

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE FORMULAÇÕES GEOMETRICAMENTE
NÃO LINEARES PARA FLEZO-TORÇÃO DE HASTES DE PAREDES
DELGADAS DE SEÇÃO ABERTA

José Mário Feitosa Lima

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. Luiz Fernando Taborda Garcia, D.Sc.

Prof. Sergio Fernandes Villaça, D.Sc.

Prof. Eduardo de Miranda Batista, D.Sc.

Profª Vera Regina Polillo, D.Sc.

Prof. Paulo Batista Gonçalves, D.Sc.

Prof. Mauro Schulz, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JANEIRO DE 2004

LIMA, JOSÉ MÁRIO FEITOSA

Estudo Comparativo entre Formulações Geometricamente Não Lineares para Flexo-Torção de Hastes de Paredes Delgadas de Seção Aberta [Rio de Janeiro] 2004

XVI, 158 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia Civil, 2004)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Hastes de Paredes Delgadas
2. Não Linearidade Geométrica
3. Diferenças Finitas Energéticas

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Aos meus pais, tia
Lena, Sara, e aos
meus avós

AGRADECIMENTOS

Desejo expressar os meus sinceros agradecimentos primeiramente à Causa Primeira de tudo que existe: Deus.

Em seguida, preciso agradecer a minha família, suporte de minha vida.

Também agradeço aos meus orientadores acadêmicos, particularmente ao Professor Dr. Luiz Fernando Taborda Garcia, tanto pelo seu envolvimento integral com a orientação da presente pesquisa, quanto pela amizade.

À Mônica, pelo seu apoio e incentivo constante, e naturalmente pela sua presença em minha vida.

À professora e amiga Maria do Socorro Costa São Matheus (Help) por me convencer a requerer uma liberação adicional das minhas atividades visando concluir a presente tese. E aos Professores Geraldo José Belmonte dos Santos, Washington Almeida Moura, e aos colegas da área de Estruturas do Departamento de Tecnologia da Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS, que acolheram tal liberação de pronto.

O meu agradecimento aos amigos Paulo Roberto Lopes Lima e Koji de Jesus Nagahama, e à paciência de suas respectivas esposas, pelo incentivo e ajuda tantas vezes disponibilizada a mim em momentos cruciais da pesquisa. Ao amigo Chico que me hospedou no Rio por muitos meses, justamente nos momentos em que eu mais precisei!

Aos amigos Vanginho e Marciel que me receberam no primeiro ano de moradia no Rio.

Aos colegas da COPPE, originários do curso de Engenharia Civil da UEFS, alguns inclusive meus ex-alunos, pelo companheirismo e amizade.

Também preciso agradecer à Adriana de Cássia, pela amizade e digitação dos textos apresentados na minha qualificação ao doutorado.

À amiga e colega Sérly por me encorajar a finalizar esse trabalho.

Aos funcionários do PEC pelo suporte e atenção sempre que requeri.

Finalmente, agradeço a CAPES/PICDT, pelo apoio financeiro de uma bolsa mensal, e aos dirigentes da UEFS, pelo incentivo à capacitação dos seus recursos humanos.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE FORMULAÇÕES GEOMETRICAMENTE
NÃO LINEARES PARA FLEXO-TORÇÃO DE HASTES DE PAREDES
DELGADAS DE SEÇÃO ABERTA

José Mário Feitosa Lima

Janeiro/2004

Orientadores: Luiz Fernando Taborda Garcia

Sergio Fernandes Villaça

Programa: Engenharia Civil

No presente trabalho procede-se a uma ampla investigação sobre a conveniência de serem previstos ângulos de torção no âmbito de grandes rotações, frente à premissa de considerá-los no contexto de rotações moderadas, em modelos geometricamente não lineares para o estudo da flexo-torção em hastes de paredes delgadas de seção aberta, sob solicitação estática. Para tanto foram escolhidos dois modelos na literatura, os quais se diferenciam exatamente nesse aspecto, sendo apresentadas as correspondentes formulações analíticas, com o uso do princípio dos trabalhos virtuais, seguindo-se, para ambos, a implementação de um tratamento numérico baseado no método das diferenças finitas energéticas. Tal tratamento deu origem a dois programas computacionais, através dos quais são analisados diversos exemplos de aplicação, onde os resultados numéricos associados a cada um dos modelos foram não só comparados entre si, como também com outros valores teóricos e/ou experimentais disponíveis, incluindo-se ainda, em dois dos exemplos, um confronto com os resultados obtidos pela utilização do programa comercial ABAQUS.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

COMPARATIVE ANALYSIS BETWEEN GEOMETRICALLY NONLINEAR
FORMULATIONS FOR COMBINED FLEXURE AND TORSION OF
THIN-WALLED OPEN BARS

José Mário Feitosa Lima

January/2004

Advisors: Luiz Fernando Taborda Garcia
Sergio Fernandes Villaça

Department: Civil Engineering

This thesis presents a comprehensive investigation about the convenience of to predict angles of torsion in the context of large rotations instead of considering them in the context of moderately large rotations, in geometrically nonlinear models destined to the study of combined flexure and torsion of thin-walled open bars under static loads. Two models, which differ exactly in this aspect, were chosen from the literature and the analytical formulations, based on the principle of virtual work, are presented. In both cases it was proceeded the implementation of a numerical treatment based on the finite difference energy method. Two softwares were developed using such treatment and then used to analyze several examples of application. The numerical results obtained from the models were initially compared amongst themselves and then with other theoretical and experimental data available in the technical literature. In addition, results of two examples were compared with those obtained using the commercial software ABAQUS.

ÍNDICE

	Pág.
CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II – FORMULAÇÃO ANALÍTICA PARA O PROBLEMA	
PELO PTV	5
II.1 SISTEMAS DE REFERÊNCIA	5
II.2 PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA SEÇÃO TRANSVERSAL	7
II.3 FORMULAÇÃO PARA O PROBLEMA SEGUNDO O MODELO DE ATTARD	10
II.3.1 HIPÓTESES BÁSICAS	10
II.3.2 CAMPO DE DESLOCAMENTOS	11
II.3.3 RELAÇÕES DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO	16
II.3.4 RELAÇÕES TENSÃO-DESLOCAMENTO	17
II.3.5 INTEGRAIS DE TENSÕES NA SEÇÃO	18
II.3.6 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS	19
II.3.6.1 Trabalho Virtual das Forças Internas	19
II.3.6.2 Trabalho Virtual das Forças Externas	21
II.3.6.3 Equações Diferenciais e Condições de Contorno do Problema	27
II.4 FORMULAÇÃO PARA O PROBLEMA SEGUNDO O MODELO DE POLILLO, GARCIA E VILLAÇA	28
II.4.1 CAMPO DE DESLOCAMENTOS	29
II.4.2 RELAÇÕES DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO	30
II.4.3 RELAÇÕES TENSÃO-DEFORMAÇÃO	31
II.4.4 INTEGRAIS DE TENSÕES NA SEÇÃO	31
II.4.5 TRABALHO VIRTUAL DAS FORÇAS INTERNAS	32
II.4.6 TRABALHO VIRTUAL DAS FORÇAS EXTERNAS	33
II.4.7 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E CONDIÇÕES DE CONTORNO DO PROBLEMA	34
CAPÍTULO III - TRATAMENTO NUMÉRICO DO PROBLEMA	36
III.1 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO	36

	Pág.
III.2 DISCRETIZAÇÃO DA BARRA E SISTEMAS DE NUMERAÇÃO PARA OS DESLOCAMENTOS	37
III.3 REPRESENTAÇÕES EM DIFERENÇAS FINITAS PARA AS DERIVADAS DOS DESLOCAMENTOS	39
III.3.1 DERIVADA PRIMEIRA	39
III.3.1.1 Representação Convencional	39
III.3.1.2 Representação Reduzida	40
III.3.2 DERIVADA SEGUNDA	41
III.4 AVALIAÇÃO NUMÉRICA DO TRABALHO VIRTUAL INTERNO	42
III.5 AVALIAÇÃO NUMÉRICA DO TRABALHO VIRTUAL EXTERNO	50
III.6 INTRODUÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO	53
III.7 RESOLUÇÃO DO SISTEMA NÃO LINEAR DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS	55
III.7.1 TÉCNICA DO GDCM NA OBTENÇÃO DA TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO	56
III.7.2 CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA	62
III.8 TRATAMENTO NUMÉRICO PARA O MODELO DE POLILLO, GARCIA E VILLAÇA	63
III.8.1 AVALIAÇÃO DO TRABALHO VIRTUAL INTERNO	63
III.8.2 AVALIAÇÃO DO TRABALHO VIRTUAL EXTERNO	65
CAPÍTULO IV – APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS	68
IV.1 EXEMPLO 1: TORÇÃO COMBINADA COM TRAÇÃO EM BARRA DE SEÇÃO RETANGULAR ESTREITA	68
IV.1.1 RESULTADOS ANALÍTICOS	69
IV.1.2 RESULTADOS NUMÉRICOS E EXPERIMENTAIS	72
IV.2 EXEMPLO 2: TORÇÃO NÃO UNIFORME DE BARRA DE SEÇÃO “ I ”	78
IV.2.1 MOMENTO DE TORÇÃO T_0 VERSUS ÂNGULO DE TORÇÃO $\varphi(L)$	80
IV.2.2 DEFORMAÇÃO ε_x AO LONGO DA MESA SUPERIOR DA SEÇÃO CENTRAL	82
IV.2.3 DEFORMAÇÃO ε_x AO LONGO DO COMPRIMENTO DA BARRA	83

	Pág.
IV.3 EXEMPLO 3: TORÇÃO UNIFORME DE BARRA DE SEÇÃO CANTONEIRA	87
IV.4 EXEMPLO 4: FLAMBAGEM DE COLUNA DE SEÇÃO “ U ”	97
IV.5 EXEMPLO 5: FLAMBAGEM LATERAL DE VIGA DE SEÇÃO “ I ”	103
IV.6 EXEMPLO 6: ESTABILIDADE DE VIGA DE SEÇÃO CANTONEIRA SUBMETIDA A FLEXO-TORÇÃO	110
IV.7 EXEMPLO 7: ESTABILIDADE DE VIGA DE SEÇÃO ASSIMÉTRICA SUBMETIDA A FLEXO-TORÇÃO	135
 CAPÍTULO V – CONCLUSÃO	 147
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	 153

NOMENCLATURA

Capítulo II

(\wedge) designa uma avaliação realizada sobre a linha média da seção (“contour”)

$(\bar{\quad})$ refere-se a um valor prescrito para forças ou deslocamentos generalizados

ℓ - comprimento total da linha média da seção

$\bar{m}_\zeta, \bar{r}_\zeta$ - cargas de domínio prescritas, formadoras do momento distribuído de torção m_ζ , definidas pelas expressões (II.52.a) e (II.52.b), respectivamente

n, s - sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais segundo as direções normal e tangente à linha média da seção

$\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$ - cargas distribuídas, por unidade de área, atuando ao longo da superfície média da barra, segundo as direções x, y e z , respectivamente

$\bar{q}_y, \bar{q}_z, m_\zeta$ - cargas de domínio, definidas pelas expressões (II.47.a), (II.47.b) e (II.47.c), respectivamente

r - distância do centro de cisalhamento E a um ponto genérico S do “contour”

r_n, r_s - componentes nas direções n e s , respectivamente, do vetor \mathbf{ES} , de módulo r

t - espessura de um trecho genérico da seção

u - translação segundo a direção x do “contour” de uma seção genérica

u_x, u_n, u_s - componentes do deslocamento de um ponto genérico da barra segundo as

direções x , n e s , respectivamente

\hat{u}_y, \hat{u}_z - deslocamentos de um ponto da linha média da seção, segundo os eixos y e z , respectivamente

v, w - deslocamentos do centro de cisalhamento de uma seção genérica segundo os eixos y e z , respectivamente

x, y, z - sistema cartesiano ortogonal de eixos com origem coincidindo com o centróide C de uma das seções extremas da barra

y_e, z_e - coordenadas, no sistema xyz , do centro de cisalhamento E da seção

A - área da seção transversal da barra

A_m - área da superfície média da barra

\bar{B} - bimomento prescrito nas seções de extremidade da barra

C - centróide da seção

E - centro de cisalhamento da seção

E, G - módulos de elasticidade longitudinal e transversal do material da barra, respectivamente

$\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z, \bar{M}_\xi, \bar{M}_y, \bar{M}_z$ - forças concentradas e momentos aplicados nas seções de extremidade da barra, definidos por (II.48.a) a (II.48.f)

I_e - momento de inércia polar relativo ao centro de cisalhamento E

I_y, I_z - momentos de inércia da área da seção relativos aos eixos y e z ,
respectivamente

I_{yz} - produto de inércia da área da seção em relação aos eixos y e z

I_ω - momento de inércia setorial

$I_{\omega y}, I_{\omega z}$ - produtos de inércia setoriais em relação aos eixos y e z , respectivamente

J_t - constante de torção da seção

L - comprimento da barra

$\bar{M}_\xi, \bar{R}_\xi, \bar{M}_y, \bar{M}_z$ - carregamentos prescritos de caráter concentrado nas seções de
extremidade da barra, definidos por (II.54.a) a (II.54.d),
formadores dos momentos M_ξ, M_y e M_z

$N, M_y, M_z, K, B, T^{(l)}$ - integrais de tensões ao longo da área da seção, definidas pelas
expressões (II.37.a) a (II.37.f)

Q_y, Q_z, Q_ω, R_e - propriedades da seção, sem denominação especial, definidas pelas
expressões (II.8.a), (II.8.b), (II.14) e (II.9), respectivamente

S_y, S_z - momentos estáticos da área da seção relativos aos eixos y e z ,
respectivamente

S_ω - momento estático setorial

V - volume da barra

α - ângulo que mede a inclinação de um trecho genérico da seção

$\hat{\alpha}_{21}, \hat{\alpha}_{22}, \hat{\alpha}_{23}$ - parâmetros definidos pelas expressões (II.18.a) a (II.18.c)

$\gamma_{xs}, \gamma_{xn}, \gamma_{ns}$ - deformações angulares (distorções)

$\delta W_{int}, \delta W_{ext}$ - trabalho virtual das forças internas e externas, respectivamente

$\delta W_{int}^{LIN}, \delta W_{int}^{QUA}, \delta W_{int}^{CUB}, \delta W_{int}^{QUAR}$ - parcelas obtidas de δW_{int} isolando os grupos de termos lineares, quadráticos, cúbicos e quárticos, respectivamente, nas derivadas dos deslocamentos

$\varepsilon_x, \varepsilon_n, \varepsilon_s, \varepsilon_{xn}, \varepsilon_{ns}$ - componentes de deformação

$\bar{\rho}_x, \bar{\rho}_y, \bar{\rho}_z$ - cargas distribuídas, por unidade de comprimento de linha média, segundo as direções x , y e z respectivamente, atuando ao longo da linha média das seções de extremidade

σ_x, τ_{xs} - componentes normal e cisalhante de tensão, respectivamente

θ_y, θ_z - rotações definidas por (II.30.b) e (II.30.a), respectivamente

ν - coeficiente de Poisson do material da barra

ξ, η, ζ - sistema cartesiano ortogonal, paralelo ao sistema $x y z$, com origem no centro de cisalhamento E da seção

χ_x, χ_n, χ_s - coeficientes angulares definidos pelas expressões (II.17.a) a (II.17.c)

$\hat{\eta}^*, \hat{\zeta}^*, \hat{y}^*, \hat{z}^*$ - braços de alavanca corrigidos para o cálculo de momentos, como consequência da torção da seção transversal

φ - ângulo de torção de uma seção genérica

ω - área setorial, avaliada tomando-se o centro de cisalhamento E como pólo e, para ponto setorial inicial, um centróide setorial S_0

Capítulo III

a_1, a_2, \dots, a_{12} - deslocamentos associados a u, v, w e φ no sistema de numeração local

$f(x)$ - função genérica representativa dos deslocamentos u, v, w e φ

$\{ \mathbf{f} \}$ - vetor de desequilíbrio

i - nó genérico na barra

j - trecho genérico de integração ao longo da barra

$\{ \mathbf{p} \}$ - vetor dos termos de carga

$\{ \mathbf{p}^{const} \}, \{ \mathbf{p}^{var} \}$ - vetores contendo as cargas não incrementadas e incrementadas, respectivamente, durante o processo de carga

$\{ \mathbf{p}^{ref} \}$ - vetor de cargas de referência

$\bar{q}_y(j), \bar{q}_z(j), \bar{m}_\xi(j), \bar{m}_\zeta(j), \bar{r}_\xi(j)$ - cargas de domínio associadas ao trecho de integração genérico j

$B^{LIN}(p, q), B^{QUA}(p, q, r), B^{CUB}(p, q, r, s)$ - coeficientes associados aos termos lineares, quadráticos e cúbicos, respectivamente,

presentes na expressão de δW_{int} oriunda do modelo de Polillo, Garcia e Villaça

$C^{LIN}(p, q), \dots, C_{cos, sen}^{LIN}(p, q)$ - coeficientes associados aos termos lineares presentes na parcela δW_{int}^{LIN} relativa ao modelo de Attard

$C^{QUA}(p, q, r), \dots, C_{sen, sen}^{QUA}(p, q, r)$ - coeficientes associados aos termos quadráticos presentes na parcela δW_{int}^{QUA} relativa ao modelo de Attard

$C^{CUB}(p, q, r, s), \dots, C_{cos, sen}^{CUB}(p, q, r, s)$ - coeficientes associados aos termos cúbicos presentes na parcela δW_{int}^{CUB} relativa ao modelo de Attard

$C_{cos}^{QUAR}(p, q, r, s, t), \dots, C_{cos, sen}^{QUAR}(p, q, r, s, t)$ - coeficientes associados aos termos quárticos presentes na parcela δW_{int}^{QUAR} relativa ao modelo de Attard

GSP - parâmetro oriundo da técnica do GDCM, que afeta o incremento de carga

$[J]$ - matriz Jacobiana

N - número de sub-divisões consideradas ao longo do comprimento da barra

NN - número total de nós na barra

T_1, T_2 - tolerâncias associadas aos dois critérios de convergência adotados

U_1, U_2, \dots, U_{4NN} - graus de liberdade considerados na discretização da barra

$\{ \mathbf{X} \}$ - vetor de deslocamentos nodais incógnitos

β - parâmetro de carga

$\{ \delta \mathbf{X} \}$ - vetor de incremento de deslocamentos na fase iterativa

$\{ \delta \mathbf{X}_I \}, \{ \delta \mathbf{X}_{II} \}$ - vetores de incrementos de deslocamentos, definidos pelas expressões (II.24.a) e (II.24.b), que se associam, conforme (II.25), para formar o incremento $\{ \delta \mathbf{X} \}$

$\{ \Delta \mathbf{X} \}$ - vetor de incremento de deslocamentos associado à solução incremental predita

$\delta W_{int}^{LIN}(j), \delta W_{int}^{QUA}(j), \delta W_{int}^{CUB}(j), \delta W_{int}^{QUAR}(j)$ - contribuições para as parcelas δW_{int}^{LIN} , δW_{int}^{QUA} , δW_{int}^{CUB} e δW_{int}^{QUAR} , respectivamente, coletadas num trecho de integração genérico j

λ - comprimento de um trecho de integração intermediário no domínio da barra

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A adoção de hastes de paredes delgadas de seção aberta em projetos de engenharia estrutural tem aumentado significativamente nas últimas décadas, pois tais elementos apresentam elevada rigidez flexional com peso próprio relativamente pequeno. Concorreu para isso, também, o desenvolvimento ocorrido na fabricação desse tipo de elemento estrutural, acarretando ganhos tanto em relação à resistência estrutural, quanto a uma maior diversidade de formas de seção transversal. Geometricamente, esses perfis leves, como costumam ser denominados pelos engenheiros estruturais, caracterizam-se por apresentarem paredes com espessura pequena se comparada a uma dimensão característica da seção transversal (na prática, a relação entre a espessura e tal dimensão da seção deve ser inferior a $1/10$). No entanto, apesar das vantagens ressaltadas acima, esses elementos estruturais apresentam em geral, por conta de sua geometria, uma rigidez torsional pequena em relação à flexional, o que exige dos projetistas certas precauções na análise e projeto de estruturas constituídas por hastes de paredes delgadas de seção aberta. Portanto, motivados por essas razões, diversos pesquisadores têm desenvolvido teorias versando sobre o comportamento a flexo-torção de tais elementos estruturais, procurando inclusive contemplar nessas formulações efeitos de não linearidade geométrica e/ou física. Historicamente, um estudo mais abrangente do assunto surgiu somente por volta de 1935, quando Vlassov apresentou sua teoria de flexo-torção baseada nos conceitos de área setorial e bimomento, com as pesquisas seguindo até os dias atuais, onde inclusive evoluiu para o estudo do comportamento de perfis leves fabricados a partir de materiais compósitos, conforme se observa nos recentes trabalhos de LEE e KIM (2002) e SAPKAS e KOLLAR (2002).

Concentrando-se o interesse apenas nos trabalhos envolvendo o comportamento não linear geométrico das estruturas constituídas de hastes de paredes delgadas de seção aberta, por estar assim direcionada a presente pesquisa, evidencia-se que um número expressivo desses trabalhos é diretamente voltado à análise linear de estabilidade, a qual tem por característica somente indicar uma carga de bifurcação do equilíbrio (carga crítica), não trazendo assim nenhuma informação sobre o comportamento pós-crítico, como é o caso, por exemplo, dos trabalhos de BARSOUM e GALLAGHER (1970), TRAHAIR e WOOLCOCK (1973), YOO (1980), LAUDIERO e ZACCARIA (1988), PI *et al.* (1992) e ACHOUR e ROBERTS (2000). Em um âmbito mais restrito, situam-

se os autores que procedem a uma análise não linear completa em problemas de flexo-torção de hastes de paredes delgadas de seção aberta. Focalizando mais detidamente este último grupo, percebe-se que, embora todos os autores nele enquadrados assumam, para fins de análise, que as rotações de flexão sejam moderadas, há uma nítida distinção quanto à ordem de grandeza das rotações de torção: ou se consideram ângulos de torção no âmbito de grandes rotações (com o argumento de que a rigidez torsional é, em geral, bem menor do que a flexional), a exemplo de GHOBARAH e TSO (1971), TSO e GHOBARAH (1971), WEKEZER (1985), ATTARD (1986), RONAGH *et al.* (2000a e 2000b), e MOHRI *et al.* (2001), ou então admite-se que tais ângulos, analogamente aos de flexão, sejam também moderados, como fazem RAJASEKARAN (1977), ROBERTS e AZIZIAN (1983), MOORE (1986), POLILLO (1991), POLILLO *et al.* (1998) e SILVA e SCHULZ (2002). Essa constatação serviu então de motivação para que se empreendesse uma investigação centrada na questão da magnitude dos ângulos de torção, visando melhor caracterizar a conveniência de se adotar um modelo de análise prevendo grandes rotações, até porque, quanto mais forte a não linearidade considerada, certamente maior será o grau de complexidade envolvido quando se pensa em termos da aplicação de um tratamento numérico ao problema. Tal investigação, no conhecimento do autor, constitui um primeiro aspecto inédito envolvido no presente trabalho, pois não foi detectada qualquer contribuição dessa natureza em consulta à literatura.

Para dar início à pesquisa, resolveu-se selecionar dois modelos de análise para cada um dos tipos de abordagem acima descritos. Para representar o primeiro tipo (grandes rotações de torção), foram escolhidos os modelos de ATTARD (1986) e de ACHOUR e ROBERTS (2000), e, como representantes do segundo tipo (rotações moderadas de torção), escolheram-se os modelos de RAJASEKARAN (1977) e de POLILLO *et al.* (1998). Nessa fase preliminar, constatou-se que algumas inconsistências se faziam presentes na formulação de Rajasekaran, refletidas na ausência de alguns termos não lineares na expressão obtida para a componente de deformação longitudinal, os quais possuíam a mesma ordem de grandeza de outros termos que nela foram mantidos (aspecto este criticado tanto por POLILLO *et al.* (1998), quanto por ATTARD (1986)). Tais inconsistências foram entretanto posteriormente eliminadas, conforme constatado em PI *et al.* (1992), dando origem a uma nova formulação que, em última análise, é a particularização, para o caso de seção duplamente simétrica, da apresentada por POLILLO *et al.* (1998), sendo, em função

disso, descartada da presente pesquisa. Também em seguida se abandonou o modelo de Achour e Roberts, pois ficou evidente que a presença de termos adicionais nas relações de deformação-deslocamento, em comparação ao modelo de Attard, levava também a inconsistências de ordem de aproximação. Foram retidos, portanto, após essa análise preliminar, apenas os modelos de ATTARD (1986) e de POLILLO *et al.* (1998). Merece destaque ainda o fato de que ambos esses modelos conduzem a uma unificação natural das teorias de Vlassov e de Saint-Venant, em decorrência de ser adotada, para fins de instituição do campo de deslocamentos, a hipótese de Kirchhoff da teoria das placas.

As formulações correspondentes a esses dois modelos remanescentes foram desenvolvidas por seus autores a partir de enfoque variacional, sendo estabelecidas, em cada caso, as equações diferenciais e condições gerais de contorno para o problema. Entretanto, a complexidade dos sistemas de equações diferenciais não lineares obtidos inviabiliza, em termos gerais, a sua resolução por via analítica. Para contornar essa dificuldade, tem-se que recorrer a técnicas numéricas, sendo de utilização mais freqüente o método dos elementos finitos (mef), que foi, inclusive, a opção de Attard (ATTARD e SOMERVAILLE (1987)) para o correspondente tratamento numérico de sua formulação analítica. Por outro lado, vem também ultimamente demonstrando a sua potencialidade uma outra técnica, que na realidade é uma vertente do método convencional de diferenças finitas, denominada de método de diferenças finitas energéticas (mdfe), onde os operadores de diferenças finitas, em lugar de serem aplicados diretamente às equações diferenciais que governam o problema, são introduzidos na expressão da energia potencial total do sistema (ou então na expressão do princípio dos trabalhos virtuais). Cabe destacar que esse método segue a mesma rotina de análise empregada no mef, sendo que, em diversas situações, trabalha-se com um menor número de graus de liberdade por nó. Além disso, cita-se ainda o aspecto de que no mdfe utilizam-se aproximações para as derivadas dos deslocamentos, e não para os deslocamentos, como no mef, característica esta que acarreta, em geral, um bom desempenho do método no cálculo de esforços, conforme fica demonstrado em GRAÇA (2000), DIAS (2001), GRAÇA e GARCIA (2002), e MITTELBAACH (2002). O método foi proposto originalmente por COURANT *et al.* (1928), sendo utilizado posteriormente por HOUBOLT (1958) e BURAGOHAIN e PATODI (1978), este último trazendo a inovação de eliminar os nós fictícios normalmente presentes junto ao contorno. Citam-se ainda como exemplos de aplicação dessa técnica os trabalhos de BARVE e DEY

(1983), VERMA e DEY (1991) e AKSU e FELEMBAN (1992), e as várias publicações recentes originadas no âmbito da COPPE/UFRJ, dentro de uma linha de pesquisa ora em andamento no PEC (Programa de Engenharia Civil), como as de LIMA (1995), COSTA (1998), GRAÇA (2000), DIAS (2001), GRAÇA e GARCIA (2002), LIMA *et al.* (2002), MITTELBAACH (2002) e LIMA e GARCIA (2003), onde evidencia-se a potencialidade dessa técnica na abordagem de problemas estáticos, dinâmicos, lineares e geometricamente não lineares de estruturas de barras e laminares. Assim, visando estabelecer um tratamento numérico para ambos os modelos de flexo-torção citados no parágrafo precedente, resolveu-se, dando continuidade à citada linha de pesquisa, uma vez mais utilizar, como técnica de abordagem, o mdfe. Em particular, ligado ao modelo de POLILLO *et al.* (1998), um primeiro tratamento numérico pelo mdfe foi apresentado no trabalho de VILLAÇA *et al.* (1993), aplicado ao seu precursor, o modelo de POLILLO (1991). Já para o caso do modelo de ATTARD (1986), ao que consta, tal tratamento também constitui um aspecto inédito do presente trabalho (pois aparentemente existe apenas um único tratamento numérico associado a esse modelo, que é o desse próprio autor, utilizando o mdf).

O objetivo primordial do presente trabalho é, pois, a partir de dois programas computacionais elaborados com base no mdfe, melhor investigar a conveniência de se admitirem ângulos de torção no âmbito de grandes rotações, tal como previsto pelo modelo de ATTARD (1986), frente à premissa de considerá-los no âmbito de rotações moderadas, conforme o modelo de POLILLO *et al.* (1998), estudo esse realizado a partir da análise de diversos casos coletados na literatura.

O trabalho foi organizado da seguinte forma: no capítulo II apresentam-se, com base no princípio dos trabalhos virtuais, as formulações analíticas de ATTARD (1986) e de POLILLO *et al.* (1998) para o problema aqui considerado. No capítulo III, introduz-se o tratamento numérico em termos do método das diferenças finitas energéticas às formulações analíticas desenvolvidas no capítulo anterior. Posteriormente, no capítulo IV, são apresentados e analisados os resultados obtidos em sete exemplos de aplicação, sendo que, nos dois últimos, incluem-se também comparações com resultados obtidos através do programa comercial ABAQUS. Por fim, no capítulo V, são apresentadas as conclusões gerais da pesquisa, além de algumas propostas para o seu prosseguimento.

CAPÍTULO II

FORMULAÇÃO ANALÍTICA PARA O PROBLEMA PELO PTV

No presente capítulo são focalizados os dois já citados modelos para análise não linear geométrica, desenvolvidos independentemente por ATTARD (1986) e POLILLO *et al.* (1998), aplicáveis ao problema de flexo-torção de hastes de paredes delgadas de seção aberta sob solicitação estática. Esses modelos diferem, essencialmente, pela ordem de grandeza dos ângulos de torção. Na concepção de Attard, como as hastes de paredes delgadas de seção aberta possuem em geral baixa rigidez torsional em presença da flexional, são previstos ângulos de torção no âmbito de grandes rotações e ângulos de flexão no âmbito de rotações moderadas, ao passo que ao modelo de POLILLO *et al.* (1998) corresponde uma formulação inteiramente desenvolvida no âmbito de rotações moderadas (isto é, rotações pequenas em presença da unidade, porém consideravelmente maiores do que as componentes de deformação). Tem-se como objetivo neste capítulo estabelecer, para cada um dos dois modelos, a correspondente formulação analítica segundo o princípio dos trabalhos virtuais (ptv).

O capítulo obedecerá à seguinte disposição: no item II.1 apresentam-se os sistemas de referência adotados, bem como algumas relações entre coordenadas; em seguida, no item II.2, são definidas as propriedades geométricas da seção requeridas no desenvolvimento das formulações, incluindo-se aquelas ligadas ao conceito de área setorial; no item II.3, passa-se ao modelo de ATTARD (1986), iniciando-se pelas hipóteses assumidas por esse autor, e culminando com a instituição das equações diferenciais e condições de contorno para o problema; e, finalmente, no item II.4 é apresentado, de forma mais sucinta, o correspondente desenvolvimento para o modelo de POLILLO *et al.* (1998).

II.1 SISTEMAS DE REFERÊNCIA

Os elementos estruturais considerados são hastes prismáticas de paredes delgadas, com seção transversal aberta constituída por trechos retos de espessura constante, e que fica caracterizada pela sua linha média (“contour”) e pela espessura de cada trecho (figura II.1). Nas junções tem-se a aproximação mostrada no detalhe da figura.

Consideram-se os seguintes sistemas de referência: o sistema de coordenadas cartesianas ortogonais constituído pelos eixos x , y e z , com origem coincidindo com o centróide C de uma das seções extremas (sendo x o eixo longitudinal e com y e z no plano da referida seção, formando um triedro direto com x); o sistema formado pelos eixos ξ , η e ζ , paralelo ao primeiro, e com origem no centro de cisalhamento E da mesma seção; e ainda o sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais n e s , segundo as direções normal e tangente à linha média, com s medido a partir de uma extremidade da seção (ver ponto 1 na figura II.1), e n medido a partir da linha média, conforme também observado na figura.

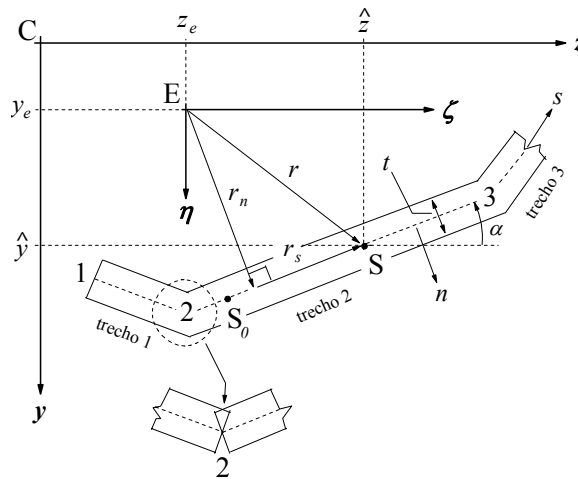


Figura II.1 – Sistemas de referência considerados

Na figura II.1 observa-se também que foi definido o ângulo α , que mede a inclinação de cada trecho da seção, bem como, associadas a um ponto genérico S da linha média, as componentes r_n e r_s , segundo as direções n e s respectivamente, do vetor posição \mathbf{ES} , de módulo r .

Com base na figura II.1, deduzem-se as seguintes relações entre coordenadas:

$$\hat{\eta} = \hat{y} - y_e = r_n \cos \alpha - r_s \sin \alpha \quad (\text{II.1.a})$$

$$\hat{\zeta} = \hat{z} - z_e = r_n \sin \alpha + r_s \cos \alpha \quad (\text{II.1.b})$$

$$r^2 = r_n^2 + r_s^2 = \hat{\eta}^2 + \hat{\zeta}^2 = (\hat{y} - y_e)^2 + (\hat{z} - z_e)^2 \quad (\text{II.1.c})$$

onde y_e e z_e são as coordenadas, no sistema xyz , do centro de cisalhamento E, e com o símbolo “^” referindo-se a um valor de linha média.

II.2 PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA SEÇÃO TRANSVERSAL

Serão requeridas, nos desenvolvimentos subseqüentes, as seguintes propriedades geométricas da seção, as quais já trazem simplificações inerentes ao estudo de hastes de paredes delgadas:

$$A = \int_A dA = \int_{\ell} t ds \quad (\text{II.2})$$

traduzindo a área da seção transversal, onde ℓ representa o comprimento total da linha média da seção, e t a espessura de um trecho genérico;

$$S_y = \int_A \hat{z} dA = \int_{\ell} \hat{z} t ds = 0 \quad (\text{II.3.a})$$

$$S_z = \int_A \hat{y} dA = \int_{\ell} \hat{y} t ds = 0 \quad (\text{II.3.b})$$

representando os momentos estáticos da área da seção relativos aos eixos y e z , respectivamente, nulos por serem estes eixos centroidais;

$$I_y = \int_A \hat{z}^2 dA = \int_{\ell} \hat{z}^2 t ds \quad (\text{II.4.a})$$

$$I_z = \int_A \hat{y}^2 dA = \int_{\ell} \hat{y}^2 t ds \quad (\text{II.4.b})$$

referindo-se aos momentos de inércia da área da seção relativos aos eixos y e z , respectivamente;

$$I_{yz} = \int_A \hat{y}\hat{z}dA = \int_{\ell} \hat{y}\hat{z}tds \quad (\text{II.5})$$

traduzindo o produto de inércia da área da seção em relação aos eixos y e z , o qual se anula se os eixos forem principais;

$$I_e = \int_A r^2 dA = \int_{\ell} r^2 tds \quad (\text{II.6.a})$$

definindo o momento de inércia polar relativo ao pólo E , o qual guarda com os momentos de inércia I_y e I_z , e com as coordenadas y_e e z_e do centro de cisalhamento E , a relação

$$I_e = I_y + I_z + (y_e^2 + z_e^2)A \quad (\text{II.6.b})$$

Além dessas propriedades usuais, definem-se ainda as seguintes propriedades, inerentes ao problema em estudo:

$$J_t = \int_{\ell} \frac{t^3}{3} ds \quad (\text{II.7})$$

representando a constante de torção da seção;

$$Q_y = \int_A r^2 \hat{z}dA = \int_{\ell} r^2 \hat{z}tds \quad (\text{II.8.a})$$

$$Q_z = \int_A r^2 \hat{y}dA = \int_{\ell} r^2 \hat{y}tds \quad (\text{II.8.b})$$

ambas sem denominação especial, tendo-se $Q_y = 0$ se a seção transversal for simétrica em relação ao eixo y , e $Q_z = 0$ caso haja simetria da mesma em relação a z ; e

$$R_e = \int_A r^4 dA = \int_{\ell} r^4 tds \quad (\text{II.9})$$

também sem qualquer denominação especial.

Insera-se, por fim, no estudo das hastes de paredes delgadas de seção aberta, a coordenada generalizada ω , denominada área setorial, associada ao ponto genérico S da linha média e definida por:

$$\omega = \int_{S_0}^S r_n ds \quad (\text{II.10})$$

a qual é avaliada tomando-se o centro de cisalhamento E como pólo e para ponto setorial inicial S_0 um centróide setorial. A partir desse conceito de área setorial, definem-se as ditas propriedades setoriais da seção, as quais passam a ser explicitadas:

$$S_\omega = \int_A \omega dA = \int_\ell \omega t ds = 0 \quad (\text{II.11})$$

traduzindo o momento estático setorial, nulo por se admitir que S_0 é um centróide setorial;

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA = \int_\ell \omega^2 t ds \quad (\text{II.12})$$

representando o momento de inércia setorial;

$$I_{\omega y} = \int_A \omega \hat{z} dA = \int_\ell \omega \hat{z} t ds = 0 \quad (\text{II.13.a})$$

$$I_{\omega z} = \int_A \omega \hat{y} dA = \int_\ell \omega \hat{y} t ds = 0 \quad (\text{II.13.b})$$

referindo-se aos produtos de inércia setoriais em relação aos eixos y e z , respectivamente, nulos por se ter escolhido como pólo o centro de cisalhamento E da seção (pólo principal); e ainda

$$Q_\omega = \int_A \omega r^2 dA = \int_\ell \omega r^2 t ds \quad (\text{II.14})$$

propriedade esta que não recebe nenhuma denominação especial, a qual se anula quando a seção tem pelo menos um eixo de simetria.

II.3 FORMULAÇÃO PARA O PROBLEMA SEGUNDO O MODELO DE ATTARD

No presente item, apresenta-se a formulação analítica pelo ptv para o problema de flexo-torção com não linearidade geométrica de hastes de paredes delgadas de seção aberta, baseada no modelo de ATTARD (1986). Inicia-se pela introdução das hipóteses básicas assumidas pelo referido autor.

II.3.1 HIPÓTESES BÁSICAS

As hipóteses básicas podem ser agrupadas em geométricas e mecânicas. Quanto ao primeiro grupo:

1 – admite-se que as componentes de deformação são pequenas quando comparadas com a unidade;

2 – considera-se comportamento não linear geométrico com ângulos de flexão no âmbito da teoria de rotações moderadas e ângulos de torção no contexto de grandes rotações;

3 – considera-se válida a hipótese de Kirchhoff da Teoria das Placas, pela qual linhas inicialmente retas e normais à superfície média permanecem, na configuração final, retas, normais à superfície média e indeformadas, o que implica anularem-se as componentes de deformação ε_n , ε_{xn} e ε_{ns} nas relações deformação-deslocamento;

4 – supõe-se que a projeção do “contour” sobre o plano original da seção é indeformável;

5 – admite-se que a distorção γ_{xs} é nula na superfície média, para fins de instituição do campo de deslocamentos (trata-se da denominada hipótese de VLASSOV (1962)).

Seguem-se as hipóteses associadas ao material, às tensões e ao carregamento:

6 – o material da barra é suposto homogêneo, isótropo e linearmente elástico, em

conformidade com a Lei de Hooke generalizada, significando comportamento linear do ponto de vista físico;

7 – admitem-se como significativas para o problema apenas as componentes de tensão σ_x e τ_{xs} ;

8 – quanto ao carregamento, consideram-se cargas distribuídas \bar{p}_y e \bar{p}_z , por unidade de área, atuando ao longo da superfície média da haste (portanto com a componente \bar{p}_x suposta nula), e cargas distribuídas $\bar{\rho}_x$, $\bar{\rho}_y$ e $\bar{\rho}_z$, por unidade de comprimento, atuando ao longo da linha média nas seções de extremidade.

II.3.2 CAMPO DE DESLOCAMENTOS

Considerando-se a hipótese 3, juntamente com as relações deformação-deslocamento da teoria não linear da elasticidade, no âmbito geral de grandes deformações e rotações (ver por exemplo NOVOZHILOV (1961)), escreve-se o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\varepsilon_n = \frac{\partial u_n}{\partial n} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_s}{\partial n} \right)^2 \right] = 0 \quad (\text{II.15.a})$$

$$\varepsilon_{xn} = \frac{\partial u_x}{\partial n} \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_n}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial u_n}{\partial n} \right) + \frac{\partial u_s}{\partial x} \frac{\partial u_s}{\partial n} = 0 \quad (\text{II.15.b})$$

$$\varepsilon_{ns} = \frac{\partial u_n}{\partial s} \left(1 + \frac{\partial u_n}{\partial n} \right) + \frac{\partial u_s}{\partial n} \left(1 + \frac{\partial u_s}{\partial s} \right) + \frac{\partial u_x}{\partial n} \frac{\partial u_x}{\partial s} = 0 \quad (\text{II.15.c})$$

sendo u_x , u_n e u_s as componentes do deslocamento de um ponto genérico da barra segundo as direções x , n e s , respectivamente.

Conforme já apresentado em POLILLO (1991), pode-se admitir uma solução desse sistema com a seguinte forma:

$$u_x(x, n, s) = \hat{u}_x(x, s) + n\chi_x(x, s) \quad (\text{II.16.a})$$

$$u_n(x, n, s) = \hat{u}_n(x, s) + n\chi_n(x, s) \quad (\text{II.16.b})$$

$$u_s(x, n, s) = \hat{u}_s(x, s) + n\chi_s(x, s) \quad (\text{II.16.c})$$

com \hat{u}_x , \hat{u}_n e \hat{u}_s denotando os deslocamentos u_x , u_n e u_s na superfície média (onde $n = 0$). Os coeficientes χ_x , χ_n , e χ_s podem ser determinados substituindo as expressões (II.16) em (II.15), daí resultando:

$$\chi_x = \frac{\hat{a}_{21}}{\sqrt{\hat{a}_{21}^2 + \hat{a}_{22}^2 + \hat{a}_{23}^2}} \quad (\text{II.17.a})$$

$$\chi_n = \frac{\hat{a}_{22}}{\sqrt{\hat{a}_{21}^2 + \hat{a}_{22}^2 + \hat{a}_{23}^2}} - 1 \quad (\text{II.17.b})$$

$$\chi_s = \frac{\hat{a}_{23}}{\sqrt{\hat{a}_{21}^2 + \hat{a}_{22}^2 + \hat{a}_{23}^2}} \quad (\text{II.17.c})$$

onde se tem:

$$\hat{a}_{21} = \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial s} \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x} - \left(1 + \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial s} \right) \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} \quad (\text{II.18.a})$$

$$\hat{a}_{22} = \left(1 + \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} \right) \left(1 + \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial s} \right) - \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial s} \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x} \quad (\text{II.18.b})$$

$$\hat{a}_{23} = \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial s} \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} - \left(1 + \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} \right) \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial s} \quad (\text{II.18.c})$$

Conforme ainda discutido em POLILLO (1991), a hipótese 1 acarreta a relação aproximada

$$\hat{a}_{21}^2 + \hat{a}_{22}^2 + \hat{a}_{23}^2 \cong 1$$

o que permite então escrever:

$$\chi_x \cong \hat{a}_{21} \quad (\text{II.19.a})$$

$$\chi_n \cong \hat{\alpha}_{22} - I \quad (\text{II.19.b})$$

$$\chi_s \cong \hat{\alpha}_{23} \quad (\text{II.19.c})$$

Introduzindo em seguida a hipótese 2, que possibilita eliminarem-se as parcelas contendo derivadas de \hat{u}_x nas duas últimas expressões (II.18), chega-se finalmente a:

$$\chi_x \cong \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial s} \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x} - \left(I + \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial s} \right) \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} \quad (\text{II.20.a})$$

$$\chi_n \cong \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial s} \quad (\text{II.20.b})$$

$$\chi_s \cong -\frac{\partial \hat{u}_n}{\partial s} \quad (\text{II.20.c})$$

O campo de deslocamentos resultante, mediante a substituição dessas expressões em (II.16), é dado então por:

$$u_x = \hat{u}_x - n \left(\frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial s} - \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial s} \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x} \right) \quad (\text{II.21.a})$$

$$u_n = \hat{u}_n + n \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial s} \quad (\text{II.21.b})$$

$$u_s = \hat{u}_s - n \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial s} \quad (\text{II.21.c})$$

notando-se que são requeridas as expressões de \hat{u}_x , \hat{u}_n e \hat{u}_s para a sua completa definição.

Valendo-se da hipótese 4, e com o auxílio da figura II.2, podem-se deduzir as seguintes expressões gerais para \hat{u}_n e \hat{u}_s :

$$\hat{u}_n = v \cos \alpha + w \operatorname{sen} \alpha - (\operatorname{sen} \varphi) r_s - (I - \cos \varphi) r_n \quad (\text{II.22.a})$$

$$\hat{u}_s = -v \operatorname{sen} \alpha + w \cos \alpha - (I - \cos \varphi) r_s + (\operatorname{sen} \varphi) r_n \quad (\text{II.22.b})$$

onde $v = v(x)$ e $w = w(x)$ correspondem aos deslocamentos segundo y e z ,

respectivamente, do centro de cisalhamento de uma seção genérica de abscissa x , e $\varphi = \varphi(x)$ representa o ângulo de torção do “contour” da referida seção.

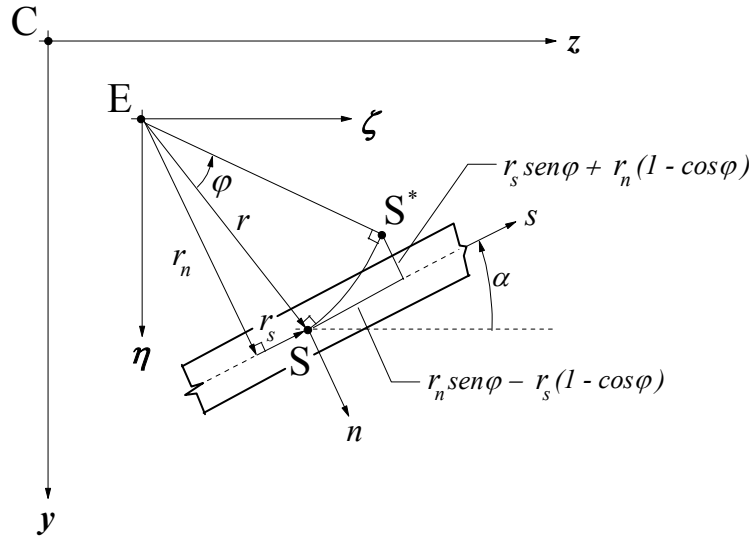


Figura II.2 - Contribuição do ângulo de torção φ para as componentes de deslocamento \hat{u}_n e \hat{u}_s

A componente de deslocamento \hat{u}_x , por sua vez, pode ser instituída com base na condição expressa pela hipótese 5, de distorção $\gamma_{xs} = 0$ para $n = 0$. Tomando-se então para γ_{xs} a relação deformação-deslocamento correspondente da elasticidade não linear, no âmbito de grandes rotações (note-se que, em função da hipótese 1, é válida a aproximação $\varepsilon_{xs} \cong \gamma_{xs}$), qual seja,

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial u_x}{\partial s} \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_s}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial u_s}{\partial s} \right) + \frac{\partial u_n}{\partial x} \frac{\partial u_n}{\partial s} \quad (\text{II.23})$$

desprezando, face à hipótese 2, a derivada $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ em presença da unidade, e introduzindo em seguida o campo de deslocamentos (II.21), obtém-se:

$$\begin{aligned} \gamma_{xs} &= \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial s} + \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial s} + \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial s} + 2n \left[-\frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial x \partial s} - \frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial x \partial s} \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial s} + \frac{\partial^2 \hat{u}_s}{\partial x \partial s} \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial s} \right] + \\ &+ n^2 \left[\frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial x \partial s} \frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_s}{\partial x \partial s} \frac{\partial^2 \hat{u}_s}{\partial s^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

acarretando portanto:

$$\gamma_{xs} \Big|_{n=0} = \hat{\gamma}_{xs} = \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial s} + \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial s} + \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial s} = 0 \quad (\text{II.25})$$

ou então,

$$\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial s} = -\frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x} - \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial s} - \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial s} \quad (\text{II.26})$$

Substituindo-se nessa última equação as expressões obtidas para \hat{u}_n e \hat{u}_s , dadas em (II.22), resulta:

$$\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial s} = (v' \cos \varphi + w' \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} \alpha - (w' \cos \varphi - v' \operatorname{sen} \varphi) \cos \alpha - \varphi' r_n$$

Finalmente, integrando-se essa expressão em relação a s , para o intervalo de S_0 a S , com S_0 , como já visto, representando um centróide setorial, escreve-se:

$$\hat{u}_x = u - (v' \cos \varphi + w' \operatorname{sen} \varphi) \hat{y} - (w' \cos \varphi - v' \operatorname{sen} \varphi) \hat{z} - \omega \varphi' \quad (\text{II.27})$$

ou em notação mais compacta:

$$\hat{u}_x = u - \theta_z \hat{y} - \theta_y \hat{z} - \omega \varphi' \quad (\text{II.28})$$

onde u representa uma translação da linha média da seção segundo o eixo x , dada por

$$u = [\hat{u}_x + (v' \cos \varphi + w' \operatorname{sen} \varphi)\hat{y} + (w' \cos \varphi - v' \operatorname{sen} \varphi)\hat{z}]_{s_0} \quad (\text{II.29})$$

e com θ_z e θ_y sendo definidos por:

$$\theta_z = v' \cos \varphi + w' \operatorname{sen} \varphi \quad (\text{II.30.a})$$

$$\theta_y = w' \cos \varphi - v' \operatorname{sen} \varphi \quad (\text{II.30.b})$$

As expressões (II.21), com \hat{u}_x , \hat{u}_n e \hat{u}_s dados por (II.27) e (II.22), constituem portanto o campo de deslocamentos para o problema, segundo o modelo de Attard.

Expressões alternativas a \hat{u}_n e \hat{u}_s , em termos das componentes \hat{u}_y e \hat{u}_z , serão úteis nos desenvolvimentos subsequentes. Assim, com base num esquema semelhante à figura II.2, deduz-se:

$$\hat{u}_y = v - (\operatorname{sen} \varphi)\hat{\zeta} - (1 - \cos \varphi)\hat{\eta} \quad (\text{II.31.a})$$

$$\hat{u}_z = w + (\operatorname{sen} \varphi)\hat{\eta} - (1 - \cos \varphi)\hat{\zeta} \quad (\text{II.31.b})$$

II.3.3 RELAÇÕES DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO

Considerando que, além de ε_n , γ_{xn} e γ_{ns} , a componente de deformação ε_s é também não relevante ao problema, o interesse fica concentrado apenas nas componentes ε_x e γ_{xs} , para as quais escrevem-se as seguintes relações oriundas da elasticidade não linear, no âmbito de grandes rotações:

$$\varepsilon_x \cong \hat{\varepsilon}_x = \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{u}_s}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (\text{II.32.a})$$

$$\gamma_{xs} = 2n \left[-\frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial x \partial s} - \frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial x \partial s} \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial s} + \frac{\partial^2 \hat{u}_s}{\partial x \partial s} \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial s} \right] + n^2 \left[\frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial x \partial s} \frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_s}{\partial x \partial s} \frac{\partial^2 \hat{u}_s}{\partial s^2} \right] \quad (\text{II.32.b})$$

notando-se que, na primeira dessas expressões, foi desprezada, como é usual, a variação de ε_x na espessura, e que, para γ_{xs} , tem-se a própria equação (II.24) instituída anteriormente, onde se eliminaram, em razão de (II.25), as parcelas que constituem $\hat{\gamma}_{xs}$.

Utilizando a hipótese 2 para descartar em (II.32.a) o termo quadrático na derivada de \hat{u}_x em presença do linear, e substituindo as componentes \hat{u}_x , \hat{u}_n e \hat{u}_s dadas pelas equações (II.27) e (II.22), resultam para ε_x e γ_{xs} as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = & u' - (v'' \cos \varphi + w'' \operatorname{sen} \varphi) \hat{y} - (w'' \cos \varphi - v'' \operatorname{sen} \varphi) \hat{z} - \omega \varphi'' + \\ & + \frac{v'^2}{2} + \frac{w'^2}{2} + \frac{\varphi'^2 r^2}{2} + v' \varphi' (z_e \cos \varphi + y_e \operatorname{sen} \varphi) - w' \varphi' (y_e \cos \varphi - z_e \operatorname{sen} \varphi) \end{aligned} \quad (\text{II.33.a})$$

$$\gamma_{xs} = 2\varphi'n \quad (\text{II.33.b})$$

Tais expressões constituem as relações deformação-deslocamento, de acordo com o modelo de ATTARD (1986), para o problema considerado, destacando-se que a expressão (II.33.b) representa na verdade a parcela da distorção associada exclusivamente à torção de Saint-Venant.

II.3.4 RELAÇÕES TENSÃO-DESLOCAMENTO

Tendo em vista as hipóteses 6 e 7, as componentes de deformação ε_x e γ_{xs} , acima estabelecidas, ficam assim relacionadas às tensões:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_s + \sigma_n) \cong \frac{\sigma_x}{E} \quad (\text{II.34.a})$$

$$\gamma_{xs} = \frac{\tau_{xs}}{G} \quad (\text{II.34.b})$$

onde E , G e ν representam, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal, o módulo de elasticidade transversal e o coeficiente de Poisson do material da barra. Essas relações podem ser assim reescritas explicitando-se as tensões:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (\text{II.35.a})$$

$$\tau_{xs} = G\gamma_{xs} \quad (\text{II.35.b})$$

Finalmente, substituindo nessas últimas as expressões (II.33.a) e (II.33.b), chega-se às seguintes relações entre tensões e deslocamentos:

$$\sigma_x = E \left[u' - (v'' \cos \varphi + w'' \operatorname{sen} \varphi) \hat{y} - (w'' \cos \varphi - v'' \operatorname{sen} \varphi) \hat{z} - \omega \varphi'' + \right. \\ \left. + \frac{v'^2}{2} + \frac{w'^2}{2} + \frac{\varphi'^2 r^2}{2} + v' \varphi' (z_e \cos \varphi + y_e \operatorname{sen} \varphi) - w' \varphi' (y_e \cos \varphi - z_e \operatorname{sen} \varphi) \right] \quad (\text{II.36.a})$$

$$\tau_{xs} = 2G\varphi'n \quad (\text{II.36.b})$$

II.3.5 INTEGRAIS DE TENSÕES NA SEÇÃO

Com a utilização das expressões (II.36.a) e (II.36.b), introduzem-se em seguida diversas integrais de tensões ao longo da área da seção, a serem utilizadas no desenvolvimento da formulação:

$$N = \int_A \sigma_x dA = EA \left[u' + \frac{v'^2}{2} + \frac{w'^2}{2} + (z_e \cos \varphi + y_e \operatorname{sen} \varphi) v' \varphi' - \right. \\ \left. - (y_e \cos \varphi - z_e \operatorname{sen} \varphi) w' \varphi' \right] + \frac{EI_e}{2} \varphi'^2 \quad (\text{II.37.a})$$

$$M_y = - \int_A \sigma_x \hat{z} dA = EI_{yz} (v'' \cos \varphi + w'' \operatorname{sen} \varphi) + EI_y (w'' \cos \varphi - v'' \operatorname{sen} \varphi) - \frac{EQ_y}{2} \varphi'^2 \quad (\text{II.37.b})$$

$$M_z = \int_A \sigma_x \hat{y} dA = -EI_{yz} (w'' \cos \varphi - v'' \operatorname{sen} \varphi) - EI_z (v'' \cos \varphi + w'' \operatorname{sen} \varphi) + \frac{EQ_z}{2} \varphi'^2 \quad (\text{II.37.c})$$

$$K = \int_A \sigma_x r^2 dA = EI_e \left[u' + \frac{v'^2}{2} + \frac{w'^2}{2} + (z_e \cos \varphi + y_e \operatorname{sen} \varphi) v' \varphi' - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - (y_e \cos \varphi - z_e \sin \varphi) w' \varphi' \Big] - EQ_y (w'' \cos \varphi - v'' \sin \varphi) - \\
& - EQ_z (v'' \cos \varphi + w'' \sin \varphi) - EQ_\omega \varphi'' + \frac{ER_e}{2} \varphi'^2 \quad (\text{II.37.d})
\end{aligned}$$

$$B = \int_A \sigma_x \omega dA = -EI_\omega \varphi'' + \frac{EQ_\omega}{2} \varphi'^2 \quad (\text{II.37.e})$$

$$T^{(t)} = -2 \int_A \tau_{xs} n dA = -GJ_t \varphi' \quad (\text{II.37.f})$$

com as duas últimas integrais traduzindo, tal como na teoria linear, as definições do bimomento e do torsor de Saint-Venant, respectivamente.

II.3.6 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

O ptv, quando aplicado aos corpos deformáveis, estabelece que:

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext} \quad \text{ou} \quad \delta W_{int} - \delta W_{ext} = 0 \quad (\text{II.38})$$

ou seja, que o trabalho virtual δW_{int} das forças internas é igual ao trabalho virtual δW_{ext} das forças externas. O desenvolvimento das expressões correspondentes a essas duas parcelas é objeto dos dois próximos sub-itens.

II.3.6.1 Trabalho Virtual das Forças Internas

A contribuição das forças internas é dada por

$$\delta W_{int} = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xs} \delta \gamma_{xs}) dV \quad (\text{II.39})$$

onde V representa o volume da barra.

Com base nas relações deformação-deslocamento (II.33), além das integrais de tensões definidas em (II.37), pode-se escrever δW_{int} sob a forma:

$$\begin{aligned}
\delta W_{int} = \int_0^L \left\{ N\delta u' + [Nv' + N\varphi'(z_e \cos \varphi + y_e \sin \varphi)]\delta v' - \right. \\
- (M_y \sin \varphi + M_z \cos \varphi)\delta v'' + [Nw' + N\varphi'(z_e \sin \varphi - y_e \cos \varphi)]\delta w' + \\
+ (M_y \cos \varphi - M_z \sin \varphi)\delta w'' + [Nv'\varphi'(y_e \cos \varphi - z_e \sin \varphi) + \\
+ Nw'\varphi'(y_e \sin \varphi + z_e \cos \varphi) - M_y v'' \cos \varphi - M_y w'' \sin \varphi + M_z v'' \sin \varphi - \\
- M_z w'' \cos \varphi]\delta \varphi + [Nv'(z_e \cos \varphi + y_e \sin \varphi) + Nw'(z_e \sin \varphi - y_e \cos \varphi) + \\
\left. + K\varphi' - T^{(l)}\right]\delta \varphi' - B\delta \varphi'' \Big\} dx \tag{II.40}
\end{aligned}$$

verificando-se assim que a integração no volume V foi transformada numa integral ao longo do comprimento L da barra. Essa expressão, ao ser explicitada totalmente em termos dos deslocamentos, servirá de base ao tratamento numérico por diferenças finitas energéticas apresentado no capítulo III.

Para propiciar a instituição das equações diferenciais e das condições de contorno do problema, através do princípio dos trabalhos virtuais, faz-se necessário efetuar uma ou duas integrações por partes nos termos de (II.40) contendo variações das derivadas dos deslocamentos; assim procedendo, obtém-se finalmente:

$$\begin{aligned}
\delta W_{int} = \int_0^L \left\{ -N'\delta u - \right. \\
- \left[Nv' + N\varphi'(z_e \cos \varphi + y_e \sin \varphi) + (M_y \sin \varphi + M_z \cos \varphi)' \right] \delta v - \\
- \left[Nw' + N\varphi'(z_e \sin \varphi - y_e \cos \varphi) + (M_z \sin \varphi - M_y \cos \varphi)' \right] \delta w + \\
+ \left[Nv'\varphi'(y_e \cos \varphi - z_e \sin \varphi) + Nw'\varphi'(y_e \sin \varphi + z_e \cos \varphi) - \right. \\
- M_y v'' \cos \varphi - M_y w'' \sin \varphi + M_z v'' \sin \varphi - M_z w'' \cos \varphi - \\
- \left[Nv'(z_e \cos \varphi + y_e \sin \varphi) + Nw'(z_e \sin \varphi - y_e \cos \varphi) + \right. \\
\left. \left. + K\varphi' + B' - T^{(l)} \right]' \right] \delta \varphi \Big\} dx +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ N\delta u + \left[Nv' + N\varphi'(z_e \cos \varphi + y_e \sin \varphi) + (M_y \sin \varphi + M_z \cos \varphi)' \right] \delta v + \right. \\
& + \left[Nw' + N\varphi'(z_e \sin \varphi - y_e \cos \varphi) + (M_z \sin \varphi - M_y \cos \varphi)' \right] \delta w + \\
& + \left[Nv'(z_e \cos \varphi + y_e \sin \varphi) + Nw'(z_e \sin \varphi - y_e \cos \varphi) + K\varphi' + B' - T^{(l)} \right] \delta \varphi - \\
& \left. - (M_y \sin \varphi + M_z \cos \varphi) \delta v' + (M_y \cos \varphi - M_z \sin \varphi) \delta w' - B \delta \varphi' \right\}_0^L \quad (\text{II.41})
\end{aligned}$$

II.3.6.2 Trabalho Virtual das Forças Externas

Em sintonia com as considerações sobre o carregamento formuladas através da hipótese 8, apresenta-se a seguinte expressão para o trabalho virtual das forças externas:

$$\delta W_{ext} = \int_{A_m} \left(\bar{p}_y \delta \hat{u}_y + \bar{p}_z \delta \hat{u}_z \right) dA_m + \left[\int_{\ell} \left(\bar{\rho}_x \delta \hat{u}_x + \bar{\rho}_y \delta \hat{u}_y + \bar{\rho}_z \delta \hat{u}_z \right) ds \right]_0^L \quad (\text{II.42})$$

onde:

\bar{p}_y e \bar{p}_z são as componentes, segundo as direções y e z , das forças por unidade de área prescritas na superfície média A_m da haste, convencionadas como positivas quando atuam no sentido positivo dos respectivos eixos;

$\bar{\rho}_x$, $\bar{\rho}_y$ e $\bar{\rho}_z$ são as componentes, segundo as direções x , y e z , das forças por unidade de comprimento de linha média prescritas nas seções de extremidade da haste, consideradas positivas quando, em $x = L$, têm o mesmo sentido dos eixos e, em $x = 0$, têm o sentido oposto aos eixos correspondentes.

Substituindo, na expressão (II.42), \hat{u}_x , \hat{u}_y e \hat{u}_z dados por (II.27), (II.31.a) e (II.31.b), resulta:

$$\delta W_{ext} = \int_0^L \left\{ \delta v \int_{\ell} \bar{p}_y ds + \delta w \int_{\ell} \bar{p}_z ds + \delta \varphi \int_{\ell} \left[-\bar{p}_y (\hat{\zeta} \cos \varphi + \hat{\eta} \sin \varphi) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{p}_z (\hat{\eta} \cos \varphi - \hat{\zeta} \operatorname{sen} \varphi) ds \Big\} dx + \\
& + \left\{ \delta u \int_{\ell} \bar{\rho}_x ds + \delta v \int_{\ell} \bar{\rho}_y ds + \delta w \int_{\ell} \bar{\rho}_z ds - \right. \\
& - \delta \varphi \left[\int_{\ell} \bar{\rho}_y (\hat{\zeta} \cos \varphi + \hat{\eta} \operatorname{sen} \varphi) - \bar{\rho}_z (\hat{\eta} \cos \varphi - \hat{\zeta} \operatorname{sen} \varphi) \right] ds - \\
& - v' \int_{\ell} \bar{\rho}_x (\hat{z} \cos \varphi + \hat{y} \operatorname{sen} \varphi) ds + w' \int_{\ell} \bar{\rho}_x (\hat{y} \cos \varphi - \hat{z} \operatorname{sen} \varphi) ds \Big] - \\
& \left. - \delta v' \int_{\ell} \bar{\rho}_x (\hat{y} \cos \varphi - \hat{z} \operatorname{sen} \varphi) ds - \delta w' \int_{\ell} \bar{\rho}_x (\hat{z} \cos \varphi + \hat{y} \operatorname{sen} \varphi) ds - \delta \varphi' \int_{\ell} \bar{\rho}_x \omega ds \right\}_0^L
\end{aligned}
\tag{II.43}$$

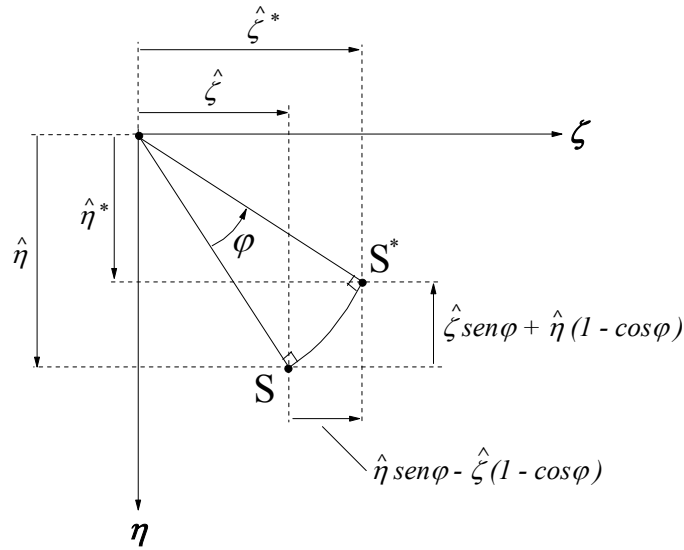


Figura II.3 – Braços de alavanca corrigidos para o cálculo de momentos, em consequência da torção da seção transversal ($\hat{\eta}^* = \hat{\eta} \cos \varphi - \hat{\zeta} \operatorname{sen} \varphi$ e $\hat{\zeta}^* = \hat{\zeta} \cos \varphi + \hat{\eta} \operatorname{sen} \varphi$)

Observando, conforme ilustra a figura II.3, que

$$\hat{\eta}^* = \hat{\eta} \cos \varphi - \hat{\zeta} \sin \varphi \quad (\text{II.44.a})$$

$$\hat{\zeta}^* = \hat{\zeta} \cos \varphi + \hat{\eta} \sin \varphi \quad (\text{II.44.b})$$

e, analogamente,

$$\hat{y}^* = \hat{y} \cos \varphi - \hat{z} \sin \varphi \quad (\text{II.45.a})$$

$$\hat{z}^* = \hat{z} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi \quad (\text{II.45.b})$$

representam braços de alavanca corrigidos para o cálculo de momentos, como consequência da torção da seção transversal, reescreve-se a expressão de δW_{ext} sob a forma:

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} = & \int_0^L \left[\delta v \int_{\ell} \bar{p}_y ds + \delta w \int_{\ell} \bar{p}_z ds + \delta \varphi \int_{\ell} \left(-\bar{p}_y \hat{\zeta}^* + \bar{p}_z \hat{\eta}^* \right) ds \right] dx + \\ & + \left\{ \delta u \int_{\ell} \bar{\rho}_x ds + \delta v \int_{\ell} \bar{\rho}_y ds + \delta w \int_{\ell} \bar{\rho}_z ds - \right. \\ & - \delta \varphi \left[\int_{\ell} \left(\bar{\rho}_y \hat{\zeta}^* - \bar{\rho}_z \hat{\eta}^* \right) ds - v' \int_{\ell} \bar{\rho}_x \hat{z}^* ds + w' \int_{\ell} \bar{\rho}_x \hat{y}^* ds \right] - \\ & \left. - \delta v' \int_{\ell} \bar{\rho}_x \hat{y}^* ds - \delta w' \int_{\ell} \bar{\rho}_x \hat{z}^* ds - \delta \varphi' \int_{\ell} \bar{\rho}_x \omega ds \right\}_0^L \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

Introduzindo, em seguida, o carregamento por unidade de comprimento ao longo da barra, estaticamente equivalente às forças por unidade de área \bar{p}_y e \bar{p}_z atuantes na superfície média, dado por

$$\bar{q}_y(x) = \int_{\ell} \bar{p}_y ds \quad (\text{II.47.a})$$

$$\bar{q}_z(x) = \int_{\ell} \bar{p}_z ds \quad (\text{II.47.b})$$

$$\bar{m}_{\xi}(x) = \int_{\ell} \left(-\bar{p}_y \hat{\zeta}^* + \bar{p}_z \hat{\eta}^* \right) ds \quad (\text{II.47.c})$$

também o carregamento concentrado nas seções de extremidade da barra ($x = 0$ e $x = L$), estaticamente equivalente às forças por unidade de comprimento de linha média $\bar{\rho}_x$, $\bar{\rho}_y$ e $\bar{\rho}_z$ (atuantes ao longo da linha média dessas seções), o qual é expresso por

$$\bar{F}_x = \int_{\ell} \bar{\rho}_x ds \quad (\text{II.48.a})$$

$$\bar{F}_y = \int_{\ell} \bar{\rho}_y ds \quad (\text{II.48.b})$$

$$\bar{F}_z = \int_{\ell} \bar{\rho}_z ds \quad (\text{II.48.c})$$

$$\bar{M}_{\xi} = \int_{\ell} (\bar{\rho}_y \hat{\zeta}^* - \bar{\rho}_z \hat{\eta}^*) ds \quad (\text{II.48.d})$$

$$\bar{M}_y = - \int_{\ell} \bar{\rho}_x \hat{z}^* ds \quad (\text{II.48.e})$$

$$\bar{M}_z = \int_{\ell} \bar{\rho}_x \hat{y}^* ds \quad (\text{II.48.f})$$

e ainda o bimomento prescrito nessas mesmas seções, definido por

$$\bar{B} = \int_{\ell} \bar{\rho}_x \omega ds \quad (\text{II.49})$$

a expressão (II.46) de δW_{ext} , compatível com o caráter unidimensional da formulação, assume o aspecto:

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} = & \int_0^L [\bar{q}_y \delta v + \bar{q}_z \delta w + \bar{m}_{\xi} \delta \varphi] dx + \\ & + \left[\bar{F}_x \delta u + \bar{F}_y \delta v + \bar{F}_z \delta w - (\bar{M}_{\xi} + \bar{M}_y v' + \bar{M}_z w') \delta \varphi - \right. \\ & \left. - \bar{M}_z \delta v' + \bar{M}_y \delta w' - \bar{B} \delta \varphi' \right]_0^L \end{aligned} \quad (\text{II.50})$$

com todas essas cargas sendo representadas, com os seus sentidos positivos, na figura II.4. Note-se que não existe indicação com barra superior (de valor prescrito) para as

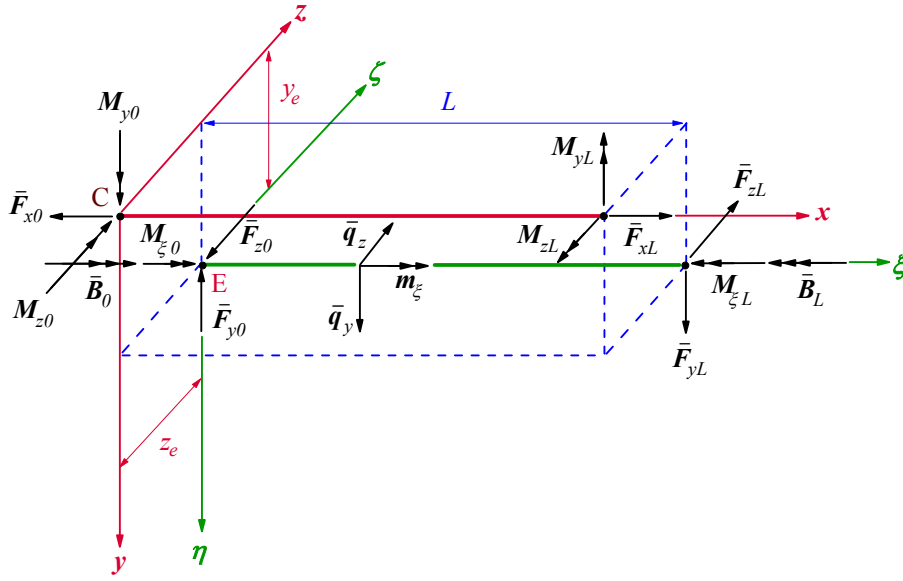


Figura II.4 – Carregamentos previstos no domínio e no contorno da barra

cargas momento, uma vez que as mesmas dependem em princípio do ângulo de torção φ (tal dependência é na verdade apenas formal, não havendo qualquer prejuízo à formulação no caso de um problema em que esses momentos sejam supostos independentes da torção da peça).

Observando-se que as cargas momento podem ser também expressas na forma

$$\begin{aligned}
 m_{\xi} &= \int_{\ell} (-\bar{p}_y \hat{\zeta}^* + \bar{p}_z \hat{\eta}^*) ds = \\
 &= \int_{\ell} [-\bar{p}_y (\hat{\zeta} \cos \varphi + \hat{\eta} \sin \varphi) + \bar{p}_z (\hat{\eta} \cos \varphi - \hat{\zeta} \sin \varphi)] ds = \\
 &= \int_{\ell} [(-\bar{p}_y \hat{\zeta} + \bar{p}_z \hat{\eta}) \cos \varphi - (\bar{p}_y \hat{\eta} + \bar{p}_z \hat{\zeta}) \sin \varphi] ds = \bar{m}_{\xi} \cos \varphi + \bar{r}_{\xi} \sin \varphi
 \end{aligned}
 \tag{II.51}$$

onde

$$\bar{m}_{\xi} = \int_{\ell} (-\bar{p}_y \hat{\zeta} + \bar{p}_z \hat{\eta}) ds \tag{II.52.a}$$

$$\bar{r}_{\xi} = -\int_{\ell} (\bar{p}_y \hat{\eta} + \bar{p}_z \hat{\zeta}) ds \tag{II.52.b}$$

e, analogamente,

$$\mathbf{M}_\xi = \int_\ell (\bar{\rho}_y \hat{\zeta}^* - \bar{\rho}_z \hat{\eta}^*) ds = \bar{M}_\xi \cos \varphi + \bar{R}_\xi \sin \varphi \quad (\text{II.53.a})$$

$$\mathbf{M}_y = -\int_\ell \bar{\rho}_x \hat{z}^* ds = \bar{M}_y \cos \varphi - \bar{M}_z \sin \varphi \quad (\text{II.53.b})$$

$$\mathbf{M}_z = \int_\ell \bar{\rho}_x \hat{y}^* ds = \bar{M}_z \cos \varphi + \bar{M}_y \sin \varphi \quad (\text{II.53.c})$$

onde

$$\bar{M}_\xi = \int_\ell (\bar{\rho}_y \hat{\zeta} - \bar{\rho}_z \hat{\eta}) ds \quad (\text{II.54.a})$$

$$\bar{R}_\xi = \int_\ell (\bar{\rho}_y \hat{\eta} + \bar{\rho}_z \hat{\zeta}) ds \quad (\text{II.54.b})$$

$$\bar{M}_y = -\int_\ell \bar{\rho}_x \hat{z} ds \quad (\text{II.54.c})$$

$$\bar{M}_z = \int_\ell \bar{\rho}_x \hat{y} ds \quad (\text{II.54.d})$$

a expressão (II.50) de δW_{ext} pode, alternativamente, ser assim apresentada:

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} = & \int_0^L [\bar{q}_y \delta v + \bar{q}_z \delta w + (\bar{m}_\xi \cos \varphi + \bar{r}_\xi \sin \varphi) \delta \varphi] dx + \\ & + \left\{ \bar{F}_x \delta u + \bar{F}_y \delta v + \bar{F}_z \delta w - \left[\bar{M}_\xi \cos \varphi + \bar{R}_\xi \sin \varphi + \right. \right. \\ & \left. \left. + \bar{M}_y (v' \cos \varphi + w' \sin \varphi) - \bar{M}_z (v' \sin \varphi - w' \cos \varphi) \right] \delta \varphi - \right. \\ & \left. - (\bar{M}_z \cos \varphi + \bar{M}_y \sin \varphi) \delta v' + (\bar{M}_y \cos \varphi - \bar{M}_z \sin \varphi) \delta w' - \bar{\mathbf{B}} \delta \varphi' \right\}_0^L \quad (\text{II.55}) \end{aligned}$$

Ambas as expressões (II.50) e (II.55) serão utilizadas na avaliação numérica do trabalho virtual das forças externas, conforme será visto no capítulo III.

II.3.6.3 Equações Diferenciais e Condições de Contorno do Problema

As equações diferenciais e condições de contorno do problema podem ser agora determinadas pela aplicação do ptv. Assim, da igualdade entre as expressões (II.41) de δW_{int} e (II.50) ou (II.55) de δW_{ext} , geram-se as equações diferenciais

$$N' = 0 \quad (II.56.a)$$

$$\left[Nv' + N\varphi'(z_e \cos \varphi + y_e \sin \varphi) + (M_y \sin \varphi + M_z \cos \varphi)' \right]' = -\bar{q}_y(x) \quad (II.56.b)$$

$$\left[Nw' + N\varphi'(z_e \sin \varphi - y_e \cos \varphi) + (M_z \sin \varphi - M_y \cos \varphi)' \right]' = -\bar{q}_z(x) \quad (II.56.c)$$

$$\begin{aligned} & Nv'\varphi'(y_e \cos \varphi - z_e \sin \varphi) + Nw'\varphi'(y_e \sin \varphi + z_e \cos \varphi) - M_y v'' \cos \varphi - \\ & - M_y w'' \sin \varphi + M_z v'' \sin \varphi - M_z w'' \cos \varphi - \left[Nv'(z_e \cos \varphi + y_e \sin \varphi) + \right. \\ & \left. + Nw'(z_e \sin \varphi - y_e \cos \varphi) + K\varphi' + B' - T^{(l)} \right]' = \mathbf{m}_\xi(x) = \bar{m}_\xi(x) \cos \varphi + \bar{r}'_\xi(x) \sin \varphi \end{aligned} \quad (II.56.d)$$

e ainda as condições de contorno para o problema, ou seja, em $x = 0$ e em $x = L$,

$$N = \bar{F}_x \quad \text{ou} \quad u = \bar{u} \quad (II.57.a)$$

$$Nv' + N\varphi'(z_e \cos \varphi + y_e \sin \varphi) + (M_y \sin \varphi + M_z \cos \varphi)' = \bar{F}_y \quad \text{ou} \quad v = \bar{v} \quad (II.57.b)$$

$$Nw' + N\varphi'(z_e \sin \varphi - y_e \cos \varphi) + (M_z \sin \varphi - M_y \cos \varphi)' = \bar{F}_z \quad \text{ou} \quad w = \bar{w} \quad (II.57.c)$$

$$\begin{aligned} & Nv'(z_e \cos \varphi + y_e \sin \varphi) + Nw'(z_e \sin \varphi - y_e \cos \varphi) + K\varphi' + B' - T^{(l)} = \\ & = -\mathbf{M}_\xi - \mathbf{M}_y v' - \mathbf{M}_z w' = -\bar{M}_\xi \cos \varphi - \bar{R}_\xi \sin \varphi - \\ & - \bar{M}_y (w' \sin \varphi + v' \cos \varphi) - \bar{M}_z (w' \cos \varphi - v' \sin \varphi) \quad \text{ou} \quad \varphi = \bar{\varphi} \end{aligned} \quad (II.57.d)$$

$$M_z \cos \varphi + M_y \sin \varphi = \mathbf{M}_z = \bar{M}_z \cos \varphi + \bar{M}_y \sin \varphi \quad \text{ou} \quad v' = \bar{v}' \quad (II.57.e)$$

$$M_y \cos \varphi - M_z \sin \varphi = \bar{M}_y = \bar{M}_y \cos \varphi - \bar{M}_z \sin \varphi \quad \text{ou} \quad w' = \bar{w}' \quad (\text{II.57.f})$$

$$B = \bar{B} \quad \text{ou} \quad \varphi' = \bar{\varphi}' \quad (\text{II.57.g})$$

Tem-se assim concluída a formulação analítica correspondente ao modelo de Attard, passando-se no item subsequente à abordagem do modelo de POLILLO *et al.* (1998).

II.4 FORMULAÇÃO PARA O PROBLEMA SEGUNDO O MODELO DE POLILLO, GARCIA E VILLAÇA

A formulação de POLILLO *et al.* (1998) é resultado de alguns aperfeiçoamentos introduzidos numa formulação anterior apresentada por POLILLO (1991). Para apresentação dessa formulação, serão utilizados os mesmos sistemas de referência e convenções apresentados no item II.1. Com relação às hipóteses básicas, permanecem válidas todas aquelas definidas no item II.2, à exceção da segunda, que sofre alteração, uma vez que o problema será focalizado no âmbito de rotações moderadas associadas tanto à torção quanto à flexão. Estritamente falando, se forem introduzidas na formulação de ATTARD (1986) as aproximações

$$\sin \varphi \cong \varphi \quad (\text{II.58.a})$$

$$\cos \varphi \cong 1 \quad (\text{II.58.b})$$

$$1 - \cos \varphi \cong \frac{\varphi^2}{2} \quad (\text{II.58.c})$$

e eliminados os termos que constituem contribuições de ordem superior no contexto da teoria de rotações moderadas, a formulação de POLILLO *et al.* (1998), conforme já focalizado em POLILLO (1999), pode ser encarada como uma particularização da formulação de Attard, sendo esta a opção de abordagem escolhida no presente trabalho com o objetivo de simplificar a exposição.

II.4.1 CAMPO DE DESLOCAMENTOS

Em lugar das expressões (II.21), o campo de deslocamentos é agora definido por:

$$u_x(x, n, s) = \hat{u}_x(x, s) - n \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} \quad (\text{II.59.a})$$

$$u_n(x, n, s) = \hat{u}_n(x, s) + n \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial s} \quad (\text{II.59.b})$$

$$u_s(x, n, s) = \hat{u}_s(x, s) - n \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial s} \quad (\text{II.59.c})$$

notando-se que foram eliminados os termos quadráticos nas derivadas dos deslocamentos em (II.21.a).

Podem-se obter as expressões de \hat{u}_n e \hat{u}_s diretamente de (II.22), levando em conta as aproximações (II.58.a) e (II.58.c):

$$\hat{u}_n = v \cos \alpha + w \sin \alpha - \varphi r_s - \frac{\varphi^2}{2} r_n \quad (\text{II.60.a})$$

$$\hat{u}_s = -v \sin \alpha + w \cos \alpha + \varphi r_n - \frac{\varphi^2}{2} r_s \quad (\text{II.60.b})$$

A componente \hat{u}_x , por sua vez, extraída de (II.27), escreve-se:

$$\hat{u}_x = u - (v' + w' \varphi) \hat{y} - (w' - v' \varphi) \hat{z} - \omega \varphi' \quad (\text{II.61})$$

ou, sob forma mais concisa,

$$\hat{u}_x = u - \theta_z \hat{y} - \theta_y \hat{z} - \omega \varphi' \quad (\text{II.62})$$

sendo u , com base em (II.29), expresso por

$$u = [\hat{u}_x + (v' + w' \varphi) \hat{y} + (w' - v' \varphi) \hat{z}]_{s_0} \quad (\text{II.63})$$

e com θ_z e θ_y , a partir de (II.30), dados por:

$$\theta_z = v' + w' \varphi \quad (\text{II.64.a})$$

$$\theta_y = w' - v' \varphi \quad (\text{II.64.b})$$

Dessa forma, o campo de deslocamentos (II.59) fica totalmente definido, sendo ainda válido, pelo nível de aproximação da teoria, desconsiderar na expressão (II.59.b) a parcela $n \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial s} = -n \frac{\varphi^2}{2}$, representando a variação de u_n na espessura, ou seja, $u_n(x, n, s) \cong \hat{u}_n(x, s)$.

Por sua vez, as expressões para \hat{u}_y e \hat{u}_z assim se escrevem em lugar de (II.31):

$$\hat{u}_y = v - \varphi \hat{\zeta} - \frac{\varphi^2}{2} \hat{\eta} \quad (\text{II.65.a})$$

$$\hat{u}_z = w + \varphi \hat{\eta} - \frac{\varphi^2}{2} \hat{\zeta} \quad (\text{II.65.b})$$

II.4.2 RELAÇÕES DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO

As relações deformação-deslocamento (II.33) reduzem-se neste caso a:

$$\varepsilon_x = u' - (v'' + w'' \varphi) \hat{y} - (w'' - v'' \varphi) \hat{z} - \omega \varphi'' + \frac{v'^2}{2} + \frac{w'^2}{2} + \frac{r^2 \varphi'^2}{2} + v' \varphi' z_e - w' \varphi' y_e \quad (\text{II.66.a})$$

$$\gamma_{xs} = 2\varphi' n \quad (\text{II.66.b})$$

onde, além de serem utilizadas as relações (II.58.a) e (II.58.b), foram retidos, em conformidade com o nível de aproximação da teoria de rotações moderadas, apenas os termos lineares e quadráticos nas derivadas dos deslocamentos u, v, w, φ e no próprio ângulo de torção φ .

II.4.3 RELAÇÕES TENSÃO-DEFORMAÇÃO

Em lugar de (II.36), tem-se agora as seguintes relações tensão-deslocamento:

$$\sigma_x = E \left[u' - (v'' + w'' \varphi) \hat{y} - (w'' - v'' \varphi) \hat{z} - \omega \varphi'' + \frac{v'^2}{2} + \frac{w'^2}{2} + \frac{r^2 \varphi'^2}{2} + v' \varphi' z_e - w' \varphi' y_e \right] \quad (\text{II.67a})$$

$$\tau_{xs} = 2G \varphi' n \quad (\text{II.67.b})$$

II.4.4 INTEGRAIS DE TENSÕES NA SEÇÃO

A presente formulação prevê as mesmas integrais anteriores de tensões ao longo da área da seção, as quais, mediante particularização das expressões (II.37), tornam-se neste caso:

$$N = \int_A \sigma_x dA = EA \left(u' + \frac{v'^2}{2} + \frac{w'^2}{2} + z_e v' \varphi' - y_e w' \varphi' \right) + \frac{EI_e}{2} \varphi'^2 \quad (\text{II.68.a})$$

$$M_y = - \int_A \sigma_x \hat{z} dA = EI_{yz} (v'' + w'' \varphi) + EI_y (w'' - v'' \varphi) - \frac{EQ_y}{2} \varphi'^2 \quad (\text{II.68.b})$$

$$M_z = \int_A \sigma_x \hat{y} dA = -EI_{yz} (w'' - v'' \varphi) - EI_z (v'' + w'' \varphi) + \frac{EQ_z}{2} \varphi'^2 \quad (\text{II.68.c})$$

$$K = \int_A \sigma_x r^2 dA = EI_e \left(u' + \frac{v'^2}{2} + \frac{w'^2}{2} + z_e v' \varphi' - y_e w' \varphi' \right) - EQ_y (w'' - v'' \varphi) - EQ_z (v'' + w'' \varphi) - EQ_\omega \varphi'' + \frac{ER_e}{2} \varphi'^2 \quad (\text{II.68.d})$$

$$B = \int_A \sigma_x \omega dA = -EI_\omega \varphi'' + \frac{EQ_\omega}{2} \varphi'^2 \quad (\text{II.68.e})$$

$$T^{(l)} = -2 \int_A \tau_{xs} n dA = -GJ_t \varphi' \quad (\text{II.68.f})$$

II.4.5 TRABALHO VIRTUAL DAS FORÇAS INTERNAS

A contribuição das forças internas ao trabalho virtual, computada a partir de (II.40), assim se escreve:

$$\begin{aligned} \delta W_{int} = \int_0^L \left[N \delta u' + (Nv' + N\varphi'z_e) \delta v' - (M_z + M_y \varphi) \delta v'' + (Nw' - N\varphi'y_e) \delta w' + \right. \\ \left. + (M_y - M_z \varphi) \delta w'' - (M_y v'' + M_z w'') \delta \varphi + \right. \\ \left. + (Nv'z_e - Nw'y_e + K\varphi' - T^{(l)}) \delta \varphi' - B \delta \varphi'' \right] dx \end{aligned} \quad (II.69)$$

forma esta adequada ao tratamento numérico no capítulo III; cabe notar que, associando-se a cada uma das variações, são preservados apenas os termos que, além das integrais de tensões, contenham no máximo uma derivada de deslocamento ou então, no caso do ângulo φ , o próprio deslocamento.

Da particularização de (II.41) pode-se obter a correspondente expressão de δW_{int} para uso na dedução pelo ptv das equações diferenciais e condições de contorno do problema:

$$\begin{aligned} \delta W_{int} = \int_0^L \left\{ -N' \delta u - \left[Nv' + N\varphi'z_e + (M_z + M_y \varphi)' \right]' \delta v - \right. \\ \left. - \left[Nw' - N\varphi'y_e - (M_y - M_z \varphi)' \right]' \delta w - \right. \\ \left. - \left[M_y v'' + M_z w'' + (Nv'z_e - Nw'y_e + K\varphi' + B' - T^{(l)})' \right] \delta \varphi \right\} dx + \\ + \left\{ N \delta u + \left[Nv' + N\varphi'z_e + (M_z + M_y \varphi)' \right] \delta v + \right. \\ + \left[Nw' - N\varphi'y_e - (M_y - M_z \varphi)' \right] \delta w + \\ \left. + \left[Nv'z_e - Nw'y_e + K\varphi' + B' - T^{(l)} \right] \delta \varphi - (M_z + M_y \varphi) \delta v' + \right. \end{aligned}$$

$$+ (M_y - M_z \varphi) \delta w' - B \delta \varphi' \Big\}_0^L \quad (\text{II.70})$$

II.4.6 TRABALHO VIRTUAL DAS FORÇAS EXTERNAS

Para o trabalho virtual das forças externas, com base nas expressões (II.50) e (II.55) anteriores, escreve-se:

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} &= \int_0^L (\bar{q}_y \delta v + \bar{q}_z \delta w + m_\xi \delta \varphi) dx + \\ &+ \left[\bar{F}_x \delta u + \bar{F}_y \delta v + \bar{F}_z \delta w - (M_\xi + M_y v' + M_z w') \delta \varphi - \right. \\ &\left. - M_z \delta v' + M_y \delta w' - \bar{B} \delta \varphi' \right]_0^L = \\ &= \int_0^L [\bar{q}_y \delta v + \bar{q}_z \delta w + (\bar{m}_\xi + \bar{r}_\xi \varphi) \delta \varphi] dx + \\ &+ \left[\bar{F}_x \delta u + \bar{F}_y \delta v + \bar{F}_z \delta w - (\bar{M}_\xi + \bar{R}_\xi \varphi + \bar{M}_y v' + \bar{M}_z w') \delta \varphi - \right. \\ &\left. - (\bar{M}_z + \bar{M}_y \varphi) \delta v' + (\bar{M}_y - \bar{M}_z \varphi) \delta w' - \bar{B} \delta \varphi' \right]_0^L \end{aligned} \quad (\text{II.71})$$

onde, com a utilização de (II.58.a) e (II.58.b), as cargas por unidade de comprimento previstas no domínio, bem como as solicitações de carácter concentrado presentes nas extremidades $x = 0$ e $x = L$ da barra, ficam agora definidas por (ver expressões (II.47) a (II.49), (II.52) a (II.54)):

$$\bar{q}_y(x) = \int_\ell \bar{p}_y ds \quad (\text{II.72.a})$$

$$\bar{q}_z(x) = \int_\ell \bar{p}_z ds \quad (\text{II.72.b})$$

$$m_\xi(x) = \int_\ell (-\bar{p}_y \hat{\zeta}^* + \bar{p}_z \hat{\eta}^*) ds = \bar{m}_\xi + \bar{r}_\xi \varphi \quad (\text{II.72.c})$$

$$\bar{m}_\xi = \int_\ell \left(-\bar{\rho}_y \hat{\zeta} + \bar{\rho}_z \hat{\eta} \right) ds \quad (\text{II.72.d})$$

$$\bar{r}_\xi(x) = -\int_\ell \left(\bar{\rho}_y \hat{\eta} + \bar{\rho}_z \hat{\zeta} \right) ds \quad (\text{II.72.e})$$

$$\bar{\mathbf{F}}_x = \int_\ell \bar{\rho}_x ds \quad (\text{II.72.f})$$

$$\bar{\mathbf{F}}_y = \int_\ell \bar{\rho}_y ds \quad (\text{II.72.g})$$

$$\bar{\mathbf{F}}_z = \int_\ell \bar{\rho}_z ds \quad (\text{II.72.h})$$

$$\mathbf{M}_\xi = \int_\ell \left(\bar{\rho}_y \hat{\zeta}^* - \bar{\rho}_z \hat{\eta}^* \right) ds = \bar{M}_\xi + \bar{R}_\xi \varphi \quad (\text{II.72.i})$$

$$\bar{M}_\xi = \int_\ell \left(\bar{\rho}_y \hat{\zeta} - \bar{\rho}_z \hat{\eta} \right) ds \quad (\text{II.72.j})$$

$$\bar{R}_\xi = \int_\ell \left(\bar{\rho}_y \hat{\eta} + \bar{\rho}_z \hat{\zeta} \right) ds \quad (\text{II.72.k})$$

$$\mathbf{M}_y = -\int_\ell \bar{\rho}_x \hat{z}^* ds = \bar{M}_y - \bar{M}_z \varphi \quad (\text{II.72.l})$$

$$\mathbf{M}_z = \int_\ell \bar{\rho}_x \hat{y}^* ds = \bar{M}_z + \bar{M}_y \varphi \quad (\text{II.72.m})$$

$$\bar{M}_y = -\int_\ell \bar{\rho}_x \hat{z} ds \quad (\text{II.72.n})$$

$$\bar{M}_z = \int_\ell \bar{\rho}_x \hat{y} ds \quad (\text{II.72.o})$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \int_\ell \bar{\rho}_x \omega ds \quad (\text{II.72.p})$$

notando-se ainda que foram introduzidas em (II.71) as aproximações $\mathbf{M}_y v' \cong \bar{M}_y v'$ e $\mathbf{M}_z w' \cong \bar{M}_z w'$.

II.4.7 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E CONDIÇÕES DE CONTORNO DO PROBLEMA

As equações diferenciais e condições de contorno para o problema podem ser também obtidas diretamente das equações (II.56) e (II.57), impondo-se as aproximações (II.58.a) e (II.58.b) e, uma vez mais, retendo-se apenas os termos compatíveis com o

nível de aproximação da teoria. Daí resultam as equações diferenciais

$$N' = 0 \quad (\text{II.73.a})$$

$$\left[Nv' + N\varphi'z_e + (M_z + M_y\varphi)' \right]' = -\bar{q}_y \quad (\text{II.73.b})$$

$$\left[Nw' - N\varphi'y_e - (M_y - M_z\varphi)' \right]' = -\bar{q}_z \quad (\text{II.73.c})$$

$$-M_yv'' - M_zw'' - (Nv'z_e - Nw'y_e + K\varphi' + B' - T^{(l)})' = \mathbf{m}_\xi = \bar{m}_\xi + \bar{r}_\xi\varphi \quad (\text{II.73.d})$$

e as seguintes condições de contorno em $x = 0$ e $x = L$:

$$N = \bar{F}_x \quad \text{ou} \quad u = \bar{u} \quad (\text{II.74.a})$$

$$Nv' + N\varphi'z_e + (M_y\varphi + M_z)' = \bar{F}_y \quad \text{ou} \quad v = \bar{v} \quad (\text{II.74.b})$$

$$Nw' - N\varphi'y_e + (M_z\varphi - M_y)' = \bar{F}_z \quad \text{ou} \quad w = \bar{w} \quad (\text{II.74.c})$$

$$\begin{aligned} Nv'z_e - Nw'y_e + K\varphi' + B' - T^{(l)} &= -\mathbf{M}_\xi - \mathbf{M}_yv' - \mathbf{M}_zw' = \\ &= -\bar{M}_\xi - \bar{R}_\xi\varphi - \bar{M}_yv' - \bar{M}_zw' \quad \text{ou} \quad \varphi = \bar{\varphi} \end{aligned} \quad (\text{II.74.d})$$

$$M_z + M_y\varphi = \mathbf{M}_z = \bar{M}_z + \bar{M}_y\varphi \quad \text{ou} \quad v' = \bar{v}' \quad (\text{II.74.e})$$

$$M_y - M_z\varphi = \mathbf{M}_y = \bar{M}_y - \bar{M}_z\varphi \quad \text{ou} \quad w = \bar{w}' \quad (\text{II.74.f})$$

$$B = \bar{B} \quad \text{ou} \quad \varphi' = \bar{\varphi}' \quad (\text{II.74.g})$$

concluindo-se assim a formulação do problema segundo POLILLO *et al.* (1998).

Para finalizar este capítulo, chama-se atenção para o aspecto de que somente por intermédio de uma implementação numérica pode-se em termos práticos avaliar, qualitativa e quantitativamente, as diferenças existentes entre os resultados fornecidos pelos dois modelos de análise considerados. Para este fim, será então estabelecido no próximo capítulo o correspondente tratamento numérico por diferenças finitas energéticas para cada uma dessas formulações analíticas.

CAPÍTULO III

TRATAMENTO NUMÉRICO DO PROBLEMA

Neste capítulo, apresenta-se o tratamento numérico do problema pelo método das diferenças finitas energéticas (mdfe), correspondente a cada uma das duas formulações analíticas desenvolvidas no capítulo anterior. Para tanto, segue-se uma metodologia semelhante àquela empregada por LIMA (1995), onde essa mesma técnica numérica foi aplicada ao problema da flexão plana de barras prismáticas com rotações moderadas.

Inicia-se, no item III.1, apresentando uma síntese do procedimento numérico empregado, o qual já se encontra bastante detalhado em trabalhos anteriores, como por exemplo os de LIMA (1995) e BORGES (1994). Em seguida, no item III.2, definem-se a discretização da barra e os sistemas de numeração global e local adotados para identificação dos deslocamentos nodais. No item III.3, apresentam-se as representações em diferenças finitas escolhidas para avaliar as derivadas dos deslocamentos presentes nas expressões dos trabalhos virtuais interno e externo. Posteriormente, nos itens III.4 e III.5 respectivamente, são instituídas as expressões utilizadas para avaliar numericamente as parcelas δW_{int} e δW_{ext} da formulação de ATTARD (1986). A introdução das condições de contorno e as técnicas de resolução do sistema não linear de equações algébricas resultante são discutidas nos itens III.6 e III.7, concluindo-se com isso a abordagem do modelo de Attard. Finalmente, no item III.8, é apresentado, de forma sucinta, o correspondente tratamento numérico para a formulação de POLILLO *et al.* (1998), e destacadas algumas diferenças existentes com relação à formulação desenvolvida para o modelo de Attard.

III.1 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

O tratamento numérico do problema, em termos da técnica das diferenças finitas energéticas, consiste basicamente em introduzir, nas expressões das parcelas δW_{int} e δW_{ext} , que compõem o princípio dos trabalhos virtuais, as representações em diferenças finitas utilizadas para as derivadas dos deslocamentos, supondo, para fins de avaliação desses trabalhos virtuais, a barra subdividida em trechos de integração, ao longo dos

quais todas as grandezas envolvidas são supostas constantes. Uma vez computados δW_{int} e δW_{ext} , mediante o somatório das contribuições dos diversos trechos de integração, e considerando-se as condições de vinculação da barra, surge, pela aplicação do ptv, um sistema de equações algébricas não lineares de equilíbrio que, uma vez resolvido, permite obter a solução em termos dos deslocamentos nodais u , v , w e φ incógnitos do problema.

III.2 DISCRETIZAÇÃO DA BARRA E SISTEMAS DE NUMERAÇÃO PARA OS DESLOCAMENTOS

A discretização adotada acha-se esquematizada na figura III.1. Supõe-se a barra subdividida em N partes iguais, de comprimento $\lambda = L/N$, envolvendo um total de $N + 1$ nós reais, assim designados por pertencerem à barra. Nota-se ainda a presença de dois nós externos à barra, e por isto denominados de nós virtuais, incluídos na discretização por conta da necessidade de se avaliarem as derivadas primeira e segunda dos deslocamentos nas extremidades $x = 0$ e $x = L$ da barra. Considerando-se então um total de NN nós na barra, tem-se a relação $NN = N + 3$. Ao conjunto de NN nós estão associados $NN - 2$ trechos de integração, conforme também indicado na figura, observando-se que, para os trechos localizados nas extremidades, o comprimento é $\lambda/2$, e que, para os demais, o comprimento vale λ .

Evidenciam-se ainda na figura III.1 os deslocamentos u , v , w e φ numerados de acordo com um sistema de numeração global, onde, a um nó genérico i da barra ($i = 1$ a NN), associam-se os deslocamentos U_{4i-3} , U_{4i-2} , U_{4i-1} e U_{4i} , representativos de u_i , v_i , w_i e φ_i respectivamente. Perfaz-se assim um conjunto de $4 \times NN$ possíveis graus de liberdade na barra, dos quais oito referem-se aos deslocamentos virtuais U_1 a U_4 e U_{4NN-3} a U_{4NN} .

Na figura III.2 acha-se explicitado o sistema de numeração local para os deslocamentos nodais, introduzido com o objetivo de facilitar o cômputo da parcela de contribuição de cada trecho de integração ao cálculo do trabalho virtual interno. Nesse sistema define-se, em associação a três nós consecutivos $i - 1$, i , $i + 1$, um conjunto de

doze deslocamentos, a_i a a_{12} , relacionados a u , v , w e φ conforme indicado na figura. Esses deslocamentos a_k ($k = 1$ a 12) são ligados aos deslocamentos no sistema de numeração global da figura III.1 mediante a seguinte relação de correspondência, inerente a um trecho genérico de integração j ($j = 1$ a $NN - 2$):

$$a_k \rightarrow U_{4j+k-4} \quad (k = 1 \text{ a } 12) \quad (III.1)$$

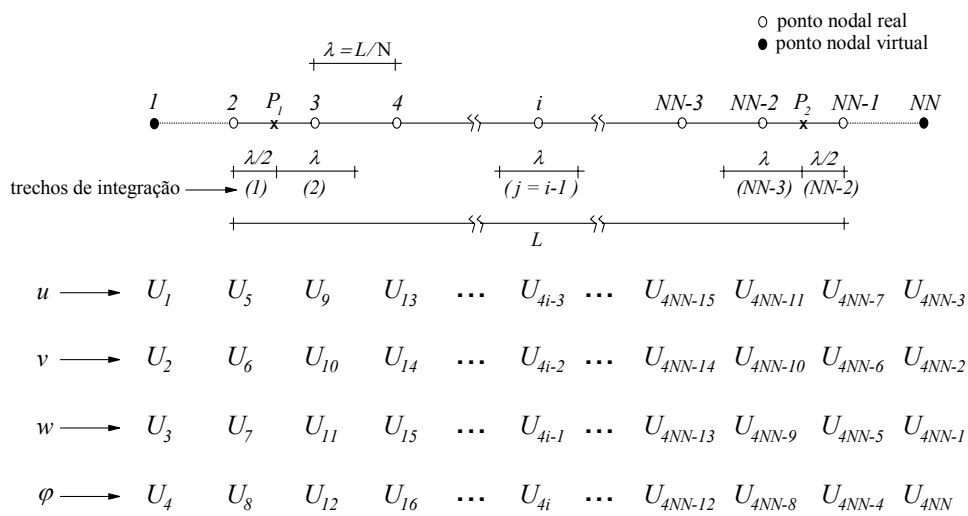


Figura III.1 – Discretização da barra e sistema de numeração global para os deslocamentos nodais

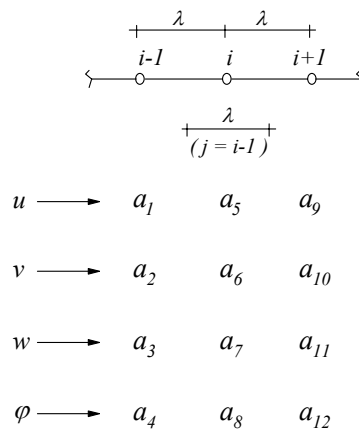


Figura III.2 - Sistema de numeração local para os deslocamentos nodais

III.3 REPRESENTAÇÕES EM DIFERENÇAS FINITAS PARA AS DERIVADAS DOS DESLOCAMENTOS

Conforme visto no Capítulo II, os termos contidos nas expressões de δW_{int} e δW_{ext} , considerando-se ambos os modelos de flexo-torção estudados, contêm apenas derivadas de primeira e segunda ordem dos deslocamentos, as quais serão avaliadas utilizando as representações em diferenças finitas explicitadas nos dois sub-itens subseqüentes. Recorde-se que, na implementação numérica, tais derivadas são supostas constantes ao longo de um trecho de integração.

III.3.1 DERIVADA PRIMEIRA

Para a derivada primeira dos deslocamentos serão adotados dois esquemas de avaliação: a representação convencional e a representação reduzida, esta última assim denominada por GARCIA (1987). A adoção dessas duas representações para a derivada primeira se deve ao fato, já constatado anteriormente por BORGES (1994) e LIMA (1995), de que o procedimento numérico conduz à singularidade no sistema de equações algébricas (associada especificamente ao deslocamento u) quando se procura utilizar apenas a representação convencional ao longo do domínio da barra.

III.3.1.1 Representação Convencional

Considere-se, para fins de obtenção da derivada primeira em representação convencional, o esquema da figura III.3. Seja $f(x)$ uma função genérica representativa dos deslocamentos $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ e $\varphi(x)$, a qual, para os pontos $i-1$ e $i+1$, distantes 2λ entre si, vale f_{i-1} e f_{i+1} , respectivamente. A derivada primeira nesse tipo de representação, avaliada no ponto pivotal i , é expressa por

$$f'_i = \frac{1}{2\lambda}(f_{i+1} - f_{i-1}) \quad (\text{III.2})$$

Tal representação será empregada para os trechos de integração intermediários, de (2) a $(NN - 3)$, e também para fins de implementação das condições de contorno cinemáticas em v' , w' e φ' nas extremidades da barra (lembrando-se que não existe condição cinemática em u').

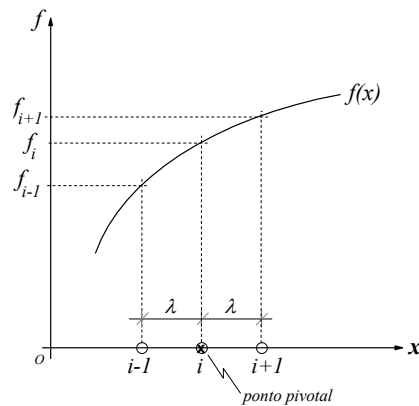


Figura III.3 – Esquema para a representação convencional em diferenças finitas das derivadas primeira e segunda de f

III.3.1.2 Representação Reduzida

Considerando-se o esquema da figura III.4, e admitindo que i e $i + 1$ sejam dois pontos nodais consecutivos da barra, a derivada primeira de $f(x)$, em termos da representação reduzida, fica assim definida para o ponto pivotal m :

$$f'_m = \frac{1}{\lambda}(f_{i+1} - f_i) \quad (III.3)$$

com tal representação associando-se exclusivamente aos trechos extremos de integração (1) e $(NN - 2)$ na figura III.1, para os quais se escreve:

$$f'_{P_1} = \frac{1}{\lambda}(f_3 - f_2) \quad (III.4.a)$$

$$f'_{P_2} = \frac{1}{\lambda} (f_{NN-1} - f_{NN-2}) \quad (\text{III.4.b})$$

observando-se que os pontos pivotais P_1 e P_2 não representam os pontos médios dos correspondentes trechos de integração.

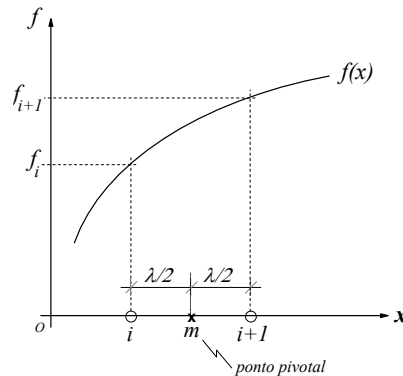


Figura III.4 – Esquema para a representação reduzida em diferenças finitas da derivada primeira de f

III.3.2 DERIVADA SEGUNDA

Para a derivada segunda dos deslocamentos, adota-se uma vez mais a representação convencional, a qual, com o auxílio da figura III.3, é dada por:

$$f''_i = \frac{1}{\lambda^2} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) \quad (\text{III.5})$$

sendo a mesma utilizada para todos os trechos de integração ao longo da barra (no caso específico dos trechos de extremidade, tal derivada é avaliada tomando-se para pontos pivotais os nós reais inicial e final da barra).

No quadro III.1 é apresentado um resumo, onde são indicados os tipos de representações em diferenças finitas utilizados ao longo do domínio e também para fins de implementação das condições de contorno.

Quadro III.1 – Tipos de representações em diferenças finitas utilizados no domínio e no contorno da barra

Representações em Diferenças Finitas			
Derivada	Contorno	Domínio	
	Extremidades $x = 0$ e $x = L$	Trechos de Integração Extremos $(j) = (1)$ e $(j) = (NN - 2)$	Trechos de Integração Intermediários $(2) \leq (j) \leq (NN - 3)$
Derivada Primeira	Convencional	Reduzida	Convencional
Derivada Segunda	Convencional	Convencional	Convencional

Cabe destacar que o conteúdo do presente item, bem como o dos itens precedentes, é comum a ambos os modelos estudados no presente trabalho. Nos desenvolvimentos subseqüentes, abordam-se inicialmente os demais aspectos da formulação numérica para o caso específico do modelo de Attard, dando-se, ao final do capítulo, esse mesmo tratamento ao modelo de Polillo, Garcia e Villaça.

III.4 AVALIAÇÃO NUMÉRICA DO TRABALHO VIRTUAL INTERNO

A avaliação numérica do trabalho virtual interno δW_{int} é feita tomando-se a correspondente expressão analítica totalmente escrita em termos dos deslocamentos, e encarando-a como um somatório de contribuições associadas aos $NN - 2$ trechos de integração. Focalizando-se, então, a formulação de ATTARD (1986), resgata-se inicialmente a expressão (II.40), a qual é repetida a seguir:

$$\delta W_{int} = \int_0^L \left\{ N \delta u' + [Nv' + N\varphi'(z_e \cos \varphi + y_e \sen \varphi)] \delta v' - \right. \\ \left. - (M_y \sen \varphi + M_z \cos \varphi) \delta v'' + [Nw' + N\varphi'(z_e \sen \varphi - y_e \cos \varphi)] \delta w' + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (M_y \cos \varphi - M_z \sin \varphi) \delta w'' + [Nv' \varphi' (y_e \cos \varphi - z_e \sin \varphi) + \\
& + Nw' \varphi' (y_e \sin \varphi + z_e \cos \varphi) - M_y v'' \cos \varphi - M_y w'' \sin \varphi + M_z v'' \sin \varphi - \\
& - M_z w'' \cos \varphi] \delta \varphi + [Nv' (z_e \cos \varphi + y_e \sin \varphi) + Nw' (z_e \sin \varphi - y_e \cos \varphi) + \\
& + K \varphi' - T^{(I)}] \delta \varphi' - B \delta \varphi'' \Big\} dx \tag{III.6}
\end{aligned}$$

Em seguida, com base nas integrais de tensões (II.37), reescreve-se tal expressão inteiramente em termos dos deslocamentos, nela isolando-se os grupos de termos lineares (δW_{int}^{LIN}), quadráticos (δW_{int}^{QUA}), cúbicos (δW_{int}^{CUB}) e quárticos (δW_{int}^{QUAR}) nas derivadas dos deslocamentos (note-se que esta classificação é independente da presença ou não das funções trigonométricas $\sin \varphi$ e $\cos \varphi$), conforme explicitado abaixo:

$$\delta W_{int} = \delta W_{int}^{LIN} + \delta W_{int}^{QUA} + \delta W_{int}^{CUB} + \delta W_{int}^{QUAR} \tag{III.7}$$

onde

$$\begin{aligned}
\delta W_{int}^{LIN} = & \int_0^L \left\{ EAu' \delta u' + GJ_T \varphi' \delta \varphi' + EI_\omega \varphi'' \delta \varphi'' + \right. \\
& + \left[(EI_z v'' + EI_{yz} w'') \delta v'' + (EI_y w'' + EI_{yz} v'') \delta w'' \right] \cos^2 \varphi + \\
& + \left[(EI_y v'' - EI_{yz} w'') \delta v'' + (EI_z w'' - EI_{yz} v'') \delta w'' \right] \sin^2 \varphi + \\
& + \left[[(EI_z - EI_y) w'' - 2EI_{yz} v''] \delta v'' + [(EI_z - EI_y) v'' + 2EI_{yz} w''] \delta w'' \right] \times \\
& \left. \times \cos \varphi \sin \varphi \right\} dx \tag{III.8.a}
\end{aligned}$$

$$\delta W_{int}^{QUA} = \int_0^L \left\{ \left[EA \left(\frac{v'^2}{2} + \frac{w'^2}{2} \right) + \frac{EI_e}{2} \varphi'^2 \right] \delta u' + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + EAu'v'\delta v' + EAu'w'\delta w' + (EI_e u' \varphi' - EQ_\omega \varphi' \varphi'') \delta \varphi' - \frac{EQ_\omega}{2} \varphi'^2 \delta \varphi'' + \\
& + \left[EA(z_e v' \varphi' - y_e w' \varphi') \delta u' + EAz_e u' \varphi' \delta v' - EAy_e u' \varphi' \delta w' + \right. \\
& + \left[EA(z_e u' v' - y_e u' w') - EQ_z v'' \varphi' - EQ_y w'' \varphi' \right] \delta \varphi' - \\
& - \left. \frac{EQ_z}{2} \varphi'^2 \delta v'' - \frac{EQ_y}{2} \varphi'^2 \delta w'' \right] \cos \varphi + \\
& + \left[EA(y_e v' \varphi' + z_e w' \varphi') \delta u' + EAy_e u' \varphi' \delta v' + EAz_e u' \varphi' \delta w' + \right. \\
& + \left[EA(y_e u' v' + z_e u' w') + EQ_y v'' \varphi' - EQ_z w'' \varphi' \right] \delta \varphi' + \\
& + \left. \frac{EQ_y}{2} \varphi'^2 \delta v'' - \frac{EQ_z}{2} \varphi'^2 \delta w'' \right] \sin \varphi + \\
& + \left[(EI_z - EI_y) v'' w'' + EI_{yz} (v''^2 + w''^2) \right] \delta \varphi \cos^2 \varphi + \\
& + \left[(EI_y - EI_z) v'' w'' + EI_{yz} (v''^2 + w''^2) \right] \delta \varphi \sin^2 \varphi + \\
& + (EI_y - EI_z) (v''^2 - w''^2) \delta \varphi \cos \varphi \sin \varphi \left. \right\} dx \tag{III.8.b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta W_{int}^{CUB} = \int_0^L & \left\{ \left[EA \left(\frac{v'^3}{2} + \frac{v' w'^2}{2} \right) + \frac{EI_e}{2} v' \varphi'^2 \right] \delta v' + \right. \\
& + \left[EA \left(\frac{w'^3}{2} + \frac{v'^2 w'}{2} \right) + \frac{EI_e}{2} w' \varphi'^2 \right] \delta w' +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{EI_e}{2} (v'^2 \varphi' + w'^2 \varphi') + \frac{ER_e}{2} \varphi'^3 \right] \delta \varphi' + \\
& + \left[\left[EA \left(\frac{3z_e v'^2 \varphi'}{2} + \frac{z_e w'^2 \varphi'}{2} - y_e v' w' \varphi' \right) + \frac{EI_e z_e \varphi'^3}{2} \right] \delta v' - \right. \\
& - \left[EA \left(\frac{y_e v'^2 \varphi'}{2} + \frac{3y_e w'^2 \varphi'}{2} - z_e v' w' \varphi' \right) + \frac{EI_e y_e \varphi'^3}{2} \right] \delta w' + \\
& + \left. \left[\frac{EA}{2} (z_e v'^3 - y_e w'^3 - y_e v'^2 w' + z_e v' w'^2) + \frac{3EI_e}{2} (z_e v' \varphi'^2 - y_e w' \varphi'^2) \right] \delta \varphi' + \right. \\
& + \left. \left[EA (y_e u' v' \varphi' + z_e u' w' \varphi') + \frac{EQ_y v'' \varphi'^2}{2} - \frac{EQ_z w'' \varphi'^2}{2} \right] \delta \varphi \right] \cos \varphi + \\
& + \left[\left[EA \left(\frac{3y_e v'^2 \varphi'}{2} + \frac{y_e w'^2 \varphi'}{2} + z_e v' w' \varphi' \right) + \frac{EI_e y_e \varphi'^3}{2} \right] \delta v' + \right. \\
& + \left. \left[EA \left(\frac{z_e v'^2 \varphi'}{2} + \frac{3z_e w'^2 \varphi'}{2} + y_e v' w' \varphi' \right) + \frac{EI_e z_e \varphi'^3}{2} \right] \delta w' + \right. \\
& + \left. \left[\frac{EA}{2} (y_e v'^3 + z_e w'^3 + z_e v'^2 w' + y_e v' w'^2) + \frac{3EI_e}{2} (y_e v' \varphi'^2 + z_e w' \varphi'^2) \right] \delta \varphi' + \right. \\
& + \left. \left[EA (-z_e u' v' \varphi' + y_e u' w' \varphi') + \frac{EQ_z v'' \varphi'^2}{2} + \frac{EQ_y w'' \varphi'^2}{2} \right] \delta \varphi \right] \sin \varphi + \\
& + \left[EA (z_e^2 v' \varphi'^2 - y_e z_e w' \varphi'^2) \delta v' + EA (y_e^2 w' \varphi'^2 - y_e z_e v' \varphi'^2) \delta w' + \right. \\
& + \left. EA (z_e^2 v'^2 \varphi' + y_e^2 w'^2 \varphi' - 2y_e z_e v' w' \varphi') \delta \varphi' \right] \cos^2 \varphi + \\
& + \left[EA (y_e^2 v' \varphi'^2 + y_e z_e w' \varphi'^2) \delta v' + EA (z_e^2 w' \varphi'^2 + y_e z_e v' \varphi'^2) \delta w' + \right. \\
& + \left. EA (y_e^2 v'^2 \varphi' + z_e^2 w'^2 \varphi' + 2y_e z_e v' w' \varphi') \delta \varphi' \right] \sin^2 \varphi +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[EA \left[(z_e^2 - y_e^2) w' \varphi'^2 + 2y_e z_e v' \varphi'^2 \right] \delta v' + \right. \\
& + EA \left[(z_e^2 - y_e^2) v' \varphi'^2 - 2y_e z_e w' \varphi'^2 \right] \delta w' + \\
& \left. + 2EA \left[(z_e^2 - y_e^2) v' w' \varphi' + y_e z_e v'^2 \varphi' - y_e z_e w'^2 \varphi' \right] \delta \varphi' \right] \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi \left. \right\} dx \\
\end{aligned} \tag{III.8.c}$$

$$\begin{aligned}
\delta W_{int}^{QUAR} = \int_0^L & \left\{ \left[\frac{EA}{2} (y_e v'^3 \varphi' + z_e w'^3 \varphi' + z_e v'^2 w' \varphi' + y_e v' w'^2 \varphi') + \right. \right. \\
& + \frac{EI_e}{2} (y_e v' \varphi'^3 + z_e w' \varphi'^3) \left. \right] \delta \varphi \cos \varphi + \\
& + \left[\frac{EA}{2} (-z_e v'^3 \varphi' + y_e w'^3 \varphi' + y_e v'^2 w' \varphi' - z_e v' w'^2 \varphi') + \right. \\
& + \frac{EI_e}{2} (-z_e v' \varphi'^3 + y_e w' \varphi'^3) \left. \right] \delta \varphi \operatorname{sen} \varphi + \\
& + EA \left[(z_e^2 - y_e^2) v' w' \varphi'^2 + y_e z_e (v'^2 \varphi'^2 - w'^2 \varphi'^2) \right] \delta \varphi \cos^2 \varphi + \\
& + EA \left[(y_e^2 - z_e^2) v' w' \varphi'^2 + y_e z_e (-v'^2 \varphi'^2 + w'^2 \varphi'^2) \right] \delta \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi + \\
& \left. + EA \left[(y_e^2 - z_e^2) (v'^2 \varphi'^2 - w'^2 \varphi'^2) + 4y_e z_e v' w' \varphi'^2 \right] \delta \varphi \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi \delta \varphi \right\} dx \\
\end{aligned} \tag{III.8.d}$$

Admitindo-se, como já destacado, que a integração ao longo da barra se faça através de um somatório de contribuições oriundas dos $NN - 2$ trechos de integração, escreve-se:

$$\delta W_{int}^{LIN} = \sum_{j=1}^{NN-2} \delta W_{int}^{LIN}(j) \quad (III.9.a)$$

$$\delta W_{int}^{QUA} = \sum_{j=1}^{NN-2} \delta W_{int}^{QUA}(j) \quad (III.9.b)$$

$$\delta W_{int}^{CUB} = \sum_{j=1}^{NN-2} \delta W_{int}^{CUB}(j) \quad (III.9.c)$$

$$\delta W_{int}^{QUAR} = \sum_{j=1}^{NN-2} \delta W_{int}^{QUAR}(j) \quad (III.9.d)$$

onde (j) representa um trecho de integração genérico.

Em seguida, adotando-se as representações em diferenças finitas (III.2), (III.4) e (III.5), utilizando-se os sistemas de numeração local e global para os deslocamentos, e também a relação de correspondência (III.1), deduzem-se de (III.8) as seguintes expressões numéricas traduzindo a contribuição do trecho de integração (j) para os somatórios (III.9):

$$\begin{aligned} \delta W_{int}^{LIN}(j) = \sum_{p=1}^{12} \sum_{q=1}^{12} [& C^{LIN}(p,q) + \\ & + C_{cos,cos}^{LIN}(p,q) \cos^2(U_{4j+4}) + \\ & + C_{sen,sen}^{LIN}(p,q) \sin^2(U_{4j+4}) + \\ & + C_{cos,sen}^{LIN}(p,q) \cos(U_{4j+4}) \sin(U_{4j+4})] U_{4j+q-4} \delta U_{4j+p-4} \end{aligned} \quad (III.10.a)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{int}^{QUA}(j) = \sum_{p=1}^{12} \sum_{q=1}^{12} \sum_{r=q}^{12} [& C^{QUA}(p,q,r) + \\ & + C_{cos}^{QUA}(p,q,r) \cos(U_{4j+4}) + \\ & + C_{sen}^{QUA}(p,q,r) \sin(U_{4j+4}) + \\ & + C_{cos,cos}^{QUA}(p,q,r) \cos^2(U_{4j+4}) + \\ & + C_{sen,sen}^{QUA}(p,q,r) \sin^2(U_{4j+4})] U_{4j+q-4} U_{4j+r-4} \delta U_{4j+p-4} \end{aligned} \quad (III.10.b)$$

$$\begin{aligned}
\delta W_{int}^{CUB}(j) = & \sum_{p=1}^{12} \sum_{q=1}^{12} \sum_{r=q}^{12} \sum_{s=r}^{12} \left[C^{CUB}(p,q,r,s) + \right. \\
& + C_{cos}^{CUB}(p,q,r,s) \cos(U_{4j+4}) + \\
& + C_{sen}^{CUB}(p,q,r,s) \sin(U_{4j+4}) + \\
& + C_{cos,sen}^{CUB}(p,q,r,s) \cos(U_{4j+4}) \sin(U_{4j+4}) \left. \right] \times \\
& \times U_{4j+q-4} U_{4j+r-4} U_{4j+s-4} \delta U_{4j+p-4} \quad (III.10.c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta W_{int}^{QUAR}(j) = & \sum_{p=1}^{12} \sum_{q=1}^{12} \sum_{r=q}^{12} \sum_{s=r}^{12} \sum_{t=s}^{12} \left[C_{cos}^{QUAR}(p,q,r,s,t) \cos(U_{4j+4}) + \right. \\
& + C_{sen}^{QUAR}(p,q,r,s,t) \sin(U_{4j+4}) + \\
& + C_{cos,cos}^{QUAR}(p,q,r,s,t) \cos^2(U_{4j+4}) + \\
& + C_{sen,sen}^{QUAR}(p,q,r,s,t) \sin^2(U_{4j+4}) + \\
& + C_{cos,sen}^{QUAR}(p,q,r,s,t) \cos(U_{4j+4}) \sin(U_{4j+4}) \left. \right] \times \\
& \times U_{4j+q-4} U_{4j+r-4} U_{4j+s-4} U_{4j+t-4} \delta U_{4j+p-4} \quad (III.10.d)
\end{aligned}$$

onde os índices dos deslocamentos U e das variações δU os identificam em termos do sistema de numeração global, e com $C^{LIN}(p,q), \dots, C_{cos,sen}^{LIN}(p,q), C^{QUA}(p,q,r), \dots, C_{sen,sen}^{QUA}(p,q,r), C^{CUB}(p,q,r,s), \dots, C_{cos,sen}^{CUB}(p,q,r,s)$ e $C_{cos}^{QUAR}(p,q,r,s,t), \dots, C_{cos,sen}^{QUAR}(p,q,r,s,t)$ representando os coeficientes associados aos termos lineares, quadráticos, cúbicos e quárticos nas derivadas dos deslocamentos, os quais são funções das propriedades mecânicas e geométricas da barra e também do espaçamento nodal λ . Quanto aos índices p, q, r, s e t , que obedecem ao sistema de numeração local, o primeiro corresponde sempre a uma variação de deslocamento, ao passo que os demais identificam um deslocamento, tendo-se obrigatoriamente $q \leq r \leq s \leq t$ pela forma como são construídos os correspondentes somatórios. Cabe destacar que esse conjunto de coeficientes permanece sempre o mesmo para os trechos de integração intermediários, de (2) até $(NN-3)$, sofrendo modificações apenas nos trechos de extremidade, (1) e $(NN-2)$, em função de nestes se utilizar para a derivada primeira a representação reduzida, em lugar da convencional, e também pela diferenciação no comprimento dos mesmos $(\lambda/2)$ em relação ao dos demais (λ) .

Como ilustração, apresenta-se em seguida, para um trecho de integração intermediário, a obtenção dos coeficientes associados a um termo quadrático. Tome-se, por exemplo, o termo

$$\left(-\frac{EQ_z}{2} \varphi'^2 \delta v'' \right) \cos \varphi$$

presente na expressão (III.8.b). Com base nas representações em diferenças finitas (III.2) e (III.5), e também no sistema de numeração local dos deslocamentos da figura III.2, escreve-se para o trecho de integração intermediário (j), de comprimento λ :

$$\begin{aligned} \int_{(j)} \left(-\frac{EQ_z}{2} \varphi'^2 \delta v'' \right) \cos \varphi \, dx &= -\frac{EQ_z}{2} \left(\frac{a_{12} - a_4}{2\lambda} \right)^2 \delta \left(\frac{a_{10} - 2a_6 + a_2}{\lambda^2} \right) \cos(a_8) \lambda = \\ &= -\frac{EQ_z}{8\lambda^3} (a_{12}^2 - 2a_{12}a_4 + a_4^2) (\delta a_{10} - 2\delta a_6 + \delta a_2) \cos(a_8) = \\ &= -\frac{EQ_z}{8\lambda^3} (a_{12}^2 - 2a_{12}a_4 + a_4^2) \delta a_{10} \cos(a_8) + \\ &\quad + \frac{EQ_z}{4\lambda^3} (a_{12}^2 - 2a_{12}a_4 + a_4^2) \delta a_6 \cos(a_8) - \\ &\quad - \frac{EQ_z}{8\lambda^3} (a_{12}^2 - 2a_{12}a_4 + a_4^2) \delta a_2 \cos(a_8) \end{aligned}$$

daí resultando então os seguintes coeficientes $C_{\cos}^{QUA}(p, q, r)$, $q \leq r$, associados ao termo quadrático em questão:

$$C_{\cos}^{QUA}(10, 12, 12) = -\frac{EQ_z}{8\lambda^3}$$

$$C_{\cos}^{QUA}(10, 4, 12) = \frac{EQ_z}{4\lambda^3}$$

$$C_{\cos}^{QUA}(10, 4, 4) = -\frac{EQ_z}{8\lambda^3}$$

$$C_{\cos}^{QUA}(6, 12, 12) = \frac{EQ_z}{4\lambda^3}$$

$$C_{cos}^{QUA}(6,4,12) = -\frac{EQ_z}{2\lambda^3}$$

$$C_{cos}^{QUA}(6,4,4) = \frac{EQ_z}{4\lambda^3}$$

$$C_{cos}^{QUA}(2,12,12) = -\frac{EQ_z}{8\lambda^3}$$

$$C_{cos}^{QUA}(2,4,12) = \frac{EQ_z}{4\lambda^3}$$

$$C_{cos}^{QUA}(2,4,4) = -\frac{EQ_z}{8\lambda^3}$$

Em conclusão, o trabalho virtual interno para a formulação de Attard é avaliado de acordo com a expressão (III.7), cujas parcelas acham-se explicitadas no conjunto de expressões (III.10).

III.5 AVALIAÇÃO NUMÉRICA DO TRABALHO VIRTUAL EXTERNO

A avaliação numérica do trabalho virtual externo, tal como no caso de δW_{int} , é feita a partir de um somatório de contribuições dos diversos trechos de integração considerados na barra. Então, recorrendo-se inicialmente à expressão analítica (II.50), qual seja,

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} = & \int_0^L [\bar{q}_y \delta v + \bar{q}_z \delta w + \bar{m}_\xi \delta \varphi] dx + \\ & + \left[\bar{F}_x \delta u + \bar{F}_y \delta v + \bar{F}_z \delta w - \left(\bar{M}_\xi + \bar{M}_y v' + \bar{M}_z w' \right) \delta \varphi - \right. \\ & \left. - \bar{M}_z \delta v' + \bar{M}_y \delta w' - \bar{B} \delta \varphi' \right]_0^L \end{aligned} \quad (III.11)$$

utilizando uma vez mais a discretização da barra e o sistema de numeração global dos deslocamentos definidos no item III.2, e ainda levando em conta a representação (III.2) em diferenças finitas para a derivada primeira, obtém-se a seguinte expressão para avaliação numérica de δW_{ext} :

$$\begin{aligned}
\delta W_{ext} = & \sum_{j=1}^{NN-2} \left[\bar{q}_y(j) \delta U_{4j+2} + \bar{q}_z(j) \delta U_{4j+3} + m_\xi(j) \delta U_{4j+4} \right] \lambda_j + \\
& + \bar{F}_{xL} \delta U_{4NN-7} - \bar{F}_{x0} \delta U_5 + \bar{F}_{yL} \delta U_{4NN-6} - \bar{F}_{y0} \delta U_6 + \\
& + \bar{F}_{zL} \delta U_{4NN-5} - \bar{F}_{z0} \delta U_7 - \left[M_{\xi L} + \frac{M_{yL}}{2\lambda} (U_{4NN-2} - U_{4NN-10}) \right] + \\
& + \frac{M_{zL}}{2\lambda} (U_{4NN-1} - U_{4NN-9}) \delta U_{4NN-4} + \left[M_{\xi 0} + \frac{M_{y0}}{2\lambda} (U_{10} - U_2) \right] + \\
& + \frac{M_{z0}}{2\lambda} (U_{11} - U_3) \delta U_8 + \frac{M_{yL}}{2\lambda} \delta U_{4NN-1} - \frac{M_{yL}}{2\lambda} \delta U_{4NN-9} - \frac{M_{y0}}{2\lambda} \delta U_{11} + \\
& + \frac{M_{y0}}{2\lambda} \delta U_3 - \frac{M_{zL}}{2\lambda} \delta U_{4NN-2} + \frac{M_{zL}}{2\lambda} \delta U_{4NN-10} + \frac{M_{z0}}{2\lambda} \delta U_{10} - \frac{M_{z0}}{2\lambda} \delta U_2 - \\
& - \frac{\bar{B}_L}{2\lambda} \delta U_{4NN} + \frac{\bar{B}_L}{2\lambda} \delta U_{4NN-8} + \frac{\bar{B}_0}{2\lambda} \delta U_{12} - \frac{\bar{B}_0}{2\lambda} \delta U_4 \tag{III.12}
\end{aligned}$$

onde $\bar{q}_y(j)$, $\bar{q}_z(j)$ e $m_\xi(j)$ são as cargas de domínio associadas ao trecho de integração genérico (j) (supostas constantes ao longo do mesmo), definidas pelas expressões (II.47), e \bar{F}_x , \bar{F}_y , \bar{F}_z , M_ξ , M_y , M_z e \bar{B} são as possíveis cargas de extremidade, definidas por (II.48) e (II.49). Cabe destacar que o comprimento λ_j do trecho de integração (j) é igual a λ para os trechos intermediários e $\lambda/2$ para os trechos extremos.

Adotando em seguida, como ponto de partida, a expressão alternativa (II.55) para δW_{ext} , qual seja,

$$\begin{aligned}
\delta W_{ext} = & \int_0^L \left[\bar{q}_y \delta v + \bar{q}_z \delta w + (\bar{m}_\xi \cos \varphi + \bar{r}_\xi \sin \varphi) \delta \varphi \right] dx + \\
& + \left\{ \bar{F}_x \delta u + \bar{F}_y \delta v + \bar{F}_z \delta w - \left[\bar{M}_\xi \cos \varphi + \bar{R}_\xi \sin \varphi + \right. \right. \\
& \left. \left. + \bar{M}_y (v' \cos \varphi + w' \sin \varphi) - \bar{M}_z (v' \sin \varphi - w' \cos \varphi) \right] \delta \varphi - \right.
\end{aligned}$$

$$-\left(\bar{M}_z \cos \varphi + \bar{M}_y \sin \varphi\right) \delta v' + \left(\bar{M}_y \cos \varphi - \bar{M}_z \sin \varphi\right) \delta w' - \bar{\mathbf{B}} \delta \varphi' \Bigg\}_0^L \quad (\text{III.13})$$

esta assume o seguinte aspecto ao ser submetida ao tratamento numérico:

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} = & \sum_{j=1}^{NN-2} \left[\bar{\mathbf{q}}_y(j) \delta U_{4j+2} + \bar{\mathbf{q}}_z(j) \delta U_{4j+3} + \right. \\ & \left. + \left[\bar{m}_\xi(j) \cos(U_{4j+4}) + \bar{r}_\xi(j) \sin(U_{4j+4}) \right] \delta U_{4j+4} \right] \lambda_j + \\ & + \bar{\mathbf{F}}_{xL} \delta U_{4NN-7} - \bar{\mathbf{F}}_{x0} \delta U_5 + \bar{\mathbf{F}}_{yL} \delta U_{4NN-6} - \bar{\mathbf{F}}_{y0} \delta U_6 + \\ & + \bar{\mathbf{F}}_{zL} \delta U_{4NN-5} - \bar{\mathbf{F}}_{z0} \delta U_7 - \left[\bar{M}_{\xi L} \cos(U_{4NN-4}) + \bar{R}_{\xi L} \sin(U_{4NN-4}) + \right. \\ & + \frac{\bar{M}_{yL}}{2\lambda} (U_{4NN-2} - U_{4NN-10}) \cos(U_{4NN-4}) + \\ & + \frac{\bar{M}_{yL}}{2\lambda} (U_{4NN-1} - U_{4NN-9}) \sin(U_{4NN-4}) - \\ & - \frac{\bar{M}_{zL}}{2\lambda} (U_{4NN-2} - U_{4NN-10}) \sin(U_{4NN-4}) + \\ & \left. + \frac{\bar{M}_{zL}}{2\lambda} (U_{4NN-1} - U_{4NN-9}) \cos(U_{4NN-4}) \right] \delta U_{4NN-4} + \\ & + \left[\bar{M}_{\xi 0} \cos(U_8) + \bar{R}_{\xi 0} \sin(U_8) + \frac{\bar{M}_{y0}}{2\lambda} (U_{10} - U_2) \cos(U_8) + \right. \\ & + \frac{\bar{M}_{y0}}{2\lambda} (U_{11} - U_3) \sin(U_8) - \frac{\bar{M}_{z0}}{2\lambda} (U_{10} - U_2) \sin(U_8) + \\ & \left. + \frac{\bar{M}_{z0}}{2\lambda} (U_{11} - U_3) \cos(U_8) \right] \delta U_8 - \frac{\bar{M}_{yL}}{2\lambda} \sin(U_{4NN-4}) \delta U_{4NN-2} + \\ & + \frac{\bar{M}_{yL}}{2\lambda} \sin(U_{4NN-4}) \delta U_{4NN-10} - \frac{\bar{M}_{zL}}{2\lambda} \cos(U_{4NN-4}) \delta U_{4NN-2} + \\ & + \frac{\bar{M}_{zL}}{2\lambda} \cos(U_{4NN-4}) \delta U_{4NN-10} + \frac{\bar{M}_{y0}}{2\lambda} \sin(U_8) \delta U_{10} - \frac{\bar{M}_{y0}}{2\lambda} \sin(U_8) \delta U_2 + \\ & + \frac{\bar{M}_{z0}}{2\lambda} \cos(U_8) \delta U_{10} - \frac{\bar{M}_{z0}}{2\lambda} \cos(U_8) \delta U_2 + \frac{\bar{M}_{yL}}{2\lambda} \cos(U_{4NN-4}) \delta U_{4NN-1} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{M}_{yL}}{2\lambda} \cos(U_{4NN-4}) \delta U_{4NN-9} - \frac{\bar{M}_{zL}}{2\lambda} \sin(U_{4NN-4}) \delta U_{4NN-1} + \\
& + \frac{\bar{M}_{zL}}{2\lambda} \sin(U_{4NN-4}) \delta U_{4NN-9} - \frac{\bar{M}_{y0}}{2\lambda} \cos(U_8) \delta U_{11} + \frac{\bar{M}_{y0}}{2\lambda} \cos(U_8) \delta U_3 + \\
& + \frac{\bar{M}_{z0}}{2\lambda} \sin(U_8) \delta U_{11} - \frac{\bar{M}_{z0}}{2\lambda} \sin(U_8) \delta U_3 - \frac{\bar{B}_L}{2\lambda} \delta U_{4NN} + \frac{\bar{B}_L}{2\lambda} \delta U_{4NN-8} + \\
& + \frac{\bar{B}_0}{2\lambda} \delta U_{12} - \frac{\bar{B}_0}{2\lambda} \delta U_4
\end{aligned} \tag{III.14}$$

onde $\bar{m}_\zeta(j)$ e $\bar{r}_\zeta(j)$ são cargas prescritas de domínio definidas por (II.52), e \bar{M}_ζ , \bar{R}_ζ , \bar{M}_y e \bar{M}_z são cargas prescritas de contorno definidas por (II.54). Observe-se que em (III.14) há um significativo acréscimo de termos, comparativamente à expressão (III.12).

Dessa forma, fica concluída a avaliação numérica do trabalho virtual externo para o modelo de Attard.

III.6 INTRODUÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

O procedimento numérico utilizado requer apenas condições de contorno cinemáticas, as quais acham-se explicitadas nas expressões (II.45) do capítulo anterior. Para ilustrar a implementação numérica dessas condições, considere-se, por exemplo, o caso em que se tenha na extremidade $x = L$ da barra o deslocamento axial e o empenamento restringidos. Neste caso:

$$\begin{aligned}
u(L) = 0 & \Rightarrow U_{4NN-7} = 0 \\
\varphi'(L) = 0 & \Rightarrow \frac{U_{4NN} - U_{4NN-8}}{2\lambda} = 0 \Rightarrow U_{4NN} - U_{4NN-8} = 0
\end{aligned}$$

notando-se que essas condições foram escritas diretamente no sistema de numeração global, com o auxílio da figura III.1, e que, no caso da condição de contorno na derivada primeira, fez-se uso da representação convencional (II.2). Além disso, considerando que, de acordo com o ptv, quando se tem um deslocamento prescrito, a correspondente

variação é nula, faz-se ainda:

$$\delta u(L) = 0 \Rightarrow \delta U_{4NN-7} = 0$$

$$\delta \varphi'(L) = 0 \Rightarrow \frac{\delta U_{4NN} - \delta U_{4NN-8}}{2\lambda} = 0 \Rightarrow \delta U_{4NN} - \delta U_{4NN-8} = 0$$

No quadro III.2 estão dispostas todas as possíveis condições de contorno cinemáticas, para o caso mais simples de condições homogêneas, acompanhadas do respectivo tratamento numérico.

Quadro III.2 – Tratamento numérico das condições de contorno

Condição de contorno	Extremidade da barra	
	$x = 0$	$x = L$
$u = 0$	$U_5 = 0 \rightarrow \delta U_5 = 0$	$U_{4NN-7} = 0 \rightarrow \delta U_{4NN-7} = 0$
$v = 0$	$U_6 = 0 \rightarrow \delta U_6 = 0$	$U_{4NN-6} = 0 \rightarrow \delta U_{4NN-6} = 0$
$w = 0$	$U_7 = 0 \rightarrow \delta U_7 = 0$	$U_{4NN-5} = 0 \rightarrow \delta U_{4NN-5} = 0$
$\varphi = 0$	$U_8 = 0 \rightarrow \delta U_8 = 0$	$U_{4NN-4} = 0 \rightarrow \delta U_{4NN-4} = 0$
$v' = 0$	$U_{10} - U_2 = 0 \rightarrow$ $\delta U_{10} - \delta U_2 = 0$	$U_{4NN-2} - U_{4NN-10} = 0 \rightarrow$ $\delta U_{4NN-2} - \delta U_{4NN-10} = 0$
$w' = 0$	$U_{11} - U_3 = 0 \rightarrow$ $\delta U_{11} - \delta U_3 = 0$	$U_{4NN-1} - U_{4NN-9} = 0 \rightarrow$ $\delta U_{4NN-1} - \delta U_{4NN-9} = 0$
$\varphi' = 0$	$U_{12} - U_4 = 0 \rightarrow$ $\delta U_{12} - \delta U_4 = 0$	$U_{4NN} - U_{4NN-8} = 0 \rightarrow$ $\delta U_{4NN} - \delta U_{4NN-8} = 0$

Cabe por fim destacar que os deslocamentos axiais relativos aos nós virtuais I e NN , a saber, U_I e U_{4NN-3} , a rigor não têm qualquer participação na análise (uma vez que não surge a derivada u'' na formulação e não existe condição de contorno cinemática em u'), sendo mantidos, com valor nulo, apenas para facilitar a implementação computacional. Em vista disso, tem-se sempre como condições

adicionais:

$$U_1 = 0 \Rightarrow \delta U_1 = 0$$

$$U_{4NN-3} = 0 \Rightarrow \delta U_{4NN-3} = 0$$

III.7 RESOLUÇÃO DO SISTEMA NÃO LINEAR DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Procedendo-se à igualdade entre δW_{int} e δW_{ext} , expressos respectivamente por (III.7) e (III.12) ou (III.14), introduzindo-se, num dado exemplo, de acordo com o item precedente, as condições de contorno cinemáticas requeridas, e considerando que as variações dos deslocamentos incógnitos são arbitrárias, resulta um sistema de n equações algébricas não lineares de equilíbrio, o qual pode ser assim expresso:

$$F_i(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = 0 \quad (i = 1 \text{ a } n) \quad \text{(III.15)}$$

onde F_i representa cada uma dessas n equações, escritas em função dos n deslocamentos nodais incógnitos do problema, designados por $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$.

Focalizando, agora, a resolução do sistema não linear (III.15), optou-se inicialmente por adotar o método de Newton-Raphson, o qual se mostrou eficaz em uma boa parte das análises realizadas. Entretanto, ao serem tratados problemas de instabilidade elástica, para os trechos de baixa declividade na trajetória de equilíbrio, e também nas proximidades de pontos limites de carga, houve em geral sérias restrições ao emprego da referida técnica. Com efeito, conforme já constatado por outros autores (por exemplo, GARCIA (1987) e GRAÇA (2000)), nessas regiões a convergência para a solução torna-se consideravelmente mais lenta, sendo que, em alguns casos, não se consegue obtê-la mesmo após sucessivas tentativas de ajustagem do passo de carga. Em outras situações, há convergência, porém com a ocorrência de saltos (snap-through) para um outro ramo (estável) do caminho de equilíbrio. Resolveu-se então, visando contornar essas dificuldades, implementar técnicas mais eficazes que incorporam, em sua concepção, o incremento do parâmetro de carga no processo iterativo. Dentre essas

técnicas, foram testadas as seguintes: GDCM (Generalized Displacements Control Method), Arc-Length Method (com comprimento de arco cilíndrico) e o Método do Controle de Deslocamentos (BATOZ e DHATT (1979)). Após os diversos testes efetuados, pode-se apontar o GDCM como a técnica que maior potencial demonstrou para vencer as regiões da trajetória de equilíbrio que usualmente se mostram mais desfavoráveis para fins de obtenção de convergência. Todavia, a maior simplicidade do método de Newton-Raphson, e a sua comprovada eficácia numa ampla variedade de situações, dão suporte à estratégia de sempre utilizá-lo numa primeira tentativa para a determinação da trajetória de equilíbrio, deixando-se o uso de uma técnica mais apurada, no caso a do GDCM, porém envolvendo um maior grau de complexidade, apenas para os problemas onde efetivamente surgem dificuldades mais sérias de convergência.

Subseqüentemente, será focalizada a técnica do GDCM, da qual o método de Newton-Raphson pode ser considerado caso particular.

III.7.1 TÉCNICA DO GDCM NA OBTENÇÃO DA TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO

Seja uma iteração genérica k dentro do processo iterativo para a obtenção do ponto da trajetória não linear de equilíbrio correspondente à etapa j de carga. Quanto ao carregamento atuante, aplicado progressivamente mediante incrementos, pode-se definir uma parte deste com intensidade mantida constante e uma outra com intensidade variável ao longo da análise, a qual é afetada diretamente por um parâmetro de carga β_{k-1}^j . Como se observa, supõe-se que tal parâmetro não permanece fixo durante o processo iterativo (ou seja, o mesmo é tratado como uma incógnita adicional do problema), com o índice $k-1$ indicando que o seu valor, requerido para se realizar a iteração k , provém do ciclo $k-1$.

Considere-se, em seguida, os termos de carga presentes em (III.15) reunidos no vetor $\left\{ \mathbf{p} \right\}_{k-1}^j$, o qual, é de se notar, depende genericamente dos deslocamentos, uma vez que algumas cargas se acham acompanhadas destes nas expressões (III.12) e (III.14) de δW_{ext} . Tal vetor, em vista do exposto no parágrafo precedente, pode ser assim decomposto:

$$\{ \mathbf{p} \}_{k-1}^j = \{ \mathbf{p}^{const} \}_{k-1}^j + \{ \mathbf{p}^{var} \}_{k-1}^j = \{ \mathbf{p}^{const} \}_{k-1}^j + \beta_{k-1}^j \{ \mathbf{p}^{ref} \}_{k-1}^j \quad (\text{III.16})$$

com a primeira parcela envolvendo as cargas não incrementadas na análise, a segunda contendo as cargas de intensidade variável, e com $\{ \mathbf{p}^{ref} \}_{k-1}^j$ constituindo um vetor de cargas de referência.

Introduzem-se também, para proceder à citada iteração k da etapa j de carga, o vetor de equilíbrio, dado por

$$\{ \mathbf{f} \}_{k-1}^j = \left\{ \begin{array}{c} -F_1(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, \beta) \\ -F_2(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, \beta) \\ -F_3(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, \beta) \\ \vdots \\ -F_n(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, \beta) \end{array} \right\}_{k-1}^j \quad (\text{III.17})$$

cujos elementos representam o negativo do resultado obtido pela substituição, no primeiro membro de (III.15) (previamente modificado em função de (III.16)), do conjunto de deslocamentos nodais $\{ \mathbf{X} \}_{k-1}^j = \left[\{ X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \}_{k-1}^j \right]^T$ e do parâmetro de carga β_{k-1}^j , oriundos da iteração $k-1$; a matriz Jacobiana do sistema de equações (III.15), definida por

$$\left[\mathbf{J} \right]_{k-1}^j = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1}{\partial X_2} & \frac{\partial F_1}{\partial X_3} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2}{\partial X_2} & \frac{\partial F_2}{\partial X_3} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial X_n} \\ \frac{\partial F_3}{\partial X_1} & \frac{\partial F_3}{\partial X_2} & \frac{\partial F_3}{\partial X_3} & \dots & \frac{\partial F_3}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial X_1} & \frac{\partial F_n}{\partial X_2} & \frac{\partial F_n}{\partial X_3} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial X_n} \end{bmatrix}_{k-1}^j \quad (\text{III.18})$$

a qual é calculada com base nesses mesmos deslocamentos e parâmetro de carga; e, finalmente, o vetor de incrementos de deslocamentos, a ser determinado na iteração atual, expresso por

$$\left\{ \delta \mathbf{X} \right\}_k^j = \begin{Bmatrix} \delta X_1 \\ \delta X_2 \\ \delta X_3 \\ \vdots \\ \delta X_n \end{Bmatrix}_k^j \quad (\text{III.19})$$

Isto posto, passa-se então à apresentação da técnica incremental-iterativa do GDCM, proposta por YANG e SHIEH (1990), devendo ser ressaltado que a utilização da mesma no traçado da trajetória de equilíbrio requer sempre o conhecimento prévio de uma solução $\left\{ \mathbf{X} \right\}^0, \beta^0$ de partida, tendo sido considerada no presente trabalho a dada pelo método de Newton-Raphson.

Para facilitar o entendimento, descrevem-se os principais aspectos envolvidos numa etapa genérica de carga j . Nesse sentido, considere-se inicialmente a solução $\left\{ \mathbf{X} \right\}^{j-1}, \beta^{j-1}$ do sistema (III.15), correspondente à etapa anterior de carga. Com base em tal solução, determina-se em seguida, para a etapa atual j , a denominada solução

incremental predita $\{ \Delta \mathbf{X} \}_0^j, \Delta \beta_0^j$, onde $\Delta \beta_0^j$ representa um incremento inicial para o parâmetro de carga β^{j-1} , calculado conforme se mostra adiante (destacando-se que, no caso da primeira etapa de carga, $\Delta \beta_0^j$ deve ser fornecido pelo usuário), e $\{ \Delta \mathbf{X} \}_0^j$ traduz o correspondente vetor de incrementos de deslocamentos, obtido a partir das seguintes operações matriciais:

$$[\mathbf{J}]^{j-1} \{ \delta \mathbf{X}_I \}_0^j = \{ \mathbf{p}^{ref} \}^{j-1} \quad (\text{III.20.a})$$

$$\{ \Delta \mathbf{X} \}_0^j = \Delta \beta_0^j \{ \delta \mathbf{X}_I \}_0^j \quad (\text{III.20.b})$$

Com a posse da solução incremental predita, tem-se uma primeira aproximação para a solução inerente à etapa atual de carga:

$$\{ \mathbf{X} \}_0^j = \{ \mathbf{X} \}_0^{j-1} + \{ \Delta \mathbf{X} \}_0^j \quad (\text{III.21.a})$$

$$\beta_0^j = \beta_0^{j-1} + \Delta \beta_0^j \quad (\text{III.21.b})$$

a qual, por sua vez, serve de base para se estabelecer a matriz Jacobiana $[\mathbf{J}]_0^j$, o vetor de equilíbrio $\{ \mathbf{f} \}_0^j$ e o vetor de cargas de referência $\{ \mathbf{p}^{ref} \}_0^j$ para dar início à fase iterativa. Passando-se agora a esta, onde o parâmetro de carga varia durante os ciclos, deve-se satisfazer a seguinte equação numa iteração k genérica ($k \geq 1$):

$$[\mathbf{J}]_{k-1}^j \{ \delta \mathbf{X} \}_k^j = \{ \mathbf{f} \}_{k-1}^j + \delta \beta_k^j \{ \mathbf{p}^{ref} \}_{k-1}^j \quad (\text{III.22})$$

onde a parcela de correção a ser introduzida no parâmetro de carga, relativa a essa iteração, obedece à seguinte equação de restrição:

$$\delta\beta_k^j = - \frac{\left[\left\{ \delta\mathbf{X}_I \right\}_0^{j-1} \right]^T \left\{ \delta\mathbf{X}_{II} \right\}_k^j}{\left[\left\{ \delta\mathbf{X}_I \right\}_0^{j-1} \right]^T \left\{ \delta\mathbf{X}_I \right\}_k^j} \quad (\text{III.23})$$

com $\left\{ \delta\mathbf{X}_I \right\}_k^j$ e $\left\{ \delta\mathbf{X}_{II} \right\}_k^j$ sendo calculados mediante a resolução dos sistemas de equações:

$$\left[\mathbf{J} \right]_{k-1}^j \left\{ \delta\mathbf{X}_I \right\}_k^j = \left\{ \mathbf{p}^{ref} \right\}_{k-1}^j \quad (\text{III.24.a})$$

$$\left[\mathbf{J} \right]_{k-1}^j \left\{ \delta\mathbf{X}_{II} \right\}_k^j = \left\{ \mathbf{f} \right\}_{k-1}^j \quad (\text{III.24.b})$$

os quais resultam da decomposição do vetor de incrementos de deslocamentos em (III.22) sob a forma:

$$\left\{ \delta\mathbf{X} \right\}_k^j = \left\{ \delta\mathbf{X}_{II} \right\}_k^j + \delta\beta_k^j \left\{ \delta\mathbf{X}_I \right\}_k^j \quad (\text{III.25})$$

e destacando-se ainda que, no caso do primeiro passo de carga, é admitido em (III.23) que $\left\{ \delta\mathbf{X}_I \right\}_0^0 = \left\{ \delta\mathbf{X}_I \right\}_0^1$, este último dado por intermédio de (III.20.a) para $j = 1$.

Uma vez determinada a correção $\delta\beta_k^j$, e em seguida obtido de (III.25) o vetor $\left\{ \delta\mathbf{X} \right\}_k^j$, pode-se atualizar o vetor de deslocamentos e também o valor do parâmetro de carga, ou seja:

$$\left\{ \mathbf{X} \right\}_k^j = \left\{ \mathbf{X} \right\}_{k-1}^j + \left\{ \delta\mathbf{X} \right\}_k^j \quad (\text{III.26.a})$$

$$\beta_k^j = \beta_{k-1}^j + \delta\beta_k^j \quad (\text{III.26.b})$$

Examina-se em seguida a convergência mediante um ou mais critérios pré-estabelecidos, e caso esta não se dê, passa-se a uma nova iteração (partindo da expressão (III.22)), onde são avaliadas novamente todas as grandezas envolvidas,

culminando com uma nova tentativa de solução (III.26), repetindo-se assim o processo até serem atendidos os critérios de convergência estipulados. Ao ser atingida a convergência, passa-se à próxima etapa de carga, onde um novo incremento $\Delta\beta_0^j$ é calculado automaticamente, e determina-se a aproximação inicial $\{ \mathbf{X} \}_0^j, \beta_0^j$ para a solução, que evolui em precisão ao longo do ciclo iterativo da forma já descrita. A obtenção desse incremento, para dar partida a uma etapa j ($j \geq 2$) de carga, faz-se mediante a seguinte expressão:

$$\Delta\beta_0^j = \pm \Delta\beta_0^l \sqrt{|GSP|}, \quad j \geq 2 \quad (\text{III.27})$$

onde, conforme já frisado, o incremento inicial $\Delta\beta_0^l$, correspondente à primeira etapa de carga, deve ser fornecido pelo usuário, e com o parâmetro GSP (Generalized Stiffness Parameter) sendo assim definido:

$$GSP = \frac{\left[\left\{ \delta\mathbf{X}_l \right\}_0^l \right]^T \left\{ \delta\mathbf{X}_l \right\}_0^l}{\left[\left\{ \delta\mathbf{X}_l \right\}_0^{j-1} \right]^T \left\{ \delta\mathbf{X}_l \right\}_0^j}, \quad j \geq 2 \quad (\text{III.28})$$

Cabe ressaltar que tal parâmetro tende a diminuir ou aumentar à medida que ocorre a aproximação ou o afastamento, respectivamente, de pontos limites (de carga e de deslocamento) na trajetória de equilíbrio, e só fica negativo imediatamente após ser atingido um ponto limite de carga, sendo de resto sempre positivo. Toda vez que, ao longo da análise, for detectado $GSP < 0$, deve-se proceder à troca do sinal que estiver, nessa ocasião, à frente da fórmula (III.27), de modo que possa ser invertido o sentido de crescimento da carga.

Para finalizar, é apresentada a particularização do GDCM para o caso em que o carregamento se mantém constante numa etapa j de carga. Nesta situação, deve-se fazer em (III.20.b), ou seja, na fase incremental,

$$\Delta\beta_0^j = \textit{prescrito} \quad (\text{III.29})$$

e em (III.22), isto é, na fase iterativa,

$$\delta\beta_k^j = 0 \quad (k \geq 1) \quad (\text{III.30})$$

recaindo-se desta forma no método de Newton-Raphson, que pode portanto ser encarado como um caso particular do GDCM.

III.7.2 CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

Foram adotados dois critérios de convergência: através dos deslocamentos e dos resíduos das forças. Para o primeiro caso, tem-se a seguinte expressão:

$$\left| \frac{\left\| \{ \mathbf{X} \}_k^j \right\| - \left\| \{ \mathbf{X} \}_{k-1}^j \right\|}{\left\| \{ \mathbf{X} \}_{k-1}^j \right\|} \right| \leq T_1 \quad (\text{III.31})$$

envolvendo, para uma etapa genérica de carga j , as normas dos vetores de deslocamentos correspondentes às iterações k e $k-1$, sendo T_1 a tolerância fixada, em geral um valor entre 10^{-3} e 10^{-7} . Para a segunda verificação, tem-se a expressão

$$\frac{\left\| \{ \mathbf{f} \}_{k-1}^j \right\|}{\left\| \{ \mathbf{f} \}_0^j \right\|} \leq T_2 \quad (\text{III.32})$$

que exprime, para a etapa j de carga, a razão entre as normas dos vetores de equilíbrio utilizados na iteração atual k e na primeira, comparada com uma tolerância T_2 , também variando de 10^{-3} a 10^{-7} .

III.8 TRATAMENTO NUMÉRICO PARA O MODELO DE POLILLO, GARCIA E VILLAÇA

Aborda-se neste item a formulação numérica para o modelo de POLILLO *et al.* (1998). Uma vez que são mantidos válidos todos os aspectos apresentados nos itens III.2, III.3, III.6 e III.7, fica-se restrito tão somente ao conteúdo dos itens III.4 e III.5, envolvendo a avaliação dos trabalhos virtuais interno e externo, respectivamente.

III.8.1 AVALIAÇÃO DO TRABALHO VIRTUAL INTERNO

Explicitando-se δW_{int} , dado por (II.25), inteiramente em função dos deslocamentos, e seguindo a mesma rotina do item III.4, tem-se:

$$\delta W_{int} = \delta W_{int}^{LIN} + \delta W_{int}^{QUA} + \delta W_{int}^{CUB} \quad (III.33)$$

onde

$$\delta W_{int}^{LIN} = \int_0^L \left[EAu'\delta u' + GJ_T\varphi'\delta\varphi' + (EI_z v'' + EI_{yz} w'')\delta v'' + (EI_y w'' + EI_{yz} v'')\delta w'' + EI_\omega\varphi''\delta\varphi'' \right] dx \quad (III.34.a)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{int}^{QUA} = \int_0^L & \left\{ \left[EA \left(\frac{v'^2}{2} + \frac{w'^2}{2} + z_e v' \varphi' - y_e w' \varphi' \right) + \frac{EI_e}{2} \varphi'^2 \right] \delta u' + \right. \\ & + EA(u'v' + z_e u' \varphi') \delta v' + EA(u'w' - y_e u' \varphi') \delta w' + \\ & + \left[EA(z_e u'v' - y_e u'w') + EI_e u' \varphi' - EQ_z v'' \varphi' - EQ_y w'' \varphi' - EQ_\omega \varphi' \varphi'' \right] \delta \varphi' + \\ & + \left[(EI_z - EI_y) w'' \varphi - 2EI_{yz} v'' \varphi - \frac{EQ_z}{2} \varphi'^2 \right] \delta v'' + \\ & + \left[(EI_z - EI_y) v'' \varphi + 2EI_{yz} w'' \varphi - \frac{EQ_y}{2} \varphi'^2 \right] \delta w'' - \frac{EQ_\omega}{2} \varphi'^2 \delta \varphi'' + \end{aligned}$$

$$+ \left[(EI_z - EI_y)v''w'' + EI_{yz}(w''^2 - v''^2) \right] \delta\varphi \left. \right\} dx \quad (\text{III.34.b})$$

$$\begin{aligned} \delta W_{int}^{CUB} = \int_0^L \left\{ \left[EA \left(\frac{v'^3}{2} + \frac{v'w'^2}{2} + \frac{3z_e v'^2 \varphi'}{2} + \frac{z_e w'^2 \varphi'}{2} - y_e v'w' \varphi' - y_e z_e w' \varphi'^2 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{EI_e z_e}{2} \varphi'^3 + \left(EA z_e^2 + \frac{EI_e}{2} \right) v' \varphi'^2 \right] \delta v' + \right. \\ \left. + \left[EA \left(\frac{w'^3}{2} + \frac{v'^2 w'}{2} - \frac{y_e v'^2 \varphi'}{2} - \frac{3y_e w'^2 \varphi'}{2} + z_e v'w' \varphi' \right) - \frac{EI_e y_e}{2} \varphi'^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(EA y_e^2 + \frac{EI_e}{2} \right) w' \varphi'^2 \right] \delta w' + \right. \\ \left. + \left[EA \left(\frac{z_e v'^3}{2} - \frac{y_e w'^3}{2} - \frac{y_e v'^2 w'}{2} + \frac{z_e v'w'^2}{2} - 2y_e z_e v'w' \varphi' \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3EI_e}{2} (z_e v' \varphi'^2 - y_e w' \varphi'^2) + \left(EA z_e^2 + \frac{EI_e}{2} \right) v'^2 \varphi' + \left(EA y_e^2 + \frac{EI_e}{2} \right) w'^2 \varphi' + \right. \right. \\ \left. \left. + EQ_y v'' \varphi \varphi' - EQ_z w'' \varphi \varphi' + \frac{ER_e}{2} \varphi'^3 \right] \delta \varphi' + \right. \\ \left. + \left(EI_y v'' \varphi^2 - EI_{yz} w'' \varphi^2 + \frac{EQ_y}{2} \varphi \varphi'^2 \right) \delta v'' + \right. \\ \left. + \left(EI_z w'' \varphi^2 - EI_{yz} v'' \varphi^2 - \frac{EQ_z}{2} \varphi \varphi'^2 \right) \delta w'' + \right. \\ \left. + \left(EI_y v''^2 \varphi + EI_z w''^2 \varphi - 2EI_{yz} v'' w'' \varphi + \frac{EQ_y}{2} v'' \varphi'^2 - \frac{EQ_z}{2} w'' \varphi'^2 \right) \delta \varphi \right\} dx \end{aligned} \quad (\text{III.34.c})$$

notando-se, em relação às correspondentes expressões (III.8) do modelo de Attard, uma significativa redução na quantidade de termos envolvidos, tanto pela ausência de termos quárticos, como de funções trigonométricas.

Recordando-se que, de acordo com o tratamento numérico utilizado, a integração ao longo da barra se faz através de um somatório de contribuições oriundas dos $NN - 2$

trechos de integração, escreve-se:

$$\delta W_{int}^{LIN} = \sum_{j=1}^{NN-2} \delta W_{int}^{LIN}(j) \quad (III.35.a)$$

$$\delta W_{int}^{QUA} = \sum_{j=1}^{NN-2} \delta W_{int}^{QUA}(j) \quad (III.35.b)$$

$$\delta W_{int}^{CUB} = \sum_{j=1}^{NN-2} \delta W_{int}^{CUB}(j) \quad (III.35.c)$$

com as seguintes expressões traduzindo a contribuição do trecho de integração genérico (j) aos somatórios (III.35):

$$\delta W_{int}^{LIN}(j) = \sum_{p=1}^{12} \sum_{q=1}^{12} \left[B^{LIN}(p,q) U_{4j+q-4} \delta U_{4j+p-4} \right] \quad (III.36.a)$$

$$\delta W_{int}^{QUA}(j) = \sum_{p=1}^{12} \sum_{q=1}^{12} \sum_{r=q}^{12} \left[B^{QUA}(p,q,r) U_{4j+q-4} U_{4j+r-4} \delta U_{4j+p-4} \right] \quad (III.36.b)$$

$$\delta W_{int}^{CUB}(j) = \sum_{p=1}^{12} \sum_{q=1}^{12} \sum_{r=q}^{12} \sum_{s=r}^{12} \left[B^{CUB}(p,q,r,s) U_{4j+q-4} U_{4j+r-4} U_{4j+s-4} \delta U_{4j+p-4} \right] \quad (III.36.c)$$

III.8.2 AVALIAÇÃO DO TRABALHO VIRTUAL EXTERNO

A expressão (II.71) para o trabalho virtual externo, qual seja,

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} = & \int_0^L (\bar{\mathbf{q}}_y \delta v + \bar{\mathbf{q}}_z \delta w + \mathbf{m}_\zeta \delta \varphi) dx + \\ & + \left[\bar{\mathbf{F}}_x \delta u + \bar{\mathbf{F}}_y \delta v + \bar{\mathbf{F}}_z \delta w - (\mathbf{M}_\zeta + \mathbf{M}_y v' + \mathbf{M}_z w') \delta \varphi - \right. \\ & \left. - \mathbf{M}_z \delta v' + \mathbf{M}_y \delta w' - \bar{\mathbf{B}} \delta \varphi' \right]_0^L = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^L \left[\bar{q}_y \delta v + \bar{q}_z \delta w + (\bar{m}_\xi + \bar{r}_\xi \varphi) \delta \varphi \right] dx + \\
&+ \left[\bar{F}_x \delta u + \bar{F}_y \delta v + \bar{F}_z \delta w - (\bar{M}_\xi + \bar{R}_\xi \varphi + \bar{M}_y v' + \bar{M}_z w') \delta \varphi - \right. \\
&\left. - (\bar{M}_z + \bar{M}_y \varphi) \delta v' + (\bar{M}_y - \bar{M}_z \varphi) \delta w' - \bar{B} \delta \varphi' \right]_0^L \quad (III.37)
\end{aligned}$$

uma vez submetida ao tratamento numérico, assume o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned}
\delta W_{ext} &= \sum_{j=1}^{NN-2} \left[\bar{q}_y(j) \delta U_{4j+2} + \bar{q}_z(j) \delta U_{4j+3} + \mathbf{m}_\xi(j) \delta U_{4j+4} \right] \lambda_j + \\
&+ \bar{F}_{xL} \delta U_{4NN-7} - \bar{F}_{x0} \delta U_5 + \bar{F}_{yL} \delta U_{4NN-6} - \bar{F}_{y0} \delta U_6 + \\
&+ \bar{F}_{zL} \delta U_{4NN-5} - \bar{F}_{z0} \delta U_7 - \left[\mathbf{M}_{\xi L} + \frac{\mathbf{M}_{yL}}{2\lambda} (U_{4NN-2} - U_{4NN-10}) \right] + \\
&+ \frac{\mathbf{M}_{zL}}{2\lambda} (U_{4NN-1} - U_{4NN-9}) \delta U_{4NN-4} + \left[\mathbf{M}_{\xi 0} + \frac{\mathbf{M}_{y0}}{2\lambda} (U_{10} - U_2) \right] + \\
&+ \frac{\mathbf{M}_{z0}}{2\lambda} (U_{11} - U_3) \delta U_8 + \frac{\mathbf{M}_{yL}}{2\lambda} \delta U_{4NN-1} - \frac{\mathbf{M}_{yL}}{2\lambda} \delta U_{4NN-9} - \frac{\mathbf{M}_{y0}}{2\lambda} \delta U_{11} + \\
&+ \frac{\mathbf{M}_{y0}}{2\lambda} \delta U_3 - \frac{\mathbf{M}_{zL}}{2\lambda} \delta U_{4NN-2} + \frac{\mathbf{M}_{zL}}{2\lambda} \delta U_{4NN-10} + \frac{\mathbf{M}_{z0}}{2\lambda} \delta U_{10} - \frac{\mathbf{M}_{z0}}{2\lambda} \delta U_2 - \\
&- \frac{\bar{B}_L}{2\lambda} \delta U_{4NN} + \frac{\bar{B}_L}{2\lambda} \delta U_{4NN-8} + \frac{\bar{B}_0}{2\lambda} \delta U_{12} - \frac{\bar{B}_0}{2\lambda} \delta U_4 = \\
&= \sum_{j=1}^{NN-2} \left[\bar{q}_y(j) \delta U_{4j+2} + \bar{q}_z(j) \delta U_{4j+3} + [\bar{m}_\xi(j) + \bar{r}_\xi(j) U_{4j+4}] \delta U_{4j+4} \right] \lambda_j + \\
&+ \bar{F}_{xL} \delta U_{4NN-7} - \bar{F}_{x0} \delta U_5 + \bar{F}_{yL} \delta U_{4NN-6} - \bar{F}_{y0} \delta U_6 + \\
&+ \bar{F}_{zL} \delta U_{4NN-5} - \bar{F}_{z0} \delta U_7 - \left[\bar{M}_{\xi L} + \bar{R}_{\xi L} U_{4NN-4} + \frac{\bar{M}_{yL}}{2\lambda} (U_{4NN-2} - U_{4NN-10}) \right] + \\
&+ \frac{\bar{M}_{zL}}{2\lambda} (U_{4NN-1} - U_{4NN-9}) \delta U_{4NN-4} + \left[\bar{M}_{\xi 0} + \bar{R}_{\xi 0} U_8 + \frac{\bar{M}_{y0}}{2\lambda} (U_{10} - U_2) \right] + \\
&+ \frac{\bar{M}_{z0}}{2\lambda} (U_{11} - U_3) \delta U_8 - \frac{\bar{M}_{yL}}{2\lambda} U_{4NN-4} \delta U_{4NN-2} + \frac{\bar{M}_{yL}}{2\lambda} U_{4NN-4} \delta U_{4NN-10} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{M}_{zL}}{2\lambda}\delta U_{4NN-2} + \frac{\bar{M}_{zL}}{2\lambda}\delta U_{4NN-10} + \frac{\bar{M}_{y0}}{2\lambda}U_8\delta U_{10} - \frac{\bar{M}_{y0}}{2\lambda}U_8\delta U_2 + \\
& + \frac{\bar{M}_{z0}}{2\lambda}\delta U_{10} - \frac{\bar{M}_{z0}}{2\lambda}\delta U_2 + \frac{\bar{M}_{yL}}{2\lambda}\delta U_{4NN-1} - \frac{\bar{M}_{yL}}{2\lambda}\delta U_{4NN-9} - \\
& - \frac{\bar{M}_{zL}}{2\lambda}U_{4NN-4}\delta U_{4NN-1} + \frac{\bar{M}_{zL}}{2\lambda}U_{4NN-4}\delta U_{4NN-9} - \frac{\bar{M}_{y0}}{2\lambda}\delta U_{11} + \frac{\bar{M}_{y0}}{2\lambda}\delta U_3 + \\
& + \frac{\bar{M}_{z0}}{2\lambda}U_8\delta U_{11} - \frac{\bar{M}_{z0}}{2\lambda}U_8\delta U_3 - \frac{\bar{B}_L}{2\lambda}\delta U_{4NN} + \frac{\bar{B}_L}{2\lambda}\delta U_{4NN-8} + \\
& + \frac{\bar{B}_0}{2\lambda}\delta U_{12} - \frac{\bar{B}_0}{2\lambda}\delta U_4
\end{aligned} \tag{III.38}$$

ficando assim concluída a formulação numérica para o modelo de Polillo, Garcia e Villaça.

Uma vez aplicado o mdfe a ambas as formulações analíticas apresentadas no capítulo II, torna-se evidente que o modelo de Attard, com expressões significativamente mais carregadas de termos, inclusive com a presença de funções trigonométricas, exige um considerável aumento de esforço computacional relativamente ao modelo de Polillo, Garcia e Villaça.

CAPÍTULO IV

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS

No presente capítulo, faz-se uma comparação efetiva entre os modelos de ATTARD (1986) e de POLILLO *et al.* (1998), vistos analítica e numericamente nos capítulos II e III respectivamente, a partir da análise de sete casos coletados em trabalhos diversos sobre o assunto, utilizando-se para tal os programas computacionais desenvolvidos (em linguagem Fortran) para cada um desses modelos, com base no mdfe, os quais serão doravante referidos como ATT e POL, respectivamente. No estudo específico dos dois casos finais, como uma ferramenta adicional para a interpretação dos resultados obtidos, faz-se uso também do software comercial ABAQUS.

As análises em questão se concentram no objetivo primordial do presente trabalho, que é o de melhor investigar a conveniência de se admitirem ângulos de torção φ no âmbito de grandes rotações, tal como previsto pelo modelo de ATTARD (1986), frente à premissa de considerá-los no âmbito de rotações moderadas, conforme o modelo de POLILLO *et al.* (1998), lembrando-se que a magnitude dos ângulos de flexão, por ambos os modelos, fica limitada ao contexto de rotações moderadas (aspecto este que se procurou manter sempre sob controle nas análises efetuadas).

Cabe por fim destacar que os resultados aqui apresentados, quando provenientes das análises numéricas realizadas com o auxílio dos programas ATT e POL, correspondem sempre ao uso do espaçamento nodal $\lambda = L/12$, para fins de discretização da barra, e das tolerâncias (ver item III.7.2) $T_1 = T_2 = 10^{-6}$, para fins de encerramento do processo iterativo, os quais, em função dos testes realizados, podem ser considerados como plenamente adequados em todos os exemplos examinados.

IV.1 EXEMPLO 1: TORÇÃO COMBINADA COM TRAÇÃO EM BARRA DE SEÇÃO RETANGULAR ESTREITA

O presente caso, encontrado em ENGEL e GOODIER (1953), e cujo esquema estrutural está representado na figura IV.1, representa um primeiro teste de aferição para as formulações numéricas aqui estudadas e para os próprios programas computacionais elaborados. O estudo foi idealizado, conforme relatam os autores, objetivando

demonstrar a influência de uma força axial de tração na rigidez torsional do elemento estrutural em questão. Para tanto, obtiveram e apresentaram resultados teóricos e experimentais, e os compararam entre si. A peça analisada é de alumínio, bi-apoiada, de seção retangular estreita, solicitada por uma força axial de tração P numa das extremidades, e por um momento aplicado de torção $2T_0$ no meio do vão, conforme mostra a figura IV.1. Para fins de análise foi considerado, no presente trabalho, o esquema equivalente de meia-barra mostrado na figura IV.2, com a atuação em $x = L$ do carregamento $\bar{F}_{xL} = P$ e $\bar{M}_{\varphi L} = T_0$, sendo também assinaladas nessa figura as condições de contorno cinemáticas inerentes ao tratamento numérico do problema pelo mdfe (lembrando-se que somente este tipo de condição é requerido pelo método numérico em questão). Na tabela IV.1, por sua vez, são apresentadas as propriedades do material e da seção transversal utilizadas nas análises, ressaltando-se que estas últimas são automaticamente calculadas dentro dos programas computacionais desenvolvidos. Convém destacar ainda que, pela falta de informação sobre o valor do módulo de elasticidade longitudinal E , este foi determinado a partir da expressão $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, tomando-se para G o valor fornecido no trabalho ENGEL e GOODIER (1953), e adotando-se para o alumínio o coeficiente de Poisson ν igual a 0,33.

IV.1.1 RESULTADOS ANALÍTICOS

Em ENGEL e GOODIER (1953) é apresentada uma equação para o problema, a qual, referindo-se ao esquema de meia-barra da figura IV.2, relaciona linearmente o momento de torção aplicado T_0 com o ângulo de torção por unidade de comprimento $\varphi' = constante$, para um valor fixo de P :

$$T_0 = -\left(GJ_t + \frac{PI_e}{A}\right)\varphi' \quad (IV.1)$$

Tem-se assim um problema de torção uniforme, para o qual fica definida uma rigidez

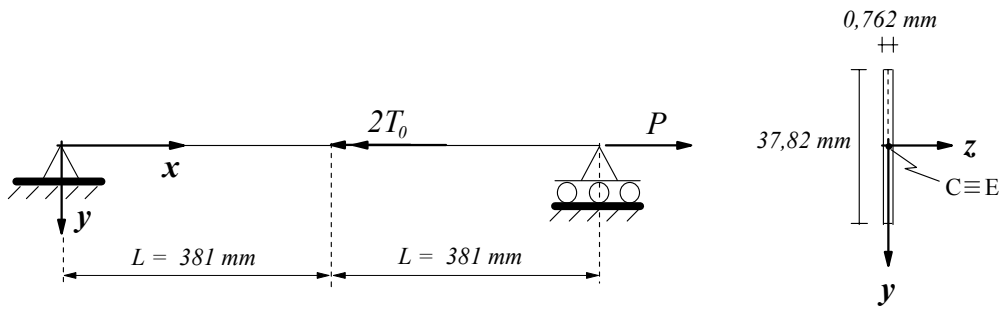


Figura IV.1 – Esquema estrutural do exemplo 1

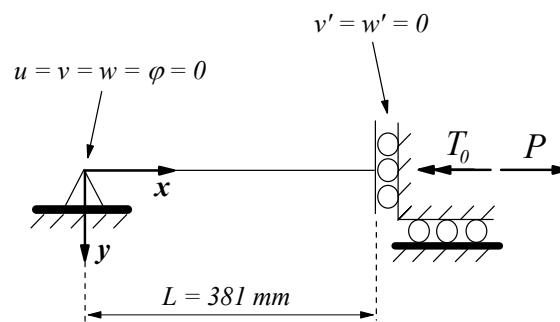


Figura IV.2 – Esquema equivalente em meia-barra utilizado nas análises

Tabela IV.1 – Propriedades do material e da seção transversal

PROPRIEDADES DO MATERIAL	$E = 70477 \frac{N}{mm^2}$ $G = 26495 \frac{N}{mm^2}$
PROPRIEDADES DA SEÇÃO TRANSVERSAL	$A = 28,82 \text{ mm}^2$ $I_y \cong 0$ $I_z = I_e = 3435 \text{ mm}^4$ $J_t = 5,578 \text{ mm}^4$ $R_e = 7,370 \times 10^5 \text{ mm}^6$ $y_e = z_e = \omega = I_{yz} = I_\omega = Q_y = Q_z = Q_\omega = 0$

torsional aparente (assim denominada por Engel e Goodier), $K_a = GJ_t + \frac{PI_e}{A}$, função da intensidade da força de tração.

Recorrendo-se em seguida aos modelos analíticos estudados no capítulo II, considera-se inicialmente a formulação de Attard, mais precisamente o conjunto de equações diferenciais (II.56) e condições de contorno (II.57). Observando-se na tabela IV.1 que, para o tipo de seção transversal em estudo (figura IV.1), várias propriedades resultam nulas, pode-se obter, sem maiores dificuldades, a seguinte solução para o problema:

$$T_0 = -\left(GJ_t + \frac{PI_e}{A}\right)\varphi' - \frac{E}{2}\left(R_e - \frac{I_e^2}{A}\right)\varphi'^3 \Rightarrow \varphi' = \text{constante} \quad (\text{IV.2})$$

$$\varphi(x) = \varphi'x \quad (\text{IV.3})$$

$$u' = \frac{P}{EA} - \frac{I_e}{2A}\varphi'^2 = \text{constante} \quad (\text{IV.4})$$

$$u(x) = u'x \quad (\text{IV.5})$$

com os demais deslocamentos, $v(x)$ e $w(x)$, nulos.

Passando-se agora ao modelo de POLILLO *et al.* (1998), onde estão envolvidas as equações diferenciais (II.73) e as condições de contorno (II.74), chega-se, pela ausência de flexão, exatamente às mesmas equações (IV.2) a (IV.5), evidenciando-se portanto que, no caso presente, não há qualquer interferência da magnitude do ângulo de torção φ na solução (entretanto, essa interferência se faz sentir no cálculo dos deslocamentos u_y e u_z).

A equação (IV.2), como se observa, difere da anterior (IV.1) por um termo não linear em φ'^3 , cuja influência passa a ser então quantificada. Cabe destacar que em GHOBARAH e TSO (1971) foi deduzida, para o mesmo tipo de elemento estrutural e também no âmbito de grandes ângulos de torção, uma expressão para o caso de torção pura (ou seja, com $P = 0$) que combina perfeitamente com (IV.2).

Em ENGEL e GOODIER (1953) foram apresentadas, com base em (IV.1), as retas soluções T_0 versus φ' para três níveis da força de tração P , a saber, $P = 331,8N$, $P = 2086,3N$ e $P = 3993,8N$. Fixando estes mesmos valores de P , foram então

obtidas, no presente trabalho, as correspondentes respostas provenientes da equação (IV.2). Todos esses resultados acham-se explicitados nas tabelas (IV.2.a) a (IV.2.c), para seis valores distintos de T_0 , e também nos gráficos da figura IV.3, sendo que as diferenças percentuais nas tabelas foram calculadas tomando-se como referência a solução de Engel e Goodier. Cabe ainda destacar que, para os três níveis de força axial considerados, o valor limite de T_0 foi escolhido de forma tal que correspondesse, de acordo com a expressão (IV.3), a um ângulo de torção $|\varphi(L)| = |\varphi'|L$ da ordem de 1 rad .

Analisando os resultados das tabelas, conjuntamente com os dos gráficos da figura IV.3, conclui-se que as diferenças nas respostas fornecidas pelas expressões (IV.1) e (IV.2), como esperado, crescem à medida que aumenta o valor de T_0 , notando-se entretanto que, até um valor de $|\varphi'|$ em torno de 10^{-3} rad/mm (o que corresponde a $|\varphi(L)|$ da ordem de $0,4 \text{ rad}$), pode-se, para fins práticos, considerar coincidentes os valores fornecidos por ambas as expressões. Nesta circunstância, mostra-se portanto pouco significativa a contribuição do termo não linear em φ'^3 na equação (IV.2), permitindo assim desprezá-lo e com isso definir para o problema uma rigidez torsional aparente $K_a = \frac{T_0}{\varphi'}$.

IV.1.2 RESULTADOS NUMÉRICOS E EXPERIMENTAIS

Dando seqüência à apresentação e análise de resultados obtidos para o problema em estudo, consideram-se agora as respostas numéricas provenientes dos programas ATT e POL, bem como outros resultados de natureza experimental, oriundos de ENGEL e GOODIER (1953). É de se ressaltar que, para o presente exemplo, onde se têm os deslocamentos $v = w = 0$ e as derivadas u' e φ' constantes ao longo da barra, o método numérico utilizado conduz a resultados “exatos”, ou seja, a menos de uma margem de erro inerente ao processo iterativo, fornece os mesmos valores das expressões analíticas (IV.2) a (IV.5) independentemente da discretização adotada (lembre-se que o mdfe supõe que todas as grandezas envolvidas, incluindo-se portanto as derivadas acima, sejam constantes ao longo de um trecho de integração, o que fica,

Tabela IV.2.a - Resultados analíticos T_0 versus φ' para $P = 331,8N$

T_0 (Nmm)	$-\varphi' \times 10^3 \left(\frac{rad}{mm} \right)$		
	Engel e Goodier Equação (IV.1)	Attard / Polillo, Garcia e Villaça Equação (IV.2)	Diferença percentual
25	0,1335	0,1333	-0,15
50	0,2669	0,2657	-0,45
100	0,5338	0,5249	-1,67
200	1,0676	1,0050	-5,86
400	2,1352	1,7848	-19,63
800	4,2704	2,8476	-33,32

Tabela IV.2.b - Resultados analíticos T_0 versus φ' para $P = 2086,3N$

T_0 (Nmm)	$-\varphi' \times 10^3 \left(\frac{rad}{mm} \right)$		
	Engel e Goodier Equação (IV.1)	Attard / Polillo, Garcia e Villaça Equação (IV.2)	Diferença percentual
50	0,1261	0,1261	0
150	0,3784	0,3768	-0,42
300	0,7567	0,7447	-1,59
500	1,2612	1,2097	-4,08
800	2,0179	1,8373	-8,95
1300	3,2791	2,7036	-17,55

Tabela IV.2.c - Resultados analíticos T_0 versus φ' para $P = 3993,8 N$

T_0 (Nmm)	$-\varphi' \times 10^3 \left(\frac{rad}{mm} \right)$		
	Engel e Goodier Equação (IV.1)	Attard / Polillo, Garcia e Villaça Equação (IV.2)	Diferença percentual
100	0,1603	0,1602	-0,06
200	0,3206	0,3200	-0,19
500	0,8015	0,7923	-1,15
1000	1,6031	1,5360	-4,19
1500	2,4046	2,2060	-8,26
2000	3,2061	2,7999	-12,67

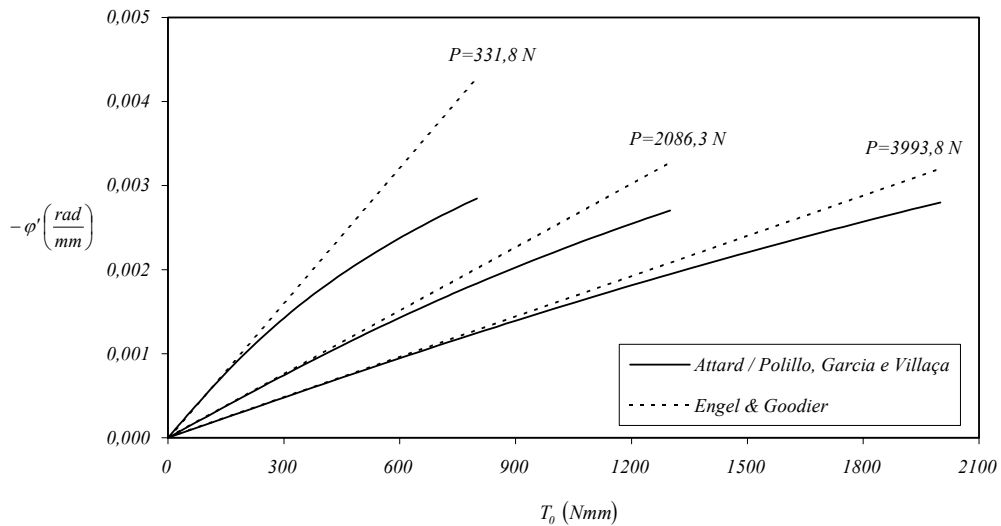


Figura IV.3 – Gráficos representativos dos resultados analíticos T_0 versus φ' para os três níveis de carga P considerados

portanto, perfeitamente atendido no caso presente). Em função disso, o problema analisado revela-se um bom teste de aferição para ambos os programas computacionais desenvolvidos, pois os mesmos, além de terem que produzir a mesma resposta entre si, devem também reproduzir as respostas analíticas decorrentes das expressões (IV.2) a (IV.5).

Tendo em mente o exposto no parágrafo anterior, foram geradas pelos programas ATT e POL as respectivas soluções numéricas T_0 versus φ' ($\varphi' = \varphi(L)/L$) correspondentes aos mesmos valores de P e T_0 presentes nas tabelas IV.2. Com efeito, em todos os casos, pôde-se constatar a perfeita concordância entre as soluções numéricas fornecidas pelos dois programas, e entre estas e as respostas analíticas decorrentes da expressão (IV.2), disponíveis nas tabelas IV.2. A figura IV.4 ilustra a situação. Ainda a título de ilustração, são apresentados na figura IV.5 os diagramas T_0 versus u' ($u' = u(L)/L$) correspondentes à solução analítica dada por (IV.4), juntamente com os pontos correspondentes às soluções numéricas, os quais, como esperado, ficam uma vez mais situados precisamente sobre as curvas. Pode-se assim atestar, na situação presente, o bom desempenho das ferramentas computacionais desenvolvidas.

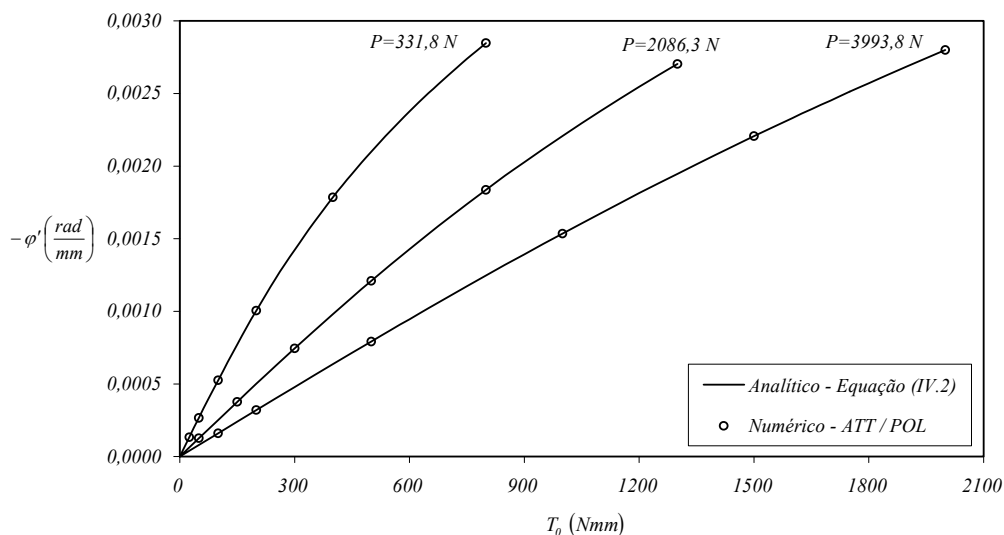


Figura IV.4 – Resultados analíticos e numéricos T_0 versus φ'

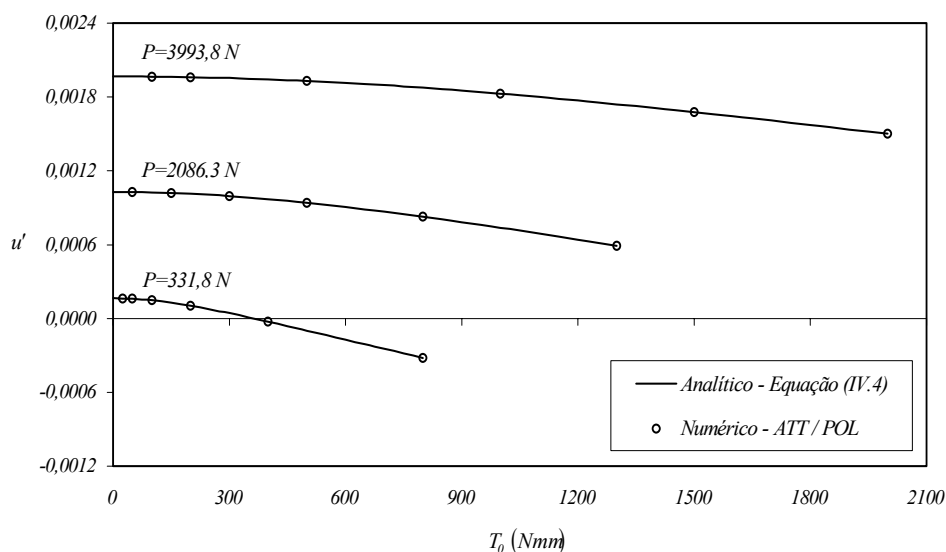


Figura IV.5 – Resultados analíticos e numéricos T_0 versus u'

Para complementar o estudo, mostram-se, na figura IV.6, resultados T_0 versus φ' experimentais, obtidos por ENGEL e GOODIER (1953), comparados aos teóricos (analíticos ou numéricos) já apresentados, sendo respeitado nos gráficos o limite máximo para $|\varphi'|$ de 10^{-3} rad/mm, estipulado no sub-ítem anterior, até o qual se admite que existe, em termos práticos, uma perfeita concordância entre os resultados fornecidos pelas expressões (IV.1) e (IV.2). Cabe ainda destacar que, por não terem sido disponibilizados valores numéricos, os pontos representativos dos resultados experimentais foram retirados diretamente dos gráficos apresentados por Engel e Goodier (ficando implícito que será sempre este o procedimento doravante adotado em situações análogas), incluindo-se também uma conversão de unidades para o Sistema Internacional (SI). A comparação de resultados permite concluir que as soluções teóricas apresentam excelente concordância com os pontos oriundos do ensaio experimental, o que se constitui, de fato, num teste de validação dos próprios modelos de análise adotados.

Por fim, para complementar o estudo, apresenta-se também, tal como no artigo em foco, um diagrama, vinculado aos gráficos da figura IV.6, mostrando o aumento da rigidez aparente $K_a = GJ_t + \frac{PI_e}{A}$ com o crescimento da força de tração P , o qual acha-

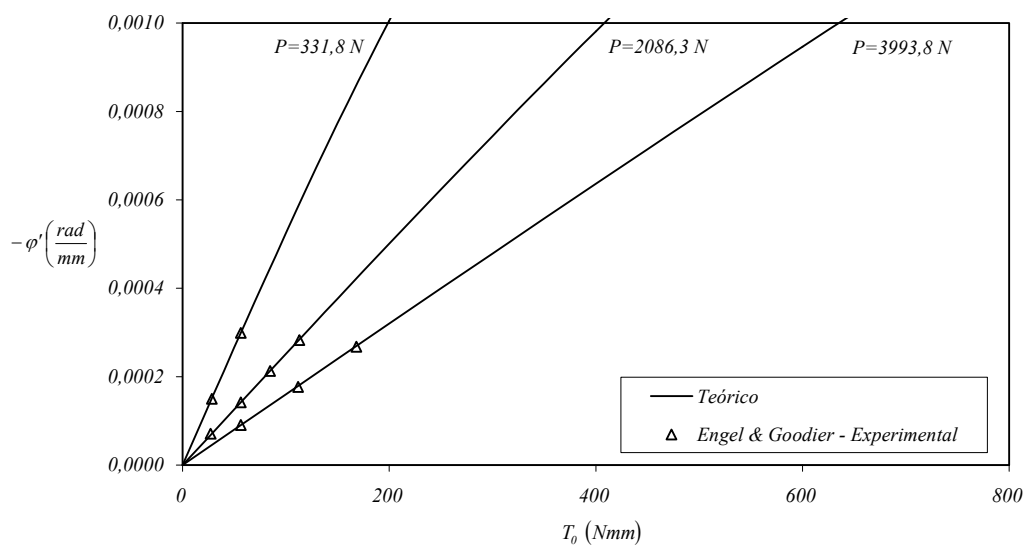


Figura IV.6 – Resultados teóricos e experimentais para T_0 versus φ'

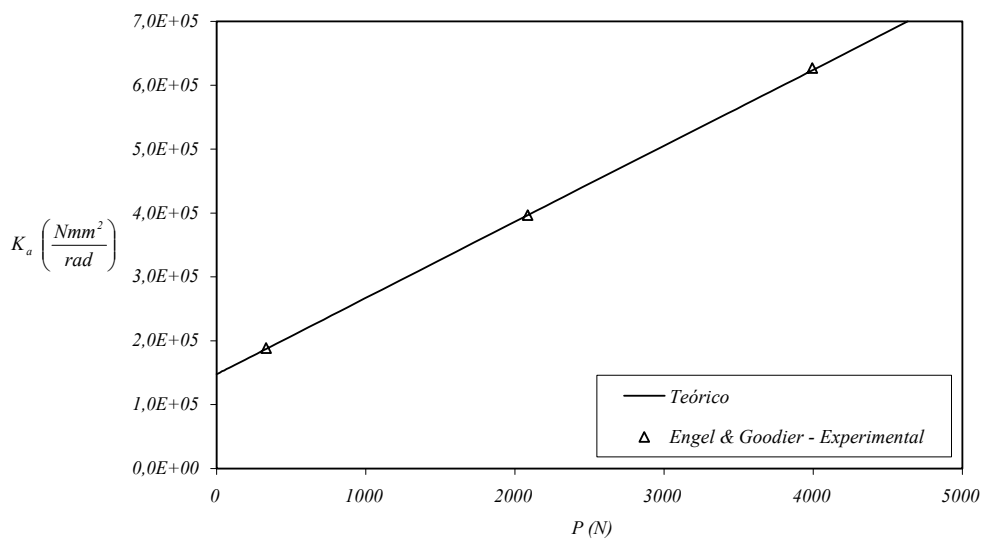


Figura IV.7 – Resultados teóricos e experimentais para a variação da rigidez torsional aparente K_a com a carga axial P

se representado na figura IV.7 (observando-se que a rigidez aparente K_a , para os três níveis de carga axial na figura IV.6, traduz o coeficiente angular das respectivas retas T_0 versus φ').

Em conclusão, pode-se dizer que o presente exemplo constituiu-se, de fato, num primeiro teste de validade, tanto para os programas desenvolvidos, como para os próprios modelos teóricos utilizados.

IV.2 EXEMPLO 2: TORÇÃO NÃO UNIFORME DE BARRA DE SEÇÃO “ I ”

O segundo exemplo, extraído de TSO e GHOBARAH (1971), retrata o problema de torção não uniforme (ou seja, em que φ' varia ao longo da barra) em uma haste de alumínio de seção “ I ”, em balanço, submetida a um momento aplicado de torção $\bar{M}_{\varphi L} = T_0$ em sua extremidade livre, tal como explicitado na figura IV.8, indicando-se ainda na figura as condições de contorno cinemáticas inerentes ao caso em estudo. Mediante um estudo teórico-experimental, os referidos autores procuraram validar um conjunto de equações diferenciais gerais e correspondentes condições de contorno, por eles instituído em GHOBARAH e TSO (1971), aplicável aos problemas geometricamente não lineares de flexo-torção em hastes de paredes delgadas de seção aberta. Essas equações foram derivadas a partir de uma formulação não linear para cascas prismáticas delgadas, com o uso do princípio da energia potencial total estacionária, e levam em conta a ocorrência de rotações moderadas de flexão e, tal como no modelo de Attard, de ângulos de torção no âmbito de grandes rotações.

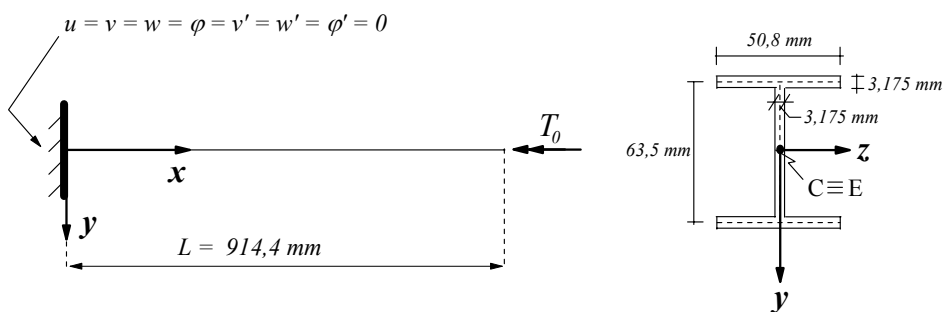


Figura IV.8 – Esquema estrutural do Exemplo 2

Os dados relativos ao material da barra, bem como às características geométricas da seção transversal, acham-se dispostos na tabela IV.3. Cabe ressaltar que, em virtude da falta de informação sobre o valor do módulo de elasticidade transversal G , este foi aqui determinado a partir da resposta linear (teoria de Vlassov) T_0 versus $\varphi(L)$ para o problema, incluída no trabalho de TSO e GHOBARAH (1971), a qual, uma vez introduzida na correspondente expressão de $\varphi(L)$, a saber,

$$\varphi(L) = -\frac{T_0}{\beta^3 EI_\omega} [\beta L - \tanh(\beta L)] \quad (\text{IV.6})$$

onde $\beta = \sqrt{\frac{GJ_t}{EI_\omega}}$, permite assim, a partir dos dados do problema, obter o valor de G .

Tabela IV.3 – Propriedades do material e da seção transversal

<p>PROPRIEDADES DO MATERIAL</p>	$E = 57362 \frac{N}{mm^2}$ $G = 20478 \frac{N}{mm^2}$
<p>PROPRIEDADES DA SEÇÃO TRANSVERSAL</p>	$A = 524,2 \text{ mm}^2$ $I_y = 6,937 \times 10^4 \text{ mm}^4$ $I_z = 3,929 \times 10^5 \text{ mm}^4$ $I_e = 4,623 \times 10^5 \text{ mm}^4$ $J_t = 1761 \text{ mm}^4$ $I_\omega = 6,993 \times 10^7 \text{ mm}^6$ $R_e = 5,355 \times 10^8 \text{ mm}^6$ $y_e = z_e = I_{yz} = Q_y = Q_z = Q_\omega = 0$

IV.2.1 MOMENTO DE TORÇÃO T_0 VERSUS ÂNGULO DE TORÇÃO $\varphi(L)$

Em TSO e GHOBARAH (1971) foram apresentadas respostas T_0 versus $\varphi(L)$ para o presente problema de torção não uniforme, tanto lineares quanto não lineares, as quais acham-se reproduzidas na tabela IV.4, notando-se que o momento de torção é tratado sob a forma adimensional $\gamma = T_0 \left(\frac{L^3}{EI_\omega} \right)$. A resposta linear baseia-se na expressão (IV.6), da teoria de Vlassov, ao passo que os resultados não lineares baseiam-se numa solução analítica aproximada, utilizando a técnica da perturbação, para a equação diferencial de torção não uniforme gerada a partir da formulação geral desenvolvida pelos mesmos autores em GHOBARAH e TSO (1971).

Na tabela IV.4, são também incorporadas as correspondentes soluções não lineares obtidas à luz dos programas ATT e POL. A propósito, cabe destacar que, tal como ocorre no exemplo anterior de torção uniforme, também no presente exemplo os modelos analíticos de Attard e Polillo, pela ausência de flexão (ou seja, $v = w = 0$), geram as mesmas equações diferenciais e condições de contorno para o problema, a saber,

$$EI_\omega \varphi''' - GJ_t \varphi' - \frac{E}{2} \left(R_e - \frac{I_e^2}{A} \right) \varphi'^3 = T_0 \quad , \quad \text{com } \varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(L) = 0 \quad (\text{IV.7})$$

$$EAu' + \frac{EI_e}{2} \varphi'^2 = 0 \quad , \quad \text{com } u(0) = 0 \quad (\text{IV.8})$$

e portanto conduzem à mesma resposta para u e φ , independentemente da magnitude do ângulo de torção. Entretanto, diferentemente da situação anterior, que constitui uma exceção, as correspondentes soluções numéricas pelo mdfe não são mais “exatas”, no sentido de que, como é inerente aos métodos numéricos, dependem agora da discretização adotada. Todavia, devem os programas ATT e POL, nas análises do problema, certamente produzir resultados idênticos para as mesmas condições de tolerância e discretização (aspecto este que, por si só, serve como um teste a mais de aferição para os programas), o que efetivamente se concretizou, conforme se pode observar na quarta coluna da tabela IV.4.

Tabela IV.4 – Momento adimensional de torção γ versus $\varphi(L)$

$\gamma = T_0 \left(\frac{L^3}{EI_\omega} \right)$	$-\varphi(L)$ (rad)			
	Solução linear Equação (IV.6)	Solução não linear		
		TSO e GHOBARAH (1971)	ATT / POL	Diferença percentual
1	0,08491	0,08484	0,08424	-0,71
2	0,16983	0,16923	0,16803	-0,71
3	0,25474	0,25272	0,25094	-0,70
4	0,33965	0,33486	0,33258	-0,68
5	0,42457	0,41520	0,41264	-0,61
6	0,50948	0,49328	0,49088	-0,49
7	0,59440	0,56867	0,56711	-0,27
8	0,67931	0,64090	0,64123	0,05
9	0,76422	0,70953	0,71317	0,51
10	0,84914	0,77411	0,78292	1,14

Como mostrado na tabela, as respostas não lineares idênticas dos programas ATT e POL, quando comparadas às fornecidas pela solução analítica aproximada de TSO e GHOBARAH (1971), revelam diferenças percentuais máximas da ordem de 1%, o que constitui assim uma prova a mais de confiabilidade para os resultados fornecidos pelos programas. Convém registrar ainda que foram encontradas na literatura duas outras soluções numéricas para o problema em questão, ambas com a utilização do mef, desenvolvidas, respectivamente, por WEKEZER (1985) e RONAGH e BRADFORD (1999). No entanto, como tais soluções praticamente coincidem com as respostas de Tso e Ghobarah, optou-se por não apresentá-las no presente trabalho.

As soluções vistas na tabela IV.4 são também mostradas graficamente na figura IV.9, acompanhadas agora de resultados experimentais obtidos por TSO e GHOBARAH (1971) em dois ensaios realizados segundo o mesmo esquema estrutural

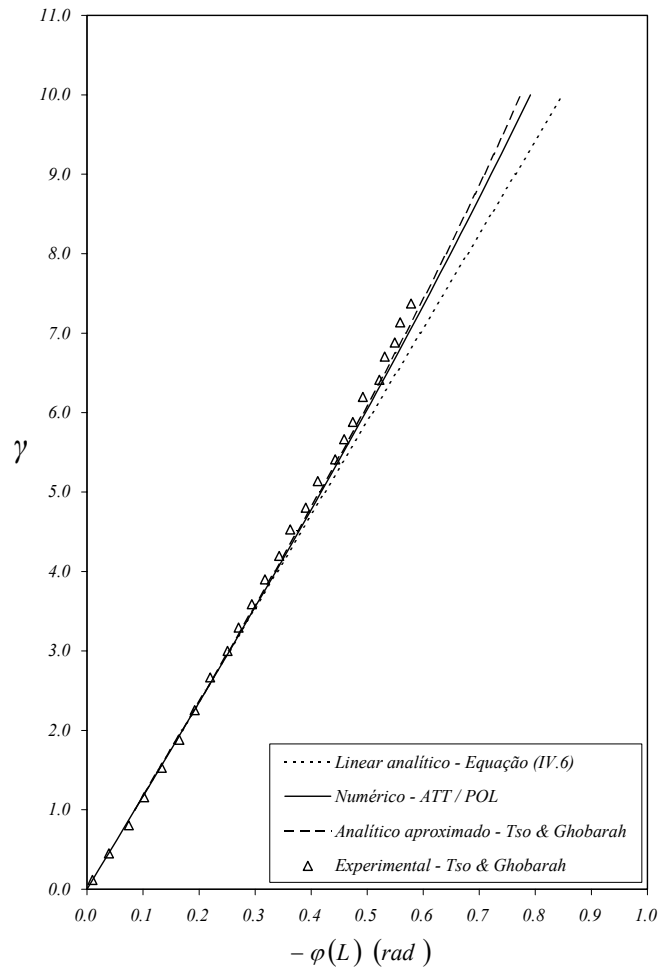


Figura IV.9 – Momento adimensional de torção γ versus $\varphi(L)$

da figura IV.8. Na figura IV.9 fica evidente a proximidade das soluções não lineares já apresentadas na tabela IV.4 com os resultados experimentais de Tso e Ghobarah. Por fim, pode-se constatar que, em todos os casos, verifica-se sempre o mesmo tipo de comportamento para a solução, traduzido por gráficos γ versus $\varphi(L)$ indicando ganho de rigidez estrutural.

IV.2.2 DEFORMAÇÃO ε_x AO LONGO DA MESA SUPERIOR DA SEÇÃO CENTRAL

Em TSO e GHOBARAH (1971), foram também calculadas, com base na sua

solução analítica aproximada, as deformações longitudinais ε_x na seção central da barra, ao longo da linha média da mesa superior, correspondentes a um ângulo de torção $\varphi(L)$ de $0,315 \text{ rad}$ (o que equivale a um valor $\gamma = 3,75$ para o momento adimensional de torção). Estes resultados, juntamente com os decorrentes dos ensaios realizados, mais os analíticos fornecidos pela teoria linear de Vlassov, e ainda os correspondentes aos programas ATT e POL (os quais são idênticos entre si), acham-se representados graficamente na figura IV.10. Em relação aos dois últimos conjuntos de resultados, são os mesmos também explicitados na tabela IV.5 para sete pontos equidistantes na mesa, tendo-se as respostas lineares dadas pela expressão

$$\varepsilon_x = -\omega\varphi'' \quad (\text{IV.9})$$

e as dos programas obedecendo à relação não linear

$$\varepsilon_x = u' - \omega\varphi'' + \frac{r^2\varphi'^2}{2} \quad (\text{IV.10})$$

sendo nesta última as derivadas de u e φ obtidas a partir dos deslocamentos nodais, aplicando-se as representações de diferenças finitas (III.2) e (III.5).

Na figura IV.10 evidencia-se a excelente concordância verificada entre as respostas dos programas e as oriundas da solução analítica aproximada de TSO e GHOBARAH (1971), notando-se ainda o afastamento destas da solução linear à medida que se caminha para as extremidades da mesa. Por sua vez, a concordância das respostas não lineares com os resultados experimentais desses mesmos autores pode ser considerada boa em termos qualitativos, porém apenas razoável em termos quantitativos.

IV.2.3 DEFORMAÇÃO ε_x AO LONGO DO COMPRIMENTO DA BARRA

Um outro estudo realizado em TSO e GHOBARAH (1971) envolveu a variação da deformação ε_x ao longo do comprimento da barra, calculada, numa seção transversal

Tabela IV.5 – Deformação ε_x ao longo da mesa superior da seção central

z (mm)	$\varepsilon_x \times 10^4$	
	Solução Linear Equação (IV.9)	ATT / POL Equação (IV.10)
-25,4	3,12	3,63
-16,9	2,08	2,34
-8,5	1,04	1,17
0	0	0,10
8,5	-1,04	-0,86
16,9	-2,08	-1,69
25,4	-3,12	-2,43

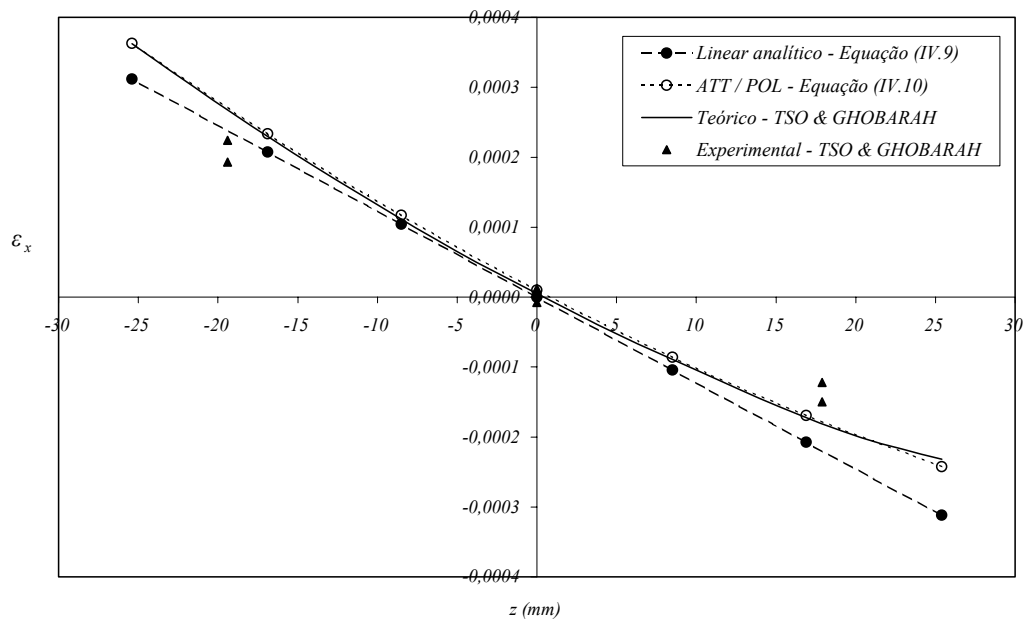


Figura IV.10 – Deformação ε_x ao longo da mesa superior da seção central

genérica, para o ponto da linha média da mesa superior com coordenada $z = 17,8 \text{ mm}$, conforme mostra a figura IV.11, e correspondente ao nível $\gamma = 8,0$ do momento adimensional de torção (o que, pela tabela IV.4, indica um ângulo de torção $|\varphi(L)|$ da ordem de $0,65 \text{ rad}$).

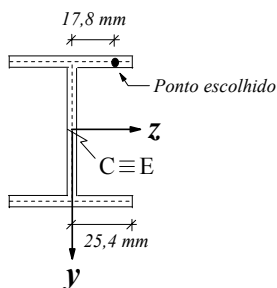


Figura IV.11 – Ponto da seção transversal genérica onde foi calculado ε_x

Na tabela IV.6, ao lado da solução linear, são registrados os valores (idênticos entre si) obtidos para ε_x pelos programas ATT e POL, considerando-se as 13 seções definidas pelo espaçamento nodal $\lambda = L/12$ utilizado nas análises computacionais do problema. Por sua vez, nos gráficos da figura IV.12, além de serem incluídos os valores presentes na tabela IV.6, foram também reproduzidos os resultados oriundos da solução analítica aproximada de TSO e GHOBARAH (1971), e ainda os decorrentes dos ensaios experimentais realizados por esses autores. Mais uma vez fica evidenciada a excelente proximidade entre as respostas de Tso e Ghobarah e a dos programas aqui desenvolvidos, inclusive na seção da extremidade livre, onde a resposta não linear discorda mais acentuadamente da previsão linear, segundo a qual a deformação longitudinal deve ser nula (pois $\varphi'' = 0$ em $x = L$). Quanto à comparação desses resultados não lineares com os experimentais, pode-se dizer que, embora ambos tenham revelado a mesma tendência, já demonstram um razoável afastamento entre si, o qual, conforme observado na figura, torna-se mais acentuado nas proximidades da extremidade livre da barra, possivelmente em razão de que os modelos não lineares de flexo-torção aqui considerados não reproduzem a condição de deformação ε_x nula ao longo da seção $x = L$, ocorrida nos experimentos.

Tabela IV.6 – Deformação ε_x ao longo do comprimento da barra, para o ponto indicado na figura IV.11

$\frac{x}{L}$	$\varepsilon_x \times 10^3$	
	Solução linear Equação (IV.9)	ATT / POL Equação (IV.10)
0	-1,95	-1,89
0,083	-1,55	-1,49
0,167	-1,23	-1,14
0,25	-0,97	-0,85
0,333	-0,77	-0,61
0,417	-0,60	-0,42
0,5	-0,47	-0,27
0,583	-0,36	-0,15
0,667	-0,26	-0,05
0,75	-0,19	0,03
0,833	-0,12	0,10
0,917	-0,06	0,15
1	0	0,20

Como resultado dessa série de estudos teóricos e experimentais, baseados no trabalho de TSO e GHOBARAH (1971), os quais incluíram não só a análise de deslocamentos como também de deformações, pode-se concluir que os mesmos constituiram um excelente teste de validade para os programas ATT e POL, e ainda, para as próprias formulações de flexo-torção que lhes deram origem.

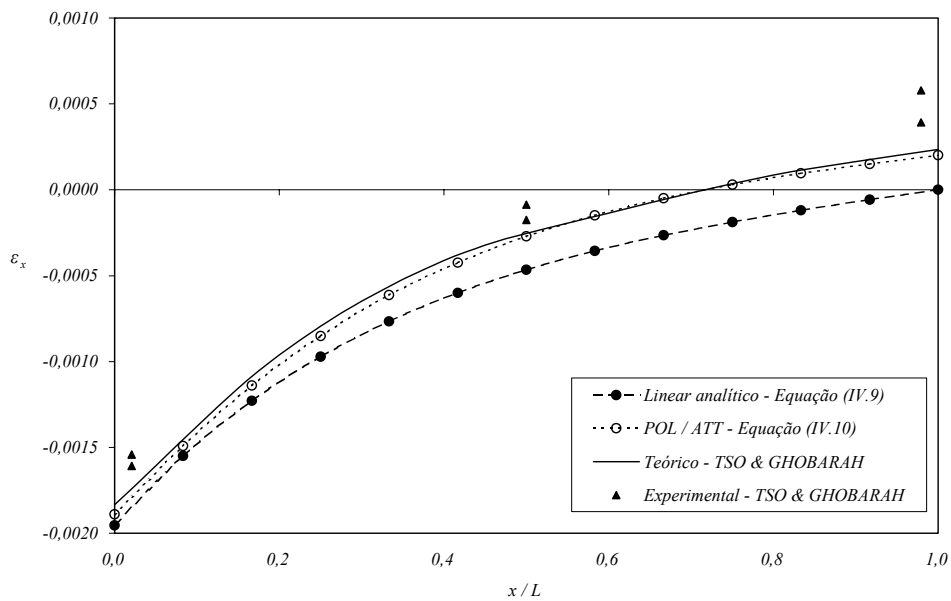


Figura IV.12 – Deformação ε_x ao longo do comprimento da barra, para o ponto indicado na figura IV.11

IV.3 EXEMPLO 3: TORÇÃO UNIFORME DE BARRA DE SEÇÃO CANTONEIRA

Este terceiro exemplo é originário de GREGORY (1960a e 1960b), mas os estudos aqui apresentados foram calcados no trabalho de ATTARD (1984) (ressaltando-se que em ATTARD e SOMERVAILLE (1987) há também a análise do presente caso, mas com uma abordagem mais resumida, e inteiramente baseada no trabalho anterior). Trata-se de um problema de torção uniforme (ou seja, com $\varphi' = constante$ ao longo da barra), tal como no primeiro exemplo, entretanto com a seção transversal da haste tendo agora apenas um plano de simetria, fato este que implica no surgimento também de flexão na barra. A haste é de alumínio e, conforme mostra o esquema da figura IV.13, está em balanço, possui seção transversal na forma de uma cantoneira de abas iguais (com ângulo de 90° no vértice), e se acha submetida na extremidade livre a um momento aplicado de torção $\overline{M}_{\xi L} = T_0$.

Em ATTARD (1984) foram estabelecidas soluções teóricas para o problema, tanto analíticas quanto numéricas, correspondentes ao seu modelo de flexo-torção

desenvolvido no capítulo II do presente trabalho, sendo que as respostas numéricas foram determinadas por intermédio de um programa computacional elaborado com base no mef, utilizando um elemento de barra com 7 graus de liberdade por nó (u , v , w , φ , v' , w' e φ'). Essas soluções teóricas, além de comparadas entre si, foram também confrontadas com resultados experimentais apresentados por GREGORY (1960a e 1960b). Como se observa, o presente exemplo constitui uma primeira oportunidade de comparação entre as soluções numéricas obtidas por Attard, com o uso do mef, e as oriundas da aplicação do mdfe, ambas referindo-se ao mesmo modelo de flexo-torção.

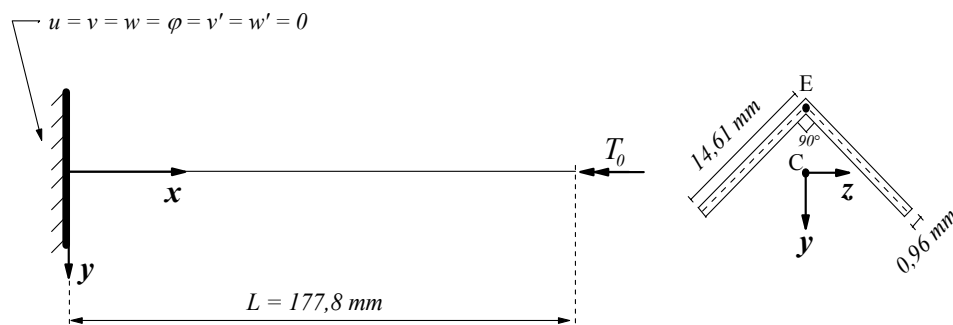


Figura IV.13 – Esquema estrutural do Exemplo 3

Na tabela IV.7, acham-se relacionadas as propriedades do material e da seção transversal da barra, requeridas nas análises, notando-se ainda que as condições de contorno cinemáticas do problema estão indicadas no próprio esquema estrutural da figura IV.13.

Inicialmente, serão apresentadas as soluções analíticas para o problema, determinadas a partir dos respectivos conjuntos de equações diferenciais e condições de contorno pertinentes a cada um dos modelos de flexo-torção abordados no capítulo II. Assim, para o modelo de Attard, tem-se solução expressa sob a forma:

$$T_0 = -GJ_t \varphi' - \frac{E}{2} \left(R_e - \frac{I_e^2}{A} - \frac{Q_z^2}{I_z} \right) \varphi'^3 \Rightarrow \varphi' = \text{constante} \quad (\text{IV.11})$$

$$\varphi(x) = \varphi' x \quad (\text{IV.12})$$

Tabela IV.7 – Propriedades do material e da seção transversal

PROPRIEDADES DO MATERIAL	$E = 89660 \text{ N/mm}^2$ $G = 31130 \text{ N/mm}^2$
PROPRIEDADES DA SEÇÃO TRANSVERSAL	$y_e = -5,165 \text{ mm}$ $A = 28,05 \text{ mm}^2$ $I_y = 998,0 \text{ mm}^4$ $I_z = 249,5 \text{ mm}^4$ $I_e = 1996 \text{ mm}^4$ $J_t = 8,620 \text{ mm}^4$ $Q_z = 5155 \text{ mm}^5$ $R_e = 2,556 \times 10^5 \text{ mm}^6$ $z_e = \omega = I_{yz} = I_\omega = Q_y = Q_\omega = 0$

$$v(x) = \frac{Q_z}{2I_z} (1 - \cos \varphi) \quad (\text{IV.13})$$

$$w(x) = \frac{Q_z}{2I_z} (\varphi - \sin \varphi) \quad (\text{IV.14})$$

$$u(x) = \left(\frac{Q_z^2}{4I_z^2} + \frac{Q_z y_e}{2I_z} \right) (\varphi' \sin \varphi - \varphi'^2 x) - \frac{I_e}{2A} \varphi'^2 x \quad (\text{IV.15})$$

cabendo observar que $\varphi' = \text{constante}$ confirma tratar-se de um problema de torção uniforme, acompanhada no presente caso de flexão, como indicam as expressões (IV.13) e (IV.14). Estas últimas são também apresentadas no trabalho de ATTARD (1984) e, conforme o relato deste autor, concordam inteiramente com as obtidas anteriormente por GREGORY (1960a e 1960b). Passando-se em seguida ao modelo de Polillo, Garcia e Villaça, repetem-se na solução do problema as equações (IV.11) e (IV.12), modificando-se entretanto as funções representativas dos deslocamentos

transversais, v e w , e axial u , que se apresentam agora sob o aspecto:

$$v(x) = \frac{Q_z}{2I_z} \left(\frac{\varphi^2}{2} \right) \quad (\text{IV.16})$$

$$w(x) = \frac{Q_z}{2I_z} \left(\frac{\varphi^3}{6} \right) \quad (\text{IV.17})$$

$$u(x) = - \left(\frac{Q_z^2}{4I_z^2} - \frac{Q_z y_e}{2I_z} \right) \frac{\varphi'^4 x^3}{6} - \frac{I_e}{2A} \varphi'^2 x \quad (\text{IV.18})$$

observando-se que tal solução, pela ocorrência de flexão neste exemplo, é efetivamente válida apenas no âmbito de rotações moderadas, tanto de flexão como de torção.

Quanto aos resultados das análises, são inicialmente apresentadas nas tabelas IV.8.a a IV.8.c respectivamente, as respostas T_0 versus $\varphi(L)$, T_0 versus $v(L)$ e T_0 versus $w(L)$ correspondentes a diversos valores do momento aplicado de torção T_0 , notando-se que, em todas essas tabelas, estão presentes os resultados oriundos do modelo de Attard, tanto analíticos (equações (IV.12) a (IV.14)) quanto numéricos, estes últimos obtidos através do mef (ATTARD (1984)) e do mdfe (ATT), bem como as respostas numéricas, também segundo o mdfe, correspondentes ao modelo de Polillo, Garcia e Villaça, fornecidas pelo programa POL. Na figuras IV.14 a IV.16 podem ser visualizadas graficamente todas essas soluções apresentadas nas tabelas.

Iniciando-se a análise de resultados pela tabela IV.8.a e correspondente figura IV.14, observa-se que as respostas T_0 versus $\varphi(L)$ determinadas por ATTARD (1984), com o seu programa baseado no mef, e pelos programas ATT e POL (mdfe), coincidem não só entre si, como também com a própria solução analítica dada pela equação (IV.12). Esta coincidência, que independe da discretização escolhida, está diretamente ligada ao fato de que a obtenção de $\varphi(x)$ fica independente da dos demais deslocamentos incógnitos, como indica a equação (IV.11), e de φ' ser constante ao longo da barra, conforme resulta dessa mesma equação (observando-se que no mdfe φ' é efetivamente suposto constante em cada trecho de integração, ao passo que, no tratamento pelo mef, é utilizada uma função polinomial do 3º grau para φ no elemento, portanto capaz de atender de forma exata ao caso presente de φ' constante na barra).

Tabela IV.8.a - Resultados analíticos e numéricos T_0 versus $\varphi(L)$

T_0 (Nmm)	$-\varphi(L)$ (rad) *
100	0,066
500	0,330
750	0,492
1000	0,652
1250	0,809
1500	0,961
1750	1,109
1850	1,167
1900	1,195
1950	1,224
2000	1,252
2050	1,280
2100	1,308

* Equação (IV.12) / ATTARD (1984) / ATT / POL

Tabela IV.8.b - Resultados analíticos e numéricos T_0 versus $v(L)$

T_0 (Nmm)	$v(L)$ (mm)						
	Modelo de Attard					Modelo de Polillo, Garcia e Villaça	
	Solução analítica Equação (IV.13)	Mef ATTARD (1984)	Mdfe ATT	Mdfe POL	Mdfe POL	Mdfe POL	
100	0,023	0,023	-	0,023	-	0,023	-
500	0,557	0,557	-	0,557	-	0,553	-0,72%
750	1,23	1,23	-	1,23	-	1,21	-1,63%
1000	2,12	2,11	-0,47%	2,12	-	2,06	-2,83%
1250	3,20	3,17	-0,94%	3,20	-	3,08	-3,75%
1500	4,41	4,35	-1,36%	4,41	-	4,22	-4,31%
1750	5,72	5,60	-2,10%	5,73	0,17%	5,45	-4,72%
1850	6,27	6,11	-2,55%	6,27	-	5,96	-4,94%
1900	6,54	6,36	-2,75%	6,55	0,15%	6,21	-5,05%
1950	6,82	6,62	-2,93%	6,82	-	6,47	-5,13%
2000	7,09	6,87	-3,10%	7,10	0,14%	6,73	-5,08%
2050	7,37	7,12	-3,39%	7,38	0,14%	7,00	-5,02%
2100	7,65	7,38	-3,53%	7,65	-	7,26	-5,10%

Tabela IV.8.c - Resultados analíticos e numéricos T_0 versus $w(L)$

T_0 (Nmm)	- $w(L)$ (mm)						
	Modelo de Attard					Modelo de Polillo, Garcia e Villaça	
	Solução analítica Equação (IV.14)	Mef ATTARD (1984)		Mdfe ATT		Mdfe POL	
100	0,0005	0,0005	-	0,0005	-	0,0005	-
500	0,062	0,062	-	0,061	-1,61%	0,060	-3,23%
750	0,203	0,205	0,99%	0,202	-0,49%	0,191	-5,91%
1000	0,468	0,475	1,50%	0,464	-0,85%	0,424	-9,40%
1250	0,881	0,897	1,82%	0,875	-0,68%	0,767	-12,9%
1500	1,46	1,48	1,37%	1,45	-0,68%	1,22	-16,4%
1750	2,21	2,24	1,36%	2,19	-0,90%	1,77	-19,9%
1850	2,55	2,58	1,18%	2,54	-0,39%	2,02	-20,8%
1900	2,74	2,76	0,73%	2,72	-0,73%	2,15	-21,5%
1950	2,93	2,94	0,34%	2,91	-0,68%	2,28	-22,2%
2000	3,12	3,13	0,32%	3,10	-0,64%	2,41	-22,8%
2050	3,33	3,33	-	3,30	-0,90%	2,55	-23,4%
2100	3,54	3,53	-0,28%	3,51	-0,85%	2,69	-24,0%

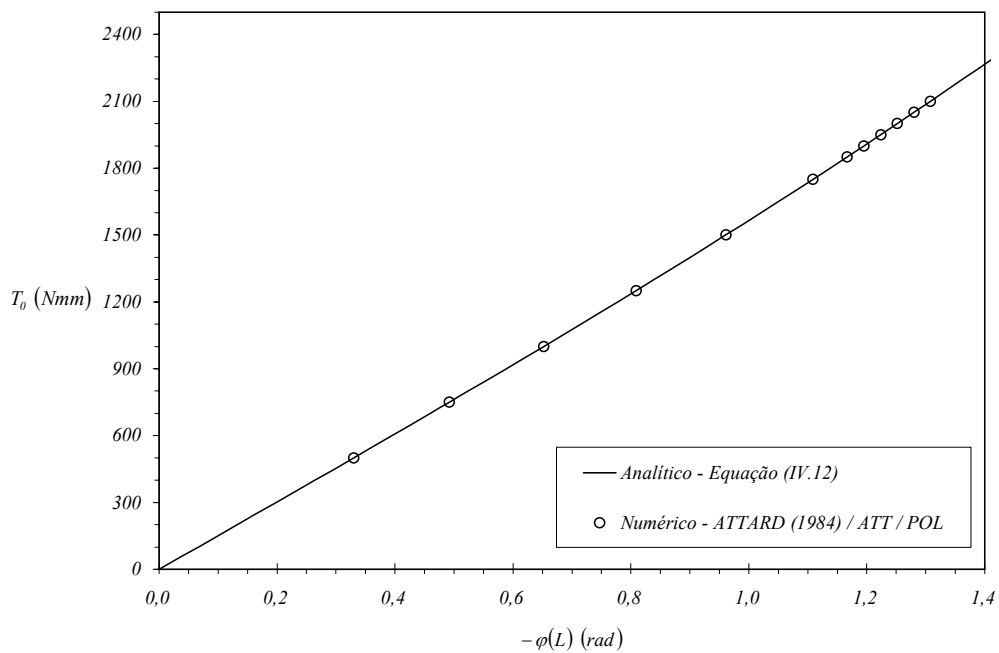


Figura IV.14 – Resultados analíticos e numéricos T_0 versus $\varphi(L)$

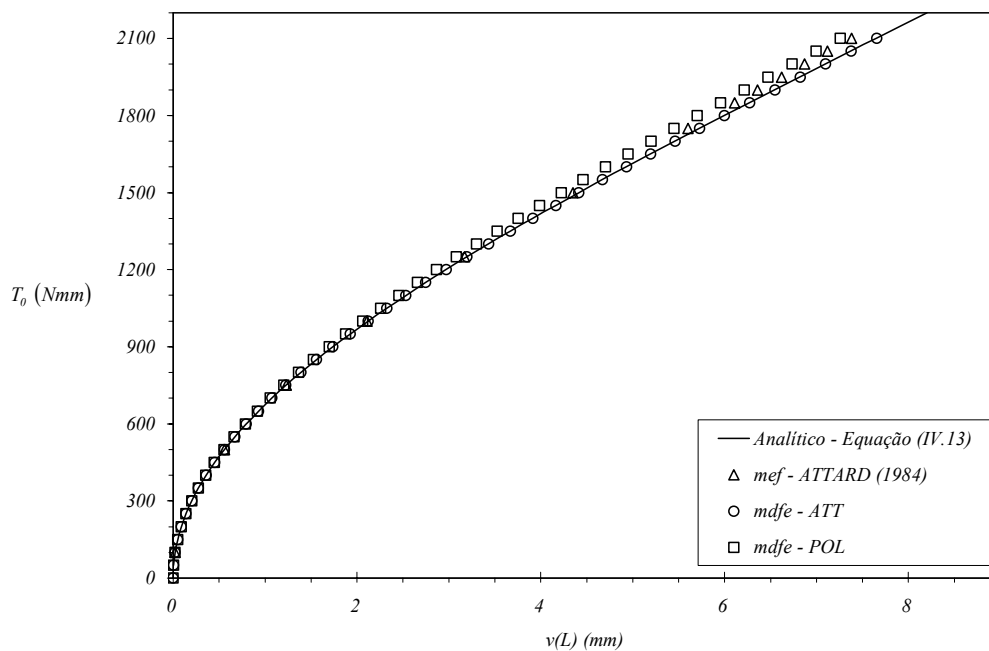


Figura IV.15 – Resultados analíticos e numéricos T_0 versus $v(L)$

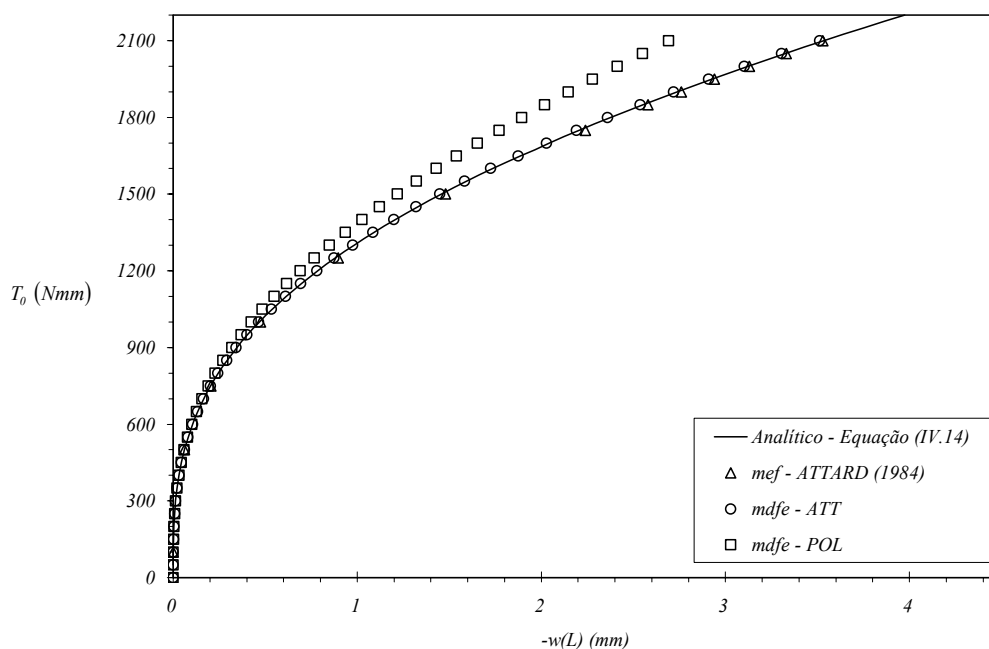


Figura IV.16 – Resultados analíticos e numéricos T_0 versus $w(L)$

Passando-se então à análise das soluções T_0 versus $v(L)$ e T_0 versus $w(L)$, presentes nas tabelas IV.8.b e IV.8.c, e nos respectivos gráficos das figuras IV.15 e IV.16 (observando-se que, no caso das soluções oriundas dos programas ATT e POL, foram plotados todos os pontos obtidos nas análises computacionais), fica evidente, considerando-se as diferenças percentuais das respostas numéricas relativamente à solução analítica do modelo de Attard, que o programa ATT e o próprio programa de Attard demonstraram ambos um bom desempenho no cálculo dos deslocamentos $v(L)$ e $w(L)$. Todavia, para o deslocamento $v(L)$ em particular, enquanto os resultados do programa ATT revelaram-se praticamente coincidentes com os oriundos da resposta analítica (IV.13), nota-se que os resultados correspondentes ao programa de Attard se afastam um pouco dessas respostas para os valores mais altos do momento T_0 , e conseqüentemente do ângulo de torção $\varphi(L)$. Nas figuras IV.15 e IV.16 pode-se também visualizar o esperado desvio, cada vez mais acentuado com o crescimento do ângulo de torção, das respostas do programa POL, correspondente ao modelo de Polillo, Garcia e Villaça, em relação às demais respostas, notadamente no que se refere ao

deslocamento $w(L)$. A título de ilustração, se for por exemplo fixada uma diferença percentual máxima (em valor absoluto) da ordem de 3% nesse deslocamento (em relação ao valor analítico do modelo de Attard), como definindo o limite de validade para as respostas “aproximadas” do programa POL, pode-se dizer, com base na tabela IV.8.c, que os seus resultados se mostram significativos até um valor para $\varphi(L)$ de cerca de $0,33 \text{ rad}$ (ou $18,9^\circ$), o que corresponde a um momento T_0 de aproximadamente 500 Nmm .

Como uma análise final para o presente exemplo, apresentam-se graficamente na figura IV.17 os resultados experimentais obtidos por GREGORY (1960a e 1960b) para o deslocamento transversal do centro de cisalhamento da seção $x = L$, observado durante o ensaio de torção da peça. Tais resultados, traduzidos na forma de pares ordenados $(v(L), w(L))$, tiveram o seu último ponto registrado no gráfico da figura IV.17 quando o ângulo de torção $\varphi(L)$ atingiu o valor de 75° (tal valor serviu também de limite para a própria confecção das tabelas IV.8). Na mesma figura, foram também representadas as correspondentes soluções teóricas (analíticas e numéricas) anteriormente presentes nas tabelas IV.8.b,c e figuras IV.15,16. A visualização dos gráficos permite concluir que, em particular, as respostas analíticas pelas equações (IV.13) e (IV.14), e as fornecidas pelo programa ATT, muito próximas entre si, foram as que melhor concordaram com a previsão experimental.

Após a apresentação dos resultados obtidos para o presente exemplo, pode-se dizer que o programa ATT demonstrou, uma vez mais, e agora num problema efetivamente de flexo-torção, excelente desempenho em todas as análises comparativas realizadas. Sobre o programa POL, pôde-se constatar que a presença da flexão, como seria de esperar, limitou a validade de suas respostas; todavia, em função de que no presente exemplo os efeitos de flexão somente surgem pela consideração do comportamento não linear geométrico, tendo caráter secundário de início e só se manifestando de forma mais intensa para níveis mais elevados de carga, conseguiu-se atingir um expressivo valor do ângulo de torção, da ordem de 19° , conforme já visto anteriormente, sem que houvesse deterioração dos resultados. Esse argumento fica consistente com o próprio aspecto de que a ausência total de flexão, ocorrida nos exemplos precedentes, permitiu que as soluções estabelecidas no âmbito de rotações moderadas permanecessem válidas independentemente da magnitude do ângulo de

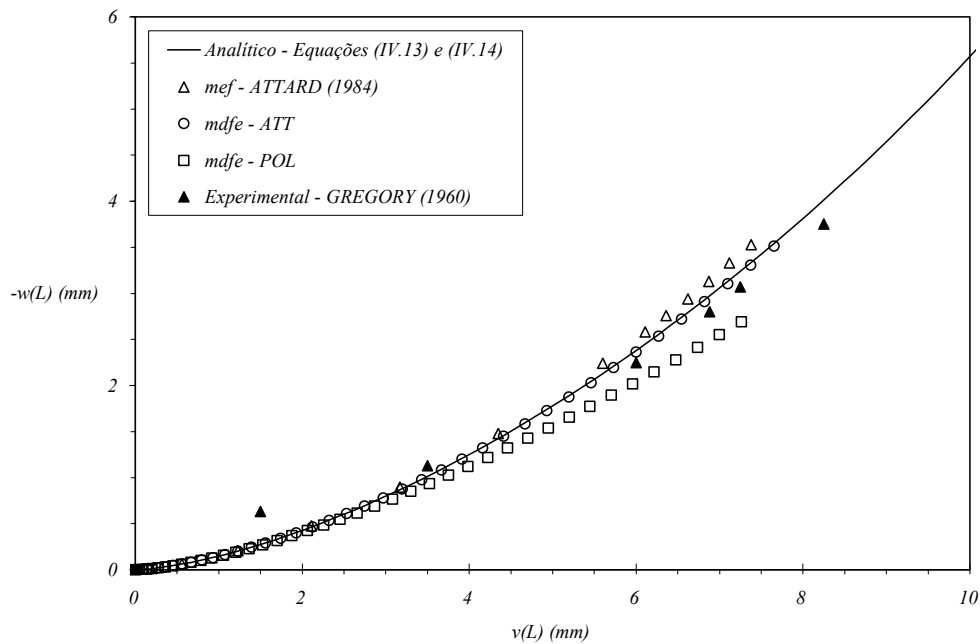


Figura IV.17 – Resultados teóricos e experimentais para o deslocamento do centro de cisalhamento na seção da extremidade livre da haste

torção.

IV.4 EXEMPLO 4: FLAMBAGEM DE COLUNA DE SEÇÃO “U”

Neste quarto exemplo, que constitui um caso clássico de flambagem por flexo-torção, estuda-se uma coluna de aço engastada e livre, de seção “U”, submetida na extremidade livre a uma carga de compressão centrada $\bar{F}_{xL} = -P$, conforme mostra o esquema estrutural da figura IV.18. Tem-se por objetivo básico comparar o desempenho dos modelos de Attard e de Polillo, Garcia e Villaça, mediante a utilização dos respectivos programas ATT e POL, na determinação da carga crítica e também do comportamento pós-crítico da coluna. A propósito, convém salientar que, com o presente caso, inicia-se uma série de estudos envolvendo problemas de estabilidade elástica em hastes de paredes delgadas de seção aberta.

Nas análises subseqüentes foram consideradas as propriedades do material e da seção transversal listadas na tabela IV.9, além das condições de contorno cinemáticas

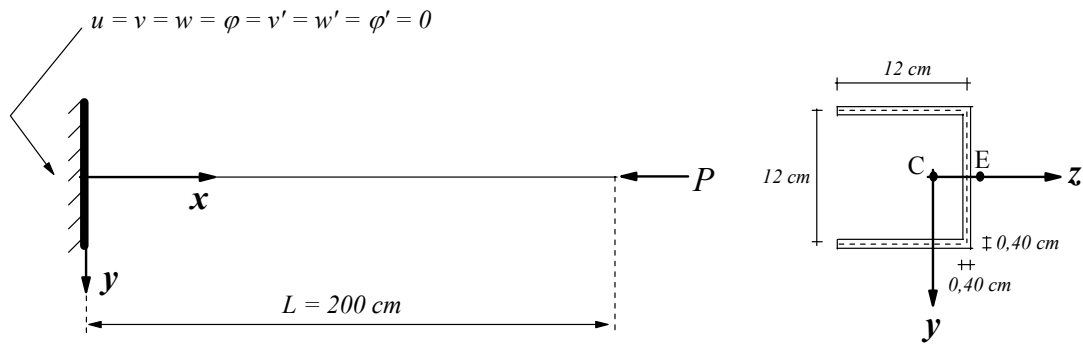


Figura IV.18 - Esquema estrutural do exemplo 4

Tabela IV.9 – Propriedades do material e da seção transversal

PROPRIEDADES DO MATERIAL	$E = 21000 \text{ kN/cm}^2$ $G = 8077 \text{ kN/cm}^2$
PROPRIEDADES DA SEÇÃO TRANSVERSAL	$z_e = 9,143 \text{ cm}$ $A = 14,4 \text{ cm}^2$ $I_y = 230,4 \text{ cm}^4$ $I_z = 403,2 \text{ cm}^4$ $I_e = 1837 \text{ cm}^4$ $J_t = 0,768 \text{ cm}^4$ $I_\omega = 5925 \text{ cm}^6$ $Q_y = -5135 \text{ cm}^5$ $R_e = 3,505 \times 10^5 \text{ cm}^6$ $y_e = I_{yz} = Q_z = Q_\omega = 0$

assinaladas no próprio esquema estrutural da figura IV.18.

Conforme focalizado por BRUSH e ALMROTH (1975), entre outros, nos

problemas de estabilidade elástica onde ocorre bifurcação do equilíbrio, como é o caso deste exemplo, pode-se obter a carga de bifurcação (carga crítica) por meio de equações diferenciais lineares, as quais entretanto não trazem nenhuma informação sobre o comportamento pós-crítico. Tais equações podem ser instituídas a partir da chamada técnica da perturbação, aplicada diretamente às equações diferenciais não lineares que governam o problema, ou então mediante enfoque variacional, com base na segunda variação da energia potencial total, de acordo com o denominado critério de Trefftz para perda de estabilidade.

Em se tratando do presente problema, ambos os modelos de flexo-torção desenvolvidos no capítulo II levam às mesmas equações diferenciais lineares para obtenção da carga crítica, a saber,

$$EI_z v''' + P(v' + z_e \varphi') = 0 \quad (\text{IV.19.a})$$

$$EI_y w''' + Pw' = 0 \quad (\text{IV.19.b})$$

$$EI_\omega \varphi''' - \left(GJ_T - \frac{P}{A} I_e \right) \varphi' + Pz_e v' = 0 \quad (\text{IV.19.c})$$

as quais devem atender às seguintes condições de contorno:

$$v(0) = w(0) = \varphi(0) = \varphi'(0) = v''(L) = w''(L) = \varphi''(L) = 0 \quad (\text{IV.20})$$

A resolução desse sistema de equações diferenciais permite então estabelecer para a carga crítica o menor entre os três valores que se seguem:

$$P_{CR}^{(1)} = \frac{\pi^2 EI_y}{4L^2} \quad (\text{IV.21})$$

que corresponde à flambagem exclusivamente por flexão no plano xz , e

$$\left. \begin{matrix} P_{CR}^{(2)} \\ P_{CR}^{(3)} \end{matrix} \right\} = \frac{I}{2 \left(I - z_e^2 \frac{A}{I_e} \right)} \left[P_z + P_\varphi \pm \sqrt{(P_z + P_\varphi)^2 - 4P_z P_\varphi \left(I - z_e^2 \frac{A}{I_e} \right)} \right] \quad (\text{IV.22})$$

associados à flambagem por flexo-torção, sendo P_z e P_φ definidos por:

$$P_z = \frac{\pi^2 EI_z}{4L^2} \quad (\text{IV.23.a})$$

$$P_\varphi = \left[\frac{\pi^2 EI_\omega}{4L^2} + GJ_t \right] \frac{A}{I_e} \quad (\text{IV.23.b})$$

A partir dos dados relacionados na tabela IV.9, conclui-se que, para o presente exemplo, ocorre efetivamente flambagem por flexo-torção, com $P_{CR} = P_{CR}^{(3)} = 94,96 \text{ kN}$.

Passa-se em seguida à abordagem numérica do problema, visando obter as respectivas estimativas para a carga crítica a partir dos programas ATT e POL. Inicialmente, no esquema estrutural da figura IV.18, supõe-se agora atuando em $x = L$, além da força axial P , uma pequena força perturbadora transversal $\bar{F}_{yL} = F$, suposta passando pelo centro de cisalhamento da seção, introduzida tão somente para induzir o processo de flexo-torção na barra (note-se que, se fosse o caso de uma análise linear, o sistema de cargas assim constituído não produziria torção na barra). Admite-se como parâmetro representativo da resposta estrutural o ângulo de torção $\varphi(L)$, obtido para diversos valores da carga axial P , sendo apresentadas graficamente nas figuras IV.19 e IV.20 as correspondentes respostas P versus $\varphi(L)$ dos programas para duas intensidades da força perturbadora transversal, a saber, $F = 0,01 \text{ kN}$ e $F = 0,0001 \text{ kN}$. Observe-se que, tanto na figura IV.19 como na figura IV.20, as curvas traçadas tendem a se confundir à medida que o ângulo de torção cresce, evidenciando-se também dos gráficos que os valores acima estabelecidos para a força perturbadora permitiram captar com clareza, nas análises numéricas, a presença da carga crítica de flexo-torção, como também possibilitaram uma estimativa suficientemente precisa para a mesma. A propósito, cabe ressaltar que, para conseguir obter os trechos quase horizontais das respostas do programa ATT (figura IV.19) e, no caso do programa POL, os pontos limites e a própria continuidade da resposta (o subsequente ramo descendente, conforme se visualiza na figura IV.20), foi necessário recorrer à técnica do GDCM (ver item III.7.1). Visando facilitar a determinação da carga crítica, foram construídos dois novos gráficos, com ampliação de escala, a partir das respostas obtidas por ambos os programas para a força perturbadora $F = 0,0001 \text{ kN}$, mais focados agora apenas na

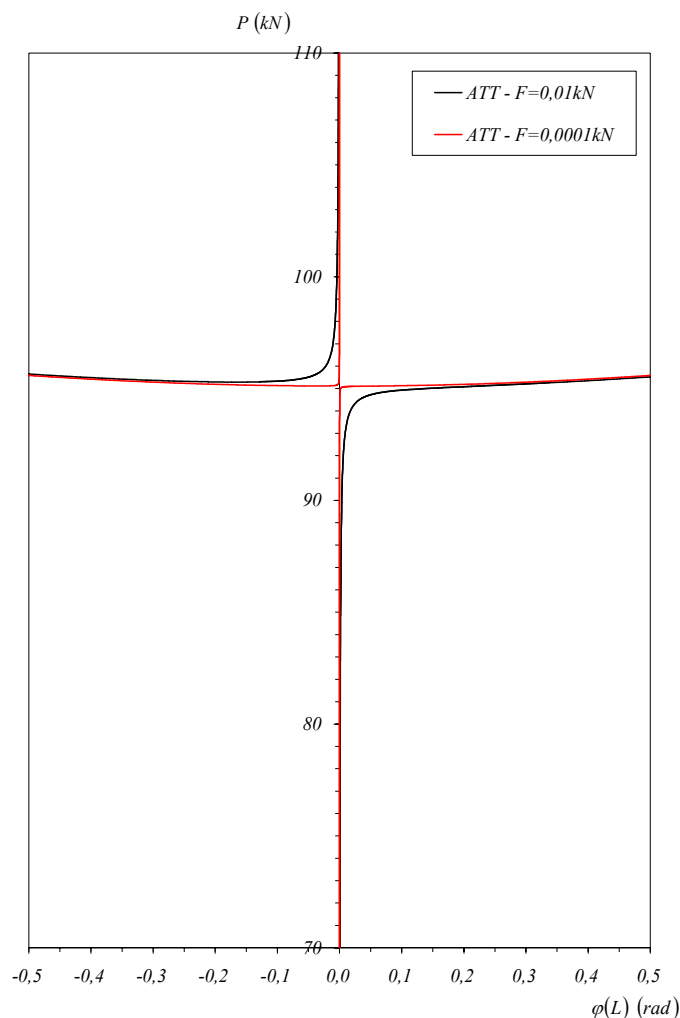


Figura IV.19 - Curvas P versus $\varphi(L)$ obtidas com o programa ATT para dois níveis da força perturbadora F

região próxima à carga crítica, conforme mostra a figura IV.21 (onde também, para melhor visualizar o caminho pós crítico, o ramo esquerdo das curvas foi traçado invertendo-se o sinal para $\varphi(L)$). Pode-se assim, por interpolação visual, obter para ambos os programas a mesma estimativa para a carga crítica, $P_{CR} = 95,1 \text{ kN}$, a qual corresponde a uma diferença percentual de apenas $0,15\%$ com respeito ao resultado analítico de $94,96 \text{ kN}$.

Quanto ao comportamento pós-crítico (cabendo salientar que a trajetória pós-crítica, ou seja, a que corresponderia a $F = 0$, apresenta evidentemente uma extensão simétrica em relação ao eixo vertical), o aspecto das curvas na figura IV.21 indica que,

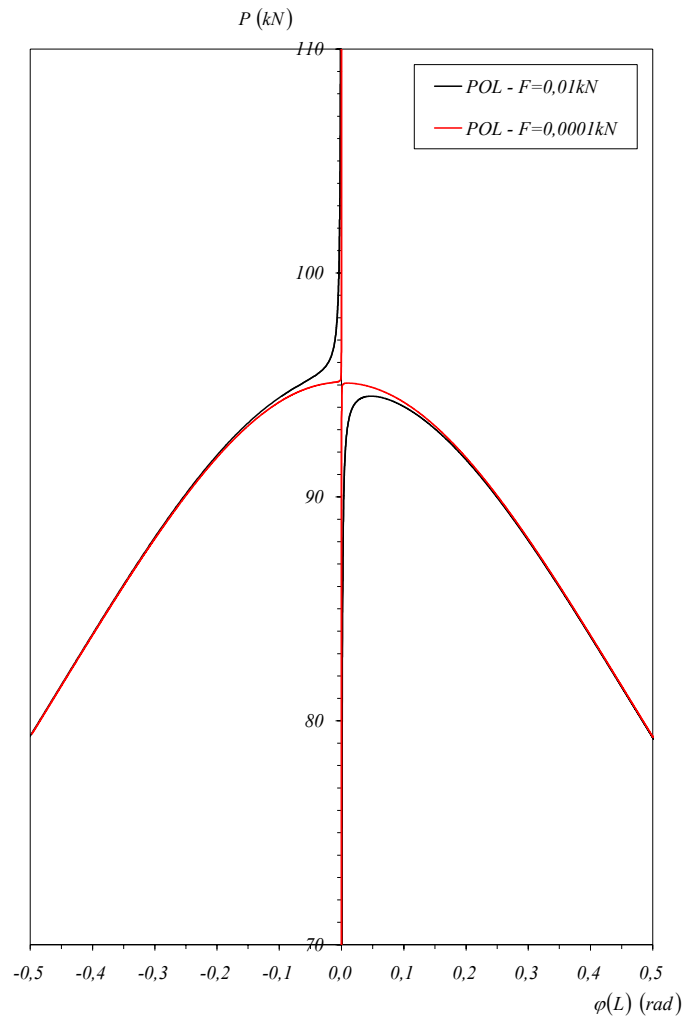


Figura IV.20 - Curvas P versus $\varphi(L)$ obtidas com o programa POL para dois níveis da força perturbadora F

enquanto a formulação de Attard, através do programa ATT, prevê ganho progressivo de rigidez (caminho estável de equilíbrio), caracterizando assim o comportamento da peça como não sensível a imperfeições iniciais, o modelo de Polillo, Garcia e Villaça, com o programa POL, prevê perda acentuada de rigidez, traduzindo portanto um caminho instável de equilíbrio, e conseqüentemente sensibilidade a imperfeições iniciais. Manifestam-se, pois, fortemente na presente situação as limitações inerentes ao modelo de Polillo, Garcia e Villaça. Essa falha de previsão no tipo de comportamento pós-crítico por parte desse modelo deve-se, em grande parte, à influência do termo $z_e w' \varphi' \text{sen} \varphi$, contido na expressão (II.33.a) da componente de deformação ε_x relativa

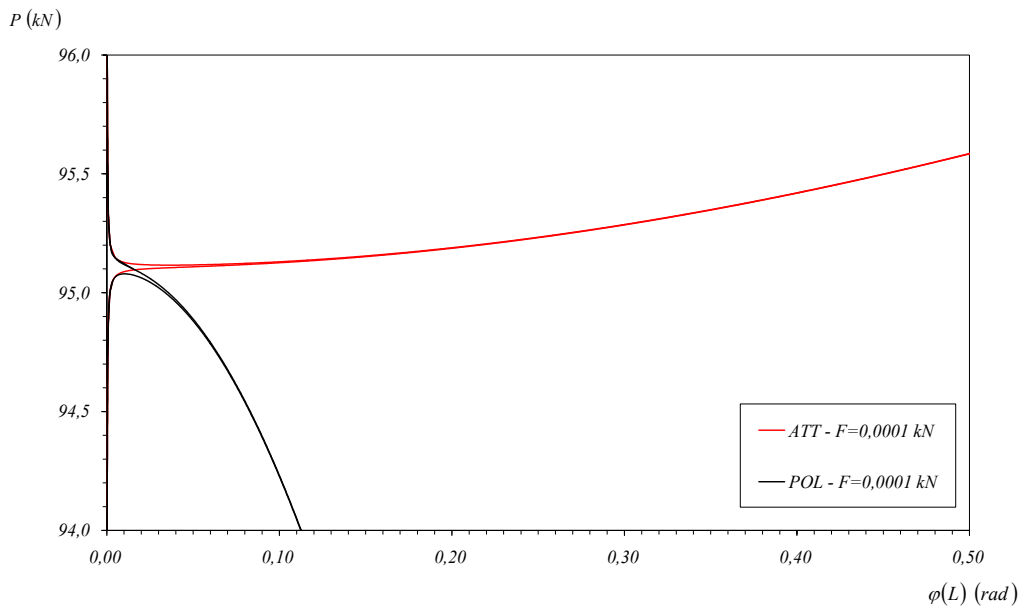


Figura IV.21 - Curvas P versus $\varphi(L)$ obtidas com os programas ATT e POL, para $F = 0,0001 \text{ kN}$

ao modelo de Attard, o qual, em função das aproximações efetuadas, acha-se ausente na correspondente expressão (II.66.a) referente ao modelo de Polillo, Garcia e Villaça (onde, se fosse o caso, apareceria sob a forma simplificada $z_e w' \varphi' \varphi$).

Em conclusão, os estudos realizados mostraram que ambos os programas, ATT e POL, foram plenamente eficientes na determinação da carga crítica de flexo-torção para o presente problema, mas somente o modelo de Attard foi capaz de prever corretamente o comportamento pós-crítico da coluna.

IV.5 EXEMPLO 5: FLAMBAGEM LATERAL DE VIGA DE SEÇÃO “I”

Como quinto exemplo de aplicação, aborda-se um outro caso clássico de flambagem por flexo-torção, mais especificamente o problema de flambagem lateral de uma viga bi-apoiada, de seção “I”, de aço, submetida à ação de momentos de flexão agindo nas seções extremas, $\bar{M}_{z_0} = \bar{M}_{z_L} = M$, conforme mostra o esquema estrutural

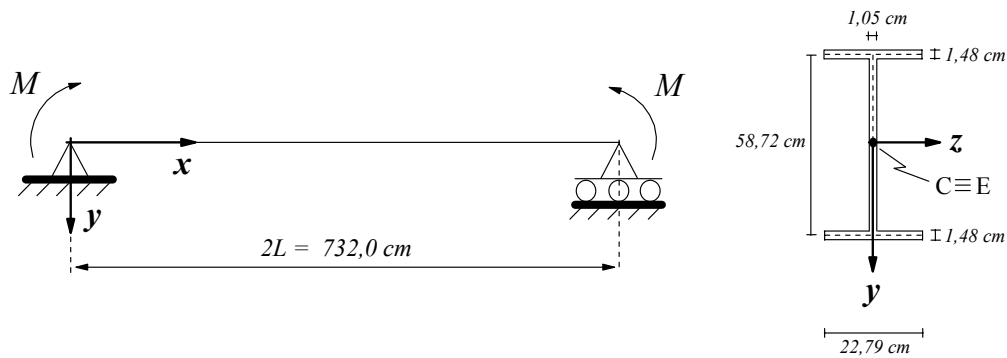


Figura IV.22 - Esquema estrutural do exemplo 5

da figura IV.22, extraído de BRUSH e ALMROTH (1975). Tal como visto para o quarto exemplo, pretende-se também aqui comparar o desempenho dos modelos de Attard e de Polillo, Garcia e Villaça, através dos programas ATT e POL, tanto no que diz respeito à determinação da carga crítica, quanto do comportamento pós-crítico da barra.

As propriedades do material e da seção transversal da viga, a serem consideradas nas análises subseqüentes, acham-se explicitadas na tabela IV.10.

O momento crítico para o presente problema, em termos de solução analítica, é obtido a partir da seguinte equação diferencial linear (decorrente do uso de qualquer das duas técnicas já citadas no exemplo anterior):

$$EI_{\omega} \varphi^{IV} - GJ_T \varphi'' - \frac{kM^2 \varphi}{EI_y} = 0 \quad (\text{IV.24})$$

com as condições de contorno

$$\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(2L) = \varphi''(2L) = 0 \quad (\text{IV.25})$$

O coeficiente k , que traduz a influência da curvatura inicial de flexão (pré-crítica), difere no entanto em função do tipo de modelo tratado no capítulo II, sendo, no caso do de Attard, dado por

Tabela IV.10 – Propriedades do material e da seção transversal

PROPRIEDADES DO MATERIAL	$E = 21000 \text{ kN/cm}^2$ $G = 8077 \text{ kN/cm}^2$
PROPRIEDADES DA SEÇÃO TRANSVERSAL	$A = 129,1 \text{ cm}^2$ $I_y = 2920 \text{ cm}^4$ $I_z = 7,587 \times 10^4 \text{ cm}^4$ $I_e = 7,879 \times 10^4 \text{ cm}^4$ $J_t = 71,91 \text{ cm}^4$ $I_\omega = 2,517 \times 10^6 \text{ cm}^6$ $R_e = 6,455 \times 10^7 \text{ cm}^6$ $y_e = z_e = I_{yz} = Q_y = Q_z = Q_\omega = 0$

$$k = I - \frac{I_y}{I_z} \quad (\text{IV.26})$$

e, para o de Polillo, Garcia e Villaça, igual a

$$k = I - 2 \frac{I_y}{I_z} \quad (\text{IV.27})$$

A resolução da equação diferencial (IV.24), obedecidas as condições de contorno (IV.25), fornece então para o momento crítico a expressão:

$$M_{CR} = \frac{I}{\sqrt{k}} \sqrt{\frac{\pi^4 EI_\omega EI_y}{16L^4} + \frac{\pi^2 GJ_t EI_y}{4L^2}} \quad (\text{IV.28})$$

observando-se, pelas fórmulas (IV.26) e (IV.27), que o modelo de Polillo, Garcia e

Villaça conduz a um valor para a carga crítica sempre superior à prevista pelo modelo de Attard. Evidentemente, sendo $I_y \ll I_z$, e portanto $k \rightarrow 1$, tal diferença se torna irrelevante, ficando entretanto cada vez mais significativa com o crescimento da relação I_y/I_z . Note-se inclusive a forte discordância existente entre os dois modelos para o valor limite $k = 0$, correspondente a $M_{CR} = \infty$, que é atingido com $I_y/I_z = 1$, de acordo com o modelo de Attard, e, segundo o de Polillo, Garcia e Villaça, para $I_y/I_z = 0,5$.

Com os dados do problema, obtém-se, para o modelo de Attard, o coeficiente $k = 0,962$ e, para o momento crítico, $M_{CR} = 42,73 \times 10^3 \text{ kNcm}$. Por sua vez, para o modelo de Polillo, Garcia e Villaça, encontra-se $k = 0,923$ e $M_{CR} = 43,61 \times 10^3 \text{ kNcm}$, correspondendo portanto a uma estimativa cerca de 2% superior à do modelo de Attard.

Focalizando-se em seguida o tratamento numérico pelo mdfe, com base nos programas ATT e POL, apresenta-se inicialmente o esquema estrutural de meia-barras utilizado nas análises, conforme figura IV.23, que inclui a presença de um momento perturbador de torção, T_0 , destinado a induzir o processo de flexo-torção na barra. As condições de contorno cinemáticas para o problema acham-se também indicadas nessa mesma figura.

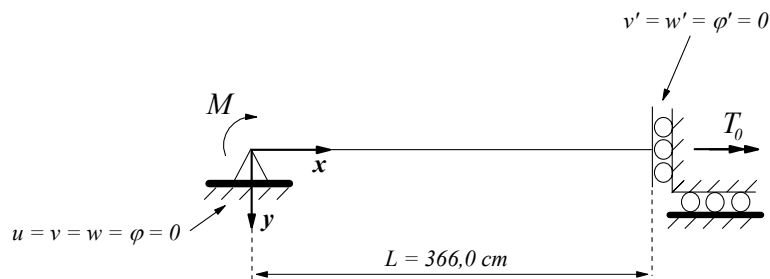


Figura IV.23 - Esquema estrutural de meia-barras para a análise numérica

Adota-se como parâmetro representativo da resposta estrutural o ângulo de torção $\phi(L)$, obtido para valores crescentes do momento M , sendo então, para cada um dos modelos aqui estudados, gerados gráficos M versus $\phi(L)$ para duas intensidades do momento de

perturbação, a saber, $T_0 = 10,0 \text{ kNcm}$ e $T_0 = 0,1 \text{ kNcm}$, conforme pode ser visto nas figuras IV.24 e IV.25. Em cada figura, as respectivas curvas, tal como no exemplo anterior, tendem a se confundir com o aumento do ângulo de torção, havendo também aqui a necessidade do uso da técnica do GDCM, face às habituais dificuldades enfrentadas pelo processo de Newton-Raphson nesse tipo de análise.

Recorrendo-se ao mesmo procedimento anterior, para facilitar a determinação da carga crítica foi construída a figura IV.26, onde estão reunidas as curvas obtidas com os dois programas para o menor momento de perturbação, $T_0 = 0,1 \text{ kNcm}$, numa escala ampliada e privilegiando as imediações da carga crítica (note-se que, uma vez mais, o ramo negativo de ambas as curvas originais tiveram o sinal de $\varphi(L)$ invertido). Por interpolação visual, obtém-se então, no caso do programa ATT, o valor aproximado para a carga crítica $M_{CR} = 42,65 \times 10^3 \text{ kNcm}$, o qual representa uma diferença percentual de apenas $-0,19\%$ relativamente à solução analítica, expressa por (IV.28) e (IV.26); já no caso do programa POL, pode-se fazer a estimativa $M_{CR} = 43,55 \times 10^3 \text{ kNcm}$, com uma diferença percentual de somente $-0,14\%$ em relação à correspondente solução analítica expressa por (IV.28) e (IV.27). Evidencia-se, assim, em ambos os casos, a excelente qualidade das respostas obtidas pelo mdfe para o momento crítico, notando-se que fica mantida entre os dois valores encontrados a mesma diferença percentual de aproximadamente 2% já verificada entre as respectivas previsões analíticas.

Quanto ao comportamento pós-crítico (ou seja, a trajetória de equilíbrio para $T_0 = 0$, após ser atingida a carga crítica), pode-se dizer, com o auxílio da figura IV.26, que ambos os modelos de flexo-torção aqui estudados, diferentemente do ocorrido no exemplo anterior, conduziram a trajetórias de equilíbrio com ganho de rigidez, indicando portanto para a peça um comportamento não sensível a imperfeições iniciais. Porém, deve ser observado que o modelo de Polillo, Garcia e Villaça determinou um ganho de rigidez sempre crescente em relação ao previsto pelo modelo de Attard, aspecto este, tal como a própria distinção de valores para M_{CR} , exclusivamente ligado às aproximações no seno e no co-seno do ângulo de torção envolvidas na expressão (II.66.a) de ε_x para aquele primeiro modelo, aproximações essas cujos reflexos se fazem sentir também na variação $\delta\varepsilon_x$. Com efeito, sendo $y_e = z_e = 0$ no presente problema, a relação deformação-deslocamento (II.66.a) torna-se exatamente caso

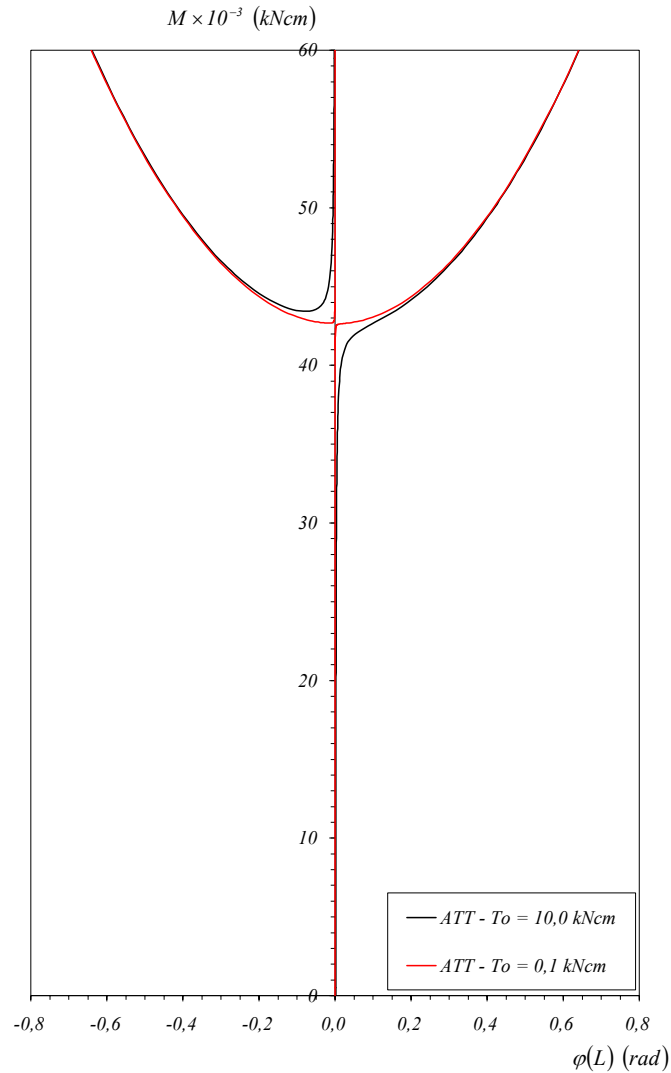


Figura IV.24 - Curvas M versus $\varphi(L)$ obtidas como o programa ATT para dois níveis do momento perturbador T_0

particular (para $\cos \varphi \cong 1$ e $\sin \varphi \cong \varphi$) da expressão (II.33.a) do modelo de Attard, não existindo assim nenhum termo contido nesta última que não tenha o seu correspondente na primeira. Entretanto, ao ser considerada a variação $\delta \varepsilon_x$, fazem-se presentes no modelo de Attard dois termos adicionais em relação ao modelo de Polillo, Garcia e Villaça ($\hat{y}v'' \sin \varphi \delta \varphi$ e $\hat{z}w'' \sin \varphi \delta \varphi$), surgidos em decorrência da variação $\delta(\cos \varphi)$.

Fazendo uma síntese dos resultados alcançados neste exemplo, pode-se dizer que, pela consideração da curvatura pré-crítica da peça, os modelos de flexo-torção aqui estudados determinam momentos críticos distintos para o problema, os quais, como

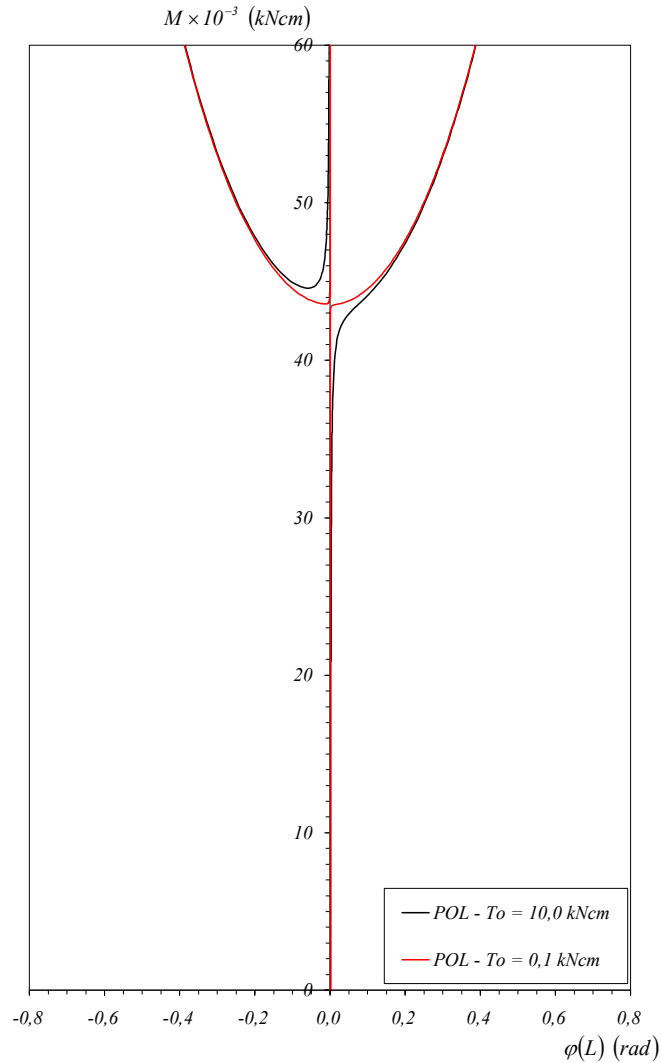


Figura IV.25 - Curvas M versus $\varphi(L)$ obtidas como o programa POL para dois níveis do momento perturbador T_0

indicado pelo tratamento analítico, afastam-se progressivamente à medida que cresce a relação I_y/I_z , sendo o oriundo do modelo de Polillo, Garcia e Villaça sempre superior ao fornecido pelo modelo de Attard (cerca de de 2% maior para os dados do presente exemplo). Por sua vez, as análises numéricas efetuadas com os programas ATT e POL concordaram plenamente com as previsões analíticas para o momento crítico e, quanto à trajetória pós-crítica, embora qualitativamente ambos os programas tenham detectado o mesmo tipo de comportamento para a haste, não sensível a imperfeições iniciais, as limitações do modelo de Polillo, Garcia e Villaça, como seria de esperar, levaram a resultados que foram cada vez mais divergindo dos gerados pelo modelo de Attard.

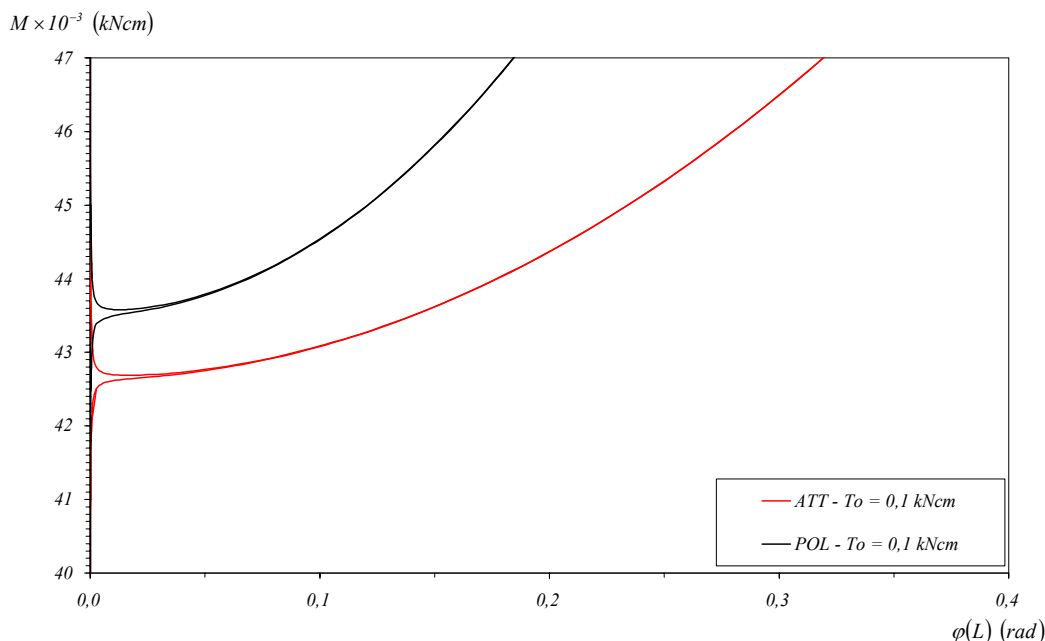


Figura IV.26 - Curvas M versus $\varphi(L)$ obtidas com os programas ATT e POL, para $T_0 = 0,1 \text{ kNcm}$

IV.6 EXEMPLO 6: ESTABILIDADE DE VIGA DE SEÇÃO CANTONEIRA SUBMETIDA A FLEXO-TORÇÃO

O presente exemplo foi apresentado por ENGEL e GOODIER (1953), tendo sido analisado posteriormente por ATTARD (1984), e também por ATTARD e SOMERVILLE (1987), cabendo entretanto salientar que, neste último trabalho, há apenas uma síntese das análises feitas no trabalho anterior de Attard. Trata-se de uma haste delgada de alumínio, bi-apoiada, de seção cantoneira de abas iguais, com abertura de 90° entre as abas, submetida à ação conjunta de momentos de flexão nas seções de extremidade, $\bar{M}_{y0} = \bar{M}_{yL} = M$, e um momento de torção T_0 na seção central, tal como mostra o esquema estrutural representado na figura IV.27.

Em ATTARD (1984), tal como ocorrido para o exemplo 3, foram geradas soluções numéricas para o presente problema, estabelecidas através do já citado programa computacional segundo o mef desenvolvido por esse mesmo autor, em correspondência ao seu modelo de flexo-torção, as quais foram confrontadas com resultados experimentais apresentados por ENGEL e GOODIER (1953). Com base

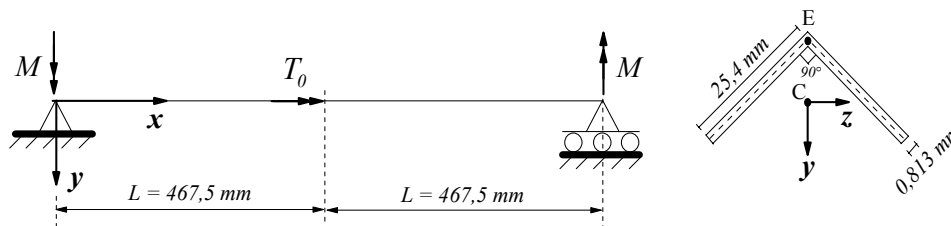


Figura IV.27 – Esquema estrutural do Exemplo 6

nessas informações, tem-se por objetivo, além de comparar entre si as respostas para o problema obtidas através dos programas ATT e POL, também confrontá-las com os resultados numéricos de ATTARD (1984) e os experimentais de ENGEL e GOODIER (1953).

As propriedades do material e da seção transversal da barra, requeridas nas análises, acham-se presentes na tabela IV.11, ao passo que, na figura IV.28, pode-se observar o esquema estrutural de meia-barra (onde são também indicadas as condições de contorno cinemáticas, e notando-se que o carregamento é agora definido por $\bar{M}_{y0} = M$ e $\bar{M}_{zL} = -\frac{T_0}{2}$) efetivamente utilizado, em razão da simetria do problema, nas análises efetuadas com os programas ATT e POL.

Passando em seguida aos resultados para o problema, disponibilizam-se inicialmente, nas tabelas IV.12.a a IV.12.g, as respostas numéricas T_0 versus $\varphi(L)$ (observe-se que T_0 assume também valores negativos, isto é, passa a ter sentido de atuação contrário ao representado na figura IV.27) para sete intensidades crescentes do momento de flexão M (desde 0 até 11006 Nmm), tanto as relativas ao programa de elementos finitos de Attard (sendo utilizada uma discretização em 8 elementos para a barra inteira), como as oriundas do mdfe, correspondentes aos programas ATT e POL. Essas mesmas respostas encontram-se também representadas graficamente nas figuras IV.29.a a IV.29.g, agora acompanhadas dos resultados experimentais de ENGEL e GOODIER (1953).

A análise dos resultados numéricos permite de imediato concluir que, para os dois primeiros níveis do momento de flexão, $M = 0$ e $M = 2441$ Nmm, há uma excelente concordância entre as respostas obtidas por todos os três programas. Em particular, para o momento M nulo (tabela IV.12.a e figura IV.29.a), correspondendo

Tabela IV.11 – Propriedades do material e da seção transversal

PROPRIEDADES DO MATERIAL	$E = 59920 \text{ MPa}$ $G = 26480 \text{ MPa}$
PROPRIEDADES DA SEÇÃO TRANSVERSAL	$y_e = -8,980 \text{ mm}$ $A = 41,30 \text{ mm}^2$ $I_y = 4441 \text{ mm}^4$ $I_z = 1110 \text{ mm}^4$ $I_e = 8882 \text{ mm}^4$ $J_t = 9,099 \text{ mm}^4$ $Q_z = 3,988 \times 10^4 \text{ mm}^5$ $R_e = 3,438 \times 10^6 \text{ mm}^6$ $z_e = \omega = I_{yz} = I_\omega = Q_\omega = Q_y = 0$

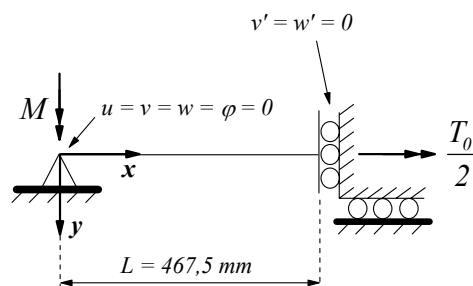


Figura IV.28 – Esquema estrutural de meia-barras para a análise numérica pelos programas ATT e POL

ao caso de torção uniforme ($\varphi' = \text{constante}$) na meia-barras da figura IV.28, nota-se que os programas ATT e POL, tal como no exemplo 3, conduziram à solução “exata” para o

Tabela IV.12.a – Respostas T_0 versus $\varphi(L)$, para $M = 0$

T_0 (Nmm)	$\varphi(L)$ (rad)	
	ATTARD (1984) (mef)	ATT / POL (mdfe)
-226,00	-0,212	-0,219
-197,75	-0,186	-0,191
-169,50	-0,159	-0,164
-141,25	-0,133	-0,137
-113,00	-0,106	-0,110
-84,75	-0,0798	-0,0822
-56,5	-0,0532	-0,0548
-28,25	-0,0266	-0,0274
28,25	0,0266	0,0274
56,50	0,0532	0,0548
84,75	0,0798	0,0822
113,00	0,106	0,110
141,25	0,133	0,137
169,50	0,159	0,164
197,75	0,186	0,191
226,00	0,212	0,219

Tabela IV.12.b – Resultados T_0 versus $\varphi(L)$, para $M = 2441 \text{ Nmm}$

T_0 (Nmm)	$\varphi(L)$ (rad)		
	ATTARD (1984) (mef)	ATT (mdfe)	POL (mdfe)
-282,50	-0,252	-0,260	-0,256
-254,25	-0,229	-0,236	-0,234
-226,00	-0,205	-0,211	-0,210
-197,75	-0,180	-0,186	-0,185
-169,50	-0,156	-0,161	-0,159
-141,25	-0,131	-0,135	-0,134
-113,00	-0,105	-0,109	-0,108
-84,75	-0,0797	-0,0820	-0,0815
-56,50	-0,0535	-0,0551	-0,0547
-28,25	-0,0270	-0,0278	-0,0276
28,25	0,0274	0,0282	0,0280
56,50	0,0552	0,0568	0,0564
84,75	0,0834	0,0859	0,0853
113,00	0,112	0,116	0,115
141,25	0,141	0,146	0,144
169,50	0,171	0,176	0,174
197,75	0,202	0,207	0,205
226,00	0,233	0,239	0,236

Tabela IV.12.c – Resultados T_0 versus $\varphi(L)$, para $M = 4893 \text{ Nmm}$

T_0 (Nmm)	$\varphi(L)$ (rad)		
	ATTARD (1984) (mef)	ATT (mdfe)	POL (mdfe)
-226,00	-0,206	-0,212	-0,207
-197,75	-0,183	-0,188	-0,183
-169,50	-0,159	-0,163	-0,159
-141,25	-0,134	-0,138	-0,134
-113,00	-0,109	-0,112	-0,109
-84,75	-0,0829	-0,0854	-0,0830
-56,50	-0,0562	-0,0578	-0,0562
-28,25	-0,0285	-0,0294	-0,0285
28,25	0,0297	0,0304	0,0295
56,50	0,0604	0,0620	0,0600
84,75	0,0924	0,0949	0,0916
113,00	0,126	0,129	0,124
141,25	0,161	0,165	0,158
169,50	0,200	0,203	0,193
197,75	0,242	0,242	0,230
226,00	0,293	0,284	0,267

Tabela IV.12.d – Resultados T_0 versus $\varphi(L)$, para $M = 7345 \text{ Nmm}$

T_0 (Nmm)	$\varphi(L)$ (rad)		
	ATTARD (1984) (mef)	ATT (mdfe)	POL (mdfe)
-226,00	-0,215	-0,222	-0,208
-197,75	-0,192	-0,198	-0,186
-169,50	-0,168	-0,173	-0,163
-141,25	-0,143	-0,148	-0,138
-113,00	-0,117	-0,121	-0,113
-84,75	-0,0903	-0,0932	-0,0869
-56,50	-0,0618	-0,0638	-0,0594
-28,25	-0,0317	-0,0329	-0,0305
28,25	0,0345	0,0351	0,0323
56,50	0,0715	0,0730	0,0666
84,75	0,112	0,114	0,103
113,00	0,159	0,160	0,142
141,25	0,219	0,212	0,184
148,8	0,241	-	-
154,3	0,261	-	-
157,9	0,280	-	-
159,5	0,298	-	-
159,4	0,315	-	-
157,5	0,331	-	-
153,9	0,346	-	-
148,6	0,361	-	-
141,7	0,374	-	-
133,3	0,387	-	-
123,3	0,399	-	-

Tabela IV.12.e – Resultados T_0 versus $\varphi(L)$, para $M = 8565 \text{ Nmm}$

T_0 (Nmm)	$\varphi(L)$ (rad)		
	ATTARD (1984) (mef)	ATT (mdfe)	POL (mdfe)
-226,00	-0,223	-0,230	-0,211
-197,75	-0,200	-0,207	-0,189
-169,50	-0,176	-0,182	-0,166
-141,25	-0,151	-0,156	-0,142
-113,00	-0,124	-0,128	-0,117
-84,75	-0,0961	-0,0994	-0,0900
-56,5	-0,0662	-0,0687	-0,0619
-28,25	-0,0342	-0,0357	-0,0320
28,25	0,0388	0,0392	0,0344
56,50	0,0819	0,0829	0,0718
84,75	0,133	0,133	0,112
113,00	0,208	0,194	0,157
117,5	0,228	-	-
120,1	0,247	-	-
121,0	0,265	-	-
120,2	0,282	-	-
117,8	0,298	-	-
113,7	0,313	-	-
108,1	0,328	-	-
100,9	0,341	-	-
92,22	0,354	-	-
82,06	0,366	-	-
70,46	0,377	-	-

Tabela IV.12.f – Resultados T_0 versus $\varphi(L)$, para $M = 9786 \text{ Nmm}$

T_0 (Nmm)	$\varphi(L)$ (rad)		
	ATTARD (1984) (mef)	ATT (mdfe)	POL (mdfe)
-226,00	-0,233	-0,242	-0,215
-197,75	-0,210	-0,218	-0,193
-169,50	-0,186	-0,193	-0,170
-141,25	-0,160	-0,166	-0,146
-113,00	-0,133	-0,138	-0,121
-84,75	-0,104	-0,108	-0,0939
-56,50	-0,0722	-0,0754	-0,0651
-28,25	-0,0377	-0,0397	-0,0339
28,25	0,0455	0,0455	0,0374
56,50	0,101	0,100	0,0790
84,75	0,196	0,172	0,126
86,34	0,215	-	-
86,32	0,232	-	-
84,74	0,249	-	-
81,61	0,265	-	-
79,96	0,280	-	-
70,84	0,295	-	-
63,25	0,308	-	-
54,23	0,321	-	-
43,81	0,332	-	-
32,00	0,343	-	-
18,83	0,353	-	-

Tabela IV.12.g – Resultados T_0 versus $\varphi(L)$, para $M = 11006 \text{ Nmm}$

T_0 (Nmm)	$\varphi(L)$ (rad)		
	ATTARD (1984) (mef)	ATT (mdfe)	POL (mdfe)
-226,00	-0,245	-0,256	-0,219
-197,75	-0,222	-0,232	-0,198
-169,50	-0,198	-0,207	-0,176
-141,25	-0,172	-0,180	-0,152
-113,00	-0,144	-0,151	-0,126
-84,75	-0,114	-0,120	-0,0989
-56,5	-0,0844	-0,0849	-0,0692
-28,25	-0,0426	-0,0457	-0,0365
28,25	0,0577	0,0570	0,0415
37,07	0,0801	-	-
44,14	0,101	-	-
49,56	0,122	-	-
53,39	0,142	-	-
55,69	0,161	-	-
56,48	0,179	-	-
55,81	0,196	-	-
53,68	0,213	-	-
50,13	0,229	-	-
45,17	0,243	-	-
38,81	0,258	-	-

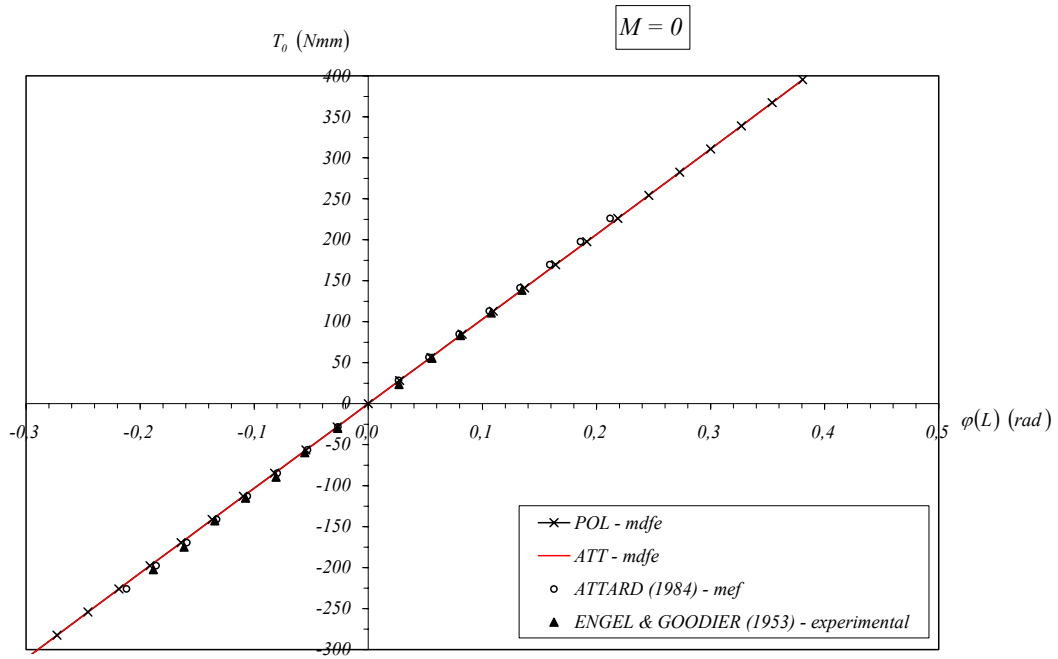


Figura IV.29.a – Resultados teóricos e experimentais T_0 versus $\phi(L)$, para $M = 0$

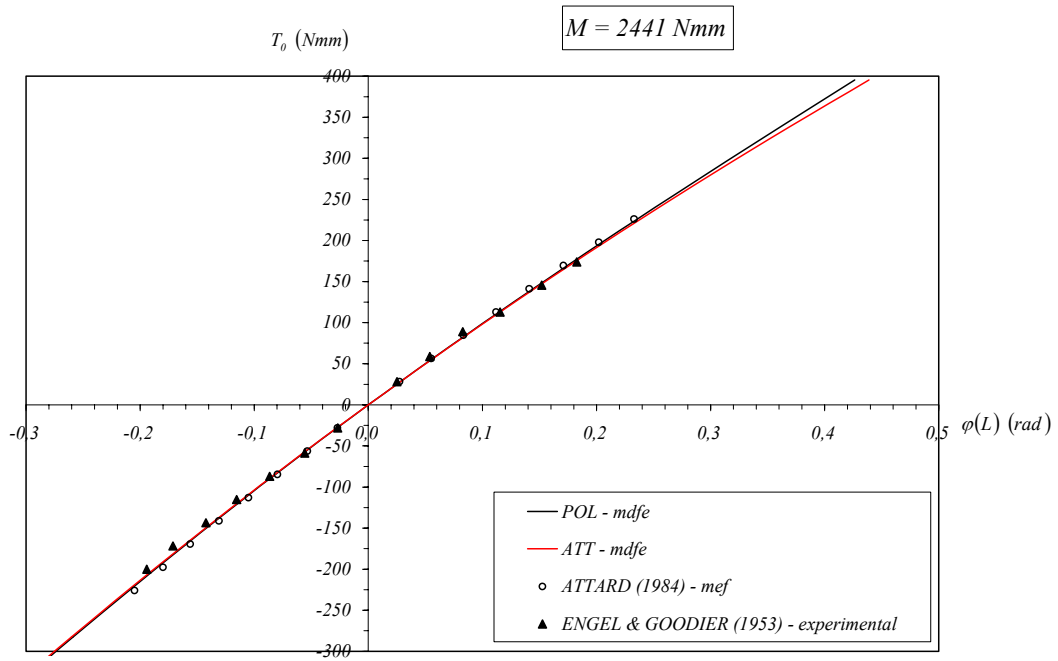


Figura IV.29.b – Resultados teóricos e experimentais T_0 versus $\phi(L)$, para $M = 2441 \text{ Nmm}$

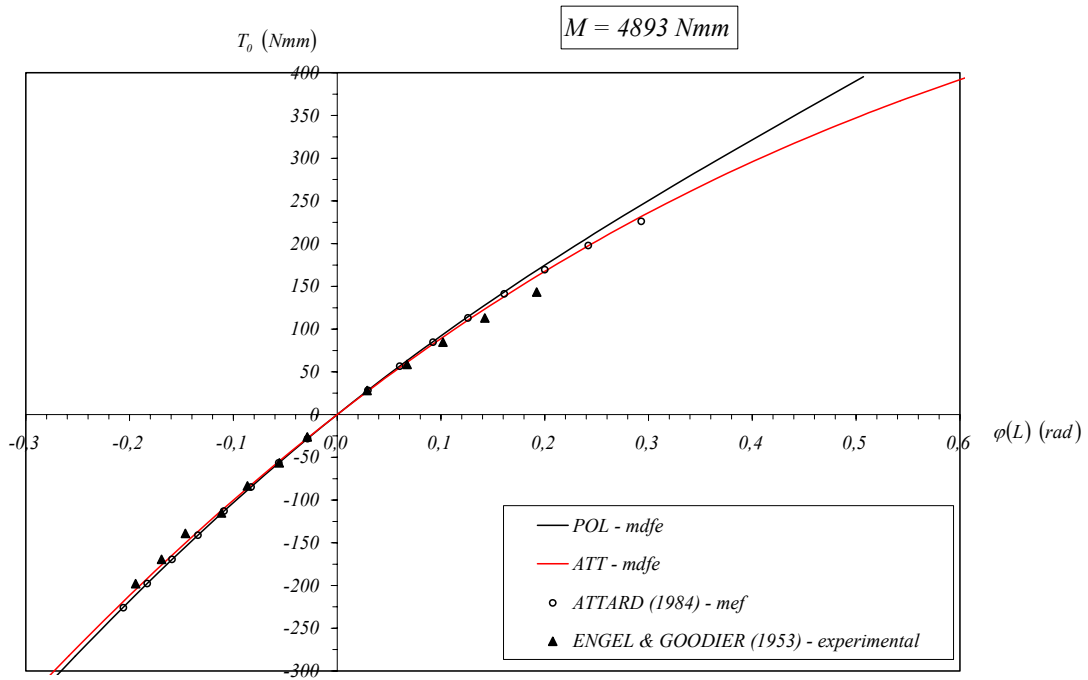


Figura IV.29.c – Resultados teóricos e experimentais T_0 versus $\varphi(L)$, para $M = 4893 \text{ Nmm}$

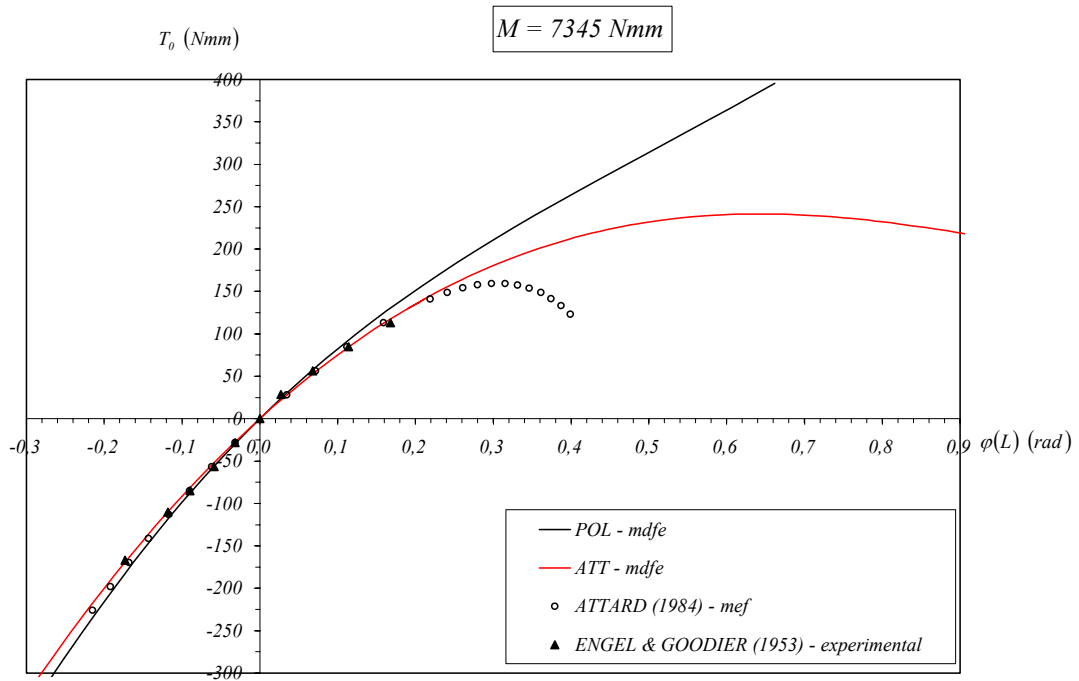


Figura IV.29.d – Resultados teóricos e experimentais T_0 versus $\varphi(L)$, para $M = 7345 \text{ Nmm}$

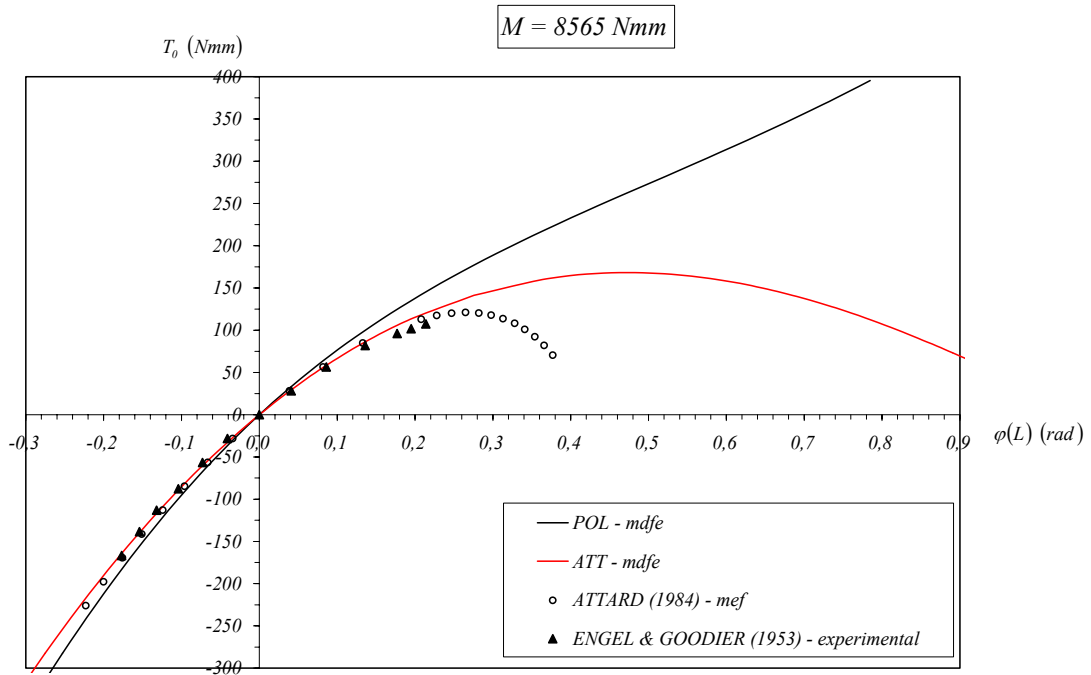


Figura IV.29.e – Resultados teóricos e experimentais T_0 versus $\varphi(L)$, para $M = 8565 \text{ Nmm}$

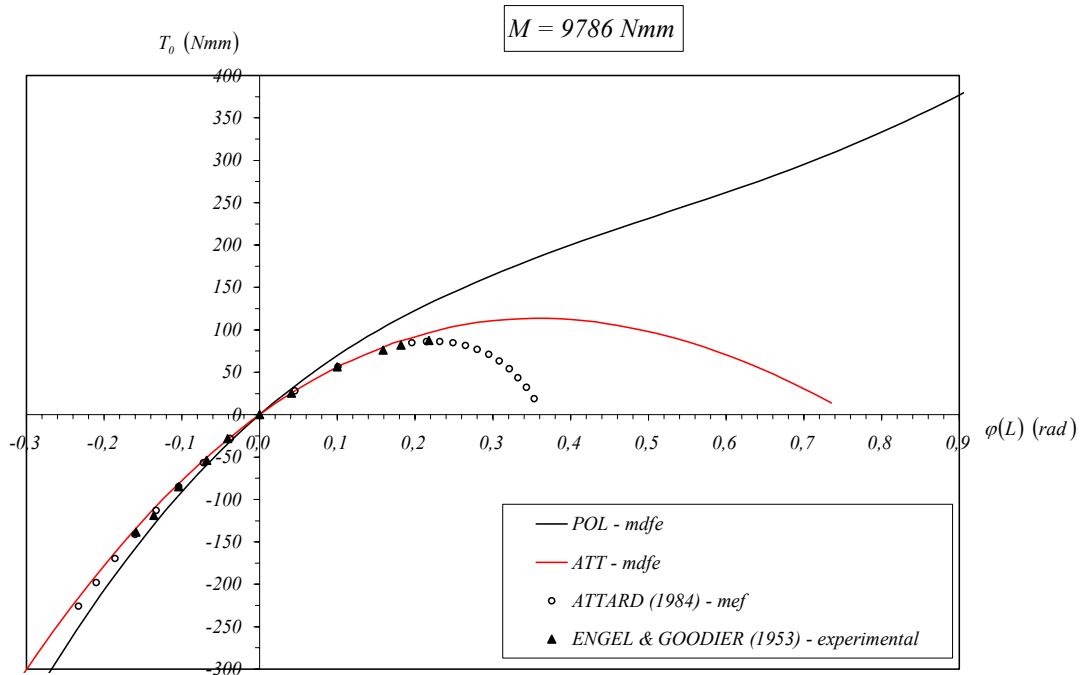


Figura IV.29.f – Resultados teóricos e experimentais T_0 versus $\varphi(L)$, para $M = 9786 \text{ Nmm}$

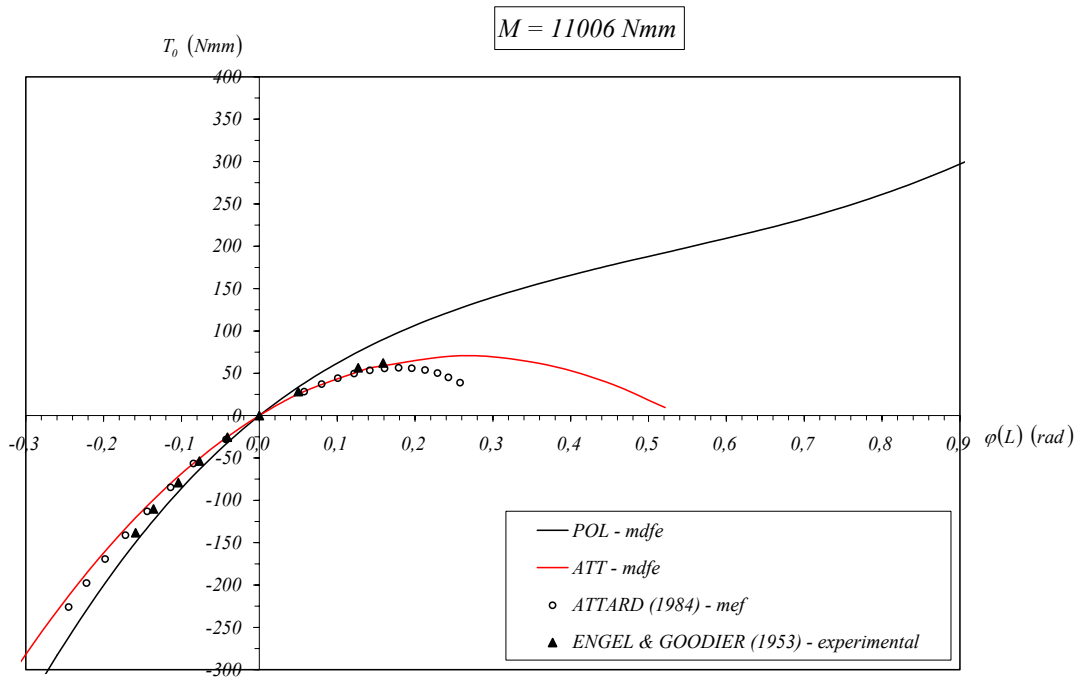


Figura IV.29.g – Resultados teóricos e experimentais T_0 versus $\varphi(L)$, para $M = 11006 \text{ Nmm}$

problema. Entretanto, diferentemente do ocorrido para aquele exemplo, o programa de elementos finitos de Attard desta feita não produziu a resposta “exata” para o ângulo de torção, conforme evidencia a tabela IV.12.a. Embora não explicitado, tal fato provavelmente deve-se à aparente utilização por parte de Attard do esquema estrutural de barra inteira na análise, para o qual, em termos de solução analítica, existe a descontinuidade de φ' no meio da barra (φ' é constante em cada meia-barra, porém troca de sinal no centro). Sendo tal derivada uma incógnita nodal no modelo de elementos finitos de Attard, deve a mesma resultar nula no centro da peça para esse esquema de análise, o que certamente afeta, em termos locais, o valor do ângulo de torção φ em relação à correspondente previsão analítica.

Para o terceiro nível do momento de flexão ($M = 4893 \text{ Nmm}$), entretanto, já se manifesta, especialmente em relação aos valores mais altos do momento positivo de torção, um certo desvio dos resultados do programa POL relativamente aos dois outros programas.

Uma vez ultrapassado esse terceiro estágio de carga, passa-se então a observar que, à medida que o momento M aumenta de valor, acentuam-se cada vez mais as

divergências entre as respostas dos três programas, em especial quando $T_0 > 0$. Focalizando inicialmente as respostas dos programas ATT e POL, notam-se, para todos os quatro últimos níveis do momento de flexão, as divergências existentes quanto ao próprio tipo de comportamento estrutural da haste. Com efeito, enquanto o primeiro programa prevê, pela presença de pontos limites nas trajetórias de equilíbrio, perda de estabilidade, o segundo conduz a trajetórias de equilíbrio sempre estáveis, conforme se depreende das correspondentes curvas plotadas nas figuras IV.29.d a IV.29.g.

Passando-se agora à comparação entre os resultados numéricos baseados no modelo de Attard (ou seja, os decorrentes do programa ATT e do próprio programa de elementos finitos de Attard), também se constata, para os quatro últimos estágios de carga, que tais resultados vão progressivamente se afastando com o aumento do momento de flexão, conforme indicam os correspondentes gráficos nas figuras IV.29.d a IV.29.g. De fato, embora haja concordância quanto ao tipo de comportamento estrutural previsto para a haste, há uma evidente discrepância quanto à localização dos pontos limites detectados por um e por outro programa nas trajetórias de equilíbrio. Pode-se dizer que o programa ATT sempre apresenta, em relação ao programa desenvolvido por Attard, pontos limites para pares ordenados $(T_0, \varphi(L))$ sempre de valores mais elevados. Como ilustração, cita-se o caso de $M = 7345 \text{ Nmm}$. Enquanto pelo programa de Attard definem-se aproximadamente para o ponto limite, com base na tabela IV.12.d, as coordenadas $(159 \text{ Nmm}, 0,31 \text{ rad})$, pelo programa ATT, conforme se extrai da figura IV.29.d, têm-se como coordenadas aproximadas $(240 \text{ Nmm}, 0,65 \text{ rad})$.

Essas discordâncias citadas no parágrafo precedente passaram a ser objeto de uma minuciosa investigação, onde, em princípio, ficaram sob suspeita as respostas do programa ATT, até porque, como se depreende das figuras IV.29.a a IV.29.g, foram os resultados oriundos do programa de Attard os que demonstraram, em termos globais, uma sintonia mais perfeita com os resultados experimentais de Engel e Goodier (ainda que uma conclusão mais definitiva exigisse que, para $T_0 > 0$, o ângulo $\varphi(L)$ atingisse valores mais altos nos ensaios, especialmente em relação aos quatro últimos gráficos). Nesse sentido, foram inicialmente avaliadas, mediante a execução de inúmeros testes com o programa ATT, as influências (isoladas ou em conjunto) da discretização da barra, dos níveis de tolerâncias adotados e, ainda, das condições de carregamento e de vinculação atribuídas ao problema. Posteriormente, levantou-se também a hipótese de

que as funções $\text{sen}\varphi$ e $\text{cos}\varphi$ poderiam ser a causa das discrepâncias (pela falta de conhecimento, até então, de como teriam sido as mesmas tratadas na formulação de elementos finitos de Attard). Foram assim realizadas aproximações nessas funções, sob a forma $\text{sen}\varphi \cong \varphi$, $\text{cos}\varphi \cong 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ e $\text{sen}\varphi \cong \varphi - \frac{\varphi^3}{6}$, $\text{cos}\varphi \cong 1 - \frac{\varphi^2}{2}$, as quais foram diretamente introduzidas nas expressões (III.7,8) e (III.13,14) de δW_{int} e δW_{ext} , respectivamente. Todavia, os correspondentes testes efetuados só vieram demonstrar que tais aproximações tendem apenas a provocar um pequeno afastamento das respostas com o aumento do ângulo de torção, conforme ilustram os gráficos da figura IV.30, construídos para $M = 11006 \text{ Nmm}$. Como mais uma tentativa, procurou-se identificar possíveis erros na implementação computacional da formulação numérica pelo mdfe, porém não se conseguiu uma vez mais detectar quaisquer falhas.

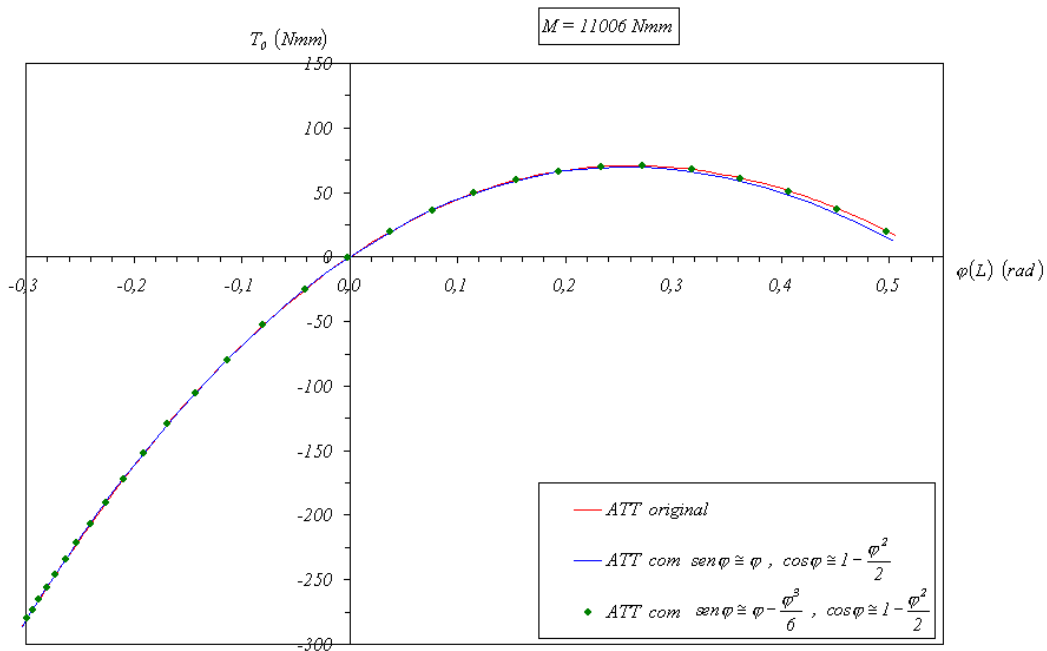


Figura IV.30 – Respostas do programa ATT mostrando o efeito das aproximações realizadas no seno e no co-seno do ângulo de torção

Não se obtendo sucesso com todas essas tentativas acima relatadas, buscou-se conhecer em maiores detalhes a formulação numérica de Attard, com o uso do mef, que

serviu de base para a elaboração do seu programa computacional. Na verdade, isto somente pôde ser concretizado após se conseguir acesso à sua tese de doutorado (ATTARD (1984)), cabendo destacar que, tanto o presente exemplo, quanto o terceiro, originalmente nela apresentados, foram inicialmente detectados no trabalho de ATTARD e SOMERVAILLE (1987).

Em primeiro lugar, pôde-se constatar que Attard, para fins de implementação do tratamento numérico pelo mef (sendo utilizado o elemento de barra, possuindo sete graus de liberdade por nó, com interpolação cúbica para v , w e φ e linear para u), efetivamente considerou, nas expressões (III.7,8) e (III.13,14) de δW_{int} e δW_{ext} , as funções $\text{sen}\varphi$ e $\text{cos}\varphi$ sob a forma aproximada $\text{sen}\varphi \cong \varphi$ e $\text{cos}\varphi \cong 1 - \frac{\varphi^2}{2}$. Além do mais, decidiu reter, nas expressões de δW_{int} e δW_{ext} obtidas pela introdução de tais aproximações, somente até termos cúbicos e quadráticos, respectivamente, nos deslocamentos incógnitos u , v , w e φ (abstraindo-se das variações). Como um balanço final dessas duas intervenções, pode-se dizer que há uma significativa redução (da ordem de 40%) no número de termos originalmente presentes nas referidas expressões, o que evidentemente facilitou (ou até mesmo, em termos práticos, viabilizou) a correspondente implementação numérica pelo mef.

Diante dessa descoberta, resolveu-se prosseguir a investigação elaborando uma nova versão do programa ATT, que se mostrasse totalmente equivalente ao programa desenvolvido por Attard. Com efeito, impondo-se as aproximações $\text{sen}\varphi \cong \varphi$ e $\text{cos}\varphi \cong 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ nas expressões (III.7,8) e (III.13,14) e, subseqüentemente, procedendo-se à mesma eliminação de termos efetuada por Attard, construiu-se, com base no mdfe, a versão denominada ATT-MOD, do programa ATT, envolvendo o mesmo nível de simplificações presentes no programa de elementos finitos de Attard.

Com base nos resultados obtidos das análises com o programa ATT-MOD, para o problema em foco, foram confeccionados novos gráficos T_0 versus $\varphi(L)$ para os quatro últimos níveis do momentos de flexão (onde efetivamente se registraram diferenças significativas entre os resultados do mef e do mdfe, conforme já visto), mostrados nas figuras IV.31.a a IV.31.d. Nessas figuras, foram também acrescentadas, para fins comparativos, as correspondentes respostas para o problema segundo os programas ATT e de Attard, já apresentadas anteriormente nas figuras IV.29.d a

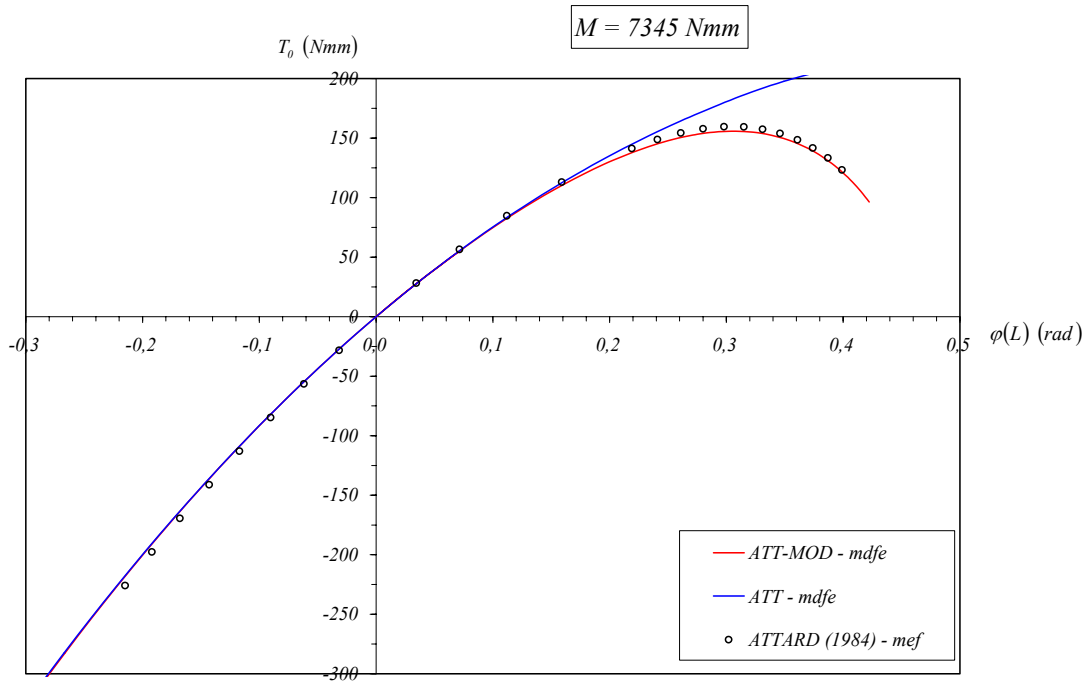


Figura IV.31.a – Resultados T_0 versus $\varphi(L)$, com $M = 7345 \text{ Nmm}$, segundo os programas ATT, ATT-MOD (mdfe) e de Attard (mef)

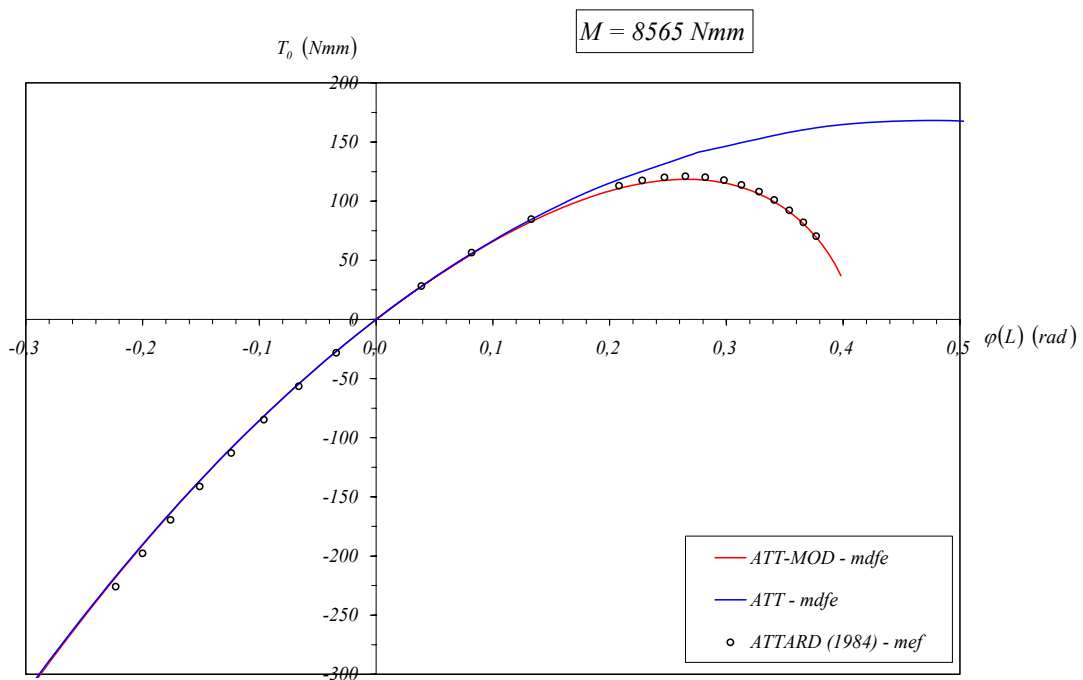


Figura IV.31.b – Resultados T_0 versus $\varphi(L)$, com $M = 8565 \text{ Nmm}$, segundo os programas ATT, ATT-MOD (mdfe) e de Attard (mef)

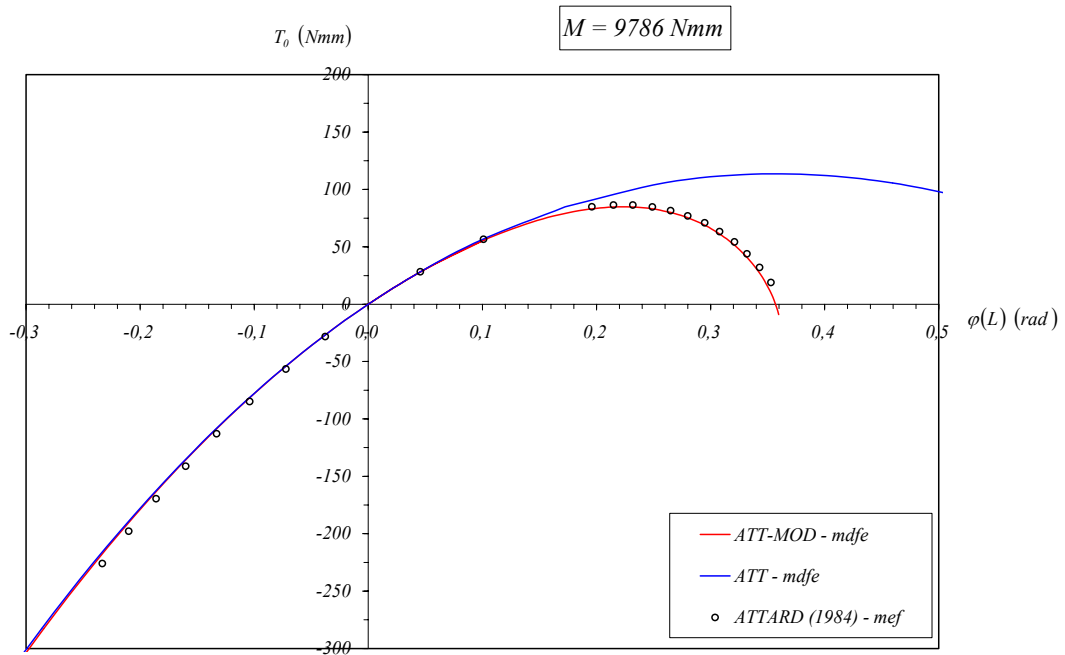


Figura IV.31.c – Resultados T_0 versus $\varphi(L)$, com $M = 9786 \text{ Nmm}$, segundo os programas ATT, ATT-MOD (mdfe) e de Attard (mef)

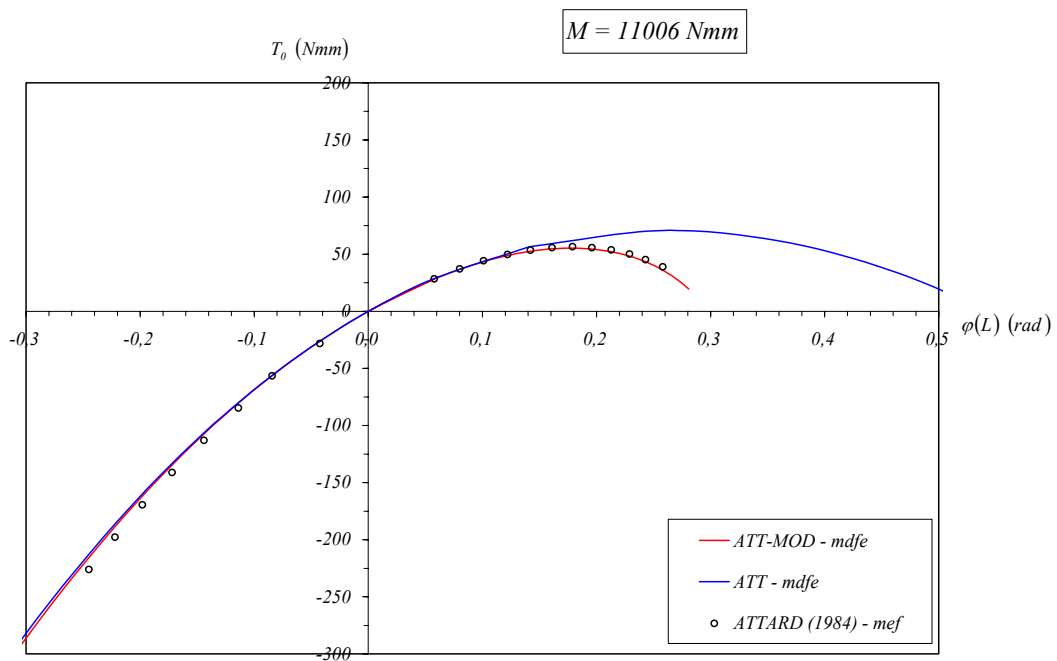


Figura IV.31.d – Resultados T_0 versus $\varphi(L)$, com $M = 11006 \text{ Nmm}$, segundo os programas ATT, ATT-MOD (mdfe) e de Attard (mef)

IV.29.g. Da observação das respostas dos programas ATT-MOD e de Attard, verifica-se que há excelente concordância entre as mesmas para todos os quatro níveis considerados do momento de flexão M . Conclui-se assim que as modificações introduzidas na formulação numérica segundo o mdfe permitiram reproduzir fielmente os resultados para o presente problema oriundos da formulação numérica de Attard. É de se notar que, na parte inferior dos gráficos ($T_0 < 0$), onde há ganho de rigidez com o crescimento (em módulo) do momento T_0 , as respostas dos três programas são muito próximas entre si, evidenciando assim o fato de que o comportamento estrutural nessa região fica pouco afetado pelas simplificações introduzidas por Attard.

De toda essa investigação realizada, culminando com o exposto no parágrafo precedente, veio então à tona o aspecto de que a formulação numérica de Attard, não propriamente pelas aproximações efetuadas no seno e co-seno do ângulo de torção φ (conforme já havia sido testado anteriormente com o programa ATT), mas sim pela eliminação de termos realizada, pode efetivamente, em certos tipos de problemas, conduzir a erros significativos na previsão do comportamento estrutural.

Diante das conclusões estabelecidas, sentiu-se a necessidade de uma resposta numérica adicional para o problema, que viesse a dar respaldo definitivo aos resultados oriundos do programa ATT. Isto posto, empreendeu-se uma busca dirigida a detectar um programa comercial, com base no mef, que pudesse ser utilizado para resolver a questão. Nesse sentido, o trabalho de NAGAHAMA (2003), voltado para o estudo de problemas de flambagem local em hastes de paredes delgadas de seção aberta, incluindo análises do comportamento pós-crítico, foi de fundamental importância, particularmente para subsidiar a escolha do programa e do tipo de elemento finito a ser adotado. Esse autor concluiu, após extensa consulta à literatura, que os elementos de casca, com quatro nós na superfície média, eram os mais indicados para se realizar análises de estabilidade elástica em hastes de paredes delgadas. Além disso, verificou que existiam na biblioteca do programa ABAQUS três elementos que atendiam ao pré-requisito acima citado, designados S4, S4R e S4R5, sendo o elemento S4 o que se mostrou mais adequado à realização de suas análises pós-críticas.

Com base nessa experiência de Nagahama, optou-se então por utilizar o programa ABAQUS, com o elemento de casca S4, para fins de validação dos resultados do programa ATT no presente exemplo. É de se notar também o aspecto positivo de se tomarem agora, como termo de comparação, os resultados oriundos de uma formulação

bidimensional, e não unidimensional, para o problema.

Para as simulações com o programa ABAQUS, chama-se a atenção para os seguintes tópicos a respeito do funcionamento e manuseio do referido programa:

1 - quanto à discretização da haste, esta foi sempre realizada, conforme já citado, considerando-se os elementos S4, os quais, por serem quadriláteros, permitiram o uso de uma malha retangular;

2 - para cada nó ficam definidos 6 graus de liberdade (3 translações e 3 rotações) que estão associados a um sistema Lagrangeano de coordenadas cartesianas definido livremente pelo usuário; para facilitar, optou-se aqui pelo mesmo sistema de eixos x, y, z já utilizado para o problema;

3 - é facultado ao usuário o estabelecimento de dependência (acoplamento cinemático) entre um ou mais graus de liberdade de um nó da malha e os graus de liberdade de um outro nó, fixado como mestre, o qual não precisa pertencer fisicamente à seção real. Tal dependência com o nó mestre pode ocorrer simultaneamente para mais de um nó da malha, inclusive modificando-se o conjunto de graus de liberdade envolvido em cada dependência. Ressalte-se que este recurso do programa ABAQUS torna-se muito útil para fins de aplicação das condições de contorno cinemáticas e também das próprias condições de carregamento nas extremidades da barra. A respeito da introdução das condições de contorno cinemáticas, é importante ressaltar que houve necessidade de se recorrer ao campo de deslocamentos do modelo de Attard (expressões (II.27) e (II.31.a,b)), para que se pudesse estabelecer a melhor correspondência possível, nas análises bidimensionais pelo programa ABAQUS, com as condições de vinculação introduzidas nas análises unidimensionais até então realizadas;

4 - o carregamento é nodal, sendo definidos, correspondentemente aos 6 graus de liberdade por nó, 3 forças e 3 momentos;

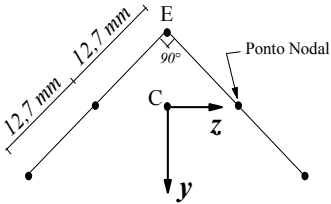
5 - dentre as opções oferecidas pelo programa ABAQUS, optou-se por utilizar, para fins de resolução do sistema não linear de equações algébricas de equilíbrio, a técnica do arch-length control.

Feita essa abordagem sucinta envolvendo alguns aspectos da aplicação do programa ABAQUS, passa-se então à apresentação dos resultados obtidos com o mesmo para o presente exemplo. Antes, porém, cabe observar o esquema representado no quadro IV.1, onde são indicados os 5 pontos nodais considerados ao longo da linha média da seção transversal da barra (cabendo destacar que longitudinalmente foram tomadas 74 sub-divisões idênticas na barra, conduzindo portanto a uma malha de 4×74 elementos), e também explicitadas as condições de contorno cinemáticas e de carregamento consideradas nas análises de meia-barra (as quais foram executadas anteriormente com os programas ATT e POL segundo o esquema estrutural da figura IV.28). Os resultados dessas análises podem ser vistos nos gráficos T_0 versus $\varphi(L)$ das figuras IV.32.a a IV.32.d, correspondentes aos quatro últimos níveis do momento de flexão, onde se acham representadas, além das respostas fornecidas pelo programa ABAQUS, as anteriormente obtidas com o programa ATT (cuja veracidade se deseja atestar) e com o programa de Attard (aqui repetidas para que se possa também ter clareza de como as mesmas se posicionam diante das respostas do programa ABAQUS).

A observação desses gráficos mostra que há uma concordância muito boa entre as respostas do programa ATT e as correspondentes ao programa ABAQUS, ficando, por conseguinte, plenamente confirmada a incapacidade da formulação numérica de Attard, pelas simplificações efetuadas, de reproduzir adequadamente o comportamento estrutural no presente problema.

Após o encerramento das análises efetuadas para este exemplo, pode-se sintetizá-las primeiramente observando que, para todos os níveis do momento de flexão, as respostas dos programas ATT, com o uso do mdfe, e de Attard, com o uso do mef, mostraram ambas uma boa concordância com os resultados experimentais de ENGEL e GOODIER (1953) (dentro do alcance dos ensaios), notando-se entretanto que, globalmente, a que melhor se ajustou aos ensaios foi na realidade a de Attard (ver figuras IV.29.a a IV.29.g). Quanto à comparação entre as respostas dos programas ATT, POL (também pelo mdfe) e de Attard, foi constatado que, para os dois primeiros níveis do momento de flexão, os três programas conduziram praticamente aos mesmos resultados. Todavia, para o nível subsequente do momento de flexão, as respostas do programa POL já começaram a destoar daquelas oriundas dos outros dois programas. Já para os demais níveis do referido momento, foi observada uma significativa diferença

Quadro IV.1 – Discretização da seção transversal e condições cinemáticas e de carregamento para as análises com o programa ABAQUS

<p>SEÇÃO TRANSVERSAL</p> 	<p>CONDIÇÕES CINEMÁTICAS</p>	<p>CONDIÇÕES DE CARREGAMENTO</p>
<p>EXTREMIDADE $x = 0$</p>	<p>Centróide C → NÓ MESTRE: as três translações e a rotação x são impedidas.</p> <p>NÓS DEPENDENTES: os demais nós da seção.</p> <p>TIPO DE DEPENDÊNCIA: nó E: todos os seis graus de liberdade; demais nós: as três translações e a rotação x.</p>	<p>Momento de flexão M aplicado no nó mestre (centróide).</p>
<p>EXTREMIDADE $x = L$</p>	<p>C. de cisalhamento E → NÓ MESTRE: as rotações y e z são impedidas.</p> <p>NÓS DEPENDENTES: todos os demais nós da seção.</p> <p>TIPO DE DEPENDÊNCIA: todos os seis graus de liberdade.</p>	<p>Momento de torção $\frac{T_0}{2}$ aplicado no nó mestre (centro de cisalhamento).</p>

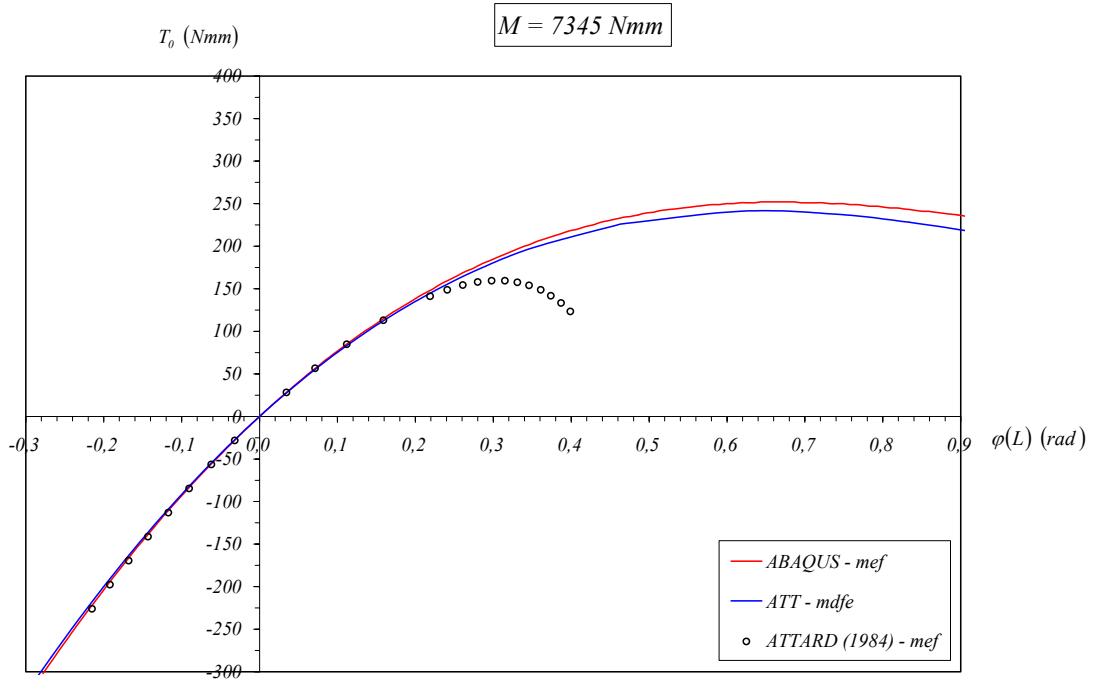


Figura IV.32.a – Resultados T_0 versus $\phi(L)$, com $M = 7345 \text{ Nmm}$, segundo os programas ABAQUS (mef), ATT (mdfe) e de Attard (mef)

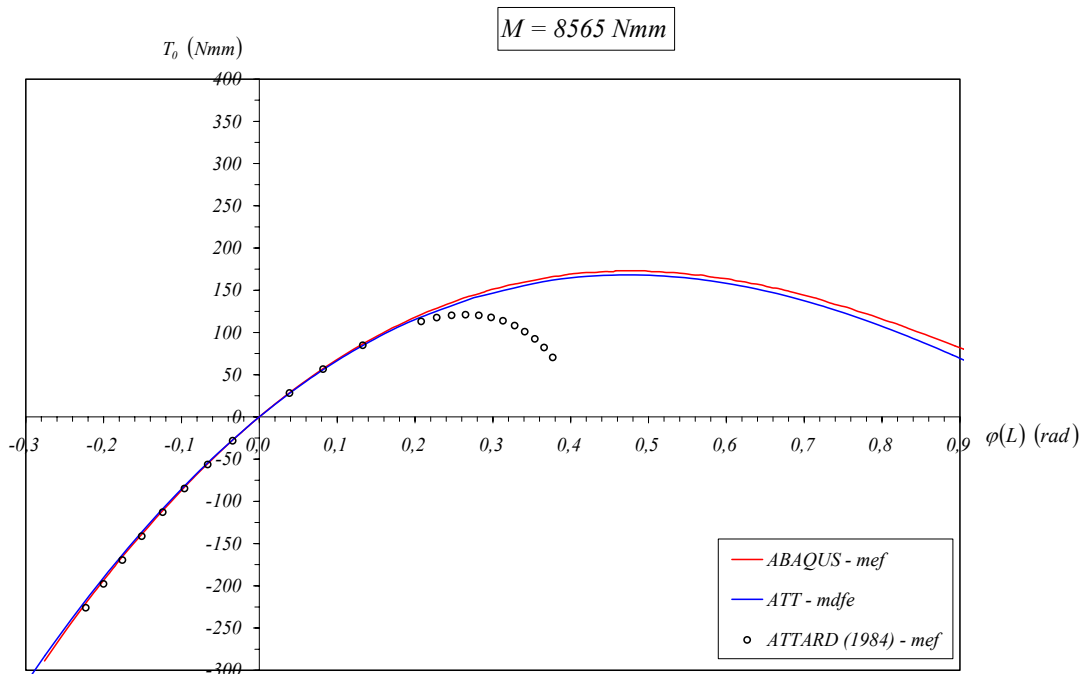


Figura IV.32.b – Resultados T_0 versus $\phi(L)$, com $M = 8565 \text{ Nmm}$, segundo os programas ABAQUS (mef), ATT (mdfe) e de Attard (mef)

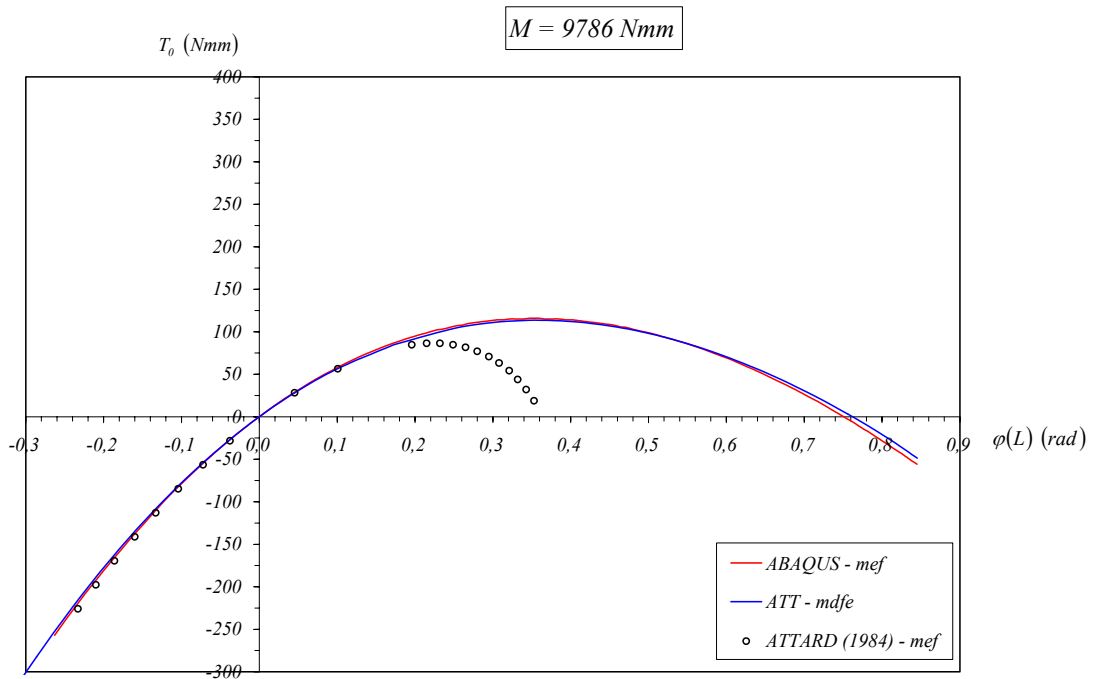


Figura IV.32.c – Resultados T_0 versus $\varphi(L)$, com $M = 9786 \text{ Nmm}$, segundo os programas ABAQUS (mef), ATT (mdfe) e de Attard (mef)

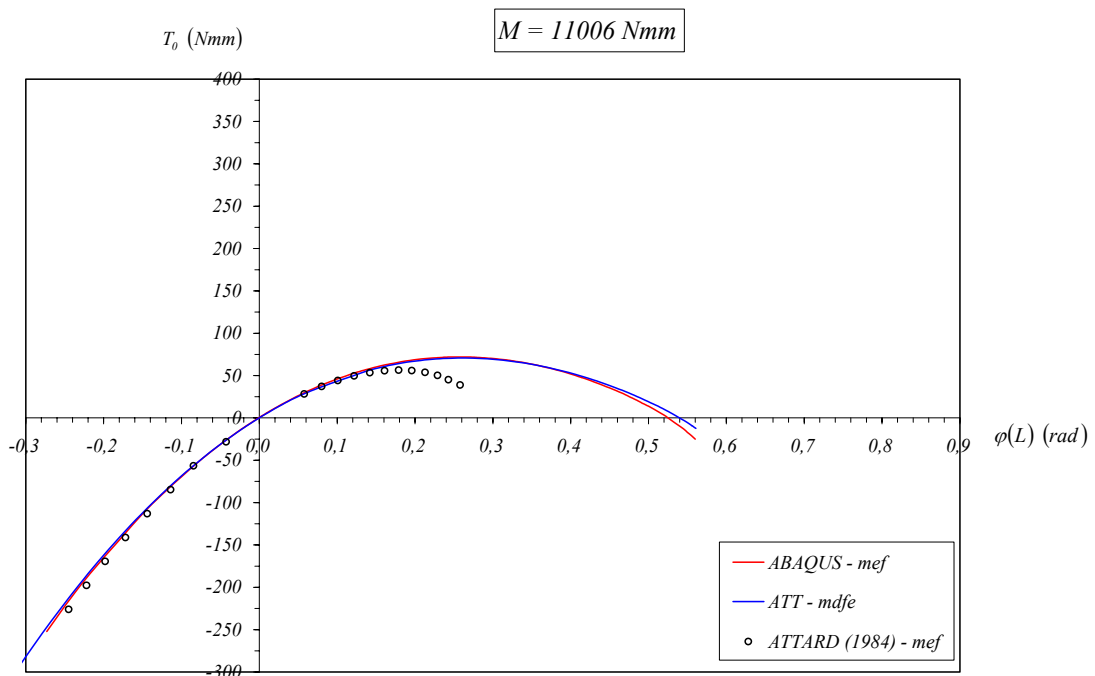


Figura IV.32.d – Resultados T_0 versus $\varphi(L)$, com $M = 11006 \text{ Nmm}$, segundo os programas ABAQUS (mef), ATT (mdfe) e de Attard (mef)

entre as respostas de todos os três programas, sendo constatado que o programa POL, certamente como consequência das aproximações presentes na formulação que lhe deu origem, não conseguiu prever corretamente o próprio tipo de comportamento estrutural para o problema em estudo. Observou-se ainda que o programa de Attard gerou uma resposta, do ponto de vista quantitativo, que se afastou consideravelmente daquela fornecida pelo programa ATT (para valores positivos do momento aplicado de torção T_0), muito embora, em termos qualitativos, tenha havido concordância quanto ao tipo de comportamento estrutural, com a ocorrência de pontos limites. A investigação sobre essas diferenças quantitativas levaram à conclusão de que sua origem foram as simplificações executadas por Attard para o desenvolvimento de sua formulação numérica pelo mef. Embora tais simplificações não tenham trazido prejuízo às respostas por ele obtidas para $T_0 < 0$, correspondentes aos trechos das curvas onde há ganho de rigidez, afetaram entretanto substancialmente os resultados para $T_0 > 0$, relativos aos trechos das curvas onde ocorre instabilidade elástica. Finalmente, com base nas respostas obtidas com o programa comercial de elementos finitos ABAQUS (utilizando o elemento de casca denominado S4), pôde-se ter uma comprovação efetiva, e por meio de uma formulação bidimensional, da pertinência das respostas fornecidas pelo programa ATT.

IV.7 EXEMPLO 7: ESTABILIDADE DE VIGA DE SEÇÃO ASSIMÉTRICA SUBMETIDA A FLEXO-TORÇÃO

O presente exemplo, analisado também em ATTARD (1984), constitui, tal como no exemplo anterior, uma situação onde a formulação numérica desenvolvida por esse autor, face às simplificações realizadas, não conduz a uma previsão correta para o comportamento estrutural. Tal conclusão é corroborada, uma vez mais, pelos resultados obtidos através da utilização do programa ABAQUS. Trata-se de um problema apresentado originalmente por YOO (1980) que, através de uma formulação de elementos finitos por ele estabelecida para análise linear de estabilidade em estruturas constituídas por hastes de paredes delgadas de seção aberta, procurou investigar a contribuição do bimomento para a carga crítica no caso de barras de seção assimétrica. A peça a ser analisada, que se acha representada na figura IV.33, é uma viga de aço,

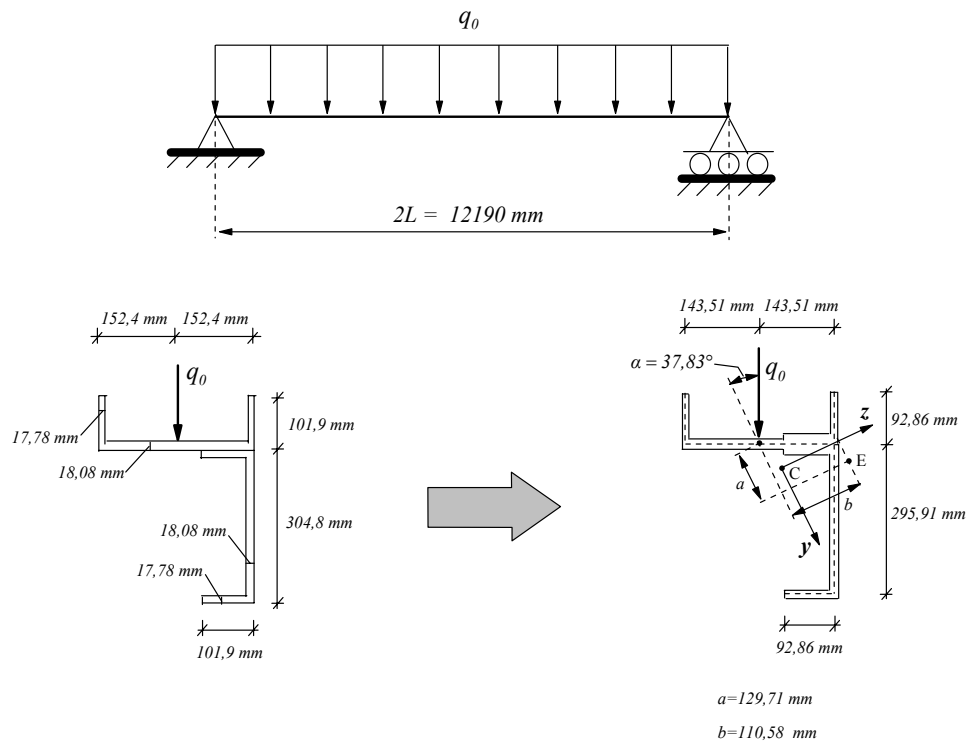


Figura IV.33 – Esquema estrutural do exemplo 7

bi-apoiada, de seção transversal constituída a partir da junção de duas seções “U”, solicitada por uma carga uniformemente distribuída q_0 , cuja localização acha-se também indicada na figura. Projetando a carga q_0 segundo as direções dos eixos y e z (tomados como principais de inércia), e transferindo-a para o centro de cisalhamento E, gera-se, em sintonia com os sub-itens II.3.6.2 e II.4.6, o sistema de forças, dependente da torção da peça, constituído por $\bar{q}_y = q_0 \cos \alpha = 0,790q_0$, $\bar{q}_z = -q_0 \sin \alpha = -0,613q_0$ e $\mathbf{m}_\xi = \bar{m}_\xi \cos \varphi + \bar{r}_\xi \sin \varphi$ (modelo de Attard), ou $\mathbf{m}_\xi = \bar{m}_\xi + \bar{r}_\xi \varphi$ (modelo de Polillo, Garcia e Villaça), com $\bar{m}_\xi = q_0(a \sin \alpha + b \cos \alpha) = 166,9q_0$ e $\bar{r}_\xi = q_0(a \cos \alpha - b \sin \alpha) = 34,6q_0$.

As propriedades do material e da seção transversal são apresentadas na tabela IV.13, e o esquema estrutural de meia-barra, utilizado nas análises pelos programas ATT e POL, acha-se representado na figura IV.34, onde são também explicitadas as condições de contorno cinemáticas para o problema.

Tabela IV.13 – Propriedades do material e da seção transversal

<p>PROPRIEDADES DO MATERIAL</p>	<p>$E = 200000 \text{ MPa}$</p> <p>$G = 77230 \text{ MPa}$</p>
<p>PROPRIEDADES DA SEÇÃO TRANSVERSAL</p>	<p>$y_e = 41,69 \text{ mm}$</p> <p>$z_e = 99,51 \text{ mm}$</p> <p>$A = 1,698 \times 10^5 \text{ mm}^2$</p> <p>$I_y = 1,104 \times 10^8 \text{ mm}^4$</p> <p>$I_z = 2,880 \times 10^8 \text{ mm}^4$</p> <p>$I_e = 5,961 \times 10^8 \text{ mm}^4$</p> <p>$J_t = 2,897 \times 10^6 \text{ mm}^4$</p> <p>$I_\omega = 4,739 \times 10^{11} \text{ mm}^6$</p> <p>$Q_y = -4,144 \times 10^{10} \text{ mm}^5$</p> <p>$Q_z = -2,126 \times 10^{10} \text{ mm}^5$</p> <p>$Q_\omega = -5,769 \times 10^{11} \text{ mm}^6$</p> <p>$R_e = 4,062 \times 10^{13} \text{ mm}^6$</p> <p>$I_{yz} = 0$</p>

De acordo com a formulação para análise linear de estabilidade desenvolvida em YOO (1980), é prevista para o problema uma carga crítica (carga de bifurcação) $q_{OCR} = 44,01 \text{ N/mm}$, sem levar em conta a contribuição do bimomento na matriz de estabilidade, e uma outra, um pouco menor, $q_{OCR} = 43,97 \text{ N/mm}$, se considerada a contribuição deste. Por outro lado, em ATTARD (1984), é também apresentada uma

formulação para análise linear de estabilidade, como um sub-produto do modelo numérico (segundo o mef) desse autor para a análise não linear de flexo-torção, a qual fornece, para este mesmo problema, o valor $q_{0CR} = 44,16 \text{ N/mm}$.

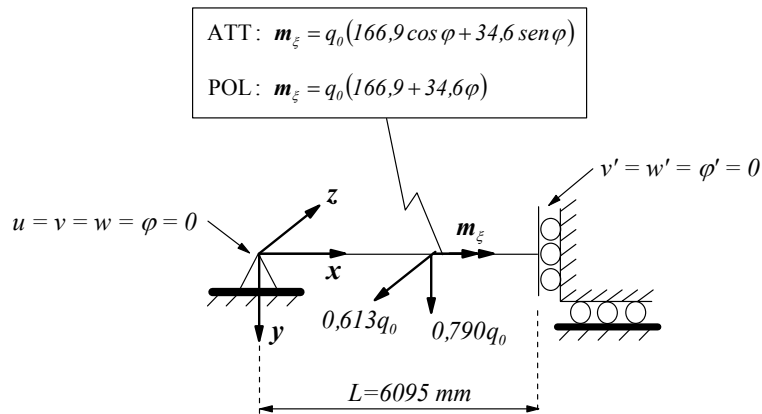


Figura IV.34 – Esquema estrutural de meia-barra para a análise numérica pelos programas ATT e POL

Para confirmar a pertinência desses resultados, muito próximos entre si, preconizados pela análise linear de estabilidade, Attard procedeu a uma análise não linear do problema, com base no seu programa de elementos finitos. Os resultados por ele obtidos são apresentados sob a forma de relações γ versus $v(L)$, γ versus $w(L)$ e

γ versus $\varphi(L)$, sendo $\gamma = \frac{q_0}{q_{0CR}}$ e com $q_{0CR} = 44,16 \text{ N/mm}$ representando o valor da

carga crítica calculada segundo esse autor. Tais respostas, juntamente com as oriundas dos programas ATT e POL, encontram-se registradas numericamente nas tabelas IV.14.a a IV.14.c, e graficamente nas figuras IV.35.a a IV.35.c. Cabe ressaltar que, embora em ATTARD (1984) não tenham sido mostradas respostas envolvendo os deslocamentos longitudinais, como um complemento ao estudo apresentam-se (apenas graficamente) na figura IV.35.d, sob a forma de curvas γ versus $u(L)$, as aqui determinadas pelos programas ATT e POL. No conjunto de figuras IV.35 são ainda plotadas as respostas obtidas à luz do programa ABAQUS, com a utilização do mesmo elemento de casca S4 empregado no exemplo anterior. Para tanto, a seção transversal

Tabela IV.14.a – Resultados numéricos γ versus $v(L)$

$\gamma = \frac{q_0}{q_{0CR}}$	$v(L)$ (mm)		
	ATT (mdfe)	POL (mdfe)	ATTARD (1984) (mef)
0,1	18,8	18,8	18,7
0,2	40,9	40,1	40,3
0,3	67,1	63,8	64,7
0,4	97,7	88,9	91,0
0,5	132	115	118
0,6	171	141	-
0,7	211	167	-
0,8	254	193	-
0,9	299	219	-
1,0	344	245	-
1,1	391	271	-
1,2	437	296	-
1,3	484	322	-
1,4	531	347	-
1,5	579	372	-
1,6	626	398	-

Tabela IV.14.b – Resultados numéricos γ versus $w(L)$

$\gamma = \frac{q_0}{q_{0CR}}$	– $w(L)$ (mm)		
	ATT (mdfe)	POL (mdfe)	ATTARD (1984) (mef)
0,1	36,5	36,4	36,4
0,2	75,4	74,3	73,9
0,3	116	112	110
0,4	158	149	143
0,5	199	185	171
0,6	240	220	-
0,7	280	254	-
0,8	319	288	-
0,9	358	322	-
1,0	395	356	-
1,1	431	390	-
1,2	467	424	-
1,3	503	458	-
1,4	538	492	-
1,5	572	527	-
1,6	607	561	-

Tabela IV.14.c – Resultados numéricos γ versus $\varphi(L)$

$\gamma = \frac{q_0}{q_{0CR}}$	$\varphi(L)$ (rad)		
	ATT (mdfe)	POL (mdfe)	ATTARD (1984) (mef)
0,1	0,0639	0,0634	0,0625
0,2	0,134	0,129	0,129
0,3	0,208	0,192	0,195
0,4	0,282	0,246	0,255
0,5	0,352	0,292	0,310
0,6	0,417	0,328	-
0,7	0,475	0,358	-
0,8	0,527	0,381	-
0,9	0,571	0,399	-
1,0	0,611	0,413	-
1,1	0,645	0,424	-
1,2	0,675	0,432	-
1,3	0,701	0,438	-
1,4	0,724	0,442	-
1,5	0,744	0,445	-
1,6	0,762	0,447	-

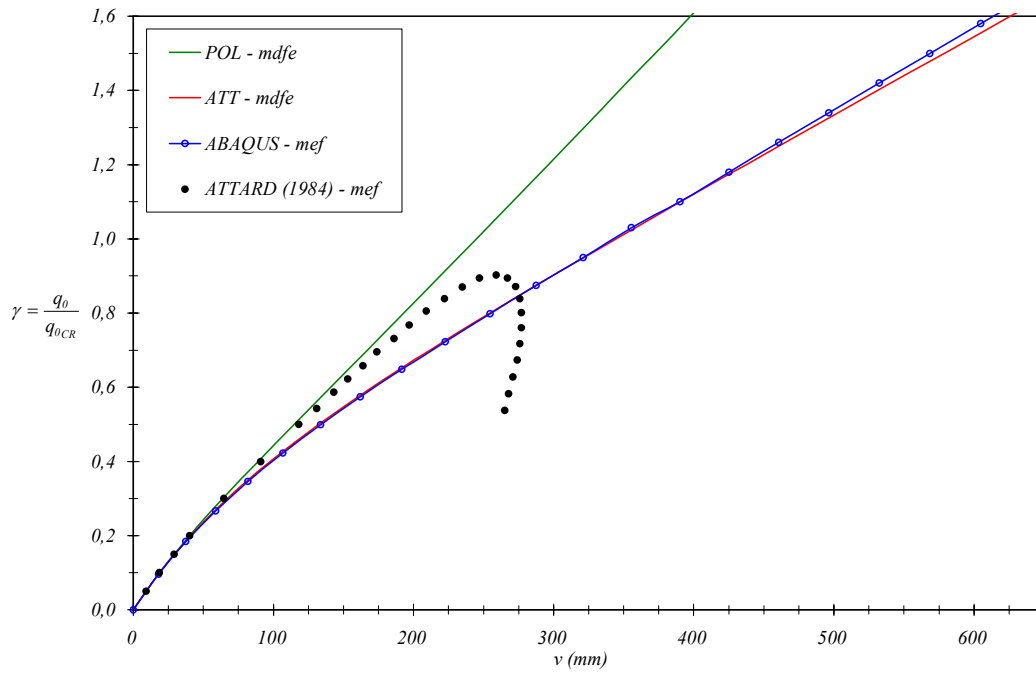


Figura IV.35.a – Resultados λ versus $v(L)$ segundo os programas POL (mdfe), ATT (mdfe), ABAQUS (mef) e de Attard (mef)

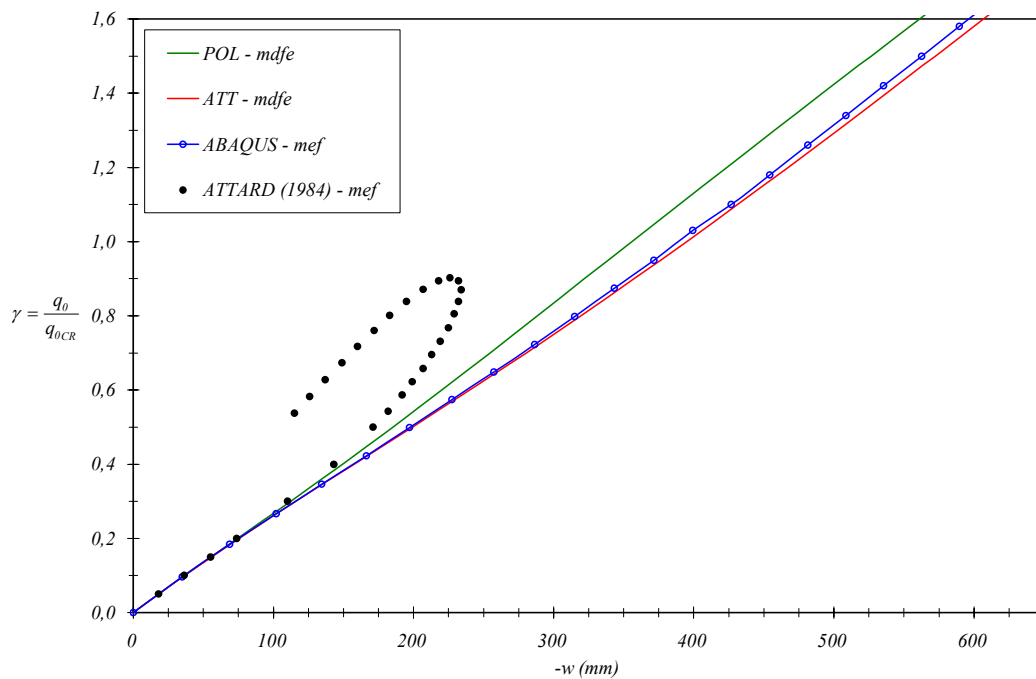


Figura IV.35.b – Resultados λ versus $w(L)$ segundo os programas POL (mdfe), ATT (mdfe), ABAQUS (mef) e de Attard (mef)

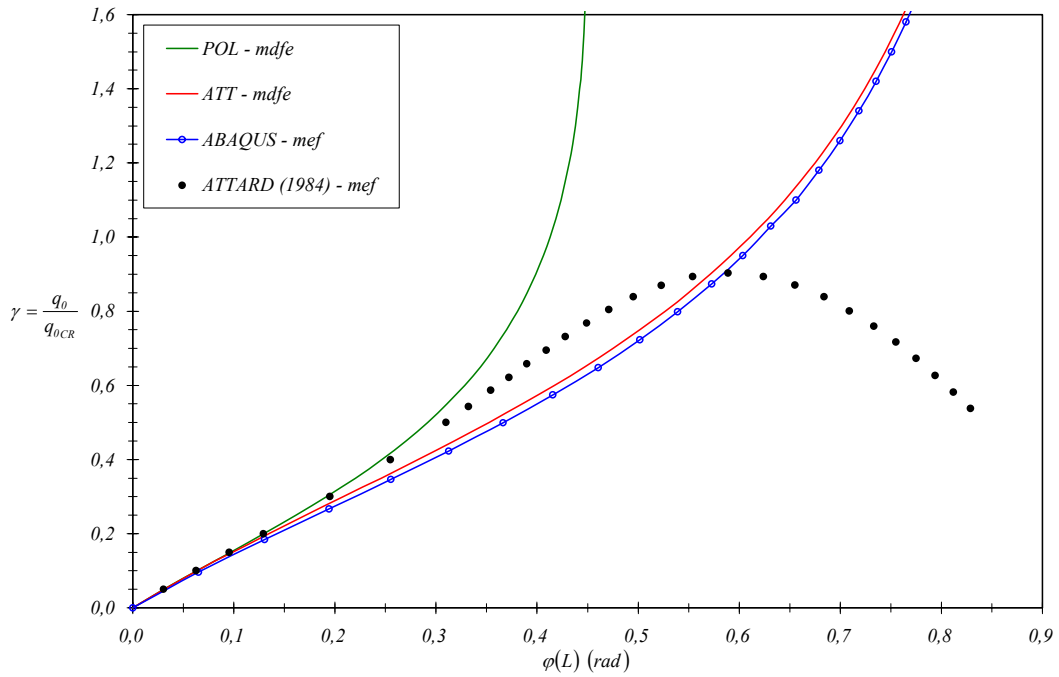


Figura IV.35.c – Resultados γ versus $\varphi(L)$ segundo os programas POL (mdfe), ATT (mdfe), ABAQUS (mef) e de Attard (mef)

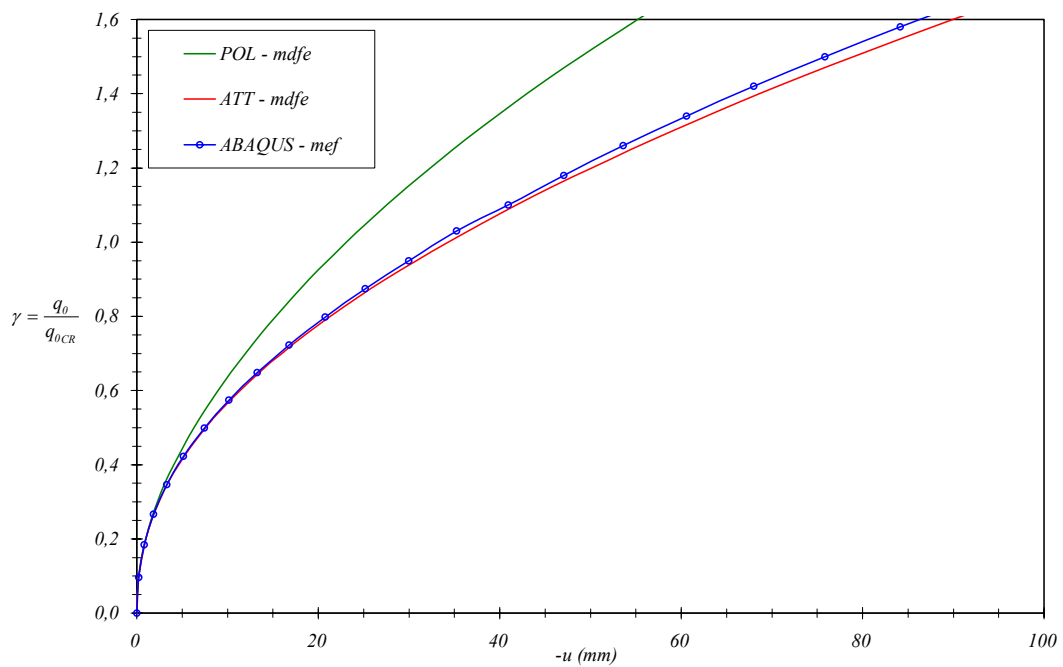


Figura IV.35.d – Resultados γ versus $u(L)$ segundo os programas POL (mdfe), ATT (mdfe) e ABAQUS (mef)

Quadro IV.2 – Condições de contorno cinemáticas para o uso do programa ABAQUS

<p>EXTREMIDADE $x = 0$</p>	<p>Centróide C → NÓ MESTRE: as três translações e a rotação x são impedidas.</p> <p>NÓS DEPENDENTES: os demais nós da seção.</p> <p>TIPO DE DEPENDÊNCIA:</p> <p>nó 10: as translações y e z, e as três rotações;</p> <p>nó 11 (centróide setorial): todos os seis graus de liberdade;</p> <p>demais nós: as translações y e z, e a rotação x.</p>
<p>EXTREMIDADE $x = L$</p>	<p>C. de Cisalhamento → NÓ MESTRE: as rotações y e z são impedidas.</p> <p>NÓS DEPENDENTES: todos os demais nós da seção.</p> <p>TIPO DE DEPENDÊNCIA: todos os seis graus de liberdade.</p>

sendo N o número de sub-divisões tomadas ao longo do comprimento L .

Passando-se à análise dos resultados apresentados tanto nas tabelas IV.14 quanto nas figuras IV.35, destaca-se inicialmente, conforme já antecipado, a nova falha na previsão do comportamento estrutural por parte da formulação numérica de Attard, desta feita tanto em termos quantitativos quanto qualitativos. Como se observa nos gráficos, enquanto o programa de Attard acusou a ocorrência de ponto limite de carga (para um valor do parâmetro de carga γ relativamente próximo do valor $\gamma = 1$ correspondente à carga de bifurcação indicada pela análise linear de estabilidade), o programa ATT, uma vez mais corroborado pelo programa ABAQUS (cujas respostas são muito próximas das obtidas com o programa ATT), não detectou qualquer tipo de problema de estabilidade no comportamento estrutural da haste.

Quanto ao programa POL, o mesmo detectou, em termos qualitativos, um tipo de comportamento para a haste análogo ao previsto pelos programas ATT e ABAQUS, muito embora, face às magnitudes atingidas pelo ângulo de torção, suas respostas já

comecem a perder precisão para um valor do parâmetro de carga γ ainda bem aquém do próprio valor crítico fornecido pela análise linear de estabilidade.

Como uma síntese dos resultados alcançados no presente exemplo, pode-se dizer que, tanto as análises lineares de estabilidade de Yoo e de Attard, quanto as análises não lineares deste último, não foram capazes de prever, quantitativa e qualitativamente, o verdadeiro comportamento estrutural da haste. Tal comportamento, segundo as análises mais realistas dos programas ATT e ABAQUS (e, em termos qualitativos, também de acordo com o que aponta o programa POL), não envolve qualquer tipo de problema de estabilidade para a peça.

CAPÍTULO V

CONCLUSÃO

Neste capítulo são apresentadas as conclusões gerais da presente pesquisa e algumas sugestões para o prosseguimento da mesma.

Recorda-se, inicialmente, o objetivo primordial da pesquisa, qual seja, o de investigar a conveniência de se admitirem ângulos de torção no âmbito de grandes rotações, como considerado no modelo de ATTARD (1986), frente à premissa de admiti-los no âmbito de rotações moderadas, conforme o modelo de POLILLO *et al.* (1998), em problemas de flexo-torção de hastes de paredes delgadas de seção aberta (admitindo-se solicitações estáticas). Nesse sentido foi estabelecido, no capítulo II, para cada um dos dois modelos, a correspondente formulação analítica segundo o princípio dos trabalhos virtuais, devendo ser ressaltado que, em função de serem idênticas as hipóteses assumidas para ambos, à exceção daquela relativa à ordem de grandeza dos ângulos de torção, a formulação associada ao modelo de Polillo, Garcia e Villaça pode ser encarada como caso particular da relativa ao modelo de Attard. Em seguida, no capítulo III, foi apresentado o correspondente tratamento numérico, pelo método das diferenças finitas energéticas (mdfe), para cada uma das duas formulações analíticas desenvolvidas no capítulo II, ficando evidente que, para o modelo de Attard, foram geradas expressões para as parcelas δW_{int} e δW_{ext} do pvtv significativamente mais carregadas de termos (contando inclusive com a presença de funções trigonométricas), em comparação ao modelo de Polillo, Garcia e Villaça, o que acarreta, evidentemente, maior esforço computacional para a realização de uma dada análise. Além disso, apresentou-se nesse mesmo capítulo uma síntese da resolução do sistema de equações algébricas não lineares de equilíbrio através da técnica do GDCM, sendo também gerado, como sub-produto, o método de Newton-Raphson. Com base no referido tratamento numérico pelo mdfe, construíram-se, então, dois programas, denominados ATT, para o modelo de ATTARD (1986), e POL, para o modelo de POLILLO *et al.* (1998), os quais foram em seguida utilizados no estudo de sete exemplos de aplicação, conforme focalizado no capítulo IV, podendo ser assim sintetizados os resultados das análises realizadas:

1 – Para o primeiro exemplo, onde se estudam os efeitos da torção combinada

com tração numa barra de seção retangular estreita, viu-se que a ausência total de flexão ($v = w = 0$) gerou soluções analíticas idênticas para ambos os modelos de flexo-torção, independentemente da magnitude do ângulo de torção, o que foi também confirmado numericamente pelos programas ATT e POL. Além disso, por serem as derivadas φ' e u' constantes no problema, resulta uma perfeita concordância das soluções numéricas com as analíticas. Observa-se ainda a excelente proximidade dessas soluções teóricas com os resultados experimentais de ENGEL e GOODIER (1953), podendo-se por fim destacar a definição, para os dados do exemplo, de um limite de validade para a relação linear momento torsor versus ângulo de torção por unidade de comprimento, admitida por esses autores.

2 – Para o segundo exemplo, relativo à torção não uniforme em uma barra de seção “ I ”, a ausência total de flexão conduz, uma vez mais, a soluções analíticas idênticas entre si, para ambos os modelos de flexo-torção estudados, independentemente da magnitude do ângulo de torção (embora não tenha sido possível determiná-las). Os programas ATT e POL, como esperado, forneceram sempre respostas idênticas entre si, as quais apresentaram boa proximidade com os resultados teóricos e experimentais de TSO e GHOBARAH (1971), tanto na análise de deslocamentos quanto de deformações.

3 – Para o terceiro exemplo, qual seja, o estudo da torção uniforme numa barra de seção cantoneira, o programa ATT demonstrou, num problema efetivamente de flexo-torção, excelente desempenho em todas as análises comparativas realizadas, tanto perante os resultados experimentais fornecidos por GREGORY (1960a e 1960b), quanto diante dos previstos pelo programa de elementos finitos de Attard. Quanto ao programa POL, a presença da flexão, como esperado, limitou a validade de suas respostas; todavia, em função de ser a mesma de início secundária, só surgindo como consequência do comportamento geometricamente não linear da peça, conseguiu-se atingir com o programa valores expressivos do ângulo de torção sem perda substancial de qualidade nos resultados.

4 – Para o quarto exemplo, que tratou do problema de flambagem por flexo-torção de uma coluna de seção “ U ”, apesar de ambos os programas, ATT e POL, fornecerem a mesma estimativa de carga crítica, muito próxima do valor analítico

previsto (idêntico para ambos os modelos de flexo-torção), houve total discordância quanto ao comportamento pós-crítico, com o programa POL prevendo, equivocadamente, um caminho instável de equilíbrio.

5 – No quinto exemplo, onde é abordado o problema de flambagem lateral de uma viga de seção “ I ”, considerando-se a influência da curvatura pré-crítica, o modelo de Polillo, Garcia e Villaça prevê analiticamente uma carga crítica superior à fornecida pelo modelo de Attard, com os programas ATT e POL reproduzindo plenamente esse resultado. Quanto à trajetória pós-crítica, os programas detectaram o mesmo tipo de comportamento para a haste, mas o programa POL acusou um ganho de rigidez sempre crescente em relação ao previsto pelo modelo de Attard, divergindo assim deste em termos quantitativos.

6 – Para o sexto exemplo, onde se analisou a estabilidade de uma viga de seção cantoneira submetida a flexo-torção, foi observado que, para todos os níveis do momento aplicado de flexão, as respostas dos programas ATT, com o uso do mdf, e de Attard, com o mef, mostraram ambas uma boa concordância com os resultados experimentais de ENGEL e GOODIER (1953) (dentro dos limites atingidos pelos ensaios), notando-se entretanto que, globalmente, os resultados que melhor se ajustaram aos ensaios foram na realidade os de Attard (ver figuras IV.29.a a IV.29.g). Quanto às respostas do programa POL, os bons resultados iniciais começaram a destoar dos oriundos dos outros dois programas a partir do terceiro nível do momento de flexão, sendo que, para os quatro últimos níveis do referido momento, foi observada uma significativa deterioração de suas respostas, constatando-se que esse programa não conseguiu prever corretamente o próprio tipo de comportamento estrutural para o problema em estudo. Observou-se ainda que o programa de Attard gerou uma resposta que, quantitativamente (para $T_0 > 0$), afastou-se consideravelmente da correspondente ao programa ATT, muito embora tenha havido concordância quanto ao tipo de comportamento estrutural previsto, com a ocorrência de pontos limites. A investigação dessas diferenças quantitativas levou à conclusão de que as mesmas foram motivadas basicamente pela eliminação de termos realizada por Attard no desenvolvimento de sua formulação numérica pelo mef, tendo-se constatado que as aproximações para o ângulo de torção, a saber, $\text{sen } \varphi \cong \varphi$ e $\text{cos } \varphi \cong 1 - \frac{\varphi^2}{2}$, introduzidas na expressão do ptv,

tiveram na realidade uma participação muito pequena nas citadas diferenças. Finalmente, o programa comercial de elementos finitos ABAQUS (utilizando-se o elemento de casca S4, de sua biblioteca) forneceu uma comprovação efetiva, e por meio de uma formulação bidimensional, da pertinência das respostas do programa ATT.

7 – No sétimo e último exemplo, onde se focaliza a estabilidade de uma viga de seção assimétrica sob flexo-torção, tanto as análises lineares de estabilidade de YOO (1980) e de ATTARD (1984), acusando carga de bifurcação, como também as análises não lineares deste último, detectando ponto limite de carga, revelaram-se incorretas, pois o verdadeiro comportamento estrutural para o problema, conforme indicaram as respostas praticamente idênticas dos programas ATT e ABAQUS (acompanhadas ainda, em termos qualitativos, pelas do programa POL), não apresentou qualquer indício de perda de estabilidade.

Com base nessas constatações, extraídas dos sete exemplos analisados, podem então ser estabelecidas as seguintes conclusões:

1 – O modelo de Attard, em que são considerados grandes ângulos de torção, foi o que efetivamente conduziu aos melhores resultados em todas as análises efetuadas com o programa ATT. Essa comprovação se deu tanto mediante comparações realizadas com outras formulações (que liberam o ângulo de torção), quanto com resultados experimentais. A esse respeito, cabe destacar que as análises pelo programa comercial ABAQUS foram de extrema importância, pois, conforme demonstraram os dois últimos exemplos, este programa possibilitou não só uma comprovação efetiva dos resultados obtidos com o programa ATT, como também confirmou, através de uma formulação bidimensional, a pertinência do modelo unidimensional de Attard.

2 – A formulação analítica baseada no modelo de POLILLO *et al.* (1998), traduzida pelo programa POL, apresenta limitações quanto à sua aplicação à análise de problemas de flexo-torção, como decorrência da hipótese de serem considerados ângulos de torção no contexto de rotações moderadas (e não no âmbito de grandes rotações, como fez Attard). As análises comparativas mostraram que, embora tal modelo tenha se mostrado plenamente adequado aos problemas de torção sem flexão, a presença desta limita a validade de suas respostas, como visto no caso dos exemplos 3 e

7, principalmente neste último, onde a flexão tem caráter mais acentuado desde o início. Conclui-se também que, em problemas de estabilidade elástica, podem ocorrer tanto falsas previsões no tipo de comportamento estrutural, como se viu nos exemplos 4 e 6 (neste último a partir do quarto nível do momento de flexão), quanto também imprecisões na determinação da carga crítica, como no caso do exemplo 5, de flambagem lateral, pela influência da curvatura pré-crítica (entretanto, não existindo este efeito, como no próprio exemplo 4, a carga crítica fornecida por ambos os modelos é idêntica).

3 – A formulação numérica desenvolvida por Attard pelo mef apresenta limitações quanto à sua aplicação, em decorrência das simplificações executadas, sendo que os efeitos observados nas análises comparativas envolveram tanto a geração de resultados quantitativamente equivocados, como no exemplo 6, onde as cargas traduzidas pelos pontos limites ficaram sempre bem além das determinadas pelos programas ATT e ABAQUS, quanto de fornecer previsões inteiramente equivocadas quanto ao verdadeiro tipo de comportamento estrutural da barra, conforme ocorrido nas análises do exemplo 7. Por outro lado, vale mais uma vez destacar que as simplificações realizadas por Attard no seno e no co-seno do ângulo de torção não foram responsáveis pela deterioração dos resultados.

Em função do exposto, pode-se dizer que o modelo analítico de Attard foi, de fato, o que apresentou o maior grau de confiabilidade nas respostas, tendo sempre conduzido a resultados significativos, independentemente do tipo de comportamento estrutural para a peça. Com isto, apesar da maior dificuldade envolvida em relação à implementação de um tratamento numérico adequado ao problema, considera-se como sendo totalmente conveniente a previsão, no modelo de análise, de ângulos de torção no âmbito de grandes rotações, e não de rotações moderadas. Julga-se assim atingido o objetivo básico da presente pesquisa, podendo-se ainda destacar que a mesma também se constituiu em mais um bem sucedido teste de aplicação do tratamento numérico segundo o mdfe. Além disso, como um resultado adicional da pesquisa, e na verdade não esperado de início, descobriu-se que a eliminação de termos realizada no tratamento numérico estabelecido por Attard, segundo o mef, pode trazer sérios prejuízos aos resultados, como demonstraram os dois últimos exemplos analisados, sendo que tal constatação parece ser também inédita, uma vez que, mesmo após minuciosa consulta à

literatura, não se encontrou qualquer citação a esse respeito. Nesse aspecto foi de fundamental importância o respaldo fornecido pelo programa ABAQUS aos resultados oriundos do programa ATT.

Para finalizar, seguem-se algumas sugestões para a continuidade desta pesquisa:

1 – Testar os programas para exemplos outros que estejam disponíveis na literatura especializada.

2 – Estender a análise ao caso de vigas contínuas, ou mesmo pórticos, contemplando assim situações mais usuais de projeto.

3 – Introduzir nas formulações apresentadas a possibilidade de seção variável, assim como incorporar o caso de solicitação dinâmica, podendo-se, em princípio, utilizar o método da aceleração constante como procedimento de marcha no tempo, com base na experiência anterior de LIMA (1995).

4 – Reformular o tratamento numérico de Attard pelo mef, utilizando uma formulação Lagrangeana atualizada como alternativa para procurar não só corrigi-lo em relação às simplificações realizadas, como também mantê-lo exequível em termos de implementação.

5 – Disponibilizar um programa computacional, à luz de uma teoria não linear de “folded plates”, objetivando inclusive proceder a estudos de instabilidade local. A posse de tal ferramenta, entre outras coisas, evitaria a necessidade do uso de programas comerciais, como o ABAQUS, sobre cujo conteúdo não se tem, em geral, pleno domínio, aspecto este que, em certas situações, pode trazer dificuldades à interpretação ou mesmo à própria obtenção de resultados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACHOUR, B., ROBERTS, T. M., 2000, “Nonlinear Strains and Instability of Thin-Walled Bars”, *Journal of Constructional Steel Research*, v. 56, pp. 237-252.
- AKSU, G., FELEMBAN, M. B., 1992, “Frequency Analysis of Corner Point Supported Mindlin Plates by a Finite Difference Energy Method”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 158, n. 3, pp. 531-544.
- ATTARD, M. M., 1984, *The Elastic Flexural-Torsional Response of Thin-Walled Open Beams*. Ph.D. dissertation, University of New South Wales, Australia.
- ATTARD, M. M., 1986, “Nonlinear Theory of Non-Uniform Torsion of Thin-Walled Open Beams”, *Thin-Walled Structures*, v. 4, pp. 101-134.
- ATTARD, M. M., SOMERVAILLE, I. J., 1987, “Non-Linear Analysis of Thin-Walled, Open Beams”, *Computers & Structures*, v. 25, n.3, pp. 437-443.
- BARSOUM, R. S., GALLAGHER, R. H., 1970, “Finite Element Analysis of Torsional and Torsional-Flexural Stability Problems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 2, pp. 335-352.
- BARVE, V. D., DEY, S. S., 1983, “Isoparametric Finite Difference Energy Method for Plate Bending Problems”, *Computers & Structures*, v. 17, n. 3, pp. 459-465.
- BATOZ, J. L., DHATT, G., 1979, “Incremental Displacement Algorithms for Non-Linear Problems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 14, n. 8, pp. 1262-1267.
- BORGES, M. S. S., 1994, *Flexo-Torção em Hastes de Paredes Delgadas de Seção Aberta com Abordagem por Diferenças Finitas*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- BRUSH, D. O., ALMROTH, B. O., 1975, *Buckling of Bars, Plates and Shells*. New

York, McGraw-Hill.

BURAGOHAIN, D. N., PATODI, S. C., 1978, “Large Deflection Analysis of Plates and Shells by Discret Energy Method”, *Computers & Structures*, v. 9, pp. 315-322.

COSTA, F. P., 1998, *Análise Numérica da Flexão Dinâmica de Vigas com a Consideração da Deformabilidade por Cortante e da Inércia de Rotação*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

COURANT, R., FRIEDRICHS, K., KEWY, H., 1928, “Uber die Partiellen Differenzgleichungen der Mathematischen Physik”, *Math. Ann.*, v. 100, pp. 32-74.

DIAS, C. A. C., 2001, *Comprovação Numérica da Teoria de Vlassov em Vigas e Pórticos de Paredes Delgadas com Seção Aberta*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

ENGEL, H. L., GOODIER, J. N., 1953, “Measurements of Torsional Stiffness Changes and Instability Due to Tension, Compression, and Bending”, *ASME - Journal of Applied Mechanics*, v. XX, pp. 553-560.

GARCIA, L. F. T., 1987, *Uma Contribuição ao Estudo da Flexão de Barras com Forte Não Linearidade Geométrica*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.

GHOBARAH, A. A., TSO, W. K., 1971, “A Non-Linear Thin-Walled Beam Theory”, *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 13, n. 12, pp. 1025-1038.

GRAÇA, M. S. B. A., 2000, *Método das Diferenças Finitas Energéticas na Análise Estática e Dinâmica de Placas Delgadas e Espessas*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.

GRAÇA, M. S. B. A., GARCIA, L. F. T., 2002, “Aplicação do Método das Diferenças

Finitas Energéticas na Análise de Placas Retangulares Espessas”. In: *Anais das XXX Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural*, pp 47-66, Brasília, Maio.

GREGORY, M., 1960a, “A Nonlinear Bending Effect When Certain Unsymmetrical Sections Are Subjected to a Pure Torque”, *Australian Journal of Applied Science*, v. 11, pp. 33-48.

GREGORY, M., 1960b, “The Bending and Shortening Effect of Pure Torsion”, *Australian Journal of Applied Science*, v. 11, pp. 209-216.

HOUBOLT, J. C., 1958, *Study of Several Aerothermoelastic Problems of Aircraft Structures in High Speed Flight*, Leeman, Zurich, Switzerland.

LAUDIERO, F., ZACCARIA, D., 1988, “Finite Element Analysis of Stability of Thin-Walled Beams of Open Section”, *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 30, n. 8, pp. 543-557.

LEE, J., KIM, S., 2002, “Flexural-Torsional Coupled Vibration of Thin-Walled Composite Beams with Channel Sections”, *Computers & Structures*, v. 80, pp. 133-144.

LIMA, J. M. F., 1995, *Análise Dinâmica da Flexão de Barras com Não-Linearidade Geométrica Utilizando Diferenças Finitas Energéticas*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.

LIMA, J. M. F., GARCIA, L. F. T., 2003, “Método das Diferenças Finitas Energéticas na Flexão de Barras com Forte Não Linearidade Geométrica”, *Revista Sientibus*, no prelo.

LIMA, J. M. F., GARCIA, L. F. T., VILLAÇA, S. F., 2002, “Análise Numérica da Flambagem por Flexo-Torção em Hastes de Paredes Delgadas com Seção Aberta”. In: *Anais das XXX Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural*, Brasília, Maio.

- MITTELBACH, F. R., 2002, *Método das Diferenças Finitas Energéticas na Análise de Reservatórios Cilíndricos*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- MOHRI, F., AZRAR, L., POTIER-FERRY, M., 2001, “Flexural-Torsional Post-Buckling Analysis of Thin-Walled Elements with Open Sections”, *Thin-Walled Structures*, v. 39, pp. 907-938.
- MOORE, D. B., 1986, “A Non-Linear Theory for the Behaviour of Thin-Walled Sections Subject to Combined Bending and Torsion”, *Thin-Walled Structures*, v. 4, pp. 449-466.
- NAGAHAMA, K. J., 2003, *Análise de Estabilidade Local em Perfis de Seção Aberta em Aço e em Resina Reforçada com Fibra de Vidro*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- NOVOZHILOV, V. V., 1961, *Theory of Elasticity*, London, Pergamon Press.
- PI, Y. L., TRAHAIR, N. S., RAJASEKARAN, S., 1992, “Energy Equation for Beam Lateral Buckling”, *Journal of Structural Engineering*, v. 118, n. 6, pp. 1462-1479.
- POLILLO, V. R., 1991, *Análise Dinâmica da Flexo-Torção de Hastes de Paredes Delgadas com Não-Linearidade Geométrica*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- POLILLO, V.R., 1999, “Análise Não-Linear Geométrica da Flexo-Torção em Hastes de Paredes Delgadas com Seção Aberta”, Conferência proferida na FAU/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- POLILLO, V. R., GARCIA, L. F. T., VILLAÇA, S. F., 1998, “Discussão Sobre Formulações Geometricamente Não-Lineares para a Flexo-Torção em Hastes de Paredes Delgadas com Seção Aberta”, *RBCM – Journal of the Braz. Soc. Mechanical Sciences*, v. XX, n. 1, pp. 103-115.

- RAJASEKARAN, S., 1977, "Finite Element Method for Plastic Beam-Columns". In: Chen, W. e Atsuta, T., *Space Behavior*, v. 2, Chapter 12, U.S.A, McGraw-Hill International Book Company, Inc.
- ROBERTS, T. M., AZIZIAN, Z. G., 1983, "Nonlinear Analysis of Thin Walled Bars of Open Cross-Section", *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 25, n. 8, pp. 565-577.
- RONAGH, H. R., BRADFORD, M. A., 1999, "Non-Linear Analysis of Thin-Walled Members of Open Cross-Section", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 46, pp. 535-552.
- RONAGH, H. R., BRADFORD, M. A., ATTARD, M. M., 2000a, "Nonlinear Analysis of Thin-Walled Members of Variable Cross-Section. Part I: Theory", *Computers & Structures*, v. 77, pp. 285-299.
- RONAGH, H. R., BRADFORD, M. A., ATTARD, M. M., 2000b, "Nonlinear Analysis of Thin-Walled Members of Variable Cross-Section. Part II: Application", *Computers & Structures*, v. 77, pp. 301-313.
- SAPKAS, A., KOLLAR, L. P., 2002, "Lateral-Torsional Buckling of Composite Beams", *International Journal of Solids and Structures*, v. 39, pp. 2939-2963.
- SILVA, M. A., SCHULZ, M., 2002, "Flambagem de Perfis de Aço de Paredes Delgadas e Seção Aberta Qualquer". In: *Anais do II Congresso Internacional da Construção Metálica – II CICOM*, São Paulo, Novembro.
- TRAHAIR, N. S., WOOLCOCK, S. T., 1973, "Effect of Major Axis Curvature on I-Beam Stability", *ASCE – Journal of the Engineering Mechanics Division*, v. 99, pp. 85-98.
- TSO, W. K., GHOBARAH, A. A., 1971, "Non-Linear Non-Uniform Torsion of Thin-Walled Beams", *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 13, pp. 1039-1047.

- VERMA, A. K., DEY, S. S., 1991, "Integrated Analysis of Curved Bridge Superstructures by Variational Finite Difference Method", *Computers & Structures*, v. 38, n. 5/6, pp. 597-603.
- VILLAÇA, S. F., GARCIA, L. F. T., POLLILO, V. R., 1993, "Uma Solução Numérica para Análise Não-Linear Geométrica da Flexo-Torção em Hastes de Paredes Delgadas com Seção Aberta", *Revista Brasileira de Engenharia - Caderno de Engenharia Estrutural*, v. 10, n. 2, pp. 21-42.
- VLASSOV, B. Z., 1962, *Pieces Longues en Voiles Minces*. Paris, France, Éditions Eyrolles.
- WEKEZER, J. W., 1985, "Nonlinear Torsion of Thin-walled Bars of Variable, Open Cross-Sections", *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 27, n. 10, pp. 631-641.
- YANG, Y., SHIEH, M., 1990, "Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points", *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, v. 28, n. 12, pp. 2110-2116.
- YOO, C. H., 1980, "Bimoment Contribution to Stability of Thin-Walled Assemblages", *Computers & Structures*, v. 11, pp. 465-471.