FORMULAÇÕES ALTERNATIVAS DO MEC PARA PROBLEMAS ELASTODINÂMICOS DE MECÂNICA DA FRATURA COM O USO DA FUNÇÃO DE GREEN NUMÉRICA.

Carlos Andrés Reyna Vera-Tudela

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

_____

Prof. José Claudio de Faria Telles, Ph. D.

_____

Prof. José Antonio Marques Carrer, D. Sc.

_____

Profa. Solange Guimarães, D. Sc.

_____

Prof. Carlos Friedrich Loeffler Neto, D. Sc.

_____

Prof. Luis Paulo da Silva Barra, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
SETEMBRO DE 2003

VERA-TUDELA, CARLOS ANDRÉS REYNA

Formulações Alternativas do MEC para Problemas Elastodinâmicos de Mecânica da Fratura com o uso da Função de Green Numérica [Rio de Janeiro] 2003

X, 123 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D. Sc., Engenharia Civil, 2003)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Elementos de Contorno

2. Mecânica da Fratura

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Aos meus pais e irmãos pelo apoio constante onde amizade, carinho e união estão sempre presentes.

AGRADECIMENTOS

Meu agradecimento muito especial a Márcia por todo o apoio, carinho e companheirismo, que foi a motivação e a força necessária para a elaboração deste trabalho.

Ao Prof. Telles devo um muito obrigado pela paciência, por ter me permitido aprender, não só, sobre o tema deste trabalho, mas também sobre humanidade e respeito.

Ao Prof. Carrer que acompanhou e colaborou com o andamento deste trabalho, sempre com sugestões importantes, além da boa amizade formada nestes anos.

Aos Profs. Webe, Solange e Santiago com os quais tive oportunidade de compartilhar não só trabalho mas também momentos que enriqueceram a minha experiência de vida.

Ao Prof. Luis Paulo que desde o inicio do doutorado sempre colaborou em tirar as muitas duvidas que apareceram.

Ao Prof. Carlos Loeffler pela amizade, ajuda e onde sempre temos uma porta aberta.

Aos colegas do LAMEC, onde longas conversas de trabalho uniram-se aos bons momentos de descanso e de lazer, em particular para Cláudio, Cleberson, Ana Senna, Thilene e Lúcia. E principalmente para Ana Ibis que cedeu o programa que serviu de base para a elaboração desta tese e com quem tive oportunidade de trabalhar, conversar e discutir durante longas horas.

Aos funcionários Ivone e André, sempre presentes para dar a ajuda necessária.

Aos meus amigos Ricardo, Mauricio, Guillermo e Amanda, irmãos em todo sentido.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro sem o qual seria impossível finalizar esta tese.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D. Sc.)

FORMULAÇÕES ALTERNATIVAS DO MEC PARA PROBLEMAS ELASTODINÂMICOS DE MECÂNICA DA FRATURA COM O USO DA FUNÇÃO DE GREEN NUMÉRICA.

Carlos Andrés Reyna Vera-Tudela

Setembro/2003

Orientador: José Claudio de Faria Telles

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho apresenta dois modelos do Método dos Elementos de Contorno: um com a técnica da Dupla Reciprocidade e o outro com o Método da Quadratura Operacional. Implementa-se a Função de Green Numérica para a resolução de problemas dinâmicos da Mecânica da Fratura Linear Elástica. Mostra-se o desenvolvimento desde as aplicações em problemas de campo escalar, passando pelo estudo para problemas da elastodinâmica 2D e sua extensão em problemas com trinca reta. Diversos testes são implementados e seus resultados comparados com outras formulações e/ou resultados analíticos, demonstrando a eficiência da formulação desenvolvida.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D. Sc.)

ALTERNATIVE BEM FORMULATIONS FOR ELASTODYNAMIC FRACTURE MECHANICS PROBLEMS WITH THE USE OF A NUMERICAL GREEN'S FUNCTION.

Carlos Andrés Reyna Vera-Tudela

September/2003

Advisor: José Claudio de Faria Telles

Department: Civil Engineering

This work presents two boundary element models, one with a Dual Reciprocity technique and the other with the Operational Quadrature Method. In both, a Numerical Green's Function is implemented to solve linear elastodynamic fracture mechanics problems. The formulation is presented starting from scalar field problems and the study of 2D elastodynamics, up to its extension to straight crack applications. Several testes are implemented and the results are compared with other numerical and/or analytical results to demonstrate the efficiency of the formulations.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 ..... **1**
Introdução 1

CAPÍTULO 2 ..... **6**
Equações da Elastodinâmica Linear 6
2.1 Introdução 6
2.2 Conceitos Básicos 6
2.2.1 Notação Cartesiana Indicial 6
2.2.2 Convenção Soma e Derivadas 7
2.2.3 Delta de Dirac 10
2.2.4 Delta de Kronecker 10
2.2 Equações da Elastodinâmica 11
2.3 A Transformada de Laplace 16

CAPÍTULO 3 ..... **17**
Mecânica da Fratura Linear Elástica 17
3.1 Introdução 17
3.2 Princípios Básicos da MFLE 18
3.2.1 Modos de Carregamento 18
3.2.2 Campo de Tensões na Ponta da Trinca 19
3.2.3 O Fator de Intensidade de Tensão 21

CAPÍTULO 4 ..... **22**
O Método dos Elementos de Contorno 22
4.1 Introdução 22
4.2 Formulação do MEC para Elasticidade 2D 23
4.3 Tensão em Ponto Interno 31

CAPÍTULO 5 ..... **32**
O Método da Quadratura Operacional 32
5.1 Introdução 32
5.2 A Integral de Convolução 32
5.3 O Método da Quadratura Operacional 35

CAPÍTULO 6 ..... **39**
A Função de Green Numérica 39
6.1 Introdução 39
6.2 Equação Integral de Contorno para Problemas da Fratura 39
6.3 A Função de Green Numérica 42
6.4 Tensão em Ponto Interno 52
6.5 Abertura da Trinca para o Problema real 54

CAPÍTULO 7 ..... **56**
Equação Integral de Contorno na Elastodinâmica 2D 56
7.1 Introdução 56
7.2 Formulação da Elastodinâmica 2D no domínio do tempo 57
7.3 Solução Fundamental 60

7.4 O Método da Dupla Reciprocidade 61
7.4.1 Introdução 61
7.4.2 O Método da Dupla Reciprocidade para a Elasticidade 62
7.4.3 Função Auxiliar de Interpolação 64
7.4.4 A Dupla Reciprocidade em Análise Dinâmica 65
7.4.5 O Problema da Resposta Dinâmica 67
7.5 Exemplo de Aplicação 69

CAPÍTULO 8 ..... **73**
DR e a FGN na Mecânica da Fratura Elastodinâmica 2D 73
8.1 Introdução 73
8.2 A Dupla Reciprocidade na Mecânica da Fratura 74
8.3 Exemplo de Viga bi-apoiada com trinca de bordo centrada. 76
8.4 Exemplo no domínio da freqüência. 78

CAPÍTULO 9 ..... **81**
Simulação de Trincas Retas em Problemas Governados pela Equação Escalar da Onda 81
9.1 Introdução 81
9.2 Equação Escalar da Onda 82
9.3 Formulação do MEC para a Equação Escalar da Onda 83
9.4 Solução Fundamental 85
9.5 Exemplo da Simulação de uma trinca reta 86

CAPÍTULO 10 ..... **90**
MQO e a FGN na Mecânica da Fratura Elastodinâmica 2D 90
10.1 Introdução 90
10.2 Equação Integral de Contorno e a Função de Green Numérica 91
10.3 Aplicação a Trincas Retilíneas Horizontais 94
10.4 Exemplo que Simula uma Trinca num meio Infinito 95
10.5 Problema de Chen 96

CAPÍTULO 11 ..... **100**
Conclusões 100

Bibliografia **103**

Apêndice A **109**
Implementação Numérica 109
A.1 Introdução 109
A.2 Procedimento Numérico Geral 110
A.2.1 Geometria e Funções de Interpolação 111
A.2.2 Integração Numérica Não Singular 115
A.2.3 Integração Singular 118

Apêndice B **121**
Funções Modificadas de Bessel de Segunda Classe 121

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3.1: Modos de Carregamento básicos de uma trinca 18
Figura 3.2: Coordenadas r e θ próximas da ponta da trinca 20
Figura 4.1: Ponto singular ξ no contorno, circundado por uma região semicircular ... 29
Figura 6.1: Definição da geometria do corpo: domínio Ω, contorno externo Γ^E e contorno da trinca $\Gamma^F = \Gamma^S \cup \Gamma^I$. 40
Figura 6.2: Carga unitária F_i aplicada no espaço infinito com trinca descarregada. ... 42
Figura 7.1: Barra de seção transversal constante axialmente solicitada por um carregamento do tipo Heaviside 70
Figura 7.2: Valores normalizados para o deslocamento longitudinal em função do parâmetro temporal do ponto A 70
Figura 7.3: Valores normalizados da força de superfície no nó de contorno C 71
Figura 7.4: Resultados do deslocamento axial para o ponto interno B (6,3) 72
Figura 8.1: Viga bi-apoiada carregada e trinca de bordo 77
Figura 8.2: Variação do Fator de Intensidade de Tensão com o comprimento da trinca 78
Figura 8.3: Geometria da chapa retangular com trinca centrada 79
Figura 8.4: Resultados numéricos do problema da chapa retangular com trinca central 80
Figura 9.1 Abertura da trinca x Tempo para β=0.3787 87
Figura 9.2: Geometria do exemplo da simulação de trinca reta 88
Figura 9.3: Comparação da abertura para o nó central da trinca 89
Figura 9.4: Abertura da trinca para diferentes valores de β 89
Figura 10.1: Trinca excêntrica em uma placa sob carregamento do tipo Heaviside ... 95
Figura 10.2: Valores de K_1/K_0 referente ao tempo 96
Figura 10.3: Chapa com trinca centrada e carregamento aplicado 97
Figura 10.4: Fator de intensidade de tensão para o Problema do Chen 98
Figura 10.5: Fator de intensidade de tensão para o Problema do Chen Malha refinada 99

Figura A.1: Elemento linear e as funções de interpolação.....111
Figura A.2: Elemento quadrático e as funções de interpolação.....114

CAPÍTULO 1

Introdução

As trincas ocupam um lugar muito importante nas causas de falha dos componentes de máquinas ou na construção civil. Praticamente todo elemento fabricado apresenta alguma trinca que pode ser causada pela movimentação de materiais na confecção, por algum tratamento térmico ou ainda como conseqüência da ocorrência de vibração na área. Na verdade, as causas para o aparecimento de trincas são numerosas e dependem de muitos fatores como o próprio material, condições de trabalho do elemento ou até condições externas. As trincas são a principal causa de diminuição da resistência do material, o que pode levar ao colapso do elemento. Desta forma, a necessidade de estudar trincas foi ganhando importância devido ao seu envolvimento com fatores econômicos, da própria vida útil do equipamento e da segurança das pessoas.

Pesquisadores vêm trabalhando neste sentido, desenvolvendo diversas técnicas de forma a prever o comportamento de trincas e, em conseqüência, a vida útil de componentes. Diversas propostas vêm sendo apresentadas com êxito e o número de publicações científicas demonstra a importância que a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) tem na engenharia.

Dentre todo este universo destaca-se como ferramenta o Método dos Elementos de Contorno (MEC) que vem sendo aplicado com êxito a diversas propostas de resolução de problemas de engenharia, seja no caso estático ou no

dinâmico, uma vez que os resultados obtidos apresentam alta precisão, com a vantagem adicional da discretização somente do contorno do problema. No campo da mecânica da fratura os registros mostram que foi Cruse, 1972, o primeiro a se aprofundar no estudo do MEC como formulação aplicada à MFLE. Na atualidade, pode-se considerar que três alternativas do MEC são predominantes no estudo das trincas. A primeira é uma extensão do método da sub-região (BLANDFORD, INGRAFFEA & LIGGETT, 1981) onde divide-se o corpo trincado em duas regiões e cada face da trinca pertence a um domínio. Na superfície de interface entre as regiões, a compatibilidade de deslocamentos e o equilíbrio de tensões são impostos. A segunda é a formulação mista (MARTHA, GRAY & INGRAFFEA, 1992; GUIMARÃES & TELLES, 1994) baseada na equação dos deslocamentos e de suas derivadas na direção normal. Assim, cada equação integral, a clássica e a hipersingular, é aplicada a uma superfície diferente da trinca evitando-se o uso de subregiões que introduzem um contorno artificial no problema. A terceira utiliza a Função de Green correspondente ao problema (SNYDER & CRUSE, 1975) que permite a representação exata de trincas pela equação integral de contorno, sem a necessidade de se efetuar a discretização das mesmas: as integrações são feitas somente sobre o contorno externo do problema e a formulação apresenta uma excelente precisão.

Neste trabalho, são desenvolvidas duas formulações do Método dos Elementos de Contorno com a Função de Green Numérica (TELLES, CASTOR & GUIMARÃES, 1995) a primeira adota a Dupla Reciprocidade e a segunda adota o Método da Quadratura Operacional para a resolução de problemas dinâmicos na mecânica da fratura linear elástica no domínio do tempo. Ambas constituem um avanço na abordagem dos problemas dinâmicos através do MEC, como se explica a seguir. Embora o uso da Dupla Reciprocidade em problemas da Mecânica da Fratura

não seja recente (WEN, et al., 1999 CHIRINO, et al., 1994), sua implementação conjunta com a Função de Green Numérica representa uma novidade na pesquisa e com as vantagens explicitadas no parágrafo anterior. Além disso, o Método da Quadratura Operacional foi estendido para problemas da elastodinâmica 2D, que associado à Função de Green Numérica para formar uma nova formulação representa um passo importante e necessário para resolver os problemas dinâmicos da MFLE através do MEC. As diferentes fases da evolução do trabalho, com seus respectivos exemplos de aplicação, foram apresentados de forma aproximadamente cronológica ao desenvolvimento real dos trabalhos de pesquisa.

A estrutura geral do trabalho pode ser resumida a seguir:

No Capítulo 2 é feita uma revisão dos conceitos relacionados com a elastodinâmica linear que serve de base para o desenvolvimento teórico que é apresentado nos capítulos seguintes.

Os princípios básicos da Mecânica da Fratura Linear Elástica são apresentados no Capítulo 3, onde mostram-se os modos de carregamento, as expressões que definem o campo de tensões na ponta da trinca e o fator de intensidade de tensões, que é o parâmetro mais importante utilizado para aferir os resultados deste trabalho.

O desenvolvimento da formulação do Método dos Elementos de Contorno, para elasticidade 2D, parte da Equação de Navier até chegar na Equação Integral de Contorno clássica apresentada no Capítulo 4.

No Capítulo 5 é introduzido o Método da Quadratura Operacional. Inicialmente são definidas a Integral de Convolução e alguns conceitos que relacionam a convolução de duas funções e a transformada de Laplace destas mesmas funções. A formulação é apresentada de forma a poder ser acondicionada facilmente às equações integrais do Método dos Elementos de Contorno.

A Função de Green Numérica é discutida no Capítulo 6, onde a partir da equação integral de contorno, é feito o desenvolvimento para problemas elastodinâmicos em sólidos trincados. Num pós-processamento podem-se calcular os deslocamentos e forças de superfície nas faces da trinca. Este procedimento é apresentado no final do capítulo.

Após apresentar os conceitos básicos relacionados com as metodologias utilizadas, a estratégia de trabalho é relacioná-los analisando primeiro problemas da elastodinâmica 2D e depois introduzindo a Mecânica da Fratura estática e finalmente a dinâmica. A definição da técnica da Dupla Reciprocidade foi adiada propositadamente para o capítulo 7 para, desta forma, destacar sua importância dentro do contexto da elastodinâmica 2D.

No Capítulo 7 apresenta-se a implementação do Método dos Elementos de Contorno com o Método da Quadratura Operacional aplicado a problemas da elastodinâmica 2D. Também é feito o desenvolvimento do Método dos Elementos de Contorno com a Dupla Reciprocidade, que faz parte da pesquisa iniciada pelo autor no estudo da Mecânica da Fratura. Cada uma das pesquisas implementará a Função de Green Numérica e servem como fonte de estudo para analisar o comportamento das técnicas e avaliar suas potencialidades e dificuldades. Exemplos iniciais a problemas da elastodinâmica 2D são apresentados.

No Capítulo 8 é desenvolvida a formulação do MEC com a Dupla Reciprocidade e a Função de Green Numérica. Para validar a formulação apresentam-se dois exemplos: o primeiro corresponde a uma viga bi-apoiada com trinca de bordo centrada, onde se compara o efeito de uma carga concentrada com uma ação de domínio como peso próprio. O segundo exemplo calcula o fator de intensidade de tensão numa chapa retangular carregada harmonicamente.

No Capítulo 9 estudam-se problemas governados pela equação escalar da onda, onde se implementou a Função de Green Numérica com o objetivo de simular uma trinca reta num problema de campo escalar. Este foi o passo inicial onde estudou-se a compatibilidade das formulações desenvolvidas para trincas retas com o Método da Quadratura Operacional. Exemplos de aplicação são apresentados como forma de verificar a validade da formulação.

No Capítulo 10, a partir de expressões mostradas nos capítulos anteriores, desenvolve-se uma formulação do Método dos Elementos de Contorno com a Função de Green Numérica e o Método da Quadratura Operacional para resolver problemas da elastodinâmica 2D da mecânica da fratura. São mostradas aplicações para a resolução de problemas onde se apresentam trincas retilíneas e horizontais, destacando-se o problema clássico de CHEN, 1975.

Finalmente, no Capítulo 11 são expostas as considerações finais e sugestões para futuros trabalhos.

CAPÍTULO 2

Equações da Elastodinâmica Linear

2.1 Introdução

Alguns conceitos básicos da elastodinâmica linear são apresentados neste capítulo. Inicia-se com a Notação Cartesiana Indicial e suas convenções para soma e derivadas (CHOU e PAGANO, 1967). A seguir são definidos a função Delta de Dirac (SOKOLNIKOFF, 1964) e o operador Delta de Kronecker. Finalmente definem-se as Equações da Elastodinâmica e os conceitos de ondas elásticas planas.

2.2 Conceitos Básicos

2.2.1 Notação Cartesiana Indicial

A descrição de problemas físicos ou de engenharia leva freqüentemente a expressões que diferem de outras somente nos índices, que fazem referência às direções dos eixos coordenados cartesianos. Nesses casos, se uma das equações é escrita, as outras expressões podem ser derivadas pela permutação cíclica, a qual simplesmente corresponde a uma rotação ortogonal dos eixos coordenados.

Neste trabalho utiliza-se x_1, x_2 e x_3 para representar os três eixos Cartesianos de coordenadas, em vez de *x, y, z*. Ou também de forma simplificada x_j, onde $j = 1, 2, 3$.

2.2.2 Convenção Soma e Derivadas

Considere as seguintes somas:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 \\ x_2' &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 \\ x_3' &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Como uma forma de simplificar as Eqs. (2.1), pode-se reescrevê-las novamente como:

$$\begin{aligned} x_1' &= \sum_{i=1}^{3} a_{i1}x_i \\ x_2' &= \sum_{i=1}^{3} a_{i2}x_i \\ x_3' &= \sum_{i=1}^{3} a_{i3}x_i \end{aligned} \tag{2.2}$$

Observando-se as Eqs. (2.2), é possível escrevê-las de uma forma mais concisa ainda como segue:

$$x_j' = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}x_i \qquad j = 1,2,3 \tag{2.3}$$

A notação indicial estabelece simplesmente que:

$$x_j' = a_{ij}x_i \qquad i,j = 1,2,3 \tag{2.4}$$

Na Eq. (2.4) define-se:

Índice Livre: é aquele que aparece isoladamente em cada uma das parcelas que compõem uma equação e dos dois lados da igualdade (índice *j*).

Índice Mudo: são aqueles que se repetem na equação e de um lado da igualdade (índice *i*).

Algumas regras para a notação indicial podem ser resumidas a seguir

- Um índice só pode aparecer até duas vezes em cada monômio da expressão.
- Se um índice aparece uma vez num monômio, este deve aparecer nos outros monômios.

É importante mencionar a relação entre a quantidade de índices livres e a ordem tensorial da grandeza envolvida, assim:

Ordem zero: escalar – nenhum índice livre.

Primeira ordem: vetores – um índice livre.

Segunda ordem: diádico – dois índices livre.

Terceira ordem: três índices livres.

A notação indicial também é uma poderosa ferramenta para representar a derivação. Faz-se uso de uma vírgula para indicá-la, a partir da qual se seguem os índices, cuja quantidade caracteriza a ordem da derivação.

Para ilustrar, considere uma função escalar ϕ com argumento vetorial:

$$\phi = \phi(x_1, x_2, x_3) \tag{2.5}$$

Logo:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} dx_3 \tag{2.6}$$

Na notação indicial escreve-se como:

$$d\phi = \phi_{,j}\, dx_j \tag{2.7}$$

Pode-se observar que a Eq. (2.7) é uma grandeza escalar.

Por outro lado o gradiente desta mesma função ϕ, é dado por:

$$grad\,\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} e_3 \tag{2.8}$$

onde e_1, e_2 e e_3 são os vetores unitários dos eixos cartesianos; assim, na forma indicial, tem-se:

$$grad\,\phi = \phi_{,i} \tag{2.9}$$

Considerando uma função vetorial ***v***, pode-se seguir o mesmo raciocínio para obter:

$$grad\,v = v_{i,j} \tag{2.10}$$

Finalmente, para um diádico ***T***, tem-se:

$$grad\,T = T_{ij,k} \tag{2.11}$$

Por outro lado, o divergente da função vetorial ***v*** é dado por:

$$div\,v = v_{i,i} \tag{2.12}$$

No caso de uma função diádica ***T***, seu divergente representa-se pela seguinte expressão:

$$div\,T = T_{ij,i} \tag{2.13}$$

Um ponto sobre a função indica derivada com relação ao tempo, sendo o número de pontos igual à ordem da derivada. Assim, para o diádico ***T***, pode-se escrever:

$$\frac{dT_{ij}}{dt} = \dot{T}_{ij} \tag{2.14}$$

2.2.3 Delta de Dirac

É uma função auxiliar na representação de forças concentradas na teoria da elasticidade. Considere-se o ponto ξ como o de aplicação da força ($\xi \in \Omega$).

$$\begin{cases} \Delta(\xi, x) = 0 & se\ x \neq \xi \\ \int_{\Omega} \Delta(\xi, x)\, d\Omega(x) = 1 & se\ x \in \Omega \end{cases} \tag{2.15}$$

A seguinte propriedade da função delta de Dirac é utilizada para deduzir equações integrais de contorno.

$$\int_{\Omega} \Delta(\xi, x)\ f(x)\ d\Omega(x) = f(\xi) \tag{2.16}$$

2.2.4 Delta de Kronecker

Considere-se o gradiente $\partial x_i / \partial x_k$ do vetor posição x_i. Como foi visto antes, na Eq. (2.10), este gradiente corresponde a um tensor de segunda ordem. Considere-se, também, que x_1, x_2 e x_3 são variáveis independentes definidas da forma seguinte:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_i}{\partial x_k} = 1 & para\ i = k \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial x_k} = 0 & para\ i \neq k \end{cases} \tag{2.17}$$

As componentes do tensor de segunda ordem podem ser escritas de uma forma conveniente por δ_{ik}, que é chamado de delta de Kronecker e é definido por:

$$\begin{cases} \delta_{ik} = 1 & para \quad i = k \\ \delta_{ik} = 0 & para \quad i \neq k \end{cases} \tag{2.18}$$

A representação matricial deste operador corresponde à matriz identidade; assim:

$$\delta_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

2.2 Equações da Elastodinâmica

Um corpo sólido se deforma quando sujeito a mudanças de temperatura ou a uma carga externa (POPOV, 1992). A deformação linear é definida pelo deslocamento u_i (devido ao fator externo) por unidade de comprimento (l).

$$\varepsilon = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{du}{dl} \tag{2.20}$$

Além da deformação linear, um corpo em geral também pode ser deformado linearmente nas outras duas direções ortogonais dos eixos cartesianos.

Assim, na teoria da elasticidade linear as relações entre as deformações lineares e os deslocamentos são expressas por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2.21}$$

onde ε_{ij} são componentes do tensor de deformações específicas.

Define-se a equação de equilíbrio dinâmico:

$$\sigma_{ij},_j + b_i = \rho \ddot{u}_i \tag{2.22}$$

onde ρ é a massa específica do corpo; σ_{ij} são as componentes do tensor de tensões; b_i são as componentes das forças de volume e $\ddot{u}_i$ são as componentes do vetor aceleração.

Uma terceira equação, conhecida como a Lei de Hooke, fornece a relação entre as tensões e as deformações específicas:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \tag{2.23}$$

onde μ e λ são as constantes de Lamê, definidas pelas duas expressões seguintes em função do módulo de Young (E) e do coeficiente de Poisson (ν):

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.24}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{2.25}$$

Substituindo-se a Eq. (2.21) na Eq. (2.23), obtém-se σ_{ij} em função das derivadas de deslocamentos, assim:

$$\sigma_{ij} = \mu(u_i,_j + u_j,_i) + \lambda u_k,_k \delta_{ij} \tag{2.26}$$

A Eq. (2.26) é substituída na Eq. (2.22) e obtêm-se as equações de movimento de Navier:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + b_i = \rho \ddot{u}_i \tag{2.27}$$

que constituem um sistema linear de equações diferenciais de um corpo sólido, homogêneo, isotrópico e elástico linear.

A solução para as equações de Navier é obtida junto com as condições iniciais e as condições de contorno definidas a seguir.

As condições iniciais requerem que se prescreva os deslocamentos (u_i) e velocidades (v_i) no tempo inicial (t_0).

$$\begin{cases} u_i(x, t_0) = u_i^0(x) \\ \dot{u}_i(x, t_0) = v_i^0(x) \end{cases} \tag{2.28}$$

As condições de contorno podem ser:

essenciais

$$u_i(x,t) = \overline{u}_i(x,t) \qquad em\ \Gamma_1 \tag{2.29}$$

ou naturais

$$p_i(x,t) = \overline{p}_i(x,t) \qquad em\ \Gamma_2 \tag{2.30}$$

onde $\overline{u}_i$ e $\overline{p}_i$ são, respectivamente, os valores de deslocamentos e forças de superfície prescritos no contorno $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Por outro lado, p_i representa as componentes das forças de superfície (força por unidade de área) obtidas através da condição de equilíbrio no contorno Γ do corpo, que estabelece:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \tag{2.31}$$

onde n_j são os cosenos diretores do vetor unitário normal à superfície e dirigido para fora do domínio.

A Eq. (2.27) pode ser escrita de forma vetorial (FREUND,1998) segundo mostra-se a seguir:

$$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u) + b = \rho \ddot{u} \tag{2.32}$$

Substituindo o vetor identidade $\nabla \times (\nabla \times u) = \nabla(\nabla \cdot u) - \nabla^2 u$ na Eq. (2.32) e após algumas operações algébricas pode-se reescrevê-la como:

$$Cp^2 \nabla(\nabla \cdot u) - Cs^2 \nabla \times (\nabla \times u) + b = \ddot{u} \tag{2.33}$$

onde,

$$Cp = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \tag{2.34}$$

e

$$Cs = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{2.35}$$

Seja a força de domínio, *b*, nula ao longo do tempo. Aplicando o operador divergente $\nabla.$ a cada termo da Eq. (2.33) obtém-se:

$$Cp^2 \nabla^2 (\nabla \cdot u) = (\nabla \cdot u)_{,tt} \tag{2.36}$$

Assim, a Eq. (2.36) é uma expressão homogênea escalar que representa a propagação de uma onda longitudinal com velocidade *Cp*.

Por outro lado, se o operador rotacional $\nabla \times$ é aplicado na Eq. (2.33):

$$Cs^2 \nabla^2 (\nabla \times u) = (\nabla \times u)_{,tt} \tag{2.37}$$

Da mesma forma pode-se deduzir que a Eq. (2.37) é uma expressão homogênea vetorial que representa a propagação de uma onda transversal com velocidade *Cs*.

Ou seja, num corpo sólido, elástico e isotrópico, ondas longitudinais propagam-se com velocidade *Cp*, enquanto, ondas transversais propagam-se com velocidade *Cs*. Ademais, os dois tipos de ondas são independentes no interior do sólido. A onda transversal não provoca uma mudança de volume, enquanto que a onda longitudinal provoca dilatação e compressão alternadamente.

Dividindo-se a Eq. (2.34) pela Eq. (2.35):

$$\frac{Cp}{Cs} = \frac{\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}}{\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} > 1 \tag{2.38}$$

Assim, da Eq. (2.38) pode-se concluir que as ondas longitudinais são mais velozes do que as ondas transversais.

Em contornos tais como as superfícies de uma trinca, por exemplo, os dois tipos de ondas interagem. Uma completa discussão sobre o assunto encontra-se em ACHENBACH, 1973.

2.3 A Transformada de Laplace

Dada uma função $F(x,t)$ de variável real *t*, $t \geq 0$, chama-se transformada de Laplace de $F(x,t)$ a uma nova função $f(x,s)$, onde *s* é uma variável complexa da forma $s = a + i\omega$, definida por (SPIEGEL, 1992; FEDELINSKI, et al., 1996):

$$f(x,s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot F(x,t)\, dt = L\left[F(x,t)\right] \tag{2.39}$$

A função $F(x,t)$ é chamada de função original e $f(x,s)$ é chamada de função imagem.

Em geral, $f(x,s)$ existirá para $s > \alpha$ ($\alpha \in \Re$, é um valor de convergência). *L* é chamado de operador da transformada de Laplace.

Nos próximos capítulos a definição e notação para deslocamentos e forças de superfície no domínio transformado de Laplace, serão:

$$\begin{aligned} \hat{u}_i(x,s) &= L\left[u_i(x,t)\right] \\ \hat{p}_i(x,s) &= L\left[p_i(x,t)\right] \end{aligned} \tag{2.40}$$

CAPÍTULO 3

Mecânica da Fratura Linear Elástica

3.1 Introdução

A falha de materiais sólidos tem sido observada pelo homem há muitos anos. A ocorrência de falhas normalmente é o resultado de deficiências do projeto, processamento inadequado dos materiais (impurezas, defeitos internos, microestruturais e superficiais, tratamentos térmicos incorretos, etc.), deterioração em serviço (erosão, corrosão, ataque químico, radiação, etc.) e operação incorreta do equipamento pelo homem (sobrecarga, reparação ineficiente, colisões, etc.) (ABM, 1986).

A análise das causas de falhas pode ser feita através de interpretação e caracterização da superfície da fratura, que se apresenta como um mapa topográfico que freqüentemente revela a história dos eventos que precederam à falha. Esta análise de fraturas assumiu um papel de tal importância para a ciência dos materiais que em 1944 foi criado o termo "fractografia" para descrever a ciência que estuda a superfície de fraturas.

A importância da análise de fraturas reside no fato de permitir estabelecer um elemento de caracterização da causa da falha. Logo, seu objetivo é saber porque um determinado equipamento falhou para, a partir daí, chegar-se à meta final da análise, que é a prevenção de novas ocorrências.

Em geral o problema de fratura está ligado a análise de tensões e deformações próximas à ponta da trinca e assim, definir a severidade do trincamento ou o tempo de vida da peça.

Foi GRIFFITH, 1920, que fez o primeiro estudo sistemático sobre a fratura: afirmava que uma trinca propaga-se sob o efeito de tensões externas quando a diminuição da energia elástica armazenada no corpo sendo rompido é no mínimo igual à energia necessária à criação de novas superfícies no corpo (LATZKO, 1979). IRWIN, 1957, demonstrou que esta energia aproximada é equivalente a um valor de tensão crítico perto do extremo da trinca.

O parâmetro mais importante criado para caracterizar e prever o comportamento de uma trinca é o fator de intensidade de tensão definido pela Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE).

A seguir, apresentam-se os fundamentos básicos da Mecânica da Fratura.

3.2 Princípios Básicos da MFLE

3.2.1 Modos de Carregamento

A Fig. (3.1) mostra, esquematicamente os três modos possíveis de carregamento de uma trinca sob a ação de forças.

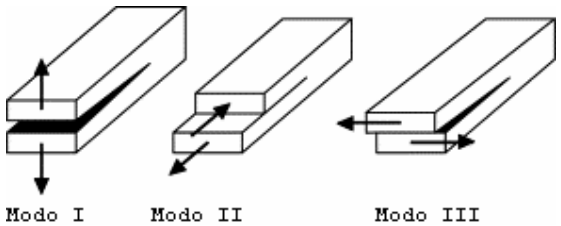

Figura 3.1: Modos de Carregamento básicos de uma trinca.

a) Modo I: carregamento em tração, com deslocamentos das superfícies da trinca perpendicularmente a si mesmas.

b) Modo II: carregamento em cisalhamento (escorregamento) com deslocamentos das superfícies da trinca paralelamente a si mesmas e perpendicularmente à frente de propagação.

c) Modo III: carregamento em cisalhamento (rasgamento) com deslocamento das superfícies das trincas paralelamente a si mesmas e à frente de propagação.

O Modo I é encontrado na maioria dos casos práticos da engenharia. É comum, também, que a propagação de trincas ocorra por combinação dos modos de trincamento, principalmente dos modos I e II.

3.2.2 Campo de Tensões na Ponta da Trinca

Usando as funções de tensão de Westergard, IRWIN,1957, demonstrou que o campo de tensões elásticas na proximidade da ponta da trinca (comprimento *2a*), pode ser descrito no modo I, por:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot cos\frac{\theta}{2}\left[1 - sen\frac{\theta}{2}\ sen\frac{3\theta}{2}\right] \tag{3.1}$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot cos\frac{\theta}{2}\left[1 + sen\frac{\theta}{2}\ sen\frac{3\theta}{2}\right] \tag{3.2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot sen\frac{\theta}{2} cos\frac{\theta}{2} cos\frac{3\theta}{2} \tag{3.3}$$

onde o raio r e o ângulo θ são definidos na Fig. (3.2) e K_I é o fator de intensidade de tensão do modo I de trincamento definido por Irwin, 1957.

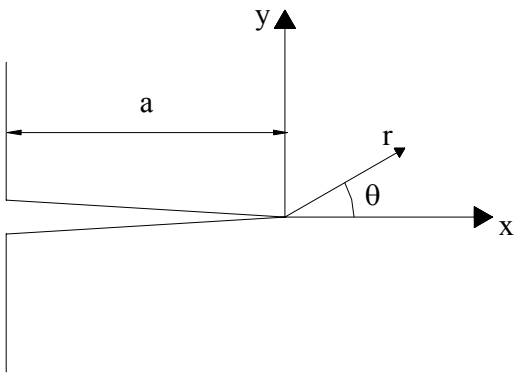

Figura 3.2: Coordenadas r e θ próximas da ponta da trinca.

Os deslocamentos correspondentes para o estado plano de deformações ($\varepsilon_z = 0$) são:

$$u = \frac{K_I}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} cos\frac{\theta}{2}\left[1 - 2\nu + sen^2\frac{\theta}{2}\right] \tag{3.4}$$

$$v = \frac{K_I}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2}} sen\frac{\theta}{2}\left[2 - 2\nu - cos^2\frac{\theta}{2}\right] \tag{3.5}$$

$$w = 0 \tag{3.6}$$

Destas equações vê-se que as tensões atingem valores extremamente altos à medida em que se aproxima da ponta da trinca ($r \to 0$). Na prática isto não ocorre,

pois o material escoa plasticamente formando uma zona deformada plasticamente na ponta da trinca.

3.2.3 O Fator de Intensidade de Tensão

O fator de intensidade de tensão *K*, é função da forma e tamanho da trinca, tipo de carregamento e configuração da geometria do componente estrutural.

Das equações para a tensão na ponta da trinca, pode-se escrever *K* da forma simplificada seguinte:

$$K = Y \sigma \sqrt{\pi a} \tag{3.7}$$

onde σ é a tensão aplicada; a é o valor de metade da trinca e Y é uma função adimensional da geometria da trinca.

Define-se:

$$K_0 = \sigma \sqrt{\pi a} \tag{3.8}$$

como o fator de intensidade de tensão de uma chapa infinita carregada remotamente, contendo uma trinca de comprimento *2a*. No presente trabalho os resultados dos exemplos estudados são apresentados considerando o valor de *Y* para o modo I de carregamento, assim:

$$Y = \frac{K_I}{K_0} = \frac{K_I}{\sigma \sqrt{\pi a}} \tag{3.9}$$

CAPÍTULO 4

O Método dos Elementos de Contorno

4.1 Introdução

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é uma ferramenta eficiente na solução de problemas da Ciência e da Engenharia. O número e a diversidade de trabalhos publicados é uma constatação da importância que o MEC tem na pesquisa atual, e um exemplo disso será visto ao longo deste trabalho.

Neste capítulo é desenvolvida a formulação para a obtenção da equação integral de contorno e para pontos internos (Brebbia, et al., 1984) em problemas da teoria da elasticidade. Nos capítulos seguintes, é feita a extensão destes conceitos para uma formulação no domínio do tempo e no domínio transformado, problemas de potencial governados pela equação escalar da onda, problemas da elastodinâmica 2D sem trinca e com trinca e até um estudo sobre o método da Dupla Reciprocidade. Cada uma destas partes mostra as características do MEC para diferentes aplicações.

Normalmente um capítulo sobre a formulação do MEC traria a apresentação da solução fundamental do problema, mas pelo explicado no parágrafo anterior, esta é adiada para o capítulo correspondente, onde será dada em termos das funções de Bessel.

Além do desenvolvimento da equação integral para pontos internos, por um processo limite, o ponto fonte é levado para o contorno de tal forma a relacionar somente valores de contorno; finalmente, é apresentada a solução para tensões em pontos internos.

4.2 Formulação do MEC para Elasticidade 2D

Estuda-se o desenvolvimento matemático para a obtenção das equações integrais de contorno que governam o problema da elasticidade 2D. Os problemas pertinentes à mecânica dos sólidos são, na sua maior parte, problemas de campo vetorial, pois a cada ponto estão associadas grandezas cuja definição requer a identificação de módulo, direção e sentido, como no caso dos deslocamentos e forças de superfície.

Inicia-se o estudo tomando a equação de Navier, Eq. (2.27), mas considerando algumas simplificações, como carga de domínio nula ($b_i = 0$) e problema estático ($\ddot{u}_i = 0$).

Assim, a equação de Navier pode ser escrita da forma seguinte:

$$\mu\, u_{j,ii} + (\lambda + \mu) u_{i,ij} = 0 \tag{4.1}$$

A formulação tradicional do MEC consiste em ponderar a Eq. (4.1) por uma função u^*, com características especiais e depois integrá-la no domínio. Por meio de um tratamento matemático adequado, transforma-se esta equação integral de domínio em uma equação integral de contorno.

Então, tomando a Eq. (4.1), ponderando-a e integrando-a no domínio, tem-se a seguinte expressão:

$$\mu \int_{\Omega} u_{j,ii}\, u_j^*\, d\Omega + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} u_{i,ij}\, u_j^*\, d\Omega = 0 \tag{4.2}$$

O procedimento a seguir utiliza principalmente a propriedade da integração por partes:

$$\int_{\Omega} u\, v_{,i}\, d\Omega = \int_{\Omega} (u\, v)_{,i}\, d\Omega - \int_{\Omega} v\, u_{,i}\, d\Omega \tag{4.3}$$

e, do teorema da divergência:

$$\int_{\Omega} (u\ v)_{,i}\, d\Omega = \int_{\Gamma} u\ v\, n_i\, d\Gamma \tag{4.4}$$

Desenvolvendo a primeira parcela da Eq. (4.2), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{j,ii}\, u^*_j\, d\Omega &= \int_{\Omega} \left[\left(u_{j,i}\, u^*_j \right)_{,i} - \left(u_{j,i}\, u^*_{j,i} \right) \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left[\left(u_{j,i}\, u^*_j \right)_{,i} - \left(u_j\, u^*_{j,i} \right)_{,i} + \left(u_j\, u^*_{j,ii} \right) \right] d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \left(u_{j,i}\, u^*_j \right) n_i\, d\Gamma - \int_{\Gamma} \left(u_j\, u^*_{j,i} \right) n_i\, d\Gamma + \int_{\Omega} \left(u_j\, u^*_{j,ii} \right) d\Omega \end{aligned} \tag{4.5}$$

Da mesma forma, desenvolve-se a segunda parcela da Eq. (4.2):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{i,ij}\, u^*_j\, d\Omega &= \int_{\Omega} \left[\left(u_{i,i}\, u^*_j \right)_{,j} - \left(u_{i,i}\, u^*_{j,j} \right) \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left[\left(u_{i,i}\, u^*_j \right)_{,j} - \left(u_i\, u^*_{j,j} \right)_{,i} + \left(u_i\, u^*_{j,ji} \right) \right] d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \left(u_{i,i}\, u^*_j \right) n_j\, d\Gamma - \int_{\Gamma} \left(u_i\, u^*_{j,j} \right) n_i\, d\Gamma + \int_{\Omega} \left(u_i\, u^*_{j,ji} \right) d\Omega \end{aligned} \tag{4.6}$$

Trocando os índices da última parcela da Eq. (4.6), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} u_{i,ij}\, u^*_j \, d\Omega = \int_{\Gamma} \left(u_{i,i}\, u^*_j\right) n_j \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \left(u_i\, u^*_{j,j}\right) n_i \, d\Gamma + \int_{\Omega} \left(u_j\, u^*_{i,ij}\right) d\Omega \tag{4.7}$$

Substituindo as Eqs. (4.5) e (4.7) na Eq. (4.2) e arrumando, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\mu\left(u_j\, u^*_{j,ii}\right) + (\lambda+\mu)\left(u_j\, u^*_{i,ij}\right)\right] d\Omega + \int_{\Gamma} \left[\mu\left(u_{j,i}\, u^*_j\, n_i - u_j\, u^*_{j,i}\, n_i\right)\right] d\Gamma + \\ + \int_{\Gamma} \left[(\lambda+\mu)\left(u_{i,i}\, u^*_j\, n_j - u_i\, u^*_{j,j}\, n_i\right)\right] d\Gamma = 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Como u^* é a solução fundamental do problema, ela deve satisfazer à equação de Navier, ou seja:

$$\mu\, u^*_{j,ii} + (\lambda+\mu) u^*_{i,ij} + b_j = 0 \tag{4.9}$$

onde:

$$b_j = \Delta(\xi, x) P_j \quad , P_j = 1 \tag{4.10}$$

Desta forma a primeira parcela da Eq. (4.8) fica:

$$\int_{\Omega} \left[\mu\left(u_j\, u^*_{j,ii}\right) + (\lambda+\mu)\left(u_j\, u^*_{i,ij}\right)\right] d\Omega = \int_{\Omega} -\Delta(\xi; x) P_j\, u_j \, d\Omega = -P_j\, u_j(\xi; x) \tag{4.11}$$

Assim, substituindo a Eq. (4.11) na Eq. (4.8) tem-se:

$$P_j\, u_j(\xi) = \int_{\Gamma} \left[\mu\left(u_{j,i}\, u^*_j\, n_i - u_j\, u^*_{j,i}\, n_i\right)\right] d\Gamma + \int_{\Gamma} \left[(\lambda+\mu)\left(u_{i,i}\, u^*_j\, n_j - u_i\, u^*_{j,j}\, n_i\right)\right] d\Gamma \tag{4.12}$$

Introduz-se na Eq. (4.12) uma expressão auxiliar da forma seguinte:

$$\int_{\Gamma} \mu\left(u_{i,j}\, u_j^*\, n_i - u_{i,j}\, u_j^*\, n_i\right) d\Gamma = 0 \tag{4.13}$$

Reagrupando, tem-se:

$$\begin{aligned} P_j\, u_j(\xi) = & \int_{\Gamma} \left[\mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) n_i + \lambda\left(u_{i,i}\right) n_j\right] u_j^*\, d\Gamma - \\ & - \int_{\Gamma} \left[\mu\, u_j\, u_{j,i}^*\, n_i + \lambda\, u_i\, u_{j,j}^*\, n_i - \mu\, u_{i,i}\, u_j^*\, n_j + \mu\, u_i\, u_{j,j}^*\, n_i + \mu\, u_{i,j}\, u_j^*\, n_i\right] d\Gamma \end{aligned} \tag{4.14}$$

Define-se a condição de contorno da Equação de Navier:

$$p_i = \mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) n_i + \lambda\, u_{k,k}\, n_i \tag{4.15}$$

Observa-se que a Eq. (4.15) tem a mesma estrutura da primeira integral da Eq. (4.14), de tal forma que pode-se substituir tal parcela pelo equivalente p_i. Assim, substituindo e reagrupando os termos:

$$\begin{aligned} P_j\, u_j(\xi) = & \int_{\Gamma} p_j\, u_j^*\, d\Gamma - \int_{\Gamma} \left[\mu\left(u_{j,i}^*\, u_j\, n_i\right) + \lambda\left(u_{j,j}^*\, u_i\, n_i\right)\right] d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} \mu\left(u_i\, u_{j,j}^*\, n_i - u_{i,i}\, u_j^*\, n_j + u_{i,j}\, u_j^*\, n_i\right) d\Gamma \end{aligned} \tag{4.16}$$

Trocando-se a ordem dos índices da primeira parcela da segunda integral do lado direito e introduzindo uma nova identidade auxiliar do mesmo tipo da Eq. (4.13) vem:

$$P_j\,u_j(\xi)=\int_\Gamma p_j\,u_j^*\,d\Gamma-\int_\Gamma\left[\mu\left(u_i^*{}_{,j}\right)n_j+\lambda\left(u_j^*{}_{,j}\right)n_i\right]u_i\,d\Gamma+$$
$$-\int_\Gamma\mu\left(u_i\,u_j^*{}_{,j}\,n_i-u_i{}_{,i}\,u_j^*\,n_j+u_i{}_{,j}\,u_j^*\,n_i\right)d\Gamma-\int_\Gamma\mu\left(u_i\,u_j^*{}_{,i}-u_i\,u_j^*{}_{,i}\right)n_j\,d\Gamma \tag{4.17}$$

Reagrupando a expressão anterior:

$$P_j\,u_j(\xi)=\int_\Gamma p_j\,u_j^*\,d\Gamma-\int_\Gamma\left[\mu\left(u_i^*{}_{,j}+u_j^*{}_{,i}\right)n_j+\lambda\left(u_j^*{}_{,j}\right)n_i\right]u_i\,d\Gamma+$$
$$-\int_\Gamma\mu\left(u_i\,u_j^*{}_{,j}\,n_i-u_i{}_{,i}\,u_j^*\,n_j+u_i{}_{,j}\,u_j^*\,n_i-u_i\,u_j^*{}_{,i}\;n_j\right)d\Gamma \tag{4.18}$$

A segunda integral da Eq. (4.18) tem a mesma estrutura da Eq. (4.15), de tal forma que será substituída por p_i^*. Assim:

$$\int_\Gamma\left[\mu\left(u_i^*{}_{,j}+u_j^*{}_{,i}\right)n_j+\lambda\left(u_j^*{}_{,j}\right)n_i\right]u_i\,d\Gamma=\int_\Gamma p_i^*\,u_i\,d\Gamma \tag{4.19}$$

Da Eq. (4.18), trabalha-se a última integral:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma\mu\left(u_i\,u_j^*{}_{,j}+u_i{}_{,j}\,u_j^*\right)n_i\,d\Gamma-\int_\Gamma\mu\left(u_i{}_{,i}\,u_j^*+u_i\,u_j^*{}_{,i}\right)n_j\,d\Gamma&=\\=\int_\Gamma\mu\left(u_i\,u_j^*\right)_{,j}\,n_i\,d\Gamma-\int_\Gamma\mu\left(u_i\,u_j^*\right)_{,i}\,n_j\,d\Gamma&\\=\int_\Omega\mu\left(u_i\,u_j^*\right)_{,ji}\,d\Omega-\int_\Omega\mu\left(u_i\,u_j^*\right)_{,ij}\,d\Omega&\\=\int_\Omega\mu\left[\left(u_i\,u_j^*\right)_{,ji}-\left(u_i\,u_j^*\right)_{,ij}\right]d\Omega=0&\end{aligned} \tag{4.20}$$

Finalmente, substituindo a Eq. (4.20) e (4.19) na Eq. (4.18) tem-se:

$$P_j\,u_j(\xi)+\int_\Gamma p_j^*\,u_j\,d\Gamma=\int_\Gamma u_j^*\,p_j\,d\Gamma \tag{4.21}$$

Também é conveniente estruturar-se a solução fundamental de modo que cada carga concentrada p_i atue independentemente uma da outra. Desse modo os deslocamentos e forças de superfície fundamentais ficam escritos na forma:

$$\begin{aligned} u_j^* &= u_{ij}^*(\xi;x)P_i = u_{1j}^* P_1 + u_{2j}^* P_2 \\ p_j^* &= p_{ij}^*(\xi;x)P_i = p_{1j}^* P_1 + p_{2j}^* P_2 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Dessa forma u_{ij}^* e p_{ij}^* passam a representar deslocamentos e forças de superfície na direção *j* no ponto campo *x*, resultado de uma carga unitária agindo na direção *i* e aplicada no ponto fonte ξ. Assim a Eq. (4.21) fica:

$$u_i(\xi) + \int_\Gamma u_j(x)\, p_{ij}^*(\xi;x)\, d\Gamma(x) = \int_\Gamma p_j(x) u_{ij}^*(\xi;x)\, d\Gamma(x) \tag{4.23}$$

A Eq. (4.23) foi escrita para um ponto no interior do domínio. Uma vez que o ponto fonte é interno, a equação contém apenas integrandos regulares. Uma vez que as incógnitas $u_j(x)$ e $p_j(x)$ do problema pertencem ao contorno $(x \in \Gamma)$ para a resolução do problema, torna-se necessário considerar o limite quando o ponto fonte (ξ) tende ao contorno. Esta operação pode ser implementada levando o ponto fonte ao contorno, centralizado dentro de uma região semicircular de raio ε, segundo mostra-se na Fig.(4.1).

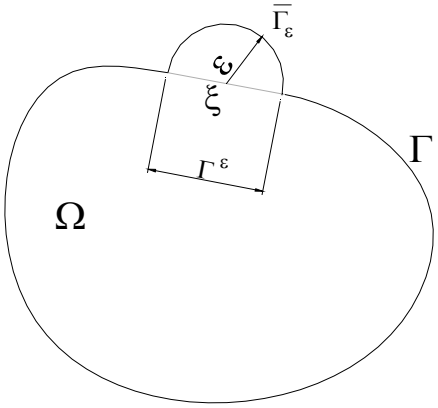

Figura 4.1: Ponto singular ξ no contorno, circundado por uma região semicircular.

Com esta configuração, o contorno completo é dividido em duas partes, na forma:

$$\Gamma = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \overline{\Gamma}_\varepsilon \right) \tag{4.24}$$

Assim, a Eq. (4.23) pode ser escrita:

$$u_i(\xi) + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \overline{\Gamma}_\varepsilon} u_j(x)\, p_{ij}^*(\xi, x)\, d\Gamma(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \overline{\Gamma}_\varepsilon} p_j(x)\, u_{ij}^*(\xi, x)\, d\Gamma(x) \tag{4.25}$$

Na Eq. (4.25) a integral do lado direito da equação contém um integrando de singularidade fraca, da ordem $Ln\left(1/r\right)$ e é integrável como uma integral imprópria. A integral do lado esquerdo tem uma singularidade forte, de ordem $1/r$.

A seguir, estuda-se o limite de cada integral quando $\varepsilon \to 0$.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\overline{\Gamma}_\varepsilon} u_j(x)\,p_{ij}^*(\xi,x)\,d\Gamma(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\overline{\Gamma}_\varepsilon} u_j(x)\,p_{ij}^*(\xi,x)\,d\Gamma(x)+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} u_j(x)\,p_{ij}^*(\xi,x)\,d\Gamma(x) \tag{4.26}$$

A primeira integral do lado direito da Eq. (4.26) sobre $\overline{\Gamma}_\varepsilon$, pode ser decomposta, por conveniência, da seguinte forma:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\overline{\Gamma}_\varepsilon} u_j(x)\,p_{ij}^*(\xi,x)\,d\Gamma(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\overline{\Gamma}_\varepsilon}\left[u_j(x)-u_j(\xi)\right]p_{ij}^*(\xi,x)\,d\Gamma(x)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{u_j(\xi)\int_{\overline{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi,x)\,d\Gamma(x)\right\} \tag{4.27}$$

A primeira integral à direita da Eq. (4.27) desaparece pela própria condição de continuidade de $u_j(x)$. A segunda integral tem limite finito e não é singular; portanto, pode-se escrever:

$$C_{ij}(\xi)=\left\{\delta_{ij}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\overline{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi,x)\,d\Gamma(x)\right\} \tag{4.28}$$

Finalmente, quando $\varepsilon\to 0$, a Eq. (4.23) no contorno pode ser escrita da seguinte forma:

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi)+\int_\Gamma u_j(x)\,p_{ij}^*(\xi,x)\,d\Gamma(x)=\int_\Gamma p_j(x)\,u_{ij}^*(\xi,x)\,d\Gamma(x) \tag{4.29}$$

onde a integral do lado esquerdo é interpretada no sentido de valor principal de Cauchy em ξ. O coeficiente $C_{ij}(\xi)$ para contornos suaves, onde a tangente em ξ é contínua, vale $\delta_{ij}/2$.

4.3 Tensão em Ponto Interno

Após o cálculo dos valores de contorno, pode ser feito o cálculo dos valores de deslocamentos nos pontos internos, utilizando-se a Eq. (4.29), considerando $C_{ij}(\xi)=\delta_{ij}$.

O cálculo das tensões em pontos internos é feito através da derivada dos deslocamentos dados pela Eq. (4.23) com relação às coordenadas do ponto ξ, usando a Eq. (2.26). Assim:

$$\sigma_{ij}(\xi)=\int_{\Gamma} U^{*}_{ijk}(\xi,x)\,p_k(x)\,d\Gamma(x)-\int_{\Gamma} P^{*}_{ijk}(\xi,x)\,u_k(x)\,d\Gamma(x) \tag{4.30}$$

Os tensores de terceira ordem U^{*}_{ijk} e P^{*}_{ijk} são dados por:

$$U^{*}_{ijk}(\xi,x)=\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\delta_{jk}\frac{\partial u^{*}_{lk}}{\partial x_l}+\mu\left[\frac{\partial u^{*}_{jk}}{\partial x_i}+\frac{\partial u^{*}_{ik}}{\partial x_j}\right] \tag{4.31}$$

$$P^{*}_{ijk}(\xi,x)=\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\delta_{jk}\frac{\partial p^{*}_{lk}}{\partial x_l}+\mu\left[\frac{\partial p^{*}_{jk}}{\partial x_i}+\frac{\partial p^{*}_{ik}}{\partial x_j}\right] \tag{4.32}$$

Para finalmente ter:

$$p_i=\sigma_{ij}\,n_j \tag{4.33}$$

CAPÍTULO 5

O Método da Quadratura Operacional

5.1 Introdução

O Método dos Elementos de Contorno no domínio do tempo é uma importante ferramenta no estudo de problemas transientes de campo escalar e da elastodinâmica. Sabe-se que a solução fundamental é dependente do tempo e diversos autores têm apresentado suas propostas de resolução do problema. Neste capítulo uma formulação alternativa do Método dos Elementos de Contorno para resolver problemas de mecânica da fratura é desenvolvida. A estratégia parte da formulação no domínio do tempo, mas substitui a convolução existente por um somatório envolvendo a solução fundamental no domínio transformado de Laplace. A resposta do problema, entretanto, é obtida no domínio do tempo. Esse procedimento está baseado no Método da Quadratura Operacional (LUBICH, 1988 & 1994), e caracteriza uma alternativa elegante para a solução do problema.

Assim, neste capítulo é apresentada uma breve introdução aos conceitos da integral de convolução para depois ampliar para o Método da Quadratura Operacional que é fundamental para parte do trabalho.

5.2 A Integral de Convolução

No capítulo 2 apresentou-se uma breve definição da transformada de Laplace (Eq. (2.39)) necessária para o desenvolvimento que segue. Será apresentada uma operação que envolve a transformada e a transformada inversa de Laplace e que será importante para o melhor entendimento do Método da Quadratura Operacional.

Sabe-se que a transformada de Laplace de um produto de duas funções não é igual ao produto das transformadas de Laplace das duas funções. No entanto, existe

uma operação entre funções que, quando transformada, dá o produto das transformadas das duas funções. Essa operação entre funções é designada *convolução* (BRIGHAM, 1988).

Convolução de duas funções é um conceito físico importante em muitos campos das ciências e da engenharia. No entanto, no caso de muitas aplicações matemáticas a sua compreensão e visualização não são muito evidentes.

Seja a integral de convolução dada pela seguinte expressão:

$$y(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = f(t) * g(t) \tag{5.1}$$

onde a função *y(t)* é chamada da convolução das funções *f(t)* e *g(t)*.

Não é o objetivo deste trabalho fazer um desenvolvimento matemático da integral de convolução, mas é importante apresentar o seguinte teorema: *A transformada de Laplace do produto de convolução entre duas funções f e g, é igual ao produto das transformadas de Laplace das duas funções.*

A partir da definição da transformada de Laplace, Eq. (2.39), e do produto de convolução, Eq. (5.1), obtém-se:

$$L[f(t) * g(t)] = \int_0^\infty \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) e^{-st} d\tau\, dt \tag{5.2}$$

onde *f* e *g* são as funções originais. A integral em τ pode ser estendida até o infinito, se a multiplicarmos por uma função Heaviside que anule a parte deste *t* até o infinito:

$$L[f(t)*g(t)]=\int_0^\infty\int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)u(t-\tau)e^{-st}\,d\tau\,dt \tag{5.3}$$

Trocando a ordem da integração, obtém-se:

$$L[f(t)*g(t)]=\int_0^\infty f(\tau)\left[\int_0^\infty g(t-\tau)u(t-\tau)e^{-st}\,dt\right]d\tau \tag{5.4}$$

O termo entre colchetes é a transformada de Laplace da função g , deslocada em t , isto é, é a transformada de Laplace de:

$$g(t-\tau)u(t-\tau) \tag{5.5}$$

A Equação (5.5) é igual à transformada de Laplace de g (*G(s)*, função imagem), multiplicada pela exponencial de $-s\tau$. Assim, tem-se o resultado:

$$L[f(t)*g(t)]=G(s)\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau \tag{5.6}$$

Observe-se, então, que a Eq. (5.6) é igual ao produto das transformadas de Laplace das duas funções:

$$L[f(t)*g(t)]=G(s)F(s) \tag{5.7}$$

O teorema anterior também implica, em forma inversa, que a transformada inversa de Laplace de um produto de funções seja igual ao produto de convolução entre as transformadas inversas das duas funções. O teorema de convolução é útil no cálculo de transformadas inversas de funções complicadas que possam ser escritas como o produto de funções simples. O produto de convolução entre funções verifica a propriedade comutativa, associativa e distributiva em relação à soma de funções.

5.3 O Método da Quadratura Operacional

O Método da Quadratura Operacional (MQO), desenvolvido por LUBICH, 1988 & 1994, aproxima a convolução da função *y(t)* em $u^t(t-\tau)$ e *f(t)* por uma convolução discreta, usando somente valores de $\hat{u}^t(s)$ (transformada de Laplace de $u^t(t)$) e de *f(t)*. Este desenvolvimento servirá como base para a resolução numérica da equação integral de contorno no domínio do tempo da equação escalar de onda. Define-se:

$$y(t)=\int_0^t u^t(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau = u^t(t) * f(t) \tag{5.8}$$

onde $u^t(t)$ representa a solução fundamental do problema no Método dos Elementos de Contorno no domínio do tempo (DT-MEC). Assim, a Eq. (5.8) pode ser representada na seguinte forma discretizada:

$$y(n\,\Delta t) = \sum_{k=0}^{n} \omega_{n-k}(\Delta t)\, f(k\,\Delta t) \qquad , n = 0, 1, \ldots, N \tag{5.9}$$

Na Eq. (5.9), ω_n representa os pesos de integração que correspondem aos coeficientes de uma série de potências que aproxima a transformada de Laplace $\hat{u}^t(s)$ da solução fundamental $u^t(t)$ da seguinte forma:

$$\hat{u}^t(s) = \hat{u}^t\left(\frac{\gamma(z)}{\Delta t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n (\Delta t)\, z^n \tag{5.10}$$

onde na função $\gamma(z)$, z é uma variável complexa. Além disso, a seguinte condição deve ser atendida:

$\left|\hat{u}^t(s)\right| \to 0$ *quando* $|s| \to \infty$ *para* $R(s) \geq q$ (q é um numero real e positivo e R define a parte real de s)

Os coeficientes da série na Eq. (5.10) são definidos pela forma integral de Cauchy:

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \hat{u}^t\left(\frac{\gamma(z)}{\Delta t}\right) z^{-n-1}\, dz = \frac{\rho^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{u}^t\left(\frac{\gamma\left(\rho e^{il2\pi/L}\right)}{\Delta t}\right) e^{-inl2\pi/L} \tag{5.11}$$

onde ρ é o raio de um círculo fechado que pertence ao domínio de analiticidade da função $\hat{u}^t(s)$ e s é o parâmetro da transformada. Usando coordenadas polares, a integral presente na equação é aproximada mediante um método trapezoidal de L intervalos $\frac{2\pi}{L}$ como apresentado à direita da Eq. (5.11).

Tanto nas séries das Eqs. (5.10) e (5.11) quanto na integral da Eq. (5.11), a função $\hat{u}^t(s)$ encontra-se avaliada no ponto $\frac{\gamma(z)}{\Delta t}$, sendo $\gamma(z)$ o quociente dos

polinômios gerados por um método linear "multistep", usado para aproximar certa função *x(t)* que, por sua vez, é a solução de uma equação diferencial de primeira ordem. Assim, escreve-se:

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t} = s\,x(t) + f(t) \qquad com \quad x(0) = 0 \tag{5.12}$$

A função $x(t) = x(n\,\Delta t)$ pode ser calculada, aproximadamente, determinando x_n para o método linear "multistep" da forma seguinte:

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j\, x_{n-j} = \Delta t \sum_{j=0}^{k} \beta_j\,(s\,x_{n-j} + f((n-j)\Delta t) \tag{5.13}$$

com iguais intervalos Δt, e com valor inicial $x_{-k} = x_{-1} = 0$. Deve-se atentar ao fato de que nesta representação do método "multistep" não é possível obter o valor discreto de x_n. Assim, a Eq. (5.13) é multiplicada pela variável complexa z^n e efetua-se a soma em *n*, como segue (SCHANZ & ANTES, 1997)

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\alpha_0\, x_n + \alpha_1\, x_{n-1} + \ldots + \alpha_k\, x_{n-k}\right] z^n = \Delta t \sum_{n=0}^{\infty}\Big[\beta_0\,(s\,x_n + f(n\,\Delta t)) + \ldots \\ + \beta_k\,(s\,x_{n-k} + f((n-k)\,\Delta t))\Big] z^n\end{aligned} \tag{5.14}$$

Finalmente, considerando $f(t<0) = 0$, com séries de potências para $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n\, z^n$ e $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n\,\Delta t) z^n$ em:

$$\left[\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_k z^k\right]\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n = \Delta t\left[\beta_0 + \beta_1 z + \ldots + \beta_k z^k\right] \times\left[s\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} g(n\Delta t) z^n\right] \tag{5.15}$$

ou, considerando

$$\gamma(z) = \frac{\alpha_0 + \ldots + \alpha_k z^k}{\beta_0 + \ldots + \beta_k z^k} \tag{5.16}$$

a Eq. (5.15) resulta na expressão seguinte,

$$\left(\frac{\gamma(z)}{\Delta t} - s\right)\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} g(n\Delta t) z^n \tag{5.17}$$

O quociente $\gamma(z)$, que caracteriza o método "multistep", deve ser A(α)-estável para um ângulo α positivo, estável em uma vizinhança do infinito, fortemente estável em zero e consistente de ordem *p* (LUBICH & SCHNEIDER, 1992). Destas condições pode-se estabelecer o seguinte:

- $\gamma(z)$ não tem zeros ou pólos sobre uma área fechada $(|z| \le 1)$, com exceção de algum em $|z| = 1$,
- $|arg\,\gamma(z)| \le \pi - \alpha$, com $|z| \le 1$, para $\alpha > 0$,
- $\Delta t^{-1}\gamma\left(e^{-\Delta t}\right) = 1 + O\left(\Delta t^p\right)$, com $\Delta t \to 0$, para $p \ge 1$.

Admitindo um erro δ no cálculo da transformada $\hat{u}^t(s)$ da Eq. (5.10), a escolha de *L*=*N* e $\rho^N = \sqrt{\delta}$ conduz a um erro no cálculo dos pesos ω_n da ordem de $O\left(\sqrt{\delta}\right)$ (LUBICH, 1988).

CAPÍTULO 6

A Função de Green Numérica

6.1 Introdução

A Função de Green Numérica (FGN) é uma ferramenta que permite a solução de problemas da Mecânica da Fratura. Uma vantagem importante é que remove a interpolação do elemento sobre a superfície da trinca (Telles et al., 1995). Este procedimento elimina do sistema de equações final os deslocamentos e forças de superfície nas faces da trinca.

Em Barra e Telles, 1999, é apresentada uma extensão ao problema dinâmico no domínio da freqüência e no domínio transformado de Laplace, onde o tratamento da parte real e imaginária da freqüência é feita de forma separada (no cálculo do termo corretor).

Neste capítulo é apresentada a formulação básica para o posterior cálculo da Função de Green numérica no domínio transformado de Laplace.

6.2 Equação Integral de Contorno para Problemas da Fratura

Para obter a Função de Green numérica é necessária a superposição da solução fundamental no domínio transformado de Laplace com uma solução complementar, que leva à satisfação da condição da trinca ser descarregada. Desta forma pode-se escrever:

$$\hat{u}_{ij}^{*}(r,s)=\hat{u}_{ij}^{t}(r,s)+\hat{u}_{ij}^{c}(r,s) \tag{6.1}$$

$$\hat{p}_{ij}^{*}(r,s)=\hat{p}_{ij}^{t}(r,s)+\hat{p}_{ij}^{c}(r,s) \tag{6.2}$$

onde $r=|x-\xi|$ é a distância entre os pontos campo (x) e fonte (ξ), s é o parâmetro da transformada de Laplace ($s=a+i\omega$), $\hat{u}_{ij}^{*}$ e $\hat{p}_{ij}^{*}$ são os deslocamentos e forças de superfície fundamentais na direção j no ponto campo x devidos ao carregamento unitário aplicado no ponto fonte ξ na direção i. Os índices t e c correspondem às componentes da solução padrão no domínio transformado e da solução complementar, respectivamente, do problema fundamental definido como um espaço infinito contendo uma trinca descarregada.

Na Fig. (6.1) apresenta-se a geometria de um problema clássico da Mecânica da Fratura, onde considera-se que a trinca pertence ao domínio Ω, o contorno externo é Γ^{E} e a superfície da trinca é Γ^{F} com $\Gamma^{F}=\Gamma^{S}\cup\Gamma^{I}$, onde Γ^{S} é o contorno superior e Γ^{I} é o contorno inferior.

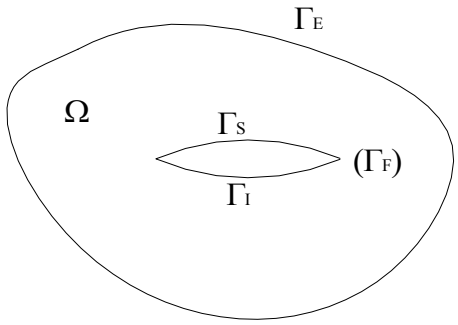

Figura 6.1: Definição da geometria do corpo: domínio Ω, contorno externo Γ^{E} e contorno da trinca $\Gamma^{F}=\Gamma^{S}\cup\Gamma^{I}$.

A partir deste ponto, por questão de simplicidade e padronização com as referências bibliográficas, as Eqs. (6.1) e (6.2) serão tratadas da forma seguinte:

$$u_{ij}^{*}(\xi,x)=u_{ij}^{t}(\xi,x)+u_{ij}^{c}(\xi,x) \tag{6.3}$$

$$p_{ij}^{*}(\xi,x)=p_{ij}^{t}(\xi,x)+p_{ij}^{c}(\xi,x) \tag{6.4}$$

A equação integral de contorno derivada da Eq. (4.29) para um elemento que contém uma trinca é expressa por:

$$\begin{aligned} C_{ij}(\xi)u_j(\xi)=&\int_{\Gamma^E} p_j(x)u_{ij}^{t}(\xi;x)d\Gamma(x)-\int_{\Gamma^E} u_j(x)p_{ij}^{t}(\xi;x)d\Gamma(x)\\ &+\int_{\Gamma^F} p_j(x)u_{ij}^{t}(\xi;x)d\Gamma(x)-\int_{\Gamma^F} u_j(x)p_{ij}^{t}(\xi;x)d\Gamma(x) \end{aligned} \tag{6.5}$$

onde as integrais com sinal negativo no segundo membro devem ser consideradas como valor principal de Cauchy de acordo com a posição do ponto fonte.

A equação integral para forças de superfície é obtida por derivação da Eq. (6.5):

$$\begin{aligned} p_j(\xi)=&\int_{\Gamma^E} p_j(x)U_{ij}^{t}(\xi;x)d\Gamma(x)-\int_{\Gamma^E} u_j(x)P_{ij}^{t}(\xi;x)d\Gamma(x)\\ &+\int_{\Gamma^F} p_j(x)U_{ij}^{t}(\xi;x)d\Gamma(x)-\int_{\Gamma^F} u_j(x)P_{ij}^{t}(\xi;x)d\Gamma(x) \end{aligned} \tag{6.6}$$

6.3 A Função de Green Numérica

Considere-se um meio elástico infinito, com uma trinca descarregada de geometria arbitrária, sob a ação de uma carga pontual unitária aplicada no ponto ξ, conforme a Figura (6.2). Pode-se também visualizar à direita a superposição da solução do domínio transformado com a solução complementar apresentada na Eq. (6.3).

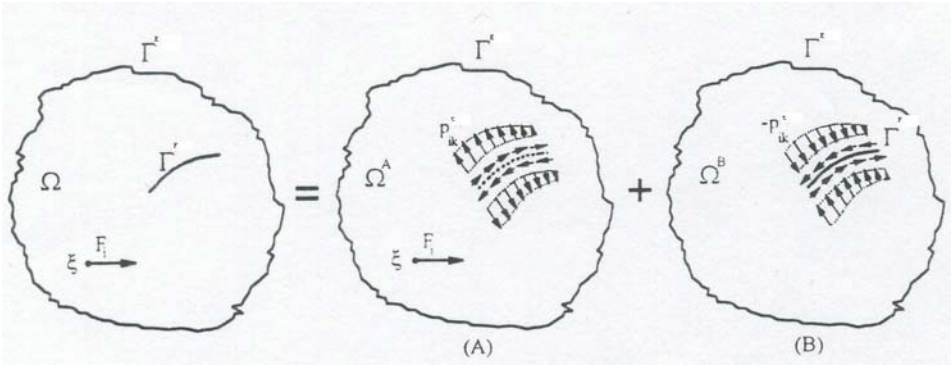

Figura 6.2: Carga unitária F_i aplicada no espaço infinito com trinca descarregada. (A) Solução no domínio transformado;(B) Solução complementar.

A solução do problema no domínio transformado é conhecida, faltando determinar a solução do problema complementar. A estratégia de trabalho é aplicar as equações clássica e hipersingular (GUIMARÃES & TELLES,1994) do MEC para um ponto fonte interno *x* e um ponto campo $\zeta \in \Gamma^F$. As Eqs. (6.5) e (6.6) satisfazem as condições de regularidade de radiação de tal forma que as integrais de contorno no infinito se anulam. Para simular a condição de trinca descarregada é necessário considerar a condição de contorno ao longo da trinca da solução (B) da Fig. (6.2) de tal forma que $p^c_{ik}(\xi,\zeta) = -p^t_{ik}(\xi,\zeta)$. Assim, fica definida a seguinte equação integral para o problema complementar:

$$u_{ij}^{c}(\xi,x)=-\int_{\Gamma^F} u_{jk}^{t}(x;\zeta)\,p_{ik}^{t}(\xi,\zeta)\,d\Gamma(\zeta)-\int_{\Gamma^F} p_{jk}^{t}(x;\zeta)u_{ik}^{c}(\xi,\zeta)\,d\Gamma(\zeta) \tag{6.7}$$

Lembrando que $\Gamma^F=\Gamma^S\cup\Gamma^I$, é possível integrar somente sobre Γ^I, considerando que a força de superfície ao longo da superfície superior é de sinal contrário à da face inferior e que os deslocamentos $u_{jk}^{t}(x;\zeta)$ são contínuos, o que fornece:

$$\begin{aligned} u_{ij}^{c}(\xi,x)=-&\int_{\Gamma^I} u_{jk}^{t}(x;\zeta)\left[p_{ik}^{t}(\xi,\zeta^S)+p_{ik}^{t}(\xi,\zeta^I)\right]d\Gamma(\zeta)\\ &+\int_{\Gamma^I} p_{jk}^{t}(x;\zeta)\left[u_{ik}^{c}(\xi,\zeta^S)-u_{ik}^{c}(\xi,\zeta^I)\right]d\Gamma(\zeta) \end{aligned} \tag{6.8}$$

O campo de tensões no contorno da trinca é contínuo: assim, as forças de superfície da primeira integral da Eq. (6.8) se anulam. Define-se a abertura da trinca como a diferença entre o deslocamento do contorno superior Γ^S e o inferior Γ^I:

$$c_{ik}(\xi,\zeta)=u_{ik}^{c}(\xi,\zeta^S)-u_{ik}^{c}(\xi,\zeta^I) \tag{6.9}$$

Logo, pode-se escrever a seguinte equação:

$$u_{ij}^{c}(\xi,x)=\int_{\Gamma^I} p_{jk}^{t}(x,\zeta)\,c_{ik}(\xi,\zeta)\,d\Gamma(\zeta) \tag{6.10}$$

E, analogamente, para força de superfície:

$$p_{ij}^{c}(\xi,x)=\int_{\Gamma^I} P_{jk}^{t}(x,\zeta)\,c_{ik}(\xi,\zeta)\,d\Gamma(\zeta) \tag{6.11}$$

As Eqs. (6.10) e (6.11) ficam definidas se for conhecido o valor da abertura da trinca (Eq.(6.9)). Desta forma, o primeiro passo é determinar o valor de $c_{ik}(\xi,\zeta)$, resolvendo a equação integral hiper-singular de contorno que é gerada calculando o limite da Eq.(6.11) quando o ponto *x* é deslocado até o contorno Γ^I (Guimarães e Telles, 1994). Assim:

$$PF\int_{\Gamma^I} P_{jk}^{t}(\bar{\zeta},\zeta)\,c_{ik}(\xi,\zeta)\,d\Gamma(\zeta)=-\,p_{ij}^{t}(\xi,\bar{\zeta}) \tag{6.12}$$

onde *PF* indica a parte finita da integral.

A Equação (6.12) pode ser resolvida pelo método dos resíduos ponderados, usando a técnica da colocação pontual. Assim, usando a função delta de Dirac para ponderar a equação num certo número de pontos $\bar{\zeta}_m\,(m=1,\ldots,M)$ sobre Γ^I, a seguinte equação é obtida:

$$PF\int_{\Gamma^I} P_{jk}^{t}(\bar{\zeta}_m,\zeta)\,c_{ik}(\xi,\zeta)\,d\Gamma(\zeta)=-p_{ij}^{t}(\xi,\bar{\zeta}_m)\qquad m=1,2,\ldots,M \tag{6.13}$$

Pode-se reescrever a equação (6.13) utilizando um termo corretor E_{ij} e a integração numérica simples, como:

$$\sum_{n=1}^{N} |J|_n \left(P_{jk}^t(\bar{\zeta}_m, \zeta_n) c_{ik}(\xi, \zeta_n) W_n \right) - E_{ij} = -p_{ij}^t(\xi, \bar{\zeta}_m) \qquad m = 1,2,\ldots,M \tag{6.14}$$

onde $|J|_n$ é o Jacobiano da transformação para o intervalo de integração; ζ_n é o ponto da trinca correspondente ao ponto de Gauss *n*, W_n é o peso associado a esse ponto e *N* é o número total de pontos de integração.

O termo corretor E_{ij} é introduzido para corrigir o resultado da integração numérica, devido às diferenças que ocorrem ao transformar a integral em parte finita em integral numérica. As deduções a seguir consideram que se está trabalhando com o caso de uma trinca reta.

O tratamento numérico da Eq. (6.14) se faz com a substituição das séries infinitas que definem as funções de Bessel (Apêndice B) por expressões polinomiais e logarítmicas que as interpolam por trechos. Desta forma é evidente que o comportamento da parte imaginária é regular enquanto que a parte real da solução fundamental é singular em *r=0* (Barra, 1996). A integral à direita da Eq. (6.13) pode ser decomposta na seguinte forma:

$$\begin{aligned} PF \int_{\Gamma^l} P_{jk}^t(\bar{\zeta}_m, \zeta) c_{ik}(\xi, \zeta) d\Gamma(\zeta) = & PF \int_{\Gamma^l} P_{jk}^K(\bar{\zeta}_m, \zeta) c_{ik}(\xi, \zeta) d\Gamma(\zeta) + \\ & + \int_{\Gamma^l} P_{jk}^{Log}(\bar{\zeta}_m, \zeta) c_{ik}(\xi, \zeta) d\Gamma(\zeta) + \int_{\Gamma^l} P_{jk}^{Reg}(\bar{\zeta}_m, \zeta) c_{ik}(\xi, \zeta) d\Gamma(\zeta) \end{aligned} \tag{6.15}$$

Na expressão acima P_{jk}^K é a solução hipersingular estática, derivada da solução fundamental de Kelvin, P_{jk}^{Log} são as parcelas de comportamento logarítmico e P_{jk}^{Reg} são as parcelas de comportamento regular.

São analisadas as integrais do segundo membro da Eq. (6.15), tendo em vista a expansão de c_{ik} em série de Taylor em relação ao ponto $\bar{\zeta}_m$:

$$c_{ik}(\xi,\zeta) = c_{ik}(\xi,\bar{\zeta}_m) + \frac{\partial c_{ik}(\xi,\bar{\zeta}_m)}{\partial x(\zeta)}(x(\zeta) - x(\bar{\zeta}_m)) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n c_{ik}(\xi,\bar{\zeta}_n)}{\partial x^n(\zeta)}(x(\zeta) - x(\bar{\zeta}_m))^n \tag{6.16}$$

Assim, para o termo definido por P_{jk}^K, pode-se estabelecer uma parcela do erro da Eq. (6.14) através da seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N}|J|_n\left(P_{jk}^K(\bar{\zeta}_m,\zeta_n)c_{ik}(\xi,\zeta_n)W_n\right) - PF\int_{-a}^{a}P_{jk}^K(\bar{\zeta}_m,\zeta)c_{ik}(\xi,\zeta)\,d\Gamma(\zeta) = c_{ik}(\xi,\bar{\zeta}_m).\\
&\left[\sum_{n=1}^{N}|J|_n\left(P_{jk}^K(\bar{\zeta}_m,\zeta_n)c_{ik}(\xi,\zeta_n)W_n\right) - PF\int_{-a}^{a}P_{jk}^K(\bar{\zeta}_m,\zeta)c_{ik}(\xi,\zeta)\,d\Gamma(\zeta)\right]\\
&+\frac{\partial c_{ik}(\xi,\bar{\zeta}_m)}{\partial x(\zeta)}\left[\sum_{n=1}^{N}|J|_n\left((\zeta_n-\zeta_m)P_{jk}^K(\bar{\zeta}_m,\zeta_n)c_{ik}(\xi,\zeta_n)W_n\right) - \right.\\
&\qquad\left. - VP\int_{-a}^{a}(\zeta_n-\zeta_m)P_{jk}^K(\bar{\zeta}_m,\zeta)c_{ik}(\xi,\zeta)\,d\Gamma(\zeta)\right]
\end{aligned} \tag{6.17}$$

onde VP refere-se ao valor principal de Cauchy. Para o contorno inferior da trinca Γ^I, o intervalo de integração corresponde ao comprimento da trinca *2a* ou $[-a,a]$.

Esta mesma expressão pode ser escrita de forma mais compacta como:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N}|J|_n\left(P_{jk}^K(\bar{\zeta}_m,\zeta_n)c_{ik}(\xi,\zeta_n)W_n\right) - PF\int_{-a}^{a}P_{jk}^K(\bar{\zeta}_m,\zeta)c_{ik}(\xi,\zeta)\,d\Gamma(\zeta) =\\
&\qquad c_{ik}(\xi,\bar{\zeta}_m)e_{jk}^{K1} + \frac{\partial c_{ik}(\xi,\bar{\zeta}_m)}{\partial x(\zeta)}e_{jk}^{K2}
\end{aligned} \tag{6.18}$$

onde os termos e_{jk}^{K1} e e_{jk}^{K2} são dados por:

$$e_{jk}^{K1} = 2\left\{ a\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{W_n}{\left(\zeta_n - \overline{\zeta}_m\right)^2} \right) - \left(\frac{-2a}{a^2 - \overline{\zeta}_m^2} \right) \right\} \tag{6.19}$$

$$e_{jk}^{K2} = 2\left\{ a\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{W_n}{\zeta_n - \overline{\zeta}_m} \right) - ln\left(\frac{a - \overline{\zeta}_m}{a + \overline{\zeta}_m} \right) \right\} \tag{6.20}$$

Analogamente, o erro devido à singularidade logarítmica em relação à integração pela quadratura de Gauss se deve exclusivamente ao primeiro termo da série:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} |J|_n \left(P_{jk}^{Log}(\overline{\zeta}_m, \zeta_n)\, c_{ik}(\xi, \zeta_n) W_n \right) - PF \int_{-a}^{a} P_{jk}^{Log}(\overline{\zeta}_m, \zeta)\, c_{ik}(\xi, \zeta)\, d\Gamma(\zeta) = \\ c_{ik}(\xi, \overline{\zeta}_m) . \left[\sum_{n=1}^{N} |J|_n \left(P_{jk}^{Log}(\overline{\zeta}_m, \zeta_n)\, W_n \right) \right. \\ \left. - PF \int_{-a}^{a} P_{jk}^{Log}(\overline{\zeta}_m, \zeta)\, d\Gamma(\zeta) \right] \end{aligned} \tag{6.21}$$

E pode ser escrita na forma compacta como:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} |J|_n \left(P_{jk}^{Log}(\overline{\zeta}_m, \zeta_n)\, c_{ik}(\xi, \zeta_n) W_n \right) - PF \int_{-a}^{a} P_{jk}^{Log}(\overline{\zeta}_m, \zeta)\, c_{ik}(\xi, \zeta)\, d\Gamma(\zeta) = \\ c_{ik}(\xi, \overline{\zeta}_m)\, e_{jk}^{Log} \end{aligned} \tag{6.22}$$

onde a expressão de e_{jk}^{Log} é dada por:

$$e_{jk}^{Log} = s^2 \left\{ a \sum_{n=1}^{N} W_n \, ln\left(\left|\zeta_n - \overline{\zeta}_m\right|\right) - \left[\left(\left|\overline{\zeta}_m - a\right|\right) ln\left(\left|\overline{\zeta}_m - a\right|\right) + \left(\left|\overline{\zeta}_m + a\right|\right) ln\left(\left|\overline{\zeta}_m + a\right|\right) - 2a\right] \right\} \tag{6.23}$$

Uma vez que só se está considerando o erro referente às integrais singulares pode-se escrever:

$$\sum_{n=1}^{N} |J|_n \left(P_{jk}^{Reg}(\overline{\zeta}_m, \zeta_n) c_{ik}(\xi, \zeta_n) W_n\right) - \int_{-a}^{a} P_{jk}^{Reg}(\overline{\zeta}_m, \zeta) c_{ik}(\xi, \zeta) d\Gamma(\zeta) = 0 \tag{6.24}$$

Assim a integral da Eq. (6.13) é aproximada como:

$$PF \int_{-a}^{a} P_{jk}^{t}(\overline{\zeta}_m, \zeta) c_{ik}(\xi, \zeta) d\Gamma(\zeta) = \sum_{n=1}^{n} |J|_n \left[P_{jk}^{t}(\overline{\zeta}_m, \zeta_n) c_{ik}(\xi, \zeta_n) W_n\right] - \left[c_{ik}(\xi, \overline{\zeta}_m)\left(e_{jk}^{K1} + e_{jk}^{Log}\right) + \frac{\partial c_{ik}(\xi, \overline{\zeta}_m)}{\partial x(\zeta)} e_{jk}^{K2} \right] \tag{6.25}$$

E o termo corretor da Eq. (6.14) é, portanto,

$$E_{ij} = c_{ik}(\xi, \overline{\zeta}_m)\left(e_{jk}^{K1} + e_{jk}^{Log}\right) + \frac{\partial c_{ik}(\xi, \overline{\zeta}_m)}{\partial x(\zeta)} e_{jk}^{K2} \tag{6.26}$$

Fazendo o número de pontos de colocação coincidir com o número de pontos usados para a integração numérica (M=N), reescreve-se a Eq. (6.14):

$$a\sum_{n=1}^{N}\left(P_{jk}^{t}(\bar{\zeta}_m,\zeta_n)\,c_{ik}(\xi,\zeta_n)W_n\right)-E_{ij}=-p_{ij}^{t}(\xi,\bar{\zeta}_m)\qquad m=1,2,\ldots,N \tag{6.27}$$

Os pontos de colocação podem ser escolhidos de forma a coincidir com as posições dos pontos de Gauss. Neste caso, quando *n*=*m*, surgem indeterminações que são resolvidas imaginando-se o processo de limite quando $\bar{\zeta}_m \to \zeta_n$, obtendo-se:

$$\lim_{\bar{\zeta}_m\to\zeta_n}\left\{\frac{1}{(\zeta_n-\zeta_m)^2}\left[c_{ik}(\xi,\zeta_n)-c_{ik}(\xi,\bar{\zeta}_m)-(\zeta_n-\bar{\zeta}_m)\frac{\partial c_{ik}(\xi,\bar{\zeta}_m)}{\partial\zeta}\right]\right\}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c_{ik}(\xi,\bar{\zeta}_m)}{\partial\zeta^2} \tag{6.28}$$

$$\lim_{\zeta_m\to\zeta_n}\left\{c_{ik}(\xi,\zeta_n)-c_{ik}(\xi,\bar{\zeta}_m)\,ln\left(\left|\zeta_n-\bar{\zeta}_m\right|\right)\right\}=0 \tag{6.29}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
&a\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{N}\left(P_{jk}^{t}(\bar{\zeta}_m,\zeta_n)\,c_{ik}(\xi,\zeta_n)W_n\right)+c_{ik}(\xi,\bar{\zeta}_m)\,P_{jk}^{Reg}(\bar{\zeta}_m,\zeta_n)\\
&-c_{ik}(\xi,\bar{\zeta}_m)\left\{2\left[a\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{N}\left(\frac{W_n}{(\zeta_n-\zeta_m)^2}\right)+\frac{2a}{a^2-\bar{\zeta}_m^2}\right]+\right.\\
&\left.s^2\left[a\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{N}\left(W_n\,ln\left(\zeta_n-\bar{\zeta}_m\right)\right)+2a-\left(\left|\bar{\zeta}_m-a\right|\right)ln\left(\left|\bar{\zeta}_m-a\right|\right)+\left(\left|\bar{\zeta}_m+a\right|\right)ln\left(\left|\bar{\zeta}_m+a\right|\right)\right]\right\}\\
&-\frac{\partial c_{ik}(\xi,\bar{\zeta}_m)}{\partial x(\zeta)}\left\{2\left[a\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{N}\left(\frac{W_n}{\zeta_n-\bar{\zeta}_m}\right)-ln\left(\frac{a-\bar{\zeta}_m}{a+\bar{\zeta}_m}\right)\right]\right\}\\
&+\frac{2aW_m}{2}\frac{\partial^2 c_{ik}(\xi,\bar{\zeta}_m)}{\partial\zeta^2}=-p_{ij}^{t}(\xi,\bar{\zeta}_m)\qquad m=1,2,\ldots,N
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Com a finalidade de calcular as derivadas de $c_{ik}(\xi,\zeta)$, adota-se a interpolação polinomial de Lagrange. Uma vez que o comportamento das aberturas é proporcional a $\sqrt{\rho}$, onde ρ é a distância até a ponta da trinca, define-se:

$$c_{ik}(\xi,\zeta) \approx \sqrt{1-\eta^2} \sum_{n=1}^{N} D_n(\eta) \frac{c_{ik}(\xi,\zeta_n)}{\sqrt{1-\eta_n^2}} \tag{6.31}$$

onde $\eta = \zeta / a$ é a coordenada natural da trinca:

$$D_n(\eta) = \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq n}}^{T} \frac{(\eta - \eta_t)}{(\eta_n - \eta_t)} \tag{6.32}$$

onde D_n é um polinômio de Lagrange de ordem (N-1), T é um número inteiro positivo igual a N.

Assim, a primeira derivada é:

$$\frac{\partial c_{ik}(\xi,\zeta)}{\partial \zeta} = \frac{\partial c_{ik}(\xi,\zeta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} \tag{6.33}$$

$$\frac{\partial c_{ik}(\xi,\zeta)}{\partial \zeta} \cong \frac{1}{a} \frac{-\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \sum_{n=1}^{N} D_n(\eta) \frac{c_{ik}(\xi,\zeta_n)}{\sqrt{1-\eta_n^2}} + \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{a} \sum_{n=1}^{N} D_n'(\eta) \frac{c_{ik}(\xi,\zeta_n)}{\sqrt{1-\eta_n^2}} \tag{6.34}$$

E a segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 c_{ik}(\xi,\zeta)}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\partial c_{ik}(\xi,\zeta)}{\partial \zeta}\right]\frac{\partial \eta}{\partial \zeta} \tag{6.35}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 c_{ik}(\xi,\zeta)}{\partial \zeta^2} = &-\frac{1}{a^2(1-\eta^2)^{3/2}}\sum_{n=1}^{N} D_n(\eta)\frac{c_{ik}(\xi,\zeta_n)}{\sqrt{1-\eta_n^2}} \\ &-\frac{2\eta}{a^2\sqrt{1-\eta^2}}\sum_{n=1}^{N} D_n'(\eta)\frac{c_{ik}(\xi,\zeta_n)}{\sqrt{1-\eta_n^2}} + \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{a^2}\sum_{n=1}^{N} D_n''(\eta)\frac{c_{ik}(\xi,\zeta_n)}{\sqrt{1-\eta_n^2}}\end{aligned} \tag{6.36}$$

A Eq. (6.30) forma um sistema matricial de 4*N* equações subdivididas em dois subsistemas, de dimensão 2*N*, compartilhando a mesma matriz quadrada, que são usados para a determinação das aberturas fundamentais da trinca nos pontos de Gauss. O primeiro, para $i=1$, com as incógnitas $c_{1k}(\xi,\zeta_n)$ e o termo independente $p_{1j}^t(\xi,\overline{\zeta}_m)$; e o segundo, para $i=2$, com as incógnitas $c_{2k}(\xi,\zeta_n)$ e o termo independente $p_{2j}^t(\xi,\overline{\zeta}_m)$. Assim, pode-se escrever na forma matricial:

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{c}_i(\xi) = \boldsymbol{p}_i^t(\xi) \tag{6.37}$$

É importante notar que a matriz $\boldsymbol{S}$ é função da geometria da trinca e permanece constante para qualquer posição do ponto fonte, não aumentando o tamanho do sistema a ser resolvido com o refinamento da discretização do contorno do problema.

Das Eqs. (6.3), (6.4) e Eqs. (6.10), (6.11), pode-se escrever a Função de Green numérica para uma única trinca da forma seguinte:

$$u_{ij}^*(\xi,x) = u_{ij}^t(\xi,x) + \sum_{n=1}^{N} |J|_n \, p_{jk}^t(x,\zeta_n) c_{ik}(\xi,\zeta_n) W_n \tag{6.39}$$

$$p_{ij}^{*}(\xi,x)=p_{ij}^{t}(\xi,x)+\sum_{n=1}^{N}|J|_{n}P_{jk}^{t}(x,\zeta_{n})c_{ik}(\xi,\zeta_{n})W_{n} \tag{6.40}$$

Finalmente, a equação integral de contorno para o problema da mecânica da fratura é escrita na forma:

$$C_{ij}(\xi)u_{j}(\xi)=\int_{\Gamma^{E}}p_{j}(x)u_{ij}^{*}(\xi;x)d\Gamma(x)-\int_{\Gamma^{E}}u_{j}(x)p_{ij}^{*}(\xi;x)d\Gamma(x) \tag{6.41}$$

6.4 Tensão em Ponto Interno

Num processamento posterior, calcula-se a tensão em ponto interno. Para isto, deriva-se a Eq. (6.41) em relação às coordenadas de $\xi\in\Omega$. Assim, obtém-se a já definida Eq. (4.30), repetida aqui por conveniência:

$$\sigma_{ij}(\xi)=\int_{\Gamma}U_{ijk}^{*}(\xi,x)p_{k}(x)d\Gamma(x)-\int_{\Gamma}P_{ijk}^{*}(\xi,x)u_{k}(x)d\Gamma(x)$$

Também foram definidos U_{ijk}^{*} e P_{ijk}^{*} nas Eqs. (4.31) e (4.32), respectivamente.

$$U_{ijk}^{*}(\xi,x)=\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\delta_{jk}\,u_{lk}^{*},_{l}+\mu\left[u_{jk}^{*},_{i}+u_{ik}^{*},_{j}\right]$$

$$P_{ijk}^{*}(\xi,x)=\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\delta_{jk}\,p_{lk}^{*},_{l}+\mu\left[p_{jk}^{*},_{i}+p_{ik}^{*},_{j}\right]$$

As derivadas da função de Green são obtidas a partir das Eqs. (6.3) e (6.4):

$$u^{*}_{ij,k}(\xi,x) = u^{t}_{ij,k}(\xi,x) + u^{c}_{ij,k}(\xi,x) \tag{6.42}$$

$$p^{*}_{ij,k}(\xi,x) = p^{t}_{ij,k}(\xi,x) + p^{c}_{ij,k}(\xi,x) \tag{6.43}$$

Como as derivadas da solução fundamental dadas por $\hat{u}^{t}_{ij,k}(\xi,x)$ e $\hat{p}^{t}_{ij,k}(\xi,x)$ são conhecidas, desta forma só resta determinar as derivadas de solução complementar. Das Eqs. (6.10) e (6.11) deriva-se em relação às coordenadas $\xi \in \Omega$.

$$u^{c}_{ij,k}(\xi,x) = \int_{\Gamma^{I}} p^{t}_{jl}(x,\zeta)\, c_{il,k}(\xi,\zeta)\, d\Gamma(\zeta) \tag{6.44}$$

$$p^{c}_{ij,k}(\xi,x) = \int_{\Gamma^{I}} P^{t}_{jl}(x,\zeta)\, c_{il,k}(\xi,\zeta)\, d\Gamma(\zeta) \tag{6.45}$$

Então, a derivada da abertura da trinca é calculada através da derivada da Eq.(6.12) a seguir:

$$PF \int_{\Gamma^{I}} P^{t}_{jl}(\bar{\zeta},\zeta)\, c_{il,k}(\xi,\zeta)\, d\Gamma(\zeta) = -\, p^{t}_{ij,k}(\xi,\bar{\zeta}) \tag{6.46}$$

Assim, forma-se o sistema de equações final, derivado da Eq. (6.37), apresentado em forma matricial seguinte:

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}}(\xi)=\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}}(\xi) \tag{6.47}$$

Logo, as expressões finais são calculadas seguindo o mesmo critério das Eqs. (6.39) e (6.40)e a mesma matriz $\boldsymbol{S}$:

$$u^{*}_{ij,k}(\xi,x)=u^{t}_{ij,k}(\xi,x)+\sum_{n=1}^{N}|J|_{n}\,p^{t}_{jl}(x,\zeta_{n})c_{il,k}(\xi,\zeta_{n})W_{n} \tag{6.48}$$

$$p^{*}_{ij,k}(\xi,x)=p^{t}_{ij,k}(\xi,x)+\sum_{n=1}^{N}|J|_{n}\,P^{t}_{jl}(x,\zeta_{n})c_{il,k}(\xi,\zeta_{n})W_{n} \tag{6.49}$$

6.5 Abertura da Trinca para o Problema real

É possível ampliar as potencialidades do método apresentado utilizando os resultados obtidos pela Eq. (6.41), onde o contorno já foi discretizado, para posteriormente calcular os deslocamentos e forças de superfície no interior do domínio. Assim, considerando ainda uma trinca descarregada, o limite da Eq. (6.6) quando $\xi\rightarrow\Gamma^{F}$ pode ser calculado de acordo como explicado para a Eq. (6.12), para obter a abertura real do problema:

$$PF\int_{\Gamma^{I}}P^{t}_{ij}(\xi,x)c_{j}(x)d\Gamma(x)=\int_{\Gamma^{E}}P^{t}_{ij}(\xi,x)u_{j}(x)d\Gamma(x)-\int_{\Gamma^{E}}U^{t}_{ij}(\xi,x)p_{j}(x)d\Gamma(x) \tag{6.50}$$

Ou seja, aplicando os mesmos procedimentos descritos para obter a função de Green, pode-se escrever:

$$\sum_{n=1}^{N} |J|_n P_{ij}^t(\xi_m, x_n) c_j(x_n) W_n - E_i$$
$$= \int_{\Gamma^E} P_{ij}^t(\xi_m, x) u_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma^E} U_{ij}^t(\xi_m, x) p_j(x) d\Gamma(x) \qquad (6.51)$$
$$m = 1, \ldots, N$$

Da mesma forma, a matriz ***S*** novamente pode ser empregada para calcular c_j nos pontos de Gauss. A única diferença agora é que os termos independentes, lado direito da Eq. (6.50), são calculados através de integrais envolvendo a solução obtida no contorno externo do referido problema.

Pode-se observar, também, que depois de calcular $c_j(x_n)$, a equação integral de contorno, clássica ou hipersingular, pode ser usada, opcionalmente, para calcular deslocamentos e forças de superfície em pontos internos, como por exemplo, deslocamentos através da Eq. (6.5)

$$u_j(\xi) = \int_{\Gamma^E} p_j(x) u_{ij}^t(\xi; x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma^E} u_j(x) p_{ij}^t(\xi; x) d\Gamma(x)$$
$$+ \int_{\Gamma^I} c_j(x) p_{ij}^t(\xi; x) d\Gamma(x) \qquad (6.52)$$

CAPÍTULO 7

Equação Integral de Contorno na Elastodinâmica 2D

7.1 Introdução

Neste capítulo, as integrais de convolução presentes na equação integral de contorno no domínio do tempo são resolvidas aplicando o Método da Quadratura Operacional. Apresenta-se a solução fundamental no domínio transformado de Laplace utilizada neste trabalho. Também pode-se verificar a importância de uma das características do método no sentido de, embora estar trabalhando no domínio transformado, a solução do problema ser apresentada no domínio do tempo. Sendo importante para isto uma correta montagem do sistema matricial de equações e da sua resolução passo-a-passo. Esta fase tem importância fundamental porque serve de base para a posterior implementação da Função de Green Numérica.

Um exemplo de aplicação clássico é apresentado e resolvido para validar a formulação desenvolvida. Os testes são comparados com os valores teóricos conhecidos e, também, com os obtidos com a formulação do MEC com Dupla Reciprocidade.

As considerações para a implementação numérica deste e dos próximos capítulos encontram-se no apêndice A.

7.2 Formulação da Elastodinâmica 2D no domínio do tempo via Método da Quadratura Operacional

Esta seção mostra a formulação do Método dos Elementos de Contorno no domínio do tempo(MANSUR, 1983), DT-MEC. Esta formulação é baseada na Equação de Navier, Eq. (2.27), repetida aqui por conveniência:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + b_i = \rho \ddot{u}_i$$

onde μ e λ são as constantes de Lamé.

O Método dos Elementos de Contorno consiste na transformação da equação diferencial parcial dada pela Eq. (2.27), que governa o domínio do problema, em equações integrais envolvendo somente valores de contorno, após a introdução de funções de ponderação denominadas de soluções fundamentais. Desta forma, a dimensão do problema é reduzida de uma unidade e somente o contorno do domínio precisa ser discretizado. A seguir é apresentada a equação integral de contorno no domínio do tempo

$$\begin{aligned} 4\pi C_{ij}(\xi) u_j(\xi,t) = &\int_0^{t^+} \int_\Gamma u_{ij}^*(x,t;\xi,\tau)\, p_j(x,\tau)\, d\Gamma(x)\, d\tau \\ &- \int_0^{t^+} \int_\Gamma p_{ij}^*(x,t;\xi,\tau) u_j(x,\tau)\, d\Gamma(x)\, d\tau \end{aligned} \tag{7.1}$$

Onde u_{ij}^* e p_{ij}^* são o deslocamento e força de superfície fundamentais do problema e também sabe-se que o coeficiente C_{ij} é o mesmo do caso estático.

Aplicando o procedimento descrito no capítulo 5, iniciando pela Eq. (5.9), para cada integral da Eq. (7.1), pode-se escrever:

$$\int_0^{t^+}\int_\Gamma u_{ij}^*(x,t;\xi,\tau)\,p_j(x,\tau)\,d\Gamma(x)\,d\tau=\sum_{k=0}^{n}{}^{n-k}g_{ij}^e(x,\xi,\Delta t)\;{}^k p_j^e(x)\quad n=0,1,\ldots,N \tag{7.2}$$

e

$$\int_0^{t^+}\int_\Gamma p_{ij}^*(x,t;\xi,\tau)\,u_j(x,\tau)\,d\Gamma(x)\,d\tau=\sum_{k=0}^{n}{}^{n-k}h_{ij}^e(x,\xi,\Delta t)\;{}^k u_j^e(x)\qquad n=0,1,\ldots,N \tag{7.3}$$

A seguir, segundo a Eq. (5.11), os pesos de integração ***g*** e ***h*** das Eqs. (7.2) e (7.3) são escritos da seguinte forma:

$${}^n g_{ij}^e(x,\xi,\Delta t)=\frac{\rho^{-n}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\int_{\Gamma^e}\hat{u}_{ij}^*\left(x,\xi,\frac{\gamma\left(\rho\,e^{il2\pi/L}\right)}{\Delta t}\right)\Phi^e(x)\,d\Gamma(x)\,e^{-inl2\pi/L} \tag{7.4}$$

e

$${}^n h_{ij}^e(x,\xi,\Delta t)=\frac{\rho^{-n}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\int_{\Gamma^e}\hat{p}_{ij}^*\left(x,\xi,\frac{\gamma\left(\rho\,e^{il2\pi/L}\right)}{\Delta t}\right)\Phi^e(x)\,d\Gamma(x)\,e^{-inl2\pi/L} \tag{7.5}$$

onde $\Phi^e(x)$ representa função de interpolação quadrática utilizada em cada elemento de contorno Γ^e.

A Equação (7.1) pode ser escrita da seguinte forma discretizada:

$$4\pi\,C_{ij}(\xi)\,u_j(\xi,t_n)=\sum_{e=1}^{E}\sum_{k=0}^{n}{}^{n-k}g_{ij}^e(x,\xi,\Delta t)\;{}^k p_j^e(x)-\sum_{e=1}^{E}\sum_{k=0}^{n}{}^{n-k}h_{ij}^e(x,\xi,\Delta t)\;{}^k u_j^e(x) \tag{7.6}$$

A Equação (7.6) é, então, aplicada para todos os nós de contorno de forma a obter o seguinte sistema matricial de equações:

$$\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{n}}=\sum_{\boldsymbol{k}=0}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{n-k}}\;\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{k}}-\sum_{\boldsymbol{k}=0}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{n-k}}\;\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{k}} \tag{7.7}$$

Aqui, $\boldsymbol{C}$ é a matriz quase diagonal que contém os coeficientes $C_{ij}(\xi)$; n e k correspondem às variáveis da discretização temporal $t_n = n\Delta t$ e $t_k = k\Delta t$, respectivamente.

O sistema matricial de equações apresentado na Eq. (7.7) é resolvido, passo-a-passo, calculando ao final de cada intervalo de tempo os valores desconhecidos dos deslocamentos e das forças de superfície do problema. Para o primeiro intervalo de tempo a Eq. (7.7) pode ser escrita da forma seguinte:

$$(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{H}^0)\,\boldsymbol{u}^1 = \boldsymbol{G}^0\,\boldsymbol{p}^1 + (\boldsymbol{G}^1\,\boldsymbol{p}^0 - \boldsymbol{H}^1\,\boldsymbol{u}^0) \tag{7.8}$$

As colunas das matrizes $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{G}$ são reordenadas de acordo com as condições de contorno; assim, tem-se:

$$\boldsymbol{A}^0\,\boldsymbol{y}^1 = \boldsymbol{f}^1 + \boldsymbol{f}^0 \tag{7.9}$$

onde $\boldsymbol{f}^1$ é formado pelas contribuições de contorno em $t = \Delta t$ e:

$$\boldsymbol{f}^0 = \boldsymbol{G}^1\,\boldsymbol{p}^0 - \boldsymbol{H}^1\,\boldsymbol{u}^0 \tag{7.10}$$

Para $t_n = n\Delta t$, obtém-se a seguinte expressão geral:

$$\boldsymbol{A}^0\,\boldsymbol{y}^n = \boldsymbol{f}^n + \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{f}^k \tag{7.11}$$

e

$$\boldsymbol{f}^k = \boldsymbol{G}^{n-k}\,\boldsymbol{p}^k - \boldsymbol{H}^{n-k}\,\boldsymbol{u}^k \tag{7.12}$$

O processo de solução torna-se mais lento à medida em que o tempo é incrementado, uma vez que no cálculo do vetor $\boldsymbol{f}^{k}$ estão envolvidas todas as matrizes dos intervalos de tempo anteriores.

7.3 Solução Fundamental

A solução fundamental para o problema da elastodinâmica 2D no domínio transformado de Laplace (Barra, 1996) é dada por:

$$\hat{u}_{ij}^{*}(x,\xi,s)=\frac{1}{\rho c_s^2}\left[\varphi(r)\,\delta_{ij}-\chi(r)\,r_{,i}\,r_{,j}\right] \tag{7.13}$$

e a força de superfície fundamental:

$$\begin{aligned}\hat{p}_{ij}^{*}(x,\xi,s)=\left\{\left[\frac{d\varphi(r)}{dr}-\frac{\chi(r)}{r}\right]\left(\delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial n}+r_{,j}\,n_i\right)-2\frac{\chi(r)}{r}\left(n_j\,r_{,i}-2\,r_{,i}\,r_{,j}\frac{\partial r}{\partial n}\right)\right.\\ \left.-2\frac{d\chi(r)}{dr}r_{,i}\,r_{,j}\frac{\partial r}{\partial n}+\left(\frac{c_p^2}{c_s^2}-2\right)\left(\frac{d\varphi(r)}{dr}-\frac{d\chi(r)}{dr}-\frac{\chi(r)}{r}\right)r_{,i}\,n_{,j}\right\}\end{aligned} \tag{7.14}$$

onde as funções $\chi(r)$ e $\varphi(r)$ são definidas como:

$$\chi(r)=\kappa_2\left(\frac{sr}{c_s}\right)-\frac{c_s^2}{c_p^2}\kappa_2\left(\frac{sr}{c_p}\right) \tag{7.15}$$

e

$$\varphi(r)=\kappa_0\left(\frac{sr}{c_s}\right)+\left(\frac{sr}{c_s}\right)^{-1}\left[\kappa_1\left(\frac{sr}{c_s}\right)-\frac{c_s}{c_p}\kappa_1\left(\frac{sr}{c_p}\right)\right] \tag{7.16}$$

Nas expressões anteriores, r é a distancia entre ξ e x; c_p e c_s são, respectivamente, a velocidade da onda primária e a velocidade da onda secundária; κ_j é a função de Bessel modificada de segundo tipo e ordem j (Apêndice B) e δ_{ij} é o delta de Kronecker.

7.4 O Método da Dupla Reciprocidade

7.4.1 Introdução

O Método da Dupla Reciprocidade foi apresentado por D. Nardini e C. A. Brebbia em 1982 para resolver problemas transientes usando soluções fundamentais estáticas, e se revelou bastante adequado e eficaz na solução de problemas com ações no domínio.

O objetivo do método é transformar a integral de domínio da "força de volume" em uma integral de contorno. A estratégia é fazer a substituição da variável que tem as características de ação de domínio pelo produto de duas outras variáveis, sendo apenas uma delas dependente das grandezas espaciais.

O Método da Dupla Reciprocidade (PARTRIDGE *et al.*, 1992,) surge, então, como uma formulação alternativa do MEC, que mediante o uso de funções auxiliares permite a transformação das integrais de domínio em integrais de contorno, de acordo com os procedimentos clássicos do método.

7.4.2 O Método da Dupla Reciprocidade para a Elasticidade

Para iniciar o estudo do Método dos Elementos de Contorno aplicando a técnica da Dupla Reciprocidade, parte-se da Equação de Navier , Eq. (2.27), considerando somente a carga de domínio b_i da forma que se mostra a seguir:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} = b_i \tag{7.17}$$

A solução fundamental para deslocamentos, u^*_{ij}, e para forças de superfície, p^*_{ij}, associada à Eq (7.17) e os procedimentos clássicos do Método dos Elementos de Contorno geram a seguinte equação integral com uma integral de domínio:

$$C_{ij}\, u_j + \int_\Gamma p^*_{ij}\, u_j \, d\Gamma = \int_\Gamma u^*_{ij}\, p_j \, d\Gamma + \int_\Omega u^*_{ij}\, b_j \, d\Omega \tag{7.18}$$

O Método da Dupla Reciprocidade é introduzido de forma a expressar o termo de domínio como integrais de contorno. Para isso, representa-se a ação de domínio por um somatório de funções na forma indicial seguinte:

$$b_j(x) = \alpha_j^m\, f^m = \alpha_j^1\, f^1 + \alpha_j^2\, f^2 + \ldots + \alpha_j^n\, f^n \tag{7.19}$$

onde os pontos *m* são pontos de colocação, *f* é uma função de aproximação e α é um conjunto de coeficientes iniciais desconhecidos.

Desta forma, a integral de domínio passa a ser escrita como:

$$\int_{\Omega} u_{ij}^{*}\, b_j \, d\Omega = \alpha_j^m \int_{\Omega} f^m \, u_{ij}^{*} \, d\Omega \tag{7.20}$$

Para transformar a Eq. (7.20) anterior numa integral de contorno, é necessário reescrever f^m em termos de uma função primitiva $\hat{u}_{nj}^{k}$, que satisfaz à Equação de Navier, com o termo de domínio sendo concentrado no volume, ou seja:

$$\mu\, \hat{u}_{nj,ii}^{k} + (\lambda + \mu)\, \hat{u}_{ni,ij}^{k} = \delta_{nj} f^k \tag{7.21}$$

Desta forma, substituindo as Eqs. (7.21) e (7.20) na Eq. (7.18) e verificando que, por analogia, as mesmas operações já desenvolvidas para os termos estacionários podem ser empreendidas (daí o nome Dupla Reciprocidade), obtém-se:

$$C_{ij}^{k}\, u_j^{k} + \int_{\Gamma} p_{ij}^{*}\, u_j \, d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{ij}^{*}\, p_j \, d\Gamma = \left(C_{ij}^{k}\, \hat{u}_{nj}^{km} + \int_{\Gamma} p_{ij}^{*}\, \hat{u}_{nj}^{m} \, d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{ij}^{*}\, \hat{p}_{nj}^{m} \, d\Gamma \right) \alpha_n^m \tag{7.22}$$

onde $\hat{p}_{nj}^{m}$ corresponde às forças de superfície recíprocas, referentes à função auxiliar de interpolação, e $\hat{u}_{nj}^{m}$ corresponde aos deslocamentos.

Após a discretização e aproximação da variação de **u, p,** $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{p}}$ sobre cada elemento, usando os valores nodais com o mesmo grupo de funções de interpolação , a Eq. (7.22) pode ser escrita da forma seguinte:

$$\mathbf{C}^k\,\mathbf{u}^k + \sum_{j=1}^{Ne} \mathbf{h}_{kj}\,\mathbf{u}_j - \sum_{j=1}^{Ne} \mathbf{g}_{kj}\,\mathbf{p}_j = \sum_{j=1}^{Ne} \left(\mathbf{C}^k\,\hat{\mathbf{u}}^{km} + \sum_{j=1}^{Ne} \mathbf{h}_{kj}\,\hat{\mathbf{u}}_j^m - \sum_{j=1}^{Ne} \mathbf{g}_{kj}\,\hat{\mathbf{p}}_j^m \right) \boldsymbol{\alpha}^m \tag{7.23}$$

Finalmente, aplicando a equação anterior para todos os nós de contorno e pontos internos, e incorporando a matriz **C** em **h**, forma-se o seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{Hu}-\mathbf{Gp}=(\mathbf{H}\hat{\mathbf{u}}-\mathbf{G}\hat{\mathbf{p}})\,\boldsymbol{\alpha} \tag{7.24}$$

e, lembrando que pela equação (7.19) tem-se que $\alpha = f^{-1} b$, resulta:

$$\mathbf{H\,u} - \mathbf{G\,p} = (\mathbf{H}\,\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{G}\,\hat{\mathbf{p}})\,\mathbf{f}^{-1}\;\mathbf{b} = \mathbf{B} \tag{7.25}$$

7.4.3 Função Auxiliar de Interpolação

Uma etapa muito importante nessa formulação é a escolha das funções f^k. Essas funções servem para interpolar os valores da carga em todo o domínio, com base nos pontos em que seus valores são conhecidos, tendo grande influência na precisão dos resultados.

Em muitos casos, historicamente, as funções auxiliares foram obtidas por tentativa e erro; mas isto se complicava com o incremento da ordem das funções. Para o caso dos problemas da elasticidade, a função auxiliar $\hat{u}$ pode ser obtida da seguinte forma: primeiro, considere-se uma função radial básica, à qual pertencem todas as funções de *r*. As funções radiais básicas são uma poderosa ferramenta matemática para a interpolação de dados dispersos e tem a propriedade de melhorar a

convergência com o incremento das dimensões. A função radial básica mais usada no Método dos Elementos de Contorno é a função linear *r*. A função cúbica r^3 e a "thin plate spline (TPS)" $r^2\log(r)$ foram introduzidas recentemente. Como antes, a variável *r* é aquela que quantifica a distância euclidiana entre dois pontos (PARTRIDGE, 1997).

Assim, neste trabalho tem-se que $f^k = r(x^k, x)(1+\delta_{ij})$ e, portanto:

$$\hat{u}_{ij} = \frac{1}{30(1-\nu)\mu}\left[\left(3-\frac{10\nu}{3}\right)\delta_{ij} - r_{,i}\, r_{,j}\right] r^3 \tag{7.26}$$

e

$$\hat{p}_{ij} = \frac{1}{15(1-\nu)}\left[(4-5\nu)\, r_{,i}\, n_j - (1-5\nu)\, r_{,j}\, n_i + \left[(4-5\nu)\delta_{ij} - r_{,j}\, r_{,i}\right]\frac{\partial r}{\partial n}\right] r^2 \tag{7.27}$$

onde $\dfrac{\partial r}{\partial n} = n_i\, r_{,i}$.

7.4.4 A Dupla Reciprocidade em Análise Dinâmica

A integral de domínio numa análise dinâmica é mostrada a seguir:

$$C_{ij}\, u_j + \int_\Gamma p^*_{ij}\, u_j\, d\Gamma - \int_\Gamma u^*_{ij}\, p_j\, d\Gamma = \int_\Omega \rho\, u^*_{ij}\, \ddot{u}_j\, d\Omega \tag{7.28}$$

O lado direito da Eq. (7.28) pode ser operado de modo a transformá-lo em uma integral de contorno. Para isto será utilizada a formulação do Método da Dupla Reciprocidade.

Seguindo o mesmo critério visto neste capítulo, sabe-se que o deslocamento u_j também pode ser representado por uma soma infinita de funções na forma:

$$\mathrm{u_j(x,t) = \alpha_j^k(t)\,F^k(x)} \tag{7.29}$$

onde se observa a separação da função inicial em duas, uma dependente do tempo e a outra dependente da posição.

Assim, pode-se representar a derivada segunda do deslocamento em relação ao tempo, $\ddot{u}_j$, como:

$$\mathrm{\ddot{u}_j(x,t) = \ddot{\alpha}_j^k(t)\,F^k(x)} \tag{7.30}$$

Os procedimentos que se seguem são os vistos anteriormente para a carga de domínio e se repetem até chegar à expressão:

$$\boldsymbol{H\,u - G\,p} = \rho\left[\boldsymbol{H\,\hat{u} - G\,\hat{p}}\right]\ddot{\alpha} \tag{7.31}$$

e, da Eq. (7.30), pode-se escrever:

$$\ddot{\alpha} = \boldsymbol{f}^{-1}\,\ddot{\boldsymbol{u}} \tag{7.32}$$

Assim, substituindo a Eq. (7.32) na Eq. (7.31):

$$\boldsymbol{H}\,\boldsymbol{u} - \boldsymbol{G}\,\boldsymbol{p} = \rho\left[\boldsymbol{H}\,\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{G}\,\hat{\boldsymbol{p}}\right]\boldsymbol{f}^{-1}\,\ddot{\boldsymbol{u}} \tag{7.33}$$

e chamando-se:

$$\boldsymbol{M} = \rho\left[\boldsymbol{G}\,\hat{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{H}\,\hat{\boldsymbol{u}}\right]\boldsymbol{f}^{-1} \tag{7.34}$$

Tem-se:

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{H}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{G}\,\boldsymbol{p} \tag{7.35}$$

Na Eq. (7.35) **H** e **G** são as matrizes características do Método dos Elementos de Contorno da elastostática, enquanto **M** representa a matriz de massa.

7.4.5 O Problema da Resposta Dinâmica

A maneira mais usual para se obter uma resposta no tempo com a equação matricial dada pela Eq. (7.35) é utilizar algum esquema de integração direta. Esses esquemas requerem que o equilíbrio do sistema seja obedecido apenas em instantes discretos durante o processo, entre os quais são admitidas variações lineares ou constantes para os deslocamentos, velocidades e acelerações.

Definem-se duas categorias de integração linear no tempo: na primeira, que engloba os Métodos Explícitos ou condicionalmente estáveis, o principal método é o da Diferença Central, que depende do intervalo Δt para obter bons resultados; a

segunda categoria corresponde aos Métodos Implícitos ou incondicionalmente estáveis, onde podem ser mencionados os métodos de Houbolt, Wilson e Newmark.

Dos esquemas de integração no tempo mais comumente empregados, o esquema Houbolt é o que apresenta maior alongamento dos períodos naturais de vibração e intensidade de amortecimento fictício. Esse último efeito é equivalente ao truncamento da influência dos modos superiores na resposta.

O sistema em estudo é constituído de um domínio $\Omega(x)$, delimitado por um contorno $\Gamma(x)$ sujeito às seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= \bar{u}_1(x,t) \quad \text{em } \Gamma_1 \\ p_2(x,t) &= \bar{p}_2(x,t) \quad \text{em } \Gamma_2 \end{aligned} \tag{7.36}$$

O caráter dinâmico do problema também requer condições iniciais em $\Omega(x)$ do tipo:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x) \\ \dot{u}(x,0) &= \dot{u}_0(x) \end{aligned} \tag{7.37}$$

O esquema de Houbolt (BATHE, 1982) apresenta uma aproximação para velocidades da forma que se mostra a seguir:

$$\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{n+1}} = \frac{1}{6\Delta t}\left[11\,\mathbf{u}_{n+1} - 18\,\mathbf{u}_n + 9\,\mathbf{u}_{n-1} - 2\mathbf{u}_{n-2}\right] \tag{7.38}$$

e a seguinte aproximação para a aceleração é considerada:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \frac{1}{\Delta t^2}\left[2\,\mathbf{u}_{n+1} - 5\,\mathbf{u}_n + 4\,\mathbf{u}_{n-1} - \mathbf{u}_{n-2}\right] \tag{7.39}$$

onde Δt é o intervalo de discretização no tempo.

A equação matricial de equilíbrio, Eq. (7.35), é expressa em termos do instante n+1, da forma seguinte:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{H}\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{G}\mathbf{p}_{n+1} \tag{7.40}$$

Finalmente, substituindo-se a Eq. (7.39) na Eq. (7.40), obtém-se a expressão para o esquema de avanço no tempo:

$$\left[2\,\mathbf{M} + \Delta t^2\,\mathbf{H}\right]\mathbf{u}_{n+1} - \Delta t^2\,\mathbf{G}\mathbf{p}_{n+1} = 5\,\mathbf{M}\mathbf{u}_n - 4\,\mathbf{M}\mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{M}\mathbf{u}_{n-2} \tag{7.41}$$

7.5 Exemplo de Aplicação

Casos onde uma viga é submetida a carregamentos uniformes constantes são muito comuns em análise dinâmica de estruturas, mas excitam basicamente o modo fundamental de vibração. Para uma melhor avaliação da consistência numérica do método é interessante investigar casos onde um grande número de modos de vibração esteja presente. Tais problemas são vulgarmente conhecidos como problemas de propagação de ondas. Assim, neste exemplo, são estudados os resultados obtidos para a propagação de ondas longitudinais elásticas em uma barra fixa em uma das suas extremidades e submetida a um carregamento súbito na outra extremidade. Ressalte-se que, embora aparentemente simples, a solução numérica deste problema é difícil,

pois há participação de todos os modos de vibração (NOGUEIRA & LOEFFLER, 1991). Há ainda a presença de uma frente de onda bem definida, que se propaga progressivamente ao longo da barra, impondo uma descontinuidade no campo de tensões. A Fig. (7.1) mostra as características geométricas do sistema e o carregamento imposto.

As constantes do material são: modulo de Young $E= 2,4$, coeficiente de Poisson $v=0,2$, densidade $\rho=1$. O modelo com o Método da Quadratura Operacional (MQO-MEC) é discretizado com 36 elementos de contorno quadráticos. Nós duplos são utilizados nos quatro cantos da barra.

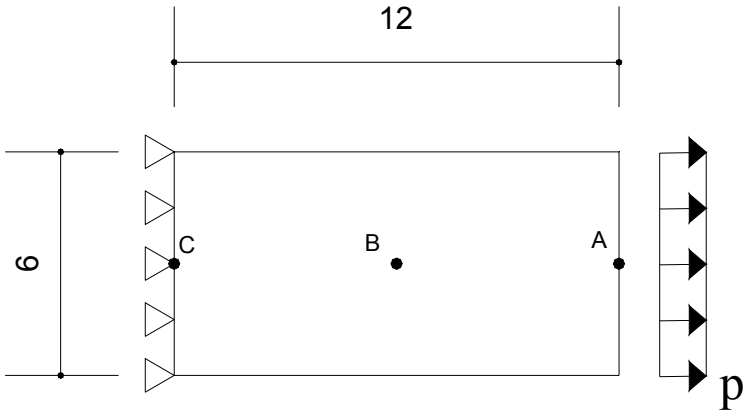

Figura 7.1: Barra de seção transversal constante axialmente solicitada por um carregamento do tipo Heaviside

Os resultados obtidos com o emprego do MQO são comparados com a solução analítica e com os fornecidos pela DR-MEC (Vera-Tudela, 1999), discretizado com 12 elementos de contorno quadráticos e 1 ponto interno. Da mesma forma, nós duplos nos 4 cantos da barra são considerados. Os resultados analíticos, MQO-MEC e DR-MEC, para o deslocamento axial no nó do contorno A, são mostrados na Fig. (7.2).

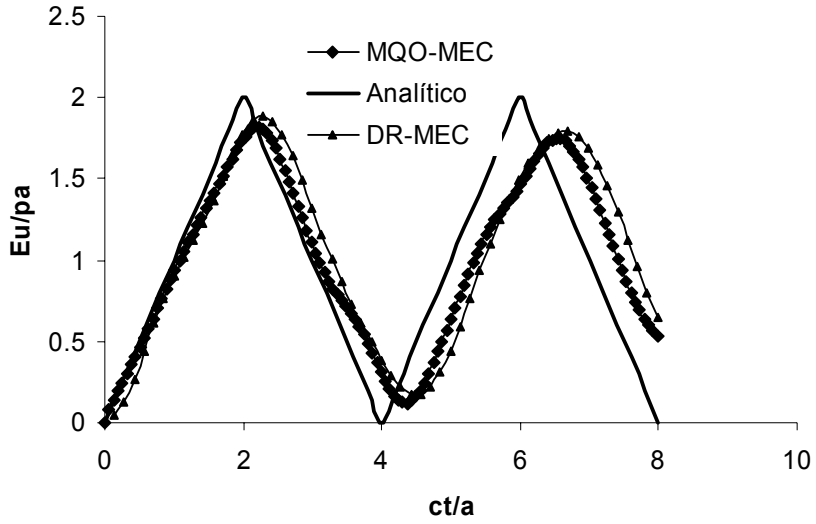

Figura 7.2: Valores normalizados para o deslocamento longitudinal em função do parâmetro temporal do ponto A.

Os resultados da força de superfície, para o nó de contorno C são apresentados na Fig (7.3) e comparados com os valores analíticos.

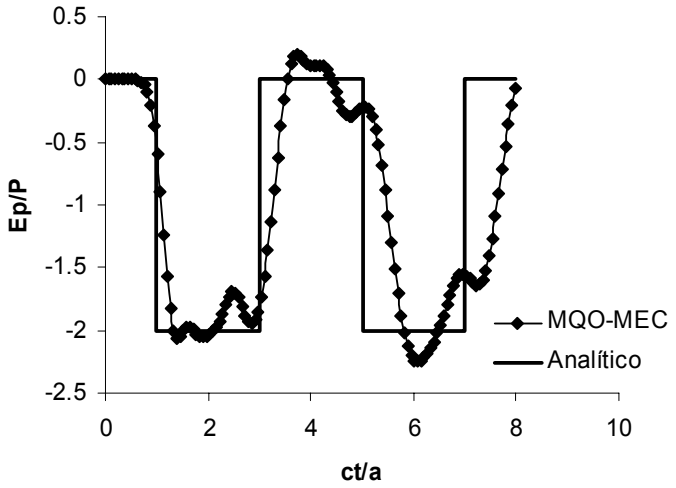

Figura 7.3. Valores normalizados da força de superfície no nó de contorno C.

Da mesma forma, comparam-se os resultados analíticos, MQO-MEC e DR-MEC para o deslocamento axial do ponto interno B. localizado no ponto médio da barra como se pode observar na Fig (7.4).

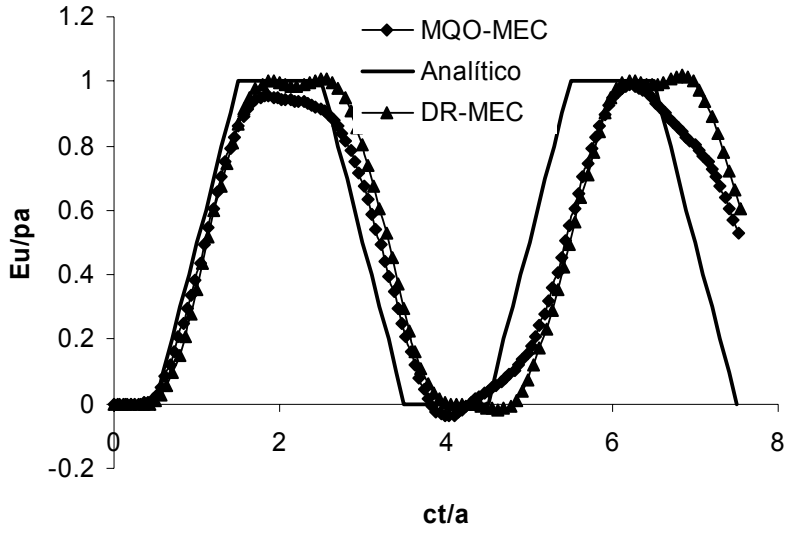

Figura 7.4: Resultados do deslocamento axial para o ponto interno B (6,3)

CAPÍTULO 8

Dupla Reciprocidade e a Função de Green Numérica na Mecânica da Fratura Elastodinâmica 2D

8.1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se a formulação do Método dos Elementos de Contorno com a Dupla Reciprocidade e a Função de Green Numérica. Embora a formulação siga o procedimento clássico da FGN, na dedução da equação integral de contorno para a ação de domínio aparece mais uma integral de contorno que se denominou de termo "Extra".

Exemplos de aplicação são apresentados para verificar a validade da formulação. O primeiro corresponde a um problema com ação de domínio como peso próprio em uma viga bi-apoiada com trinca de bordo. O segundo é um problema no domínio da freqüência. O problema transiente que consiste de uma chapa retangular com trinca centrada, solicitada uniaxialmente por um carregamento súbito, que é conhecido como problema de Chen, é deixado para o capítulo 10 de forma a poder compará-lo com a formulação do MEC com a Função de Green Numérica e o Método da Quadratura Operacional.

8.2 A Dupla Reciprocidade na Mecânica da Fratura

A equação integral de contorno com carga de domínio, Eq. (7.18), é reescrita abaixo:

$$C_{ij}\, u_j + \int_{\Gamma} p^*_{ij}\, u_j \, d\Gamma = \int_{\Gamma} u^*_{ij}\, p_j \, d\Gamma + \int_{\Omega} u^*_{ij}\, b_j \, d\Omega$$

Segundo foi estudado no capítulo 7, a técnica da Dupla Reciprocidade é introduzida de forma a expressar o termo de domínio como uma integral de contorno utilizando as soluções fundamentais da estática. Para isso, representa-se a ação de domínio por um somatório de funções, Eq. (7.19):

$$b_j(x) = \alpha^m_j\, f^m = \alpha^1_j\, f^1 + \alpha^2_j\, f^2 + \ldots + \alpha^n_j\, f^n$$

A integral de domínio passa a ser escrita segundo a Eq. (7.20):

$$\int_{\Omega} u^*_{ij}\, b_j \, d\Omega = \alpha^m_j \int_{\Omega} f^m\, u^*_{ij} \, d\Omega$$

Após substituir a função *f* por uma função primitiva que satisfaz à equação de Navier, pode-se ampliar o resultado da Eq. (7.22) para o problema de um corpo trincado com geometria definida pela Fig. (6.1):

$$C_{ij}^{l}u_{j}^{l}+\int_{\Gamma^{E}}p_{ij}^{*}u_{j}d\Gamma+\int_{\Gamma^{F}}p_{ij}^{*}u_{j}d\Gamma-\int_{\Gamma^{E}}u_{ij}^{*}p_{j}d\Gamma-\int_{\Gamma^{F}}u_{ij}^{*}p_{j}d\Gamma=$$
$$=\left(C_{ij}^{l}\hat{u}_{j}^{l}+\int_{\Gamma^{E}}p_{ij}^{*}\hat{u}_{j}d\Gamma+\int_{\Gamma^{F}}p_{ij}^{*}\hat{p}_{j}d\Gamma-\int_{\Gamma^{E}}u_{ij}^{*}\hat{p}_{j}d\Gamma-\int_{\Gamma^{F}}u_{ij}^{*}\hat{p}_{j}d\Gamma\right)\alpha_{n}^{m} \tag{8.1}$$

O estudo da Função de Green foi desenvolvido no capítulo 6 e pode-se consultar TELLES, CASTOR & GUIMARÃES, 1995.

Devido à condição de trinca descarregada da Função de Green pode-se deduzir que a segunda integral do lado esquerdo e a segunda do lado direito desaparecem por definição da própria Função de Green Numérica (Fig. 6.2). Também por estar considerando trinca descarregada, a quarta integral do lado esquerdo anula-se. O mesmo não acontece com a quarta integral do lado direito, que precisa ser analisada com mais detalhes.

Para isto, pode-se simplificar a integração ao longo de toda a superfície da trinca, considerando somente a integração sobre a sua superfície inferior, segundo pode-se observar a seguir:

$$\int_{\Gamma^{F}}u_{ij}^{*}\,\hat{p}_{j}\,d\Gamma=\int_{\Gamma^{I}+\Gamma^{S}}u_{ij}^{*}\,\hat{p}_{j}\,d\Gamma=\int_{\Gamma^{I}}\left\{u_{ij}^{*I}\,\hat{p}_{j}^{I}+u_{ij}^{*S}\,\hat{p}_{j}^{S}\right\}d\Gamma=$$
$$=\int_{\Gamma^{I}}\left\{u_{ij}^{*I}\,\hat{p}_{j}^{I}-u_{ij}^{*S}\,\hat{p}_{j}^{I}\right\}d\Gamma=\int_{\Gamma^{I}}\left\{u_{ij}^{*I}-u_{ij}^{*S}\right\}\hat{p}_{j}^{I}\,d\Gamma=\int_{\Gamma^{I}}c_{ij}\,\hat{p}_{j}^{I}\,d\Gamma \tag{8.2}$$

Desta forma a equação integral de contorno para o problema de um corpo trincado com carga de domínio é escrita como:

$$C_{ij}^{l}u_{j}^{l}+\int_{\Gamma^{E}}p_{ij}^{*}u_{j}\,d\Gamma-\int_{\Gamma^{E}}u_{ij}^{*}p_{j}\,d\Gamma=$$

$$\left(C_{ij}^{l}\hat{u}_{j}^{l}+\int_{\Gamma^{E}}p_{ij}^{*}\hat{u}_{j}\,d\Gamma-\int_{\Gamma^{E}}u_{ij}^{*}\hat{p}_{j}\,d\Gamma-\int_{\Gamma^{I}}c_{ij}\hat{p}_{j}\,d\Gamma\right)\alpha_{n}^{m} \tag{8.3}$$

Discretizando o contorno em elementos chega-se a um sistema matricial de equações:

$$Hu-Gp=\left(H\hat{u}-G\hat{p}-EXT\right)f^{-1}b \tag{8.4}$$

onde EXT é o chamado termo "Extra".

8.3 Exemplo de Viga bi-apoiada com trinca de bordo centrada.

O exemplo de uma viga bi-apoiada com trinca de bordo centrada é estudado com a formulação do MEC com a Função de Green Numérica, analisando dois problemas específicos: o primeiro possui ação de domínio e o segundo uma carga aplicada equivalente, ou seja, o primeiro utiliza a formulação com Dupla Reciprocidade e o outro não.

O problema foi resolvido inicialmente por KARAMI & KUHN,1993 e os resultados numéricos para o caso de força aplicada são comparados com os valores teóricos de TADA et al.,1983. O exemplo é resolvido para ação de domínio como peso próprio e também para uma carga pontual aplicada equivalente de valor $P=\rho g V$ (onde ρ é o peso específico, V é o volume da viga e g é a constante gravitacional) na direção da gravidade e aplicado no ponto médio, TIMOSHENKO & GOODIER,1970.

Estudam-se relações a/w iguais a 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 e 0,5. A geometria do problema é mostrada na Fig. (8.1) e para a análise numérica considera-se $\rho g = 1$; o coeficiente de Poisson (ν) igual a 0,3; o módulo de Young igual a 1000 e admite-se estado plano de deformação.

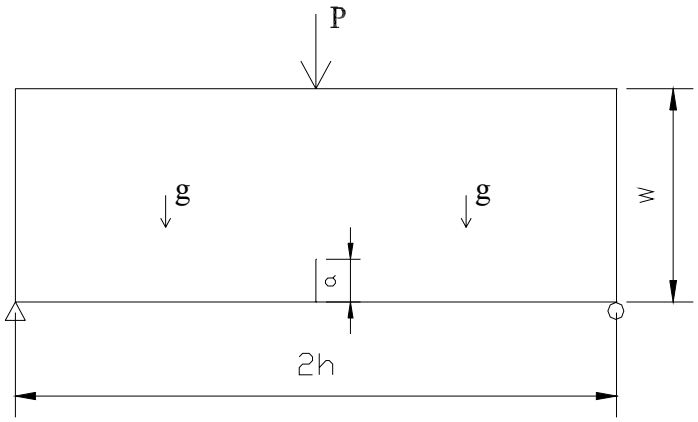

Figura 8.1: Viga bi-apoiada carregada e trinca de bordo.

Os resultados são apresentados na Tab. (8.1). Observa-se que os valores obtidos com o peso próprio sempre são menores que os calculados com a força concentrada equivalente. A relação entre estes resultados é mantida em cerca de ½ e a explicação para isto é que o momento produzido pelo peso próprio é a metade do produzido pela força concentrada.

Na Fig. (8.2) estão plotados os resultados apresentados pela Tab. (8.1). Observa-se uma variação anormal nos resultados para a relação a/w=0,4; possivelmente por um erro numérico para este exemplo específico.

Tabela 8.1: Fator de Intensidade de Tensão na viga sob o efeito de peso próprio e carga concentrada

a/w	Teórico carga concentrada	FGN/DR carga concentrada	FGN/DR peso próprio	Relação
0.1	24.17	24.88	12.55	0.50
0.2	23.71	24.38	12.85	0.53
0.3	25.07	25.59	13.31	0.52
0.4	28.28	26.69	13.35	0.50
0.5	33.99	33.42	17.53	0.52

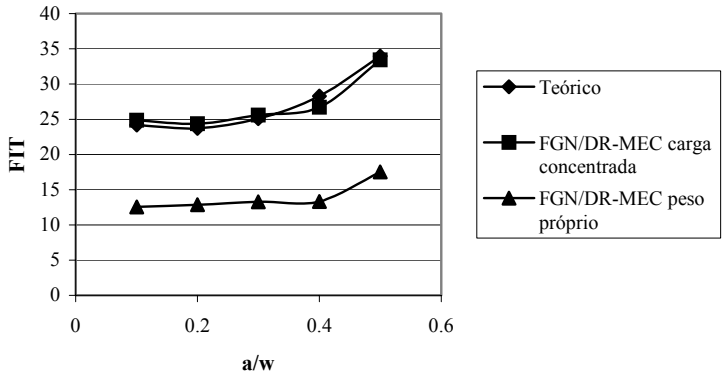

Figura 8.2: Variação do Fator de Intensidade de Tensão com o comprimento da trinca.

8.4 Exemplo no domínio da freqüência.

Considera-se uma chapa retangular com uma trinca central como é mostrado na Fig. (8.3). O material é linearmente elástico com as seguintes propriedades: módulo de Young igual a 10000; coeficiente de Poisson igual a 0,3 e densidade igual à unidade. O comprimento da trinca é 2 a= 0,24. A discretização tem 80 elementos quadráticos, nós duplos nos quatro cantos da chapa e 4 pontos internos.

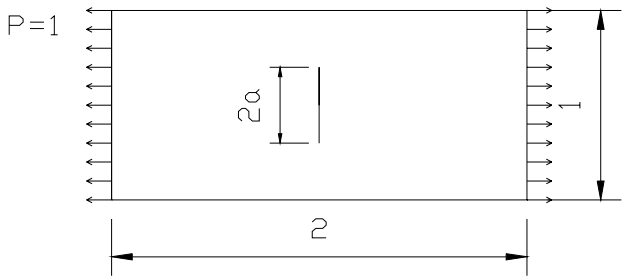

Figura 8.3: Geometria da chapa retangular com trinca centrada.

Considerando-se o problema elastodinâmico em que as ações de domínio e as condições de contorno variam harmonicamente no tempo, com freqüência angular ω, pode-se escrever:

$$b(x,t) = \tilde{b}(x,\omega)e^{i\omega t} \tag{8.5}$$

O campo de deslocamentos $u(x,t)$, solução do problema, pode ser decomposto em uma parcela permanente $u^p(x,t) = \tilde{u}(x,\omega)\,e^{i\omega t}$, e outra dita transiente, $u^t(x,t)$. A parcela permanente satisfaz as condições de contorno do problema sob a atuação das forças de domínio. A parte transiente é a solução homogênea do problema sob condições de contorno homogêneas e satisfaz às condições iniciais. Supondo-se que existe algum tipo de amortecimento no problema, após um certo intervalo de tempo pode-se desprezar a parte transiente da resposta. Assim, decorrido um intervalo de tempo suficiente, pode-se reformular o problema inicialmente proposto.

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,\omega)e^{i\omega t} \tag{8.6}$$

$$p(x,t) = \tilde{p}(x,\omega)e^{i\omega t} \tag{8.7}$$

$$\ddot{u}(x,t) = -\omega^2 \tilde{u}(x,\omega) e^{i\omega t} \tag{8.8}$$

Finalmente o sistema de equações obtido pela Dupla Reciprocidade toma a forma seguinte:

$$\omega^2 \boldsymbol{M}\,\tilde{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{H}\,\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{G}\,\tilde{\boldsymbol{p}} \tag{8.9}$$

Em CHIRINO et al.,1994 e BARRA,1996 encontram-se as referências que servem de comparação aos resultados numéricos obtidos. Foram feitas diversas análises com varredura de freqüência e a comparação de resultados está apresentada na Fig. (8.4).

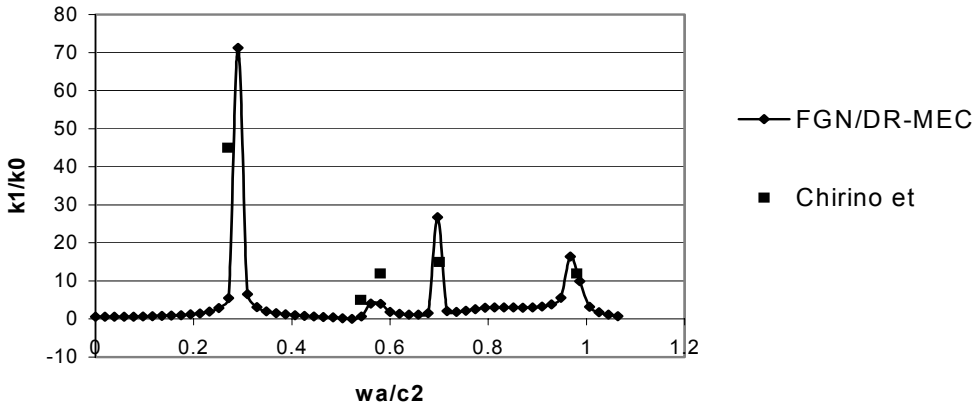

Figura 8.4: Resultados numéricos do problema da chapa retangular com trinca central.

CAPÍTULO 9

Simulação de Trincas Retas em Problemas Governados pela Equação Escalar da Onda

9.1 Introdução

O fenômeno de propagação de ondas é observado em diversos campos das ciências e da engenharia. Pela sua simplicidade de conceitos, o estudo de problemas governados pela equação escalar da onda serve como base para poder ampliar os fundamentos teóricos para problemas mais complexos como os da elastodinâmica.

Na bibliografia consultada não foi possível achar alguma referência onde fosse estudado ou simulado um problema da mecânica da fratura com a equação escalar da onda. Para alcançar os objetivos da pesquisa utilizou-se um programa desenvolvido para resolver problemas de campo escalar pelo Método da Quadratura Operacional e implementou-se a Função de Green numérica. A estratégia é simular um problema de campo escalar que apresente uma descontinuidade e que poderia ser interpretado como se fosse uma trinca, para assim testar a formulação e posteriormente ampliar o estudo para problemas da elastodinâmica 2D e a problemas dinâmicos da mecânica da fratura linear elástica.

Neste capítulo apresentam-se alguns conceitos básicos sobre a equação escalar da onda, a formulação do método dos Elementos de Contorno com a Função de Green numérica e o Método da Quadratura Operacional. Exemplos são apresentados onde os resultados obtidos pelo programa básico (MQO) incrementado pela função fundamental de Green são comparados com os resultados determinados pela própria

formulação da Quadratura Operacional usada como base da implementação, e com os obtidos com uma formulação clássica que utiliza a solução fundamental no domínio do tempo, aproveitando a simetria dos problemas escolhidos.

9.2 Equação Escalar da Onda

A equação escalar da onda é definida para um corpo elástico-linear, homogêneo e isotrópico; conhecidas as condições iniciais adequadas e respectivas condições de contorno, pode-se obter uma única solução ao problema.

A seguir apresenta-se uma breve introdução sobre a equação escalar da onda definida por Morse & Feshbach (1953). Essa equação se escreve como:

$$\nabla^2 \mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t}) - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2 \mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial \mathrm{t}^2} = 0 \tag{9.1}$$

onde $u(x,t)$ é o potencial, t é o tempo e c é a velocidade de propagação da onda.

De forma a calcular a solução particular do problema, definem-se as seguintes condições de contorno $(x \in \Gamma)$:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \overline{u}(x,t) && x \in \Gamma_u \\ p(x,t) &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial n} = \overline{p}(x,t) && x \in \Gamma_p \end{aligned} \tag{9.2}$$

e as condições iniciais $(x \in \Omega)$:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x) \\ v(x,0) &= \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = v_0(x) \end{aligned} \tag{9.3}$$

Note-se que $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$ é o contorno total, p é o fluxo e n representa a normal externa ao contorno.

9.3 Formulação do MEC para a Equação Escalar da Onda

A equação integral de contorno, no domínio do tempo, que corresponde ao problema da equação escalar da onda é escrita a seguir:

$$4\pi C(\xi)u(\xi,t) = \int_{\Gamma}\int_{0}^{t^+} u^t(x,t;\xi,\tau)\,p(x,\tau)\,d\tau\,d\Gamma(x) - \int_{\Gamma}\int_{0}^{t^+} p^t(x,t;\xi,\tau)\,u(x,\tau)\,d\tau\,d\Gamma(x) \tag{9.4}$$

onde $u^t(x,t;\xi,\tau)$ é a solução fundamental para o potencial e $p^t(x,t;\xi,\tau) = \partial u^t / \partial n$. O coeficiente $C(\xi)$ depende da geometria do elemento.

Seguindo o procedimento do Método da Quadratura Operacional mostrado na Eq. (5.9), para cada parcela da Eq. (9.4) tem-se:

$$\int_{0}^{t^n}\int_{\Gamma} u^t(x,t;\xi,\tau)\,p(x,\tau)\,d\Gamma d\tau = \sum_{k=0}^{n} g^j_{n-k}(x,\xi,\Delta t)\,p^j_k(x) \qquad n = 0,1\ldots,N \tag{9.5}$$

$$\int_{0}^{t^n}\int_{\Gamma} p^t(x,t;\xi,\tau)\,u(x,\tau)\,d\Gamma d\tau = \sum_{k=0}^{n} h^j_{n-k}(x,\xi,\Delta t)\,u^j_k(x) \qquad n = 0,1\ldots,N \tag{9.6}$$

Considerando que as equações integrais estão discretizadas no tempo e o contorno está dividido em j elementos Γ_j, as expressões g_n e h_n nas Eqs. (9.5) e

(9.6), respectivamente, são calculadas seguindo o procedimento padrão apresentado na Eq. (5.11). Desta forma, pode-se escrever:

$$g_n^j(x,\xi,\Delta t) = \frac{\rho^{-n}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\int_{\Gamma_j}\hat{u}^t\left(x,\xi,\frac{\gamma\left(\rho\, e^{il2\pi/L}\right)}{\Delta t}\right)\phi^j(x)\,d\Gamma(x)\,e^{-inl2\pi/L} \tag{9.7}$$

$$h_n^j(x,\xi,\Delta t) = \frac{\rho^{-n}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\int_{\Gamma_j}\hat{p}^t\left(x,\xi,\frac{\gamma\left(\rho\, e^{il2\pi/L}\right)}{\Delta t}\right)\phi^j(x)\,d\Gamma(x)\,e^{-inl2\pi/L} \tag{9.8}$$

onde $\phi^j(x)$ representa as funções de interpolação na discretização de contorno.

Para transformar as Eqs. (9.7) e (9.8) num problema da mecânica da fratura substitui-se as soluções fundamentais $\hat{u}_{ij}^t$ e $\hat{p}_{ij}^t$ pela Função de Green numérica dada pelas Eqs. (6.1) e (6.2), repetidas aqui por conveniência:

$$\hat{u}_{ij}^*(r,s) = \hat{u}_{ij}^t(r,s) + \hat{u}_{ij}^c(r,s)$$

$$\hat{p}_{ij}^*(r,s) = \hat{p}_{ij}^t(r,s) + \hat{p}_{ij}^c(r,s)$$

onde $r = |x-\xi|$ é a distância entre os pontos campo (x) e fonte (ξ) e s é o parâmetro da transformada de Laplace ($s = a + i\,\omega$).

O procedimento para trabalhar com a Função de Green foi amplamente explicitado no capítulo 6, mas pode-se indicar que devido ao Método da Quadratura Operacional é necessário levar em conta o seguinte: calculam-se as soluções complementares para cada valor do parâmetro l $(l = 0,\ldots,N)$ das Eqs. (9.7) e (9.8); o procedimento geral descrito no capítulo 5 para o Método da Quadratura Operacional não sofre modificações.

Finalmente, neste capítulo foi considerado o valor do erro $\delta = 10^{-10}$, também L=N e $\rho^N = \sqrt{\delta}$. A função $\gamma(z)$ de ordem p é a seguinte:

$$\gamma(z) = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n}(1-z)^n \tag{9.9}$$

9.4 Solução Fundamental

A solução fundamental standard utilizada pode ser encontrada em MORSE & FESHBACH, 1953, para um problema 2D no domínio transformado de Laplace. A expressão é a seguinte:

$$\hat{u}^t(r,s) = 2K_0(sr) \tag{9.10}$$

onde, também, $r = |x - \xi|$ é a distância entre os pontos campo (x) e fonte (ξ) , s é o parâmetro da transformada de Laplace e K_0 é a função modificada de Bessel de segunda classe e ordem zero

A derivada em relação à normal de $\hat{u}^t$ é dada por:

$$\hat{p}^t(r,s) = -2\,s\,K_1(sr)\frac{\partial r}{\partial n} \tag{9.11}$$

onde K_1 é a função modificada de Bessel de segunda classe e primeira ordem.

Seguindo o mesmo critério, derivando segundo uma direção dada por um vetor unitário m passando pelo ponto fonte ξ, tem-se:

$$\hat{U}^t(r,s) = 2\,s\,K_1(sr)\frac{\partial r}{\partial m} \tag{9.12}$$

e

$$\hat{P}^t(r,s) = 2s\left[\left(\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial r}{\partial m} + \frac{\partial m}{\partial n}\right)\frac{K_1(sr)}{r} + \left(K_0(sr) + \frac{1}{s\,r}K_1(sr)\right)s\frac{\partial r}{\partial m}\frac{\partial r}{\partial n}\right] \tag{9.13}$$

9.5 Exemplo da Simulação de uma trinca reta

Três exemplos de aplicação são apresentados com o objetivo de verificar a precisão dos resultados numéricos proporcionados pela formulação desenvolvida neste capítulo. Em todas as análises, e feita referência à variável adimensional $\beta = c\,\Delta t/l$ que proporciona uma medida do intervalo de tempo a ser considerado para realizar o teste. (*l* é o comprimento do menor elemento de contorno).

O primeiro teste é feito aplicando um carregamento súbito e unitário nas superfícies da trinca. A simulação corresponde a uma chapa onde as dimensões são teoricamente infinitas. O comprimento total da trinca é *2.a=4*; a velocidade da onda é igual a 1, a variável adimensional β*=0.3787* , e o tempo total de execução é 13. Os resultados da formulação dependente do tempo foram obtidos aproveitando a simetria da chapa, assim, apenas a metade da chapa foi discretizada e a simetria simulada mediante condição de contorno.

Na Fig. (9.1) apresentam-se os resultados ao problema proposto.

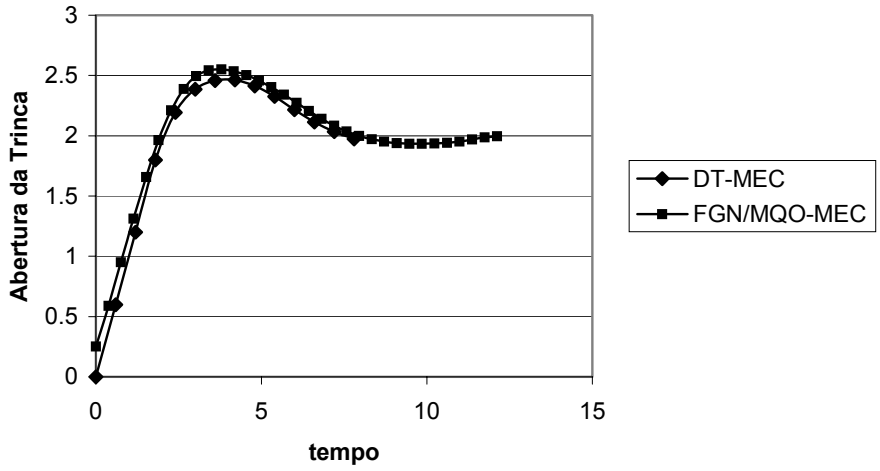

Figura 9.1 Abertura da trinca do nó central x Tempo para β=0.3787

A malha para a formulação dependente do tempo tem 120 elementos lineares e os resultados com a função de Green numérica foram obtidos com uma malha de 52 elementos de contorno lineares.

O segundo exemplo corresponde a uma chapa unidimensional carregada nos extremos por uma função do tipo Heaviside aplicada no tempo *t=0* e que permanece constante durante o período de estudo (*T=40 unidades*). O valor do comprimento da trinca centrada na barra é *2a=4*. A malha tem 52 elementos de contorno e nós duplos são considerados nos quatro cantos da barra. Para a variável adimensional: $\beta=0.5$. Na Fig. (9.2) mostra-se a geometria do problema. Para verificar a sensibilidade da resposta numérica, os resultados são comparados com uma formulação do Método dos Elementos de Contorno com o Método da Quadratura Operacional (onde são utilizados 52 elementos de contorno dos quais 10 representam a trinca). Deve-se atentar que esta formulação foi a base para a implementação da Função de Green numérica apresentada neste capítulo. Também é comparado com a formulação no Domínio do Tempo (120 elementos de contorno, 8 para representar a trinca). Ambas

fazem uso da simetria da barra para a discretização do contorno e da superfície da trinca.

Como valores de referência, tomam-se os obtidos primeiro pela formulação que utiliza a solução fundamental no domínio do tempo para o problema da equação da onda escalar (Mansur, 1983;Carrer & Mansur, 1994), e depois pela formulação baseada no Método de Quadratura Operacional para um problema de onda escalar 2-D, Abreu *et al.* (2001). A grande diferença para o problema desenvolvido, usando a função de Green (Fig. (9.2)), é que as duas análises iniciais comparativas só podem acomodar trincas se for aproveitada a simetria da barra.

Nesta análise, a velocidade de propagação da onda é: *c=1*

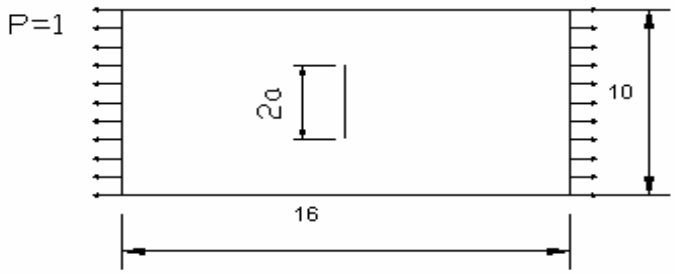

Figura 9.2: Geometria do exemplo da simulação de trinca reta.

O nó escolhido como parâmetro de comparação é o localizado no centro da trinca.

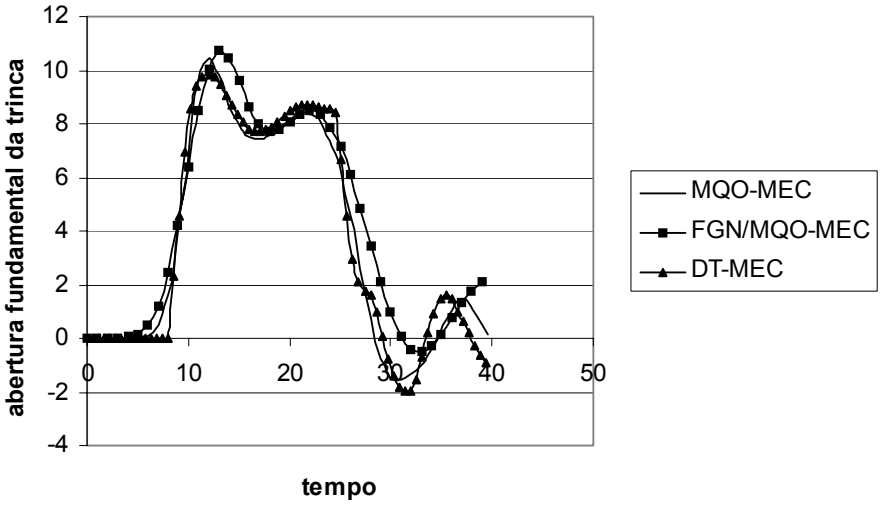

Figura 9.3: Comparação da abertura para o nó central da trinca.

Os resultados gerados pelas três formulações são apresentados na Fig. (9.3), onde é mostrada a abertura da trinca, representada pela diferença do potencial nas faces da mesma em função do tempo. Observa-se a boa concordância entre elas.

Adicionalmente, são comparados alguns valores do parâmetro β , para a mesma chapa unidimensional do teste anterior. Na Fig. (9.4) são mostrados os resultados numéricos para valores de β iguais a 0.5, 0.25 e 0.125.

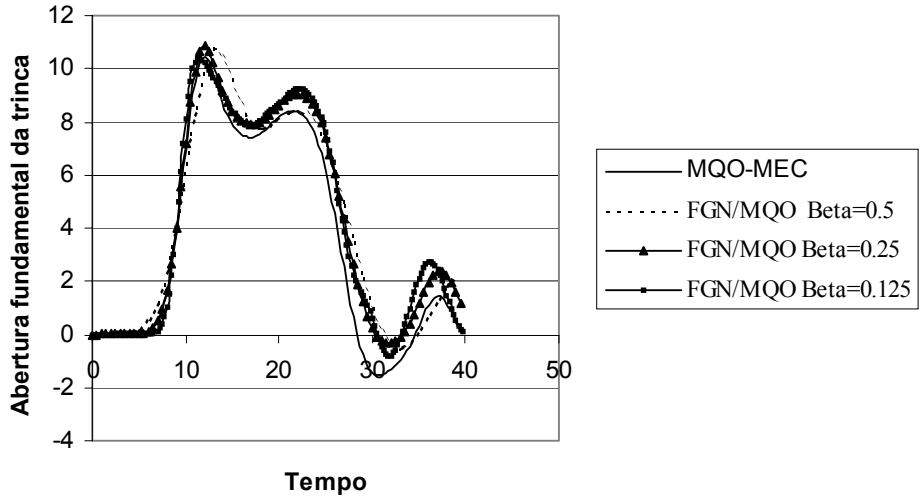

Figura 9.4: Abertura do nó central da trinca para diferentes valores de β.

CAPÍTULO 10

Método da Quadratura Operacional e a Função de Green Numérica na Mecânica da Fratura Elastodinâmica 2D

10.1 Introdução

Neste capítulo são resolvidos problemas da mecânica da fratura linear elástica com a formulação do Método dos Elementos de Contorno implementando a Função de Green Numérica e o Método da Quadratura Operacional. Praticamente é um resumo de tudo o apresentado até o momento e muitas das expressões a considerar serão repetidas e/ou ampliadas para resolver o problema proposto.

Cabe ressaltar que para chegar a este resultado praticou-se um processo que se iniciou com o desenvolvimento das expressões para simular uma trinca reta num problema de campo escalar, onde se implementou a Função de Green Numérica numa formulação do Método dos Elementos de Contorno com o Método da Quadratura Operacional. Uma vez que a formulação mencionada foi verificada e testada, com diversos exemplos, foram desenvolvidas e implementadas as expressões para a formulação do Método dos Elementos de Contorno com o Método da Quadratura Operacional para resolver problemas da Elastodinâmica 2D. Finalmente, foi estudada e desenvolvida a formulação para problemas dinâmicos da mecânica da fratura 2D, apresentada neste capítulo.

Esta seqüência de trabalho serviu para acompanhar e dar mais confiabilidade ao processo, permitindo testar as diferentes fases da implementação e observar as vantagens e dificuldades que os métodos apresentaram.

Dois exemplos de problemas da mecânica da fratura transiente são apresentados para verificar a validade das formulações desenvolvidas.

10.2 Equação Integral de Contorno e a Função de Green Numérica

A formulação do Método da Quadratura Operacional somente precisa da transformada de Laplace da solução fundamental como foi explicado no Capítulo 5. Assim, o procedimento para gerar a Função de Green Numérica é aqui direcionado nesse sentido. Desta forma, a Função de Green para deslocamentos e forças de superfície é escrita como:

$$\hat{u}_{ij}^{*}\left(x,\xi,s\right)=\hat{u}_{ij}^{t}\left(x,\xi,s\right)+\hat{u}_{ij}^{c}\left(x,\xi,s\right)$$

e

$$\hat{p}_{ij}^{*}\left(x,\xi,s\right)=\hat{p}_{ij}^{t}\left(x,\xi,s\right)+\hat{p}_{ij}^{c}\left(x,\xi,s\right)$$

onde $\hat{u}_{ij}^{t}\left(x,\xi,s\right)$ é a solução fundamental padrão para deslocamento no domínio transformado de Laplace e $\hat{p}_{ij}^{t}\left(x,\xi,s\right)$ é a força de superfície fundamental equivalente no domínio transformado de Laplace; o índice *c* refere-se às soluções complementares de deslocamento e força de superfície e *s* é o valor do parâmetro de Laplace.

Para determinar a solução complementar faz-se uso da equação integral clássica e hipersingular de contorno para as superfícies da trinca. Logo, lembrando

que a abertura fundamental da trinca, na Função de Green Numérica, é definida de acordo com a Eq. (6.9):

$$c_{ik}(\xi,\zeta,s) = \hat{u}^c_{ik}(\xi,\zeta^S,s) - \hat{u}^c_{ik}(\xi,\zeta^I,s) \tag{10.1}$$

a solução complementar é reescrita a partir das Eqs. (6.10) e (6.11) na forma:

$$\hat{u}^c_{ij}(\xi,x,s) = \int_{\Gamma^I} \hat{p}^t_{jk}(x,\zeta,s)\, c_{ik}(\xi,\zeta,s)\, d\Gamma(\zeta) \tag{10.2}$$

$$\hat{p}^c_{ij}(\xi,x,s) = \int_{\Gamma^I} \hat{P}^t_{jk}(x,\zeta,s)\, c_{ik}(\xi,\zeta,s)\, d\Gamma(\zeta) \tag{10.3}$$

A equação integral de contorno no domínio do tempo, que corresponde a um problema da mecânica da fratura na elastodinâmica 2D pode ser escrita para o contorno Γ, tempo τ, deslocamento $u_j(x,\tau)$ e força de superfície $p_j(x,\tau)$ como:

$$\begin{aligned} 4\pi\, C_{ij}(\xi)\, u_j(\xi,t) = &\int_0^{t^+} \int_\Gamma u^*_{ij}(x,t;\xi,\tau)\, p_j(x,\tau)\, d\Gamma(x)\, d\tau \\ &- \int_0^{t^+} \int_\Gamma p^*_{ij}(x,t;\xi,\tau)\, u_j(x,\tau)\, d\Gamma(x)\, d\tau \end{aligned} \tag{10.4}$$

onde $C_{ij}(\xi)$ é o coeficiente que depende da localização de ξ ; $u^*_{ij}(x,t;\xi,\tau)$ e $p^*_{ij}(x,t;\xi,\tau)$ são as Funções de Green Numéricas no domínio do tempo.

Aplicando os conceitos definidos para o Método da Quadratura Operacional, as integrais de convolução da Eq. (10.4) são escritas na forma seguinte:

$$\int_0^{t^+}\int_{\Gamma} u_{ij}^*(x,t;\xi,\tau)\, p_j(x,\tau)\; d\,\Gamma(x)\; d\,\tau = \sum_{k=0}^{n} {}^{n-k}g_{ij}^e(x,\xi,\Delta t)\;\; {}^{k}p_j^e(x) \tag{10.5}$$

$$\int_0^{t^+}\int_{\Gamma} p_{ij}^*(x,t;\xi,\tau)\, u_j(x,\tau)\; d\,\Gamma(x)\; d\,\tau = \sum_{k=0}^{n} {}^{n-k}h_{ij}^e(x,\xi,\Delta t)\;\; {}^{k}u_j^e(x) \tag{10.6}$$

com $n = 0,1,\ldots,N$; considera-se que o contorno é discretizado em um número de elementos Γ_e. Os pesos de integração ${}^{n}g_{ij}^e$ e ${}^{n}h_{ij}^e$ são calculados segundo o procedimento apresentado na Eq. (5.11), assim:

$${}^{n}g_{ij}^e(x,\xi,\Delta t) = \frac{\rho^{-n}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\int_{\Gamma^e}\left[\hat{u}_{ij}^t(\xi,x,s)+\hat{u}_{ij}^c(\xi,x,s)\right]\Phi^e(x)\; d\,\Gamma(x)\; e^{-inl2\pi/L} \tag{10.7}$$

$${}^{n}h_{ij}^e(x,\xi,\Delta t) = \frac{\rho^{-n}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\int_{\Gamma^e}\left[\hat{p}_{ij}^t(\xi,x,s)+\hat{p}_{ij}^c(\xi,x,s)\right]\Phi^e(x)\; d\,\Gamma(x)\; e^{-inl2\pi/L} \tag{10.8}$$

onde o parâmetro de Laplace é escrito como:

$$s = \frac{\gamma\left(\rho e^{il2\pi/L}\right)}{\Delta t} \tag{10.9}$$

Nas Eqs. (10.8) e (10.9) $\Phi^e(x)$ representa a função de interpolação quadrática definida na discretização do contorno. Também considera-se para o erro uma tolerância de $\delta = 10^{-10}$.

Após a discretização e integração, o seguinte sistema matricial de equações é obtido para $t_n = n\,\Delta t$:

$$(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{H}^0)\,\boldsymbol{u}^n = \boldsymbol{G}^0\,\boldsymbol{p}^n + \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{f}^k \tag{10.10}$$

onde,

$$\boldsymbol{f}^k = \boldsymbol{G}^{n-k}\,\boldsymbol{p}^k - \boldsymbol{H}^{n-k}\,\boldsymbol{u}^k \tag{10.11}$$

Assim, o sistema de equações é resolvido passo-a-passo, obtendo os deslocamentos e forças de superfície para cada intervalo de tempo.

10.3 Aplicação a Trincas Retilíneas Horizontais

Os exemplos apresentados neste trabalho correspondem a o caso da trinca reta e horizontal, centrada na origem do sistema cartesiano de coordenadas. Assim, a solução fundamental hipersingular dinâmica, no domínio da freqüência, para o espaço infinito não trincado se reduz a:

$$\begin{aligned}\hat{P}^t_{jk}(\overline{\zeta},\zeta) = -\frac{\mu}{2\pi}\Bigg\{&\left[\frac{d^2\varphi}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{3}{r}\frac{d\chi}{dr} + \frac{6}{r^2}\frac{d^2\chi}{dr^2}\right] r_{,j}\, r_{,k} + \\ &+ \frac{2}{r}\left(\frac{d\varphi}{dr} - \frac{\chi}{r}\right)\left(\delta_{ij} + m_j\, n_k\right) + \left[\left(\frac{C_p^2}{C_s^2} - 2\right)\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\left(\frac{C_p^2}{C_s^2} + 2\right) - \frac{2}{r}\left(\frac{C_p^2}{C_s^2}\right)\frac{d\chi}{dr} + \right. \\ &\left. + \left(\frac{C_p^2}{C_s^2} - 2\right)\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} - \frac{d^2\chi}{dr^2}\right) + 4\left(1 - \frac{C_p^2}{C_s^2}\right)\frac{\chi}{r^2}\right] m_{,j}\, n_k\Bigg\}\end{aligned} \tag{10.12}$$

onde *r* é a distância entre ζ e $\overline{\zeta}$; n_j é a componente da normal externa no contorno a ser integrado; m_j é a componente da direção normal no ponto fonte.

10.4 Exemplo que Simula uma Trinca num meio Infinito

O exemplo apresentado considera uma trinca reta, num domínio limitado, segundo pode-se observar na Fig. (10.1). Devido às condições de contorno das superfícies apoiadas, não existe influência das ondas de reflexão nos instantes iniciais da análise; desta forma, os resultados coincidem com os que se obtém para o caso de uma trinca reta num meio semi-infinito.

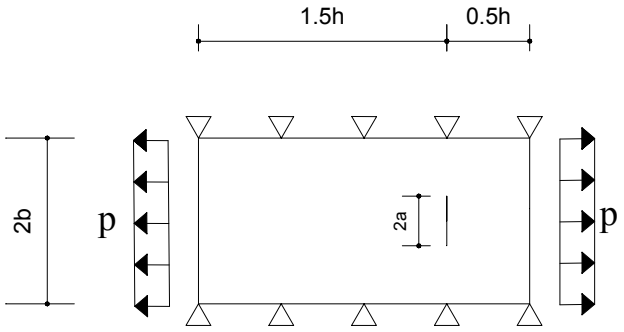

Figura 10.1: Trinca excêntrica em uma chapa sob carregamento do tipo Heaviside.

A chapa retangular tem as seguintes dimensões: *b=5, h=10* e comprimento da trinca *2a = 2,4*. As propriedades do material são: modulo de Young *E=7,43*; coeficiente de Poisson *v = 0,3* e densidade *ρ = 1,0*. O corpo é discretizado usando 24 elementos de contorno quadráticos e o intervalo de tempo considerado é $\Delta t = 0{,}35$ para $Cp\,\Delta t / L = 0{,}40$. Os extremos não apoiados da chapa são solicitados por um

carregamento p do tipo função de Heaviside. Considera-se, para efeitos de cálculo numérico, a integração com 20 pontos de Gauss.

Na Fig (10.2) são plotados os valores do fator de intensidade de tensão normalizado K_1/K_0 ($K_0 = p\sqrt{\pi a}$) em função do fator $Cp\,t/L$. Os resultados são comparados com a formulação do Método dos Elementos de Contorno com Função de Green no domínio transformado de Laplace (Barra & Telles, 1999).

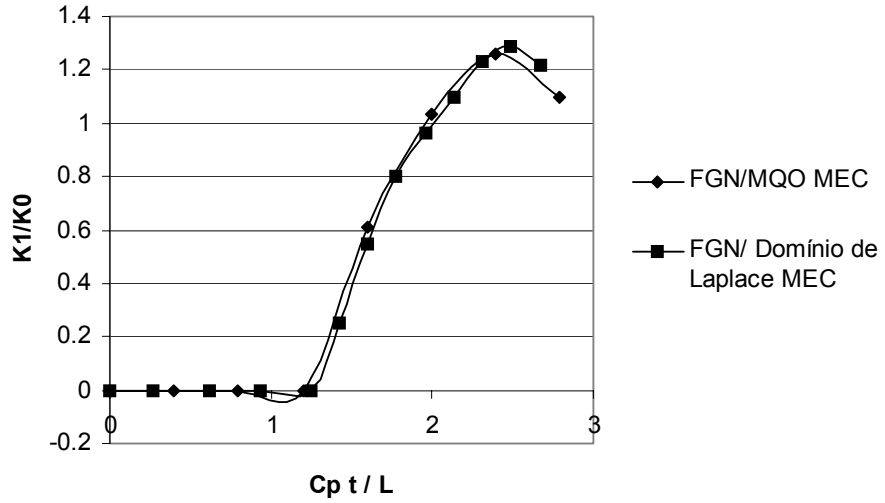

Figura 10.2: Valores de K_1/K_0 referentes ao tempo.

10.5 Problema de Chen

Este problema é clássico e foi analisado pela primeira vez por CHEN, 1975 utilizando o Método das Diferenças Finitas tanto para o espaço quanto para o tempo. Posteriormente, o exemplo foi também resolvido utilizando o Método dos Elementos Finitos, da Diferença Central e dos Elementos de Contorno. Este exemplo tem servido de referência para vários autores.

Analisa-se uma chapa retangular com uma trinca reta centrada, como mostra a Fig (10.3), submetida a uma carga de tração subitamente aplicada.

As dimensões da chapa são: $b = 5$; $h = 10$; $2a = 2.4$ e espessura unitária. O material possui as seguintes propriedades: modulo de Young, $E = 7.43$; coeficiente de Poisson, $v = 0.3$ e densidade, $\rho = 1.0$. O carregamento é do tipo Heaviside.

A primeira análise da formulação do MEC com a Função de Green Numérica e o Método da Quadratura Operacional (FGN/MQO-MEC), utilizou 12 intervalos de tempo até um tempo total de *45 s*., quando a trinca começa a se fechar. Foi adotado o parâmetro adimensional $Cp\,\Delta t / L = 0.34$. Discretizou-se a geometria da chapa com 4 elementos de contorno quadráticos. Comparam-se os resultados com os obtidos por Chen e com a formulação do MEC com a Função de Green Numérica e o Método da Dupla Reciprocidade (FGN/DR-MEC), discretizado com 80 elementos de contorno quadráticos e 20 intervalos de tempo.

O fator de intensidade de tensão dinâmico está normalizado com o fator de intensidade de tensão estático e os valores estão mostrados na Fig. (10.4) e utilizam-se 20 pontos de Gauss nas faces da trinca.

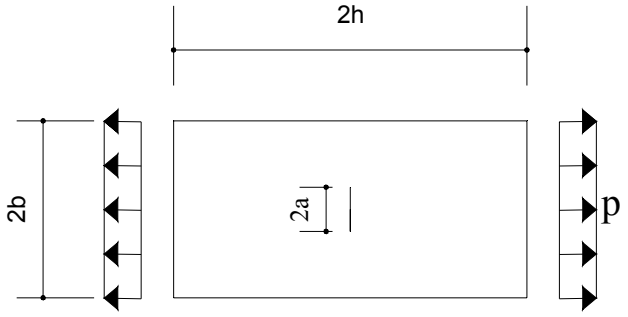

Figura 10.3: Chapa com trinca centrada e carregamento aplicado.

Pode-se observar que os resultados obtidos pela formulação FGN/MQO-MEC não mostram o esperado pico inicial na resposta que o próprio Chen não obteve, mas que autores como LIN & BALLMANN, 1993, BARRA & TELLES, 1999 e VERA-TUFELA, TELLES & GUIMARAES, 2001 com a formulação FGN/DR-MEC conseguiram.

Cabe mencionar que as formulações consideradas neste trabalho não fazem uso da simetria da chapa para a discretização da mesma, o que representa uma das vantagens do uso da Função de Green Numérica. Exemplos do problema do Chen considerando a simetria da chapa podem ser encontrados em MURTI & VALLIAPPAN, 1986, que trabalham com uma formulação no domínio do tempo do Método dos Elementos Finitos; e em CHIRINO *et al*., 1994, com o Método dos Elementos de Contorno.

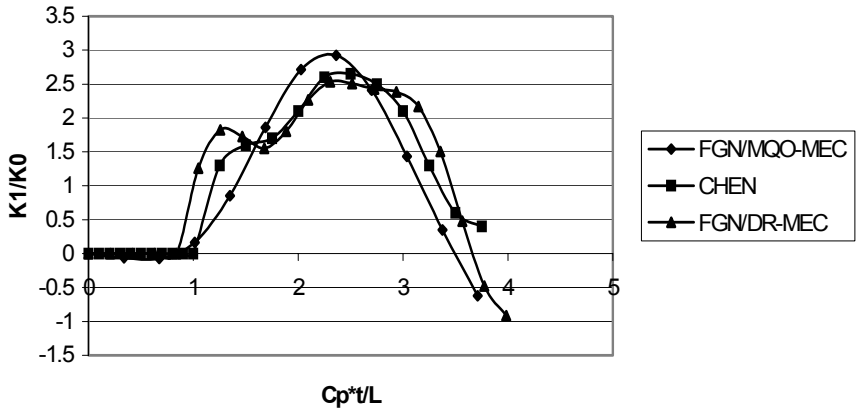

Figura 10.4: Fator de intensidade de tensão para o Problema do Chen.

Na segunda análise a geometria da chapa é discretizada com 12 elementos de contorno quadráticos. Para o tempo tem-se os mesmos 12 intervalos até um tempo total de *45 s*. e o parâmetro adimensional $Cp\,\Delta t / L = 0.68$. Todos os outros parâmetros permanecem inalterados. Comparam-se os resultados com os resultados de

Chen e com a formulação FGN/DR-MEC discretizado com 80 elementos de contorno quadráticos e 20 intervalos de tempo.

Os resultados obtidos são apresentados na Fig. (10.5).

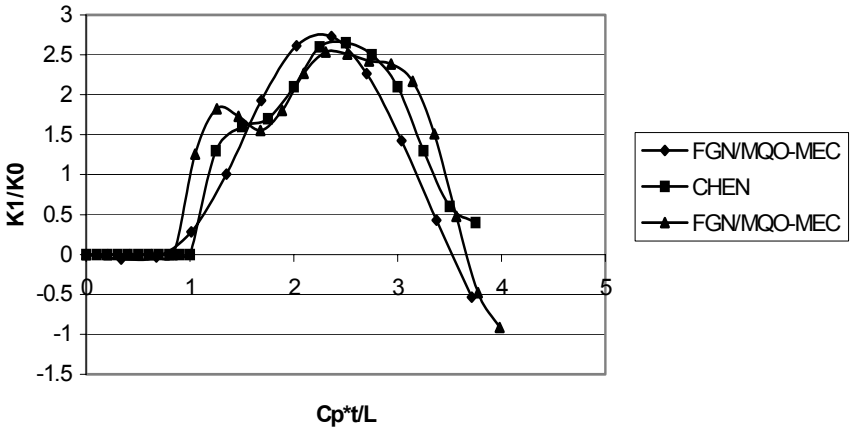

Figura 10.5: Fator de intensidade de tensão para o Problema de Chen – Malha refinada.

CAPÍTULO 11

Conclusões

Um procedimento para o cálculo do fator de intensidade de tensões usando o Método dos Elementos de Contorno com a Função de Green Numérica e os Métodos da Quadratura Operacional e da Dupla Reciprocidade são apresentados.

O processo evolutivo até chegar aos resultados aqui apresentados teve sua origem na pesquisa realizada no curso de mestrado, onde uma formulação do MEC com o método da Dupla Reciprocidade foi implementada em problemas com carga de domínio e da elastodinâmica 2D. Assim, com o objetivo de poder resolver problemas dinâmicos e com carga de domínio dentro da mecânica da fratura linear elástica foi implementada a Função de Green Numérica. Os resultados obtidos foram muito precisos e justificaram a continuidade desta linha de pesquisa. Parte dos resultados obtidos foi apresentada em congressos (VERA-TUDELA & TELLES, 2001; VERA-TUDELA & TELLES, 2002) e parte é apresentada neste trabalho, como fonte de comparação para os resultados obtidos pela formulação aqui desenvolvida.

Inicialmente estudaram-se problemas de campo escalar. Para isto iniciou-se a pesquisa implementando a Função de Green Numérica numa formulação do MEC com o Método da Quadratura Operacional para problemas de campo escalar. Assim, não sendo um problema da mecânica da fratura no sentido rígido da palavra, a idéia foi simular uma trinca como uma descontinuidade e desta forma poder testar a formulação proposta. Os resultados foram satisfatórios quando comparados com as formulações no domínio do tempo e da quadratura operacional. Além disso a

estabilidade para diferentes intervalos de tempo foi um fator de destaque, que ainda poderia ser estudado com mais profundidade. Cabe, porém, mencionar o aparecimento de um problema que para aplicação à teoria da elasticidade aparece de forma ainda mais crítica: o tempo de processamento computacional aumenta de forma considerável com o refinamento da malha de contorno e com a maior discretização no tempo.

A extensão do problema de campo escalar para a elastodinâmica 2D foi desenvolvida como um passo prévio à implementação a problemas da mecânica da fratura linear elástica. Atenção especial foi dada à solução fundamental no domínio da freqüência, por encontrar divergências entre os diversos autores consultados e, também, pelo tratamento das singularidades, que requereu um procedimento de regularização. Os valores obtidos para deslocamentos no contorno, deslocamentos em pontos internos e forças de superfície ficaram muito próximos dos valores analíticos, assim como as soluções obtidas com o método da Dupla Reciprocidade. Sugere-se para a continuação da pesquisa, a realização de testes adicionais em problemas da elasticidade 2D com outras geometrias, diferentes discretizações de contorno e de tempo.

Foi implementada a Função de Green Numérica na formulação desenvolvida do MEC com o Método da Quadratura Operacional para elastodinâmica. Os testes mostraram resultados bastante próximos dos valores de referência, embora no teste do denominado Problema de Chen o esperado pico no início do processo não tenha se apresentado. Cabe mencionar que este pico não aparece em muitos trabalhos consultados, inclusive no apresentado pelo próprio Chen, mas a sua presença é real e aparece na formulação do MEC com Dupla Reciprocidade. Um fator importante a considerar foi o excessivo tempo de processamento computacional: por exemplo, em

um Pentium III de 937 MHz, uma malha de 12 elementos de contorno quadráticos apresenta um tempo de processamento de aproximadamente 3 dias, enquanto que quando a malha é incrementada para 24 elementos quadráticos o tempo de processamento aumenta para aproximadamente 7 dias. É muito provável que esta malha não apresente o nível de refinamento necessário para conseguir observar o pico mencionado anteriormente. Mas a dificuldade para obter um tempo de processamento razoável dificulta, e muito, os testes que poderiam ser feitos. Para isto, a sugestão seria trabalhar no sentido de melhorar o desempenho computacional utilizando técnicas de supercomputação para diminuir o tempo de execução do programa, incluindo processamento paralelo.

Finalmente pode-se concluir que as formulações apresentadas mostraram-se adequadas para os tipos de problemas resolvidos. Também, o objetivo de utilizar o Método dos Elementos de Contorno com a Função de Green Numérica e a formulação da Quadratura Operacional e da Dupla Reciprocidade mostrou ter sido alcançado com êxito. Desta forma tem-se uma contribuição para a obtenção de uma ferramenta numérica potencialmente versátil e cuja utilização pode ser estudada para outros casos complexos.

Devido às possibilidades que esta ferramenta numérica oferece, seria conveniente levar o programa desenvolvido para um ambiente mais amigável, ou seja, um ambiente visual que permita o uso de recursos gráficos com a possibilidade de poder aglutinar diferentes programas num único pacote.

Bibliografia

ABREU, A. I., CARRER, J. A. M. & MANSUR 2001, W. J., "Scalar wave propagation in 2-D: a BEM formulation based on the operational quadrature method", In: *Boundary Elements XXIII*, pp. 351-360, Mirina, Lemnos, Greece.

ABM, 1986, *Análise de Fraturas*. 5ª Ed, São Paulo, Associação Brasileira de Metais.

ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I. A., 1972, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. 1 ed., New York, Dover Publications.

ACHENBACH, J. D., 1973, *Wave Propagation in Elastic Solids.* Amsterdam, North-Holland.

BARRA, L. P. S., 1996, *Aplicação do MEC à Mecânica da Fratura Elastodinâmica com Funções de Green Numéricas*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro Brasil.

BARRA, L. P. S. & TELLES, J. C. F., 1999, "A Hyper-singular numerical Green's function generation for BEM applied to dynamic SIF problems", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 23, pp. 77-87.

BATHE, K. J., 1982, *Finite Element Procedure in Engineering Analysis.* USA, Prentice-Hall.

BLANDFORD, G. E., INGRAFFEA, A. R. & LIGGETT, J.A., 1981, "Two-dimensional Stress Intensity Factor Computation Using the Boundary Element Method", *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 17, pp. 387-404.

BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F. & WROBEL, L. C., 1984, *Boundary Elements Techniques: Theory and Application*. Berlin, Springer-Verlag.

BRIGHAM, E. O., 1988, *Fast Fourier Transform and Its Applications*. 1st Edition, Englewood C, Prentice Hall

CARRER, J. A. M. & MANSUR, W. J., 1994, "Space derivatives in the time domain BEM analysis for the scalar wave equation", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 13, pp. 67-74.

CHEN, Y. M., 1975. "Numerical Computation of Dynamic Stress Intensity Factor by a Lagrangean Finite Difference Method", *Engineering Fracture Mechanics*, v.7, pp. 653-660.

CHIRINO, F., GALLEGO, R., SÁEZ, A. & DOMÍNGUEZ, J., 1994, "A Comparative Study of the Boundary Element Approaches to Transient Dynamic Crack Problems", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 13, pp. 11-19.

CHOU, P. Ch., & PAGANO, N. J., 1992, *Elasticity – Tensor, dyadic, and engineering approaches*. New York, Dover Publications.

CRUSE, T. A., 1972, "Numerical Evaluation of Elastic Stress Intensity Factor by the Boundary-Integral Equation Method", The Surface Crack: Physical problems and Computational Solutions, *American Society of Mechanical Engineers*, pp. 153-170, apud (65).

FEDELINSKI, P., ALIABADI, M. H. & ROOKE, D. P., 1996, "The Laplace Transform DBEM for Mixed-Mode Dynamic Crack Analysis", *Computer & Structures,* v. 59, n. 6, pp. 1021-1031.

FREUND, L. B., 1998, *Dynamic Fracture Mechanics.* 1ª Ed., New York, Cambridge University Press.

GRIFFITH, A. A., 1920, "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids", *Philosofical Transactions of the Royal Society*, A221, pp. 163-198.

GUIMARÃES, S. & TELLES, J. C. F., 1994, "On the hyper-singular boundary element formulation for fracture mechanics applications", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 13, pp. 353-363.

IRWIN, G. R., 1957, "Analysis of Stress and Strains near the End of a Crack Traversing a Plate", *J. Appl. Mech*, v. 24, pp. 361-364.

KARAMI, G. & KUHN, G.,1993, "Body-force linear elastic stress intensity factor calculation using Boundary Element Method", *Computer & Structures*, v. 49, nº 1, pp. 107-115.

LACERDA, L. A, 1993, *O Método dos Elementos de Contorno para Elastodinâmica Bi-dimensional no Domínio da Freqüência com Emprego de Elementos Quadráticos,* Dissertação de M.Sc., COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

LATZKO, D. G. H., 1979, *Post-Yield Fracture Mechanics*. London, Applied Science Publishers.

LIN, X. & BALLMANN, J., 1993, "Re-consideration of Chen's Problem by Finite Difference Method", *Engineering Fracture Mechanics*, v. 44, nº 5, pp. 735-739.

LUBICH, C., 1988, "Convolution quadrature and discretized operational calculus I", *Numerische Mathematik*, v. 52, pp. 129-145.

LUBICH, C., 1988, "Convolution quadrature and discretized operational calculus II", *Numerische Mathematik*, v. 52, pp. 413-425.

LUBICH, C., 1994, "On the multistep time discretization of linear initial-boundary value problems and their boundary integral equations", *Numerische Mathematik*, v. 67, pp. 365-389.

LUBICH, C. & SCHNEIDER, R., 1992, "Time discretization of parabolic boundary integral equations", *Numerische Mathematik*, v. 63, pp. 455-481.

MANSUR, W. J., 1983, *A Time-stepping technique to solve wave propagation problems using the boundary element method*, Ph.D. Thesis, University of Southampton, England.

MORSE, P. M. & FESHBACH, H., 1953, *Methods of Theoretical Physics*, New York, Mc Graw-Hill.

MURTI, V. & VALLIAPPAN, S., 1986, "The Use of Quarter Point Element in Dynamic Crack Analysis", *Engineering Fracture Mechanics*, v. 23, nº 3, pp.585-614.

NOGUEIRA, F. C. & LOEFFLER, C. F., 1991, "Resposta Dinâmica com o Método dos Elementos de Contorno utilizando Superposição Modal", *Revista Militar de Ciência e Engenharia*, jan/mar.

PARTRIDGE, P. W., 1997, "Approximation Function in the Dual Reciprocity Method". *Boundary Element Communications*, v. 8, n. 1, pp. 1-4.

PARTRIDGE, P. W., BREBBIA, C. A. & WROBEL, L. C., 1992, *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*. London, Computational Mechanics Publications.

POPOV, E. P., 1992, *Introdução à Mecânica dos Sólidos.* 2ª Ed., São Paulo, Edgard Blucher Ltda.

SCHANZ, M. & ANTES, H., 1997, "A New Visco- and Elastodynamic Time Domain Boundary Element Formulation", *Computational Mechanics*, v. 20, pp. 452-459.

SNYDER, M. D. & CRUSE, T. A., 1975, "Boundary integral equation analysis of cracked anisotropic plates", *International Journal of Fracture*, v. 11, nº 2, pp. 315-328.

SOKOLNIKOFF, I. S., 1964, *Tensor Analysis: Theory and Application to Geometry and Mechanics of Continua.* 2 ed., Wiley & Sons Publishers.

SPIEGEL, M. R., 1992, *Manual de Formulas, Métodos e Tabelas de Matemática*. 2ª Ed., São Paulo, Mc Graw-Hill.

TADA, H., PARIS, P. C. & IRWIN, G. R., 1983, T*he Stress Analysis of Cracks Handbook*. Del Reserch Corporation, Hellertown.

TELLES, J. C. F., CASTOR, G. S. & GUIMARÃES, S., 1995, "A Numerical Green's Function Approach for Boundary Elements Applied to Fracture Mechanics", *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 38, pp. 3259-3274.

TIMOSHENKO, S. P. & GOODIER, J. N., 1970, *Theory of Elasticity*. Mc Graw-Hill, New York, 567p.

VERA-TUDELA, C. A. R., 1999, *Elastodinâmica Bidimensional através do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade*. Dissertação de M.Sc., Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil.

VERA-TUDELA, C. A. R. & TELLES, J. C. F., 2001, "Implementação do MEC com Dupla Reciprocidade e Função de Green Numérica para Problemas de Mecânica da Fratura". In: *XVI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, pp. 8-15, Uberlândia – MG, Nov.

VERA-TUDELA, C. A. R. & TELLES, J. C. F.,2002, "O MEC Aplicado a Problemas de Mecânica da Fratura com Ação de Domínio: Uma Aplicação com a Função de Green e o Método da Dupla Reciprocidade". In: *Seventh Pan-American Congress of Applied Mechanics*, pp. 345-348, Temuco-Chile, Jan.

VERA-TUDELA, C. A. R., TELLES, J. C. F. & GUIMARAES, S., 2001, "Numerical Green's Function BEM Fracture Mechanics Analysis". In: *Joint Meeting of Boundary Element Techniques and International Association for Boundary Elements*, pp. 395-403, New Jersey, July.

WEN, P. H., ALIABADI, M. H. & ROOKE, D. P., 1999, "Three-dimensional dynamic fracture analysis with the dual reciprocity method in Laplace domain", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 23, pp. 51-58.

Apêndice A

Implementação Numérica

A.1 Introdução

A Equação (4.29) envolve uma distribuição dos deslocamentos e forças de superfície em todo o contorno. Neste apêndice apresenta-se o tratamento numérico a ser aplicado para solucionar a equação integral de contorno. Assim, divide-se o contorno em um número finito de elementos e, conseqüentemente, um número finito de pontos nodais sobre os quais os deslocamentos e forças de superfície variam de forma previamente estabelecida. A geometria do elemento é interpolada em função dos valores nos pontos nodais geométricos.

Desta forma, apresenta-se a equação integral de contorno discretizada e, como resultado disto, obtém-se um sistema de equações algébrico de tal forma a calcular os deslocamentos e forças de superfície nos respectivos pontos nodais e, posteriormente, nos possíveis pontos internos necessários. Apresentam-se os elementos de contorno lineares e quadráticos (BREBBIA, TELLES & WROBEL, 1984), também é discutido o tratamento dado às integrais singulares (LACERDA, 1993) e, finalmente, o esquema de solução no tempo para o sistema matricial de equações.

A.2 Procedimento Numérico Geral

Uma vez obtida a equação integral de contorno é preciso discretizá-la para então resolvê-la. A seguir reescreve-se a Eq. (4.29)

$$C\,u = \int_{\Gamma} u^{*}\; p\; d\Gamma - \int_{\Gamma} p^{*}\; u\; d\Gamma \tag{A.1}$$

Para a discretização da Eq. (A.1) divide-se o contorno em ***J*** elementos Γ_j. A esses elementos estão associados valores nodais de deslocamentos e forças de superfície. A variação destas grandezas dentro do elemento depende das funções de interpolação (***N***) utilizadas que, por sua vez, dependem do número de nós funcionais (***n***) do elemento. Desta forma para deslocamentos tem-se a seguinte forma matricial:

$$u^{(j)} = N\,u^{(n)} \tag{A.2}$$

E para forças de superfície:

$$p^{(j)} = N\,p^{(n)} \tag{A.3}$$

Substituindo as Eqs. (A.2) e (A.3) na Eq. (A.1) tem-se:

$$C\,u^{(n)} = \sum_{j=1}^{J}\left(\int_{\Gamma_j} u^{*}\; N\, d\Gamma\right) p^{(n)} - \sum_{j=1}^{J}\left(\int_{\Gamma_j} p^{*}\; N\, d\Gamma\right) u^{(n)} \tag{A.4}$$

A.2.1 Geometria e Funções de Interpolação

O elemento de contorno Γ_j é definido de acordo com a função de interpolação ***M*** adotada que, por sua vez, depende do número ***m*** de nós geométricos do elemento. As coordenadas cartesianas dos pontos de contorno podem ser expressas por:

$$x^{(j)} = M\, x^{(m)} \tag{A.5}$$

Geometria de Contorno Linear

O elemento de contorno linear tem geometria reta e é definido por dois pontos ou nós geométricos como pode-se observar na figura (A.1):

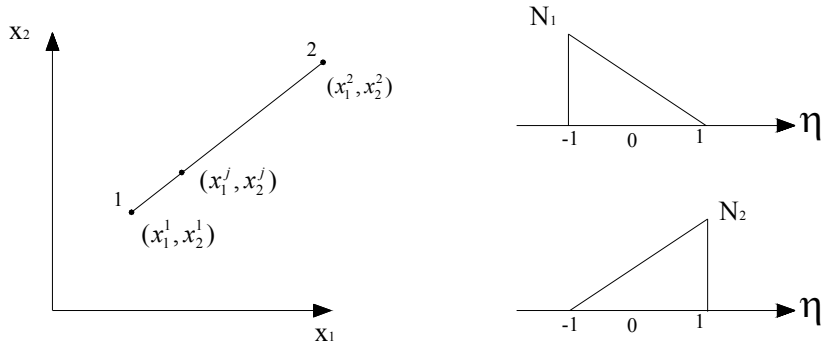

Figura A.1: Elemento linear e as funções de interpolação.

A matriz ***M*** da Eq. (A.5) é dada por:

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & \vdots & M_2 \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

com:

$$M_1 = I\, N_1 = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{bmatrix} \tag{A.7}$$

e

$$M_2 = I\, N_2 = \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \tag{A.8}$$

onde $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade e $\boldsymbol{N_1}$ e $\boldsymbol{N_2}$ são as funções de interpolação lineares.

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2}(1-\eta) \\ & \qquad -1 \le \eta \le 1 \\ N_2 &= \frac{1}{2}(1+\eta) \end{aligned} \tag{A.9}$$

Tendo em vista que as funções de interpolação são expressas em termos da coordenada adimensional η , deve-se escrever $d\Gamma$ em relação a esse sistema de coordenadas intrínsecas.

$$d\Gamma = |J|\, d\eta \tag{A.10}$$

onde o Jacobiano da transformação é dado por:

$$|J| = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\eta}\right)^2} \tag{A.11}$$

Para o elemento linear tem-se:

$$\frac{dx_1}{d\eta} = \frac{dN_1}{d\eta} x_1^1 + \frac{dN_2}{d\eta} x_1^2 \tag{A.12}$$

$$\frac{dx_2}{d\eta} = \frac{dN_1}{d\eta} x_2^1 + \frac{dN_2}{d\eta} x_2^2 \tag{A.13}$$

Logo, para o elemento linear o Jacobiano tem o valor de:

$$|J| = \frac{l}{2} \tag{A.14}$$

onde l é o comprimento do elemento.

Geometria de Contorno Quadrática

O elemento de contorno tem geometria curva definida por funções de interpolação quadráticas sendo necessários três nós geométricos para defini-la Fig.(A.2).

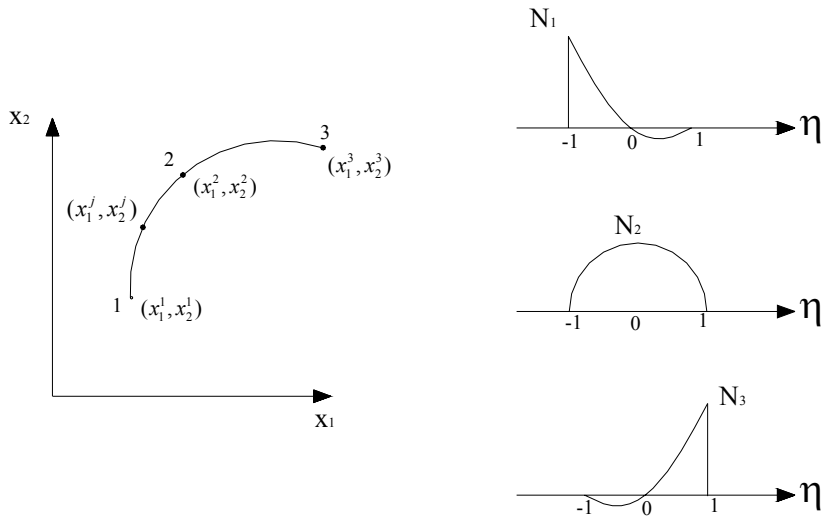

Figura A.2: Elemento quadrático e as funções de interpolação

Da Eq. (A.5) a matriz ***M*** é escrita como se segue:

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & \vdots & M_2 & \vdots & M_3 \end{bmatrix} \tag{A.15}$$

onde:

$$M_1 = I N_1 \tag{A.16}$$

$$M_2 = I N_2 \tag{A.17}$$

$$M_3 = I N_3 \tag{A.18}$$

com ***I*** sendo a matriz identidade e N_1, N_2 e N_3 as funções de interpolação quadráticas definidas como:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{2}(\eta^2 - \eta) \\
N_2 &= 1 - \eta^2 \qquad\qquad -1 \le \eta \le 1 \\
N_3 &= \frac{1}{2}(\eta^2 + \eta)
\end{aligned}
\tag{A.19}
$$

Neste caso o Jacobiano segundo a Eq. (A.11) toma a seguinte forma:

$$
\frac{dx_1}{d\eta} = \frac{dN_1}{d\eta} x_1^1 + \frac{dN_2}{d\eta} x_1^2 + \frac{dN_3}{d\eta} x_1^3 \tag{A.20}
$$

$$
\frac{dx_2}{d\eta} = \frac{dN_1}{d\eta} x_2^1 + \frac{dN_2}{d\eta} x_2^2 + \frac{dN_3}{d\eta} x_2^3 \tag{A.21}
$$

A.2.2 Integração Numérica Não Singular

Durante a montagem do sistema de equações indicado pela Eq. (A.4), cada uma das integrais será calculada numericamente sempre que o ponto fonte ξ não pertencer ao elemento Γ_j, sobre o qual está sendo efetuada a integração. Este cálculo se dá através da integração numérica de Gauss dada por:

$$
\int_{-1}^{1} f(\eta)\, d\eta = \sum_{k=1}^{NPI} f(\eta_k)\, w_k \tag{A.22}
$$

onde η_k é a coordenada adimensional do k-ésimo ponto de integração, w_k é o fator de peso associado ao ponto *k* e *NPI* é o número total de pontos de integração.

Desta forma trabalha-se com as parcelas da Eq. (A.4) como se segue:

$$\int_{\Gamma_j} p^* N d\Gamma = \int_{\Gamma_j} p^* N |J| d\eta \cong \sum_{k=1}^{NPI} |J|_k w_k N_k p_k^* \tag{A.23}$$

$$\int_{\Gamma_j} u^* N d\Gamma = \int_{\Gamma_j} u^* N |J| d\eta \cong \sum_{k=1}^{NPI} |J|_k w_k N_k u_k^* \tag{A.24}$$

A equação integral discretizada é aplicada repetidamente considerando o ponto fonte ξ situado coincidentemente com todos os pontos nodais existentes. Um sistema de *2t* equações algébricas é gerado e envolve *2t* valores nodais de deslocamento e de força de superfície.

A formação do sistema matricial de equações requer a definição das seguintes matrizes, que são características do MEC.

Da Eq. (A.4) tem-se:

$$\sum_{j=1}^{J} \left(\int_{\Gamma_j} p^* N d\Gamma \right) u^{(n)} = \sum_{j=1}^{J} h_j u^{(n)} \tag{A.25}$$

Similarmente,

$$\sum_{j=1}^{J} \left(\int_{\Gamma_j} u^* N d\Gamma \right) p^{(n)} = \sum_{j=1}^{J} g_j p^{(n)} \tag{A.26}$$

O sistema fica reduzido à forma:

$$C u^{(n)} + \sum_{j=1}^{J} h_j u^{(n)} = \sum_{j=1}^{J} g_j p^{(n)} \tag{A.27}$$

Resulta, então, um sistema de equações matriciais do tipo:

$$\left(\boldsymbol{C} + \hat{\boldsymbol{H}}\right)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{G}\,\boldsymbol{p} \tag{A.28}$$

onde os vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{p}$ contêm os valores de deslocamentos e forças de superfície em todos os pontos nodais. A matriz $\boldsymbol{C}$ é de banda pequena e pode ser incorporada à matriz $\hat{\boldsymbol{H}}$ para formar:

$$\boldsymbol{H}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{G}\,\boldsymbol{p} \tag{A.29}$$

Após a introdução das condições de contorno, a equação acima pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f} \tag{A.30}$$

onde $\boldsymbol{y}$ representa os valores nodais incógnitos e $\boldsymbol{f}$ as contribuições dos valores prescritos no contorno.

A.2.3 Integração Singular

Deve-se atentar para o fato de que segundo o procedimento adotado pelo Método da Quadratura Operacional, a equação integral de contorno é resolvida utilizando a solução fundamental no domínio transformado de Laplace e, por isso, o problema da singularidade na integração deve ser visto dentro desta ótica. Assim, torna-se necessário regularizar a equação integral de contorno singular da forma mostrada a seguir (LACERDA, 1993).

Sempre que o ponto ξ da Eq. (A.4) for um dos nós do elemento sobre o qual a integração está sendo efetuada, a distância r ao ponto fonte ξ passa por zero. Analisando a solução fundamental para deslocamentos, pode-se observar que existe uma singularidade em $Ln\ r$, enquanto que para a força de superfície a singularidade é de ordem $1/r$. A singularidade de ordem $Ln\ r$ é chamada de singularidade fraca, pois a integral relativa a $\boldsymbol{G}$ é convergente no sentido convencional.

Por outro lado, as integrais relativas a $\boldsymbol{H}$ apresentam singularidade forte (de ordem $1/r$) devem ser interpretadas no sentido do Valor Principal de Cauchy. É devido a esta singularidade e da dificuldade de resolvê-la analiticamente que o procedimento numérico para calcular esta integral deve seguir um tratamento especial.

Assim, a matriz $\boldsymbol{H}$ é calculada com o coeficiente C_{ij} usando a condição do movimento de corpo rígido da estática. O termo C_{ij} depende da geometria e é o mesmo do problema estático. Logo, para domínios finitos e considerando, inicialmente, a expressão da estática:

$$C_{ij} + \hat{H}_{ii}^{s} = \sum_{i \neq j} H_{ij}^{s} = \sum_{i \neq j} \int p_{ij}^{s} \, N_a \, d\Gamma \tag{A.31}$$

onde o índice *s* refere-se ao problema estático e N_a são as funções de interpolação.

Da mesma forma, no caso dinâmico tem-se:

$$H_{ii}^{d} = C_{ij} + \hat{H}_{ii}^{d} = \sum_{i \neq j} H_{ij}^{d} = \sum_{i \neq j} \int p_{ij}^{d} \, N_a \, d\Gamma \tag{A.32}$$

onde o índice *d* refere-se ao problema dinâmico.

Para regularizar a expressão anterior é preciso fazer a soma e a diferença da solução fundamental de força de superfície da estática:

$$H_{ii}^{d} = \sum_{i \neq j} \int \left[\left(p_{ij}^{d} - p_{ij}^{s} \right) + p_{ij}^{s} \right] N_a \, d\Gamma \tag{A.33}$$

Separando as integrais da Eq. (A.33) como mostrado na seguinte expressão:

$$H_{ii}^{d} = \sum_{i \neq j} \left[\int \left(p_{ij}^{d} - p_{ij}^{s} \right) N_a \, d\Gamma + \int p_{ij}^{s} \, N_a \, d\Gamma \right] \tag{A.34}$$

E separando, também, o somatório da Eq. (A.34) obtém-se:

$$H_{ii}^{d} = \sum_{i \neq j} \left[\int \left(p_{ij}^{d} - p_{ij}^{s} \right) N_a \, d\Gamma \right] + \sum_{i \neq j} \int p_{ij}^{s} \, N_a \, d\Gamma \tag{A.35}$$

Substituindo a Eq. (A.31) na Eq. (A.35) chega-se à expressão final:

$$H_{ii}^{d} = \sum_{i \neq j} \left[\int \left(p_{ij}^{d} - p_{ij}^{s} \right) N_a \, d\Gamma \right] + C_{ii} + \hat{H}_{ii}^{s} \tag{A.36}$$

Apêndice B

Funções Modificadas de Bessel de Segunda Classe

As funções modificadas de Bessel de segunda classe e ordem *n* são as soluções da equação diferencial modificada de Bessel de ordem *n* , mostrada a seguir:

$$z^2 \frac{d^2 y}{d z^2} + z \frac{d y}{d z} - (z^2 + n^2)\, y = 0 \qquad ; \quad n \geq 0$$

As funções de Bessel modificadas de segunda classe $\kappa_0(z)$ e $\kappa_1(z)$ foram calculadas neste trabalho pelas expansões polinomiais seguintes (ABRAMOWITZ & STEGUN, 1972) para um argumento imaginário *z*:

a) Para $0 < |z| \leq 2$:

$$\kappa_0(z) = -Ln\left(\frac{z}{2}\right) I_0 - 0.57721566 + 0.42278420\left(\frac{z}{2}\right)^2 + 0.23069756\left(\frac{z}{2}\right)^4 +$$
$$+ 0.03488590\left(\frac{z}{2}\right)^6 + 0.00262698\left(\frac{z}{2}\right)^8 + 0.00010750\left(\frac{z}{2}\right)^{10} + 0.00000740\left(\frac{z}{2}\right)^{12}$$

$$z\kappa_1(z) = zLn\left(\frac{z}{2}\right)I_1 + 1 + 0.15443144\left(\frac{z}{2}\right)^2 - 0.67278579\left(\frac{z}{2}\right)^4 - 0.18156897\left(\frac{z}{2}\right)^6 -$$
$$- 0.01919402\left(\frac{z}{2}\right)^8 - 0.0110404\left(\frac{z}{2}\right)^{10} - 0.00004686\left(\frac{z}{2}\right)^{12}$$

onde

$$I_0 = 1 + 3.5156229t^2 + 3.0899424t^4 + 1.2067492t^6 + 0.2659732t^8 +$$
$$+ 0.0360768t^{10} + 0.0045813t^{12}$$

$$I_1 = z\left[0.5 + 0.87890594t^2 + 0.51498869t^4 + 0.15084934t^6 + 0.2658733t^8 +\right.$$
$$\left. + 0.00301532t^{10} + 0.00032411t^{12}\right]$$

sendo:

$$t = \frac{z}{3.75}$$

b) Para $|z| \geq 2$

$$\kappa_0(z) = \frac{1}{\sqrt{z}\,e^z}\left[1.25331414 - 0.07832358\left(\frac{2}{z}\right) + 0.02189568\left(\frac{2}{z}\right)^2 - 0.01062446\left(\frac{2}{z}\right)^3 +\right.$$
$$\left. + 0.00587872\left(\frac{2}{z}\right)^4 - 0.00251540\left(\frac{2}{z}\right)^5 + 0.00053208\left(\frac{2}{z}\right)^6\right]$$

$$\kappa_1(z) = \frac{1}{\sqrt{z}\,e^z}\left[1.25331414 + 0.23498619\left(\frac{2}{z}\right) - 0.03655620\left(\frac{2}{z}\right)^2 + 0.01504268\left(\frac{2}{z}\right)^3 - \right.$$
$$\left. - 0.00780353\left(\frac{2}{z}\right)^4 + 0.00325614\left(\frac{2}{z}\right)^5 - 0.00068245\left(\frac{2}{z}\right)^6\right]$$

Além disso, as seguintes fórmulas de recorrência são utilizadas (SPIEGEL,1992):

$$\kappa_{n+1}(z) = \kappa_{n-1}(z) + \frac{2n}{z}\kappa_n(z)$$

$$z\kappa_n'(z) = -z\kappa_{n-1}(z) - n\kappa_n(z)$$