivalente com o elemento isoparamétrico, e realizou toda a análise. Já o modelo com 12 elementos, apesar das várias tentativas de ajuste nos parâmetros de análise, não chegou ao final da análise. Este problema não se deve à técnica de controle de comprimento de arco, mas sim ao refinamento insuficiente.

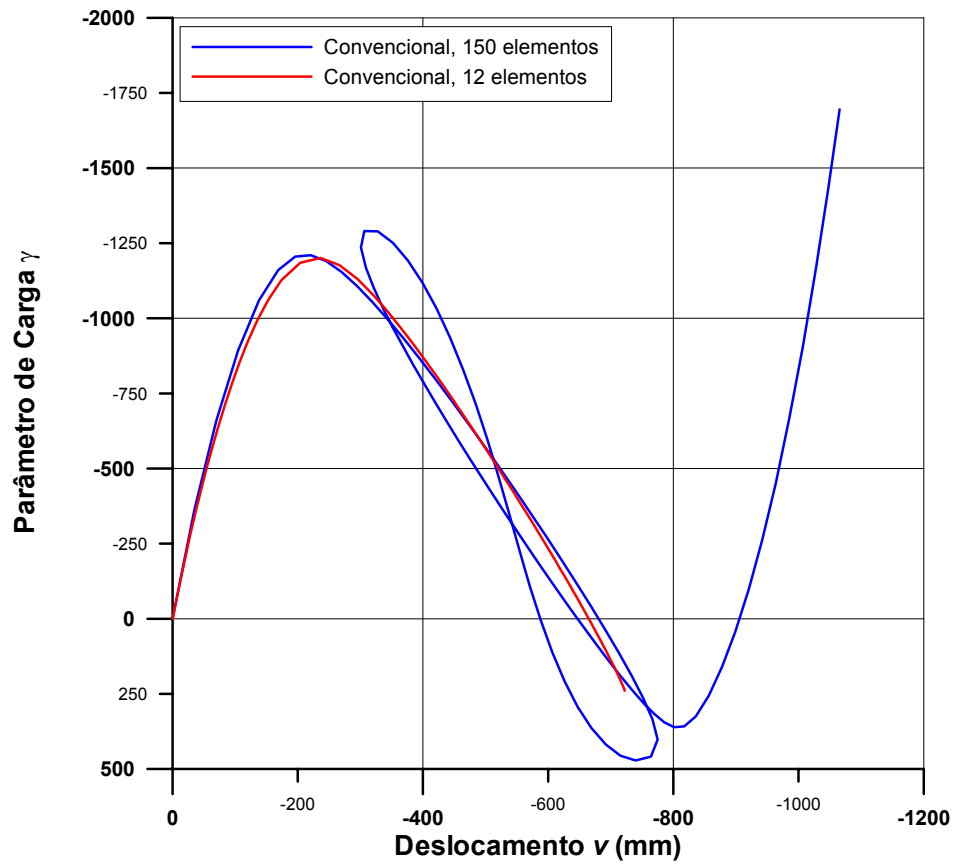


Figura 7.26 – Curva Parâmetro de Carga versus Deslocamento v , em B , com o elemento convencional

7.6 Duto Aquecido Parcialmente Enterrado Sujeito a Flambagem Lateral

Este caso trata de um modelo de duto parcialmente enterrado, sujeito a flambagem lateral, mostrando uma aplicação do elemento isoparamétrico com carregamento térmico e elementos escalares para representação do solo. O desenho da Figura 7.27 mostra esquematicamente o duto com extremidades restringidas e imperfeição inicial. Este modelo foi estudado por BENJAMIN [44] utilizando o método analítico de HOBBS, e, neste trabalho, este estudo foi refeito (item 2.2.3.2), com o objetivo de consolidar o conhecimento sobre o problema.

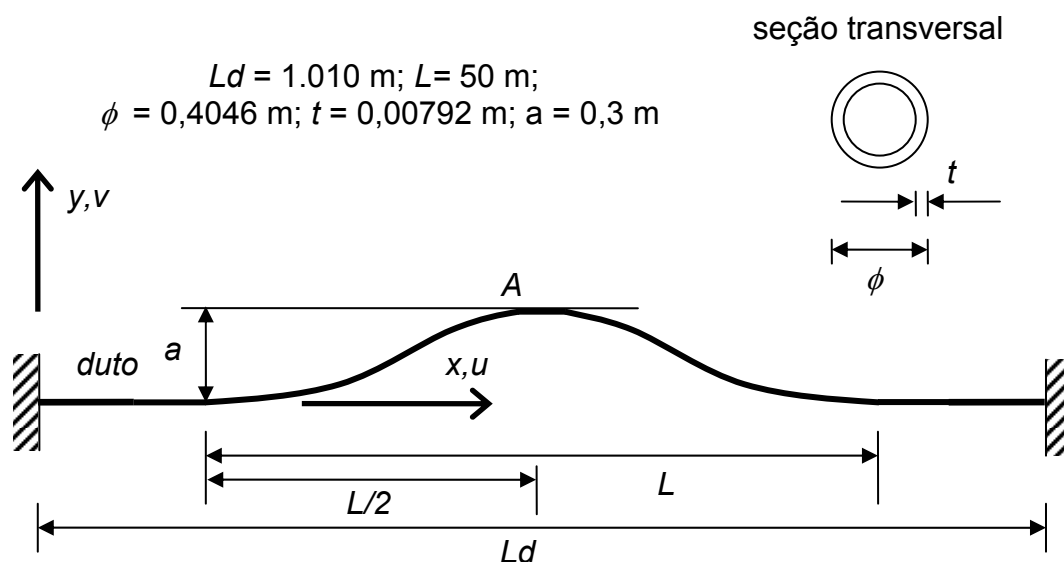


Figura 7.27 – Desenho esquemático do duto enterrado, com imperfeição inicial, submetido a um carregamento térmico

Conforme se verifica no desenho, o duto possui na parte central uma imperfeição inicial que foi gerada por uma função polinomial de quarto grau, definida pela Equação (7.2) [21], onde a_i é a amplitude da imperfeição e L_i metade do comprimento da meia onda. Neste caso, foi adotado 0,3 m como valor da amplitude. O gráfico da Figura 7.28 mostra metade da forma da configuração inicial do duto no trecho central, com 25 m de comprimento.

$$y(x) = a_i \left[4 \left(1 - \frac{|x|}{L_i} \right)^3 - 3 \left(1 - \frac{|x|}{L_i} \right)^4 \right] \quad (7.2)$$

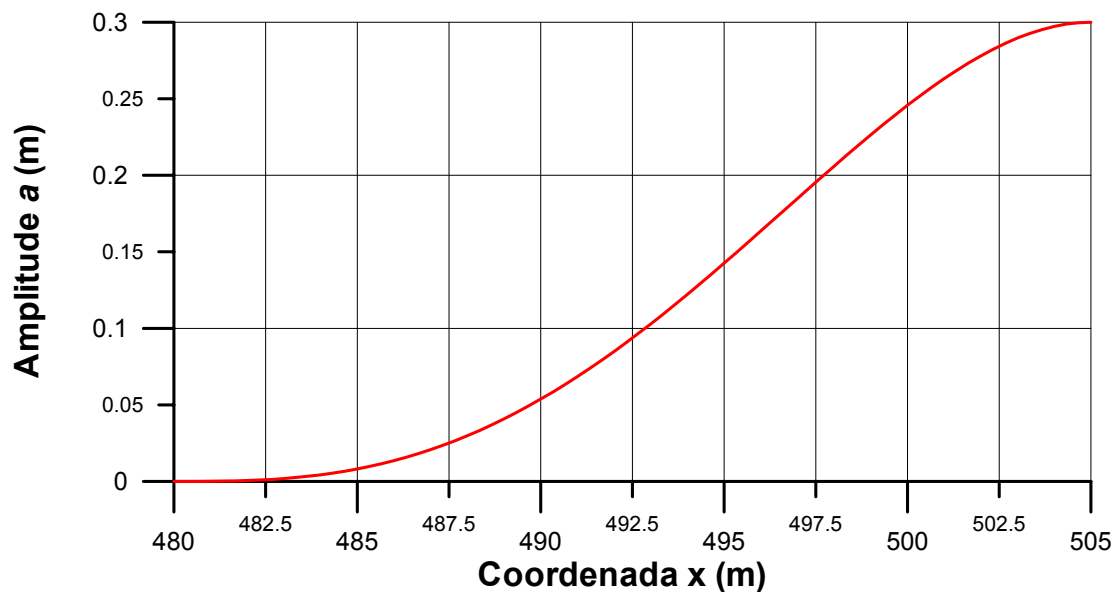


Figura 7.28 – Forma da imperfeição inicial no trecho central

O resultado deste exemplo foi comparado com a solução numérica utilizando o programa ABAQUS [1] com aplicação do elemento, também isoparamétrico, de 2 nós, PIPE31.

7.6.1 Descrição do Problema

7.6.1.1 Carregamento Térmico

Foi aplicado ao duto um carregamento térmico uniformemente distribuído ao longo de toda estrutura, em 500 passos, de acordo com a função de carregamento apresentada na Figura 7.29, com 50 °C de variação de temperatura. No método analítico de Hobbs Modificado, a temperatura de flambagem foi de 34,79 °C (modo 3 de flambagem). É importante ressaltar que, por se tratar de uma estrutura bastante esbelta e de um problema com alto grau de não linearidade, o incremento de temperatura deve ser pequeno, da ordem de 0,1 °C/incremento ou menor, evitando assim problemas de convergência e respostas inconsistentes. Fez-se esta observação em análises preliminares e em problemas estudados por outros autores [63]. O carregamento térmico, na forma como foi implementado, ainda não pode dispor da técnica de *arc-length* (descrita no capítulo 6), disponível no PROSIM [24]. A solução com o programa ABAQUS foi obtida utilizando-se o método de RIKS com comprimento de arco inicial de 0,001 e estratégia adaptativa para determinação dos comprimentos posteriores.

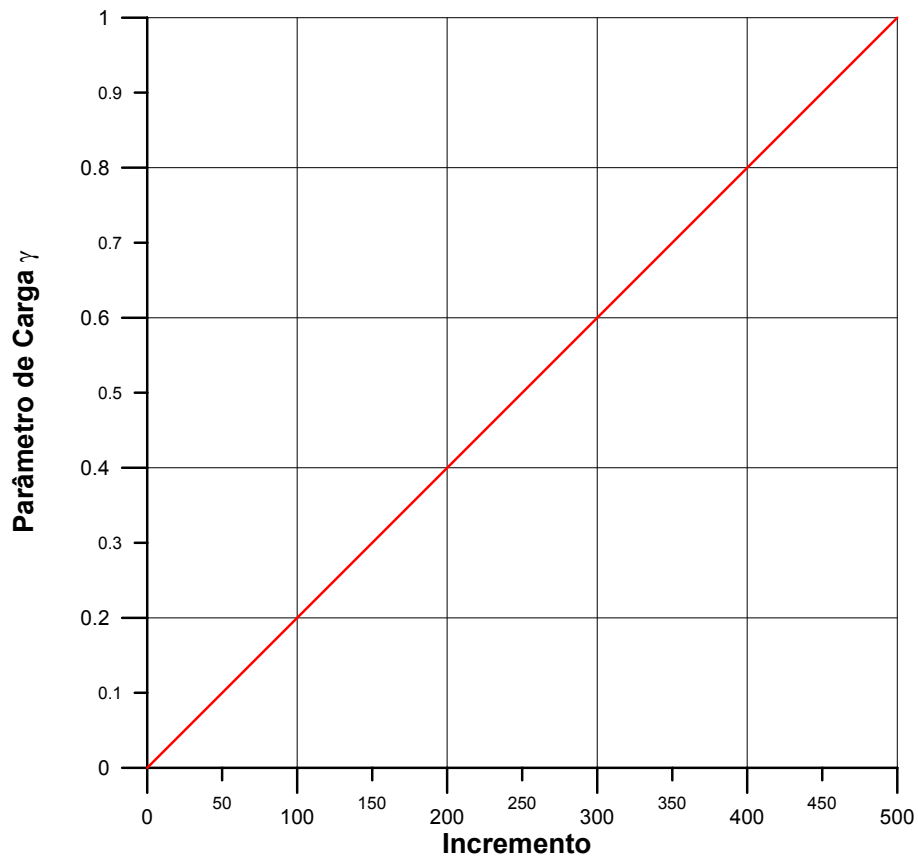


Figura 7.29 – Função de carregamento aplicada, com variação de temperatura de 50 °C

7.6.1.2 *Materiais que Caracterizam a Estrutura*

O duto é uma estrutura tubular de aço revestida com concreto. Este revestimento não foi considerado no modelo. A Tabela 7.15 mostra as propriedades físicas e geométricas que caracterizam o duto.

Tabela 7.15 – Características físicas e geométricas do duto

| Característica | Unidade | -- |
|---|---------------------|--------------------|
| Tipo de aço | -- | API 5L X 52 |
| Módulo de elasticidade E | MPa | 200.000 |
| Coefficiente de Poisson ν | -- | 0,3 |
| Coefficiente de dilatação térmica α | 1/°C | 1,19 E-5 |
| Diâmetro externo D_e | m | 0,4064 |
| Espessura t | m | 0,00792 |
| Área da seção transversal A | m ² | 0,0099147 |
| Momento de inércia I | m ⁴ | 0,00019687 |
| Peso submerso do duto W_{sub} | kN/m | 1,457 |
| Temperatura de montagem do duto T_{mont} | °C | 20 |
| Temperatura máxima de operação na parede de aço $T_{aço}$ | °C | 60 |
| Pressão interna de operação do duto P_{oper} | Kgf/cm ² | 35 |

7.6.1.3 Representação do Solo

O solo, constituído de uma argila orgânica, foi representado através de molas elasto-plásticas, sendo a reação axial R_{axi} calculada a partir da resistência não-drenada do solo S_u ($R_{axi} = A_{lateral} S_u$), tomando-se para S_u o valor de 1,4 kPa. A reação do solo R_{lat} foi determinada a partir da curva da reação do solo em função do deslocamento lateral do duto, usando um modelo não-linear de elementos finitos. Adotou-se para R_{lat} o valor da reação correspondente ao deslocamento de 12 mm, a partir do qual considera-se que o solo rompeu, tal como realizado por AMARAL e COSTA [34]. As curvas que representam as reações lateral e axial do solo estão na Figura 7.30.

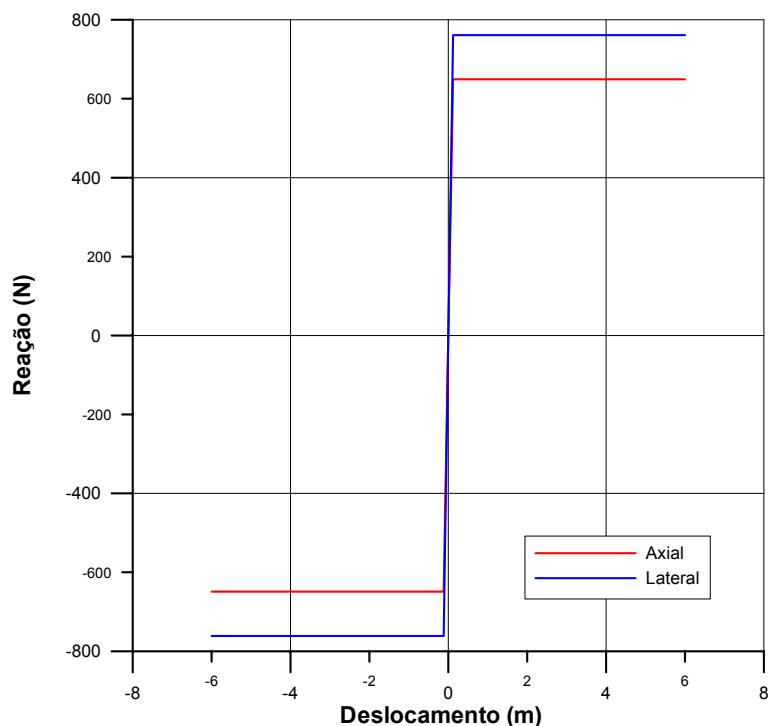


Figura 7.30 – Curvas Reações Axial e Lateral versus Deslocamento, para representação do solo

As reações axial e lateral do solo foram calculadas para uma penetração do duto no solo de 0,10 m.

A Tabela 7.16 mostra os dados utilizados na definição dos elementos escalares aplicados na representação deste solo.

Tabela 7.16 – Reações axial e lateral do duto

| R_{axi} (kN/m) | u (m) | R_{lat} (kN/m) | v (m) |
|------------------|---------|------------------|---------|
| -649,1 | -6,0 | -761,1 | -6,0 |
| -649,1 | -0,012 | -761,1 | -0,012 |
| 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 649,1 | 0,012 | 761,1 | 0,012 |
| 649,1 | 6,0 | 761,1 | 6,0 |

7.6.1.4 Análise do Problema

O modelo foi dividido em três regiões de refinamento, sendo a primeira, região *A*, abrangendo quase todo o trecho reto; a segunda, região *B*, de transição, no final do trecho reto e início do trecho com imperfeição, e a terceira; região *C*,

abrangendo todo trecho com imperfeição inicial. A Figura 7.31 mostra esquematicamente como foi dividido o modelo.

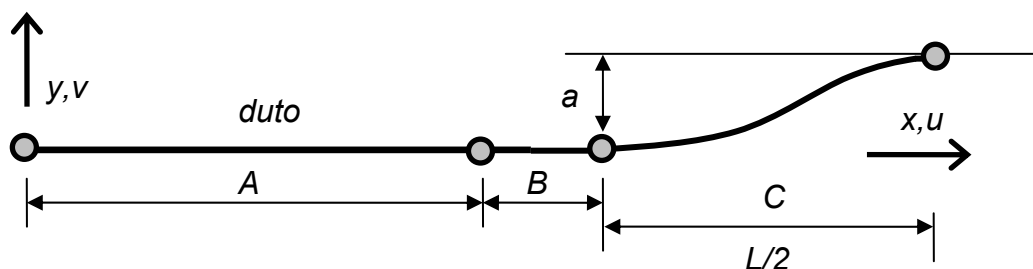


Figura 7.31 – Esquema do refinamento aplicado ao duto

As três regiões do modelo estão refinadas de acordo com dados da Tabela 7.17, que mostra o comprimento dos trechos, o número de elementos utilizados em cada um deles e o tamanho dos elementos. Procurou-se discretizar melhor a região curva, sujeita a grandes rotações e deslocamentos. Foi analisada apenas metade do modelo, tirando proveito da simetria do problema.

Tabela 7.17 – Dados do refinamento do modelo

| Número de elementos / Tamanho do elemento | | |
|---|-----------------|-----------------|
| Região A (400 m) | Região B (80 m) | Região C (25 m) |
| 130 / 3,08 m | 40 / 2,00 m | 25 / 1,00 m |

A Tabela 7.18 mostra os parâmetros de análise utilizados para os modelos com os elementos isoparamétrico e PIPE31. Para o elemento isoparamétrico, foram utilizados valores baseados nos casos anteriores, e que foram avaliados em análises preliminares. No modelo com o PIPE31, foram utilizados valores oferecidos pelo próprio programa.

Tabela 7.18 – Parâmetros de análise

| Elemento | Tolerância critério de força | Tolerância critério de deslocamento |
|----------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| Isoparamétrico 4 nós | 0,01 | 0,001 |
| PIPE31 (ABAQUS) | 0,01 | 0,005 |

7.6.1.5 Resultados Obtidos

A Figura 7.32 mostra a configuração original e deformadas nos incrementos 250 e 500, correspondentes a 25 e 50 °C de variação de temperatura, respectivamente, no intervalo entre 385 e 505 m do comprimento do duto. Conforme pode ser visto, ocorreu a formação do modo 3 de flambagem, o que era esperado. A formação deste modo se deve à forma da configuração inicial e à condição de contorno dada pela representação do solo, segundo BENJAMIN e CUNHA [31]. Uma outra consideração importante é que o duto se desloca muito mais entre os incrementos 250 e 500 do que entre a configuração original e o incremento 250, mostrando a não-linearidade do problema.

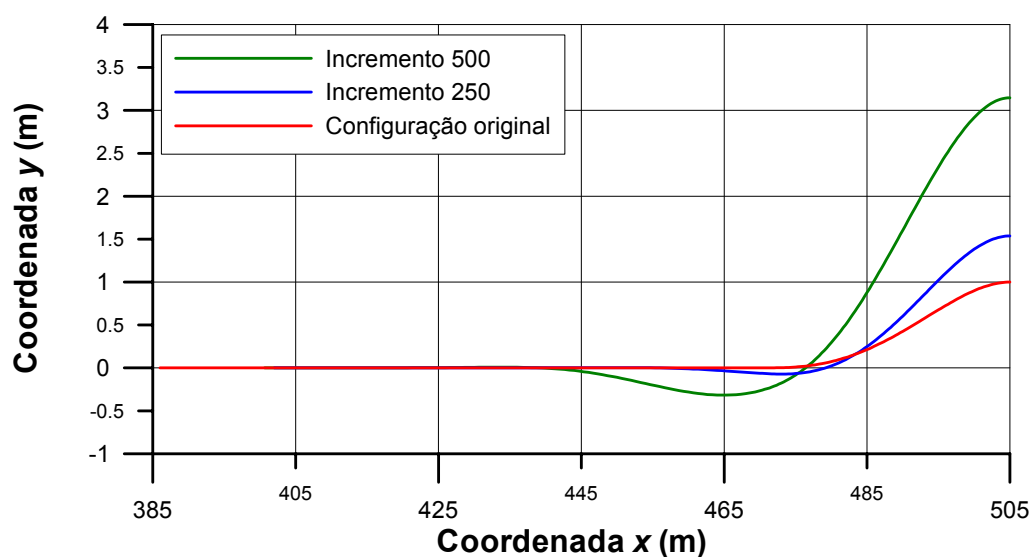


Figura 7.32 – Configurações original e deformadas nos incrementos de carga 250 e 500

A força compressiva ao longo do duto está apresentada na Figura 7.33. Este gráfico mostra que esta força cai na medida em que se aproxima do ponto central do duto. Este comportamento se dá pela instabilidade da estrutura, junto com a contenção aos deslocamentos, imposta pelo solo.

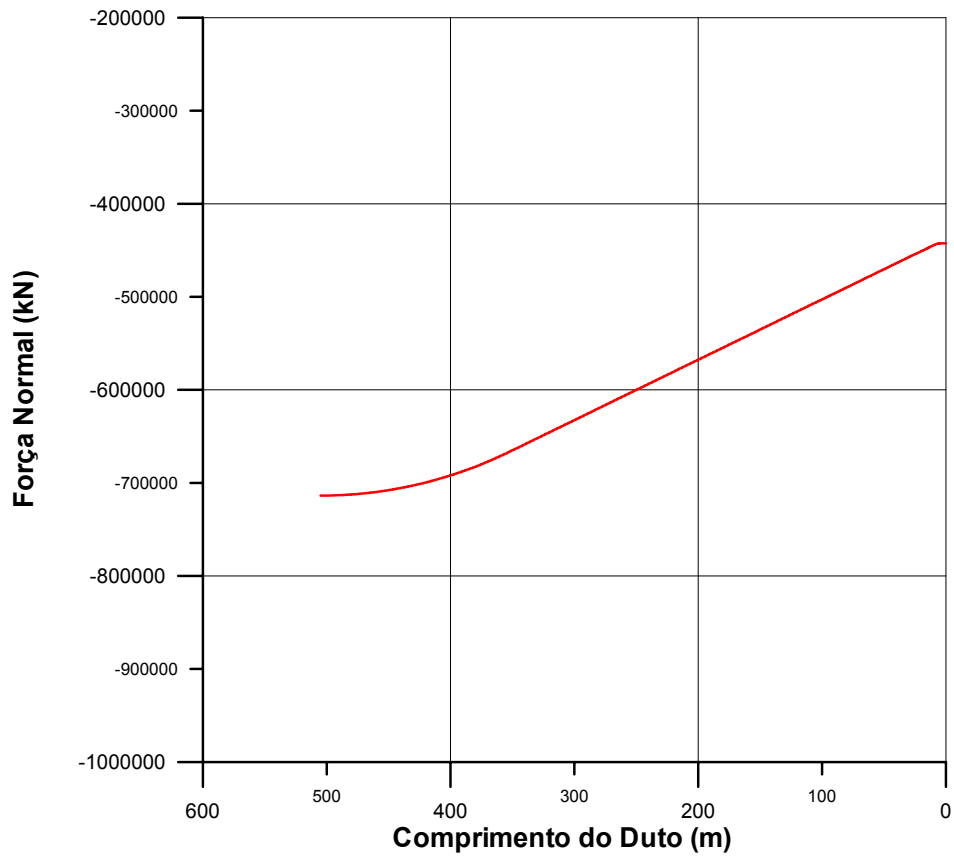


Figura 7.33 – Curva Força Normal versus Comprimento do Duto

A curva de momento ao longo do duto pode ser vista na Figura 7.34. Como se pode observar, o momento é praticamente nulo ao longo de quase todo o duto, assumindo valores diferentes no trecho central, onde ocorrem grandes deslocamentos e rotações. Esta resposta está diretamente associada à forma assumida pelo duto após o carregamento térmico.

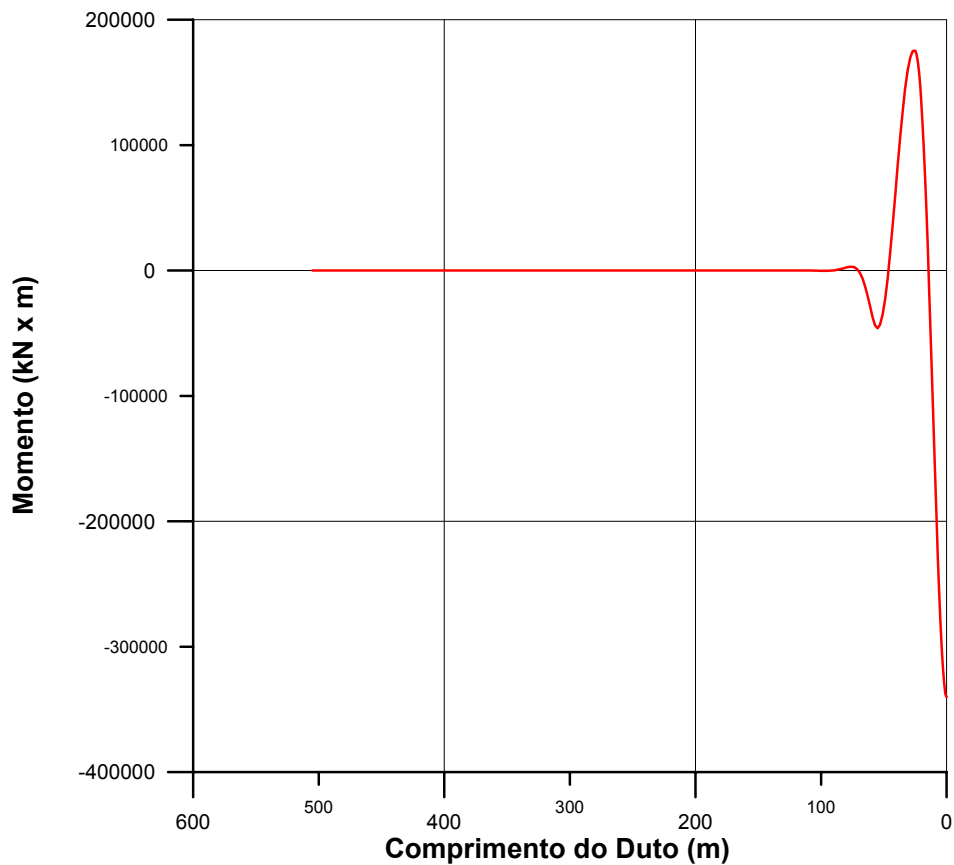


Figura 7.34 – Curva Momento versus Comprimento do Duto

O gráfico da Figura 7.35 mostra a curva Força Normal versus Deslocamento v no ponto central do duto, em A , comparando as respostas dos dois elementos. Ambas apresentam pontos de máximo e mostram o alívio da força compressiva no momento em que o duto apresenta grandes deslocamentos. Este é um comportamento característico deste tipo de problema [18].

As duas respostas se aproximam bastante, apresentando, no ponto máximo, valores de força compressiva iguais a 607.300 e 617.161 kN para os elementos isoparamétrico e PIPE31, respectivamente. A diferença entre estes valores em relação ao valor obtido com o elemento isoparamétrico é de 1,6 %.

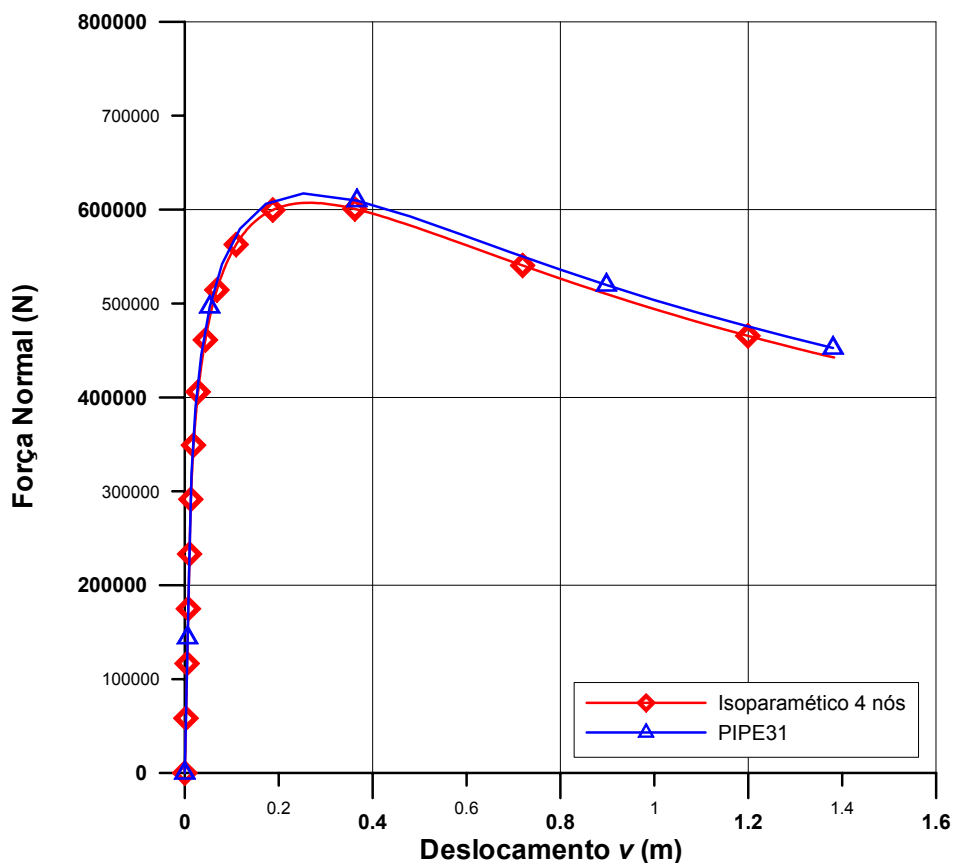


Figura 7.35 – Curvas Força Normal versus Deslocamento v , no ponto A

A Figura 7.36 apresenta as curvas que relacionam o parâmetro de carga com o deslocamento v (em A), obtidas com os elementos isoparamétrico e PIPE31, e a retro-analisada. Verifica-se que estas estão sobrepostas até o valor do parâmetro de cargas atingir 0,5, e a partir deste ponto afastam-se ligeiramente. Para verificar se o resultado do parâmetro de carga com o elemento isoparamétrico estava correto, além da comparação com o elemento PIPE31, foi realizada uma retro-análise, ou seja, a partir dos deslocamentos e das reações em um determinado elemento, foi calculado o parâmetro de carga ao longo de toda trajetória de equilíbrio. A Equação (7.3) determina a temperatura atuante no elemento, onde a primeira parcela é função do deslocamento ΔL e a segunda da força normal P . O parâmetro de carga foi calculado dividindo o ΔT atuando no elemento em cada incremento de carga pelo ΔT (50 °C) máximo que se pretendia aplicar. Para esta verificação foi escolhido o primeiro elemento localizado no lado totalmente engastado. Fez-se a mesma verificação com outros elementos e chegou-se à mesma resposta.

$$\Delta T = \frac{\Delta L}{\alpha L} + \frac{P}{E\alpha A} \quad (7.3)$$

sendo:

ΔL – alongamento do elemento;

α – coeficiente de expansão térmica;

E – módulo de elasticidade;

P – força normal atuando no elemento;

A – área da seção transversal do elemento.

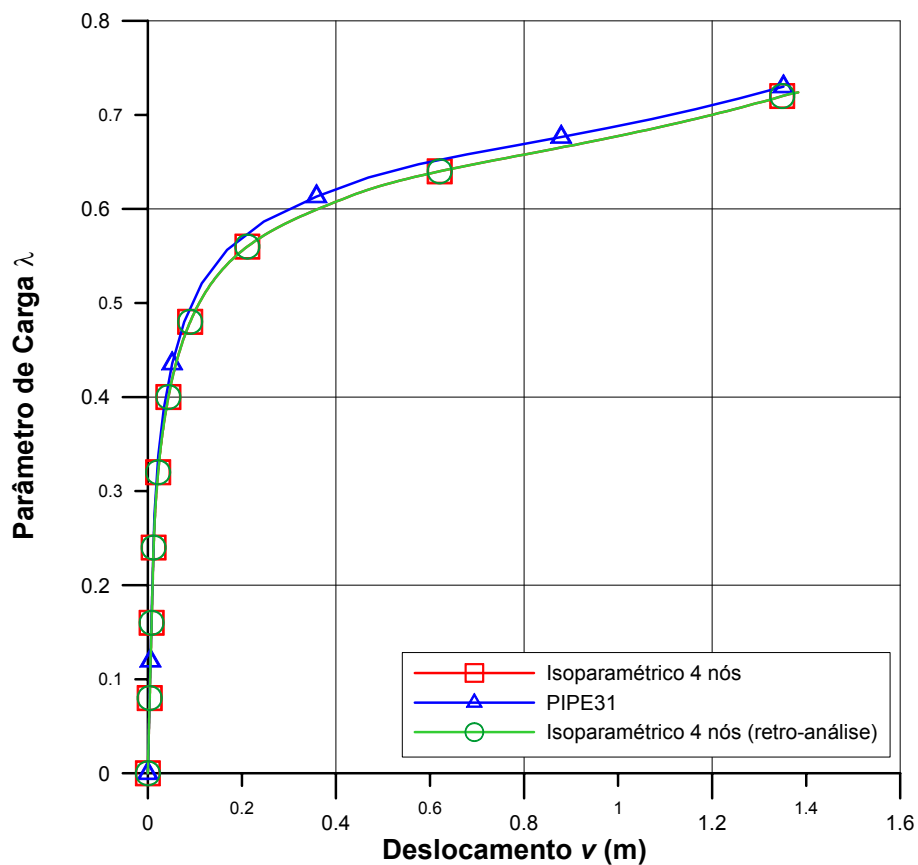


Figura 7.36 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v , no ponto A

Os resultados apresentados validam a implementação do carregamento térmico através de comparações com resultados do programa ABAQUS, que vem sendo

amplamente utilizado na solução de problemas de flambagem de dutos aquecidos. O resultado da retro-análise também compartilha desta validação, mostrando o alto grau de exatidão da solução.

Continuando este caso, a seguir serão apresentados estudos de sensibilidade à gradação da malha, a amplitude da imperfeição inicial e a variação da extensão do comprimento da imperfeição inicial.

7.6.2 Sensibilidade à Gradação da Malha

Este estudo tem como objetivo verificar a capacidade do elemento isoparamétrico de representação do problema de flambagem de dutos aquecidos relacionado à quantidade de elementos do modelo. Mantendo-se a divisão do modelo em 3 regiões, foram definidos 7 níveis de refinamento, de acordo com a Tabela 7.19, onde podem ser vistos o número de nós e a distância entre estes. O modelo 1, já analisado no item anterior, foi considerado como ponto de partida neste estudo. Os modelos de 2 a 6 apresentam refinamento inferior ao modelo 1, mantendo uma relação próxima de 1,3 entre as distâncias entre nós de um determinado modelo e o anterior, considerando-se as 3 regiões. O modelo 7 não seguiu esta relação.

Tabela 7.19 – Dados de refinamento do modelo

| Malha (número de nós) | Número de nós / Distância entre nós | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------|--------------------|
| | Região A (400 m) | Região B (80 m) | Região C (25 m) |
| 1 (586) | 391 / 1,026 m | 121 / 0,667 m | 76 / 0,333 m |
| 2 (451) | 301 / 1,333 m | 94 / 0,860 m | 58 / 0,439 m |
| 3 (394) | 232 / 1,732 m | 73 / 1,111 m | 46 / 0,556 m |
| 4 (265) | 178 / 2,260 m | 55 / 1,481 m | 34 / 0,758 m |
| 5 (208) | 139 / 2,898 m | 43 / 1,905 m | 28 / 0,926 m |
| 6 (160) | 106 / 3,810 m | 25 / 2,424 m | 22 / 1,190 m |
| 7 (73) | 49 / 8,333 m | 16 / 5,333 m | 10 / 2,778 m |

Para todos níveis de refinamento, foram gerados modelos idênticos para o ABAQUS, utilizando o elemento PIPE31. Estas análises foram realizadas utilizando o método de RIKS, com o objetivo de obter a solução após ponto limite, que é característico deste tipo de problema, quando se tem imperfeição com amplitude

relativamente pequena. As tolerâncias e o incremento inicial do parâmetro de carga foram os mesmos utilizados no estudo anterior.

Usuários do programa ABAQUS geralmente realizam este tipo de análise utilizando o elemento isoparamétrico de 2 nós, PIPE31 [1], adotando 1,00 m como tamanho máximo do elemento. No estudo com o elemento isoparamétrico, adotou-se como ponto de partida 1,00 m como o menor tamanho de elemento, no nível de refinamento 1, na região *C*, o que equivale a um elemento de 2 nós com 0,333 m. As regiões *B* e *A* estavam menos refinadas, com elementos de 2,00 e 3,08 m, respectivamente.

Este estudo foi realizado para dois níveis de amplitude de imperfeição, 0,1 e 0,3 m, com extensão *L* do trecho imperfeito igual a 50 m. A inclusão deste parâmetro permite verificar mais um possível fator que possa estar associado ao refinamento.

Os valores dos pontos limites obtidos nas curvas com os parâmetros da carga correspondem às variações de temperatura críticas, ou ΔT críticos.

7.6.2.1 *Resultados Obtidos*

Os resultados foram agrupados de acordo com tipo de elemento. No final deste estudo, é apresentada a comparação destes resultados. Todas as curvas mostradas estão relacionadas ao deslocamento v , em *A*, no ponto central do duto.

7.6.2.1.1 Resultados Obtidos com o Elemento Isoparamétrico

Em nenhum dos casos chegou-se ao fim da análise, finalizando após atingir o número máximo de 180 iterações. As análises com amplitude da imperfeição igual a 0,1 m não avançaram, pois atingiram pontos limites, e o programa não dispõe ainda de técnica de continuação para se obterem soluções após estes pontos. Mesmo assim, os resultados indicam que o elemento isoparamétrico pode representar o problema com poucos elementos, como os casos do nível de refinamento 6, com 53 elementos e 160 nós, que apresentou solução semelhante as dos modelos mais refinados.

7.6.2.1.1.1 Resultados com Amplitude de Imperfeição de 0,1 m

O gráfico da Figura 7.37 apresenta as curvas Tensão Normal versus Deslocamento v . Como pode ser verificado, todos os 7 níveis de refinamento foram suficientes para analisar o problema, porém o nível 7 apresentou resultado que se diferencia um pouco dos demais.

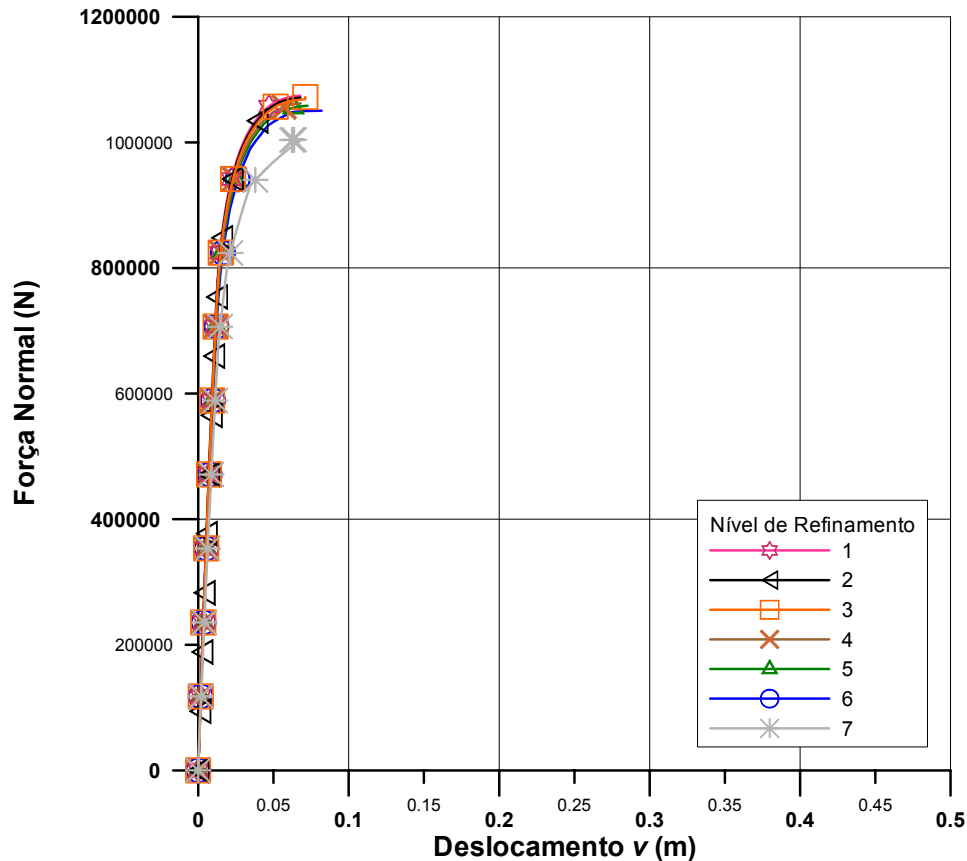


Figura 7.37 – Curvas Força Normal versus Deslocamento v , no ponto A , com o amplitude de imperfeição de 0,1 m, utilizando o elemento isoparamétrico

As curvas da Figura 7.38 mostram a relação entre o parâmetro de carga e o deslocamento v . Verifica-se que o parâmetro de carga tende a apresentar valores maiores nos modelos mais refinados. Neste gráfico, a curva com o modelo 7 também apresentou resultado que se diferencia dos demais. Estas análises pararam após atingirem o ponto crítico, embora não se observem as trajetórias pós-críticas, o que indica que os valores máximos obtidos para os parâmetros de carga correspondem aos ΔT críticos. Nas comparações com as respostas do programa ABAQUS, apresentadas mais adiante, confirmam-se a existência destes pontos.

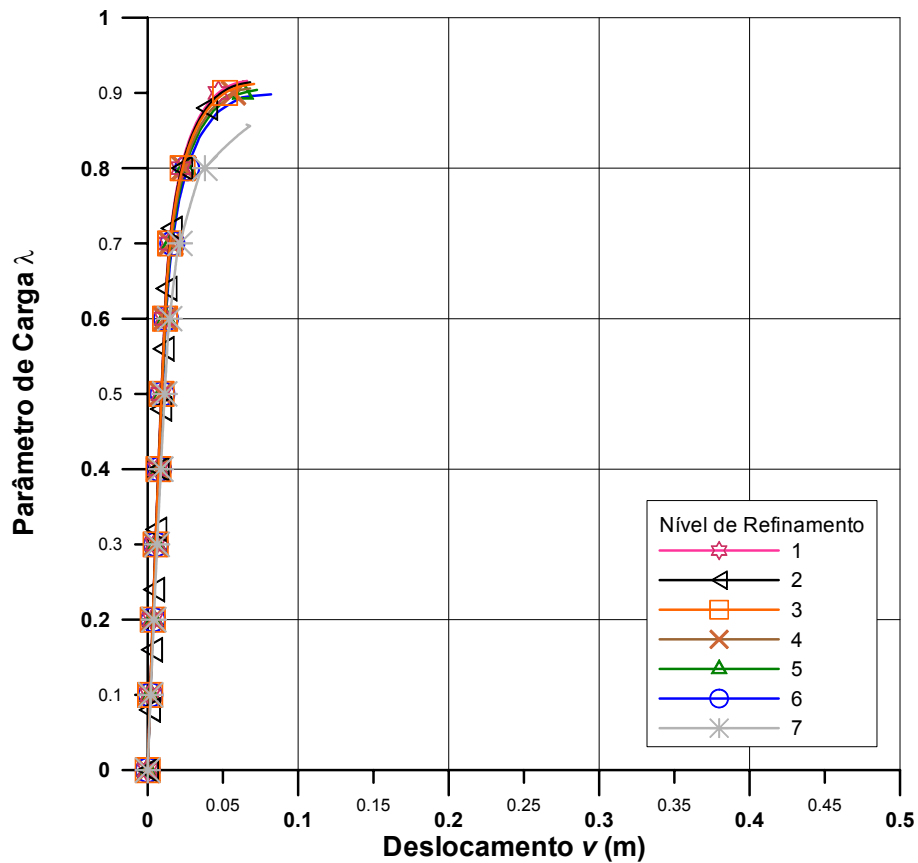


Figura 7.38 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v , no ponto A , com o amplitude de imperfeição de 0,1 m, utilizando o elemento isoparamétrico

7.6.2.1.1.2 Resultados com Amplitude de Imperfeição de 0,3 m

O gráfico da Figura 7.39 apresenta as curvas que relacionam a força normal com o deslocamento v . Estes resultados indicam, como já visto anteriormente, que os modelos mais refinados tendem a apresentar valores de força normal máxima maiores, embora entre os níveis de refinamento 1 e 6 não apresentem grande variações. Todas as curvas apresentam pontos de máximo, com exceção do nível de refinamento 7, porém estes pontos não estão associados a ΔT críticos.

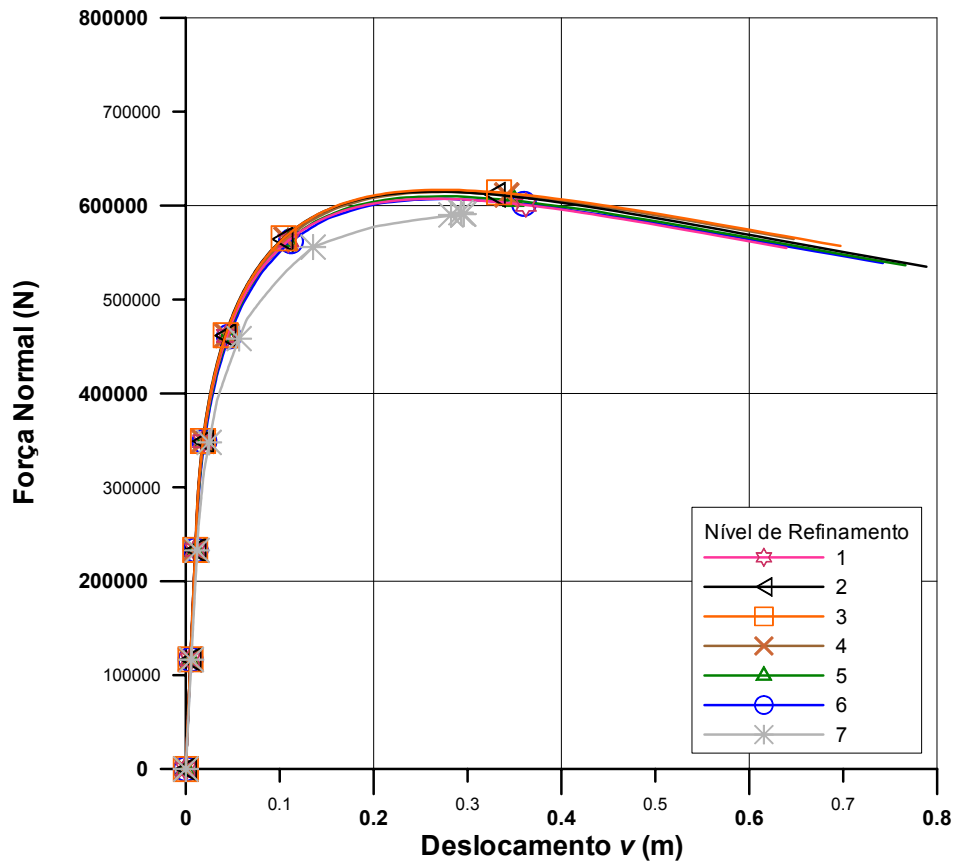


Figura 7.39 – Curvas Força Normal versus Deslocamento v , no ponto A , com o amplitude de imperfeição de 0,3 m, utilizando o elemento isoparamétrico

As curvas da Figura 7.40 relacionam o parâmetro de carga com deslocamento v . Conforme já foi verificado, os valores dos parâmetros tendem a ser maiores para modelos mais refinados. Excluindo o nível de refinamento 7, as demais curvas se aproximam muito, mostrando pouca sensibilidade ao refinamento. Estas curvas não mostram pontos limites. Verifica-se que o parâmetro de carga tende a crescer quando o deslocamento já é relativamente grande.

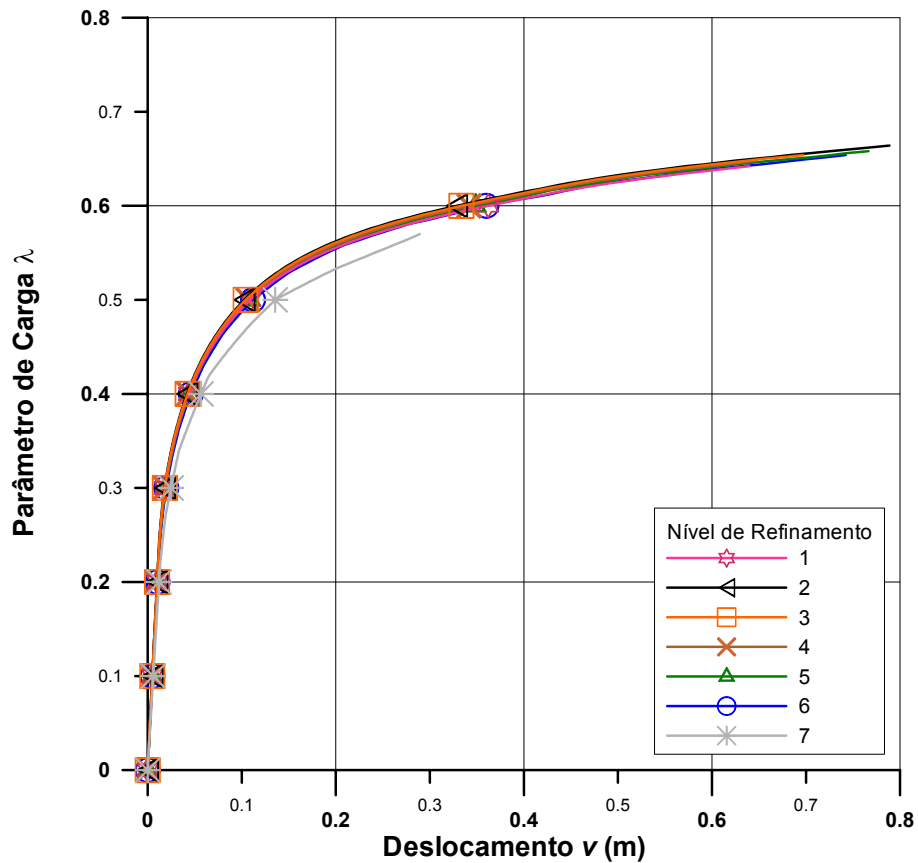


Figura 7.40 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v , no ponto A , com o amplitude de imperfeição de 0,3 m, utilizando o elemento isoparamétrico

7.6.2.1.1.3 Análise dos Resultados Obtidos com o Elemento Isoparamétrico

Os valores numéricos correspondentes aos pontos limites dos parâmetros de carga dos ΔT críticos para os casos com amplitudes de imperfeição de 0,1 m podem ser vistos na Tabela 7.20. Os modelos com amplitude de 0,3 m não apresentaram ΔT crítico.

Tabela 7.20 – Valores de parâmetro de carga limite e de ΔT crítico para os modelos com amplitudes de imperfeição de 0,1 m com o elemento isoparamétrico

| Nível de Refinamento | Parâmetro de Carga λ | ΔT Crítico (°C) |
|----------------------|------------------------------|-------------------------|
| 1 | 0,914 | 45,70 |
| 2 | 0,914 | 45,70 |
| 3 | 0,912 | 45,60 |
| 4 | 0,906 | 45,30 |
| 5 | 0,904 | 45,20 |
| 6 | 0,898 | 44,90 |
| 7 | 0,858 | 42,90 |

Conforme se verifica na tabela acima, os valores máximos aumentam do nível de refinamento 7 para o 1. Desprezando o nível 7, a relação da diferença entre os valores máximo (nível 1) e mínimo (nível 6) com o resultado do modelo mais refinado (nível 1) é de 1,8 %.

7.6.2.1.2 Resultados Obtidos com o Elemento PIPE31 (ABAQUS)

As análises com o elemento PIPE31 só foram realizadas até o nível de refinamento 6. O modelo 7 apresentou problemas de convergência e só resolveu dois incrementos. Tentou-se aumentar as tolerâncias para 0,1 e 0,05 para os critérios de força e deslocamento, respectivamente, e reduzir o valor do incremento inicial de carga, mas a análise não avançou. Provavelmente, o refinamento insuficiente pode ter sido a causa deste problema.

7.6.2.1.2.1 Resultados com Amplitude de Imperfeição de 0,1 m

As curvas Força Normal versus Deslocamento v para os caso com 0,1 m de amplitude da imperfeição podem se vistas no gráfico da Figura 7.41. Nestas curvas verifica-se que a força normal máxima apresenta uma tendência de aumentar quando os modelos se tornam menos refinados, mostrando o comportamento oposto ao observado com o elemento isoparamétrico para este nível de amplitude de imperfeição. Verifica-se também que modelos mais refinados permitem maiores deslocamentos. Em todos os casos, a queda da força normal após o ponto limite é bastante acentuada.

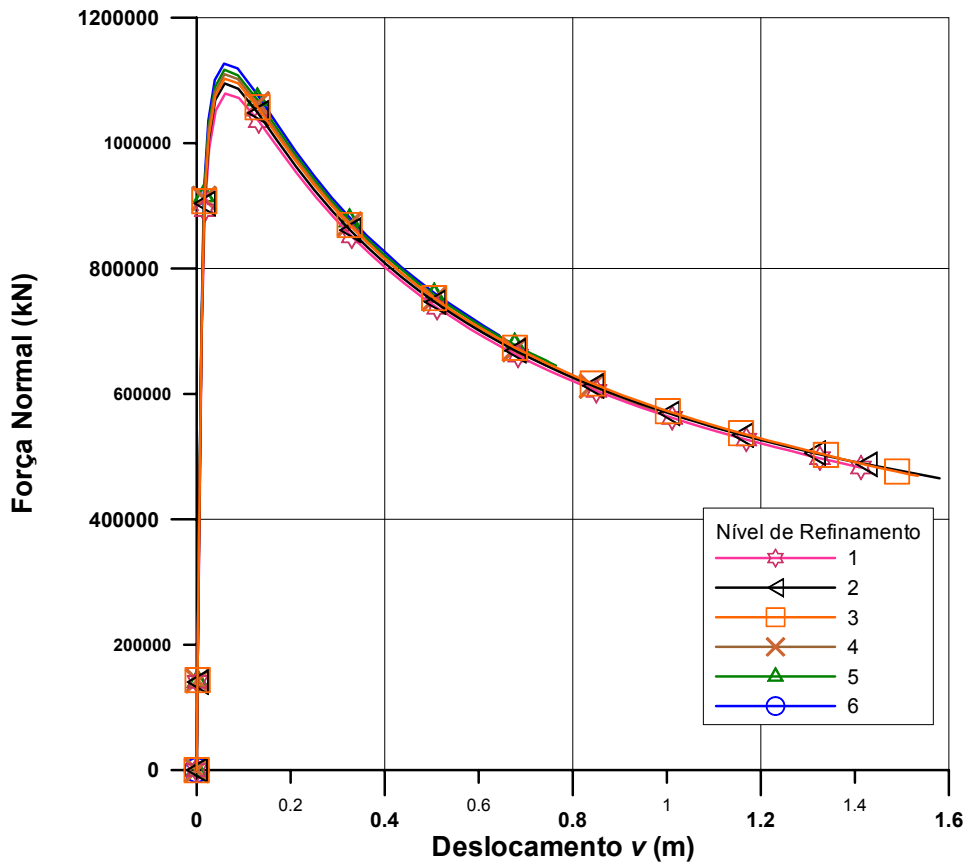


Figura 7.41 – Curvas Força Normal versus Deslocamento v , no ponto A, com amplitude de imperfeição de 0,1 m, utilizando o elemento PIPE31 (ABAQUS)

Na Figura 7.42, estão as curvas que relacionam o parâmetro de carga com o deslocamento v . Como foi verificado nas curvas com a força normal, os valores máximos do parâmetro de carga também apresentam a mesma tendência com relação ao refinamento. Estas curvas, diferentemente das obtidas com elemento isoparamétrico para este mesmo nível de amplitude, mostram claramente os pontos críticos, confirmando a afirmação feita para os resultados apresentados pelo elemento isoparamétrico com relação a estes pontos. Em alguns casos, após tais pontos críticos, as curvas apresentam trechos instáveis e estáveis.

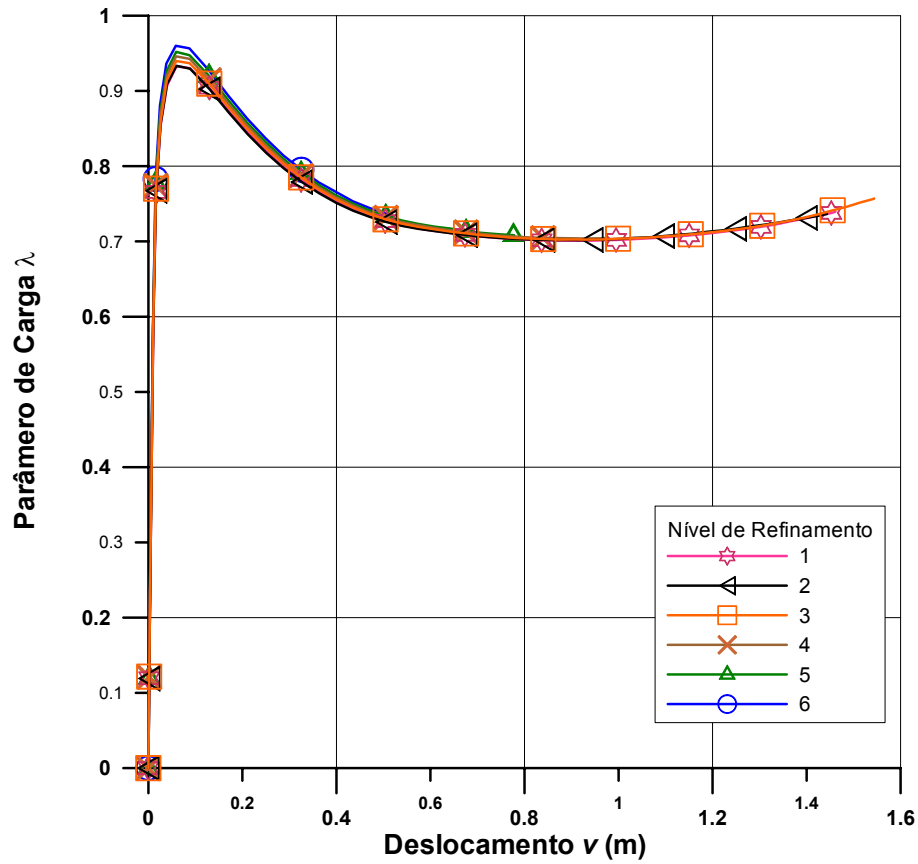


Figura 7.42 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v , no ponto A , com amplitude de imperfeição de 0,1 m, utilizando o elemento PIPE31 (ABAQUS)

7.6.2.1.2.2 Resultados com Amplitude de Imperfeição de 0,3 m

As curvas que relacionam a força normal com o deslocamento v para os casos com amplitude de imperfeição de 0,3 m, podem ser vistas Figura 7.43. Da mesma forma como foi visto no caso com amplitude de 0,1 m, os valores de força normal máxima também apresentam a tendência de aumentar para modelos menos refinados, embora este comportamento não seja tão evidente.

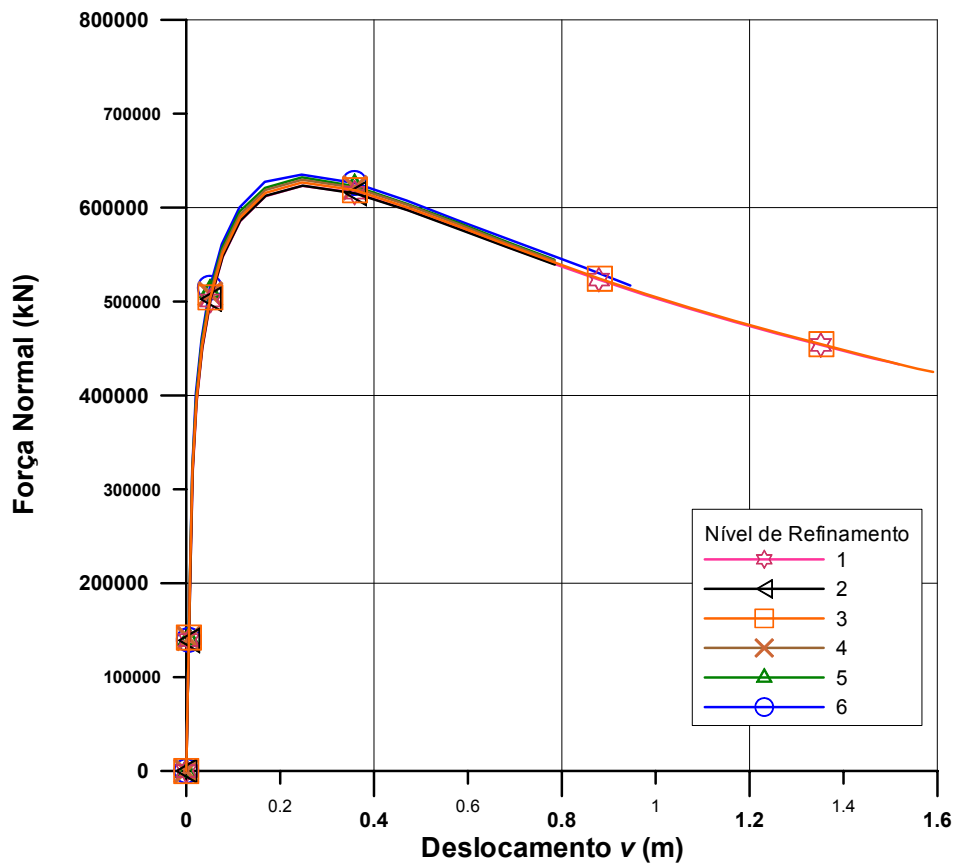


Figura 7.43 – Curvas Força Normal versus Deslocamento v , no ponto A , com amplitude de imperfeição de 0,3 m, utilizando o elemento PIPE31 (ABAQUS)

A Figura 7.44 mostra as curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v . Nestas curvas, não se verifica a presença de pontos críticos, comportamento já visto nas respostas com os modelos equivalentes com o elemento isoparamétrico. As curvas apresentam parâmetros de cargas maiores para modelos com malhas mais grosseiras. As respostas se aproximam muito, mostrando pouca sensibilidade ao refinamento. Comparando com os modelos com amplitude de imperfeição de 0,1 m, pode-se dizer que este comportamento está associado a este parâmetro.

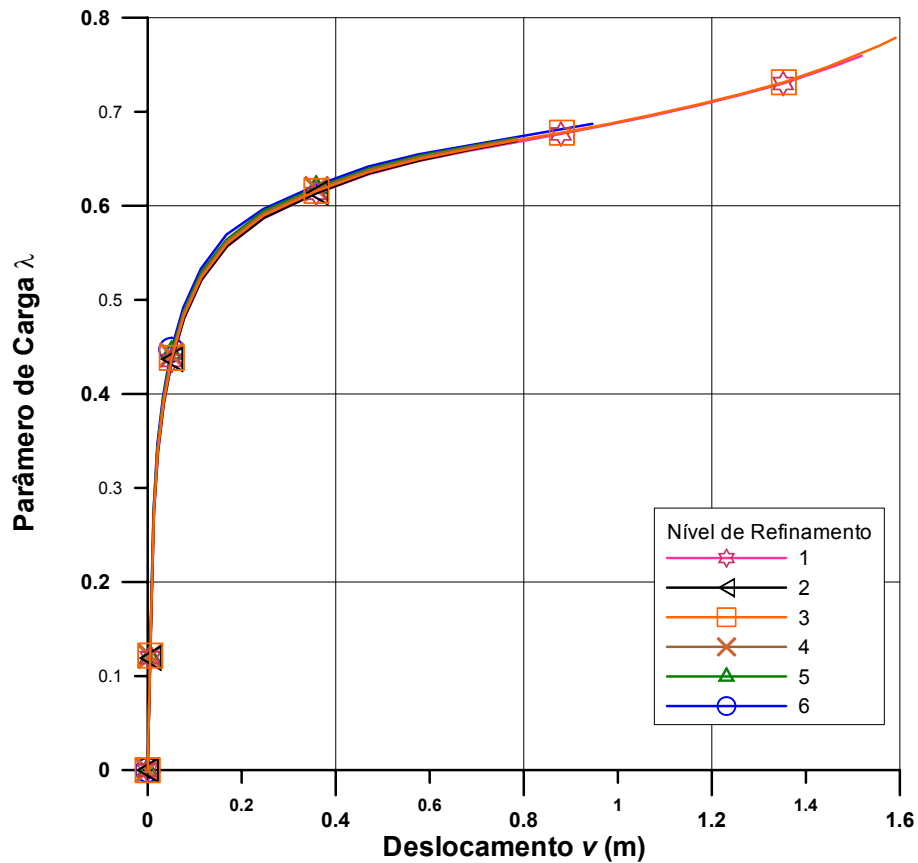


Figura 7.44 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v , no ponto A com amplitude de imperfeição de 0,3 m, utilizando o elemento PIPE31 (ABAQUS)

7.6.2.1.2.3 Análise dos Resultados Obtidos com o Elemento PIPE31

A Tabela 7.21 mostra os valores dos pontos limites dos parâmetros de carga e ΔT críticos para os 6 níveis de refinamento. Os resultados numéricos mostram que os valores de ΔT crítico apresentam uma tendência relacionada ao refinamento. A relação da diferença entre os valores máximo (nível 6) e mínimo (nível 1) com o resultado do modelo mais refinado (nível 1) é de 2,9 %.

Tabela 7.21 – Valores de parâmetro de carga e temperatura crítica para os modelos com amplitude de imperfeição de 0,1 m com o elemento PIPE31 (ABAQUS)

| Nível de Refinamento | Parâmetro de Carga λ | ΔT Crítico (°C) |
|-----------------------------|--|---|
| 1 | 0,933 | 46,65 |
| 2 | 0,934 | 46,70 |
| 3 | 0,940 | 47,00 |
| 4 | 0,946 | 47,30 |
| 5 | 0,952 | 47,60 |
| 6 | 0,960 | 48,00 |
| 7 | -- | -- |

7.6.2.1.3 Comparação entre os Resultados dos Elementos Isoparamétrico e PIPE31 (ABAQUS)

Comparando os resultados do elemento isoparamétrico com o PIPE31, entre os níveis de refinamento 1 e 6, verifica-se que o elemento isoparamétrico é menos sensível ao refinamento, apresentando menor dispersão nos valores máximos da força normal e de ΔT crítico.

A Tabela 7.22 mostra os valores de ΔT crítico obtidos comparando os dois elementos. Os números entre parêntese mostram a relação entre os valores ΔT crítico do nível de refinamento observado e o do nível de refinamento 1, indicando o quanto este se afasta do resultado do modelo mais refinado. Desprezando o nível de refinamento 7, para os casos com amplitude de 0,1 m, a diferença entre os valores máximo e mínimo com elemento isoparamétrico é de 1,8 %, enquanto que com o PIPE31 2,8 %.

Estes resultados mostram que o elemento isoparamétrico, além de ser menos sensível ao refinamento, converge mais rápido para a solução que PIPE31. O elemento isoparamétrico convergiu para uma solução enquanto o PIPE31 não.

Tabela 7.22 – Valores de temperatura crítica comparando os elementos isoparamétrico e PIPE31 (ABAQUS)

| Nível de Refinamento | ΔT Crítico (°C) | |
|----------------------|-------------------------|---------------|
| | Isoparamétrico | PIPE31 |
| 1 | 45,70 (1,000) | 46,65 (1,000) |
| 2 | 45,70 (1,000) | 46,70 (1,001) |
| 3 | 45,60 (0,998) | 47,00 (1,008) |
| 4 | 45,30 (0,991) | 47,30 (0,971) |
| 5 | 45,20 (0,989) | 47,60 (1,020) |
| 6 | 44,90 (0,982) | 48,00 (1,030) |
| 7 | 42,90 (0,939) | -- |

Nos casos analisados com o elemento isoparamétrico, verificou-se a tendência do ΔT crítico aumentar para os modelos mais refinados. Para os caso com o elemento PIPE31 verificou-se o contrário. A Figura 7.45 mostra graficamente como se comportou cada elemento com relação ao refinamento, apresentando os valores de ΔT crítico para cada nível de refinamento e as curvas de ajuste e suas respectivas equações, considerando o tipo de elemento. A curva de ajuste com o elemento isoparamétrico não considerou o nível de refinamento 7.

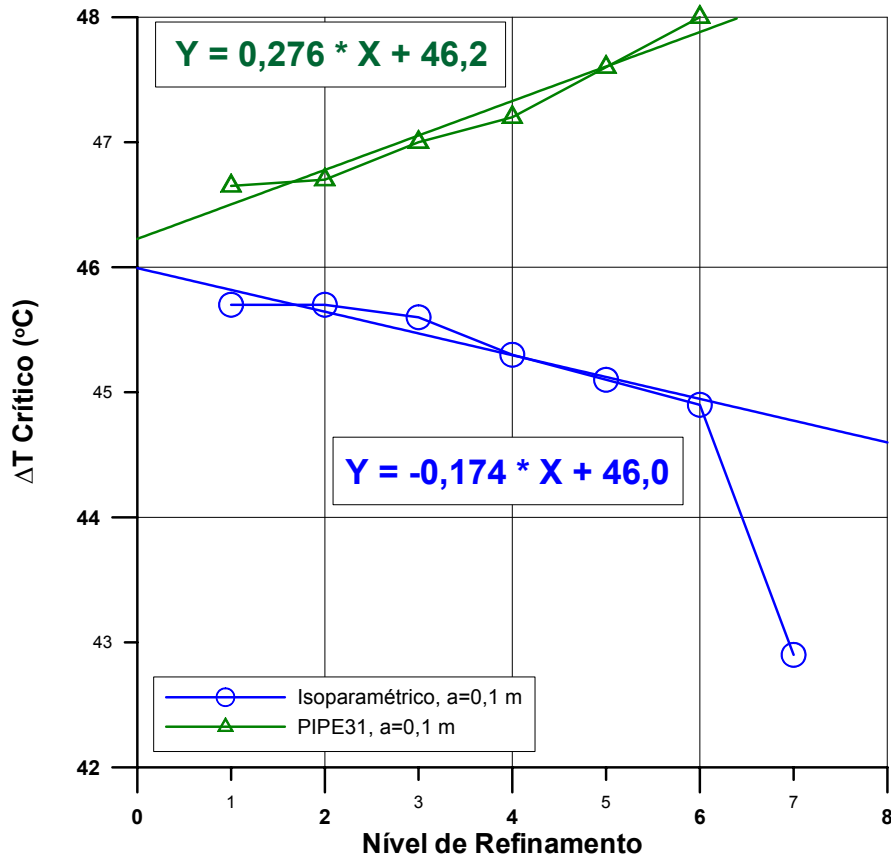


Figura 7.45 – Relação entre ΔT crítico e o nível de refinamento do modelo

O gráfico da Figura 7.46 compara as curvas de parâmetro de carga obtidas com os modelos mais refinados. Este resultado confirma o ponto limite notificado para o caso com amplitude de imperfeição igual a 0,1 m com o elemento isoparamétrico. Estas curvas também mostram que as respostas do elemento isoparamétrico apresentam resultados ligeiramente menores que o PIPE31. Algumas curvas foram parcialmente omitidas para facilitar a visualização do gráfico.

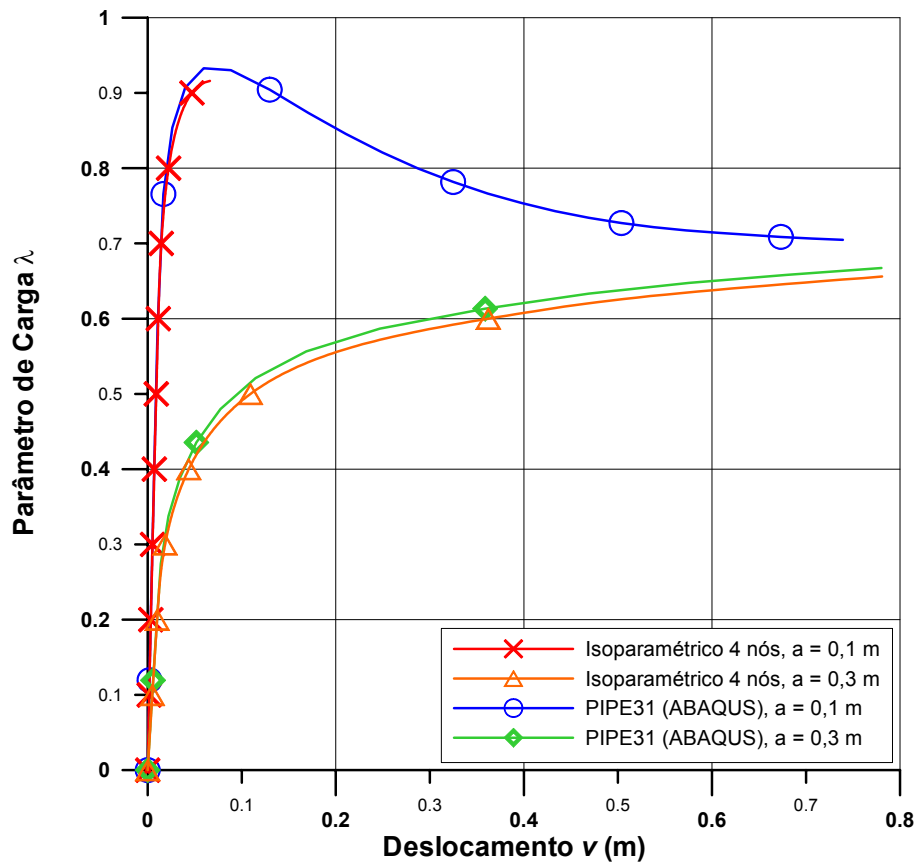


Figura 7.46 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v , no ponto A , com amplitudes de imperfeição de 0,1 e 0,3 m, comparando os elementos isoparamétrico e PIPE31 (ABAQUS)

Os tempos de processamento não foram comparados, pois os dois programas foram utilizados em computadores diferentes, e como já foi mencionado, o código desenvolvido para o elemento isoparamétrico não apresenta nenhum tipo de otimização. De qualquer forma, pode-se dizer que os tempos foram próximos e todos abaixo de 10 minutos por análise.

7.6.3 Sensibilidade a Amplitude da Imperfeição Inicial

Este estudo tem como objetivo avaliar a influência da imperfeição inicial na resposta da estrutura, particularmente nos valores de força normal máxima e parâmetro de carga. Foram considerados dois níveis de extensão da imperfeição: 50 e 70 m. Com este fim, foram avaliados 7 níveis de amplitude de imperfeição inicial, de acordo com a Tabela 7.23, variando entre 0,1 e 1,0 m. Na tabela, podem ser vistas as amplitudes e as relações entre a amplitude da imperfeição e o tamanho do trecho imperfeito. Todo este estudo foi realizado com a malha com nível de refinamento 1, que foi apresentada no estudo de gradação da malha (7.6.2). Os resultados obtidos com os modelos com 50 m de extensão do trecho com imperfeição foram comparados com a solução analítica apresentada no capítulo 2, utilizando o método de HOBBS modificado [17].

Tabela 7.23 – Níveis de imperfeição inicial aplicados ao duto

| Modelo | Amplitude da imperfeição (m) | Relação entre a amplitude e a extensão da imperfeição | |
|--------|------------------------------|---|----------|
| | | L = 50 m | L = 70 m |
| 1 | 0,1 | 1/500 | 1/700 |
| 2 | 0,2 | 1/250 | 1/350 |
| 3 | 0,3 | 1/167 | 1/233 |
| 4 | 0,4 | 1/125 | 1/175 |
| 5 | 0,6 | 1/83 | 1/117 |
| 6 | 0,8 | 1/63 | 1/88 |
| 7 | 1,0 | 1/50 | 1/70 |

O gráfico da Figura 7.47 apresenta a forma e a amplitude (na metade do trecho imperfeito) dos 7 níveis de imperfeição com 50 m de extensão.

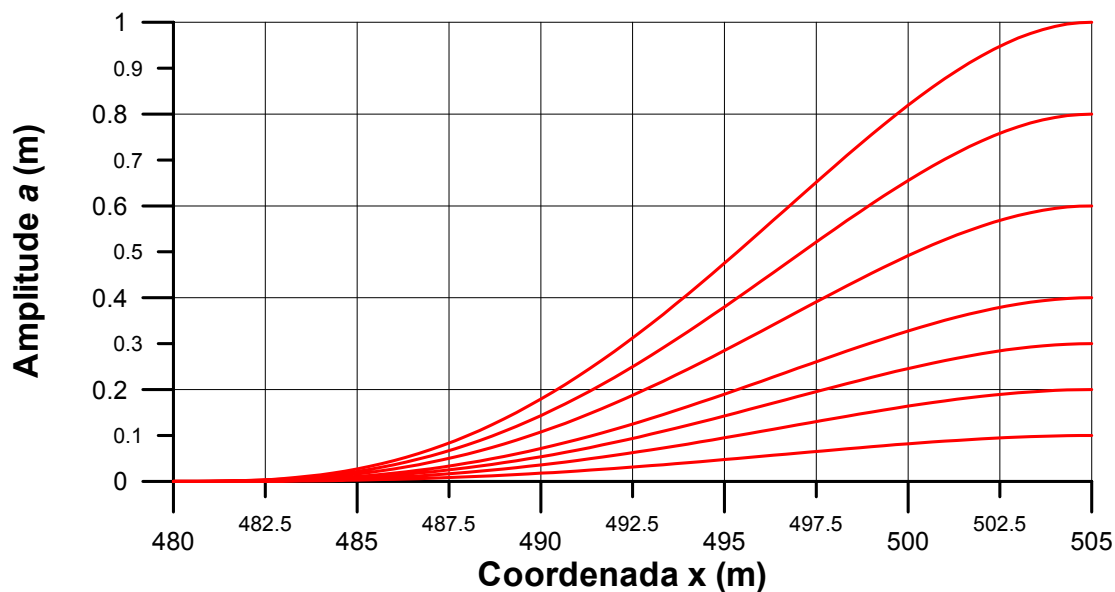


Figura 7.47 – Forma e amplitude da imperfeição inicial na metade do trecho central do duto para L igual a 50 m

Para este estudo, foram utilizados os mesmos parâmetros de análise e função de carregamento utilizados no item 7.6.1, exceto no caso do modelo 1, com 0,1 m de amplitude de imperfeição, em que foi modificada a função de carga, aplicando ΔT de 70 °C, permitindo atingir ΔT crítico.

7.6.3.1 Resultados Obtidos

Os resultados foram agrupados por extensão do trecho imperfeito. No item final deste estudo é apresentada a comparação destes resultados. Todas as curvas estão relacionadas ao deslocamento v , no ponto central do duto.

7.6.3.1.1 Resultados para os Casos com Extensão do Trecho Imperfeito Igual a 50 m

Para este nível de extensão, a amplitude da imperfeição inicial altera sensivelmente os valores de força normal máxima e ΔT crítico. O gráfico da Figura 7.48 mostra as curvas que relacionam a força normal com o deslocamento v . Como se pode verificar, quanto menor a amplitude da imperfeição, maior a força normal máxima. Outra observação importante é que, quanto maior a amplitude da imperfeição, mais acentuada é a queda da força normal após o ponto de máximo da curva. Este

comportamento é muito parecido com o observado em instabilidade de colunas [61], que é similar ao problema de instabilidade de dutos aquecidos.

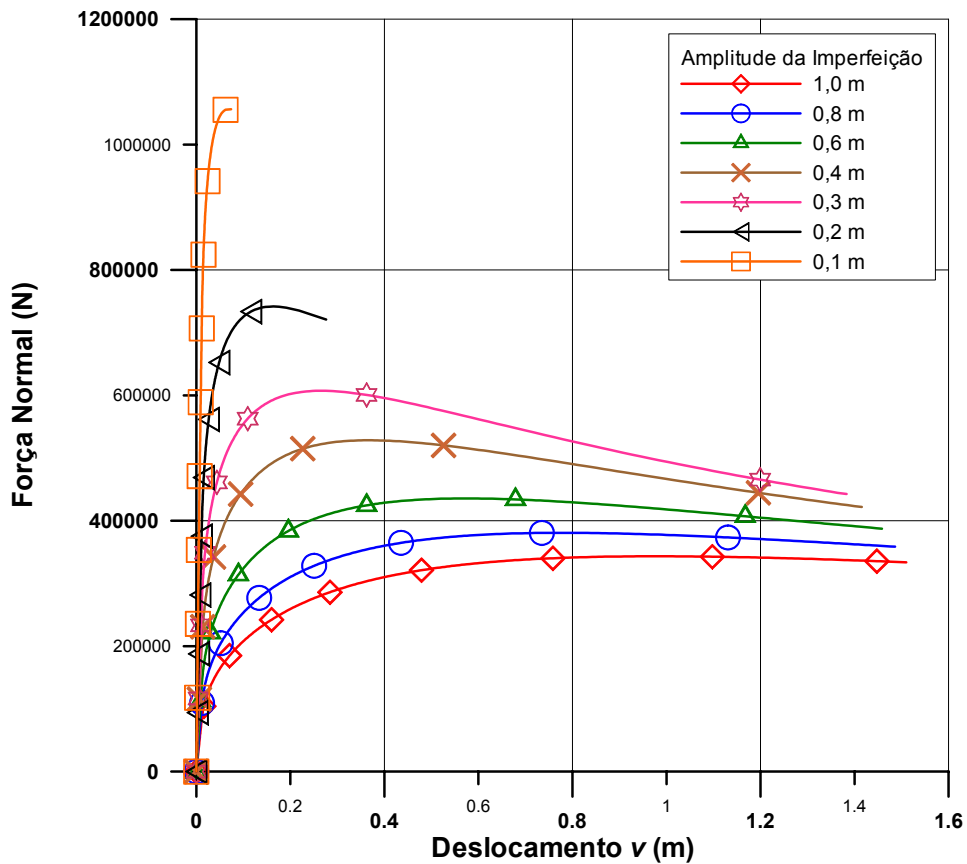


Figura 7.48 – Curvas Força Normal versus Deslocamento v para os 7 níveis de amplitude da imperfeição inicial

A Figura 7.49 mostra o comportamento das curvas de parâmetro de carga. Conforme se verifica, pontos limites só aparecem nos casos com amplitude abaixo de 0,2 m. Para amplitudes superiores, às curvas mostram trajetórias de equilíbrio estáveis.

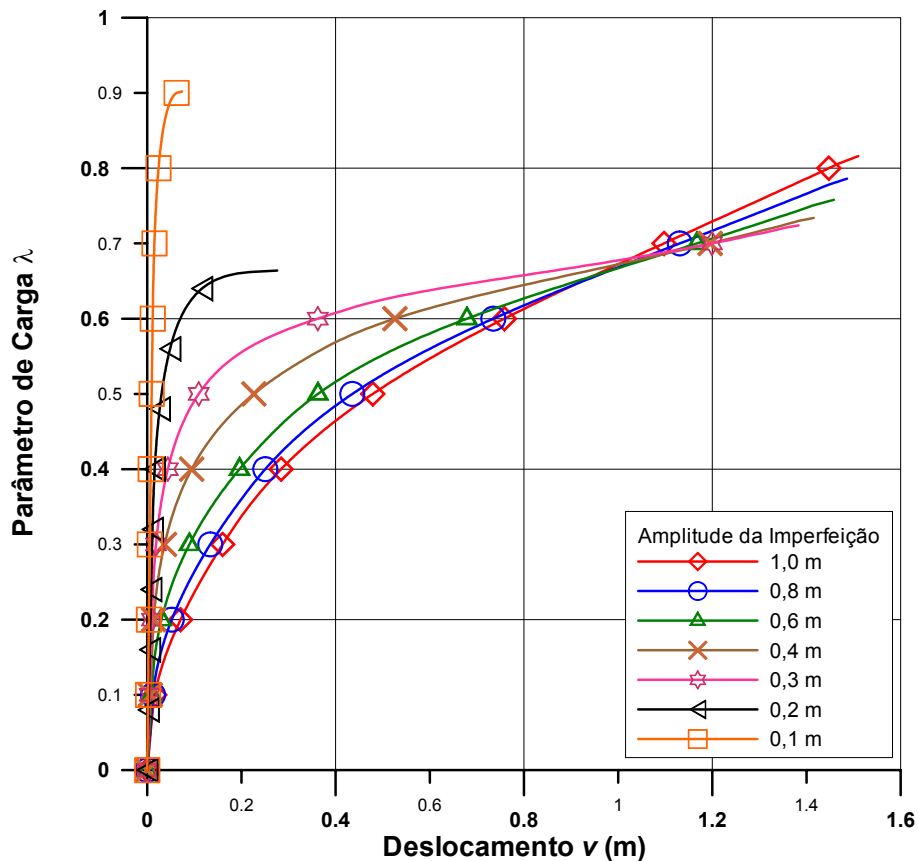


Figura 7.49 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v para os 7 níveis de imperfeição inicial

Este resultado pode ser comparado como o método analítico de HOBBS apresentado no item 2.2.3.2, mostrando mais uma vez a capacidade de representação do modelo numérico. O Figura 7.50 mostra as curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v vista no gráfico anterior, com as amplitudes da imperfeição inicial a somadas aos deslocamentos. Neste gráfico também é apresentada a curva de HOBBS para um duto reto, característica do modo 3 de flambagem. Conforme se verifica, as curvas numéricas e analítica se ajustam bem. Teoricamente, estas curvas não deveriam se cruzar, porém considerando que se tratam de métodos diferentes, além de apresentarem modos distintos de aplicação das reações do solo, a comparação pode ser considerada muito boa. Comportamento semelhante foi verificado em estudos aprofundados comparando métodos analíticos e numéricos feitos por BENJAMIN e CUNHA [31][32].

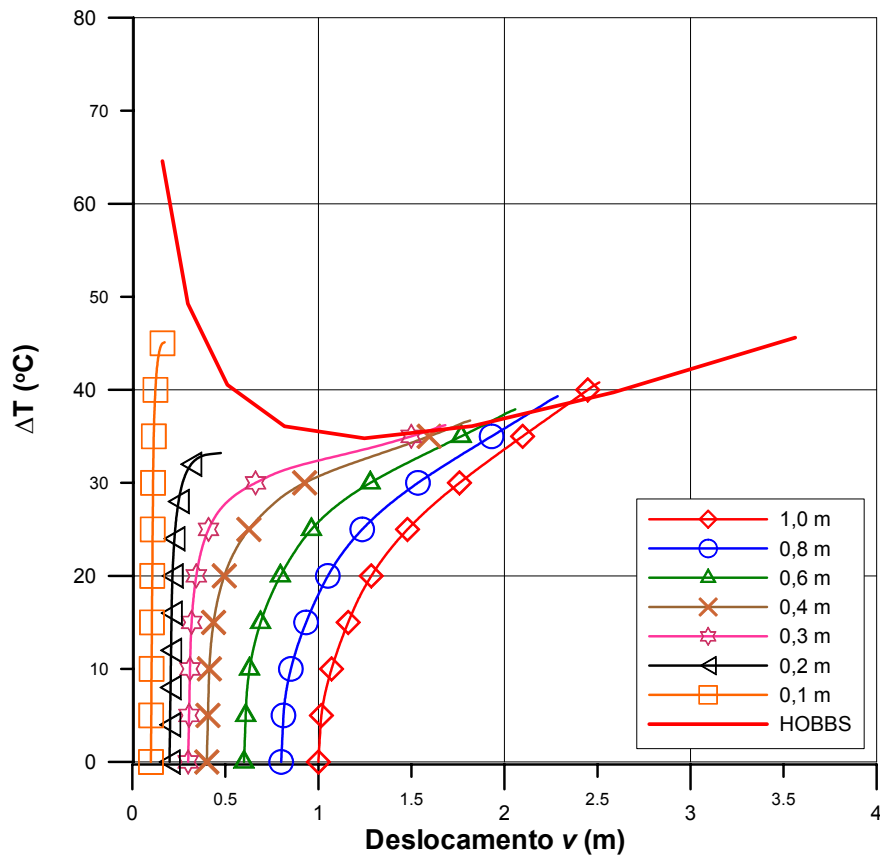


Figura 7.50 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v para os 7 níveis de imperfeição inicial comparando os resultados com a curva analítica de HOBBS para o modo 3 de flambagem

7.6.3.1.2 Resultados para os Casos com Extensão do Trecho Imperfeito Igual a 70 m

A Figura 7.51 mostra as relações entre a força normal e o deslocamento v . Como podem ser vistos, os valores máximos da força normal são maiores que os observados nos casos com 50 m de extensão, considerando todos níveis de imperfeição. Observa-se na curva com amplitude de 0,2 m um salto que pode estar associado a um ponto limite.

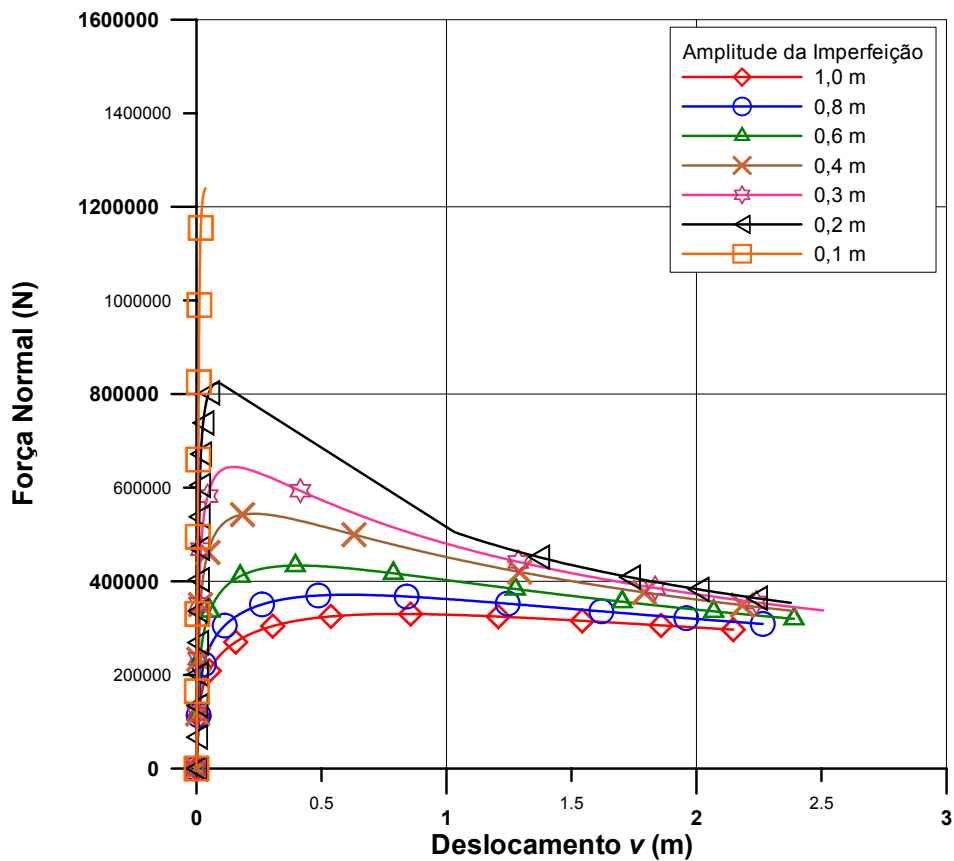


Figura 7.51 – Curvas Força Normal versus Deslocamento v para os 7 níveis de imperfeição inicial

As curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v podem ser vistas na Figura 7.52. Para este nível de extensão, notam-se também pontos limites para os níveis de amplitude de 0,1 e 0,2 m. Na curva com amplitude de 0,2 m, observa-se um salto, mostrando que o algoritmo foi capaz de obter uma parte da solução pós-crítica mesmo sem dispor de uma estratégia para este fim. Nas curvas com amplitude acima de 0,2 m, verificam-se trajetórias de equilíbrio estáveis.

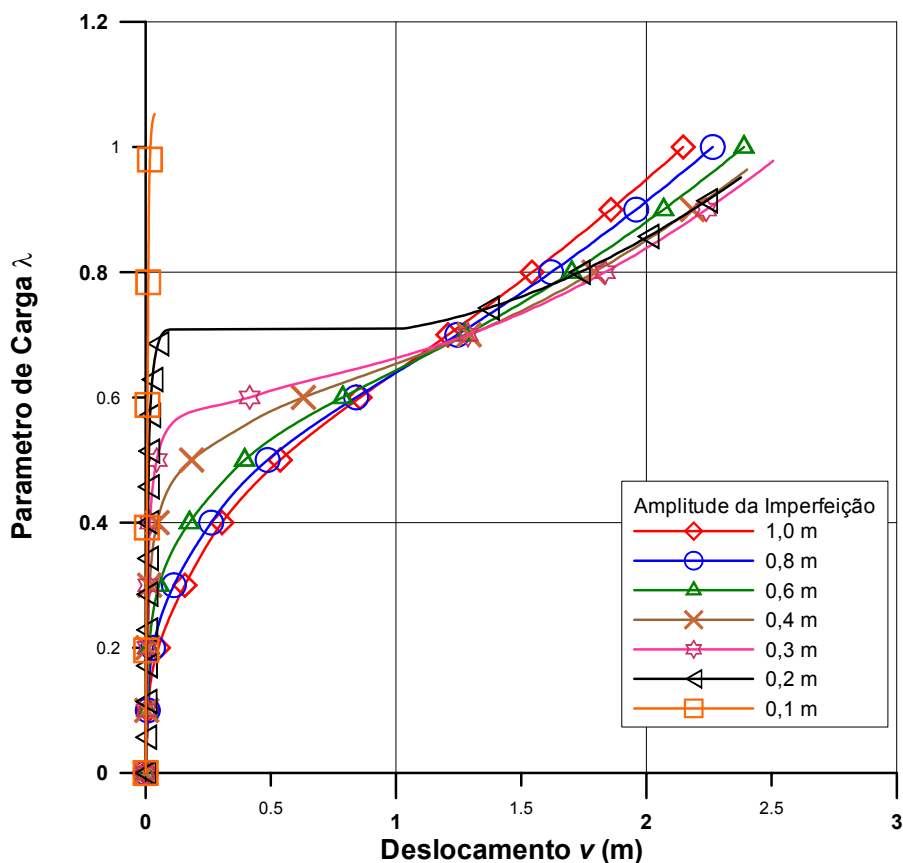


Figura 7.52 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v para os 7 níveis de imperfeição inicial

7.6.3.1.3 Comparação dos Resultados Obtidos

Estes resultados confirmam que a amplitude e a extensão da imperfeição alteram sensivelmente a resposta da estrutura. Amplitudes relativamente pequenas levam a estrutura a responder com valores de força normal e parâmetro de carga maiores. Este parâmetro também define a presença de pontos críticos, que ocorrem para amplitudes baixas. O aumento na extensão de imperfeição faz com que a força normal e o parâmetro de carga sejam maiores, porém, nestes casos, não mostrou estar associado ao aparecimento de pontos críticos.

A Tabela 7. 24 mostra os valores de ΔT críticos para os dois níveis de extensão da imperfeição. Os valores entre parêntese mostram a relação entre este valor e o do modelo com menor amplitude. A partir de 0,3 m de amplitude, nenhum dos dois níveis de extensão apresentou ΔT crítico.

Tabela 7. 24 – Valores limite do parâmetro de carga e de ΔT crítico para os 7 níveis de amplitude de imperfeição

| Modelo | Parâmetro de Carga λ | | ΔT Crítico (°C) | |
|--------|------------------------------|---------------|-------------------------|---------------|
| | <i>L=50 m</i> | <i>L=70 m</i> | <i>L=50 m</i> | <i>L=70 m</i> |
| 1 | 0,902 | 1,052 | 45,10 (1,000) | 52,60 (1,000) |
| 2 | 0,606 | 0,710 | 30,30 (0,672) | 35,50 (0,675) |
| 3 | -- | -- | -- | -- |
| 4 | -- | -- | -- | -- |
| 5 | -- | -- | -- | -- |
| 6 | -- | -- | -- | -- |
| 7 | -- | -- | -- | -- |

7.6.3.2 Variação da Extensão do Trecho com Imperfeição

Continuando este estudo, avaliou-se melhor o parâmetro extensão da imperfeição. Para isto, além dos modelos com 50, 70 m de comprimento da imperfeição já estudados, foi incluído um outro com 90 m. Nestes casos, utilizaram-se dois níveis de amplitude: 0,1 e 0,3 m.

A Figura 7.53 mostra as formas e a amplitude das imperfeições iniciais para os casos com amplitude igual a 0,1 m.

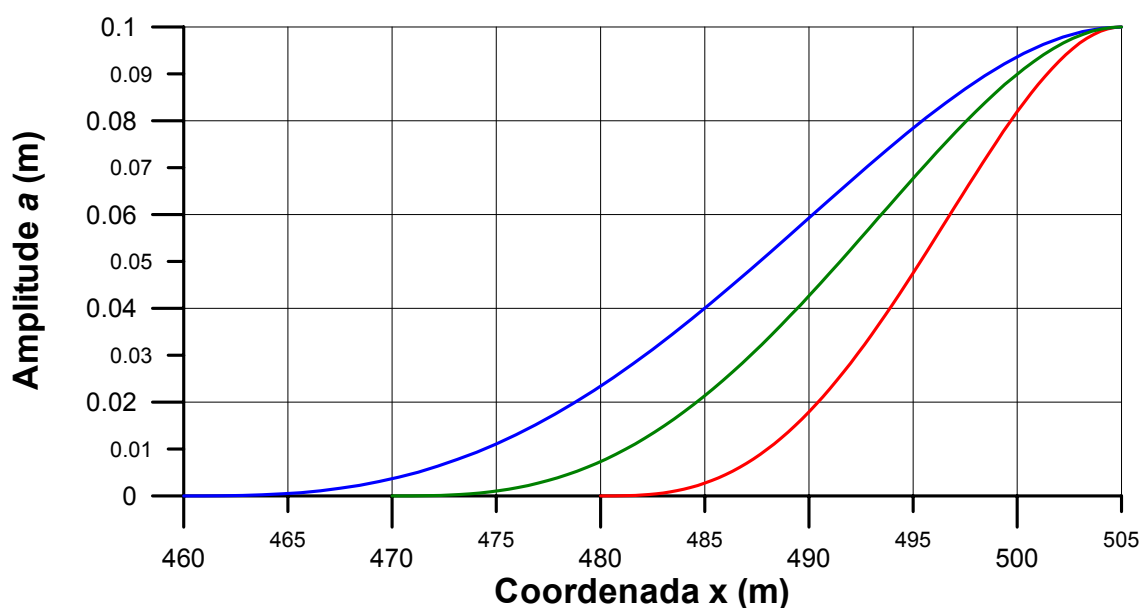


Figura 7.53 – Forma da imperfeição inicial na metade do trecho central para os modelos com comprimento de imperfeição de 50, 70 e 90 m

Todas as malhas foram reconstruídas. O refinamento dos 3 modelos segue o procedimento já adotado no estudo de gradação da malha, com a divisão da estrutura em 3 regiões. A Tabela 7.25 apresenta o refinamento dos 3 modelos, mostrando o número total de elementos, o número de elementos por região e o tamanho dos elementos. Como se verifica, procurou-se manter o tamanho do elemento por região, evitando assim que este parâmetro pudesse influenciar nos resultados.

Tabela 7.25 – Dados de refinamento do modelo

| Malha (número de elementos) | Extensão da imperfeição | Número de nós / Tamanho do elemento | | |
|-----------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------|--------------------|--------------------|
| | | Região A (400 m) | Região B (80 m) | Região C (25 m) |
| 1 (69) | 50 m | 46 / 8,696 m | 14 / 5,714 m | 9 / 2,778 m |
| 2 (71) | 70 m | 45 / 8,667 m | 14 / 5,714 m | 12 / 2,917 m |
| 3 (74) | 90 m | 44 / 8,636 m | 14 / 5,714 m | 16 / 2,813 m |

Os parâmetros de análise e a função de carregamento foram as mesmas definidas no item 7.6.1.4.

7.6.3.2.1 Resultados Obtidos

7.6.3.2.1.1 Resultados para Amplitude de Imperfeição Igual a 0,1 m

Os gráficos das Figuras 7.54 e 7.55 comparam as curvas Força Normal e Parâmetro de Carga versus Deslocamento v , para os três níveis de extensão de imperfeição, com amplitude igual a 0,1 m. Como se verifica, a força normal e o parâmetro de carga máximos aumentam à medida que a extensão do trecho com imperfeição aumenta.

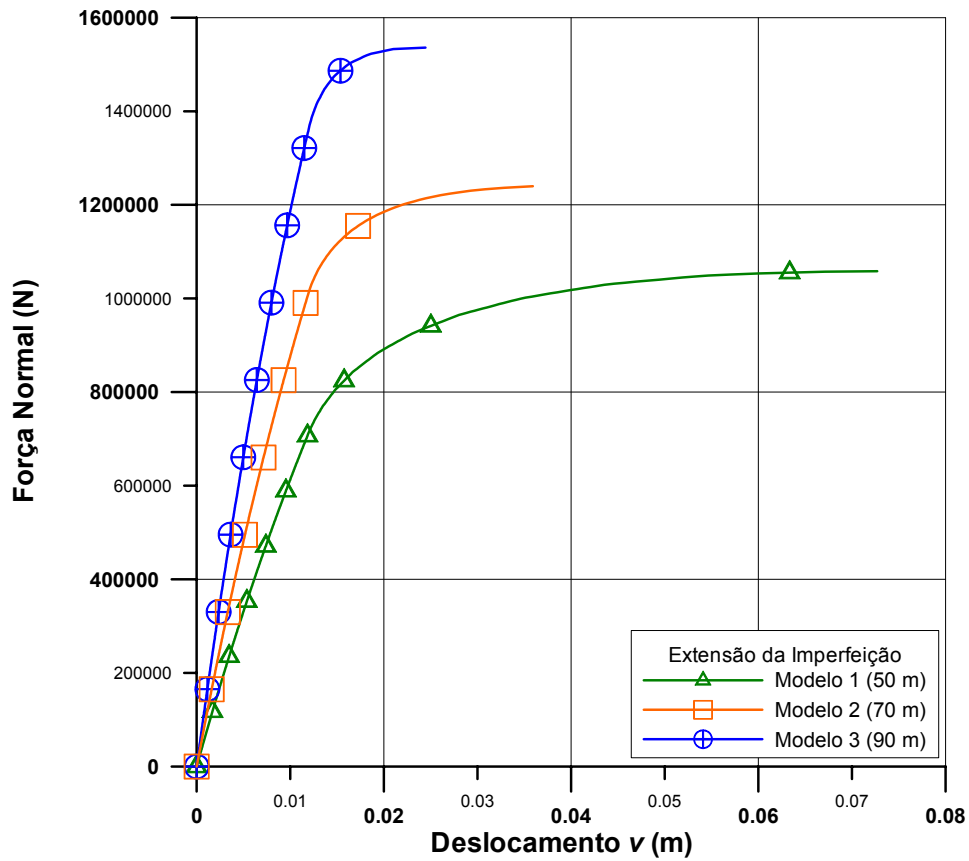


Figura 7.54 – Curvas Força Normal versus Deslocamento v , em A , para os 3 níveis de extensão de imperfeição com amplitude igual a 0,1 m

As curvas com parâmetro de carga pararam de convergir após atingirem o ponto limite. Nestes casos, observa-se a formação de patamar com deslocamento v ainda relativamente pequeno, caracterizando os pontos limites.

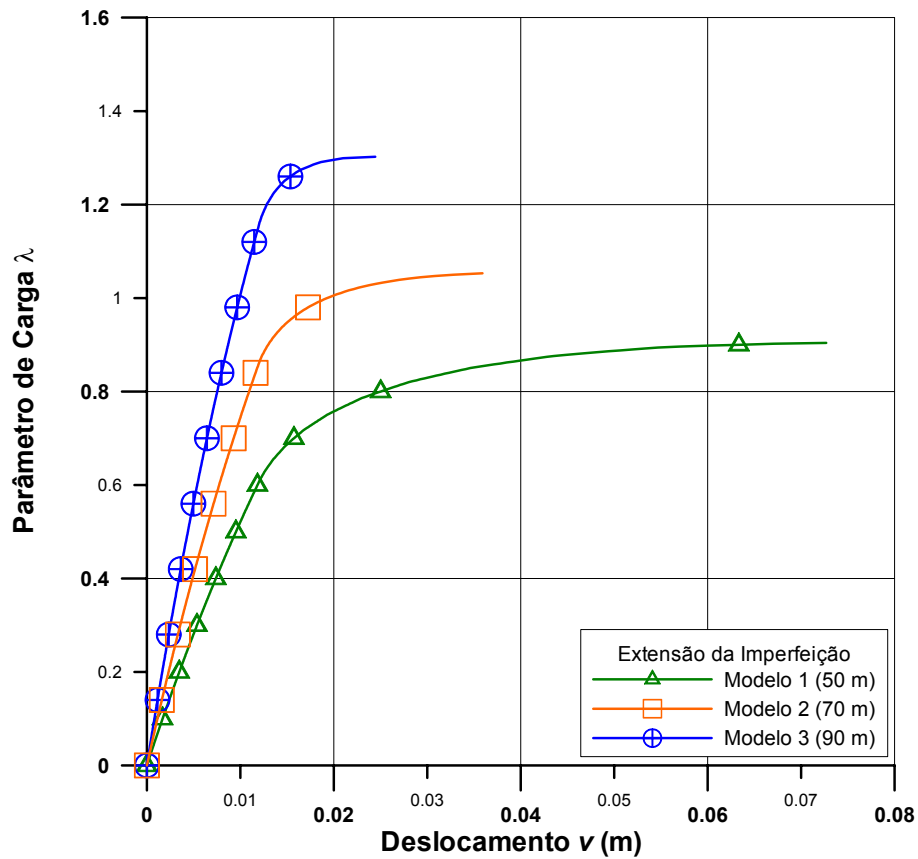


Figura 7.55 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v , em A , para os 3 níveis de extensão de imperfeição com amplitude igual a 0,1 m

7.6.3.2.1.2 Resultados para Amplitude de Imperfeição Igual a 0,3m

As Figuras 7.56 e 7.57 mostram a variação da força normal e do parâmetro de carga com o deslocamento v , respectivamente, para os casos com amplitude de 0,3 m. O comportamento observado para os casos com amplitude de 0,1 se repete aqui, porém as diferenças entre os valores de máximo da força normal e do parâmetro de carga diminuem, devido ao aumento da amplitude da imperfeição.

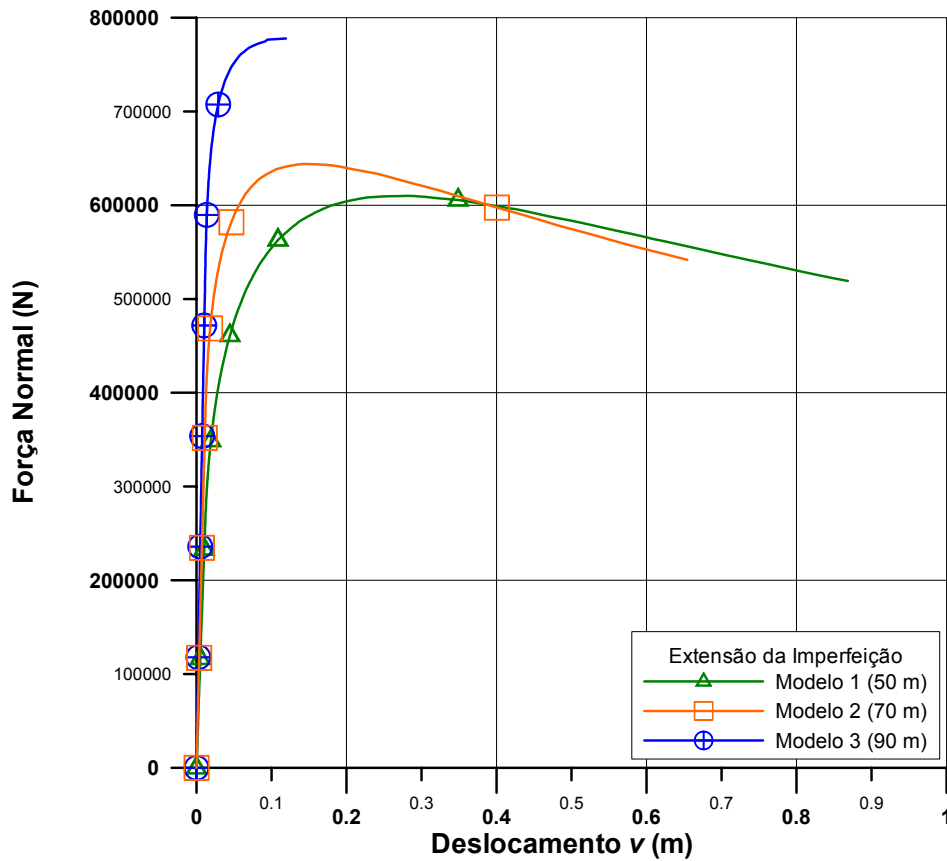


Figura 7.56 – Curvas Força Normal versus Deslocamento v , em A , para os 3 níveis de extensão de imperfeição com amplitude igual a 0,3 m

Observando as curvas com parâmetro de carga, verifica-se que apenas a curva correspondente ao modelo 3 apresenta a formação de patamar, caracterizando um ponto crítico. Nos demais modelos, o parâmetro de carga continua crescendo.

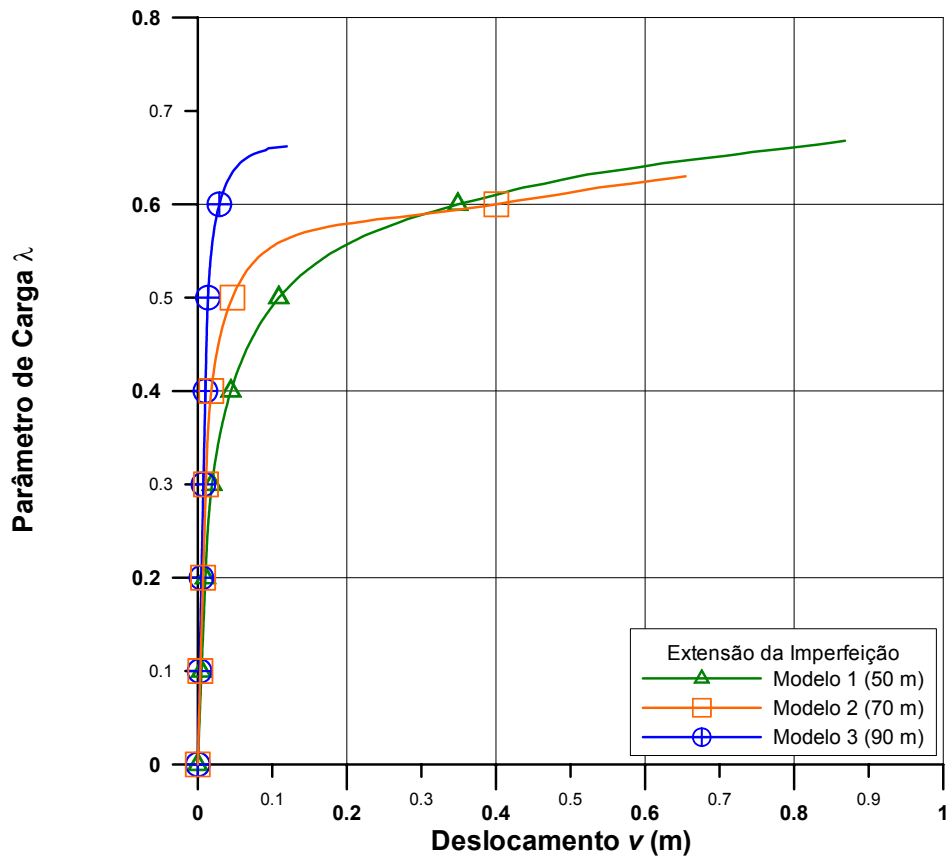


Figura 7.57 – Curvas Parâmetro de Carga versus Deslocamento v , em A , para os 3 níveis de extensão de imperfeição com amplitude igual a 0,3 m

7.6.3.2.2 Comparação dos Resultados

A Tabela 7.26 mostra os valores dos parâmetros de carga e dos ΔT crítico. Os modelos 1 e 2 com amplitude igual a 0,3 m não apresentaram pontos limite, não definindo, portanto, ΔT críticos. Os valores entre parênteses indicam a relação entre este valor e o valor obtido com o modelo 1, mostrando numericamente a influência da extensão do trecho com imperfeição e da amplitude.

Tabela 7.26 – Valores do parâmetro de carga e ΔT Crítico

| Modelo | Extensão da imperfeição | Parâmetro de Carga λ | | ΔT Crítico (°C) | |
|--------|-------------------------|------------------------------|-----------|-------------------------|-----------|
| | | $a=0,1$ m | $a=0,3$ m | $a=0,1$ m | $a=0,3$ m |
| 1 | 50 m | 0,904 | -- | 45,20 (1,000) | -- |
| 2 | 70 m | 1,053 | -- | 52,65 (1,165) | -- |
| 3 | 90 m | 1,302 | 0,662 | 65,10 (1,440) | 33,10 |

Os resultados mostram que a extensão da imperfeição pode modificar muito a resposta do problema. Dependendo da amplitude da imperfeição, a extensão pode contribuir para o aparecimento de pontos críticos.

7.7 Riser Rígido na Configuração Catenária

Este caso estuda um *riser* rígido na configuração catenária, típico dos instalados na Bacia de Campos, em campos de águas profundas, como Roncador. Este exemplo mostra a aplicação do elemento isoparamétrico a *risers*. O modelo é constituído por uma catenária de 3.250,0 m de comprimento instalado em uma lâmina d'água de 1.795,3 m. Na extremidade inferior, a linha se encontra engastada, e na superfície conectada a unidade flutuante, formando um ângulo de 17° com o eixo vertical, podendo girar em todas as direções.

A Figura 7.58 apresenta esquematicamente o *riser*. Os pontos no desenho representam os limites da estrutura, que apresenta condições de contorno com translações restringidas e rotações livres na unidade flutuante e totalmente engastada no fundo do mar.

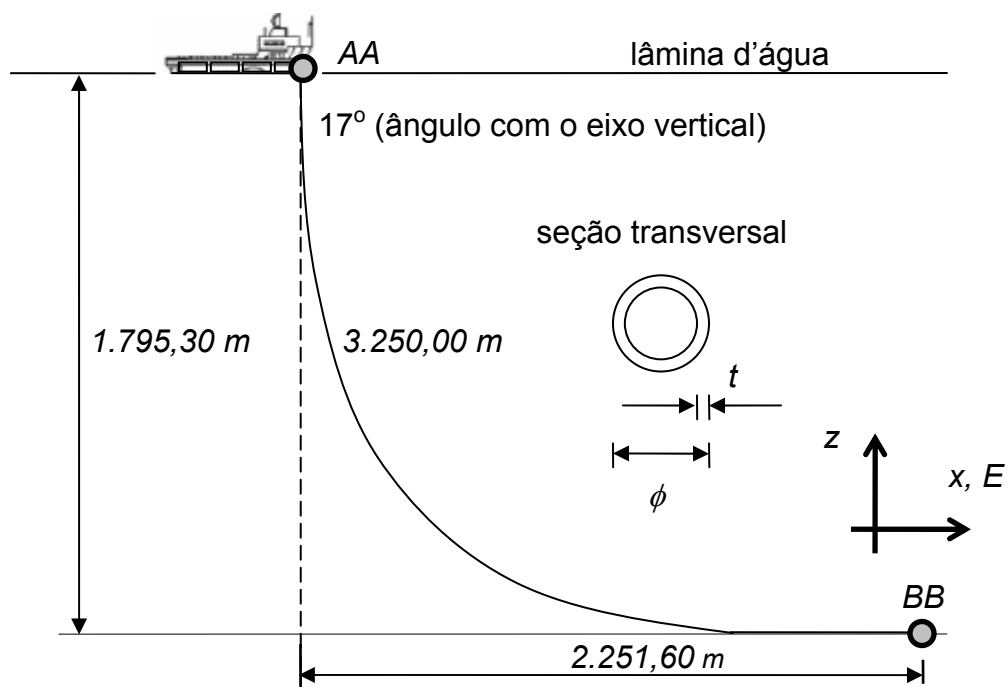


Figura 7.58 – Linha flexível em catenária na configuração inicial

7.7.1 Definição do Problema

7.7.1.1 Carregamento Ambiental e Deslocamento Prescrito

O carregamento ambiental é composto por uma correnteza, conforme mostra o desenho esquemático da Figura 7.59, que atua na direção leste, azimuth 90° , com perfil triangular, com velocidade de $1,00 \text{ m/s}$ na superfície e $0,0 \text{ m/s}$ no fundo do mar. Além do carregamento ambiental, a linha foi submetida a deslocamento prescrito no topo de 180 m .

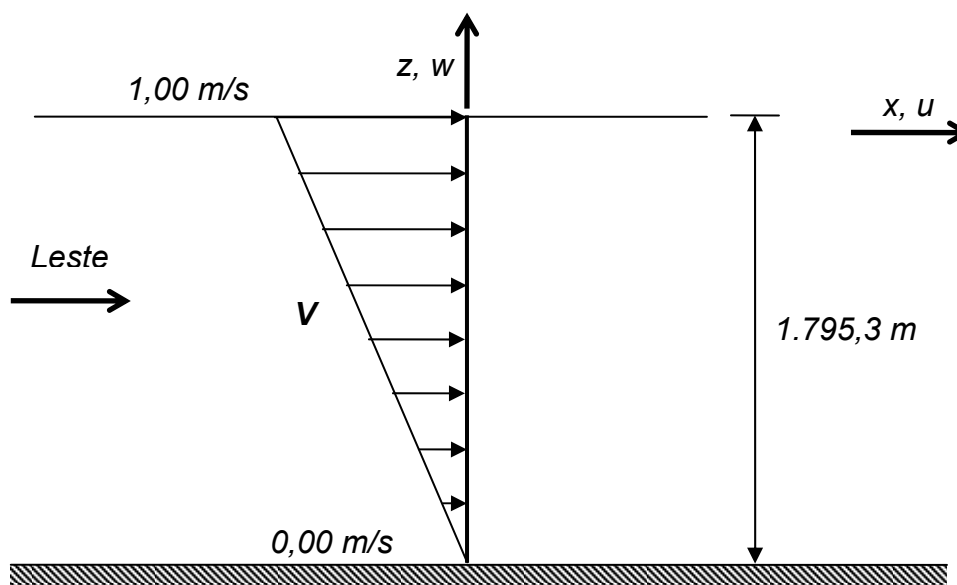


Figura 7.59 – Desenho esquemático do carregamento ambiental aplicado a estrutura

7.7.1.2 Modelagem do Fundo do Mar

Na modelagem do contato entre o trecho horizontal da catenária e o fundo do mar, foram consideradas molas elásticas aplicadas nos nós da malha. Foi considerada para estas, uma rigidez que permitisse um recalque de 2 cm da linha sob ação do peso próprio (incluído o peso do fluido interno) e do empuxo. O uso de tais molas permitiu avaliar a reação do solo ao recalque da linha, representada por forças estáticas discretizadas nos nós da malha. Não foram consideradas interações dinâmicas com o solo. Também foi levado em consideração o atrito, sendo tomados os valores de $0,2$ e $0,5$ para os coeficientes de atrito axial e lateral, respectivamente.

7.7.1.3 Materiais que Caracterizam a Estrutura

A estrutura foi modelada com 3 grupos de propriedades que estão definidos na Tabela 7.27. Os grupos referentes aos segmentos A e B, situados no topo da linha, apresentam *strakes*, que são redutores de vórtex. Estes componentes alteram as propriedades hidrodinâmicas nestes trechos.

Tabela 7.27 – Propriedades físicas, geométricas e hidrodinâmicas da linha

| Característica | Unidade | Segmento | | |
|---|---------------------|-------------|-------------|-------------|
| | | A | B | C, D, E e F |
| Diâmetro externo | m | 0,219075 | 0,219075 | 0,219075 |
| Diâmetro interno | m | 0,174625 | 0,174625 | 0,174625 |
| Peso específico do material | kN/m ³ | 77,0085 | 77,0085 | 77,0085 |
| Peso na água | kN/m | 0,5338 | 0,5088 | 0,22025 |
| Empuxo | kN/m | 0,5881 | 0,5657 | 0,30859 |
| Coefficiente de arraste (C _d) | -- | 2,0 | 2,0 | 1,0 |
| Coefficiente de inércia (C _m) | -- | 3,0 | 3,0 | 2,0 |
| Diâmetro hidrodinâmico (D _h) | m | 0,3499 | 0,3459 | 0,29508 |
| Módulo de elasticidade | kN/m ² | 208.000.000 | 208.000.000 | 208.000.000 |
| Coefficiente de Poisson | -- | 0,3 | 0,3 | 0,3 |
| EI | kN x m ² | 1,402e4 | 1,402e4 | 1,402e4 |
| EA | kN | 2,859e6 | 2,859e6 | 2,859e6 |

O *riser* foi considerado cheio, com a presença de um fluido interno com massa específica de 0,870 ton/m³.

7.7.1.4 Estratégia de Análise

A análise do *riser* partiu de uma configuração de catenária obtida com os dados iniciais do problema. Para isto, foi feito uso do pré-processador SITUA [49], que também serviu para geração da malha de elementos finitos.

A malha empregada foi otimizada através de elementos de comprimentos diferentes, sendo mais refinada na região de menor raio de curvatura, na vizinhança do TDP (*touch down point*), e próximo à conexão com a unidade flutuante. Entre cada segmento de malha uniforme foi interposto um trecho de transição onde o comprimento

dos elementos é variável. O desenho da Figura 7.60 mostra os trechos *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F*, nos quais foi dividido o *riser*, apresentado o comprimento de cada trecho e o comprimento total (em itálico) até cada um dos pontos de encontro dos trechos, medidos a partir da conexão na unidade flutuante.

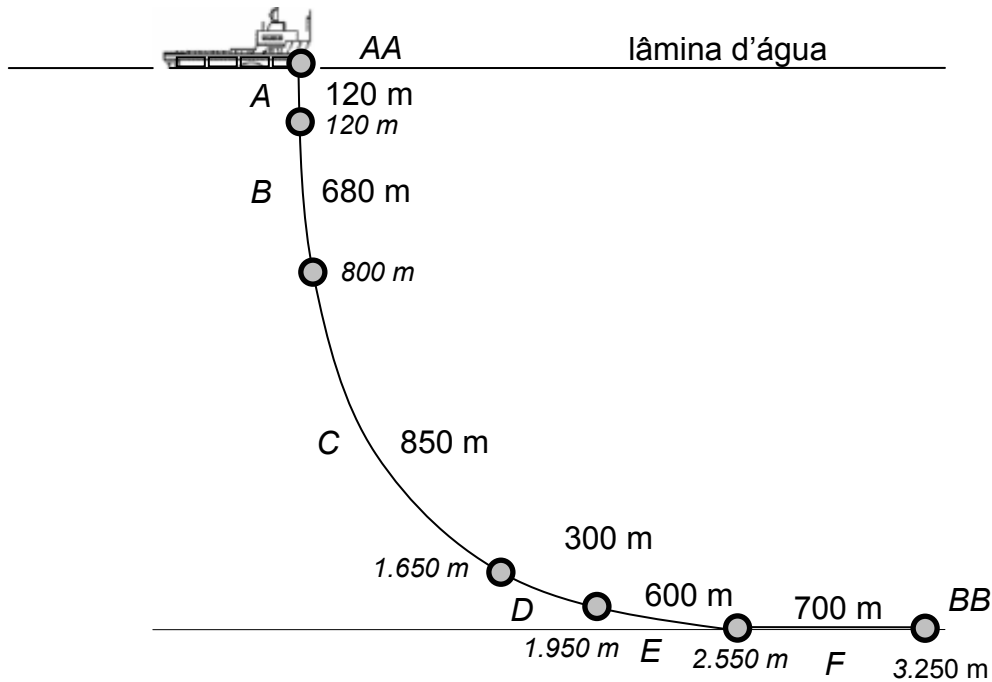


Figura 7.60 – Desenho esquemático da discretização da malha de *riser*

A Tabela 7.28 complementa o desenho que mostra esquematicamente a discretização, apresentando para cada um dos 6 trechos de refinamento da estrutura o comprimento do trecho (entre parênteses) e a distância inicial e final entre nós. Conforme se verifica, a malha está dividida em 3 regiões principais, *A*, *C* e *E* (em cinza), e 3 regiões de transição, *B*, *D* e *F*.

Tabela 7.28 – Malha base utilizada no modelo

| Número de nós da malha | Distância entre nós inicial e final por segmento (m) | | | | | |
|------------------------|--|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| | <i>A</i> (120 m) | <i>B</i> (680 m) | <i>C</i> (850 m) | <i>D</i> (300 m) | <i>E</i> (600 m) | <i>F</i> (700 m) |
| 889 | 1,25– 1,25 | 1,25– 12,5 | 12,5– 12,5 | 12,5– 1,25 | 1,25– 1,25 | 1,25– 12,5 |

O carregamento foi definido em duas etapas, sendo na primeira aplicado o peso próprio, com a estrutura estaticamente equilibrada com a aplicação das trações e

tensões iniciais em um único incremento. O cálculo das tensões iniciais foi realizado pelo programa PROSIM [24], através de código desenvolvido especificamente para este fim (item 5.4), levando em consideração as trações e curvaturas iniciais ao longo da linha, determinadas com uso do mesmo pré-processador empregado para gerar a configuração de catenária.

Na segunda etapa foram aplicados o carregamento ambiental e o movimento horizontal prescrito no topo, de 180 m, no mesmo sentido da correnteza (sentido *near*), que tende a aproximar as extremidades da linha. Este carregamento induz a estrutura a grandes deslocamentos e curvatura no TDP (*touth down point*), representando uma boa condição para avaliação do elemento isoparamétrico.

A formulação Lagrangeana Total aplicada ao elemento isoparamétrico não permite grandes deslocamentos incrementais, e este problema foi observado em análises preliminares. Inicialmente, tentou-se realizar esta análise com 10 e 50 incrementos. Nenhum dos elementos conseguiu realizar a análise com 10 incrementos e apenas o elemento convencional conseguiu realizá-la com 50, possivelmente por dispor da formulação co-rotacionada [6]. Desta forma, optou-se por realizar todas as análises com 100 incrementos.

Para efeito de verificação da convergência, foi estabelecido o limite de 180 iterações por passo de carregamento, sendo adotadas as tolerâncias para as normas de deslocamento e de força de 0,005 e 0,01, respectivamente. Estes são valores usuais oferecidos pelo pré-processador SITUA.

Para comparação dos resultados, foram gerados modelos semelhantes com a mesma quantidade de nós, otimização e parâmetros de análises com o elemento convencional existente no PROSIM.

O elemento isoparamétrico com seção circular só permite, no momento, realizar análise com *risers* do tipo SCR (*steel catenary riser*). A implementação atual não permite desacoplar as rigidezes axial (EA) e flexional (EI) e, desta forma, não é possível analisar ainda estruturas compostas por camada sobrepostas, como os *risers* flexíveis e umbilicais (item 2.3).

Uma análise completa de *riser* exigiria também uma análise dinâmica. Para realizar uma análise dinâmica, seria necessária a implementação da matriz de massa, seguindo a formulação isoparamétrica, o que não foi realizado.

7.7.2 Resultados Obtidos

O desenho da Figura 7.61 mostra as configurações original e deformadas obtidas com os elementos isoparamétrico e convencional no último incremento de carga. Como pode se verificar, as configurações deformadas são visualmente iguais. Os símbolos sobre as curvas representam nós, e foram dispostos a cada 10 nós. Estes símbolos dão idéia da gradação da malha, mostrando que as regiões da conexão com a unidade flutuante e do TDP foram mais refinadas.

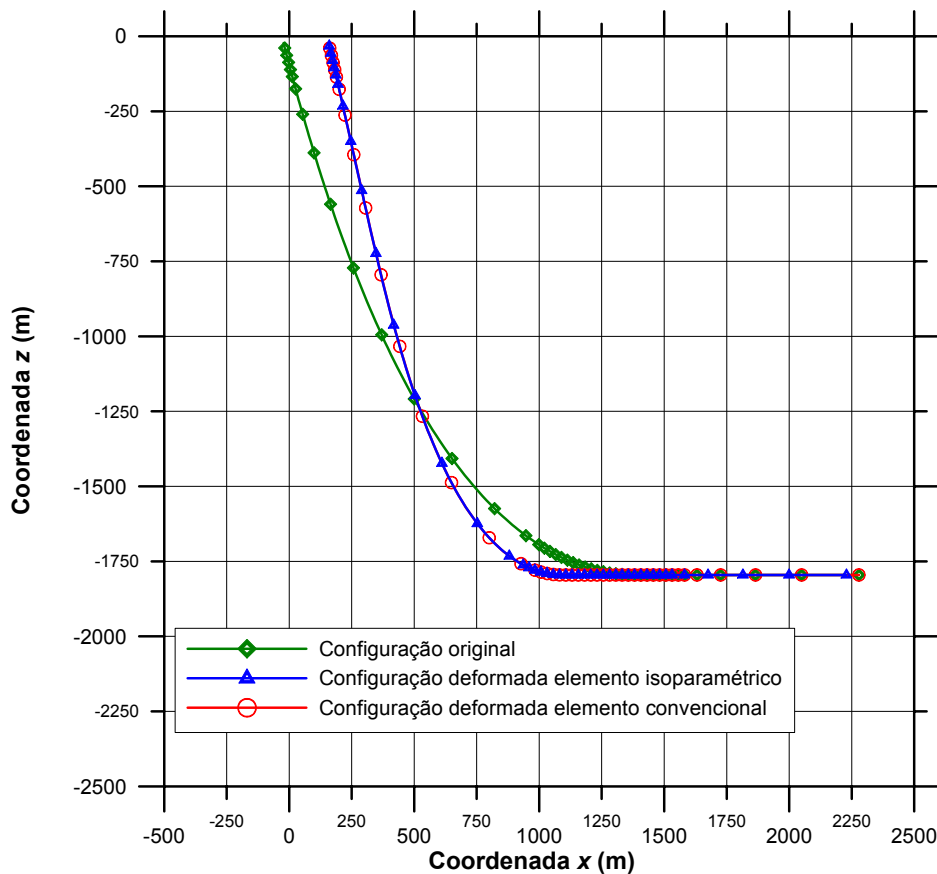


Figura 7.61 – Configurações original e deformadas com os elementos isoparamétrico e convencional no incremento 100

A Figura 7.62 mostra a tração ao longo da linha para os dois tipos de elemento no último incremento de deslocamento. As respostas se aproximam bastante, apresentando pequenas diferenças na região do TDP.

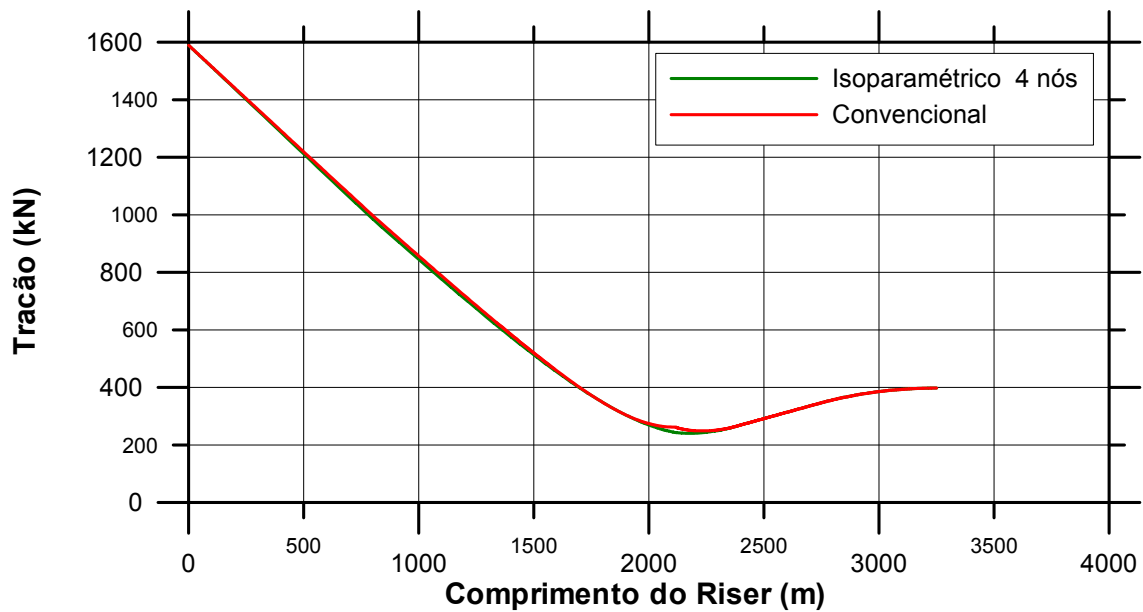


Figura 7.62 – Curva Tração versus Comprimento do *Riser* para os elementos isoparamétrico e convencional

A Figura 7.63 apresenta a tração ao longo da linha no intervalo entre 1.600 e 3.000 m, mostrando detalhadamente a respostas dos elemento na região do TDP e na proximidade a ancoragem. Conforme se verifica, existe uma pequena diferença a 2.120 m do comprimento da linha, de aproximadamente 20 kN. Neste ponto, a resposta do elemento convencional apresenta um pequeno pico, que pode estar associado a discretização da malha.

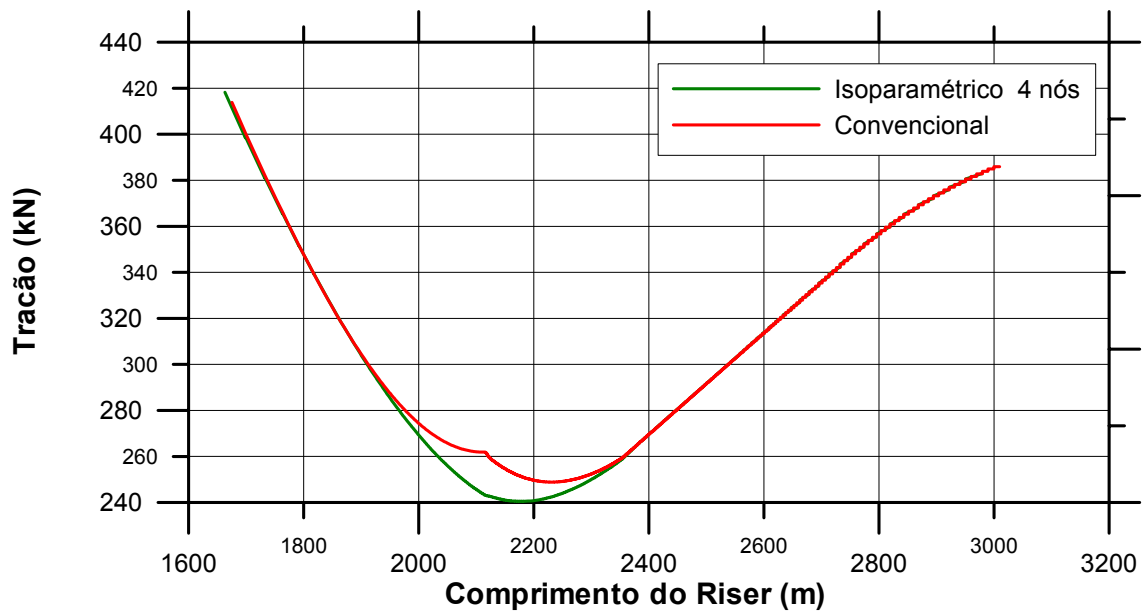


Figura 7.63 – Curva Tração versus Comprimento do *Riser* para os elementos isoparamétrico e convencional, entre 1.600 e 3.000 m do comprimento do *riser*

A Figura 7.64 mostra a curva de momento ao longo do comprimento da linha. De forma semelhante ao ocorrido nas curvas de tração, as respostas se aproximam bastante. A curva obtida com o elemento isoparamétrico apresenta pequenas oscilações no trecho apoiado da linha, onde o momento deveria ser constante.

A Figura 7.65 mostra em detalhe as diferenças entre as curvas de momento no intervalo entre 1.600 e 3.000 m, na região do TDP e na proximidade da ancoragem. As pequenas oscilações verificadas na resposta do elemento isoparamétrico podem estar associadas ao refinamento.

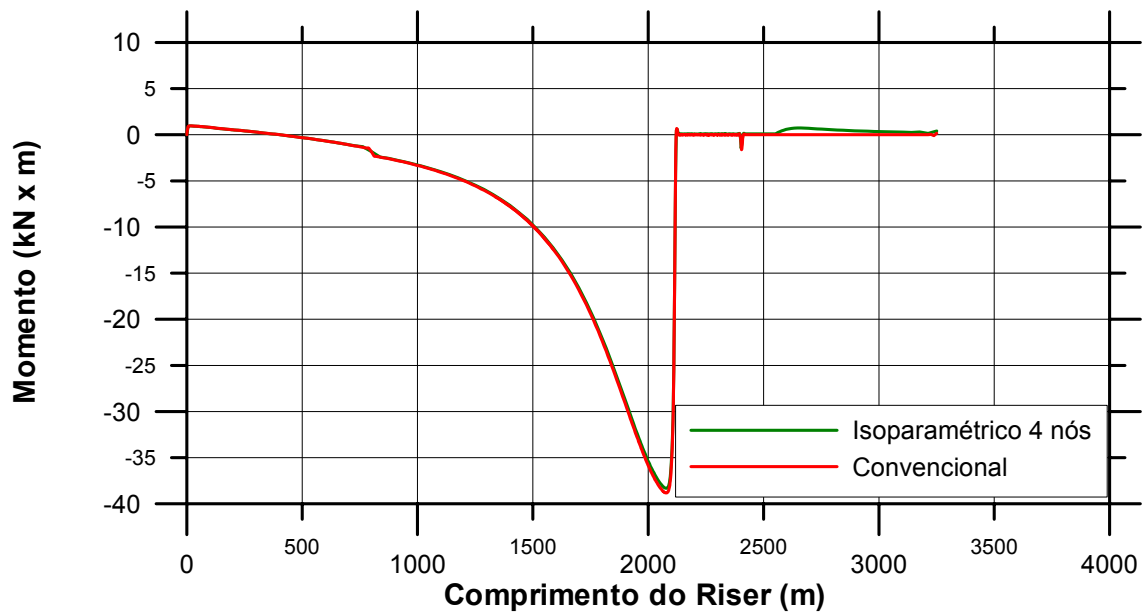


Figura 7.64 – Curva Momento versus Comprimento do *Riser* para os elementos isoparamétrico e convencional

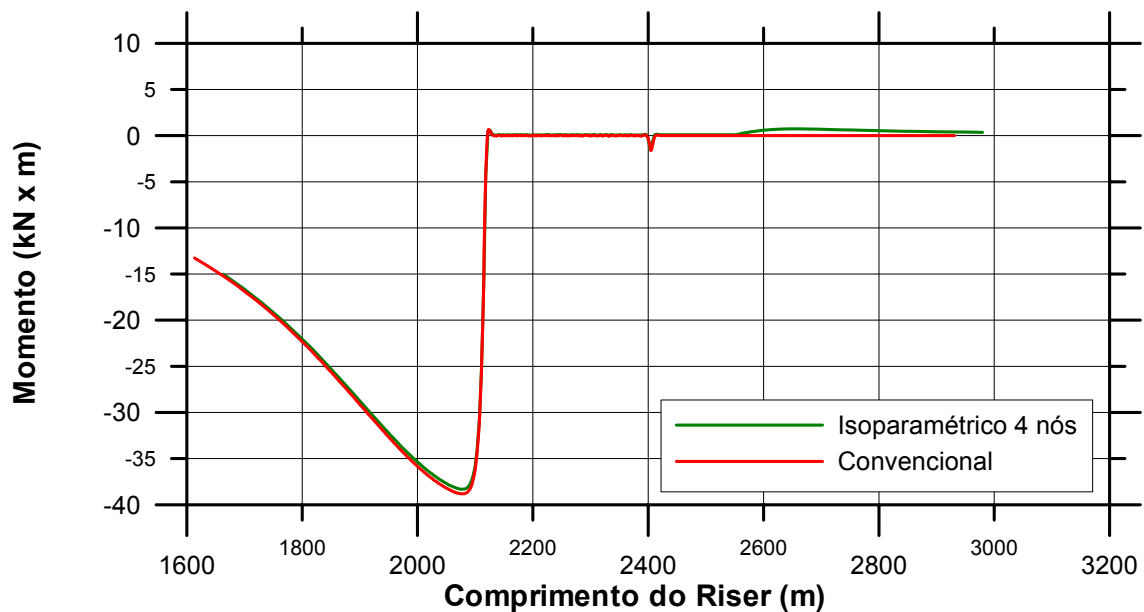


Figura 7.65 – Curva Momento versus Comprimento do *Riser* para os elementos isoparamétrico e convencional, entre 1.600 e 3.000 m do comprimento do *riser*

Este estudo, através das comparações entre os elementos, valida a implementação do elemento isoparamétrico para a análise estática de *riser*, apresentando resultados coerentes e que se aproximam. Avaliando melhor a performance do elemento isoparamétrico, a seguir é apresentado estudo de sensibilidade à gradação da malha.

7.7.3 Sensibilidade à Gradação da Malha

Este estudo tem como objetivo comparar a capacidade de representação do problema de *risers* com os elementos isoparamétrico e convencional, relacionada ao nível de gradação da malha. A partir da malha otimizada apresentada na Tabela 7.28, foram geradas outras 4 malhas, mantendo-se a mesma quantidade de nós entre os modelos com o mesmo nível de refinamento com os dois tipos de elemento, como definido na Tabela 7.29. Esta tabela mostra para todos os níveis de refinamento, o número de nós dos modelos, os comprimentos dos segmentos e as distâncias entre os nós inicial e final, por segmento.

Tabela 7.29 – Discretização das malhas utilizadas nos modelos

| Malha (número de nós) | Comprimento final e inicial entre nós (m) | | | | | |
|-----------------------------|---|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| | Região A (120 m) | Região B (680) m | Região C (850) m | Região D (300 m) | Região E (600 m) | Região F (700 m) |
| 1 (1.477) | 0,7–0,7 | 0,7–7 | 7–7 | 7–0,7 | 0,7–0,7 | 0,7–7 |
| 2 (889) | 1,25–1,25 | 1,25–12,5 | 12,5– 12,5 | 12,5– 1,25 | 1,25– 1,25 | 1,25–12,5 |
| 3 (445) | 2,5–2,5 | 2,5–25 | 25–25 | 25–2,5 | 2,5–2,5 | 2,5–25 |
| 4 (223) | 5–5 | 5–50 | 50–50 | 50–5 | 5–5 | 5–50 |
| 5 (112) | 10–10 | 10–100 | 106,25– 106,25 | 100–10 | 10–10 | 10–100 |

O carregamento e os parâmetros de análise foram os mesmos do estudo anterior. Todas as análises foram realizadas com 100 incrementos.

Em análises preliminares, verificou-se a presença de picos (na região apoiada) que se acentuavam na medida em que o refinamento se tornava mais grosseiro. Ao analisar o problema, notou-se que estes picos eram decorrentes da interpolação das curvaturas do ou dos elementos localizados na região de transição entre os trechos apoiado no fundo do mar e suspenso. Nesta região, a curvatura é nula no trecho apoiado e atinge o valor máximo logo após o afastamento do fundo. Desta forma, a interpolação feita neste ou nestes elementos geram momentos e conseqüentes tensões iniciais incoerentes, produzindo picos nas respostas de momento. No final da análise, como o movimento prescrito é no sentido *near*, estes aparecem no trecho reto apoiado, porém estavam inicialmente na região de transição.

Este problema pode ser resolvido com o cálculo da curvatura nos pontos de Gauss. Para isto, deve-se implementar um código específico no SITUA, evitando a interpolação feita no PROSIM.

7.7.3.1 Resultados Obtidos

7.7.3.1.1 Resultados com o Elemento Convencional

Os gráficos das Figuras 7.66 e 7.67 mostram as curvas Tração versus Comprimento do *Riser*, para os 5 níveis de refinamento, com o elemento convencional, no último incremento de carga. Em todos os casos, as análises foram realizadas até o final, e não apresentaram dificuldade de convergência.

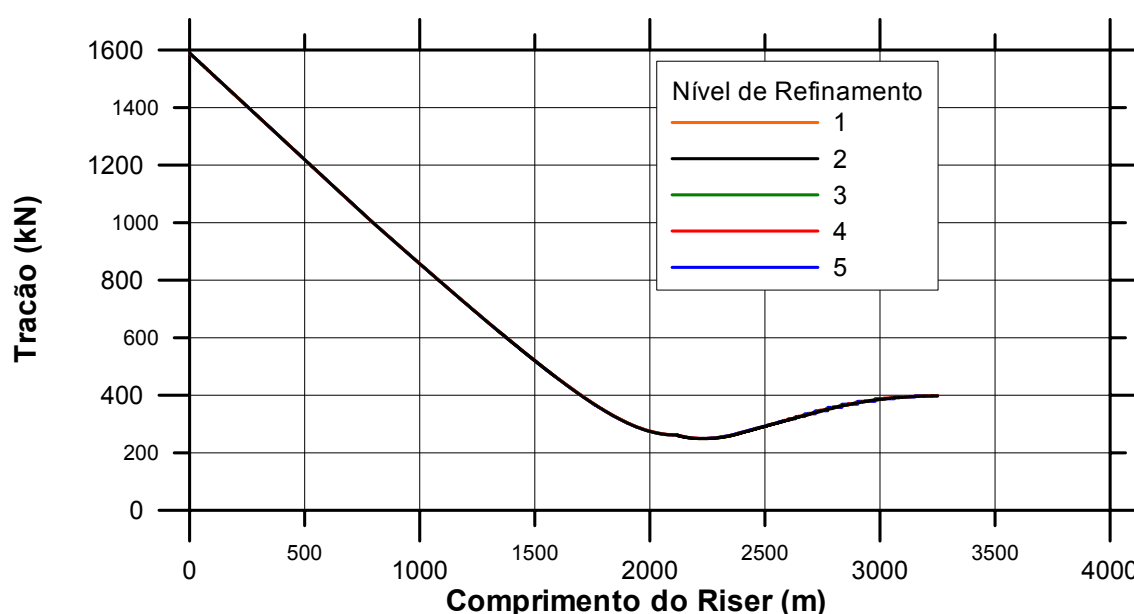


Figura 7.66 – Curva Tração versus Comprimento do *Riser* para o elemento convencional

A Figura 7.67 apresenta o trecho entre 1.600 e 3.000 m do gráfico da figura anterior, mostrando em detalhes as respostas do elemento. A partir do nível de refinamento 2, é possível verificar a formação de degraus, que iniciam a 2.200 m do comprimento da linha, e este comportamento se torna bem mais acentuado à medida que a malha se torna mais grosseira. Estes degraus estão associados ao atrito entre o *riser* e o solo, não significando uma perda da qualidade da resposta. Observa-se também a presença de um pequeno pico a aproximadamente 2.120 m, já visto na validação do problema, que se repete em todos os níveis de refinamento.

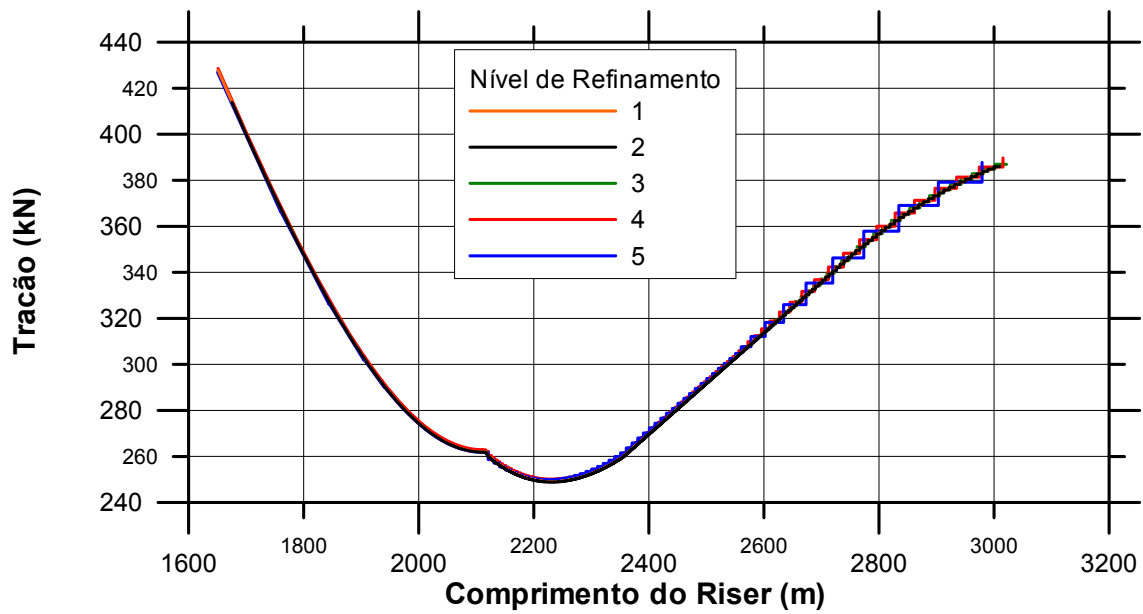


Figura 7.67 – Curva Tração versus Comprimento do *Riser* para o elemento convencional, entre 1.600 e 3.000 m do comprimento do *riser*

As Figuras 7.68 e 7.69 apresentam as curvas Momento versus Comprimento do *Riser* para os 5 níveis de refinamento obtidas com o elemento convencional. Os níveis de refinamento 3, 4 e 5 apresentam picos na região do TDP e no trecho apoiado, que diferem em até aproximadamente 7 kN x m da resposta com o modelo mais refinado.

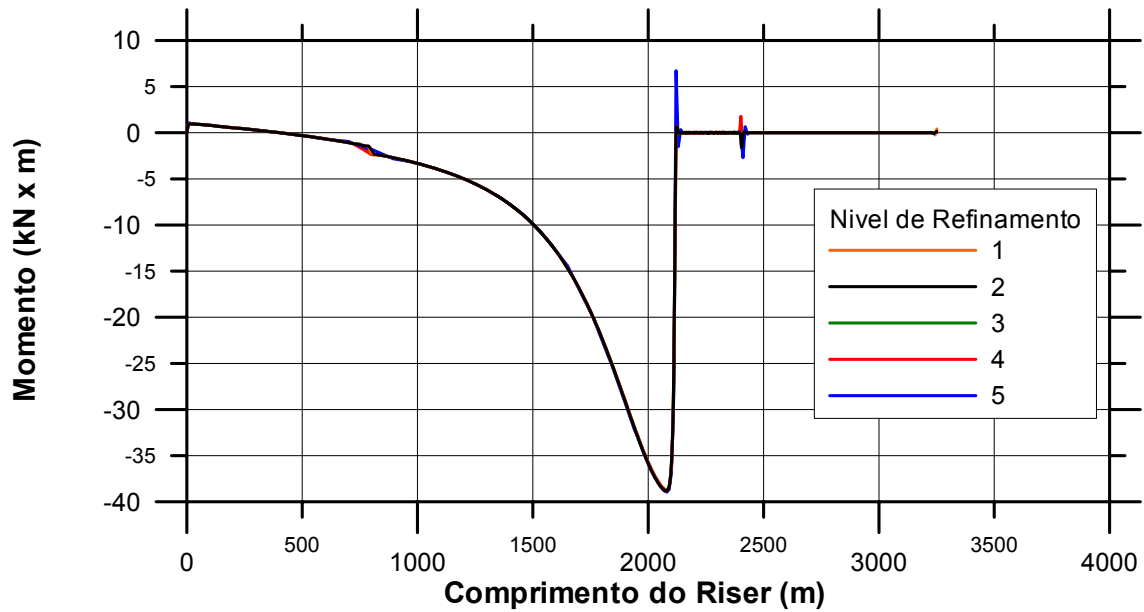


Figura 7.68 – Curva Momento versus Comprimento do *Riser* para o elemento convencional

A Figura 7.69 mostra a curva de momento em detalhe, no intervalo em 1.600 e 3.000 m. Os picos observados no gráfico surgem a partir do nível de refinamento 3 e se acentuam até o nível 5.

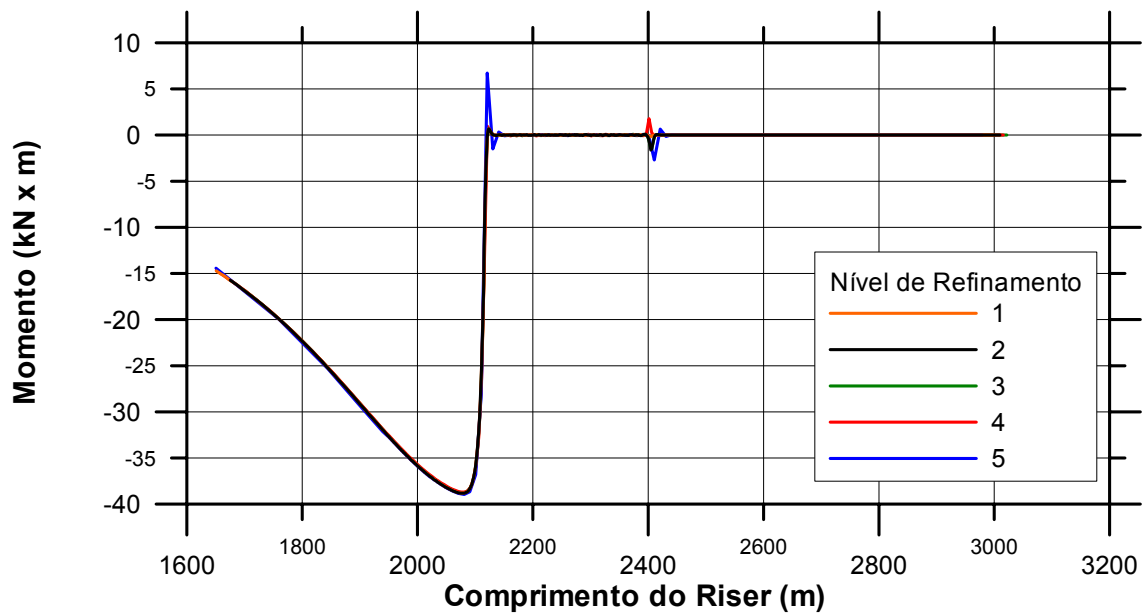


Figura 7.69 – Curva Momento versus Comprimento do *Riser* para o elemento convencional, entre 1.600 e 3.000 m do comprimento do *riser*

7.7.3.1.2 Resultados com o Elemento Isoparamétrico

Os gráficos das Figuras 7.70 e 7.71 mostram as curvas Tração versus Comprimento do *Riser* obtidas com o elemento isoparamétrico. Estas curvas mostram resultados próximos para todos os níveis de refinamento. De igual forma, este elemento realizou todas as análises sem dificuldades de convergência.

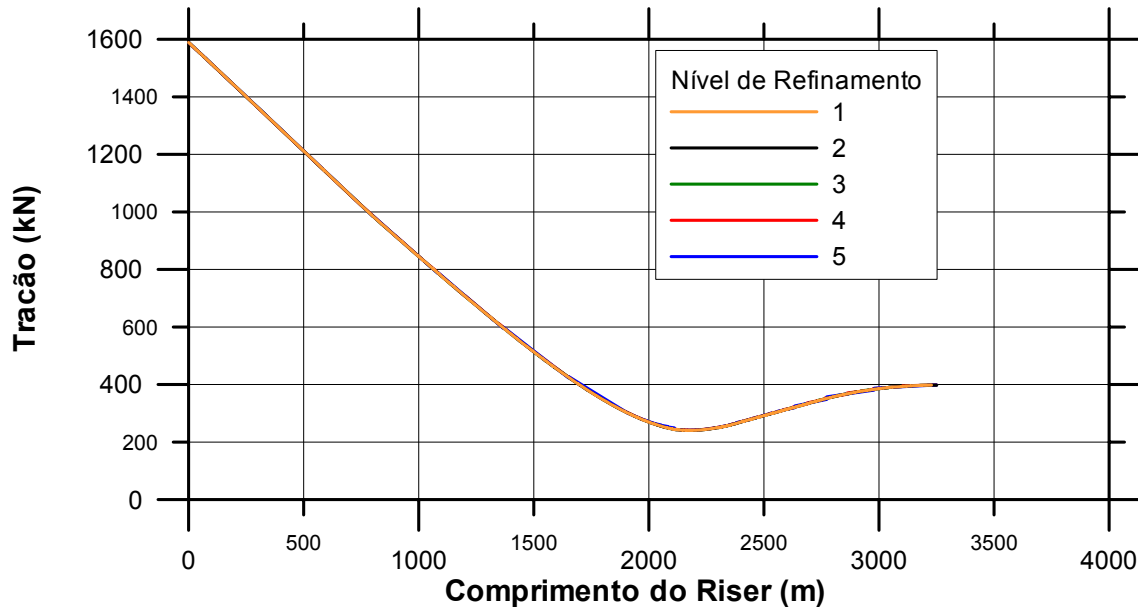


Figura 7.70 – Curva Tração versus Comprimento do *Riser* para o elemento isoparamétrico

A Figura 7.71 apresenta em detalhe a curva de momento entre 1.600 e 3.000 m do comprimento do *riser*. Neste intervalo, assim como nos casos com o elemento convencional, verifica-se a existência de degraus no trecho apoiado no solo nos modelos menos refinados, mas este comportamento só se apresenta bem visível no nível de refinamento 5. Estes degraus, associados ao atrito entre o *riser* e o solo, apresenta forma diferente da obtida com o elemento convencional devido a forma como é impressa a tração no elemento isoparamétrico, apenas nos nós extremos do elemento. Os bicos verificados nos modelos com o elemento convencional não foram verificados nestes modelos.

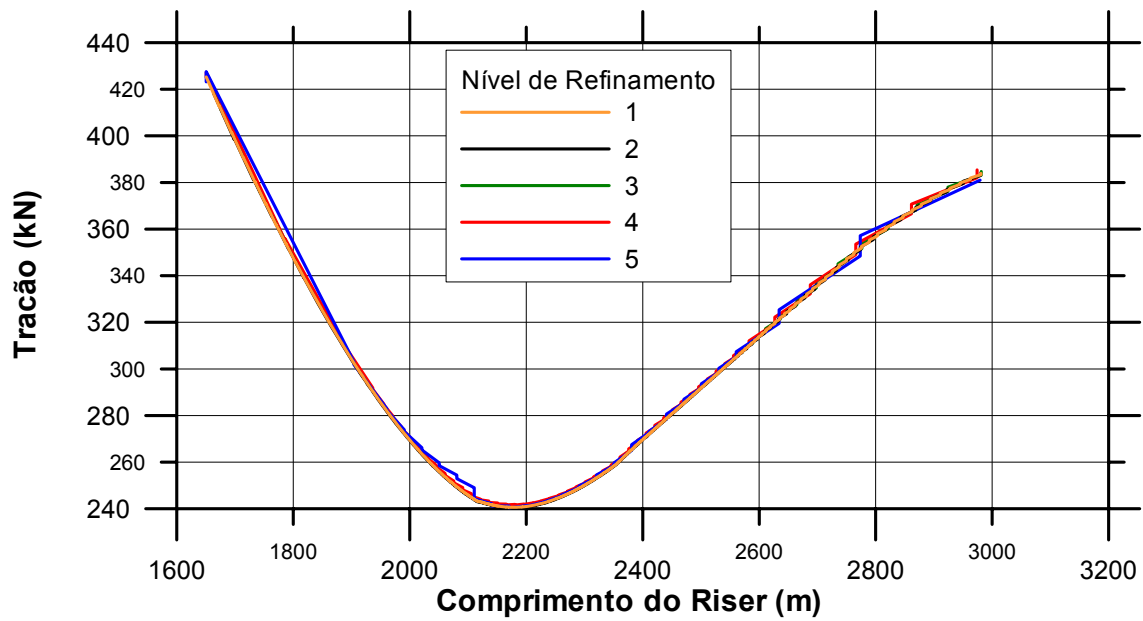


Figura 7.71 – Curva Tracção versus Comprimento do *Riser* para o elemento isoparamétrico, entre 1.600 e 3.000 m do comprimento do *riser*

As curvas Momento versus Comprimento do *Riser* podem ser vistas nos gráficos das Figuras 7.72 e 7.73. Conforme se verifica, os picos observado com o elemento convencional aparecem nestas curvas a partir do nível de refinamento 4, e se acentua muito no nível 5, quando a malha se torna mais grosseira.

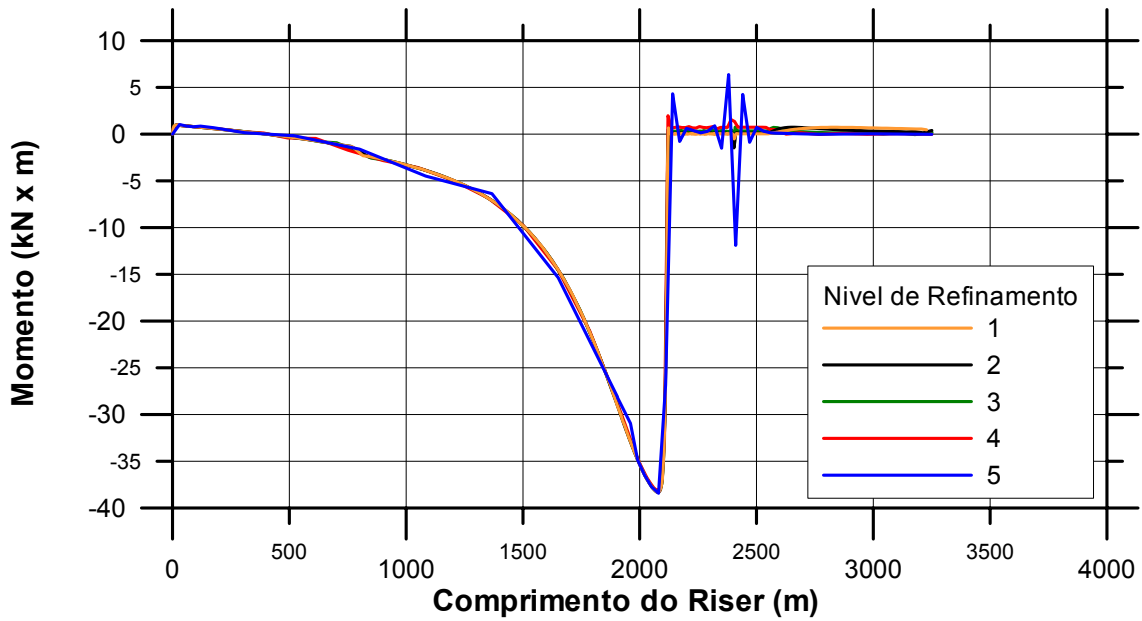


Figura 7.72 – Curva Momento versus Comprimento do *Riser* para o elemento isoparamétrico

O gráfico da Figura 7.73 mostra em detalhe o gráfico anterior, no intervalo entre 1.600 e 3.000 m. Como já verificado, os picos ocorrem na região do TDP e no trecho apoiado, e se acentuam quando a malha se torna mais pobre em termos de refinamento.

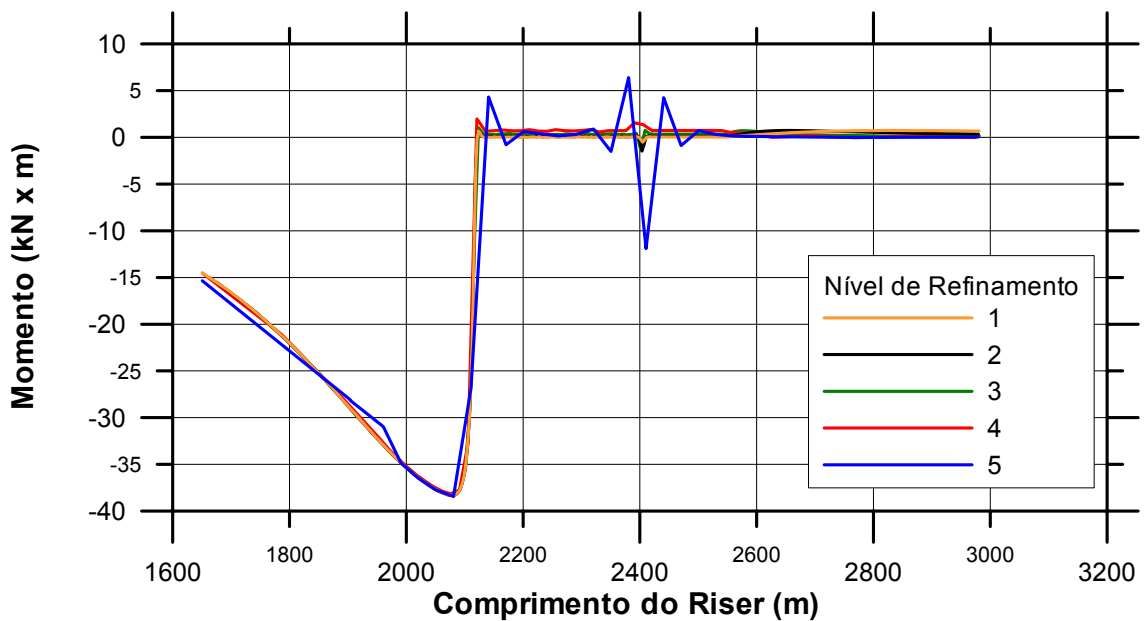


Figura 7.73 – Curva Momento versus Comprimento do *Riser* para o elemento isoparamétrico, entre 1.600 e 3.000 m do comprimento do *riser*

7.7.3.1.3 Comparação dos Resultados dos Elementos Isoparamétrico e Convencional

As Figuras 7.74 a 7.78, comparam, para cada nível de refinamento, as curvas de tração longo do comprimento do *riser*, permitindo analisar melhor a performance de cada tipo de elemento.

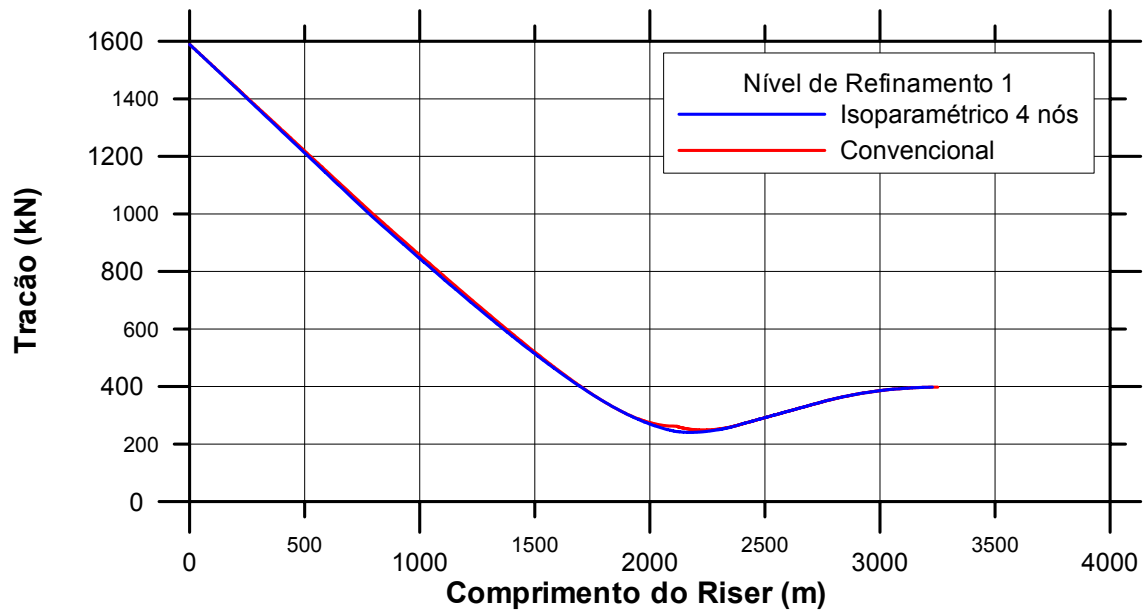


Figura 7.74 – Curva Tração versus Comprimento do *Riser* para os elementos isoparamétrico e convencional, nível de refinamento 1

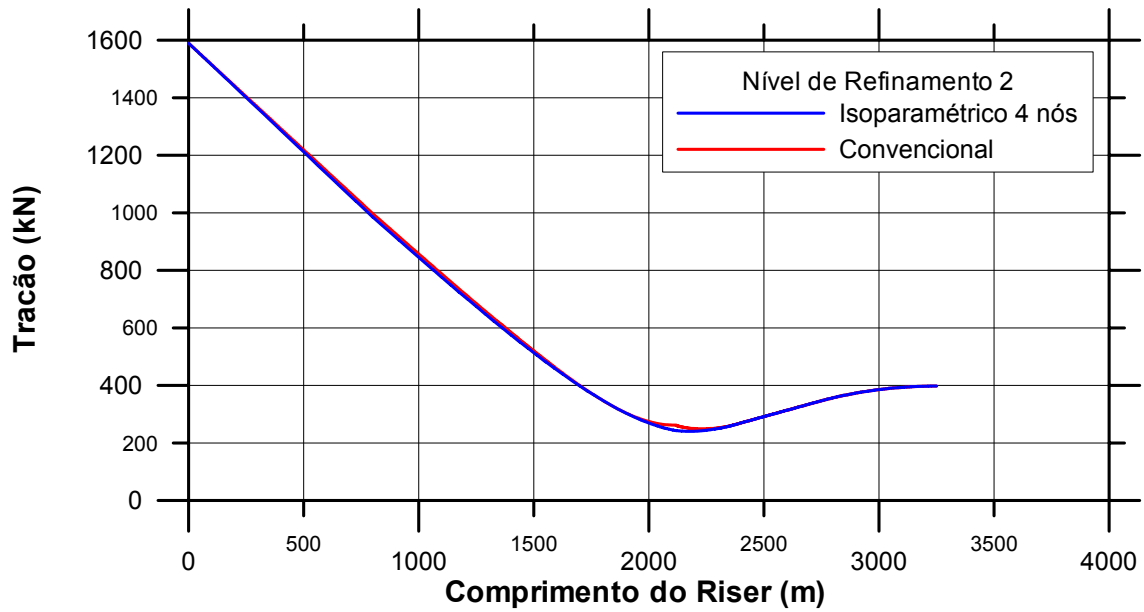


Figura 7.75 – Curva Tração versus Comprimento do *Riser* para os elementos isoparamétrico e convencional, nível de refinamento 2

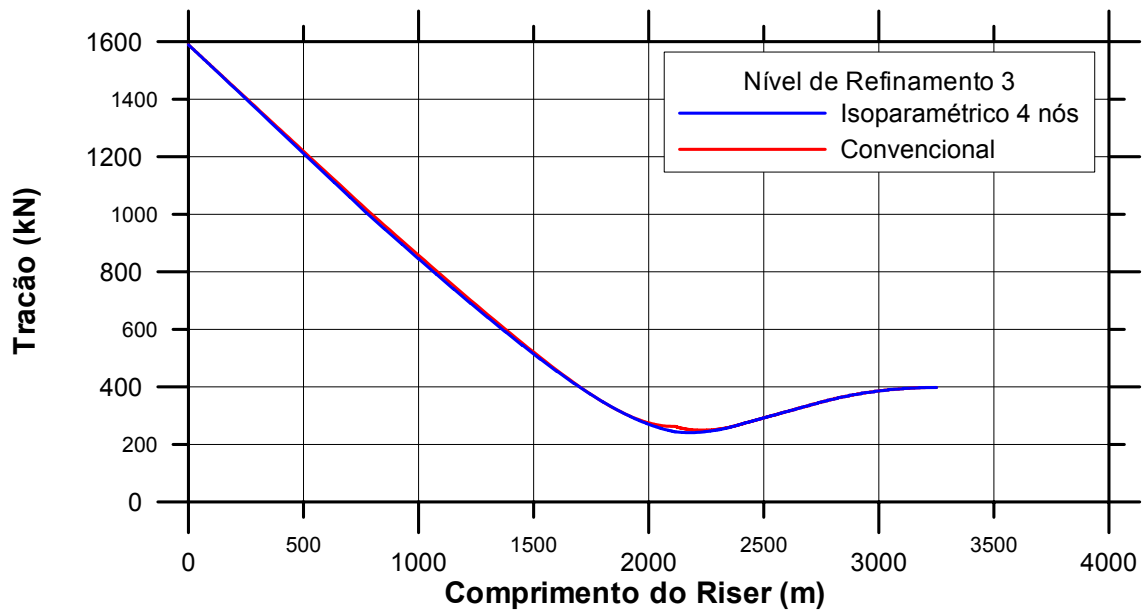


Figura 7.76 – Curva Tração versus Comprimento do *Riser* para os elementos isoparamétrico e convencional, nível de refinamento 3

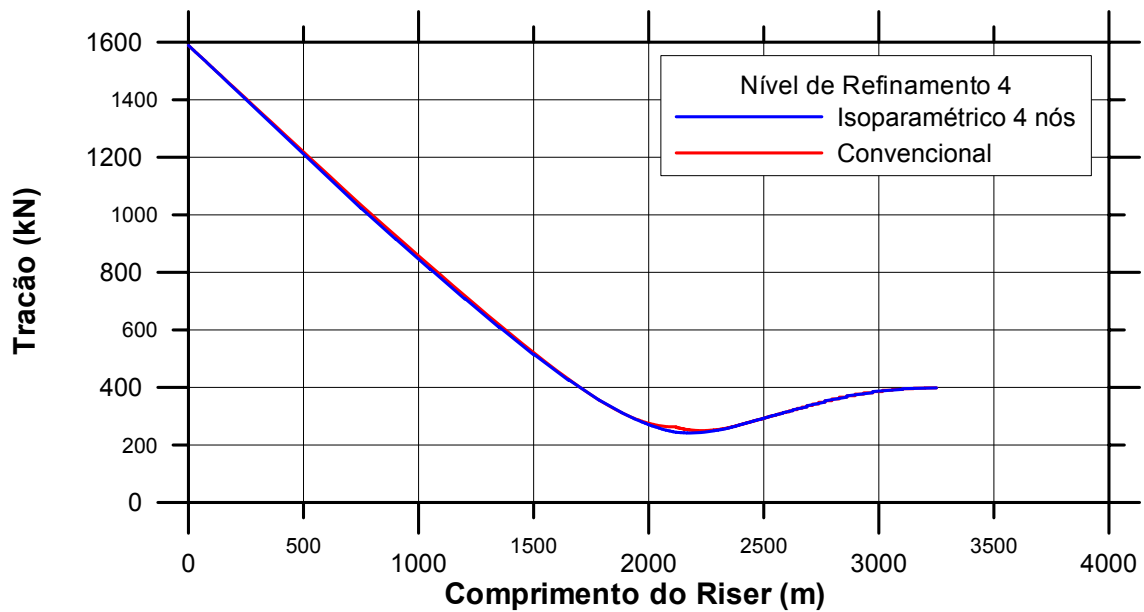


Figura 7.77 – Curva Tração versus Comprimento do *Riser* para os elementos isoparamétrico e convencional, nível de refinamento 4

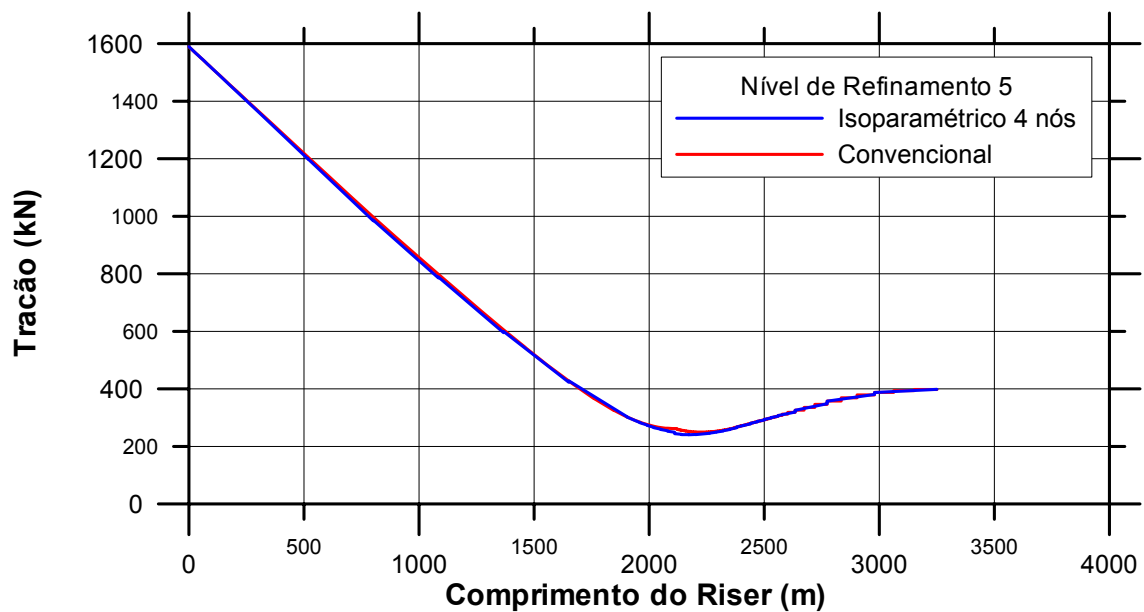


Figura 7.78 – Curva Tração versus Comprimento do *Riser* para os elementos isoparamétrico e convencional, nível de refinamento 5

Verificando-se as curvas de tração, nota-se que as respostas são praticamente iguais até o nível de refinamento 4, quando os elementos começam a mostrar degraus devido ao atrito do *riser* com o solo na região apoiada. O pico que aparece na região do TDP não está associado à gradação da malha, pois apresenta a mesma forma e amplitude independente do nível de refinamento. O elemento

isoparamétrico apresenta bons resultados em todos os níveis de refinamento. De forma geral, pode-se dizer que para esta resposta o elemento isoparamétrico apresenta uma melhor performance.

As Figuras 7.79 a 7.83 mostram as curvas de momento ao longo do comprimento do *riser*, comparando a performance dos elementos isoparamétrico e convencional nesta resposta.

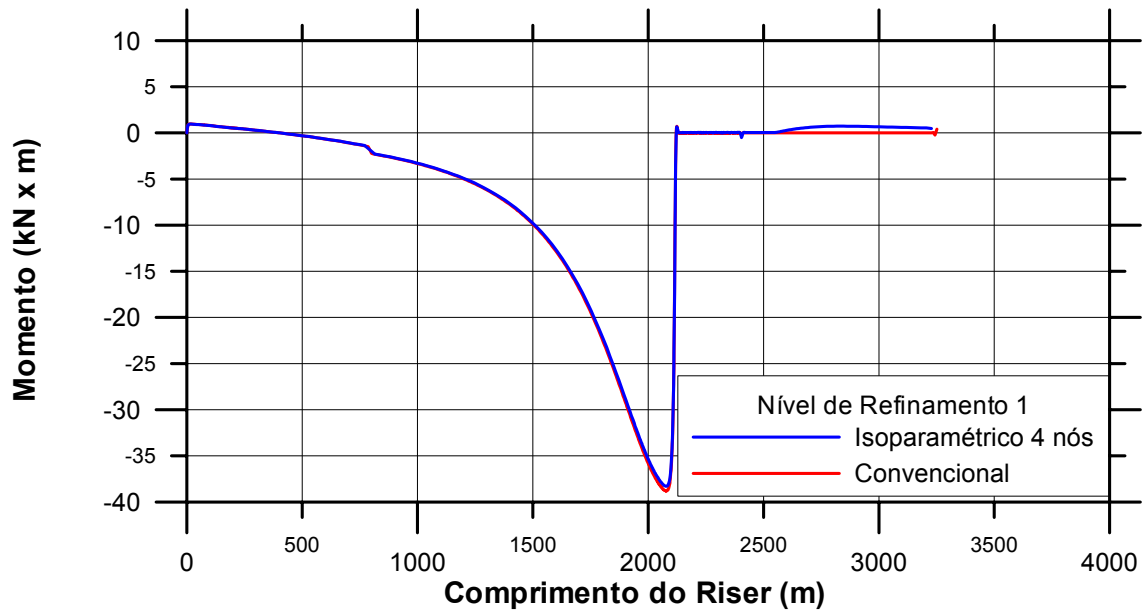


Figura 7.79 – Curva Momento versus Comprimento do *Riser* para os elementos isoparamétrico e convencional, nível de refinamento 1

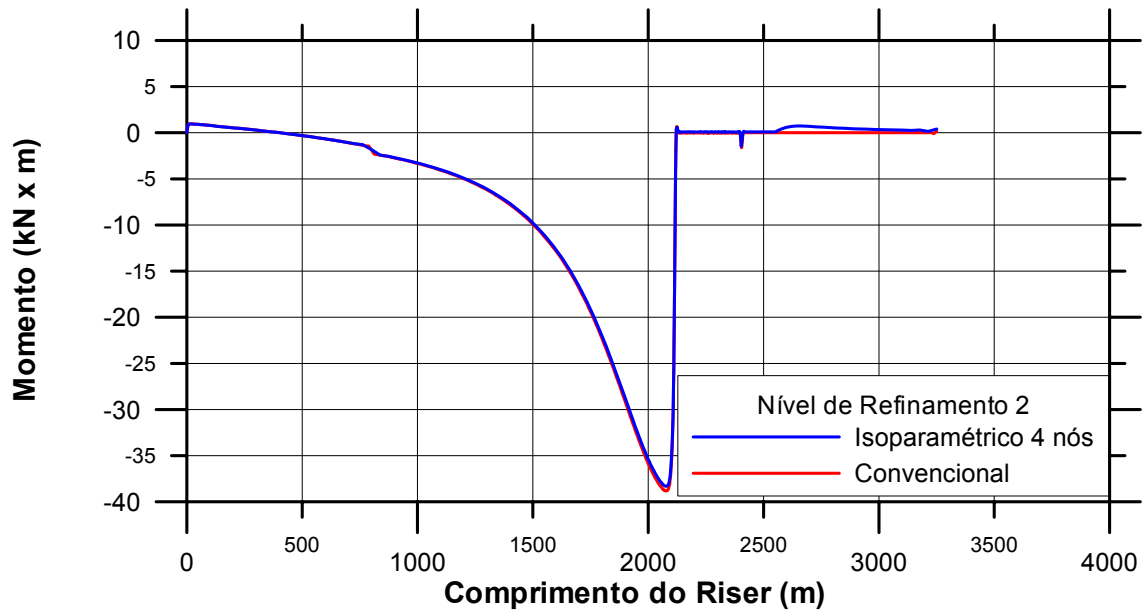


Figura 7.80 – Curva Momento versus Comprimento do *Riser* para os elementos isoparamétrico e convencional, nível de refinamento 2

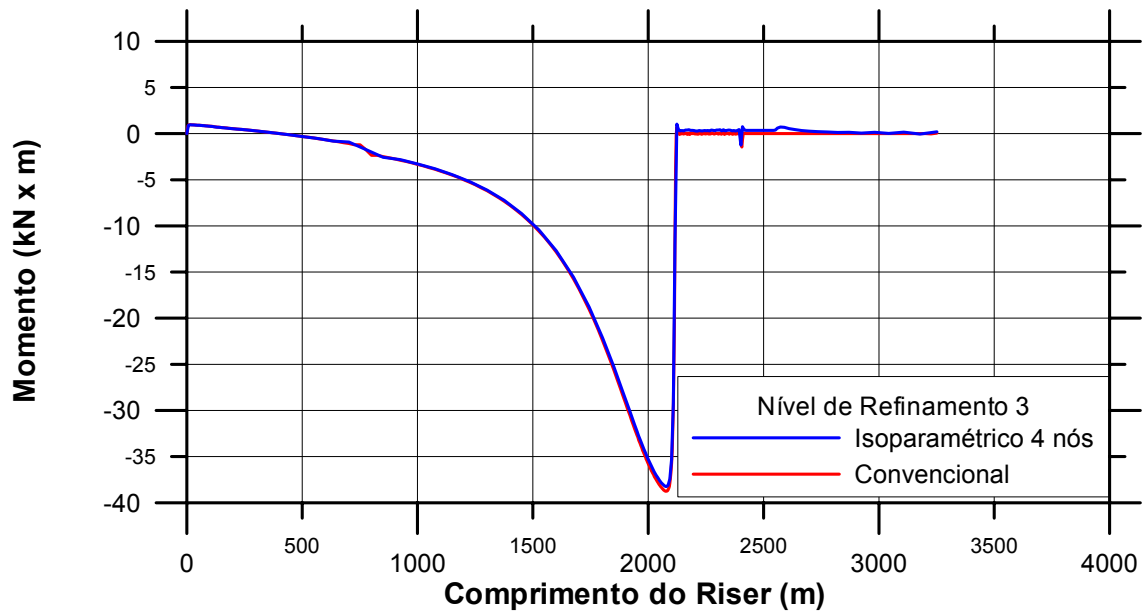


Figura 7.81 – Curva Momento versus Comprimento do *Riser* para os elementos isoparamétrico e convencional, nível de refinamento 3

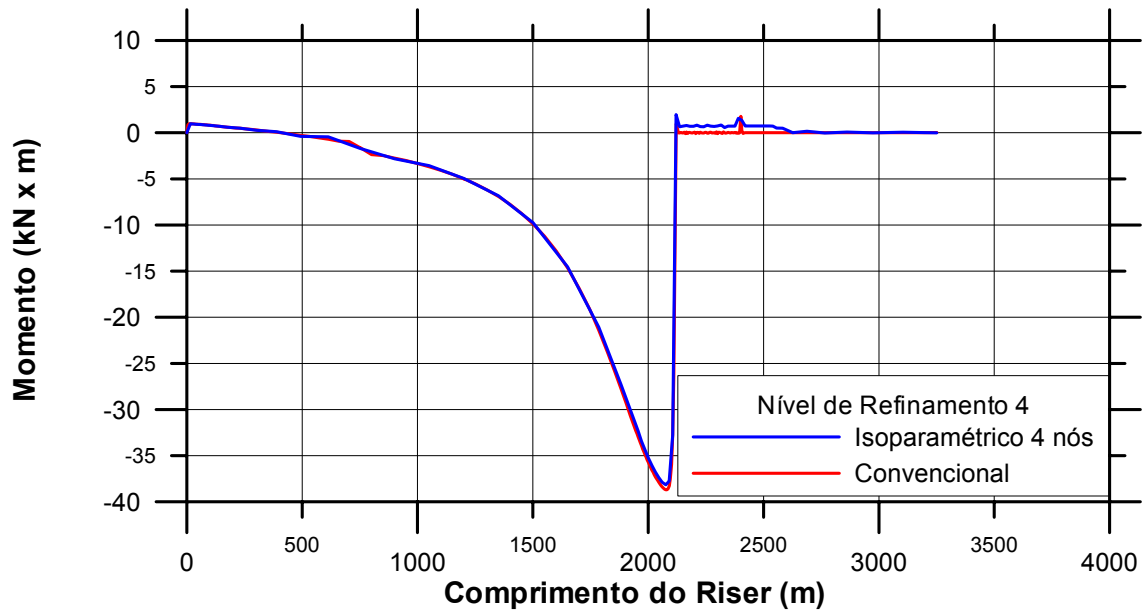


Figura 7.82 – Curva Momento versus Comprimento do *Riser* para os elementos isoparamétrico e convencional, nível de refinamento 4

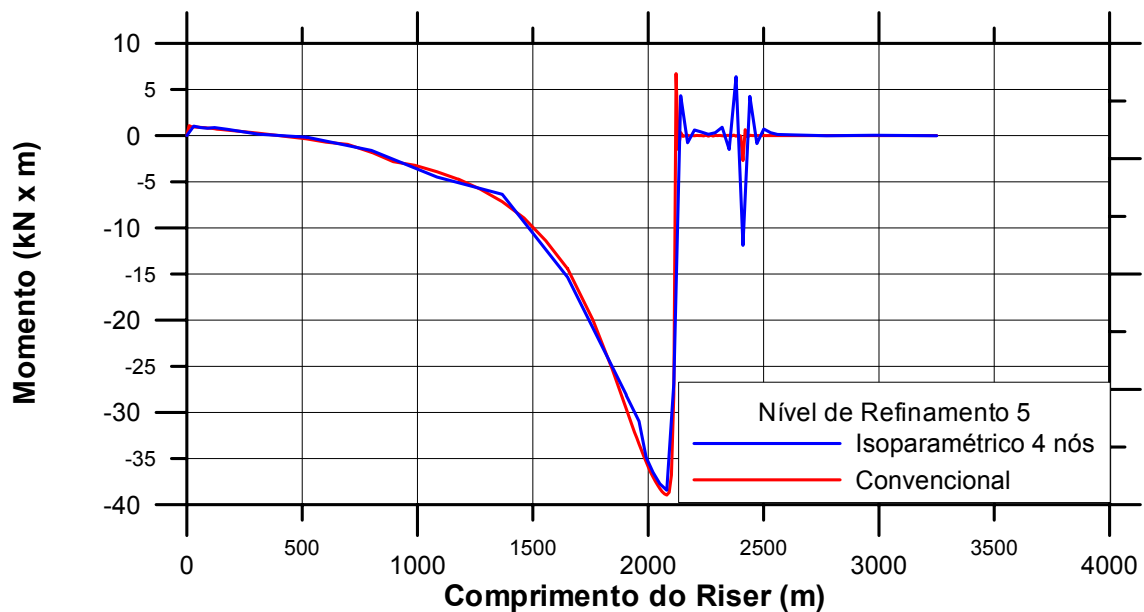


Figura 7.83 – Curva Momento versus Comprimento do *Riser* para os elementos isoparamétrico e convencional, nível de refinamento 5

A análise das curvas mostra que os dois elementos apresentam sensibilidade ao refinamento quando se considera a resposta de momento, sendo o elemento isoparamétrico bem mais sensível, com alguma perturbação na resposta desde o nível de refinamento 1.

Os dois elementos apresentaram-se mais sensíveis ao refinamento nas curvas de momento do que nas de tração. As regiões apoiada no solo e na proximidade do TDP são as que apresentam maior instabilidade na resposta de momento, com ênfase ao ponto originalmente de transição, entre o trecho suspenso e apoiado. A princípio, suspeitou-se que este problema estivesse associado ao refinamento na interação solo-estrutura, mas este estudo mostrou que está associado ao refinamento da estrutura como um todo, mais especificamente na região de transição, e a interpolação da curvatura. Verifica-se na curva de momento do elemento isoparamétrico, referente ao nível de refinamento 5, no trecho suspenso, que a resposta não varia suavemente com o comprimento.

Como verificado, o pico nas curvas de tração com o elemento convencional a aproximadamente 2.120 m não estão associados ao refinamento, mas sim ao elemento. Os modelos com elemento convencional foram gerados a partir dos modelos com o elemento isoparamétrico, mudando-se apenas o tipo de elemento, o que descarta a hipótese da existência de alguma diferença que possa causar tal comportamento.

Vale ressaltar que, neste tipo de análise é importante a determinação dos valores máximos da tração na conexão com a unidade flutuante e de momento no TDP, os quais são considerados nos projetos.

A Tabela 7.30 apresenta os valores de tração no topo no incremento 100 para os dois tipos de elemento. Os números entre parêntese mostram a relação desta resposta com a do modelo mais refinado (modelo 1). Conforme se verifica, a sensibilidade ao refinamento é praticamente imperceptível.

Tabela 7.30 – Valores de tração no topo no incremento 100

| Modelo | Tração no topo (kN) | |
|---------------|----------------------------|---------------------|
| | Isoparamétrico | Convencional |
| 1 | 1589,067 (1,000) | 1589,423 (1,000) |
| 2 | 1589,128 (1,000) | 1589,397 (1,000) |
| 3 | 1588,877 (1,000) | 1589,318 (1,000) |
| 4 | 1588,794 (1,000) | 1588,921 (1,000) |
| 5 | 1589,284 (1,000) | 1587,412 (0,999) |

A Tabela 7.31 mostra os valores máximos de momento no TDP no incremento 100. Os números entre parêntese, assim como na tabela anterior, mostram a relação desta resposta com a do modelo mais refinado (modelo 1). Esta resposta mostra pouca sensibilidade ao refinamento para os dois elementos. O elemento isoparamétrico apresenta variações na resposta a partir do nível refinamento 3, enquanto que o convencional a partir do nível de refinamento 4. Esta desvantagem do elemento isoparamétrico, mesmo sendo muito discreta, provelmente deve-se à interpolação das curvaturas.

Tabela 7.31 – Valores máximos de momento no TDP no incremento 100

| Modelo | Momento (kN x m) | |
|---------------|-------------------------|---------------------|
| | Isoparamétrico | Convencional |
| 1 | -38,308 (1,000) | -38,825 (1,000) |
| 2 | -38,321 (1,000) | -38,828 (1,000) |
| 3 | -38,243 (0,998) | -38,837 (1,000) |
| 4 | -38,151 (0,996) | -38,685 (0,996) |
| 5 | -38,429 (1,003) | -39,054 (1,006) |

8 CONCLUSÕES

8.1 Considerações Gerais

Este trabalho tratou do desenvolvimento e aplicação de ferramentas numéricas para a análise de dois grupos de estruturas flexíveis empregadas em sistemas de exploração de petróleo: dutos e *risers*. São estruturas que apresentam características particulares no seu comportamento e que, portanto, requerem o desenvolvimento de recursos de modelação específicos.

Tais recursos se concentraram em torno do desenvolvimento e implementação de um elemento isoparamétrico não-linear de 4 nós (ISO4), e dos demais recursos necessários para a modelação, incluindo os tipos de carregamento, e condições iniciais em termos de trações e curvaturas para *risers*, com o objetivo de ampliar a capacidade de aplicação da ferramenta computacional na análise e projeto de dutos e *risers*. Dentre os novos desenvolvimentos realizados, podem-se citar:

- Originalmente o elemento isoparamétrico tinha recursos para modelar apenas elementos com seção retangular; para permitir a aplicação em dutos e *risers*, foram implementados recursos para modelação de seções circulares.
- Desenvolvimento de rotinas para a geração automática dos cossenos diretores que definem o sistema local móvel da seção transversal nos pontos nodais (em implementações convencionais de elementos isoparamétricos, estes cossenos diretores devem ser fornecidos pelo usuário).
- Implementação do carregamento térmico, na forma de incremento de tensões equivalentes a incrementos de temperatura, proporcionando a análise termo-mecânica de dutos.

- Para o estudo de *risers* e linha flexíveis, foram implementados recursos para a consideração de trações e curvaturas iniciais (fornecidas por um pré-processador baseado nas equações da catenária) correspondentes a um estado de equilíbrio inicial da estrutura. Esta implementação, de forma semelhante a do carregamento térmico, baseou-se no cálculo de tensões nos pontos de Gauss equivalentes ao estado de trações e curvaturas iniciais lidas, e na transferência destas tensões para o vetor de tensões global da estrutura ao início de cada análise.
- Foram implementadas rotinas para transformação do carregamento distribuído de onda e correnteza em cargas nodais equivalentes, seguindo a formulação isoparamétrica. Esta tarefa não segue o procedimento intuitivo aplicado ao elemento de 2 nós.

8.2 Comentários Finais

Essas implementações foram efetuadas no código do programa PROSIM [24], e foram aplicadas no estudo de casos acadêmicos e reais. Os resultados obtidos se mostraram consistentes, com precisão, robustez e eficiência na solução das aplicações.

Os resultados apresentados para os casos estudados permitiram uma avaliação detalhada dos desenvolvimentos realizados e das ferramentas propostas para o tratamento de *risers* e dutos. A seguir, são apresentadas algumas conclusões que se podem obter:

- Foram realizados vários estudos de refinamento, todos com o objetivo de comparar a performance do elemento isoparamétrico ISO4 com outros tipos de elementos de 2 nós: tanto o convencional originalmente implementado no PROSIM, quanto o isoparamétrico PIPE31 do programa comercial ABAQUS [1]. Procurou-se sempre estabelecer comparações com modelos com a mesma quantidade de nós. Os resultados mostraram que o elemento isoparamétrico de 4 nós sempre apresenta melhor performance, com pouca dispersão nos resultados, mostrando menor sensibilidade à gradação da malha. Em geral, malhas menos refinadas de elementos ISO4 foram capazes de resolver

problemas para os quais malhas equivalentes dos outros tipos de elemento não foram capazes de fornecer solução.

- Um exemplo de aplicação que ilustra esta característica do elemento ISO4 é o problema do arco abatido, associado à técnica de continuação de controle de comprimento de arco. Esta técnica se aplica bem ao elemento isoparamétrico, permitindo obter toda a trajetória de equilíbrio da estrutura sem a ocorrência de dificuldade de convergência ou problemas com raiz complexa na solução da equação quadrática que determina o $\Delta\lambda$. Já os modelos de comparação com outros tipos de elemento convencional não mostraram o mesmo desempenho, sendo capazes de completar toda a trajetória de equilíbrio apenas com as malhas mais refinadas. Com o modelo menos refinado, estes elementos realizaram apenas parte da análise, finalizando após o aparecimento de raiz complexa.
- Os modelos de dutos analisados mostraram que a implementação do carregamento térmico como incrementos de tensões calculados a partir de incrementos de temperatura, inseridos no vetor de tensões global da estrutura no início de cada incremento de carga, produz resultados coerentes. A retro-análise realizada a partir dos deslocamentos e das reações em elementos que se mantiveram retos durante toda a análise, permitiu verificar a consistência da solução quando se comparou o parâmetro de carga aplicado com o proveniente da retro-análise. As comparações com as soluções do programa ABAQUS, com o elemento PIPE31, também mostraram a coerência da implementação. Resta tratar da associação deste tipo de carregamento com a estratégia de controle de comprimento de arco, como será comentado no item a seguir.
- A consideração de trações e curvaturas iniciais gerando um estado de tensões iniciais, nos casos de *risers* em configuração de catenária, levou a resultados com consistência e estabilidade numérica. Algumas melhorias ainda podem ser implementadas quanto à leitura de curvaturas diretamente nos pontos de Gauss, ao invés da leitura nos nós e interpolação das curvaturas, como será comentado no item a seguir.
- O elemento isoparamétrico mostrou ser capaz de resolver problemas estruturais com alto índice de esbeltez. Tanto no caso mais simples, como a coluna de

Euler, como no caso de *riser* os problemas foram resolvidos apresentando respostas satisfatórias. Os resultados obtidos indicam este elemento como uma boa alternativa para modelar estruturas muito esbeltas; entretanto, como será comentado a seguir, a execução de estudos paramétricos adicionais seria importante para confirmar se este elemento pode resolver problemas ultra-esbeltos tais como cabos umbilicais por exemplo.

- A implementação da descrição de movimento Lagrangeana Total, utilizada no elemento isoparamétrico, requer pequenos incrementos de rotações e, portanto, pode exigir um número mais elevado de incrementos de carga para efetuar as análises. Isto foi verificado nos casos de *risers*, onde, para evitar problemas de convergência e *overflow* na montagem da matriz de rigidez, as análises exigiram um número de incrementos relativamente maior do que o requerido com o elemento convencional de dois nós com descrição co-rotacionada. Este comportamento sugere a utilização de novos estudos combinando a descrição co-rotacionada ao elemento isoparamétrico, como será comentado no item a seguir. De qualquer modo, considera-se que esse comportamento não é crítico, já que deve estar associado primordialmente a análises estáticas; para análises dinâmicas, que são as que demandam maior tempo computacional, os intervalos de tempo empregados no algoritmo de solução do problema dinâmico devem compor incrementos de carga relativamente pequenos, que devem atender aos requisitos da formulação Lagrangeana Total.

Em resumo, observa-se que o desenvolvimento de ferramentas para o dimensionamento e projeto de dutos e *risers* é uma tarefa crescente e que exige um trabalho contínuo de pesquisa. Espera-se que os desenvolvimentos de ferramentas computacionais e os resultados das aplicações estudadas neste trabalho levem a contribuições significativas nesta linha de pesquisa.

8.3 Sugestões para Trabalhos Futuros

Apesar dos esforços no sentido de procurar a maior abrangência possível no que se refere aos desenvolvimentos e implementações do elemento isoparamétrico e aplicações para estudo de dutos e *risers*, algumas pendências podem ser identificadas, as quais devem ser resolvidas em trabalhos posteriores. A seguir são apresentadas as

principais pendências identificadas e que, se resolvidas, podem contribuir muito para a aplicação eficiente do elemento isoparamétrico a essa classe de problemas:

- Como se sabe, o projeto de *risers* requer recursos não somente para análise estática, mas também para análise dinâmica sob a ação de carregamentos de onda e do movimento da plataforma. Para permitir isto, basta apenas concluir a implementação de uma rotina para o cálculo da matriz de massa consistente do elemento isoparamétrico. Optou-se por não efetuar este desenvolvimento neste trabalho, já que iria requerer uma modificação mais profunda no código do programa PROSIM [24], que atualmente está preparado apenas para tratar matrizes de massa diagonais (“lumped mass”) oriundas das formulações convencionais de elementos de pórtico e treliça de dois nós. Mais adiante, uma vez implementadas estas modificações, poderiam ser feitos novos estudos paramétricos, na linha dos estudos apresentados em [7], para prosseguir na avaliação do desempenho do elemento em aplicações a *risers* e linhas flexíveis.
- Como pôde ser verificado na aplicação do Capítulo 7 ao problema de flambagem de dutos aquecidos, para obter soluções após pontos limite é necessária a utilização de uma técnica de continuação. No entanto, a técnica de controle de comprimento de arco cilíndrico (*arc-length method*) [54], da forma em que está implementada no programa PROSIM, não se aplica ao carregamento térmico. Como o carregamento térmico se dá na forma de incrementos de tensão equivalente a um incremento de temperatura diretamente no vetor de tensões global da estrutura, não existe um vetor de carregamento externo cuja magnitude é o parâmetro a ser definido pela técnica de controle do comprimento de arco controlado. Desta forma, pretende-se futuramente adaptar a implementação da técnica *arc-length* para permitir sua associação ao carregamento térmico.
- O elemento isoparamétrico, com seção retangular ou circular, tem grande potencial para a representação do problema de plasticidade. Como este elemento se baseia no cálculo de tensões em pontos de integração ao longo da seção, é possível avaliar a plastificação em cada um destes pontos, tornando o problema mais próximo da realidade, onde em geral a plastificação é distribuída, iniciando-se em algum ponto da seção e se propagando para outros. O elemento

convencional só permite a implementação da plasticidade concentrada. Apesar de não ter sido reportado ao longo do texto desta tese qualquer tópico sobre plasticidade, chegou-se a efetuar os desenvolvimentos necessários e a codificar todas as rotinas para o tratamento deste problema; no entanto, por falta de tempo, ficaram pendentes a depuração das rotinas e a execução de testes, que ficarão para um trabalho posterior.

- Os resultados para a aplicação em *risers* permitiram observar alguns ruídos no diagrama de momentos obtidos com malhas menos refinadas do elemento isoparamétrico. Este comportamento pode ser atribuído ao procedimento de leitura de valores de trações e curvaturas iniciais nos nós e cálculo das tensões iniciais, com a posterior interpolação destes valores para os pontos de Gauss empregando as funções de interpolação. Como a variação de curvatura próximo ao TDP de *risers* pode ser muito acentuada, este procedimento pode não ser satisfatório. Uma melhor forma de tratar este problema é através da leitura das trações e curvaturas diretamente nos pontos de integração, sendo necessário portanto adaptar o pré-processador SITUA [49] para gerar as curvaturas nestes pontos. Desta forma, as tensões resultantes seriam calculadas já nos pontos de Gauss, sem a necessidade de efetuar interpolação.
- Como mencionado no item anterior, o elemento isoparamétrico mostrou ser capaz de resolver problemas estruturais com alto índice de esbeltez; além disso, nos casos estudados neste trabalho, o elemento mostrou uma performance melhor que a dos elementos convencional e PIPE31 [1]. No entanto, para avaliar melhor o elemento isoparamétrico e poder confirmar sua superioridade em aplicações a dutos e *risers*, é importante que se realizem estudos paramétricos mais detalhados e com outros tipos de problemas.
- Também como mencionado no item anterior, os casos estudados mostraram que a descrição de movimento Lagrangeana Total do elemento isoparamétrico levou à necessidade do uso de um número de incrementos relativamente maior do que o requerido com o elemento convencional de dois nós com descrição co-rotacionada. Por este motivo, seria interessante estudar como implementar uma associação da descrição co-rotacionada ao elemento isoparamétrico,

considerando que, no elemento convencional, esta descrição se mostrou eficiente no tratamento de problemas estáticos com incrementos de carga relativamente maiores.

- Outro passo relevante para a redução do custo computacional do elemento isoparamétrico, que por si só já é elevado, seria a otimização de suas rotinas. Nas implementações efetuadas no presente trabalho, não se teve a preocupação de verificar gargalos de desempenho no código e eliminar operações redundantes ou desnecessárias, que devem ocorrer principalmente nos procedimentos de integração numérica para montagem das matrizes de rigidez. Este trabalho poderia reduzir em muito o custo computacional do elemento.
- Partindo da implementação realizada para o elemento de 4 nós, poder-se-ia com poucas alterações, implementar o elemento de 3 nós. A princípio, este elemento seria inferior ao de 4 nós, porém podem existir aplicações em que isto não se confirme.
- É interessante também implementar recursos para considerar a ovalização da seção transversal do duto. Em algumas situações este recurso pode ser importante, permitindo representações mais realistas do problema.
- Novos estudos que aprimorem os modelos de interação do duto com o solo são importantes, já que uma melhor representação do solo pode ter resultado significativo sobre o comportamento do duto.

8.4 Referências Bibliográficas

- [1] ABAQUS DOCUMENTATION, *Dassault Systèmes ABAQUS, Version 6.5 for Advanced Finite Element Analysis*, 2005.
- [2] FENRIS, *Finite Element Nonlinear Integrated System*, Sintef, February 1986.
- [3] FLEXRISER, *User Manual*, Release 4, Zentech Consultants, 1990.
- [4] RISERF, *Análise Estática e Dinâmica no Domínio da Frequência de Risers Rígidos*, Versão Abril de 1991, COPPE/Petrobras, outubro de 1991.
- [5] MOURELLE, M. M., GONZALEZ E.C. and JACOB, B.P., “ANFLEX – Computational System for Flexible and Rigid Riser Analysis”, *In: F.L.L.B. Carneiro et alii (eds), International Offshore Engineering, Procs. of the 9th International Symposium on Offshore Engineering – Rio de Janeiro, Brazil*, pp. 441-458, John Wiley & Sons, Chichester/New York, 1995.
- [6] MOURELLE, M. M., *Análise Dinâmica de Sistemas Estruturais Constituídos por Linhas Marítimas*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1993.
- [7] KAYSER JUNIOR D. L., *Análise Dinâmica de Linhas Flexíveis com Elemento de Pórtico Não-Linear Geométrico Híbrido*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2003.
- [8] KERR, A. D., “Analysis of Thermal Track Buckling in the Lateral Plane”, *Acta Mechanica*, v. 30, pp. 17-50, 1978.
- [9] KERR, A. D., “On Thermal Buckling of straight Railroad Tracks and the Effect of Track Length on the Track Response”, *Rail International*, v. 9, pp. 759-768, September, 1979.
- [10] KERR, A. D., “On the Stability of the Railroad Track in the Vertical Plane”, *Rail International*, pp. 131-142, February 1974.

- [11] HOBBS, R. E., “In-Service Buckling of Heated Pipelines”, *Journal of Transportation Engineering*, ASCE, vol 110, n. 2, pp. 175-189, March 1984.
- [12] PALMER, A. C. and BALDRY, J. A. S., “Lateral Buckling of Axially Constrained Pipelines”, *Journal of Petroleum Technology*, pp. 1283-1284, November 1974.
- [13] JU, G. T. and KYRIAKIDES S., “Thermal Buckling of Offshore Pipelines”, *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, v. 110/355, November 1988.
- [14] PEDERSEN, P. T. & JENSEN, J. J., “Upheaval Creep of Buried Heated Pipelines with Initial Imperfections”, *Marine Structures*, pp. 11-22, 1988.
- [15] PALMER, A. C., ELLINAS, C. P. RICHARDS, D. M. and GUITJ, J., “Design of Submarine Pipelines Against Upheaval Buckling”, *Offshore Technology Conference*, OTC 6335, May 1990.
- [16] SPARKS, C. P., “The Influence of Tension, Pressure and Weight on Pipe and Riser Deformation and Stresses”, *Transactions of the ASCM*, v. 106, pp. 46-54, March 1984.
- [17] BENJAMIN, A. C. e ANDRADE, E. Q., “Flambagem Lateral De Dutos Aquecidos: Um Método Analítico Clássico Revisitado”, *Instituto Brasileiro de Petróleo – IBP*, IBP04601, 2001.
- [18] BENJAMIN, A. C., GUERREIRO, J. N. C., SILVA, R. C. C. e LOULA, A. F. D., “Study of the Sensitivity of the Guanabara Bay PE-3 Pipeline to Geometric Imperfections”, *International Pipeline Conference*, October 2004.
- [19] BELMONT, G. M., AFONSO, S. M. B. e PARENTE JUNIOR, E., “Finite Element Analysis of the Upheaval Buckling of Heated Pipelines”, *CILAMCE*, 2004.
- [20] OLIVEIRA D. A. P., PARENTE JUNIOR, E., HOLANDA A. S. e SILVA, S. M. D. A., “A Study of the Imperfection Sensitivity of Heated Pipelines Subjected to Lateral Buckling”, *CILAMCE*, 2004.
- [21] SOUTO, M. S., *Análise Numérica de Tensões e de Expansão Térmica de Dutos Submarinos Enterrados*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2005.

- [22] CARDOSO, C. O., *Metodologia para Análise e Projeto de Dutos Submarinos Submetido a Altas Pressões e Temperaturas Via Aplicação do Método dos Elementos Finitos*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2005.
- [23] SOLANO, R. F., *Análise Termomecânica de Dutos Submarinos Enterrados*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2005.
- [24] PROSIM, *Programa de Simulação Numérica do Comportamento de Unidades Flutuantes*, manual do usuário, versão 3.0, março de 2006.
- [25] BENJAMIN, A. C. e CUNHA, D. J. S., *Flambagem de Dutos Aquecidos: Resultados Numéricos versus Resultados Analíticos*, 3ª CT do Serviço Técnico 702864, CENPES/PDEP/MC, dezembro de 2002.
- [26] TVERGAARD, V. and NEEDLEMAN, A., “On Localized Thermal Track Buckling, *International Journal of Mechanical Sciences*”, n. 23, pp 577-587, 1981.
- [27] MALTBY, T. C. and CALLADINE, C. R., “An Investigation into Upheaval Buckling of Buried Pipelines – I. Experimental Apparatus and some Observations”, *International Journal of Mechanics Science*, v. 37, n. 9, pp. 943-963, 1995.
- [28] MALTBY, T. C. and CALLADINE, C. R., “An Investigation into Upheaval Buckling of Buried Pipelines – II. Theory and Analysis of Experimental Observations”, *International Journal of Mechanics Science*, v. 37, n. 9, pp. 943-963, 1995.
- [29] PALMER, A. C., ELLINAS, C. P. RICHARDS, D. M. and GUIJT, J., “Design of Submarine Pipelines against Upheaval Buckling”, *In: Proceeding of Offshore Technology Conference*, OTC6335, Houston, USA, 1990.
- [30] PEDERSEN, P.T. and JENSEN, J.J., “Upheaval Creep of Buried Heated Pipelines with Initial Imperfections”, *Marine Structures*, v. 1, pp. 11-22, 1988.
- [31] BENJAMIN, A.C. e CUNHA, D. J. S., *Verificação da Flambagem Lateral do Duto de 16” do Terminal de Regência Usando um Método Analítico*, Serviço Técnico Petrobras 702864, Julho de 2002.

- [32] BENJAMIN, A.C. e CUNHA, D. J. S., “Flambagem Vertical de Dutos Aquecidos: Um Estudo Comparativo de Três Métodos Analíticos”, *Instituto Brasileiro do Petróleo*, IBP 1208-05, Rio Pipeline Conference 2005, 2005.
- [33] BENJAMIN, A.C. e ANDRADE, E. Q., “Flambagem Lateral de Dutos Aquecidos: Um Método Analítico Clássico Revisistado”, *3º Seminário de Dutos*, IBP04601, Instituto Brasileiro do Petróleo, 2001.
- [34] AMARAL, C. S. e COSTA, A. M., *Avaliação da Interação Solo-Duto no Problema Ocorrido no Duto as REDUC 16” – PE-2*, Comunicação Técnica DIPREX 16/2000, PETROBRAS/CENPES/DIPREX/SEDEM, junho de 2000.
- [35] JACOB, B. P., LIMA, B. S. L. P. e REYES, M. C. T., Estudo de Configurações Alternativas para Risers Rígidos em Catenária Ligados a FPSO’s, 1º Relatório, Projeto COPPETEC ET-150822, Contrato Petrobras n.650.2.052.98–3, PEC/COPPE/UFRJ, outubro de 1998.
- [36] HOBBS, R. E., “Pipeline Buckling Caused by Axial Loads”, *Journal of Constructions Steel Research*, v. 1, n. 2, pp. 2-10, January, 1981.
- [37] PALMER, A. D., LING, M. T. S., “Movements of Submarine Pipelines Close to Platforms”, *Offshore Technology*, pp. 17-24, 1981.
- [38] PEDERSEN, P.T. and MICHELSEN, J., “Large Deflection Upheaval Buckling of Marine Pipelines”, *Journal of Engineering Mechanics*, v. 11, n. 2, 1985, pp. 965-980.
- [39] CARR, M., et al., “Lateral Buckling and Pipeline Walking for Hot Pipelines”, *Offshore Pipelines Technology Conference*, Amsterdam, 2003.
- [40] VERLEY, R., LUND, K. M., “A Soil Resistance Model for Pipelines Placed on Clay Soils”, *International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering OMAE*, pp. 1-7, 2000.
- [41] BOLTON, M. D., CHEUK, D. Y., WHITE D. J., *Modeling of Soil-Pipeline Interaction for Large Amplitude Deflections*, JIP SAFEBUCK, December 2003.
- [42] ASCE, *Guidelines for the Design of Buried Steel Pipe*, American Society of Civil Engineers, July 2001.

- [43] LAMBE, T. W., WHITMAN, R. V., *Soil Mechanics*, New York, John Wiley & Sons, 1969.
- [44] BENJAMIN, A. C., *Análise não-linear geométrica de pórticos tridimensionais pelo método dos elementos finitos*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1982.
- [45] BATHE, K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, 1982.
- [46] ZIENKIEWICZ, O. C., *The Finite Element Method*, 3 ed. New York, McGraw-Hill, 1977.
- [47] JACOB, B. P., *Notas de aula do curso de introdução ao método dos elementos finitos*, versão 2005.
- [48] MORISON, J.R., O'BRIEN, M.P., JOHNSON, J.W., et al., "The Force Exerted by Surfaces Waves on Piles", *Petrol. Trans.*, AIME, n. 189, 1950.
- [49] SITUA, *Pré e Pós-Processador de Elementos Finitos*, versão 3.0, março de 2006.
- [50] FREITAS, S. M. S., *Comportamento de Colapso de Plataformas Offshore*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1999.
- [51] BATOZ, R. C. and DHATT, G., "Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14, pp. 1262-1267, 1979.
- [52] RIKS, L., "An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems", *Int. J. Solids Structures*, 15:529-551, 1979.
- [53] WEMPNER, G. A., "Discrete Approximation Related to Nonlinear Theories of Solids", *International Journal of Solids Structures*, 7, pp. 1581-1971, 1971.
- [54] CRISFIELD, M. A., "Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles "Snap-Through", *Computers & Structures*, 13, pp. 55-62, 1981.

- [55] RAMM, E., *Strategies for Tracing the Non-Linear Response Near Limit Points, Non-Linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, ed. W. Wunderlich, pp. 63-89, Springer-Verlag.
- [56] LAM, W. F. and MORLEY, C. T., “Arc-Length for Passing Limit Points in Structural Calculation”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 118, n. 1, pp. 169-185, January 1992.
- [57] BATHE, K.J. and BOLOURCHI, S., “Large Displacement Analysis of Three-Dimensional Beam Structures”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 11, pp. 65-84, 1977.
- [58] ORAN, C. and KASSIMALI, A., “Large Deformation of Framed Structures Under Static and Dynamic Loads”, *Computers & Structures*, v. 6, pp. 539-547, 1976.
- [59] BISSHOP, K. E. and DRUCKER, D. C., “Large Deflection of Cantilever Beams”, *Quart. J. Appl. Math.*, n. III, pp. 272-275, 1945.
- [60] DYM, C. L. and SHAMES, I. H., *Solid Mechanics, a Variational Approach*, McGraw-Hill Kogakusha Ltd., 1973.
- [61] FREITAS, S. M. S., *Implementação e Aplicações de um Elemento Finito de Pórtico Isoparamétrico com 4 Nós*, Exame de Qualificação para Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2004.
- [62] RODRIGUES, P. F. N., *Ferramentas Numéricas para a Análise Não-Linear Física e Geométrica de Estruturas Reticuladas na Exploração de Petróleo Offshore*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2000.
- [63] BENJAMIN, A.C., CUNHA, D. J. S., *Flambagem de Dutos Aquecidos: Resultados Numéricos versus Resultados Analíticos*, 3º CT do Serviço Técnico 702864, CENPES/PDEP/MC, dezembro de 2002.