MODELAGEM DE PROBLEMAS DE CONTATO-IMPACTO EMPREGANDO FORMULAÇÕES PENALIZADAS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Francisco Quaranta Neto

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

_____

Prof. José Luis Dummond Alves, D. Sc.

_____

Prof. Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho, D. Sc.

_____

Prof. Luiz Landau, D. Sc.

_____

Prof. João Nisan Correia Guerreiro, D. Sc.

_____

Prof. Luiz Fernando Campos Ramos Martha, Ph. D.

RIO DE JANEIRO, RJ, BRASIL

SETEMBRO DE 2002

NETO, FRANCISCO QUARANTA

Modelagem de Problemas de Contato-Impacto Empregando Formulações Penalizadas do Método dos Elementos Finitos [Rio de Janeiro] 2002

xiv 139 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia Civil, 2002)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Método dos Elementos Finitos 2. Contato-Impacto 3. Análise Não Linear Transiente Explícita

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Há amores que desaparecem com os anos
Há amores que são paixões ardentes
Os incertos que são rosas e são espinhos
E há amores verdadeiros, como tu

Há amores que são semeados e florescem
Há amores que terminam em aridez
Os que trazem desapontamentos
E há amores verdadeiros, como tu

Há amores que nos levam ao paraíso
Há amores que jamais se esquece
Os que nos dão toda ternura e fantasia
São amores verdadeiros, como tu

Versão livre de "My True love" (Estefano)

À Claudia Mazza

Agradecimentos

A Deus por cada instante das nossas vidas e por todas as experiências e ensinamentos desses instantes. Que possamos caminhar sempre em frente!

A minha esposa Claudia Mazza Dias, companheira de todos os momentos.

Ao Professor, orientador, amigo e companheiro desta jornada, José Luis Drummond Alves, por inúmeras oportunidades de aprendizado e crescimento.

Ao Professor Luiz Landau pelas oportunidades.

Ao Professor Alvaro Coutinho pelo interesse com que sempre acompanhou este trabalho.

Aos colegas e funcionários do Laboratório de Métodos Computacionais em Engenharia (LAMCE/PEC/COPPE/UFRJ) e do Programa de Engenharia Civil (PEC/COPPE/UFRJ).

Aos Professores Claudio Amorim e Clicia Stelling e aos novos colegas que fiz no Laboratório de Computação Paralela (LCP/PESC/COPPE/UFRJ).

Ao CNPq pelo suporte financeiro para este trabalho, em forma de bolsa de estudos processo n. 141803/96-7.

Ao primo Francisco Quaranta Neto (Chico).

A minha mãe, aos meus irmãos e a toda a minha família.

Aos amigos e irmãozinhos do 41°/RJ GE REDENTOR pela acolhida e pelo aprendizado.

Enfim, a todos que de alguma forma me acompanharam durante o tempo de desenvolvimento deste trabalho.

"(...) Eu não conheço metade de vocês como gostaria; e gosto de menos da metade de vocês a metade do que vocês merecem. (...)" J.R.R.TOLKIEN

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D. Sc.)

MODELAGEM DE PROBLEMAS DE CONTATO-IMPACTO EMPREGANDO FORMULAÇÕES PENALIZADAS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Francisco Quaranta Neto

Setembro/2002

Orientador: José Luis Drummond Alves

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho apresenta uma nova abordagem computacional para o tratamento de problemas tridimensionais de contato-impacto entre corpos deformáveis, através da extensão da técnica das *splitting pinballs*, em conjunto com uma formulação especial, para o elemento tetraédrico linear. Os conceitos fundamentais de uma formulação penalizada de elementos finitos para a imposição da condição de impenetrabilidade são abordados, além dos principais aspectos de duas técnicas que utilizam partículas discretas para determinação de elementos em contato e cálculo de forças de penalização. Estas técnicas são aplicadas na análise de problemas com situações gerais de contato (grandes deslocamentos e deformações nos elementos, auto-contato, erosão, etc.), graças à busca e determinação automática dos elementos envolvidos no fenômeno de contato. Os algoritmos desenvolvidos são implementados em códigos computacionais de análise não-linear de sólidos e cascas. A discretização temporal utiliza o operador de diferenças centrais e a análise transiente é efetuada utilizando o esquema explícito de solução. São apresentados vários exemplos de aplicação que demonstram a capacidade de modelagem e robustez das técnicas apresentadas.

Palavras chaves: Contato-Impacto, Método dos Elementos Finitos, Análise Não-Linear Transiente Explícita.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D. Sc.).

MODELING CONTACT-IMPACT PROBLEMS BY PENALTY FORMULATIONS OF THE FINITE ELEMENT METHOD

Francisco Quaranta Neto

September/2002

Advisor: José Luis Drummond Alves

Department: Civil Engineering

This work presents a new computational approach extending the splitting pinball technique in conjunction with a special formulation for the linear tetrahedral element to address three-dimensional contact-impact problems between deformable bodies. The underlying concepts with a penalty finite element formulation to enforce the impenetrability condition is addressed. A discussion on the main aspects of two techniques that use discrete particles to find elements in contact and computation of penalty forces is presented. These techniques treat general contact problems (large displacements and strains, self-contact, erosion) by an automatic search to determine elements in contact. The algorithms developed are used in nonlinear finite element codes for analysis of solids and shells. The time discretization uses the central difference operator and the transient analysis uses the explicit solution method. Finally, several examples demonstrating modeling capabilities and robustness of the approach are presented.

Key words: Contact-Impact, Finite Element Method, and Nonlinear Explicit Transient Analysis.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - Aspectos Gerais 01

1.1 - Motivações e Objetivos do Trabalho 01 .....

1.2 - Histórico do Trabalho 05 .....

1.3 - Ambientes Computacionais de Desenvolvimento 09

1.4 - Organização do Texto 10

CAPÍTULO 2 - O Problema de Contato-Impacto 11

2.1 - Conceitos Fundamentais 11 .....

2.2 - Formulação do Problema 13 .....

2.2.1 - Equações de Movimento 13

2.2.2 - Equações Constitutivas 13

2.2.3 - Condições Iniciais 14

2.2.4 - Condições de Contorno 15

2.2.5 - Condições de Contato 16

2.3 - Definição Formal do Problema 20

2.4 - Processo de Solução 21

2.4.1 - Discretização Espacial 21 .....

2.4.2 - Discretização Temporal 23

CAPÍTULO 3 - Elemento Tetraédrico Linear com Formulação Mista Deslocamento-Pressão 29

3.1. Considerações Importantes Sobre o Elemento ……... 29

3.2 - Definições Básicas do Elemento.……... 31

3.3. Contornando o Problema do Travamento Volumétrico 35 ……..

3.3.1. Introdução …… 35

3.3.2. Formulação Mista Deslocamento-Pressão 37

3.4. Plasticidade Computacional ……... 39

3.4.1. Introdução 39

3.4.2. Algoritmo de Retorno Radial 44 .....

3.4.3. Taxas Objetiva de Tensões .....…..... 48

3.5. Amortecimento Artificial 51 ……..……..

3.6. Implementação Computacional …….. 54

CAPÍTULO 4 - Tratamento do Contato-Impacto por Penalização - Técnicas das *Pinballs* e *Splitting Pinballs* 55

4.1 - Aspectos Gerais 55

4.2 - A Técnica das *Pinballs* 56

4.3 - Definição das *Pinballs* e Cálculo das Forças de Penalização 58 .....

4.4 - Algoritmos de Busca dos Elementos em Contato 62

4.4.1. O Algoritmo Força Bruta (*Brute Force Search*) 63 .....

4.4.2. Algoritmos de Células (*Bucket Sort*) 64

4.5 - Hierarquia de *Pinballs (Splitting Pinballs Technique)* 70 .....

4.5.1. Descrição Geral Aplicada ao Elemento Quadrilátero 71 .....

4.5.2. Aplicação ao Elemento Triangular 75

4.5.3. Aplicação ao Elemento Tetraedro 79 .....

CAPÍTULO 5 - Exemplos 84

5.1. Avaliação da Técnica de Busca 84

5.2. Impacto Simétrico Entre Dois Tubos Idênticos (*Pipe Whip*) 93 .....

5.3. Problema de Auto-Contato (*Box Beam*) 99

5.4. Análise de Impacto de Alta Velocidade (Barra de Taylor) 104 .....

5.5. Impacto Oblíquo de uma Haste Esbelta 112 .....

5.6. Impacto de um Cilindro Sobre Trilhos Deformáveis 116 .....

CAPÍTULO 6 - Conclusões 121

Referências Bibliográficas 126

APÊNDICES 131

Apêndice A - Coordenadas de Área das *Splitting Pinballs* no Elemento Triangular 131

Apêndice B - Coordenadas de Volume das *Splitting Pinballs* no Elemento Tetraédrico 133

LISTA DE FIGURAS

FIGURA **PG.**

Figura 2.1 - Sistema com dois corpos em contato 12

Figura 2.2 - Definição dos vetores unitários no contorno 16

Figura 2.3 - Vetores unitários associados a dois pontos materiais em contato 17

Figura 2.4 - Discretização espacial do sistema com dois corpos em contato …… 21

Figura 3.1 - Elemento tetraedro linear 31

Figura 3.2 - Modelos de comportamento da superfície de escoamento 44

Figura 3.3 - Ilustração do processo de retorno radial 46

Figura 4.1 - *Pinballs* associadas aos elementos das superfícies das malhas …….. 57

Figura 4.2 – Representação de vetores normais unitários nodais locais e global .. 58

Figura 4.3 - Cálculo da interpenetração entre duas *pinballs* 59

Figura 4.4 - *Pinballs* efetivamente consideradas na região de contato 64

Figura 4.5 - Representação das células na região retangular 65

Figura 4.6 - Definição da *pinball* associada ao elemento 72

Figura 4.7 – Exemplo de *pinballs* e *splitting pinballs* 73

Figura 4.8 – Definição das *splitting pinballs* no elemento triangular linear 77

Figura 4.9 – Convenção de numeração das *splitting pinballs* no tetraedro (n = 2) 81

Figura 4.10 – Definição das *splitting pinballs* no elemento tetraédrico linear 82

Figura 5.1 - Problema modelo 84

Figura 5.2 - Distribuição aleatória de 10 *pinballs* escravas e 20 *pinballs* mestres 87

Figura 5.3 - Distribuição de 2000 *pinballs* escravas e 4000 *pinballs* mestres 87

Figura 5.4 - Centros das 10000 *pinballs* escravas e 20000 *pinballs* mestres 88

Figura 5.5 - Distribuição das 10000 *pinballs* escravas e 20000 *pinballs* mestres . 88

Figura 5.6 - Efeito da estrutura de células no algoritmo convencional 91

Figura 5.7 - Efeito da estrutura de células no algoritmo otimizado 91

Figura 5.8 - Comparação entre os algoritmos de células 92

Figura 5.9 – Definição do problema dos dois tubos idênticos 94

Figura 5.10 – Malha inicial e configuração deformada final dos dois tubos 95

Figura 5.11 – Detalhe das *pinballs* na configuração indeformada 95

Figura 5.12 – Detalhe das *splitting pinballs* e das forças de penalização 96

.....……

Figura 5.13 - Gráfico deslocamento x tempo para o ponto A 97
.....……

Figura 5.14 - Gráfico velocidade x tempo para o ponto A .....….. 97

Figura 5.15 – Evolução do problema dos dois tubos idênticos .....….. 98

Figura 5.16 – Definição do problema de auto contato 100
.....…...

Figura 5.17 – Malha de elementos finitos do problema de auto-contato 100
.....…….

Figura 5.18 – Deformações da malha do problema de auto-contato .....……. 101

Figura 5.19 – Evolução do problema de auto-contato .....…... 102

Figura 5.20 – Configuração deformada final do problema de auto-contato …….. 103

Figura 5.21 - Definição do problema da barra de Taylor 105
.....…….

Figura 5.22 - Evolução do problema da barra de Taylor .....……. 106

Figura 5.23 – Barra de Taylor - comparação entre as deformadas finais ....…….. 107

Figura 5.24 - Evolução do problema da barra de Taylor – distribuição de 108
tensões

Figura 5.25 – Gráfico deslocamento x tempo no topo da barra de Taylor ...……. 110

Figura 5.26 – Gráfico velocidade x tempo no topo da barra de Taylor .....……. 111

Figura 5.27 – Deformação plástica efetiva em t = 80.0 μs .....….. 111

Figura 5.28 – Definição do problema de impacto oblíquo da haste esbelta ……. 112

Figura 5.29 – Evolução do problema do impacto oblíquo da haste esbelta 114
……..

Figura 5.30 – Detalhe da malha indeformada .....….. 115

Figura 5.31 – Configuração deformada final .....….. 115

Figura 5.32 – Definição do problema do cilindro sobre trilhos deformáveis …… 116

Figura 5.33 – Malha do problema do cilindro sobre trilhos deformáveis 117
...……..

Figura 5.34 – Seqüência de configurações deformadas e respectivas franjas de tensão de von Mises .....…… 118

Figura 5.35 – Deformações plásticas efetivas do cilindro sobre trilhos deformáveis 119
.....…

Figura 5.36 – Detalhes da evolução das *splitting pinballs* na região de impacto entre o cilindro e o trilho para diferentes instantes da simulação 120
..……

LISTA DE TABELAS

TABELA **PG.**

Tabela 4.1 – Coordenadas de área das *splitting pinballs* no elemento triangular (n = 1) 78

Tabela 4.2 – Coordenadas de área das *splitting pinballs* no elemento triangular (n = 2) 78

Tabela 4.3 – Coordenadas de volume das *splitting pinballs* no elemento tetraédrico (n = 1) 83

Tabela 5.1 – Definição dos domínios do problema modelo 85

Tabela 5.2 - Quantidades de *pinballs* geradas 86

Tabela 5.3 - Estruturas de células utilizadas em cada caso 86

Tabela 5.4 - Resultados e desempenho do algoritmo convencional de células 89

Tabela 5.5 - Resultados e desempenho do algoritmo de células otimizado 89

Tabela 5.6 – Comparação de resultados entre programas comerciais 109

Tabela 5.7 – Resultados do presente trabalho 109

Tabela A.1 – Coordenadas de Área das *Splitting Pinballs* no Elemento Triangular (n = 3) 131

Tabela B.1 – Coordenadas de Volume das *Splitting Pinballs* no Elemento Tetraédrico (n = 2) 133

Tabela B.2 – Coordenadas de Volume das *Splitting Pinballs* no Elemento Tetraédrico (n = 3) 134

LISTA DE ALGORITMOS

ALGORITMO **PG.**

Algoritmo 2.1 - Algoritmo explícito de solução do problema de contato-impacto 27

Algoritmo 3.1 – Cálculo de forças internas no elemento tetraédrico com formulação Lagrangeana atualizada, algoritmo de retorno radial, estratégia *ANP* e amortecimento artificial .....……... 54

Algoritmo 4.1 - Algoritmo força bruta .....…. 63

Algoritmo 4.2 - Algoritmo convencional de células 67 .....

Algoritmo 4.3 - Algoritmo de células otimizado .....…. 69

Algoritmo 4.4 - O algoritmo de *splitting pinballs* .....…. 75

Capítulo 1

Aspectos Gerais

1.1. Motivações e Objetivos do Trabalho

Os problemas de contato são bastante frequentes em mecânica dos sólidos, tendo em vista que as ações de contato são o mecanismo mais comum para as transferências e aplicações de forças (carregamentos externos) sobre estruturas ou sólidos em geral.

Entretanto, devido principalmente às complexidades e dificuldades inerentes ao tratamento dos problemas com situações de contato, normalmente se empregam hipóteses simplificadoras onde se considera que as forças de solicitação de um sólido sobre outros são integralmente transferidas assumindo estes sólidos como corpos rígidos. Essas simplificações se justificam quando o principal interesse está na resposta mecânica global do corpo carregado, a partir das solicitações externas recebidas, e não nos detalhes sobre as origens da solicitação ou especificamente sobre respostas nas regiões de contato (ZHONG, 1993).

Problemas de contato são predominantemente dinâmicos, mas podem também ocorrer em situações estáticas, ou quasi-estáticas mais propriamente falando, onde a variação dos acontecimentos com o tempo acontece de forma lenta e gradual (KIKUCHI et al., 1988, HUGHES et al., 1976).

Usualmente na literatura, se emprega o termo “problemas de contato” para as situações gerais onde ocorrem interações entre dois ou mais sólidos. Para os casos onde essas interações ocorrem em intervalos de tempo muito pequenos, o termo “problemas de contato-impacto” é mais apropriado (ZHONG, 1993). Uma outra situação bastante comum e interessante é quando existe o contato entre partes de um mesmo sólido, denominados “problemas de auto-contato” (BENSON et al., 1990).

Existem diversas aplicações de interesse dos problemas de contato em várias áreas da engenharia e a sua utilização em muitos problemas reais, sendo bastante comum em muitos processos industriais (ZHONG, 1993, ZIENKIEWICZ, 1991).

Em algumas situações, as interações de contato são desejadas, por serem fundamentais para o funcionamento dos processos, como por exemplo nos processos industriais de manufatura (conformação mecânica de metais: trefilação, laminação, forjamento, extrusão, estamparia, etc.), onde é preciso a ação de uma ferramenta rígida para deformar permanentemente uma peça.

Em outras situações, se deseja estudar e analisar previamente o comportamento de sistemas mecânicos sujeitos a situações indesejadas, ou acidentais, de contato, como por exemplo: testes de colisões de veículos (indústria automobilística), analisando as estruturas dos automóveis, dimensionadas para garantir a segurança dos ocupantes em caso de impacto (ZHONG, 1993); testes de segurança de instalações nucleares (YAGAWA, 1984) ou plataformas *offshore*, simulando situações de risco em acidentes envolvendo equipamentos e edificações.

Outros casos podem ainda ser citados, como por exemplo nos projetos de balística para o desenvolvimento e testes de eficiência de protótipos de projéteis e blindagens (BELYTSCHKO, 1987, JOHNSON, 1992, NEAL, 1989).

As análises de problemas de contato podem ser realizadas a partir de modelos teóricos, experimentais e modelagens numéricas, isoladamente ou em conjunto. Em grande parte das situações, soluções analíticas encontram severas limitações, seja por complexidades físicas, complicações geométricas ou ainda pelas complexidades não-lineares inerentes ao problema, e que são difíceis ou impossíveis de ser resolvidas por soluções fechadas.

As análises experimentais de modelos em laboratório apresentam como principais desvantagens o tempo necessário para efetuar o grande número de ensaios, o investimento financeiro para criação de laboratórios de ensaio ou a disponibilidade de instalações e laboratórios existentes, além do custo financeiro necessário para as montagens dos modelos.

Uma alternativa importante e amplamente utilizada está no desenvolvimento de técnicas de simulação numérica dos problemas de contato. As simulações numéricas possuem a vantagem de permitir uma série de testes sobre estruturas ou protótipos, ainda na fase de pré-projeto, antes mesmo da concepção do primeiro modelo real, com um custo relativamente menor, principalmente a médio e longo prazo. As simulações não descartam o uso dos testes experimentais, mas esses passam a ser realizados em menor número de vezes e as principais informações obtidas nos ensaios, podem ser utilizadas na calibração e aferição dos programas de análise numérica. As calibrações dos programas sobre os materiais ou tipos de problemas, permitem a sua utilização em casos semelhantes subsequentes com maior garantia sobre a qualidade no nível de precisão das respostas.

O método dos elementos finitos é um dos principais métodos numéricos aplicados na simulação de problemas de contato. Estão disponíveis na literatura uma imensa quantidade de trabalhos publicados sobre vários tópicos do problema, ao longo das últimas décadas (ZHONG, 1994a): aspectos teóricos (BELYTSCHKO, 2000, NEAL, 1989, KIKUCHI, 1988), proposição de diferentes modelos físicos, processos matemáticos e algoritmos computacionais de solução, e mais recentemente, os aspectos de eficiência computacional, que se tornaram fundamentais nas soluções de casos reais (BELYTSCHKO, 1991b, NEAL, 1989, YEH, 1992, ZHONG, 1994b).

Muitos trabalhos de pesquisa resultaram ou contribuíram para o desenvolvimento de diversos programas comerciais consagrados. Além disso, análises sobre um vasto repertório de problemas em diferentes situações demonstram a qualidade das simulações e o aperfeiçoamento crescente na modelagem numérica dos denominados problemas do mundo real. Muitas simulações são comparadas com respostas analíticas e ensaios experimentais, sendo utilizadas como *benchmarks* para validar implementações de programas de análise não-linear de elementos finitos.

Uma questão fundamental para a simulação de problemas reais está no fato de quanto mais próximo das situações reais são os problemas, mais se torna necessário: 1) empregar modelos físicos mais sofisticados; e 2) a utilização de sistemas computacionais de alto-desempenho. E estas demandas estão mutuamente interligadas, ou seja: modelos mais sofisticados necessitam de computadores mais eficientes, principalmente em termos de tempo de processamento, e quanto mais evoluem e mais

disponíveis se tornam as máquinas de alto-desempenho, maiores sofisticações podem ser incorporadas aos modelos e programas. Entre essas sofisticações, podem ser citadas: a consideração de modelos de atrito; situações de auto-contato; estilhaçamento e erosão de materiais (BELYTSCHKO, 1987, HALLQUIST et al., 1985, ZHONG, 1993).

Além do interesse pela pesquisa e investigação das simulações numéricas dos problemas de contato, uma das principais motivações para este trabalho, que tem o seu histórico detalhado na seção seguinte, teve origem no desenvolvimento de um programa de análise não-linear transiente explícita contendo as técnicas mais importantes do estado-da-arte do método dos elementos finitos. Este código computacional foi completamente desenvolvido no Programa de Engenharia Civil - PEC/COPPE/UFRJ - incorporando contribuições da literatura de referência, e foram observados os requisitos de implementação mais importantes para obtenção da maior eficiência possível do seu processamento nos sistemas computacionais de alto-desempenho com arquitetura vetorial e/ou paralela disponíveis (ALVES, 1991).

Utilizando este programa, e a partir dos estudos sobre os diversos métodos possíveis para a solução do problema, foram selecionadas e implementadas um conjunto de técnicas baseadas principalmente no método das penalizações (BELYTSCHKO, 1991a, BELYTSCHKO, 1993, NEAL, 1989, YEH, 1992) para imposição das condições de contato. Alguns aspectos importantes das principais dificuldades encontradas na utilização destas técnicas e por conseqüência no desenvolvimento deste trabalho são citados a seguir.

Muitas vezes as informações necessárias não estão disponíveis por completo nos textos das referências. Isto acontece por diversos motivos. Talvez exista uma certa reserva intencional dos autores em fornecer todas as informações dos seus trabalhos nos textos. Provavelmente pelo fato de o conteúdo dos seus trabalhos e desenvolvimentos estarem comumente agregados a programas comerciais de análise pelo método dos elementos finitos ou ainda aplicados na solução de problemas de importância tecnológica estratégica que justifique uma divulgação apenas parcial das suas metodologias e resultados.

Diante dessas questões, muitas vezes neste trabalho, foram propostas soluções ou alternativas próprias de implementação que surgiram ao longo dos desenvolvimentos

e implementações do conjunto de programas utilizados e que foram documentados em alguns trabalhos, como por exemplo em (QUARANTA, 1995, 1998, COSTA, 1997b, SILVA et al., 2002).

Observando ainda que nesta área de pesquisa não se encontram muitos trabalhos semelhantes, principalmente no Brasil, a carência de discussões e o conseqüente aperfeiçoamento de alguns pontos ainda estão em aberto ou necessitando de investigações e testes adicionais.

Existe uma grande diversidade de programas comerciais, muitos deles consagrados, para análise de problemas de contato. O objetivo principal deste trabalho não está em desenvolver um programa comercial, mas oferecer uma contribuição original com implementações computacionais que utilizam várias técnicas e metodologias propostas na literatura de referência e utilizá-las como proposta de solução para esta importante classe de problemas. Desta forma, desenvolvendo um repertório de ferramentas de análise semelhantes àqueles programas comerciais, contamos com as vantagens de: possuirmos o conhecimento íntimo de como os problemas estão sendo simulados e assim justificar de maneira segura o comportamento das respostas; não ficarmos presos às limitações dos programas comerciais, principalmente no que se refere às restrições de dimensão máxima das malhas de elementos finitos utilizadas; e uma total liberdade de modificações nos códigos para adaptá-los aos diversos ambientes computacionais disponíveis (microcomputadores, estações de trabalho, supercomputadores) e nos casos onde estes ambientes e novas tecnologias se tornam disponíveis (*clusters* de PC's para computação paralela em variados modelos de programação, *grid computing*, etc.) muito antes das versões comerciais serem a eles adaptadas. Isto tudo, não esquecendo dos fatores custo financeiro de aquisição e velocidade de atualização, além de um domínio próprio do conhecimento.

1.2. Histórico do Trabalho

O ponto de partida para o desenvolvimento desta linha de pesquisa e do presente trabalho foi o programa desenvolvido na tese de doutorado de ALVES (1991), que implementou diversas metodologias e técnicas do estado-da-arte da análise

transiente explícita de problemas de mecânica dos sólidos pelo método dos elementos finitos, consideradas para o caso do elemento quadrilátero bidimensional. Dentre estas podemos citar: análise não-linear física (elasto-plasticidade); consideração de grandes deslocamentos, grandes deformações e rotações finitas (formulações Lagrangeanas atualizada e total); operador particionado explícito-explícito e análises quasi-estáticas por relaxação dinâmica. A implementação computacional deste programa foi efetuada observando os principais requisitos necessários à obtenção de máximo desempenho em computadores de arquitetura vetorial/paralela.

A consideração dos algoritmos para o tratamento do contato foi inicialmente testada utilizando os elementos triangulares bidimensionais de interface apresentados em KULAK (1988) e (1989) no programa de ALVES (1991). Alguns exemplos foram simulados com êxito, mas tornou-se evidente a limitação da utilização desses elementos de interface em problemas de impacto de alta velocidade e também nos casos onde se empregam grande quantidade de elementos finitos em contato ou em situações de grandes deformações quando acontecem acentuadas mudanças na geometria dos elementos finitos utilizados na discretização. Em todos esses casos, bastante comuns em problemas de contato-impacto, seriam necessárias redefinições ou gerações de novos elementos de interface, o que comprometeria a utilização efetiva desta técnica na solução de problemas de grandes dimensões. Estas considerações sobre a técnica de elementos de interface e os principais resultados obtidos foram documentados na dissertação de mestrado de QUARANTA (1995).

Como alternativa de solução para essas limitações, ainda neste trabalho de QUARANTA (1995), foi estudada e implementada uma técnica relativamente simples, porém com uma eficiência que pôde ser comprovada em diversas situações testadas. A técnica das *pinballs* (NEAL, 1989, BELYTSCHKO, 1991a) foi originalmente desenvolvida para utilização em elementos sólidos hexaédricos trilineares e adaptada em QUARANTA (1995) para a utilização em elementos axissimétricos quadriláteros bilineares. Utilizando a técnica das *pinballs*, onde o tratamento do contato é efetuado com uma interferência mínima do usuário durante a execução das análises, muitas situações de limitação foram eliminadas e problemas de relativa complexidade na determinação dos elementos em contato, como os problemas envolvendo fenômenos de auto-contato, foram analisados.

Dando continuidade aos desenvolvimentos da linha de pesquisa, a implementação de um programa com características semelhantes aos de ALVES (1991), mas considerando o elemento finito hexaédrico trilinear NUHEXIN (LIU, 1994), foi efetuada em COSTA (1997b). Neste programa foram implementadas as adaptações da técnica das *pinballs* efetuadas em QUARANTA (1995) e adicionadas uma sugestão para o tratamento de problemas de auto-contato, através da determinação dos elementos adjacentes a cada elemento finito na malha, e uma outra sugestão para a etapa de busca dos elementos em contato utilizando o algoritmo de células de NEAL (1989). No trabalho de COSTA (1997b) foram analisados dois problemas considerados modelos (*benchmarks*) de análise não-linear e a simulação de um problema de aplicação real, importante na indústria do petróleo, que consiste na análise de um procedimento para o lançamento de linhas de fluxo submarinas (*risers*), denominado técnica de "conexão vertical". Entretanto, a questão fundamental da otimização computacional, principalmente no que se refere aos algoritmos de determinação de pares de elementos em contato, permaneceu como uma das etapas que mais demandam tempo de computação nas simulações.

Com o objetivo de estudar alternativas para o tratamento com eficiência computacional da determinação de pares de *pinballs* em contato, no trabalho de QUARANTA (1998) foi tratada a questão específica da influência da etapa de busca dos elementos em contato no tempo total de computação das análises. Para a simulação dos casos mais reais, a eficiência computacional dos algoritmos de busca é comprovadamente fundamental. Foram estudados dois algoritmos de busca baseado em esquemas do tipo *bucket-sort*, o Algoritmo de Células Padrão (*Cell Standard Algorithm - CSA*) e o Algoritmo de Células Otimizado (*Optimized Search Technique - OST*), apresentados em NEAL (1989). Verificou-se que ambos apresentaram desempenhos semelhantes em um exemplo modelo e comprovou-se que o *OST* é o mais indicado para computadores com processamento vetorial. Tendo estes algoritmos apresentado tempos de processamento razoáveis para os casos testados, passaram a ser adotados em definitivo, apesar de uma grande variedade de opções de algoritmos de busca de elementos em contato disponíveis na literatura.

Ainda no trabalho de QUARANTA (1998) foi estabelecida a meta de junção das experiências adquiridas na utilização dos programas de elementos finitos citados

(ALVES, 1991, QUARANTA, 1995, COSTA, 1997b), além de um programa de elementos de casca em desenvolvimento naquele instante (SILVA ,1997, 1999).

Para a simulação de diversos problemas de grande aplicação, principalmente na indústria, a utilização de elementos laminares de casca é fundamental. O trabalho de pesquisa e as implementações testadas em (SILVA ,1997, 1999), seriam então o ambiente para a implementação e estudo da utilização do algoritmo de *splitting pinball* (YEH, 1992, BELYTSCHKO, 1993). Esta técnica é uma variação do algoritmo de *pinballs* original (NEAL, 1989, BELYTSCHKO, 1991a) adaptado para o tratamento do contato-impacto entre elementos de casca.

No âmbito do presente trabalho, foi implementado um elemento tetraédrico com grandes deslocamentos, grandes deformações, rotações finitas e a consideração dos efeitos da não-linearidade física. Neste elemento foi considerado um tratamento especial como alternativa para evitar o efeito de travamento volumétrico (*locking*) no elemento quando sujeito, por exemplo, a fluxo plástico com volume constante (BONET, 1998, 2001). Para tratamento do contato-impacto, foram considerados o algoritmo tradicional de *pinballs* e também o algoritmo de *splitting pinballs* para contornar as situações em que acontecem grandes deformações dos elementos. Nesta implementação foi possível adicionar o tratamento de situações de contato-impacto com erosão de elementos (NEAL, 1989, BELYTSCHKO, 1987).

1.3. Ambientes Computacionais de Desenvolvimento

Para as simulações dos exemplos numéricos apresentados no capítulo 5 deste trabalho, foram utilizados principalmente os quatro ambientes computacionais de alto-desempenho descritos a seguir. Estes mesmos ambientes foram também utilizados nas fases de desenvolvimento, implementação e testes dos programas. As características de *hardware* (processadores e memórias) e *software* (sistemas operacionais e compiladores *FORTRAN*) apresentadas foram as consideradas mais importantes na caracterização dos ambientes e servem como parâmetro para análises futuras, principalmente no que diz respeito aos tempos totais de processamento das análises efetuadas. Naquele capítulo, quando se julgar oportuno, serão referenciados os seguintes equipamentos:

- Microcomputador do Laboratório de Métodos Computacionais em Engenharia LAMCE/PEC/COPPE/UFRJ - Processador Intel Pentium 4; *clock* de 2GHz; memória RAM de 512Mbytes; memória *cache* (L2) de 512Kbytes; sistema operacional Microsoft Windows 2000 e compilador *FORTRAN Compaq Visual Fortran Professional Edition* 6.5.0.

- Estação de Trabalho: *Work Station* SGI OCTANE do Laboratório de Métodos Computacionais em Engenharia LAMCE/PEC/COPPE/UFRJ - Processador MIPS R12000(IP30); *clock* de 300MHz; memória RAM de 512Mbytes; memória *cache* (L2) de 2Mbytes; sistema operacional IRIX64 *release* 6.5 e compilador 7.2.1 MIPSpro *FORTRAN* 77.

- Supercomputador CRAY J-90 do Núcleo de Atendimento em Computação de Alto-Desempenho NACAD/COPPE/UFRJ - 4 CPUs com palavra de 64 bits e 200Mflops; memória RAM de 2Gbytes (compartilhada); memória em disco com 72Gbytes; sistema operacional UNICOS (compatível com UNIX SYSTEM V) e compilador *FORTRAN*-90.

- Supercomputador CRAY T-94 do Centro Nacional de Supercomputação CESUP/UFRGS - 2 CPUs de 440 MHz e 1.8Gflops; memória RAM de 2Gbytes (256Mwords); memória em disco com 100Gbytes SCSI DISK UNIT; sistema operacional UNICOS e compilador *FORTRAN*-90 versão 3.3.0.2.

A maior parte dos exemplos apresentados neste trabalho (capítulo 5) utilizaram os ambientes computacionais disponíveis no LAMCE/PEC/COPPE/UFRJ. Quando necessário, para a etapa de geração das malhas de elementos finitos (pré-processamento) foi utilizado o gerador de malhas do programa comercial ANSYS versão 6.0 (*ANSYS Inc. Corporate***,** documentação disponível no site http://www.ansys.com), e para a visualização dos resultados (pós-processamento) o programa comercial ENSIGHT versão 7.3.0 (*CEI – Computational Engineering International*, documentação disponível no site http://www.ceintl.com), ambos disponíveis no laboratório.

1.4. Organização do Texto

Na organização do restante do texto que descreve os passos mais importantes deste trabalho, os capítulos a seguir tratam dos seguintes assuntos: No Capítulo 2 são abordados os principais itens referentes à modelagem transiente explícita pelo método dos elementos finitos nos problemas de contato-impacto em mecânica dos sólidos. No Capítulo 3 são desenvolvidos os aspectos da implementação de um elemento finito tetraédrico utilizado na discretização do contínuo, com a consideração de não-linearidades físicas e geométricas e um tratamento sobre a condição de incompressibilidade para evitar a tendência de travamento (*locking*) das malhas. O Capítulo 4 descreve as duas técnicas utilizadas no tratamento do contato pelo método das penalizações e que podem ser aplicadas tanto em elementos sólidos bidimensionais e tridimensionais quanto também em elementos laminares de cascas. No Capítulo 5, as implementações desenvolvidas são testadas em exemplos numéricos apontados como problemas modelo (*benchmarks*) na literatura. Finalmente, no Capítulo 6 são indicadas as principais conclusões do trabalho e apresentadas as sugestões para investigações futuras.

Capítulo 2

O Problema de Contato-Impacto

2.1. Conceitos Fundamentais

A descrição do modelo físico do problema de contato-impacto, utilizado como ponto de partida para o modelo numérico, é idêntica à abordagem tradicional da mecânica dos sólidos e, consequentemente, resulta nas mesmas equações apresentadas nos textos clássicos da literatura, como por exemplo (BATHE, 1982, COOK, 1989, HUGHES, 1987, ZIENKIEWICZ, 1998).

Entretanto, além da necessidade da adição das restrições de contato se considera ainda a possibilidade de a modelagem poder conter mais de um corpo sólido simultaneamente (ZHONG, 1993, BELYTSCHKO, 2000). Assim, a principal diferença desta classe de problemas em relação aos problemas tradicionais, está na adição da chamada condição de impenetrabilidade.

Os sistemas mecânicos a considerar podem conter um ou mais corpos em contato e as interações de contato-impacto podem então ocorrer entre distintos corpos, ou ainda entre partes de um mesmo corpo, neste caso sendo denominadas interações de auto-contato.

A figura 2.1 apresenta um modelo físico com dois corpos A e B em interações de contato. Neste sistema estão representados os dois corpos ocupando os domínios ${}^{A}\Omega^{0}$ e ${}^{B}\Omega^{0}$ em um instante de referência t = 0. Neste instante inicial, cada um dos corpos pode estar submetido a deslocamentos, forças de superfície e forças de volume prescritas, de maneira que os corpos sofrem deslocamentos e deformações e passam a ocupar os novos domínios ${}^{A}\Omega^{t}$ e ${}^{B}\Omega^{t}$ em um instante t > 0.

Na literatura, freqüentemente denomina-se um desses corpos como “corpo mestre” e o outro como “corpo escravo” (BENSON et al., 1990, NEAL, 1989, ZHONG, 1993, BELYTSCHKO, 2000).

Esta representação, contendo apenas dois corpos, é normalmente escolhida com o objetivo de simplificar a apresentação do problema e pode ser utilizada sem perda de generalidade, pois os mesmos conceitos e definições podem ser utilizados para uma modelagem com um número qualquer de corpos.

Os contornos dos domínios ${}^{A}\Omega^{t}$ e ${}^{B}\Omega^{t}$ são denotados por ${}^{A}\Gamma^{t}$ e ${}^{B}\Gamma^{t}$, respectivamente, e definidos por:

$$
\begin{aligned}
&{}^{N}\Gamma^{t} = {}^{N}\Gamma_{D}^{t} \cup {}^{N}\Gamma_{F}^{t} \cup {}^{N}\Gamma_{C}^{t}, \quad N = A, B \\
&{}^{N}\Gamma_{D}^{t} \cap {}^{N}\Gamma_{F}^{t} = \varnothing
\end{aligned}
\qquad (2.1)
$$

onde ${}^{N}\Gamma^{t}$ é o contorno total do corpo N, Γ_{D}^{t} e Γ_{F}^{t} são as partes do contorno onde os deslocamentos e as forças de superfície, respectivamente, são prescritos e Γ_{C}^{t} é a parte do contorno onde acontecem as interações de contato.

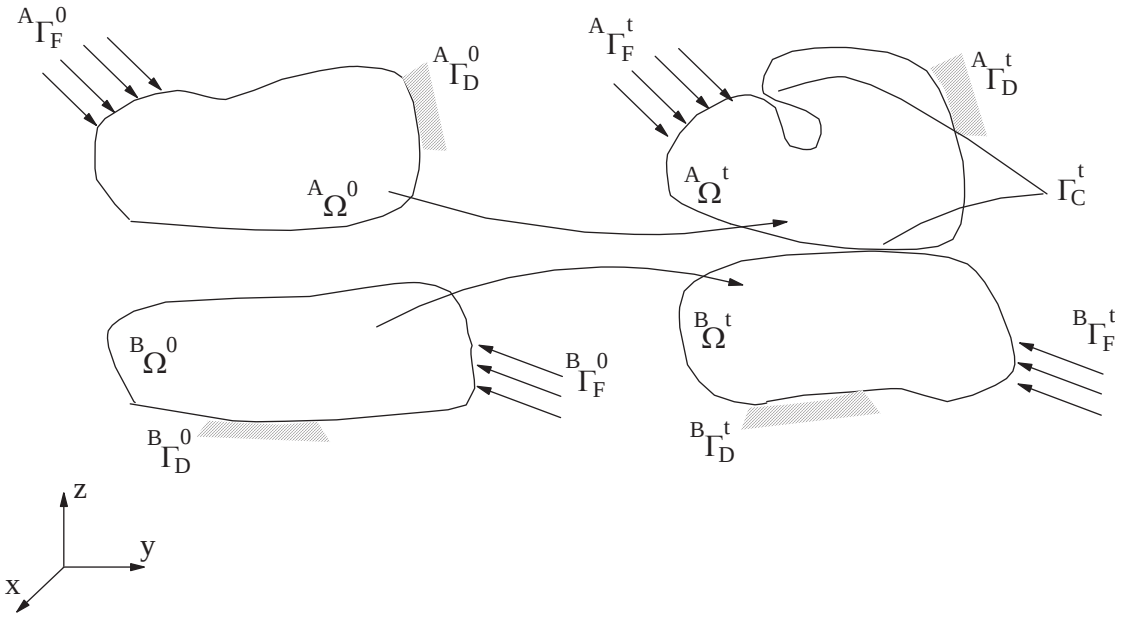


Figura 2.1 - Sistema com dois corpos em contato.

2.2. Formulação do Problema

O comportamento de um sistema de corpos em contato é governado pelo seguintes grupos de equações: Equações de Movimento, Equações Constitutivas,

Condições Iniciais, Condições de Contorno e Condições de Contato (ZHONG, 1993), apresentadas a seguir.

2.2.1. Equações de Movimento

As equações de movimento são baseadas no Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento, que para cada corpo do sistema de contato-impacto podem ser escritas como:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{t}}{\partial x_{j}^{t}} + b_{i}^{t} = \rho^{t} a_{i}^{t} \qquad (2.2)$$

onde σ_{ij}^{t} são as componentes do tensor de tensões de Cauchy, x_{j}^{t} são as coordenadas materiais, b_{i}^{t} são as componentes do vetor de forças de volume, ρ^{t} é a densidade de massa e a_{i}^{t} são as componentes do vetor aceleração.

2.2.2. Equações Constitutivas

As equações constitutivas são expressões que relacionam as tensões com as deformações e podem ser escritas de diversas maneiras, de acordo com o modelo constitutivo considerado (elástico, plástico-perfeito, elasto-plástico, visco-plástico, etc.) e com os tipos de grandezas escolhidas para realização das medidas de tensão e de deformação.

O tipo de equação constitutiva mais simples corresponde ao caso dos materiais elásticos e é dada pela expressão conhecida como lei de Hooke generalizada, que relaciona o tensor de tensões de Cauchy σ_{ij}^{t} com o tensor de deformações linear ε_{kl}^{t}:

$$\sigma_{ij}^{t} = C_{ijkl}^{t} \varepsilon_{kl}^{t} \qquad (2.3)$$

onde C_{ijkl}^{t} são os coeficientes do tensor constitutivo, que para materiais isotrópicos é definido por:

$$C^{t}_{i\,j\,k\,l} = \lambda\ \delta_{ij}\,\delta_{kl} + \mu\ (\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk}) \qquad (2.4)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker e λ e μ são as constantes de Lamé, calculadas em função do módulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson ν:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (2.5)$$

Apesar da variedade de equações constitutivas existentes, e que se tornam mais complexas e elaboradas ao se considerar o tratamento de materiais não-elásticos, é importante aqui a observação de que a formulação do problema de contato-impacto não depende do modelo constitutivo adotado e que a consideração de um modelo mais sofisticado pode ser facilmente incorporado a essa formulação.

2.2.3. Condições Iniciais

O problema de contato-impacto é um problema de valor inicial onde as condições iniciais são dadas sobre os campos de deslocamentos e velocidades através das definições:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{em } \Omega^0 \qquad (2.6)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},0) = \mathbf{v}_0 \quad \text{em } \Omega^0 \qquad (2.7)$$

onde $\mathbf{u}(\mathbf{x},0)$ e $\mathbf{v}(\mathbf{x},0)$ representam os deslocamentos e as velocidades iniciais nos domínios dos corpos em contato no tempo t = 0, respectivamente, e $\mathbf{u}_0$ e $\mathbf{v}_0$ os seus correspondentes valores iniciais.

2.2.4. Condições de Contorno

As condições de contorno podem ser classificadas como condições de contorno prescritas e condições de contorno incógnitas. Condições de contorno prescritas são aquelas que permanecem inalteradas durante a evolução do problema, por serem independentes das deformações, enquanto as condições de contorno incógnitas, assim como as condições de contato, dependem da história das deformações sofridas pelos corpos.

Para a definição das condições de contorno do sistema, é necessário definir um conjunto de vetores unitários associados a cada ponto material $\mathbf{x}^t$ pertencente ao contorno Γ^t dos corpos. Considerando que esses contornos são suficientemente suaves, é sempre possível definir um vetor normal unitário n_1^t e dois vetores tangenciais unitários n_2^t e n_3^t, ortogonais entre si, em cada ponto $\mathbf{x}^t$, conforme ilustra a figura 2.2.

Desta forma, a definição desses vetores unitários é tal que o seguinte produto vetorial é sempre satisfeito:

$$n_1^t = n_2^t \otimes n_3^t \qquad (2.8)$$

e as condições de contorno sobre os deslocamentos e as forças de superfície podem então ser respectivamente definidas por:

$$\mathbf{u}^t = \bar{\mathbf{u}}^t \qquad \text{em } \Gamma_D^t \qquad (2.9)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{n}^t = \bar{\mathbf{q}}^t \qquad \text{em } \Gamma_F^t \qquad (2.10)$$

onde $\bar{\mathbf{u}}^t$ é um deslocamento prescrito, n_{1j}^t é o vetor normal unitário a um ponto "j" sobre Γ_F^t e $\bar{q}_i^t$ é a componente do carregamento de superfície, sobre o ponto "j", na direção "i".

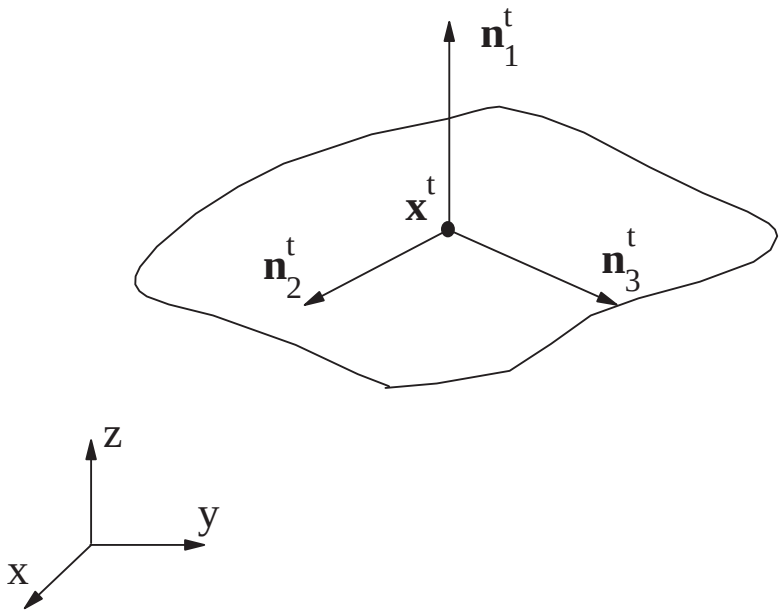


Figura 2.2 - Definição dos vetores unitários no contorno.

2.2.5. Condições de Contato

Até o momento, foram apresentados conceitos que, em essência, são comuns aos problemas clássicos de análise transiente em mecânica dos sólidos. Para o tratamento de problemas de contato-impacto é necessário a definição de algumas condições adicionais e que podem ser classificadas em dois grupos: As Condições Mecânicas do contato e a Restrição Física sobre o modelo.

A restrição física é uma condição sobre o movimento dos corpos em contato, e por isso é também denominada "condição cinemática do contato", impondo o conceito de que dois corpos não podem ocupar a mesma posição no espaço ao mesmo tempo, ou seja:

$$ {}^{A}\Omega^t \cap {}^{B}\Omega^t = \varnothing \qquad (2.11) $$

A satisfação da condição cinemática (2.11) é obtida através da definição das condições mecânicas do contato-impacto sobre quaisquer dois pontos materiais ${}^{A}\mathbf{x}^t$ e ${}^{B}\mathbf{x}^t$ dos contornos dos corpos.

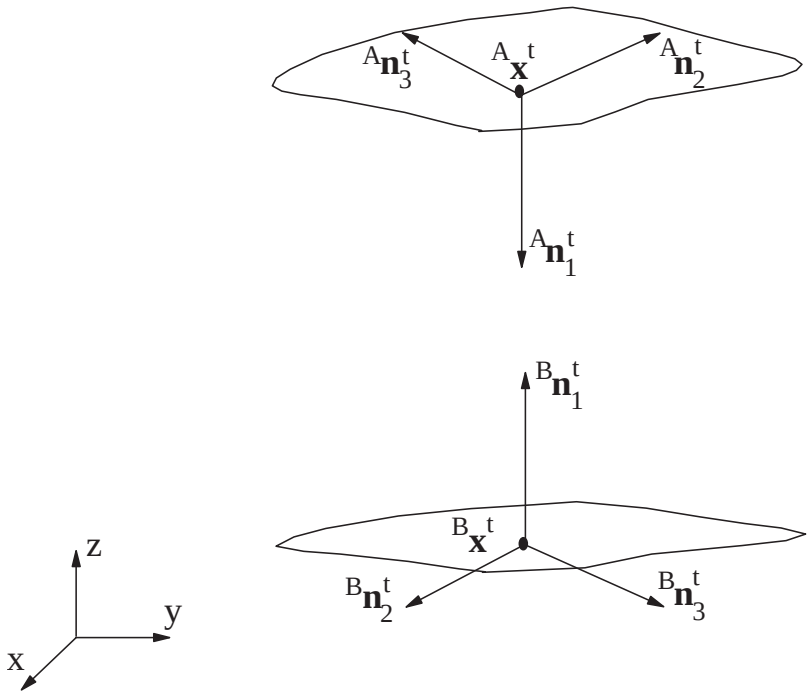


Figura 2.3 - Vetores unitários associados a dois pontos materiais em contato.

Os vetores unitários normais e tangenciais associados aos pontos ${}^{A}\mathbf{x}^{t}$ e ${}^{B}\mathbf{x}^{t}$, mostrados na figura 2.3, são tais que:

$$ {}^{A}\mathbf{n}_{i}^{t} = -\,{}^{B}\mathbf{n}_{i}^{t}, \quad i = 1, 2, 3 \qquad (2.12) $$

As forças de superfície ${}^{A}\mathbf{q}^{t}$ e ${}^{B}\mathbf{q}^{t}$ em cada ponto ${}^{A}\mathbf{x}^{t}$ e ${}^{B}\mathbf{x}^{t}$, respectivamente, representam forças de contato, que são as forças que cada corpo exerce sobre o outro durante o contato ,

$$ {}^{A}\mathbf{q}^{t} = -\,{}^{B}\mathbf{q}^{t} \qquad (2.13) $$

Escrevendo cada força ${}^{N}\mathbf{q}^{t}$ (N = A, B) em função do vetor normal ${}^{N}\mathbf{n}^{t}$,

$$ {}^{N}\mathbf{q}^{t} = {}^{N}q_{i}^{t}\ \mathbf{n}, \quad i = 1, 2, 3 \qquad (2.14) $$

Conclui-se então que o valor absoluto das forças de contato de um corpo sobre o outro devem ser iguais em módulo e com sentidos contrários para a satisfação da condição de contato, ou seja:.

$$ {}^{A}q_{i}^{t} = {}^{B}q_{i}^{t}, \quad i = 1, 2, 3 \qquad (2.15) $$

As forças de contato podem ser decompostas e analisadas como forças normais (q_1^t) e forças tangenciais(q_2^t e q_3^t) e sobre elas vale a seguinte observação: durante o contato não se considera a possibilidade de um corpo aderir ao outro, ou seja, as forças normais de contato são sempre de compressão:

$$q_1^t \leq 0 \qquad (2.16)$$

A equação (2.16) é denominada “condição mecânica do contato” e representa uma restrição sobre as forças normais de contato.

As forças tangenciais podem ser escritas em função da força normal através de uma expressão que define a condição de atrito entre os corpos. Considerando, por exemplo, a clássica lei de atrito de Coulomb (BELYTSCHKO, 2000, KIKUCHI, 1988 ZHONG, 1993,), esta expressão seria calculada por:

$$q_T^t = \sqrt{(q_2^t)^2 + (q_3^t)^2} \leq \mu\, q_1^t \qquad (2.17)$$

onde q_T^t é a magnitude da força tangencial de contato e μ é o coeficiente de atrito, que depende da natureza do material dos contornos em contato.

O deslizamento relativo dos dois corpos só acontece quando a força tangencial atinge o valor $q_T^t = \mu\, q_1^t$. Considerando que os pontos materiais ${}^A\mathbf{x}^t$ e ${}^B\mathbf{x}^t$ se deslocam com velocidades ${}^A\mathbf{v}^t$ e ${}^B\mathbf{v}^t$, pode-se calcular a velocidade relativa entre os dois pontos por:

$$\mathbf{v}^t = {}^A\mathbf{v}^t - {}^B\mathbf{v}^t \qquad (2.18)$$

e a velocidade de deslizamento, ou velocidade relativa tangencial, por:

$$\mathbf{v}_T^t = \mathbf{v}^t - (\,\mathbf{v}^t \bullet {}^B\mathbf{n}_1^t\,)\,{}^B\mathbf{n}_1^t \qquad (2.19)$$

Assim,

$$\begin{cases} \mathbf{v}_T^t = 0 & , \text{ se } q_T^t < \mu\, q_1^t \\ \mathbf{v}_T^t = -\lambda\, {}^B\mathbf{q}_T^t & , \text{ se } q_T^t = \mu\, q_1^t \end{cases} \qquad (2.20)$$

onde λ é um escalar positivo e ${}^{B}\mathbf{q}_{T}^{t}$ é a componente tangencial da força de contato ${}^{B}\mathbf{q}^{t}$, calculada por:

$$ {}^{B}\mathbf{q}_{T}^{t} = q_{2}^{t}\,{}^{B}\mathbf{n}_{2}^{t} + q_{3}^{t}\,{}^{B}\mathbf{n}_{3}^{t} \qquad (2.21) $$

Uma maneira prática de utilizar a condição de restrição (2.11) e monitorar a não-interpenetração entre os corpos em contato pode ser feita através da expressão:

$$ \begin{aligned} g^{t} &= \mathbf{g_0}(\mathbf{x}, 0) - \mathbf{u}^{t} \bullet \mathbf{n} \\ g^{t} &\geq 0 \end{aligned} \qquad (2.22) $$

onde g^t define o espaçamento entre as superfícies de contato, freqüentemente encontrado na literatura com a denominação de espaçamento (*gap*), e $\mathbf{g_0}(\mathbf{x}, 0)$ é o vetor cujo módulo define o valor inicial desse espaçamento. Portanto, um valor negativo de g^t indica que houve interpenetração dos corpos e a violação da restrição cinemática.

Em resumo, a seguinte condição, conhecida como condição de Kuhn-Tucker em problemas de otimização com restrições, deve ser sempre satisfeita:

$$ g^{t}\, q^{t} = 0 \qquad (2.23) $$

ou seja, as forças de contato q^t: devem ser iguais a zero quando a interpenetração g^t for diferente de zero; e devem ser diferentes de zero quando a interpenetração g^t for igual a zero.

2.3. Definição Formal do Problema

Utilizando todas as definições representadas na equações (2.1) a (2.23), pode-se então descrever o problema de contato-impacto da seguinte maneira:

Dadas as forças de superfície $\overline{\mathbf{q}}^t$ em Γ_F^0 e as forças de volume $\mathbf{b}^t$ em Ω^0, t ∈ [0, T], encontrar o campo de deslocamentos $\mathbf{u}^t$ em todos os tempos t ∈ [0, T] que satisfaz às seguintes condições:

1. Equações de Movimento

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^t}{\partial x_j^t} + b_i^t = \rho^t a_i^t \quad \text{em } \Omega^t \tag{2.24}$$

2. Equações Constitutivas

$$\sigma_{ij}^t = C_{ijkl}^t \varepsilon_{kl}^t \tag{2.25}$$

3. Condições Iniciais

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{em } \Omega^0 \tag{2.26}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},0) = \mathbf{v}_0 \quad \text{em } \Omega^0$$

4. Condições de Contorno

$$\mathbf{u}^t = \overline{\mathbf{u}}^t \quad \text{em } \Gamma_D^t \tag{2.27}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{n}^t = \overline{\mathbf{q}}^t \quad \text{em } \Gamma_F^t \tag{2.28}$$

5. Condições de Contato

$$g^t \geq 0 \quad \text{em } \Gamma_C^t \tag{2.29}$$

$$q_1^t \leq 0 \quad \text{em } \Gamma_C^t \tag{2.30}$$

$$g^t q^t = 0 \tag{2.31}$$

$$q_T^t = \sqrt{(q_2^t)^2 + (q_3^t)^2} \leq \mu q_1^t \tag{2.32}$$

$$\mathbf{v}_T^t = 0 \quad , \text{ se } q_T^t < \mu q_1^t \tag{2.33}$$

$$\mathbf{v}_T^t = -\lambda^B \mathbf{q}_T^t, \text{ se } q_T^t = \mu q_1^t \tag{2.34}$$

2.4 Processo de Solução

2.4.1. Discretização Espacial

Para encontrar a solução numérica do problema de contato-impacto, definido no item anterior, através do Método dos Elementos Finitos, primeiramente é necessário

efetuar a discretização espacial do sistema, subdividindo os domínios ${}^{A}\Omega$ e ${}^{B}\Omega$ em elementos finitos, com domínios ${}^{e}\Omega$, como ilustra a figura 2.4. Nestes elementos, os campos de deslocamentos, velocidades e acelerações, são aproximados por funções de interpolação $N_I(\mathbf{x})$ sobre os valores desses campos em seus pontos nodais:

$$u_i(\mathbf{x},t) = \sum_I N_I(\mathbf{x})\, u_{iI}(t) \qquad (2.35)$$

onde o índice "I" indica os nós dos elementos.

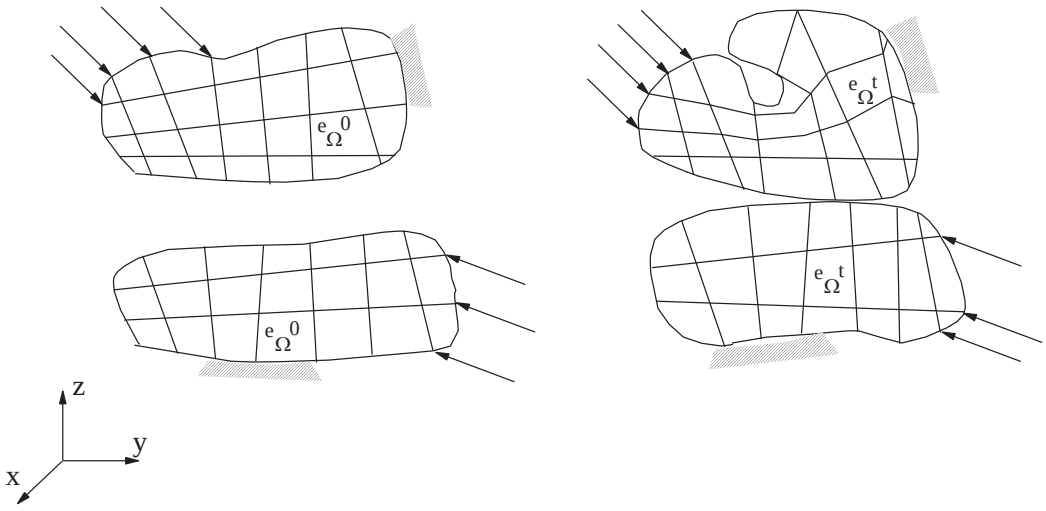


Figura 2.4 - Discretização espacial do sistema com dois corpos em contato.

Como é usual no método dos elementos finitos, aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, ou o Princípio da Energia Potencial Total Estacionária (BATHE, 1982, COOK, 1989, HUGHES, 1987, ZIENKIEWICZ, 1998, ZHONG, 1993, BELYTSCHKO, 2000), sobre as equações de movimento e demais equações que governam o problema de contato, obtém-se:

$$\delta W^{int} + \delta W^{ine} - \delta W^{ext} = 0 \qquad (2.36)$$

onde δW^{int} é o trabalho virtual das forças internas, δW^{ine} é o trabalho virtual das forças de inércia e δW^{ext} é o trabalho virtual das forças externas, sendo

$$\delta W^{int} = \int_{\Omega^t} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \sigma_{ij}^t(\mathbf{u}) \, d\Omega \qquad (2.37)$$

$$\delta W^{ine} = \int_{\Omega^t} \rho^t \delta u_i \, \ddot{u}_i^t \, d\Omega \qquad (2.38)$$

$$\delta W^{ext} = \int_{\Omega^t} \delta u_i b_i^t \, d\Omega + \int_{\Gamma_F^t} \delta u_i q_i^t \, d\Gamma + \int_{A\Gamma_C^t} q_i^t \delta^A u_i \, d\Gamma + \int_{B\Gamma_C^t} q_i^t \, \delta^B u_i \, d\Gamma \qquad (2.39)$$

Em sua forma matricial, considerando as equações (2.37)-(2.39), a equação (2.36) pode ser escrita como:

$$\delta \mathbf{u} \, (\, \mathbf{F}_{int}^t + \mathbf{M} \, \mathbf{a}^t + \mathbf{F}_D^t - \mathbf{F}_b^t - \mathbf{F}_p^t - \mathbf{F}_C^t) = 0 \qquad (2.40)$$

onde $\mathbf{F}_{int}^t$ é o vetor de forças internas, equivalente ao estado de tensões. O produto $\mathbf{M} \, \mathbf{a}^t$ resulta no vetor de forças de inércia, sendo $\mathbf{M}$ a matriz de massa e $\mathbf{a}^t$ o vetor aceleração; $\mathbf{F}_D^t$ é o vetor de forças de amortecimento, que para o caso de amortecimento viscoso é igual ao produto $\mathbf{C} \, \mathbf{v}^t$, sendo $\mathbf{C}$ a matriz de amortecimento e $\mathbf{v}^t$ o vetor de velocidades; $\mathbf{F}_b^t$ é o vetor de forças de volume, $\mathbf{F}_p^t$ é o vetor de forças prescritas de superfície e $\mathbf{F}_C^t$ é o vetor de forças de contato. Todos estes vetores globais são obtidos a partir de um processo de montagem (*assembling*) a partir das contribuições dos correspondentes vetores dos elementos.

Da expressão definida na equação (2.40), resulta o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem no tempo:

$$\mathbf{M} \, \mathbf{a}^t = \mathbf{F}_b^t + \mathbf{F}_p^t + \mathbf{F}_C^t - \mathbf{F}_D^t - \mathbf{F}_{int}^t = \mathbf{F}_{ext}^t - \mathbf{F}_{int}^t \qquad (2.41)$$

A equação (2.41) é denominada equação de movimento semidiscreta porque embora os vetores de deslocamentos, velocidades e acelerações, sejam funções espacialmente aproximadas, obtidas aplicando-se as funções de interpolação do método dos elementos finitos, ainda permanecem, até aqui, contínuas e diferenciáveis no tempo (BELYTSCHKO, 2000).

O passo seguinte para a solução do problema é transformar o sistema de equações diferenciais (2.41) em um sistema de equações algébricas e resolver este sistema de equações a cada instante de tempo.

2.4.2. Discretização Temporal

O sistema de equações contínuas no tempo (2.41) pode ser reescrito na sua forma discreta como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{n} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^{n} + \mathbf{P}(\mathbf{u}^{n}) = \mathbf{F}(t^{n}) \qquad (2.42)$$

onde **C** é a matriz de amortecimento, $\mathbf{P}(\mathbf{u}^n)$ é o vetor de forças internas equivalentes ao estado de tensões, $\mathbf{F}(t^n)$ é o vetor de cargas externas aplicadas no incremento n, $\ddot{\mathbf{u}}^{n}$ é o vetor de acelerações no incremento n, $\dot{\mathbf{u}}^{n}$ é o vetor de velocidades no incremento n, t é um instante de tempo e n é o n-ésimo incremento de tempo (n = 0,1,2,...nsteps)

As expressões dos operadores de diferenças centrais para as aproximações de velocidades e acelerações, considerando o incremento de tempo Δt com valor fixo, são:

$$\dot{\mathbf{u}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{u}^{n} - \mathbf{u}^{n-1}}{\Delta t} \qquad (2.43)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n}}{\Delta t} \qquad (2.44)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}^{n} = \frac{\dot{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}} - \dot{\mathbf{u}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \qquad (2.45)$$

E a expressão para o valor médio da velocidade $\dot{\mathbf{u}}^{n}$ é:

$$\dot{\mathbf{u}}^{n} = \frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{u}}^{n-\frac{1}{2}} + \dot{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \qquad (2.46)$$

Substituindo as equações (2.43) - (2.45) na equação (2.42) e adotando a simplificação de notação $\mathbf{P}(\mathbf{u}^n) = \mathbf{P}^n$ para o vetor de forças internas e $\mathbf{F}(t^n) = \mathbf{F}^n$ para o

vetor de cargas externas, resultam as seguintes expressões para a atualização das velocidades e dos deslocamentos no tempo:

$$\dot{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} - \frac{\mathbf{C}}{2}\right)}{\left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \frac{\mathbf{C}}{2}\right)} \dot{\mathbf{u}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\left(\mathbf{F}^n - \mathbf{P}^n\right)}{\left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \frac{\mathbf{C}}{2}\right)} \qquad (2.47)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}} \qquad (2.48)$$

Para escrever o operador de diferenças centrais em sua forma explícita, a matriz de massa **M** deve ser uma matriz diagonal. Assim os coeficientes da matriz obedecem a expressão:

$$m_{ij}^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{m_{ij}} & , \text{ se } i = j \\ 0 & , \text{ se } i \neq j \end{cases} \qquad (2.49)$$

Desta forma, o sistema de equações resultante fica desacoplado e a sua solução é trivial.

Antes disso, entretanto, é conveniente que a matriz de amortecimento também seja diagonalizada e para que isto seja possível, a forma mais utilizada para modelar a matriz de amortecimento viscoso é definida pelo chamado amortecimento de Rayleigh (BATHE, 1982, HUGHES, 1987), ou amortecimento proporcional, que define a matriz de amortecimento como uma combinação linear das matrizes de rigidez e de massa:

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \qquad (2.50)$$

O coeficiente α amortece os modos de vibração de baixa freqüência, enquanto o coeficiente β exerce uma maior influência nos modos de freqüência mais alta, sendo estes coeficientes determinados em função do fator de amortecimento crítico ζ para uma dada freqüência ω por:

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\omega} + \beta\omega\right) \qquad (2.51)$$

Como na solução numérica através do método explícito não existe a necessidade da montagem da matriz de rigidez, utiliza-se aqui uma matriz de amortecimento na forma $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M}$. Entretanto, como o problema de contato-impacto é denominado por altas freqüências, um esquema especial denominado amortecimento artificial, que é equivalente à parcela de amortecimento β, será apresentado mais adiante na seção 3.5.

Assim, rescrevendo a equação (2.47) chega-se a:

$$\dot{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(2-\alpha\Delta t)}{(2+\alpha\Delta t)}\,\dot{\mathbf{u}}^{n-\frac{1}{2}} + 2\Delta t\,\mathbf{M}^{-1}\frac{(\mathbf{F}^n - \mathbf{P}^n)}{(2+\alpha\Delta t)} \qquad (2.52)$$

Ou ainda, uma expressão para cada componente do vetor solução pode ser finalmente calculada individualmente como:

$$\dot{u}_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(2-\alpha\Delta t)}{(2+\alpha\Delta t)}\,\dot{u}_i^{n-\frac{1}{2}} + 2\Delta t\,\frac{(F_i^n - P_i^n)}{m_{ii}(2+\alpha\Delta t)} \qquad (2.53)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t\,\dot{u}_i^{n+\frac{1}{2}} \qquad (2.54)$$

onde i indica a i-ésima componente dos vetores (equação global) e m_{ii} é o i-ésimo elemento da diagonal de **M**.

Uma vez calculadas as acelerações, velocidades e deslocamentos dos pontos nodais do sistema discreto, através da solução das equações (2.53) - (2.54), podem ser calculados então as forças internas $\mathbf{F}_{int}^t$ e as forças prescritas de superfície $\mathbf{F}_p^t$. Por fim, se as forças de contato puderem ser calculadas em função de grandezas de valor conhecido no instante de tempo corrente, ou com relação a valores conhecidos em instantes de tempo anteriores, o problema fica então completamente resolvido.

Um esquema que permite o cálculo das forças de contato dessa maneira é o que utiliza um Método de Penalizações (BELYTSCHKO, 2000, NEAL, 1989, ZHONG, 1993). Neste método, a condição cinemática (2.11) sofre uma relaxação condicionada a uma certa tolerância, ou seja, se permite que haja uma pequena interpenetração entre os corpos, ou elementos, e quando isso ocorre, são aplicadas forças normais de

penalização $\mathbf{F}_{1C}^{t}$ proporcionais à essa interpenetração, sendo calculadas por uma expressão do tipo:

$$\mathbf{F}_{1C}^{t} = - \kappa \, g^{t} \qquad (2.55)$$

onde κ é um parâmetro de penalização convenientemente adotado e a interpenetração g^{t} no tempo corrente é calculada em função dos deslocamentos conhecidos, através da equação (2.22). Observa-se então, que a satisfação da condição cinemática do contato por um método de penalização é equivalente a inserir uma série de molas lineares entre os corpos em contato e o parâmetro κ representa a rigidez dessas molas.

Sendo esta metodologia para o cálculo das forças de contato bastante simples, uma questão de grande importância ainda permanece. Dada a discretização de elementos finitos dos corpos em contato, como identificar quais os elementos e/ou pontos nodais do corpo A entram em contato com os do corpo B? Como rastrear estes elementos com o avanço da análise no tempo? Esta etapa denominada pesquisa, ou busca, dos elementos em contato, representa uma das etapas mais dispendiosas, em termos de tempo total de processamento computacional na análise de problemas de contato-impacto e será discutida posteriormente com maiores detalhes.

O processo de solução descrito através das equações (2.42) a (2.54), constitui o denominado Esquema Explícito de integração no tempo, que em conjunto com o método de penalizações pode ser utilizado na solução numérica de problemas de contato-impacto, conforme ilustra o algoritmo 2.1, e aos quais será dado maior ênfase no presente trabalho.

1. Inicializar variáveis t = 0, n = 0 e calcular Δt

2. Aplicar os valores iniciais $\mathbf{u}^0$, $\mathbf{v}^0$, $\mathbf{F}_P^0$, $\mathbf{F}_{int}^0$

3. Montar a matriz de massa diagonal **M**

4. Calcular a aceleração inicial $\mathbf{a}^0 = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{F}_P^0 - \mathbf{F}_{int}^0) = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{F}_P^0)$

5. Calcular $\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}} + \mathbf{a}^n \, \Delta t, & \text{se } n > 0 \\ \mathbf{v}^n + \frac{1}{2} \mathbf{a}^n \, \Delta t, & \text{se } n = 0 \end{cases}$

6. Calcular $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t$

7. Atualizar $\mathbf{u}^{n+1}$, obedecendo às condições de contorno $\bar{\mathbf{u}}^t$

8. Pesquisar os elementos em contato

9. Calcular as forças de penalização $\mathbf{F}_C^{n+1}$

10. Calcular σ^{n+1}, as forças internas $\mathbf{F}_{int}^{n+1}$, e as forças de superfície $\mathbf{F}_p^{n+1}$

11. Calcular $\mathbf{a}^{n+1} = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{F}_b^{n+1} + \mathbf{F}_p^{n+1} + \mathbf{F}_C^{n+1} - \mathbf{F}_D^{n+1} - \mathbf{F}_{int}^{n+1})$

12. Atualizar $t = t + \Delta t$

13. se t > T pare, senão atualizar n = n + 1 e repetir a partir da linha 5.

Algoritmo 2.1 - Algoritmo explícito de solução do problema de contato-impacto.

O esquema explícito apresentado fornece, portanto, um algoritmo bastante simples.

Entretanto, este método apresenta estabilidade numérica condicionada ao incremento ou passo de tempo Δt adotado (BATHE, 1982, BELYTSCHKO, 2000, COOK, 1989, HUGHES, 1987).

O operador de diferenças centrais aplicado na solução de problemas lineares requer um passo de tempo máximo limitado por (BELYTSCHKO, 1983):

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{MAX}} \left(\sqrt{1 + \xi^2} - \xi \right) \qquad (2.56)$$

onde ω_{MAX} é a maior freqüência natural do sistema e ξ é um coeficiente de amortecimento aplicado a essa freqüência. A estimativa da freqüência ω_{MAX} do sistema nem sempre é viável e uma aproximação através da maior freqüência natural dos elementos, ω^{e}_{max}, conduz a um resultado conservativo que atende à condição (2.56), mas que pode ser determinado com maior eficiência.

A estimativa do passo de tempo crítico não é efetuada de maneira tão simples no caso de problemas não-lineares e no caso de problemas de contato-impacto tratados por método de penalização, esta dificuldade aumenta em função da alteração das freqüências do sistema devido ao parâmetro κ da equação (2.55), o que conduz a uma diminuição no valor do passo de tempo estável. A escolha desse parâmetro é o ponto crítico do uso do método de penalização, já que um valor adotado muito pequeno permite grandes interpenetrações entre os corpos e um valor muito grande diminui bastante o passo de tempo estável e requer, portanto, um maior esforço computacional na solução do problema.

Capítulo 3

Elemento Tetraédrico Linear com Formulação Mista Deslocamento-Pressão

Este capítulo apresenta os aspectos da implementação computacional de um elemento finito sólido tetraédrico linear com as considerações de grandes deslocamentos e grandes deformações através da formulação Lagrangeana atualizada (BELYTSCHKO, 2000) e tratamento da elastoplasticidade sob o critério de von Mises através do algoritmo de retorno radial (HUGHES, 1984). O elemento possui uma formulação bastante simples e eficiente para a simulação de problemas de análise transiente explícita considerando materiais incompressíveis, ou aproximadamente incompressíveis, através de um tratamento apropriado.

A implementação do elemento utiliza a formulação de pressão média nodal (*Average Nodal Pressure - ANP*) apresentada nos trabalhos de BONET (1998, 2001). Esta formulação apresenta, como principal contribuição, uma alternativa de solução para a inconveniente tendência de travamento volumétrico (*locking*) das malhas de elementos finitos discretizadas com tetraedros, através da definição de volumes nodais e do cálculo de pressões médias nodais em função da variação desses volumes no tempo.

3.1. Considerações Importantes Sobre o Elemento

Em muitos programas comerciais de elementos finitos, um dos elementos mais utilizados é o hexaedro linear, associado a técnicas de integração reduzida com controle de modos espúrios de energia para superar efeitos de travamento volumétrico de malhas ou em problemas com não-linearidade física onde o fluxo plástico é considerado com a restrição da incompressibilidade.

As discretizações utilizando elementos tetraédricos podem ser empregadas tirando proveito da simplicidade do elemento, que não necessita de esquemas especiais

de integração numérica já que o elemento permite explicitar analiticamente as suas integrais. Entretanto, como é bem conhecido, a formulação tradicional do elemento apresenta o inconveniente de travamento das malhas em problema com deformação isocórica, necessitando, portanto, de um tratamento adequado para evitar estas situações indesejáveis.

Além disso, a utilização dos elementos tetraédricos, se torna cada vez mais comum devido aos avanços no desenvolvimento de poderosas técnicas e ferramentas de geração de malhas não-estruturadas e de malhas adaptativas, baseadas principalmente em técnicas como as de triangularização de Delaunay ou de avanço frontal (*advancing front*), entre outras (BONET, 1988).

Ainda segundo BONET (1988), a utilização de elementos hexaédricos é mais indicada nos casos de geometrias elementares ou apenas moderadamente complexas e que podem ser decompostas em partes com forma simplificada. Em muitas aplicações reais de larga escala envolvendo grandes malhas, a sua utilização provoca discretizações que são apenas aproximadamente iguais às geometrias originais. Algumas discretizações podem ainda ser possíveis apenas quando resultam em elementos de forma muito distorcida, que podem levar à perda de precisão. Mesmo quando as geometrias originais são simples, problemas que apresentam grandes distorções nos elementos indicam a necessidade da utilização de técnicas de redefinição da malha (*remeshing*).

Com todos estes aspectos é importante ressaltar que, apesar da simplicidade na implementação do elemento tetraédrico, o custo computacional da sua utilização pode se tornar alto, pois considerando que um hexaedro para ser decomposto em tetraedros necessita de no mínimo cinco tetraedros (ZIENKIEWICZ, 1991), o número de elementos tetraédricos utilizados na discretização pode ser pelo menos cinco vezes maior que o número de elementos hexaédricos, para um mesmo número de graus de liberdade no modelo.

3.2. Definições Básicas do Elemento

A figura 3.1 abaixo ilustra o elemento tetraedro linear utilizado na implementação de elementos finitos. As conectividades dos elementos são indicadas de maneira que a seqüência dos nós I-J-M-P seja feita de tal modo que percorrendo os nós a partir do último (P), os três primeiros nós (I-J-M) sejam vistos em sentido anti-horário. Uma outra interpretação que fornece o mesmo resultado é: percorrendo os nós a partir do primeiro (I), os três últimos (J-M-P) são vistos no sentido horário. Assim, para exemplificar, algumas das possibilidades de escrever as conectividades do elemento da figura 3.1 seriam: P-M-J-I, I-M-P-J, I-P-J-M ou I-J-M-P.

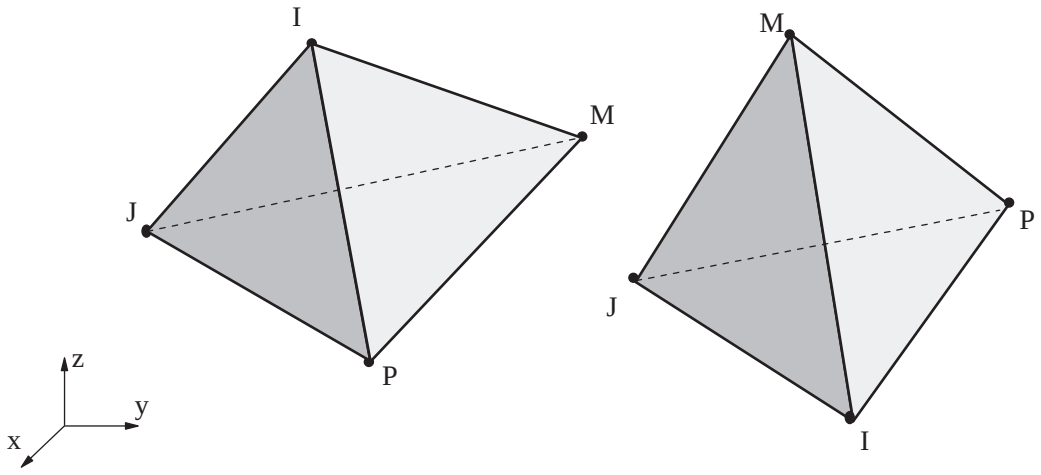


Figura 3.1 - Elemento tetraedro linear.

Estabelecida a convenção acima para a numeração das conectividades nodais do elemento tetraedro, o volume do elemento é calculado por (COOK, 1989, ZIENKIEWICZ, 1991):

$$V = \frac{1}{6} \det \begin{vmatrix} 1 & x_I & y_I & z_I \\ 1 & x_J & y_J & z_J \\ 1 & x_M & y_M & z_M \\ 1 & x_P & y_P & z_P \end{vmatrix} \qquad (3.1)$$

ou ainda,

$$V = \frac{1}{6} \det \begin{vmatrix} x_{JI} & y_{JI} & z_{JI} \\ x_{MI} & y_{MI} & z_{MI} \\ x_{PI} & y_{PI} & z_{PI} \end{vmatrix} \qquad (3.2)$$

Sendo $x_{JI} = x_J - x_I$ e $y_{JI} = y_J - y_I$, etc.

As funções de interpolação relativas a cada nó do elemento tetraedro são dadas por:

$$N_I = \frac{1}{6V} (a_I + b_I x + c_I y + d_I z) \qquad (3.3)$$

Sendo os coeficientes a_I, b_I, c_I e d_I obtidos pelos cofatores da primeira linha da matriz da equação (3.1) e calculados a partir dos determinantes:

$$a_I = \det \begin{vmatrix} x_J & y_J & z_J \\ x_M & y_M & z_M \\ x_P & y_P & z_P \end{vmatrix} \qquad b_I = -\det \begin{vmatrix} 1 & y_J & z_J \\ 1 & y_M & z_M \\ 1 & y_P & z_P \end{vmatrix}$$

$$c_I = -\det \begin{vmatrix} x_J & 1 & z_J \\ x_M & 1 & z_M \\ x_P & 1 & z_P \end{vmatrix} \qquad d_I = -\det \begin{vmatrix} x_J & y_J & 1 \\ x_M & y_M & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} \qquad (3.4)$$

No elemento tetraedro, cada nó possui três graus de liberdade de translação. Assim, o vetor de deslocamentos por elemento é escrito como:

$$\mathbf{u}^T = \{u_I, v_I, w_I, u_J, v_J, w_J, u_M, v_M, w_M, u_P, v_P, w_P\} \qquad (3.5)$$

O operador diferencial linear em cada nó do elemento tetraedro é calculado a partir das derivadas das funções de interpolação da equação (3.3) em relação às coordenadas cartesianas por:

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_I}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial z} \\ \frac{\partial N_I}{\partial y} & \frac{\partial N_I}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_I}{\partial z} & \frac{\partial N_I}{\partial y} \\ \frac{\partial N_I}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_I & 0 & 0 \\ 0 & c_I & 0 \\ 0 & 0 & d_I \\ c_I & b_I & 0 \\ 0 & d_I & c_I \\ d_I & 0 & b_I \end{bmatrix} \qquad (3.6)$$

Assim, utilizando a equação (3.6) em todos os nós do elemento, monta-se o operador diferencial linear do elemento tetraedro, que é então expresso por:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_I & 0 & 0 & b_J & 0 & 0 & b_M & 0 & 0 & b_P & 0 & 0 \\ 0 & c_I & 0 & 0 & c_J & 0 & 0 & c_M & 0 & 0 & c_P & 0 \\ 0 & 0 & d_I & 0 & 0 & d_J & 0 & 0 & d_M & 0 & 0 & d_P \\ c_I & b_I & 0 & c_J & b_J & 0 & c_M & b_M & 0 & c_P & b_P & 0 \\ 0 & d_I & c_I & 0 & d_J & c_J & 0 & d_M & c_M & 0 & d_P & c_P \\ d_I & 0 & b_I & d_J & 0 & b_J & d_M & 0 & b_M & d_P & 0 & b_P \end{bmatrix} \qquad (3.7)$$

Sendo os coeficientes do operador diferencial linear calculados substituindo as definições das equações (3.4) na equação (3.6), utilizando a convenção apresentada para a numeração das conectividades nodais e as propriedades das funções de interpolação, obtendo-se assim:

$$\begin{cases} b_I = y_{MP}\, z_J + y_{PJ}\, z_M + y_{JM}\, z_P \\ b_J = y_{MI}\, z_P + y_{IP}\, z_M - y_{MP}\, z_I \\ b_M = y_{IJ}\, z_P - y_{IP}\, z_J - y_{PJ}\, z_I \\ b_P = -(b_I + b_J + b_M) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_I = z_{MP}\, x_J + z_{PJ}\, x_M + z_{JM}\, x_P \\ c_J = z_{MI}\, x_P + z_{IP}\, x_M - z_{MP}\, x_I \\ c_M = z_{IJ}\, x_P - z_{IP}\, x_J - z_{PJ}\, x_I \\ c_P = -(c_I + c_J + c_M) \end{cases} \qquad (3.8)$$

$$\begin{cases} d_I = -(y_{PJ}\, x_M + y_{MP}\, x_J + y_{JM}\, x_P) \\ d_J = y_{MP}\, x_I - (y_{MI}\, x_P - y_{IP}\, x_M) \\ d_M = y_{IP}\, x_J + y_{PJ}\, x_I - y_{IJ}\, x_P \\ d_P = -(d_I + d_J + d_M) \end{cases}$$

O estado de deformações no elemento é calculado aplicando o operador diferencial linear **B** da equação (3.7) no vetor de deslocamentos da equação (3.5) e as taxas de deformação são obtidas aplicando o operador **B** no vetor de velocidades:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} \qquad (3.9)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} \qquad (3.10)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\} \qquad (3.11)$$

O cálculo do estado de tensões no elemento, considerando uma relação linear entre tensões e deformações como apresentado na equação (2.3), é efetuado multiplicando a matriz constitutiva elástica, definida nas equações (2.4) – (2.5), pelo vetor de deformações:

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \qquad (3.12)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\,\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (3.13)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\} \qquad (3.14)$$

O estado de tensões do elemento, representado na equação (3.14) pode sempre ser escrito como a soma de duas parcelas:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\,\sigma_{kk} \qquad (3.15)$$

onde σ'_{ij} representa a parcela das tensões desviatórias, que é responsável pelas deformações plásticas do elemento, sem alterar o seu volume, e a segunda parcela é a componente hidrostática do estado de tensões, que é responsável pelas mudanças de volume do elemento.

$$\sigma_{m} = \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\,\sigma_{kk} \qquad (3.16)$$

Uma vez obtido o estado de tensões do elemento, as forças nodais equivalentes ao estado de tensões (forças internas) são calculadas realizando a integração do estado de tensões no volume do elemento, operação que resulta na seguinte equação:

$$\mathbf{F}^{INT} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T\ \boldsymbol{\sigma}\ d\Omega^e = \mathbf{B}^T\ \boldsymbol{\sigma}\ V^e \qquad (3.17)$$

onde V^e é o volume do elemento, calculado pela equação (3.1).

3.3. Contornando o Problema do Travamento Volumétrico

3.3.1. Introdução

Entre os principais atrativos da utilização de elementos tetraédricos em análise transiente explícita, como por exemplo problemas de contato-impacto, estão: A facilidade de implementação, sendo possível escrever explicitamente as integrais sobre os volumes dos elementos; e a facilidade de geração dos elementos em geometrias complexas, resultando normalmente em malhas não-estruturadas, mas de elementos que apresentam boas razões de aspecto (*aspect ratios*), ou seja, com forma geométrica não muito distorcida. Esta última observação é de fundamental importância no que diz respeito à precisão e comportamento estável do elemento durante as análises.

Entretanto, como é bem conhecido e documentado na literatura, a utilização da formulação padrão do elemento tetraédrico apresentada na seção 3.2, normalmente

conduz ao efeito de travamento das malhas de elementos finitos, quando se analisa materiais incompressíveis, como é o caso dos metais em deformação plástica.

O efeito indesejável do travamento volumétrico ocorre fisicamente devido ao grande enrijecimento artificial dos materiais dos elementos, o que limita o seu fluxo. Numericamente, este efeito surge quando o número de restrições de incompressibilidade em uma malha de elementos finitos é muito grande em relação ao número de graus de liberdade do modelo (BEISSEL, 2000, HUGHES, 1987).

Um dos entraves para contornar esta situação indesejável é o fato desta relação entre restrições de incompressibilidade e graus de liberdade não depender simplesmente do tipo ou quantidade de elementos utilizados na discretização, e sim do arranjo desses elementos na topologia da malha de elementos finitos (BEISSEL, 2000, HUGHES, 1987). Existem mesmo situações em que um rearranjo apropriado na topologia é suficiente para evitar o travamento na malha, mas esta não é, sem dúvida, a solução ideal, visto que não pode ser geralmente utilizada.

Entre as possibilidades de soluções que se pode adotar, está a utilização de elementos finitos de alta ordem com integração numérica reduzida (elementos sub-integrados) (COSTA, 1997b). Entretanto, esta alternativa não se aplica ao caso do elemento tetraédrico linear. Para estes elementos, a estratégia apresentada em BONET (1998, 2001) introduz a definição de pressão média nodal, que é um esquema que consegue reduzir o número de condições de incompressibilidade substituindo a parcela hidrostática do estado de tensões, calculada na formulação padrão do elemento pela equação (3.16), pela soma das pressões médias nodais dos nós do elemento. Esta estratégia, apesar da sua simplicidade, apresenta resultados eficientes nos exemplos numéricos analisados, além de utilizar passos de tempo estáveis com valores muito maiores que outras estratégias apresentadas em (BONET, 2001), em uma análise de estabilidade unidimensional.

3.3.2. Formulação Mista Deslocamento-Pressão

Uma vez apresentada a idéia central do algoritmo de pressões médias nodais. As expressões utilizadas no algoritmo são apresentadas a seguir.

As equações semi-discretas definidas na equação (2.40) podem ser escritas em sua forma matricial como:

$$\mathbf{M}_I \, \mathbf{a}_I = \mathbf{F}_I - \mathbf{T}_{VOL,I} - \mathbf{T}_{DEV,I} \qquad (3.18)$$

$$\mathbf{M}_I \, \mathbf{a}_I = \mathbf{F}_I^{EXT} - \mathbf{F}_I^{INT} \qquad (3.19)$$

onde I representa os pontos nodais da malha.

As parcelas de forças internas volumétricas e desviatórias equivalentes ao estado de tensões nos elementos são obtidas a partir das contribuições dos elementos por:

$$\mathbf{T}_{DEV,I} = \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{NEL} (\mathbf{B}^e)^T (\sigma')^e \; V^e \qquad (3.20)$$

$$\mathbf{T}_{VOL,I} = \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{NEL} (\mathbf{B}^e)^T \, \bar{p}^e \, V^e \qquad (3.21)$$

Sendo $\mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{NEL}$ o operador de *assembling* e $\bar{p}^e$ a pressão hidrostática por elemento, que na formulação de pressões médias nodais são calculadas como:

$$\bar{p}^e = \frac{1}{4} \sum_{I=1}^{4} P_I \qquad (3.22)$$

$$P_I = B \, (J_I - 1) \qquad (3.23)$$

$$B = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \qquad (3.24)$$

$$J_I = \frac{V_I}{V_I^0} \qquad (3.25)$$

$$V_I = \sum_{e=1}^{n_I} \frac{1}{4} V^e \qquad (3.26)$$

Na equação (3.23) P_I são as pressões nodais calculadas em função do módulo de deformação volumétrica (*bulk modulus*) B e do Jacobiano nodal J_I, que é a relação entre os volumes nodais atuais V_I e os volumes nodais iniciais V_I^0 dos nós dos elementos. O volume nodal do nó I é calculado como a média dos volumes dos elementos que possuem o nó I na sua tabela de incidências e n_I é o número de elementos compartilhando o nó I.

Para o caso de nós comuns a elementos de materiais diferentes, o volume nodal passa a ser definido para cada tipo de material dos elementos que concorrem ao nó:

$$V_I^{(MAT)} = \sum_{e=1}^{n_I^{(MAT)}} \frac{1}{4} V^e \qquad (3.27)$$

onde $n_I^{(MAT)}$ representa o número de elementos de material (MAT) que possui o nó I.

Assim, para cada material é calculado uma pressão nodal diferente, utilizando os volumes inicial e corrente calculados pela equação (3.27), resultando em:

$$P_I^{(MAT)} = B^{(MAT)} \left(\frac{V_I^{(MAT)}}{V_I^{0\,(MAT)}} - 1 \right) \qquad (3.28)$$

Desta forma, quando se aplica as médias das pressões nodais sobre um determinado elemento, apenas aquelas correspondentes ao material correto do elemento são de fato consideradas.

3.4. Plasticidade Computacional

Nesta seção são tratados os aspectos mais importantes da implementação computacional do algoritmo para o tratamento do comportamento não-linear físico de meios contínuos sólidos com efeitos independentes de taxas de variação no tempo. Considera-se a formulação da elastoplasticidade associativa com endurecimento isotrópico e cinemático da superfície de escoamento que satisfaz ao critério de von Mises.

A implementação utiliza ainda a formulação Lagrangeana atualizada, para o tratamento da consideração de grandes deslocamentos e deformações em conjunto com a taxa de Jaumann (*Updated Lagrangean-Jaumann*) para assegurar a objetividade das taxas de tensões. Nesta formulação, os operadores diferenciais lineares e as grandezas cinemáticas são definidas, em cada instante de tempo, em relação à configuração deformada anterior, definindo um sistema de referência denominado sistema corrotacional.

3.4.1. Introdução

Para a abordagem computacional da elastoplasticidade, admite-se a possibilidade da decomposição do tensor taxa de deformações nas parcelas elástica e plástica. Esta hipótese é admitida considerando-se que é possível escrever o gradiente de deformação através da multiplicação de parcelas elásticas e plásticas e que, principalmente para os materiais metálicos, esta parcela elástica apresenta sempre valores pequenos (LAURSEN, 2002).

Desta forma é possível escrever a seguinte relação constitutiva na forma incremental:

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}^{e}_{kl} = D_{ijkl}\,(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}^{p}_{kl}) \qquad (3.29)$$

Considerando a superfície de escoamento de von Mises, bastante utilizada para modelagem plástica de metais, a função de escoamento é definida na forma:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = k^2 \qquad (3.30)$$

onde a função $f(\boldsymbol{\sigma})$ é definida por

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = J_2(\boldsymbol{\sigma}') = \frac{1}{2}\sigma'_{ij}\,\sigma'_{ij} \qquad (3.31)$$

Sendo, portanto, igual ao segundo invariante das tensões desviatórias, utilizado como uma métrica escalar do estado de tensões. O parâmetro k define o raio da superfície de escoamento de von Mises, que possui a forma geométrica de um cilindro.

O raio da superfície é calculado por:

$$R = k\sqrt{2} = \sigma_y\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad (3.32)$$

Sendo σ_y a tensão de escoamento que caracteriza o material, obtida através de ensaios experimentais.

A determinação e a atualização do estado de tensões em cada instante de tempo da análise é efetuada a partir do cálculo do incremento de tensões da equação (3.29). Para tanto, é necessário definir as expressões para o cálculo da parcela plástica do incremento de deformações, obtidas a partir da regra de fluxo associativo:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \begin{cases} \Lambda\,\mathbf{N}, \text{ quando o processo é plástico} \\ \mathbf{0} \quad , \text{ quando o processo é elástico} \end{cases} \qquad (3.33)$$

onde Λ é o escalar definido pela condição de consistência e **N** é o vetor normal à superfície de escoamento e que indica a direção do fluxo plástico.

A caracterização dos processos elástico e plástico é efetuada utilizando a equação (3.30):

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{\sigma}) - k^2 < 0 \;\text{ e }\; \dot{\varepsilon}^p = 0 \;(\text{elástico}) \\ f(\boldsymbol{\sigma}) - k^2 = 0 \;\text{ e }\; \dot{\varepsilon}^p \neq 0 \;(\text{plástico}) \end{cases} \qquad (3.34)$$

Desta forma fica bem estabelecido que o estado de tensões deve sempre estar no interior ou exatamente sobre a superfície de escoamento.

Entretanto, durante a evolução do problema, esta restrição pode não ser atendida e o estado de tensões estar fora da superfície de escoamento em situações quando, por exemplo, o estado de tensões deixa de ser puramente elástico e passa a ser elastoplástico. Por isso, em cada instante de tempo, o estado de tensões atualizado pela equação (3.29) é denominado estado de tensões tentativas e designado por $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{TR}$. Esse estado de tensões tentativas precisa então ser verificado pela condição definida na equação (3.34).

Sendo o processo caracterizado como elástico, o estado de tensões tentativas é aceito como o estado de tensões no instante atual. Caso o processo seja caracterizado como plástico, a condição de consistência é utilizada para o cálculo do escalar Λ, de maneira que o estado de tensões permaneça sobre a superfície de escoamento.

Conforme descrito em (HUGHES, 1984), considerando a situação geral de endurecimento linear isotrópico/cinemático dos materiais metálicos, a análise elastoplástica dos problemas da mecânica dos sólidos requer a solução do seguinte problema:

Dados os valores iniciais do estado de tensões $\boldsymbol{\sigma}$, do parâmetro k, as tensões residuais $\boldsymbol{\alpha}$ e a história das deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$, encontrar as histórias de $\boldsymbol{\sigma}$, k e $\boldsymbol{\alpha}$ que satisfazem às seguintes condições:

Equação Constitutiva

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\,(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}) \tag{3.35}$$

Equação de Atualização do Raio da Superfície de Escoamento

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{2}{3}}\;\beta\, H'\,\dot{\bar{\varepsilon}}^{p} \tag{3.36}$$

Equação de Atualização das Tensões Residuais

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{2}{3}\,(1-\beta)\,H'\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} \tag{3.37}$$

Regra de Fluxo

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \begin{cases} \Lambda\,\mathbf{N}, \text{ processo é plástico} \\ \mathbf{0}\quad, \text{ processo é elástico} \end{cases} \tag{3.38}$$

Condição de Consistência

$$\Lambda = \frac{1}{2\mu}\,\frac{1}{\left(1+\dfrac{H'}{3\mu}\right)}\,\mathbf{N}\bullet\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{TR} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{H'}{3\mu}\right)}\,\mathbf{N}\bullet\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{3.39}$$

Taxa de Tensão Tentativa

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{TR} = \mathbf{D}\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{3.40}$$

Definição do Processo Elástico

$$f(\xi) < k^{2}, \text{ ou } \; f(\xi) = k^{2} \text{ e } \mathbf{N}\bullet\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{TR} \le 0 \tag{3.41}$$

Definição do Processo Plástico

$$f(\xi) = k^{2} \text{ e } \mathbf{N}\bullet\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{TR} > 0 \tag{3.42}$$

Vetor Normal na direção do Fluxo Plástico

$$\mathbf{N} = \frac{\xi'}{R} \qquad \xi' = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha} \tag{3.43}$$

onde β é o parâmetro que define a proporção de endurecimento ($\beta = 0$ para endurecimento cinemático; $\beta = 1$ para endurecimento isotrópico; e valores $0 < \beta < 1$ indicam a ocorrência simultânea de ambos os mecanismos). O parâmetro H' é o módulo plástico, que corresponde à declividade da curva "tensão efetiva x deformação plástica efetiva" ($H' < 0$ para o mecanismo de endurecimento, $H' = 0$ para comportamento plástico-perfeito, $H' > 0$ para o mecanismo de degradação). A deformação plástica efetiva $\dot{\bar{\varepsilon}}^p$ é uma métrica escalar que quantifica o estado de deformações plásticas.

De acordo com o comportamento constante ou variável do valor da tensão de escoamento e com a reconfiguração da superfície de escoamento, o processo plástico pode ser caracterizado como: plástico perfeito, quando não ocorrem modificações na superfície de escoamento; endurecimento isotrópico quando ocorre uma expansão na superfície de escoamento devido à mudanças no valor da tensão de escoamento; ou endurecimento cinemático, quando ocorre uma translação da superfície de escoamento, conforme ilustra a figura 3.2.

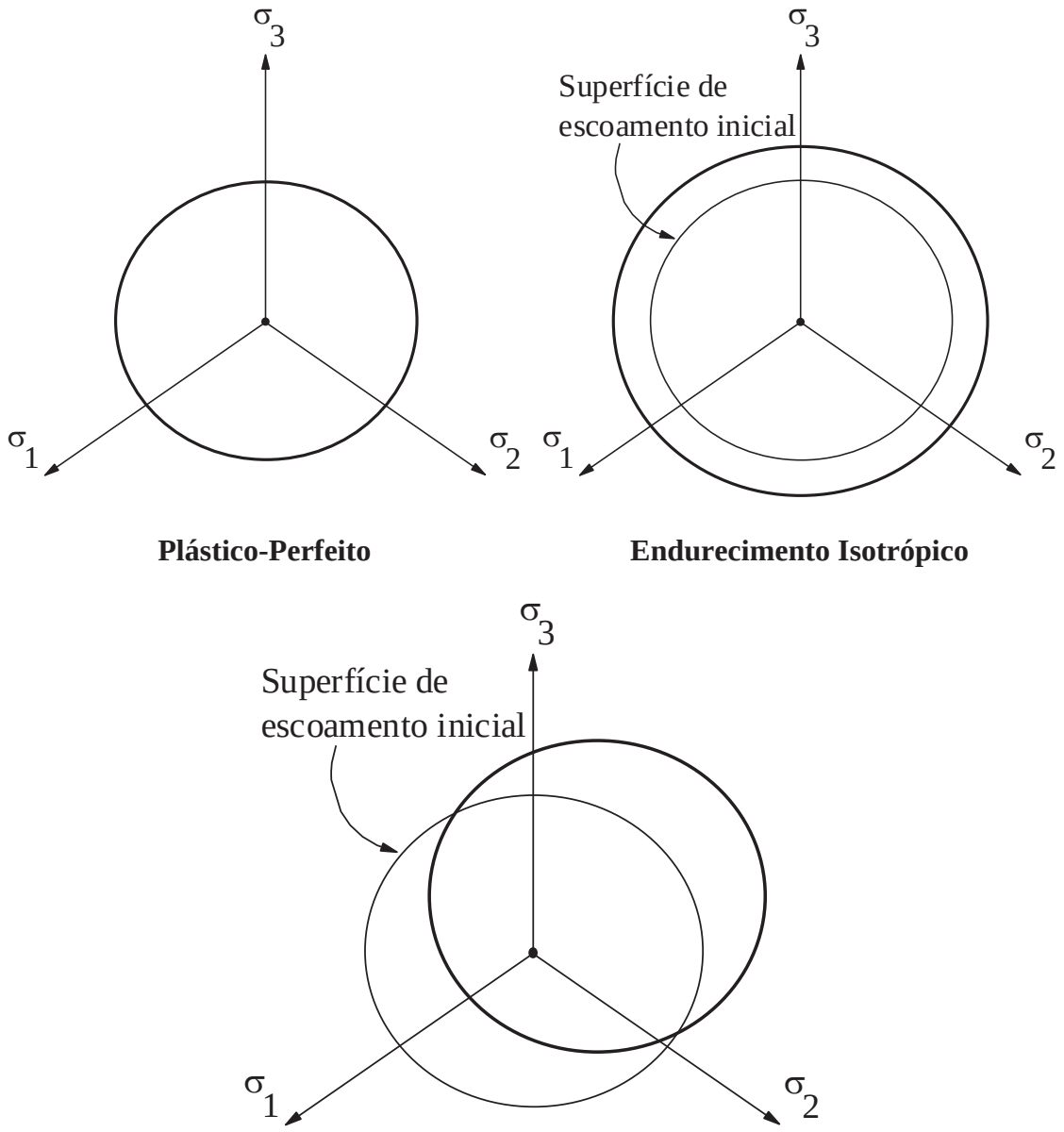


Figura 3.2 - Modelos de comportamento da superfície de escoamento.

3.4.2. Algoritmo de Retorno Radial

Entre os vários algoritmos de retorno à superfície disponíveis para o tratamento computacional dos problemas de plasticidade, um dos mais eficientes, simples e preciso para o caso do critério de von Mises é o chamado Algoritmo de Retorno Radial,

apresentado com detalhes em (HUGHES, 1984) e implementado em trabalhos como os de (COSTA, 1997a, 1997b).

O papel do algoritmo de retorno radial é calcular a história das tensões, na forma do conjunto do estados de tensões dos elementos em tempos discretos, a partir da história das deformações, e que satisfaça a uma das duas condições estabelecidas na equação (3.34). Como apenas o último estado de tensões é armazenado para cada elemento finito, o algoritmo de retorno radial deve então atualizar o estado de tensões nos elementos a partir do estado de tensões anterior e do incremento de deformações.

Uma vez determinado o operador diferencial linear no tempo corrente $\mathbf{B}^{n+1}$**,** **c**alcula-se a taxa de deformações no instante t+1 através da equação:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n+1} = \mathbf{B}^{n+1}\,\dot{\mathbf{u}}^{n+1} \qquad (3.44)$$

onde $\dot{\mathbf{u}}^{n+1}$ é o incremento de velocidades.

Calcula-se a taxa de tensões no instante t+1 considerando o caso elástico e atualiza-se o estado de tensões denominando este como o estado de tensões tentativas:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{n+1} = \mathbf{D}\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n+1} \qquad (3.45)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{TR}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^{n} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{n+1} \qquad (3.46)$$

O estado de tensões tentativas é então testado para verificar a satisfação da condição da equação (3.34). Se o estado de tensões tentativas se encontra no interior ou exatamente na superfície de escoamento e com o fluxo plástico orientado para o interior da superfície, o incremento de tensões é de fato elástico e o estado de tensões tentativas é aceito como o estado de tensões atual, sem a necessidade de correções. Por outro lado, se o estado de tensões tentativas está localizado fora da superfície de escoamento, é necessário aplicar uma correção e transferi-lo para a superfície.

Utilizando o algoritmo de retorno radial, esta transferencia é efetuada movendo a métrica do estado de tensões tentativas para um ponto que é a interseção da linha que une o centro da superfície de escoamento ao estado de tensões tentativas, com a própria superfície de escoamento, como ilustra a figura 3.3.

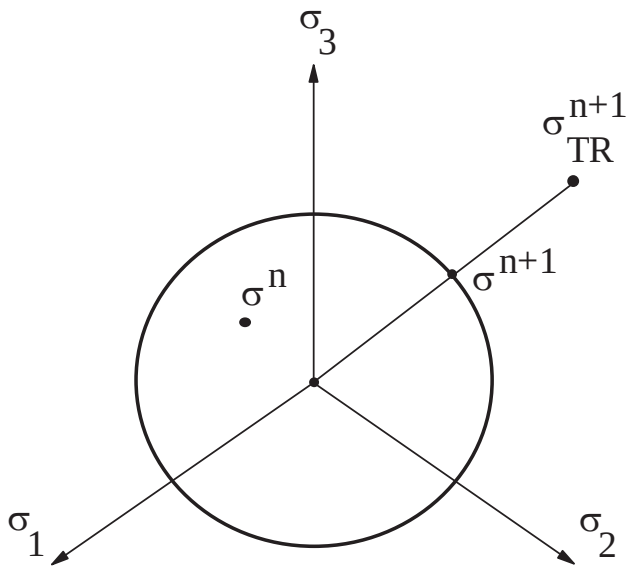


Figura 3.3 - Ilustração do processo de retorno radial.

Para a descrição do processo de correção e retorno à superfície, são apresentadas as equações necessárias, como definidas em (HUGHES, 1984).

Considerando a hipótese de endurecimento cinemático, o vetor de tensões residuais deve ser subtraído do estado de tensões tentativas:

$$\boldsymbol{\xi}_{TR}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{TR}^{n+1} - \boldsymbol{\alpha}^{n} \qquad (3.47)$$

A componente desviatória do estado de tensões tentativas é a parcela importante do estado de tensões para o tratamento da plasticidade e é definida pela expressão:

$$\boldsymbol{\eta}_{TR}^{n+1} = \boldsymbol{\xi}_{TR}^{n+1} - \xi_{m}^{n+1} \qquad (3.48)$$

$$\xi_{m}^{n+1} = \frac{1}{3}\left(\xi_{11.TR}^{n+1} + \xi_{22.TR}^{n+1} + \xi_{33.TR}^{n+1} \right) \qquad (3.49)$$

O vetor de tensões residuais, que aparece na equação (3.47), é utilizado nas situações com a consideração de endurecimento cinemático, pois serve para indicar a localização do centro da superfície de escoamento, e é calculado por:

$$\boldsymbol{\alpha}^{n+1} = \boldsymbol{\alpha}^{n} + \frac{2}{3}\,(1-\beta)\,H'\,\tilde{\Lambda}\,\mathbf{N} \qquad (3.50)$$

onde β é o parâmetro que indica o tipo de endurecimento ($\beta = 0$ para endurecimento cinemático ou $\beta = 1$ para endurecimento isotrópico) e H' é o módulo de endurecimento plástico. O parâmetro β é ainda utilizado para o cálculo da atualização do raio da superfície de escoamento de von Mises, através da expressão:

$$R^{n+1} = R^{n} + \sqrt{\frac{2}{3}}\,H'\beta\,\tilde{\Lambda} \qquad (3.51)$$

Para o cálculo dos parâmetros $\tilde{\Lambda}$ e $\mathbf{N}$ é preciso definir a métrica do segundo invariante da parcela desviatória do estado de tensões tentativas:

$$\left\| \boldsymbol{\eta}_{TR}^{n+1} \right\| = \boldsymbol{\eta}_{TR}^{n+1} \cdot \boldsymbol{\eta}_{TR}^{n+1} = 2J_2'(\xi_{TR}^{n+1}) \qquad (3.52)$$

$$\tilde{\Lambda} = \frac{1}{2\,\mu + \frac{2}{3}\,H'}\left(\left\| \boldsymbol{\eta}_{TR}^{n+1} \right\| - R^{n} \right) \qquad (3.53)$$

Desta forma, utilizando as equações (3.48) e (3.51) – (3.52), o escalar $\tilde{\Lambda}$ é determinado pela equação (3.53) e o seu valor também indica a necessidade ou não da correção do estado de tensões tentativas, pois se $\tilde{\Lambda} \geq 0$ o estado de tensões é plástico e se $\tilde{\Lambda} < 0$ o estado de tensões é elástico e a ele deve ser atribuído o valor $\tilde{\Lambda} = 0$

O vetor que dá a direção do retorno radial é calculado com a aproximação dada pela equação:

$$\mathbf{N} = \frac{\boldsymbol{\eta}_{TR}^{n+1}}{\left\| \boldsymbol{\eta}_{TR}^{n+1} \right\|} \qquad (3.54)$$

Por último, utilizando as considerações sobre o parâmetro definido na equação (3.53), a parcela de atualização do estado de tensões corrente em função da correção do estado de tensões desviatório é sempre calculada pela expressão:

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{TR}^{n+1} - 2\mu\,\tilde{\Lambda}\,\mathbf{N} \qquad (3.55)$$

onde μ é a constante de Lamé, módulo de deformação transversal.

O tensor de deformações plásticas e o escalar deformações plásticas efetivas são calculados, respectivamente, pelas equações:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{p\,n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}^{p\,n+1} + \tilde{\Lambda}\,\mathbf{N} \qquad (3.56)$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{p\,n+1} = \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{p\,n} + \tilde{\Lambda}\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad (3.57)$$

3.4.3. Taxas Objetiva de Tensões

É importante destacar que quando se utiliza relações constitutivas expressas na forma de taxas, como a da equação (3.29), é necessário utilizar taxas de tensão objetivas, ou seja, independentes da orientação do referencial adotado (ALVES, 1991, BELYTSCHKO, 2000, LAURSEN, 2002, ZHONG, 1993).

As medidas objetivas de tensão são aquelas que mantém inalteradas as relações constitutivas e as suas taxas de variação no tempo quando se altera a orientação do sistema referencial adotado, sobretudo em rotações de corpo rígido. Desta forma, as medidas de tensão adotadas em análise não-linear da mecânica dos sólidos devem simplesmente ser transformadas de acordo com as regras do cálculo tensorial para este tipo de transformação.

Aplicando-se uma rotação de corpo rígido em um sólido sujeito a um estado de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ qualquer, o tensor de tensões fica definido por:

$$\boldsymbol{\sigma}^{*} = \mathbf{R}^{T}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{R} \qquad (3.58)$$

Sendo **R** a transformação de rotação, que instantaneamente é idêntica à matriz identidade de mesma ordem:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} \qquad (3.59)$$

A sua taxa de variação no tempo é definida pelo tensor antimétrico (*spin*) :

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{W} \qquad (3.60)$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \qquad (3.61)$$

Utilizando como medida de tensão o tensor de Cauchy-Green, LAURSEN (2002) demonstra que o tensor se mantém inalterado quando se aplica a transformação definida na equação (3.58), comprovando a sua objetividade. Entretanto, o mesmo não se observa para a sua taxa de variação no tempo:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{*} = \dot{\mathbf{R}}^{T}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{R} + \mathbf{R}^{T}\,\dot{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathbf{R} + \mathbf{R}^{T}\,\boldsymbol{\sigma}\,\dot{\mathbf{R}} \qquad (3.62)$$

Observa-se que a primeira e a terceira parcela geralmente não se cancelam, visto que em função das definições das equações (3.60)- (3.61):

$$\dot{\mathbf{R}} \neq \mathbf{0} \qquad (3.63)$$

Para contornar esta situação, normalmente se indica na literatura a utilização de correções como, por exemplo, a taxa de Jaumann ou a taxa de Green-Naghdi (ALVES, 1991, BELYTSCHKO, 2000, LAURSEN, 2002).

A utilização de cada uma dessas taxas apresenta vantagens e desvantagens: A principal critica à taxa de Jaumann é com relação à resposta obtida em problemas onde os esforços de solicitação são do tipo cisalhamento puro (BELYTSCHKO, 2000). Esta limitação, sendo bastante particular, não impede a utilização da taxa de Jaumann, principalmente por esta apresentar uma implementação computacional bastante simples.

A expressão para a taxa de Jaumann é definida por:

$$\breve{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - W_{ik}\,\sigma_{kj} - W_{jk}\,\sigma_{ki} \qquad (3.64)$$

Sendo válida a seguinte equação constitutiva, que relaciona a taxa de Jaumann com o tensor velocidade de deformação (ALVES, 1991, BELYTSCHKO, 2002):

$$\breve{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\, D_{kl} \qquad (3.65)$$

onde C_{ijkl} é o tensor constitutivo da equação (2.4).

Deste modo, quando se aplica a parcela de correção da taxa de Jaumann a expressão para a taxa de variação do tensor de Cauchy que satisfaz às condições de invariância em relação ao referencial adotado pode ser escrita como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}\,\mathbf{D} + \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^{T} \qquad (3.66)$$

onde a primeira parcela corresponde a taxa de variação das tensões devido à resposta do material e as duas últimas parcelas correspondem à taxa de variação das tensões devido à rotação do material.

A taxa de Green-Naghdi é definida através de uma expressão bastante semelhante:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \Omega_{ik}\,\sigma_{kj} - \Omega_{jk}\,\sigma_{ki} \qquad (3.67)$$

Diferenciando-se basicamente pela utilização de uma medida de rotação do material baseada na velocidade angular:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}}\,\mathbf{R}^{T} \qquad (3.68)$$

Entretanto, uma dificuldade na utilização da taxa definida pela equação (3.67) está na necessidade de se efetuar uma decomposição polar para a determinação do operador de rotação **R** e a solução de um problema de autovalor para a diagonalização do gradiente de deformação para o processo de cálculo do gradiente de velocidade utilizado na definição da taxa de deformação (BELYTSCHKO, 2002). Esta seqüência de operações representam uma implementação e um esforço computacional bem maior quando comparada ao caso da taxa de Jaumann, razão pela qual esta última foi adotada nas implementações efetuadas.

3.5. Amortecimento Artificial

O amortecimento artificial é importante para atenuar as oscilações de alta freqüência da resposta de problemas de propagação de ondas, como por exemplo os problemas de contato-impacto.

As oscilações de alta freqüência podem ser atenuadas eficientemente quando se utilizam forças de amortecimento proporcionais à rigidez dos elementos. Entretanto, como em análises transiente explícitas não se utiliza a montagem de matrizes de rigidez, emprega-se o denominado amortecimento artificial, que é calculado a partir de uma relação entre deformações e tensões viscosas em função de uma fração do amortecimento crítico do sistema estrutural. A expressão para o cálculo das tensões viscosas é:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{VIS}} = \frac{2\xi}{\omega_{\mathrm{MAX}}}\,\mathbf{D}\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \qquad (3.69)$$

onde ξ é uma fração do amortecimento crítico, ω_{MAX} é a freqüência máxima de vibração do elemento, **D** é a matriz constitutiva linear e $\dot{\varepsilon}$ é a velocidade de deformação.

Para a obtenção da equação (3.69), primeiramente o termo $\beta = \frac{2\xi}{\omega_{\mathrm{MAX}}}$ é determinado através da solução da equação de movimento homogênea aplicada a um único elemento linear, considerando a freqüência máxima deste elemento e um amortecimento do tipo Rayleigh, equação (2.49) com o parâmetro $\alpha = 0$ (ALVES, 1991).

Na ausência da matriz de rigidez, substitui-se o amortecimento proporcional à rigidez pelas tensões viscosas:

$$\beta \mathbf{K}\,\dot{\mathbf{u}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\,\hat{\sigma}_{\mathrm{VIS}}\,d\Omega \qquad (3.70)$$

onde **B** é o operador diferencial linear.

Substituindo na equação (3.70) a expressão para o cálculo da matriz de rigidez, obtém-se:

$$\beta \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\, \mathbf{B}\, d\Omega\, \dot{\mathbf{u}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \, \hat{\sigma}_{VIS}\, d\Omega \qquad (3.71)$$

Sendo a velocidade de deformação calculada por:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B}\, \dot{\mathbf{u}} \;\text{ ou }\; \Delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}}{\Delta t} \qquad (3.72)$$

A equação (3.71) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \left(\beta \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \hat{\sigma}_{VIS} \right) d\Omega = 0 \qquad (3.73)$$

O que comprova a equação (3.69).

Na utilização prática da equação (3.69) para o cálculo das forças de amortecimento artificial, algumas simplificações precisam ser consideradas. A matriz constitutiva **D** é válida para relações lineares de tensão-deformação. Em casos de relações não-lineares, uma estimativa aproximada da matriz passa a ser utilizada, em função dos módulos de deformação transversal e volumétrico do material do elemento.

Para elementos sólidos contínuos, as tensões viscosas podem ser decompostas em duas parcelas: as componentes hidrostática e desviatória das tensões:

$$(\hat{\sigma}_{VIS})_{ij} = \delta_{ij}\; p_{VIS} + (s_{VIS})_{ij} \qquad (3.74)$$

onde a componente hidrostática é calculada por:

$$p_{VIS} = \beta B \dot{e} \qquad (3.75)$$

E a componente desviatória das tensões viscosas é calculada por:

$$s_{VIS} = \frac{2\xi B}{\omega_{MAX}} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} - \dot{e} \\ \dot{\varepsilon}_{22} - \dot{e} \\ \dot{\varepsilon}_{33} - \dot{e} \\ \dot{\varepsilon}_{12} \\ \dot{\varepsilon}_{13} \\ \dot{\varepsilon}_{23} \end{Bmatrix} \qquad (3.76)$$

sendo

$$\dot{e} = \frac{1}{3}(\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33}) \qquad (3.77)$$

3.6. Implementação Computacional

As principais tarefas computacionais para o cálculo das forças internas no elemento tetraédrico com a formulação Lagrangeana atualizada, contornando o problema do travamento volumétrico através da formulação do algoritmo de pressões médias nodais da seção 3.3, tratamento da elasto-plasticidade com endurecimento isotrópico/cinemático sob o critério de von Mises através do algoritmo de retorno radial da seção 3.4 e a estratégia de amortecimento artificial da seção 3.5, estão resumidamente representadas no algoritmo 3.1.

```
1.  do nel = 1, n. elementos
2.      atualiza os volumes nodais
3.  enddo
4.  do i = 1, n. pontos nodais
5.      calcula as pressões médias nodais:
6.  enddo
7.  calcula as forcas internas dos elementos
8.  do nel = 1, n. elementos
9.      monta o operador diferencial linear.
10.     calcula o tensor incrementos de deformações.
11.     calcula o tensor antimétrico (spin).
12.     calcula o incremento de tensões elásticas.
13.     calcula a parcela que transforma as tensões para a nova configuração (spin).
14.     calcula o estado de tensões tentativas.
15.     subtrai a tensão residual (back stress) do estado de tensões tentativas.
16.     calcula a parte desviatória das tensões tentativas.
17.     calcula o escalar Λ.
18.     calcula o vetor que dá a direção do retorno radial.
19.     atualiza o estado de tensões em função da correção sobre o estado de tensões
        desviatório.
20.     calcula a componente hidrostática do estado de tensões atual.
21.     calcula a pressão em função da deformação volumétrica.
22.     corrige o estado de tensões, substituindo a componente hidrostática pela
        pressão e acrescentando a correção de Jaumann
23.     atualiza o raio do cilindro de von Mises.
24.     atualiza a tensão residual.
25.     calcula o vetor de forcas internas equivalente ao estado de tensões.
26.     calcula as forcas de amortecimento artificial
27.     acumula a parcela de forcas viscosas no vetor de forcas internas.
28. enddo
```

Algoritmo 3.1 – Cálculo de forças internas no elemento tetraédrico com formulação Lagrangeana atualizada, algoritmo de retorno radial, estratégia *ANP* e amortecimento artificial.

Capítulo 4

Tratamento do Contato-Impacto por Penalização Técnicas das *Pinballs* e *Splitting Pinballs*

4.1. Aspectos Gerais

A avaliação das forças de contato através do método das penalizações, conforme definido na equação (2.55), é equivalente à inserção de um conjunto de molas fictícias entre os contornos de contato dos corpos. Quando ocorre a interpenetração de elementos, as forças de penalização são calculadas e aplicadas em seus pontos nodais em função desta interpenetração e de um parâmetro de penalização escolhido, fisicamente interpretado como a constante de rigidez das molas.

A escolha do parâmetro de penalização pode ser efetuada com relativa simplicidade, mas de maneira criteriosa, pois a escolha de um parâmetro muito pequeno resulta em violações excessivas da condição cinemática (2.11). Por outro lado, valores exageradamente grandes conduzem a instabilidades numéricas devido ao crescimento das freqüências de vibração do sistema. As diferentes estimativas propostas em BENSON (1990), NEAL (1989) e YEH (1992) apontam para uma escolha do parâmetro de penalização que resulte em molas fictícias com rigidez próxima à rigidez equivalente dos elementos.

Uma das tarefas mais difíceis de ser eficientemente realizada, principalmente em termos de desempenho computacional, é a etapa de determinação dos elementos do corpo A (corpo mestre) que participam do contato e com quais elementos do corpo B (corpo escravo), em cada instante de tempo. Esta complexidade é independente do método de restrição escolhido para o tratamento do contato: Penalização, Projeção, Lagrangeano Aumentado, etc. (NEAL ,1989)

Esta tarefa é efetuada pelos denominados Algoritmos de Busca ou Detecção do Contato (*Contact Search* ou *Contact Detection Algorithms*) e se torna ainda mais

complexa na análise de problemas de contato-impacto onde são consideradas situações como o auto-contato e a erosão de material, ou ainda, em simulações de problemas que utilizam uma grande quantidade de elementos em sua discretização de elementos finitos. Nesses casos, existe uma grande variação na configuração dos elementos em contato. Portanto, todos esses tipos de análises necessitam de algoritmos de busca suficientemente robustos e que devem funcionar com o mínimo de interferência do analista. Além do mais, se não apresentam desempenho computacional adequado, podem aumentar consideravelmente o tempo total de execução dos programas e inviabilizar a simulação.

4.2. A Técnica das *Pinballs*

A técnica das *pinballs* (*The Pinball Algorithm*) (NEAL, 1989, BELYTSCHKO, 1991a, 1991b) representa uma boa alternativa para superar os tipos de dificuldades apresentadas na seção anterior, pois apresenta, entre outros atrativos, facilidade de implementação, eficiência computacional e uma interferência mínima do usuário no que se refere ao processo de busca dos elementos envolvidos no contato, tornando possível que esta tarefa seja efetuada de maneira completamente automática pelo algoritmo.

Baseada no emprego de partículas discretas para a representação de um corpo, e desenvolvida originalmente para a utilização em malhas de elementos finitos sólidos hexaédricos, a idéia principal da técnica é associar esferas rígidas aos elementos em contato e utilizar as características geométricas e físicas dessas esferas no processo de busca dos elementos e no cálculo das forças de contato, simplificando bastante estas operações, já que o número de parâmetros geométricos das esferas (centro e raio) é bem menor e mais simples de monitorar e manipular do que os dos elementos (coordenadas nodais).

Somente os elementos localizados na superfície dos corpos considerados, formam o conjunto de elementos que são efetivamente candidatos a participar do contato e apenas a estes elementos é necessário associar uma *pinball*, como ilustra a figura 4.1.

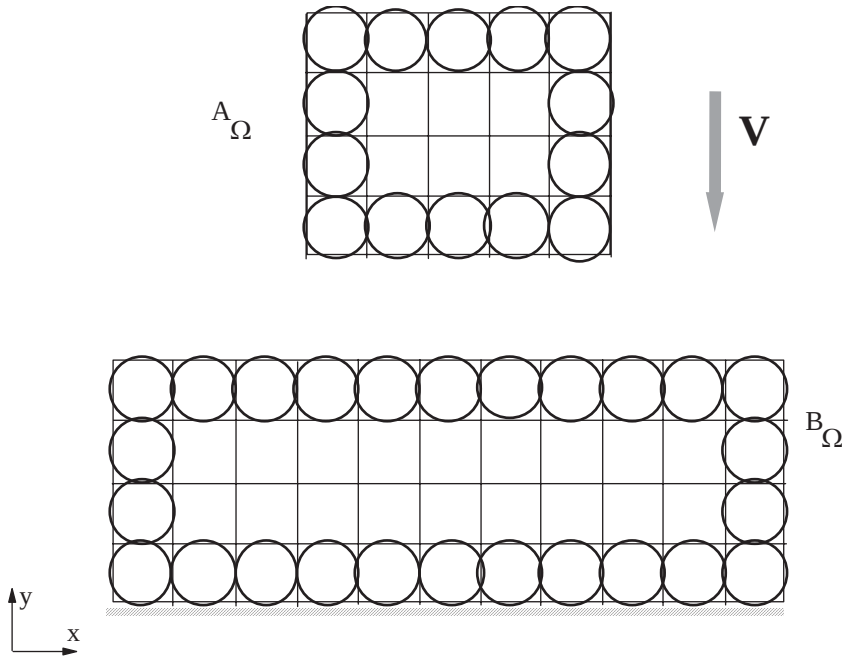


Figura 4.1 - *Pinballs* associadas aos elementos das superfícies das malhas.

A determinação dos elementos das superfícies das malhas é efetuada no início da análise por um procedimento automático através do algoritmo de cálculo dos vetores normais à superfície, isto é, o *Assembled Surface Normal Algorithm* (BELYTSCHKO, 1987).

Neste algoritmo, são calculados os vetores normais aos lados de cada elemento da malha, no caso de elementos bidimensionais – mesmo que representados no espaço tridimensional, como no caso dos elementos de casca em (YEH, 1992, SILVA, 2002) – como os quadriláteros da figura 4.2. No caso de elementos sólidos tridimensionais, esses vetores são calculados normais às faces de cada elemento da malha.

Os vetores normais são calculados isoladamente, e acumulados nos pontos nodais correspondentes, formando o vetor normal nodal local. Após uma operação de montagem (*Assembling*) do vetor normal nodal global, a operação de soma, necessária à montagem, cancela uma grande parte dos vetores componentes e daí resulta, para os nós interiores da malha um vetor normal nodal global nulo ou de módulo muito pequeno, e para os nós exteriores da malha se obtém um vetor normal nodal global de módulo unitário, conforme ilustra a figura 4.2.

Desta forma, o algoritmo determina os elementos das superfícies das malhas como sendo aqueles que possuem, pelo menos um nó com vetor normal global unitário, no caso de elementos bidimensionais. No caso de elementos tridimensionais, os elementos da superfície são aqueles que possuem, pelo menos, uma face onde todos os nós possuam vetor normal global de módulo unitário.

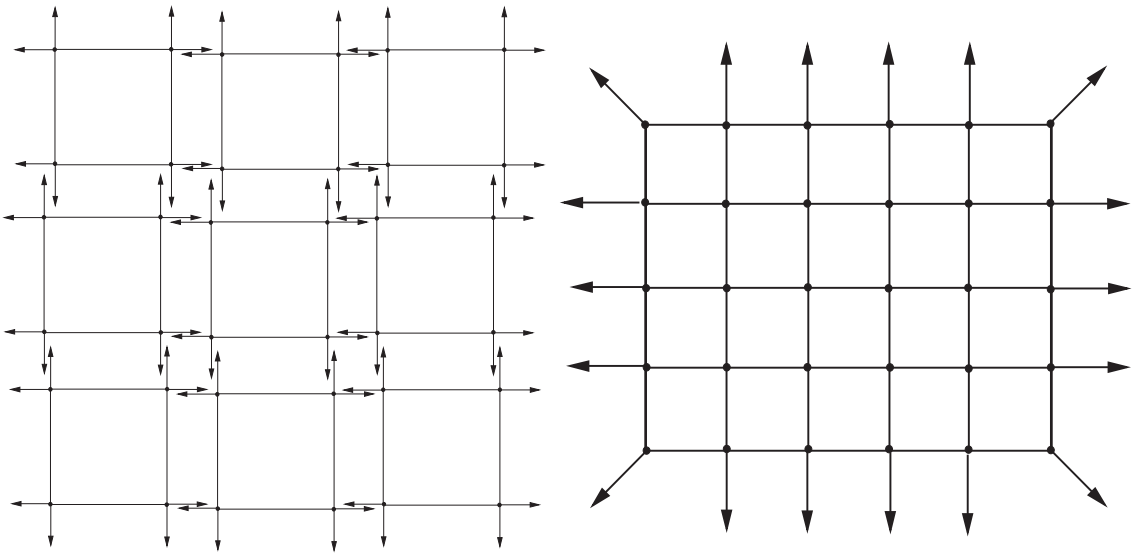


Figura 4.2 – Representação de vetores normais unitários nodais locais e global.

4.3. Definição das *Pinballs* e Cálculo das Forças de Penalização

A definição das *pinballs* associadas aos elementos das superfícies das malhas é feita, a cada instante de tempo, através da determinação das coordenadas do seu centro e do seu raio. O centro da *pinball* é calculado como a média das coordenadas nodais do elemento, enquanto que o raio é determinado de maneira que o volume da *pinball* resultante seja igual ao volume do elemento.

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\mathrm{NNODE}} \sum_{\mathrm{I}=1}^{\mathrm{NNODE}} \mathbf{x}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{e}} \qquad (4.1)$$

$$\mathrm{R} = \sqrt{\frac{\mathrm{A}^{\mathrm{e}}}{\pi}} \quad \text{em 2D} \quad \text{ou} \quad \mathrm{R} = \sqrt[3]{\frac{3\mathrm{V}^{\mathrm{e}}}{4\pi}} \quad \text{em 3D} \qquad (4.2)$$

onde NNODE é o número de nós do elemento, $\mathbf{x}_I^e$ são as coordenadas dos nós, A^e é a área de um elemento bidimensional e V^e é o volume de um elemento tridimensional.

Uma vez determinados estes parâmetros, o processo de detecção dos elementos em contato passa a ser efetuado exclusivamente através das *pinballs*, que identifica que um elemento mestre está em contato com um elemento escravo quando as suas *pinballs* associadas ocupam posições no espaço que satisfazem à seguinte condição:

$$d_{IJ} < R_I + R_J \qquad (4.3)$$

onde d_{IJ} é a distância entre o centro da *pinball* mestre, de raio R_I, e o centro da *pinball* escrava, de raio R_J.

Para os pares identificados de *pinballs* em contato, é necessário quantificar a interpenetração existente, o que possibilita o cálculo e a aplicação das forças de penalização para a satisfação da condição cinemática do contato. O valor da interpenetração "g" entre duas *pinballs* é definido como o deslocamento relativo dos seus centros, na direção do vetor normal aproximado **n**, equação (4.4), necessário para eliminar a interpenetração existente (NEAL, 1989, BELYTSCHKO, 1991a), como mostra a figura 4.3.

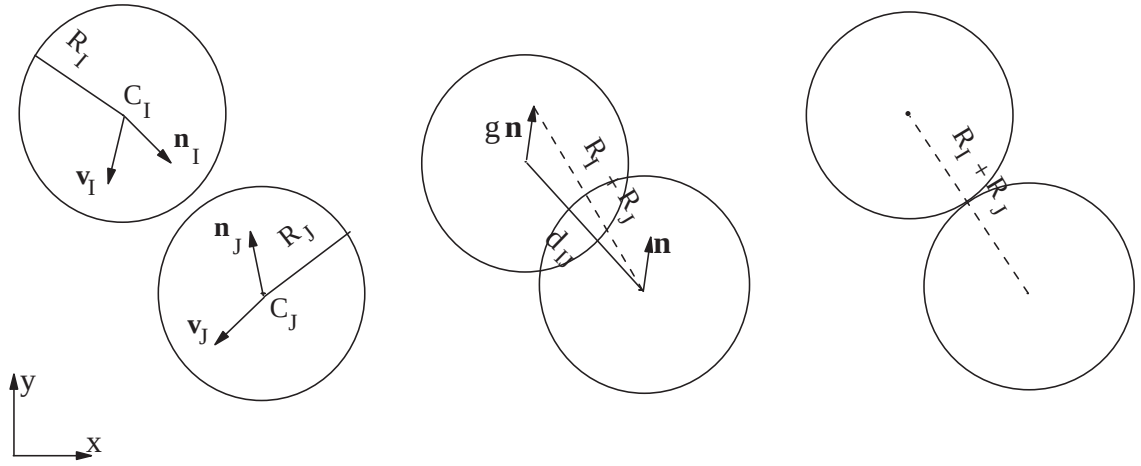


Figura 4.3 - Cálculo da interpenetração entre duas *pinballs*.

Definindo as expressões:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}_J - \mathbf{n}_I}{\left\| \mathbf{n}_J - \mathbf{n}_I \right\|} \qquad (4.4)$$

$$\mathbf{C}_{IJ} = \mathbf{C}_I - \mathbf{C}_J \qquad (4.5)$$

$$d_{IJ} = \left\| \mathbf{C}_{IJ} \right\| \qquad (4.6)$$

$$b = \left| \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \right| \qquad (4.7)$$

$$c = d_{IJ}^2 - (R_I + R_J)^2 \qquad (4.8)$$

onde C_I e C_J são os vetores posição dos centros das *pinballs* e n_I e n_J são os vetores normais dos centros das *pinballs* I e J , respectivamente calculados pela equação (4.1) e pela média dos vetores normais nodais dos elementos associados, $\| \cdot \|$ representa o módulo de um vetor e $| \cdot |$ representa o valor absoluto de um escalar.

Assim, obtém-se a seguinte expressão para o cálculo da interpenetração das duas *pinballs* (NEAL, 1989, QUARANTA, 1995):

$$g = -b + \sqrt{b^2 - c} \qquad (4.9)$$

As forças de penalização necessárias para eliminar a interpenetração das *pinballs* são proporcionais a este valor e calculadas por:

$$\mathbf{f}_C = \kappa \, g \, \mathbf{n} \qquad (4.10)$$

onde $\mathbf{f}_C$ são as forças de penalização aplicadas nas *pinballs*, κ é um parâmetro de penalização e **n** é o vetor normal unitário médio comum ao par de *pinballs*, definido na equação (4.4).

Uma expressão para o cálculo do parâmetro de penalização κ da equação (4.10) é apresentado em (HALLQUIST, 1985) para o caso de contato de um nó mestre contra um elemento sólido escravo.

NEAL (1989) adaptou essa expressão para o cálculo de forças penalizadoras de contato entre esferas rígidas e, levando em consideração propriedades físicas e geométricas das duas esferas (*pinballs*), obteve:

$$\kappa = \frac{1}{2}\,\beta\,(B_I R_I + B_J R_J) \qquad (4.11)$$

Onde o parâmetro β é um fator adimensional cuja função é regular o valor do penalizador, R_I e R_J são os raios e B_I e B_J são os módulos de deformação volumétrica (*bulk modulus*) dos elementos associados às *pinballs*. Neste mesmo trabalho, o autor apresenta exemplos que mostram que o parâmetro β representa a relação entre a rigidez dos elementos e a rigidez da mola, definida na equação (2.55).

Para eliminar a possibilidade de acréscimos espúrios de energia ao sistema, devido a valores excessivos ou picos instantâneos das forças de penalização, é apresentado em (NEAL, 1989, BELYTSCHKO 1991a) e testado em (QUARANTA, 1995) um critério que define um limite superior para estas forças baseado na consideração de choque inelástico, caracterizado pelo valor nulo do coeficiente de restituição e dissipação máxima da energia cinética do sistema. Desta forma, as forças de contato calculadas na equação (4.10) devem obedecer ao limite:

$$\mathbf{F}_C \;\leq\; \mathbf{f}_{crit} \qquad (4.12)$$

onde $\mathbf{f}_{crit}$ é a força crítica de contato definida por:

$$\mathbf{f}_{crit} = \frac{M_I M_J}{(M_I + M_J)}\,\frac{(\mathbf{v}_I - \mathbf{v}_J)}{\Delta t} \qquad (4.13)$$

sendo M_I e M_J as massas das *pinballs*, $\mathbf{v}_I$ e $\mathbf{v}_J$ as velocidades nos seus centros, calculadas como as médias das velocidades nodais dos elementos associados e Δt o incremento de tempo corrente utilizado na análise.

As forças de penalização calculadas nas *pinballs* são transferidas aos nós dos elementos associados com o valor:

$${}^{e}\mathbf{F}_C = \frac{\mathbf{f}_C}{\text{NNODE}} \qquad (4.14)$$

onde ${}^{e}\mathbf{F}_{C}$ é o valor da força de penalização aplicada em cada nó do elemento e NNODE é o número de nós dos elementos.

A distribuição da força de contato em parcelas iguais entre os nós proporciona um efeito de regularização, diminuindo consideravelmente o nível de oscilações ruidosas das respostas obtidas. O forte ruído nos sinais de resposta é uma característica do tratamento do contato-impacto através do método de penalização.

As forças de penalização por elemento, são então utilizadas para a montagem do vetor global de forças de contato $\mathbf{F}_{C}^{t}$ utilizado na equação (2.40).

4.4. Algoritmos de Busca dos Elementos em Contato

Conforme apresentado na seção anterior, a utilização de *pinballs* para a definição da interpenetração e das forças de penalização entre elementos simplifica bastante estas operações, sendo efetuadas segundo as equações (4.1) a (4.14).

Utilizando o conceito das *pinballs*, a detecção dos pares de elementos em contato também é efetuada através de um teste rápido e simples, condição (4.3). Porém, ao se considerar simulações empregando malhas com grandes quantidades de elementos finitos, a busca para identificar todos os pares de elementos em contato representa uma das principais etapas da simulação, em termos de tempo de processamento e desempenho computacional.

Dentro deste contexto, nesta seção são apresentados três algoritmos de busca para a detecção de pares de *pinballs* mestre-escrava em contato, propostos em NEAL (1989). A sua implementação computacional é apresentada e a análise do seu desempenho, em termos de tempo de processamento, em um problema numérico modelo, fornecem indicações para a escolha do melhor algoritmo a ser empregado nas simulações de elementos finitos.

4.4.1. O Algoritmo Força Bruta (*Brute Force Search*)

Observando as *pinballs* definidas na figura 4.1, o método mais óbvio e natural para encontrar as *pinballs* em contato é o Algoritmo Força Bruta (NEAL, 1989) ilustrado no algoritmo 4.1, onde cada *pinball* escrava (corpo B) é testada contra todas as *pinballs* mestres (corpo A), verificando a condição (4.3). Baseado no resultado desse teste é então construída a lista dos pares *pinballs* mestre-escrava em contato.

```
1. npares = 0
2. do i = 1, nescravo
3.   do j = 1, nmestre
4.        calcula a distância entre as pinballs i e j
5.        if (estão em contato)
6.             npares = npares + 1
7.             lslave (npares) = i
8.             lmaster(npares) = j
9.        endif
10.  end loop j
11. end loop i
```

Algoritmo 4.1 - Algoritmo força bruta.

sendo “npares” o número de pares de *pinballs* em contato, “nmestre” e “nescravo” o número de *pinballs* mestres e escravos do sistema, respectivamente, e “lslave” e “lmaster” são arranjos que contém a lista com os números das *pinballs* que formam o par em contato.

Como pode ser observado, o tempo de processamento gasto na execução deste algoritmo é diretamente proporcional ao produto (nescravo*nmestre), o que o torna praticamente inviável para utilização no caso de malhas que possuam grandes quantidades de elementos. Para estes casos, são necessários então algoritmos que evitem tempos de processamento com esta ordem quadrática O(N^2).

4.4.2. Algoritmos de Células (*Bucket Sort*)

Como nem todas as *pinballs* mestres e escravas participam necessariamente do contato, é possível então reduzir a lista de *pinballs* que precisa ser pesquisada em cada incremento de tempo, através da definição de uma região retangular do espaço, com lados paralelos aos eixos de coordenadas globais, de maneira que somente as *pinballs* que se encontram no interior desta região serão consideradas no algoritmo de busca, conforme ilustra a figura 4.4.

A definição da dimensão dessa região retangular constitui a única interferência do usuário na busca dos elementos que participam do contato, e deve ser feita de maneira que o seu domínio contenha o espaço onde são esperadas todas as interações entre os corpos, desde o tempo inicial até o tempo final da análise.

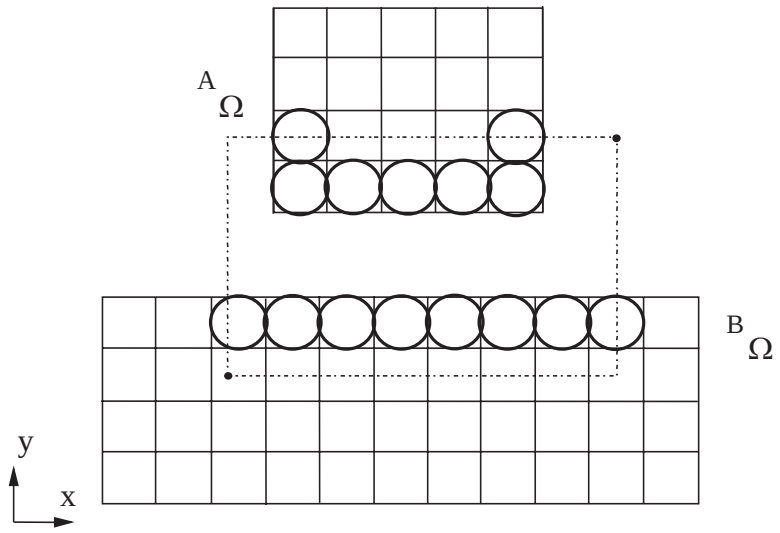


Figura 4.4 - *Pinballs* efetivamente consideradas na região de contato.

A região retangular é ainda subdividida em pequenas células cartesianas homogêneas, com lados paralelos aos eixos de referência, representadas e numeradas como ilustra a figura 4.5, e fica então completamente definida através dos parâmetros:

$$(X_{min}, X_{max}, NCX), (Y_{min}, Y_{max}, NCY) \text{ e } (Z_{min}, Z_{max}, NCZ) \qquad (4.15)$$

onde (X_{min}, Y_{min}, Z_{min}) e (X_{max}, Y_{max}, Z_{max}) são os coordenadas dos pontos extremos da região retangular e NCX, NCY e NCZ são os números de células nas direções X, Y e Z, respectivamente.

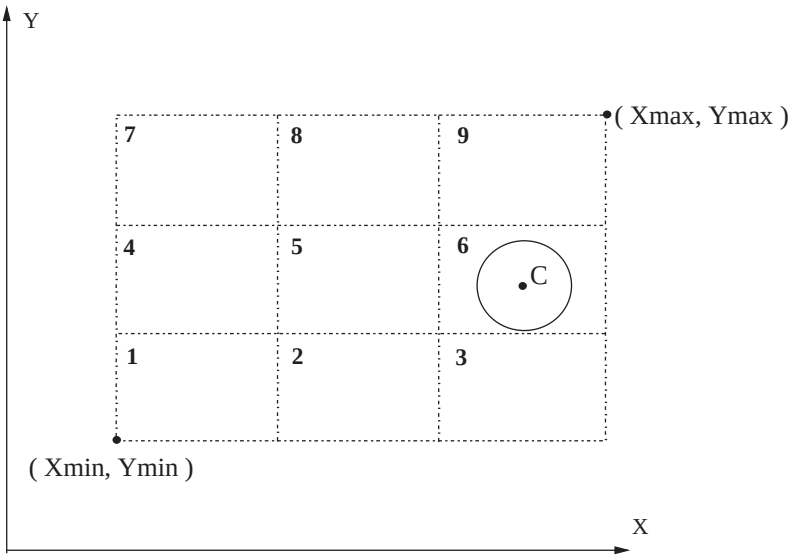


Figura 4.5 - Representação das células na região retangular.

A localização de uma *pinball*, em função das coordenadas materiais do seu centro C (X_C, Y_C, Z_C), é determinada através da expressão:

$$ICELL = (IZ-1)* NCX * NCY + (IY-1)* NCX + IX \qquad (4.16)$$

onde

$$IX = NCX * \frac{(X_C - X_{min})}{(X_{max} - X_{min})} + 1 \qquad (4.17)$$

$$IY = NCY * \frac{(Y_C - Y_{min})}{(Y_{max} - Y_{min})} + 1 \qquad (4.18)$$

$$IZ = NCZ * \frac{(Z_C - Z_{min})}{(Z_{max} - Z_{min})} + 1 \qquad (4.19)$$

As equações (4.17) a (4.19) utilizam o truncamento da aritmética inteira no cálculo das suas operações de divisão, e aplicadas no caso da *pinball* da figura 4.5 indicariam que esta ocupa a célula número 6.

As definições apresentadas, em conjunto com as equações (4.15) a (4.19), permitem definir o Algoritmo Convencional de Células (*Standard Cell Algorithm*) proposto em (NEAL, 1989) para busca de *pinballs* em contato.

Neste algoritmo, após a construção de uma lista que contém a localização de cada *pinball* mestre no conjunto de células, é determinado para cada *pinball* escrava o número da célula que esta ocupa e é efetuado o seu teste contra as *pinballs* mestres desta mesma célula e de todas as células vizinhas (que são em número de 8 células no caso bidimensional ou 26 células no caso tridimensional), como ilustra o algoritmo 4.2. Observa-se então que este algoritmo é semelhante ao algoritmo de força bruta, porém aplicado a um conjunto menor de *pinballs* em um grupo de 9 ou 27 células, respectivamente nos casos de discretizações no espaço 2D e 3D.

```
1. do i = 1, nescravo
3.   loop nas pinballs mestre da mesma célula
4.        if (a mestre e a escrava estão em contato)
5.             npares = npares + 1
6.             lslave (npares) = pinball escrava
7.             lmaster(npares) = pinball mestre
8.        endif
9.   continue loop das mestres
10.  loop nas pinballs mestre das células vizinhas
11.       if (a mestre e a escrava estão em contato)
12.            npares = npares + 1
13.            lslave (npares) = pinball escrava
14.            lmaster(npares) = pinball mestre
15.       endif
16.  continue loop das mestres
17.  continue loop das células
18.end loop i
```

Algoritmo 4.2 - Algoritmo convencional de células.

Considerando uma distribuição uniforme das *pinballs* mestres e escravas nas células, o tempo de processamento gasto na execução deste algoritmo é proporcional a estas quantidades e estimado por:

$$t \propto \frac{nviz * nmestre * nescravo}{NCEL} \qquad (4.20)$$

onde NCEL = NCX*NCY*NCZ é o número total de células e “nviz” é o número máximo de células vizinhas a cada célula (8 em 2D ou 26 em 3D).

Observa-se então na equação (4.20) que quanto maior o número de células utilizadas, a ordem de grandeza do tempo de processamento se aproxima de O(N). Entretanto existe um limite inferior para a dimensão das células, que deve ser calculado

de maneira que quaisquer duas *pinballs* em contato devem ocupar obrigatoriamente a mesma célula ou células vizinhas. Esta condição impõe então a seguinte restrição sobre a dimensão das células:

$$L_{cel} \geq 2 * R_{max} \qquad (4.21)$$

onde L_{cel} é o tamanho ótimo das células e R_{max} é o maior raio entre as *pinballs* presentes na análise.

Segundo este critério, o número de células nas direções X, Y e Z são, respectivamente, calculados por:

$$NCX = \frac{X_{max} - X_{min}}{2 * R_{max}} \qquad (4.22)$$

$$NCY = \frac{Y_{max} - Y_{min}}{2 * R_{max}} \qquad (4.23)$$

$$NCZ = \frac{Z_{max} - Z_{min}}{2 * R_{max}} \qquad (4.24)$$

Baseado no algoritmo convencional de células, algoritmo 4.2, (NEAL, 1989) propõe ainda um algoritmo semelhante, porém com uma proposta de maior eficiência, se utilizado em computadores de processamento vetorial. Este algoritmo é denominado Algoritmo de Células Otimizado (*Optimized Search Technique*) e é representado no algoritmo 4.3 a seguir.

```
1. do i = 1, nescravo
2.   loop na mesma célula e nas células vizinhas
3.        iflag = 0
4.        loop nas pinballs mestre nesta célula
5.             if (mestre e escrava em contato) iflag = 1
6.        continue loop das mestres
7.        if (iflag é diferente de 0)
8.             loop nas pinballs mestre nesta célula
9.                  if (mestre e escrava em contato)
10.                      npares = npares + 1
11.                      lslave (npares) = pinball escrava
12.                      lmaster(npares) = pinball mestre
13.                 endif
14.            continue loop das mestres
15.       endif
16.  continue loop das células
17. end loop i
```

Algoritmo 4.3 - Algoritmo de células otimizado.

A idéia principal deste algoritmo é conseguir maior eficiência na sua execução em computadores de processamento vetorial, onde o *loop* que inicia na linha 4 pode ser executado de modo totalmente vetorizado, enquanto o *loop* que inicia na linha 8, que também é utilizado no algoritmo convencional de células, não pode ser executado vetorialmente devido aos endereçamentos indiretos nos arranjos.

Apesar deste *loop* na linha 8 executar uma pesquisa redundante da *pinball* escrava contra as mestres de uma célula, a principal vantagem do algoritmo está no fato da pequena freqüência com que esta tarefa é executada. Quando se utiliza uma quantidade de células, na região retangular onde ocorre o contato entre os corpos, com as dimensões ótimas dadas pelas condições (4.22) - (4.24), é pouco provável que uma

pinball escrava entre em contato com mais de quatro ou cinco *pinballs* mestres em um dado passo de tempo. Assim, somente a pesquisa em quatro ou cinco células resulta na formação de um novo par mestre-escravo. Nas células restantes, que são em maior quantidade principalmente em problemas tridimensionais, o algoritmo tira proveito do fato da pesquisa não formar pares em contato, e assim executa esta tarefa em processamento vetorial, e consequentemente, com maior eficiência em termos de tempo de processamento.

4.5. Hierarquia de *Pinballs (Splitting Pinballs Technique)*

As implementações da técnica das *pinballs* para a simulação de problemas de contato em (QUARANTA, 1995, COSTA, 1997b) e no presente trabalho, comprovam as indicações de (NEAL, 1989, BELYTSCHKO, 1991a) sobre a simplicidade e robustez do algoritmo em problemas de razoável complexidade, incluindo casos de problemas com auto-contato.

Entretanto, entre algumas das limitações que puderam ser constatadas, podemos destacar duas: em problemas com grandes distorções dos elementos, como no caso da análise de impacto de alta velocidade da barra de Taylor, a associação de apenas uma *pinball* no centróide, pode não representar tão bem o elemento durante o tratamento do contato; uma outra situação, neste mesmo exemplo, está na necessidade de imposição dos vetores normais nos extremos da malha onde a geometria apresenta angulosidades muito acentuadas, de modo a se obter uma direção normal de contato que atenda ao comportamento esperado nesta simulação.

Uma alternativa importante para superar estas limitações, está em uma variação do algoritmo original, apresentada em (YEH, 1992, BELYTSCHKO, 1993) e denominada hierarquia de *Pinballs (Splitting Pinballs Technique).*

Esta técnica foi desenvolvida originalmente para a utilização de *pinballs* no tratamento de problemas de contato-impacto envolvendo elementos de casca (YEH, 1992), tendo sido implementada e testada aqui utilizando a implementação computacional do elemento quadrilátero linear de casca desenvolvido em SILVA (1997, 1999, 2002). Entretanto, a técnica de *splitting pinballs* pôde ser estendida e utilizada

também em elementos sólidos bidimensionais (quadriláteros lineares) e tridimensionais (tetraedros lineares), visando minimizar algumas daquelas poucas limitações apresentadas pelo algoritmo *pinball*.

4.5.1. Descrição Geral Aplicada ao Elemento Quadrilátero

Da mesma forma que na técnica das *pinballs* (seção 4.4.2), para cada elemento finito na superfície das malhas e com centróide no interior da região de contato é associada uma única *pinball*, operação referente ao nível n = 0 da hierarquia de refinamento da técnica de *splitting pinballs*. Esta *pinball* é adicionada a uma lista de *pinballs* mestres (corpo mestre) ou *pinballs* escravas (corpo escravo), conforme o caso, e deve circunscrever completamente o elemento.

A figura 4.6 ilustra esta *pinball* para o caso de um elemento quadrilátero linear. O seu raio e as coordenadas do seu centro são definidos pelas equações:

$$C_{RS}^{n} = \sum_{I=1}^{4} \mathbf{x}_I \; N_I \; (\xi_R^n , \eta_S^n) \qquad (4.25)$$

$$R = \max_{I} (\left\| \; \mathbf{x}_I \text{ - } \mathbf{C}^{n=0} \; \right\|) \qquad (4.26)$$

Onde “n” representa o nível de hierarquia de refinamento, $\mathbf{x}_I$ são as coordenadas nodais dos nós “I”, $\mathbf{N_I}$ são as funções de interpolação de cada nó do elemento, $\| \bullet \|$ representa o módulo de um vetor e ξ_R^n , η_S^n são as coordenadas naturais do centro da *pinball*. Estas coordenadas são calculadas por:

$$\xi_R^n = \frac{(2R-1)}{2^n} - 1 \qquad \eta_S^n = \frac{(2S-1)}{2^n} - 1 \qquad 1 \leq R,S \leq 2^n \qquad (4.27)$$

Utilizando estas expressões, observa-se que as coordenadas do centro da *pinball* (nível de refinamento n = 0) são calculadas a partir da média aritmética das coordenadas dos nós do elemento e o seu raio é calculado como a maior das distâncias entre cada nó e o centróide do elemento.

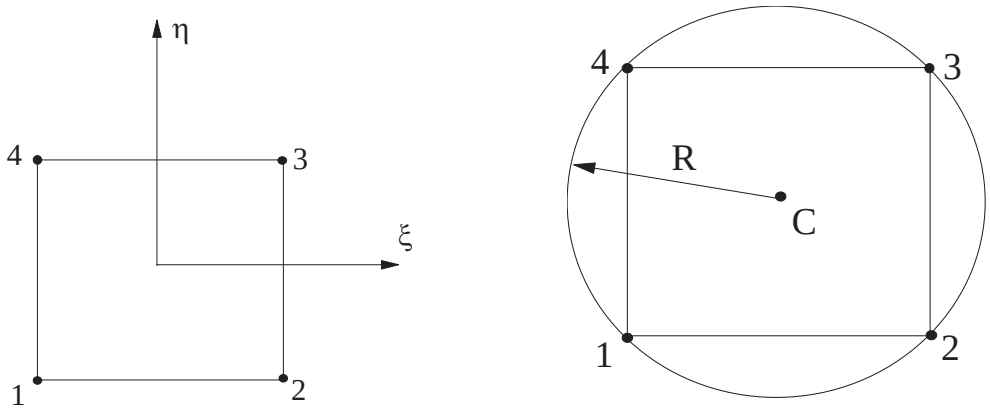


Figura 4.6 - Definição da *pinball* associada ao elemento.

Uma vez associada e definida a *pinball* nos elementos selecionados, a próxima tarefa consiste em uma primeira pesquisa para determinar pares de *pinballs* mestre-escrava em contato, utilizando para isso um algoritmo de busca apropriado, como por exemplo o algoritmo convencional de células ou o algoritmo de células otimizado, da mesma forma que apresentada em (NEAL, 1989, YEH, 1992) e na seção 4.4.2.

Estes pares de *pinballs* mestre-escrava formados indicam apenas os elementos que são candidatos ao contato, ou seja, elementos que estão bastante próximos um do outro ou que já estão em contato. Para estes elementos, uma segunda pesquisa mais refinada é o que vai determinar quais os elementos que estão efetivamente em contato.

Para efetuar esta segunda pesquisa, é necessário gerar um outro conjunto de *pinballs* refinadas, uniformemente distribuídas nos elementos, chamadas *splitting pinballs*. Seguindo uma sugestão apresentada em YEH (1992), no tratamento de problemas de contato-impacto entre elementos de casca, este conjunto de *splitting pinballs* devem possuir um diâmetro com valor semelhante à espessura do elemento. O autor sugere ainda que esta meta pode ser alcançada com excelente aproximação quando se utiliza de imediato o nível de refinamento n = 3, o que resulta em uma distribuição de 64 *splitting pinballs* em cada elemento quadrilátero selecionado. Este procedimento é ilustrado no exemplo da figura 4.7, tendo sido adotado nos experimentos realizados de maneira bastante satisfatória.

As coordenadas dos centros dessas *splitting pinballs* são determinadas utilizando as equações (4.25) - (4.27) e os seus raios são determinados por:

$$r_{AB} = \max(r_A, r_B), \qquad 1 \leq A, B \leq 2^n \tag{4.28}$$

$$r_A = \frac{\left\| \mathbf{C}^n_{A1} - \mathbf{C}^n_{A2^n} \right\|}{2^{n+1} - 2} \tag{4.29}$$

$$r_B = \frac{\left\| \mathbf{C}^n_{1B} - \mathbf{C}^n_{2^n B} \right\|}{2^{n+1} - 2} \tag{4.30}$$

Desta forma, as *splitting pinballs* são sempre distribuídas uniformemente e apresentam uma configuração em que preenchem o elemento o máximo possível, minimizando os espaços vazios.

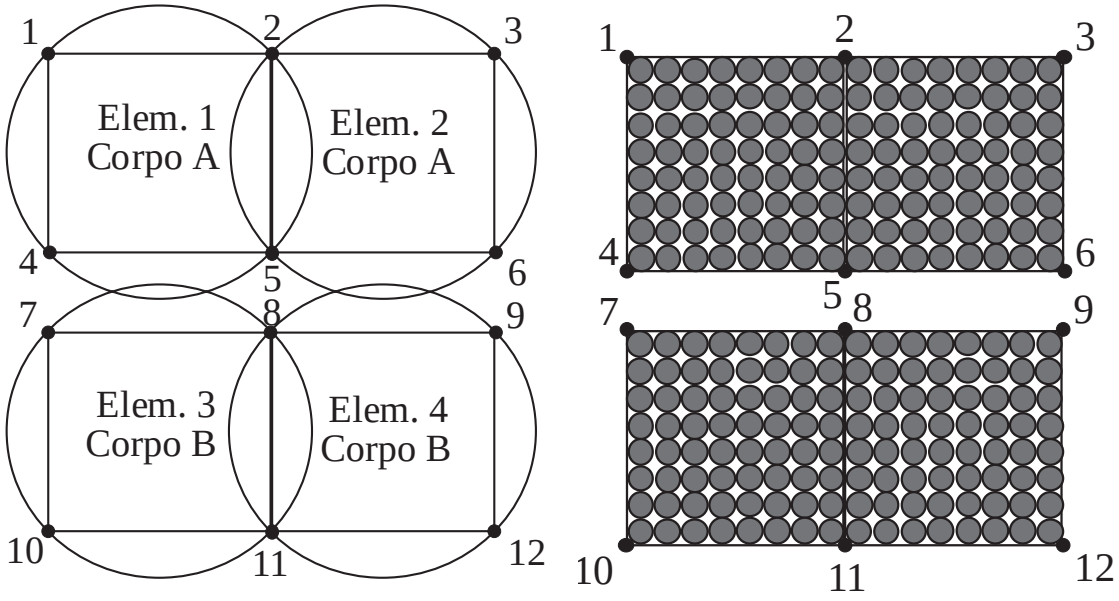


Figura 4.7 – Exemplo de *pinballs* e *splitting pinballs*.

Em pares de *splitting pinballs* em contato, as forças de penalização aplicadas nos seus centros, necessárias para eliminar a interpenetração são calculadas por (YEH, 1992):

$$\mathbf{F}_C = \min(f_1, f_2) \tag{4.31}$$

$$f_1 = \frac{\rho_A \, \rho_B \, (r_A)^3 (r_B)^3}{\rho_A (r_A)^3 + \rho_B (r_B)^3} \frac{\dot{g}}{\Delta t}, \quad \text{if} \quad \dot{g} > 0 \tag{4.32}$$

$$f_2 = \frac{\mu_A \mu_B}{\mu_A + \mu_B} \sqrt{\frac{r_A \, r_B}{r_A + r_B}} \; g^{3/2} \tag{4.33}$$

onde ρ é a densidade, μ é a constante de Lamé, g é o valor da interpenetração e $\dot{g}$ é a velocidade relativa do par de *splitting pinballs*.

A força f_1 é calculada como um limite superior para a força de penalização, e de modo semelhante à equação (4.13), é uma condição de restrição que garante que a força $\mathbf{F}_C$ apresente um valor satisfatório e que não acrescenta energia ao sistema.

A força calculada no centro de cada *splitting pinball* é acumulada nos pontos nodais do elemento através da interpolação:

$$\mathbf{F}_{cI} = \sum_{I=1}^{4} \mathbf{F}_C \; N_I \; (\xi_A^n, \eta_B^n) \tag{4.34}$$

O algoritmo 4.4 resume as principais tarefas executadas quando se utiliza a técnica de *splitting pinballs* em cada passo de tempo do algoritmo de integração explícita.

```
1. do i = 1, nel

2.   Associar uma pinball a cada elemento finito
   nas superfícies das malhas e com centróide no
   interior da região de contato.

3. enddo

4. do j = 1, npinballs

5.   Pesquisa entre as pinballs mestre e escravas
   para indicar pares de elementos candidatos ao
   contato.

6. enddo

7. do k = 1, npair

8.   Refinar as pinballs em splitting pinballs no
   nível de refinamento n = 3

9.   Pesquisar entre as splitting pinballs mestre
   e escravas e aplicar forças de penalização nos
   pares em contato.

10.  Acumular as força de penalização nos nós dos
   elementos.

11.  enddo
```

Algoritmo 4.4 - O algoritmo de *splitting pinballs*.

4.5.2. Aplicação ao Elemento Triangular

Assim como no caso dos elementos quadriláteros, o número de *splitting pinballs* em cada nível "n" de refinamento é igual a 2^{2n} também no elemento triangular linear.

Para efetuar a geração e distribuição das *splitting pinballs* no elemento triangular linear com conectividades nodais I-J-M, as coordenadas dos seus centros são calculadas em função das coordenadas de área dos três vértices que definem o triângulo auxiliar em cujo centróide estará localizada a *splitting pinball* .

As expressões utilizadas para o cálculo das coordenadas de área dos centros, coordenadas cartesianas dos centros e do raio das de *splitting pinballs* são respectivamente:

$$\xi^{n}_{K.RS} = \frac{1}{3}\left(\xi^{n}_{K.I'} + \xi^{n}_{K.J'} + \xi^{n}_{K.M'}\right), \quad K = I, J, M \qquad (4.35)$$

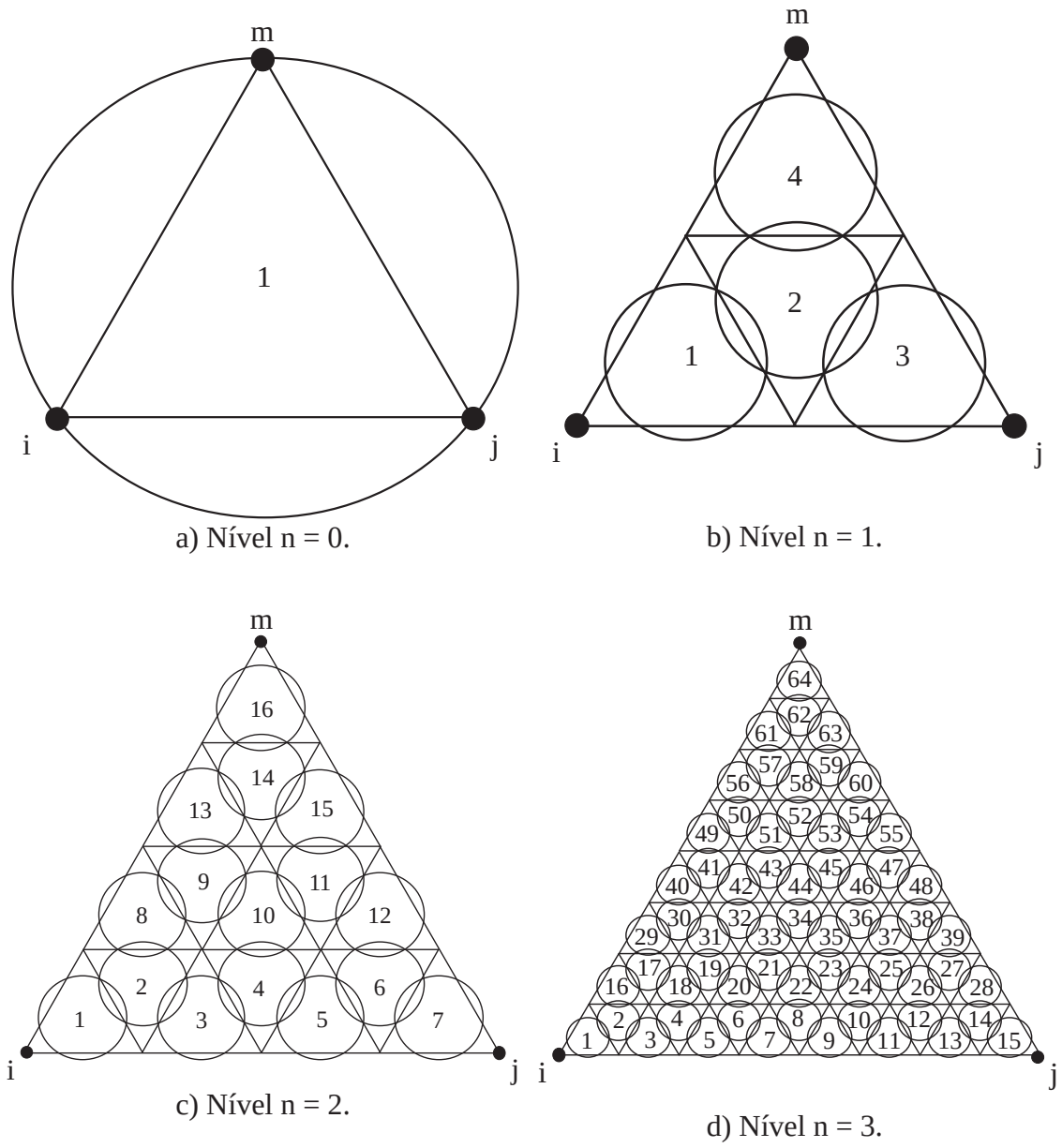
$$\mathbf{C}^{n}_{RS} = \mathbf{x}_I \xi^{n}_{I.RS} + \mathbf{x}_J \xi^{n}_{J.RS} + \mathbf{x}_M \xi^{n}_{M.RS} \qquad (4.36)$$

$$R^{n}_{RS} = \sqrt{\frac{A}{4^n \pi}}, \; n = 1, 2, 3 \qquad (4.37)$$

onde ξ^n são coordenadas de área, que se confundem com as funções de interpolação, I', J', M' são os vértices do triângulo auxiliar cujo centróide determina o centro da *splitting pinball*, $\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_J, \mathbf{x}_M$ são as coordenadas cartesianas dos nós que definem o elemento triangular e "A" é a área do elemento. A notação para coordenadas de área $\xi^{n}_{K.RS}$ $(K = I, J, M)$ representa as três coordenadas de área da *splitting pinball* RS, enquanto $\xi^{n}_{K.I'}$ representa as três coordenadas de área do vértice I' do triângulo auxiliar. Desta forma, as *splitting pinballs* ficam sempre localizadas no centróide dos triângulos auxiliares e os seus raios são iguais em um mesmo nível de refinamento, com um valor calculado de forma que a área do elemento seja igual à soma das suas áreas.

Para o nível de refinamento n = 0, ilustrado na figura 4.8a, a expressão utilizada para o cálculo do raio é semelhante à equação (4.26).

A figura 4.8 ilustra a configuração das *splitting pinball* no elemento triangular em cada um dos níveis de hierarquia n = 0, 1, 2 e 3. Para a criação dos triângulos auxiliares, os seus vértices são localizados exatamente na metade dos lados do elemento, como ilustra a figura 4.8b. No nível seguinte, novos triângulos auxiliares são criados a partir de novos vértices nos pontos médios dos lados dos triângulos auxiliares anteriores, e assim sucessivamente.



a) Nível n = 0.

b) Nível n = 1.

c) Nível n = 2.

d) Nível n = 3.

Figura 4.8 – Definição das *splitting pinballs* no elemento triangular linear.

Utilizando esta metodologia e as equações (4.35) – (4.37), obtém-se as coordenadas de área das *splitting pinballs*, para o nível de refinamento n = 1, apresentadas na tabela 4.1 e para o nível de refinamento n = 2 as apresentadas na tabela 4.2. Para o nível de refinamento n = 3, as coordenadas de área estão listadas no apêndice A.

Splitting Pinballs	ξ_i	ξ_j	ξ_m
1	4/6	1/6	1/6
2	2/6	2/6	2/6
3	1/6	4/6	1/6
4	1/6	1/6	4/6

Tabela 4.1 – Coordenadas de área das *splitting pinballs* no elemento triangular (n = 1).

Splitting Pinballs	ξ_i	ξ_j	ξ_m
1	10/12	1/12	1/12
2	8/12	2/12	2/12
3	7/12	4/12	1/12
4	5/12	5/12	2/12
5	4/12	7/12	1/12
6	2/12	8/12	2/12
7	1/12	10/12	1/12
8	7/12	1/12	4/12
9	5/12	2/12	5/12
10	4/12	4/12	4/12
11	2/12	5/12	5/12
12	1/12	7/12	4/12
13	4/12	1/12	7/12
14	2/12	2/12	8/12
15	1/12	4/12	7/12
16	1/12	1/12	10/12

Tabela 4.2 – Coordenadas de área das *splitting pinballs* no elemento triangular (n = 2).

4.5.3. Aplicação ao Elemento Tetraedro

Para a adaptação e utilização do algoritmo das *splitting pinballs* no elemento sólido tetraédrico linear, as expressões para cálculo das coordenadas de volume dos seus centros, são semelhantes às equações (4.35) – (4.37), utilizadas no caso dos elementos triangulares. Para determinar essas coordenadas, é necessário agora utilizar o conceito de tetraedros auxiliares, cujos vértices são localizados nos pontos médios das arestas do elemento, e seguir uma metodologia de construção semelhante à utilizada na seção 4.5.2.

No caso do elemento tetraédrico, assim como em qualquer outro elemento sólido tridimensional, as *splitting pinballs* não são distribuídas em todo o interior do elemento. É necessário apenas efetuar a distribuição em um plano paralelo ao plano de cada uma das faces do elemento. A figura 4.9 ilustra o convenção adotada para a numeração das *splitting pinballs*.

A figura 4.10 ilustra a configuração das *splitting pinball* no elemento tetraédrico em cada um dos níveis da hierarquia de refinamento n = 0, 1, 2 e 3. Para a criação dos tetraedros auxiliares, os seus vértices são localizados exatamente na metade dos lados do elemento e um dos seus vértices é obrigatoriamente um dos nós (I, J, M, ou P) do elemento. No nível seguinte, novos tetraedros auxiliares são criados a partir de novos vértices nos pontos médios dos lados dos tetraedros auxiliares anteriores, e assim sucessivamente. Além disso, para a determinação das *splitting pinballs* nas faces é necessário utilizar propriedades como a definida pela equação (4.36), que determina que as coordenadas de área/volume de uma *splitting pinball* podem ser calculadas como a média aritmética de outras três *splitting pinballs* eqüidistantes àquela.

É importante observar ainda nas figuras figura 4.9 e na figura 4.10 que as *splitting pinballs* localizadas ao longo das arestas do elemento são comuns a duas faces.

As expressões utilizadas para o cálculo das coordenadas de volume dos centros, coordenadas cartesianas dos centros e do raio das de *splitting pinballs* são respectivamente:

$$\xi^{n}_{K.RS} = \frac{1}{4}\left(\xi^{n}_{K.I'} + \xi^{n}_{K.J'} + \xi^{n}_{K.M'} + \xi^{n}_{K.P'}\right), \quad k = I, J, M, P \tag{4.38}$$

$$\mathbf{C}^{n}_{RS} = \mathbf{x}_{I}\,\xi^{n}_{I.RS} + \mathbf{x}_{J}\,\xi^{n}_{J.RS} + \mathbf{x}_{M}\,\xi^{n}_{M.RS} + \mathbf{x}_{P}\,\xi^{n}_{P.RS} \tag{4.39}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V^{e}}{4\pi * \text{nsplitting}}}\ , \text{nsplitting} = 8, 44, 212 \tag{4.40}$$

onde ξ^{n} são coordenadas de volume, I-J-M-P são os vértices do tetraedro cujo centróide coincide com o centro da *splitting pinball*, $\mathbf{x}_I$, $\mathbf{x}_J$, $\mathbf{x}_M$ e $\mathbf{x}_P$ são as coordenadas cartesianas dos nós que definem o elemento tetraédrico. A variável “nsplitting” indica o número de *splitting pinballs* que resulta em cada nível de refinamento.

A notação para coordenadas de volume $\xi^{n}_{K.RS}$ (K = I, J, M, P) representa as quatro coordenadas de volume da *splitting pinball* RS, enquanto $\xi^{n}_{K.I'}$ representa as quatro coordenadas de volume do vértice I' do tetraedro auxiliar. Desta forma, as *splitting pinballs* ficam sempre localizadas no centróide dos tetraedros auxiliares e os seus raios são iguais, em um mesmo nível de refinamento, com um valor calculado de forma que o volume do elemento seja igual à soma dos seus volumes.

Para o nível de refinamento n = 0, ilustrado na figura 4.10a, a expressão utilizada para o cálculo do raio é semelhante à equação (4.26).

Utilizando a metodologia apresentada para a construção dos tetraedros auxiliares e as equações (4.38) – (4.40), obtém-se as coordenadas de volume das *splitting pinballs*, para o nível de refinamento n = 1 apresentadas na tabela 4.3. Para o níveis de refinamento n = 2 e n = 3, as coordenadas de volume estão listadas em tabelas no apêndice B.

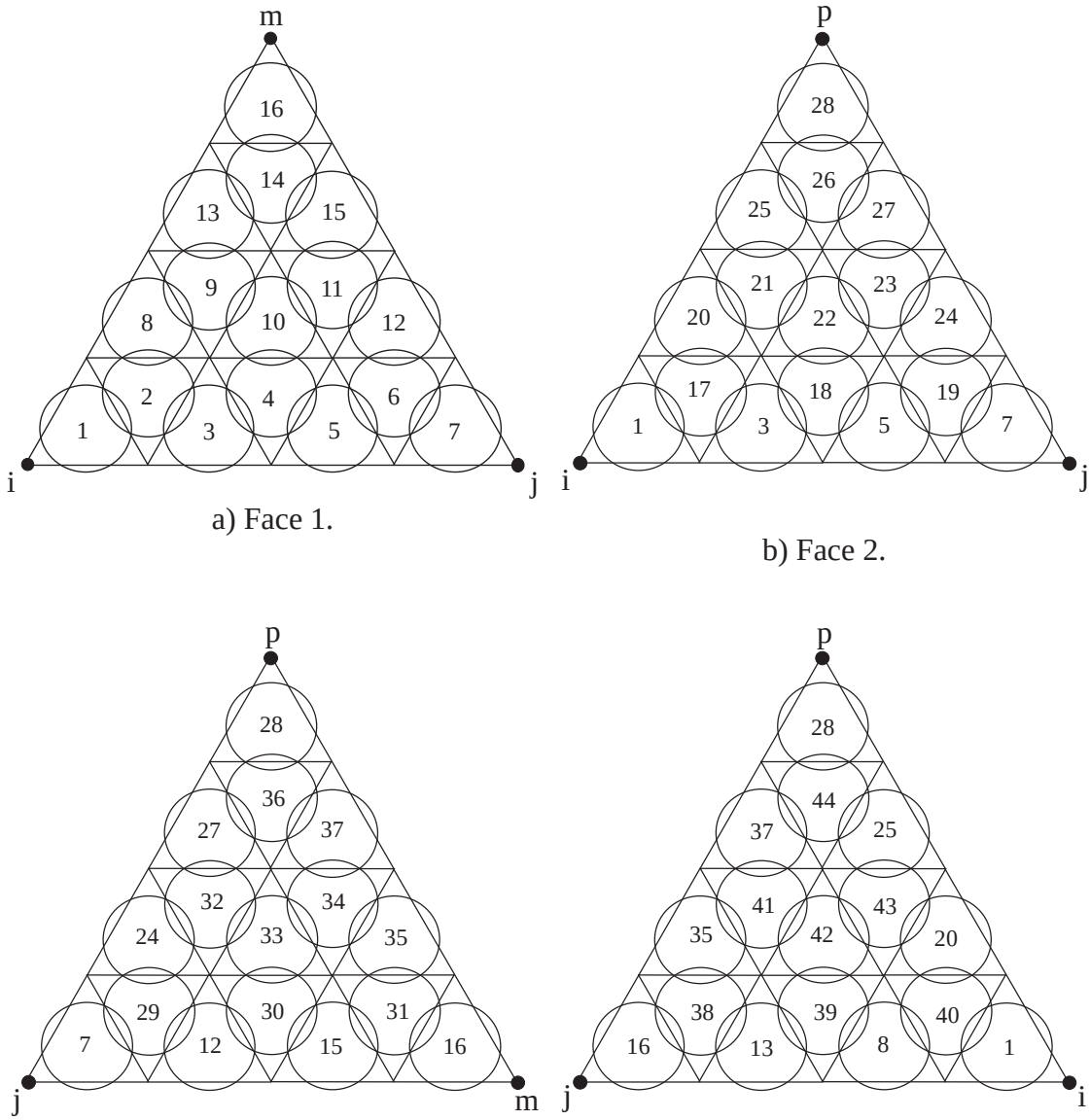
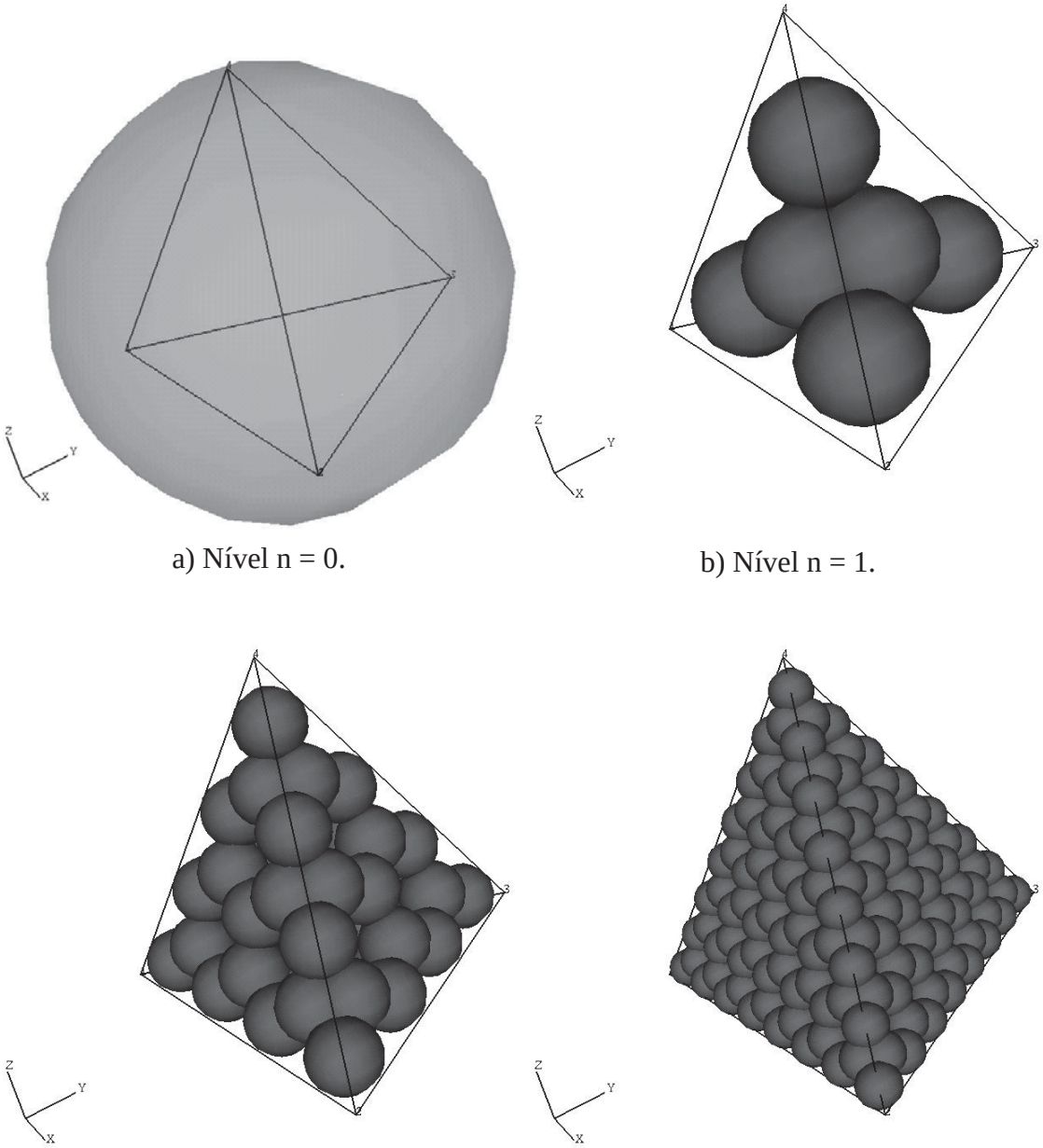


Figura 4.9 – Convenção de numeração das *splitting pinballs* no tetraedro (n = 2).



a) Nível n = 0.

b) Nível n = 1.

c) Nível n = 2.

d) Nível n = 3.

Figura 4.10 – Definição das *splitting pinballs* no elemento tetraédrico linear.

Splitting Pinballs	ξ_i	ξ_j	ξ_m	ξ_p
1	15/24	3/24	3/24	3/24
2	3/24	15/24	3/24	3/24
3	7/24	7/24	7/24	3/24
4	3/24	3/24	15/24	3/24
5	7/24	7/24	3/24	7/24
6	3/24	3/24	3/24	15/24
7	3/24	7/24	7/24	7/24
8	7/24	3/24	7/24	7/24

Tabela 4.3 – Coordenadas de volume das *splitting pinballs* no elemento tetraédrico (n = 1).

Capítulo 5

Exemplos

5.1. Avaliação da Técnica de Busca

Para a análise de desempenho dos diferentes algoritmos de busca de *pinballs* em contato apresentados no capítulo 4, NEAL (1989) propõe o problema modelo estático bidimensional representado na figura 5.1, que pode ser interpretado como um projétil, assinalado como corpo escravo, penetrando em um alvo, assinalado como corpo mestre. Este mesmo problema é reproduzido aqui com o objetivo de testar as implementações dos algoritmos 4.1, 4.2 e 4.3 e aferir a eficiência computacional das implementações dos algoritmos de células.

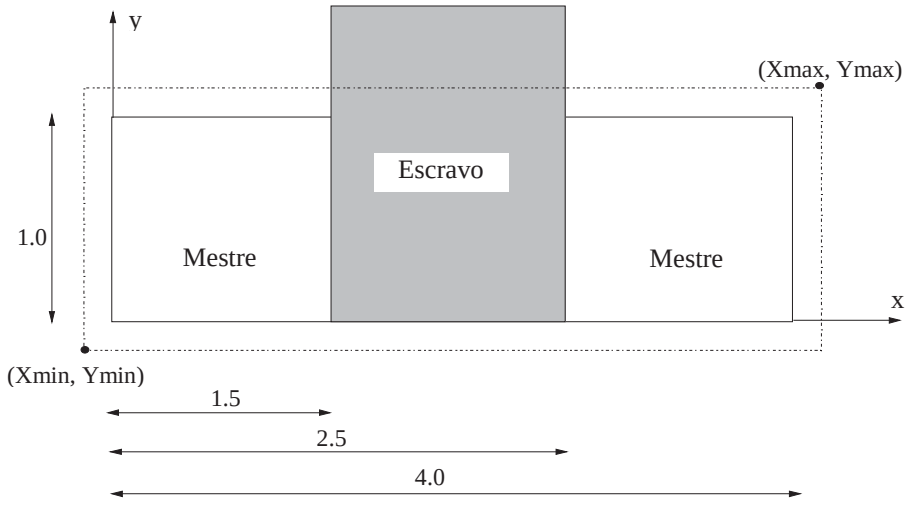


Figura 5.1 - Problema modelo.

As dimensões dos domínios dos corpos mestre e escravo são definidas na tabela 5.1 em função do parâmetro ***e***, que permite controlar a sobreposição dos domínios mestre e escravo e, consequentemente, interferir na quantidade de pares de *pinballs* mestre-escravas formados.

Neste problema, onde o objetivo é testar o desempenho dos algoritmos de busca de *pinballs* em contato, não é utilizada nenhuma discretização de elementos finitos. As coordenadas e os raios das *pinballs* são geradas randomicamente, sendo distribuídas de modo a preencher todo o domínio.

Domínio Escravo	Domínio Mestre	Domínio das Células
$1.5 - e \leq x \leq 2.5 + e$ $0.0 \leq y \leq 1.0 + e$	$0.0 \leq x \leq 1.5 + e$ $0.0 \leq y \leq 1.0$ $2.5 - e \leq x \leq 4.0$	$0.0 \leq x \leq 4.0$ $0.0 \leq y \leq 1.0 + e$

Tabela 5.1 – Definição dos domínios do problema modelo.

Foram testadas cinco quantidades diferentes de *pinballs* geradas, variando de 6000 a 30000 no total e divididas em grupos de *pinballs* mestres e escravas de acordo com a tabela 5.2.

Em cada uma das cinco quantidades de *pinballs* geradas aleatoriamente, a busca dos pares em contato utilizando os algoritmos de células convencional e otimizado, empregou quatro diferentes estruturas de células, onde a quantidade total de células varia de 1 a 400, como mostra a tabela 5.3.

Na geração aleatória das *pinballs*, o valor dos raios varia entre 0.01 e 0.03 e para o parâmetro de sobreposição ***e*** foi atribuído o valor 0.2.

	***Pinballs* Mestres**	***Pinballs* Escravas**	**Total**
Caso 1	4000	2000	6000
Caso 2	8000	4000	12000
Caso 3	12000	6000	18000
Caso 4	16000	8000	24000
Caso 5	20000	10000	30000

Tabela 5.2 - Quantidades de *pinballs* geradas.

Casos	**Estruturas de Células**	**N. de Células**
Cel 1	1 x 1	1
Cel 2	5 x 5	25
Cel 3	10 x 10	100
Cel 4	20 x 20	400

Tabela 5.3 - Estruturas de células utilizadas em cada caso.

Para ilustrar o processo de geração aleatória das *pinballs*, a figura 5.2 mostra um exemplo com 10 *pinballs* escravas e 20 *pinballs* mestres, com raios variando entre 0.3 e 0.4, mas que não foram testadas em algoritmos de busca. As diferentes cores representam *pinballs* com raio de valor semelhante.

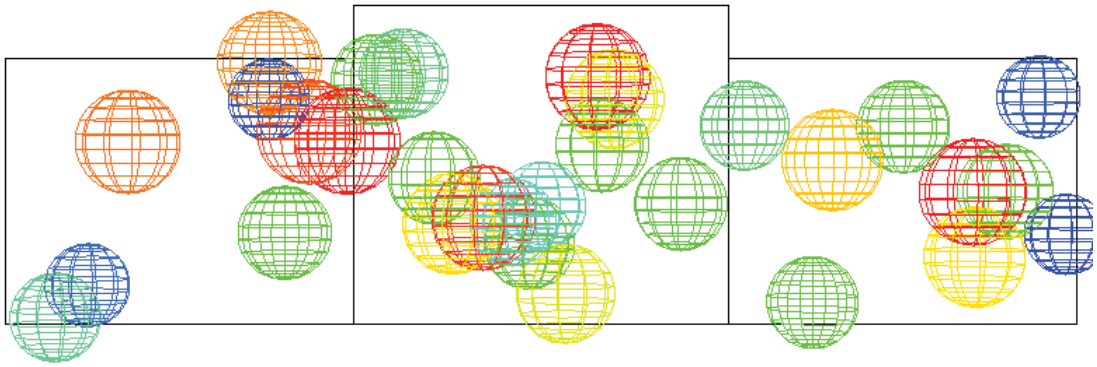


Figura 5.2 - Distribuição aleatória de 10 *pinballs* escravas e 20 *pinballs* mestres.

A figura 5.3 ilustra a configuração de distribuição das 2000 *pinballs* escravas e 4000 *pinballs* mestres, que corresponde ao caso 1 da tabela 5.2 e é a menor quantidade de *pinballs* utilizada nos testes.

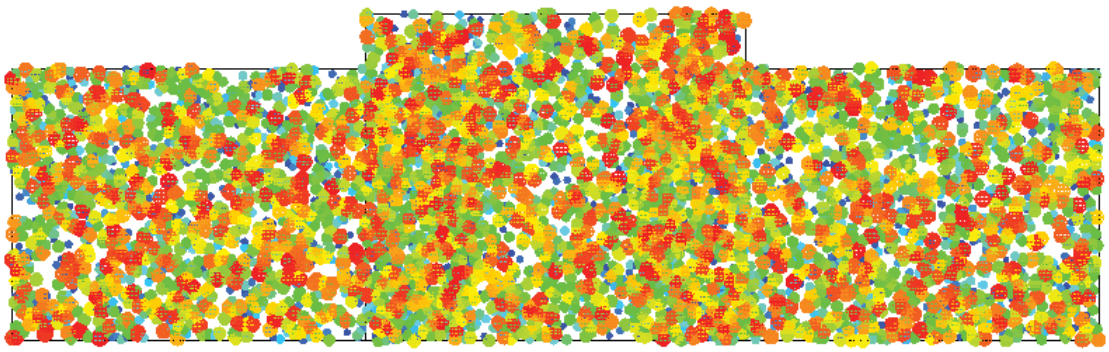


Figura 5.3 - Distribuição de 2000 *pinballs* escravas e 4000 *pinballs* mestres.

As figuras 5.4 e 5.5 ilustram o caso 5 da tabela 5.2, a maior quantidade de *pinballs* utilizada nos testes, onde foram geradas 10000 *pinballs* escravas e 20000 *pinballs* mestres. Devido à grande quantidade de *pinballs* deste caso, para facilitar a visualização, a figura 5.4 apresenta apenas a configuração dos centros das *pinballs*, representados através de pontos. Nesta figura, nota-se de maneira bastante acentuada, uma densidade maior dos centros das *pinballs* na região de sobreposição dos domínios mestre e escravo, controlada pelo parâmetro ***e*** da tabela 5.1. Na figura 5.5 é representada a configuração completa dessas 30000 *pinballs*.

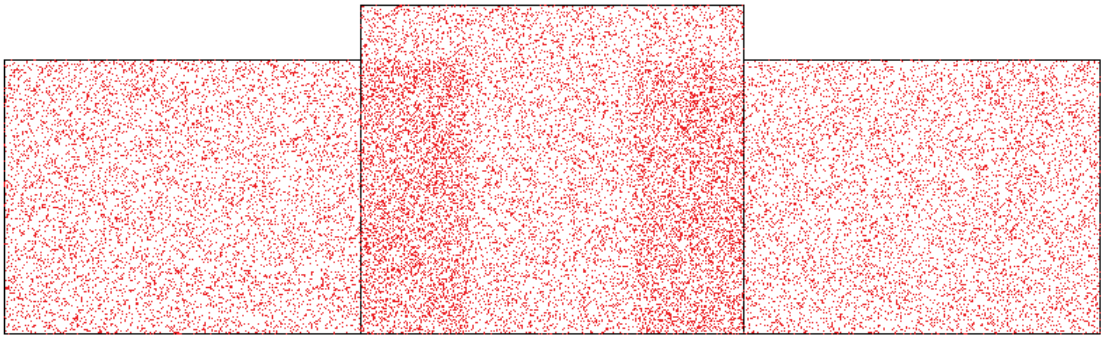


Figura 5.4 - Centros das 10000 *pinballs* escravas e 20000 *pinballs* mestres.

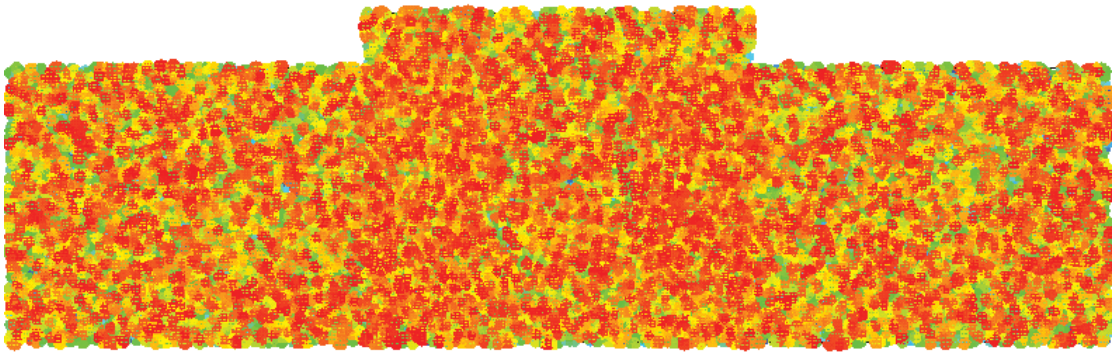


Figura 5.5 - Distribuição das 10000 *pinballs* escravas e 20000 *pinballs* mestres.

Nos cinco casos testados da tabela 5.2 os tempos de processamento gastos pelos algoritmos utilizando uma célula e pelo algoritmo força bruta são equivalentes. Sendo assim, os resultados apresentados a seguir se referem apenas aos algoritmos de células.

Na tabela 5.4, são apresentados os tempos de processamento do algoritmo convencional de células (algoritmo 4.2) para as diferentes quantidades de células definidas na tabela 5.3 e diferentes quantidades de *pinballs* definidas na tabela 5.2. Os tempos de processamento são dados em segundos de CPU, e os testes executados no CRAY J-90 do NACAD/COPPE/UFRJ em uma única CPU com processamento vetorial. As quantidades entre parênteses se referem à quantidade de pares mestre-escravo formados e as quantidades entre colchetes se referem ao ganho relativo (*Speedup*) ao uso de uma única célula (Cel 1, tabela 5.3).

Na tabela 5.5 são apresentados os resultados equivalentes ao algoritmo de células otimizado (algoritmo 4.3).

	ESTRUTURA DE CÉLULAS			
PINBALLS	1 x 1	5 x 5	10 x 10	20 x 20
6000 (5650 pares)	1.9481 [1.00]	0.6999 [2.78]	0.2566 [7.59]	0.2175 [8.96]
12000 (22101 pares)	7.6937 [1.00]	2.4942 [3.08]	0.7140 [10.78]	0.3649 [21.08]
18000 (51745 pares)	17.5653 [1.00]	5.5825 [3.15]	1.4931 [11.76]	0.5819 [30.19]
24000 (92874 pares)	30.9606 [1.00]	9.6760 [3.20]	2.4575 [12.60]	0.8826 [35.08]
30000 (143656 pares)	48.4759 [1.00]	14.9104 [3.25]	3.7593 [12.89]	1.2849 [37.73]
(...) = N. de Pares [...] = *Speedup*	Tempo de CPU (s)			

Tabela 5.4 - Resultados e desempenho do algoritmo convencional de células.

	ESTRUTURA DE CÉLULAS			
PINBALLS	1 x 1	5 x 5	10 x 10	20 x 20
6000 (5650 pares)	2.8095 [1.00]	0.6459 [4.35]	0.2089 [13.45]	0.1392 [20.18]
12000 (22101 pares)	11.1241 [1.00]	2.4134 [4.61]	0.6645 [16.74]	0.3150 [35.32]
18000 (51745 pares)	25.6122 [1.00]	5.4711 [4.68]	1.4312 [17.90]	0.5506 [46.52]
24000 (92874 pares)	45.4036 [1.00]	9.6820 [4.69]	2.4178 [18.78]	0.8914 [50.94]
30000 (143656 pares)	70.6425 [1.00]	14.9005 [4.74]	3.7504 [18.84]	1.3279 [53.20]
(...) = N. de Pares [...] = Speedup	Tempo de CPU (s)			

Tabela 5.5 - Resultados e desempenho do algoritmo de células otimizado.

Nas figuras 5.6 e 5.7 são plotados os gráficos em escala logarítmica com os resultados apresentados nas tabelas 5.4 e 5.5. Com relação à ordem de grandeza do tempo de processamento, os gráficos confirmam as estimativas apresentadas nas seções 4.4.1 e 4.4.2.

Utilizando apenas uma célula, o que é equivalente a utilizar o algoritmo força bruta, o tempo de processamento é de ordem quadrática. Mas, à medida que se utilizam estruturas com número crescente de células, a ordem quadrática tende a uma ordem linear e praticamente a alcança quando se utilizam quantidades próximas à estrutura ótima de células definida nas equações (4.22) – (4.24).

Nos gráficos em escala logarítmica da figura 5.8, apresenta-se uma comparação entre os resultados dos algoritmos de células convencional e otimizado e observa-se uma alternância em relação ao melhor desempenho de cada um nas diferentes situações. Entretanto, como se observa nas tabelas 5.4 e 5.5, o algoritmo otimizado apresenta, na maior parte dos casos, menores tempos de processamento e um ganho relativo maior.

Uma observação que é importante destacar, diz respeito a um invariante na abordagem pelos algoritmos. Para um mesmo grupo de *pinballs*, qualquer que seja o número de células utilizadas, os pares mestre-escravo encontrados são exatamente os mesmos.

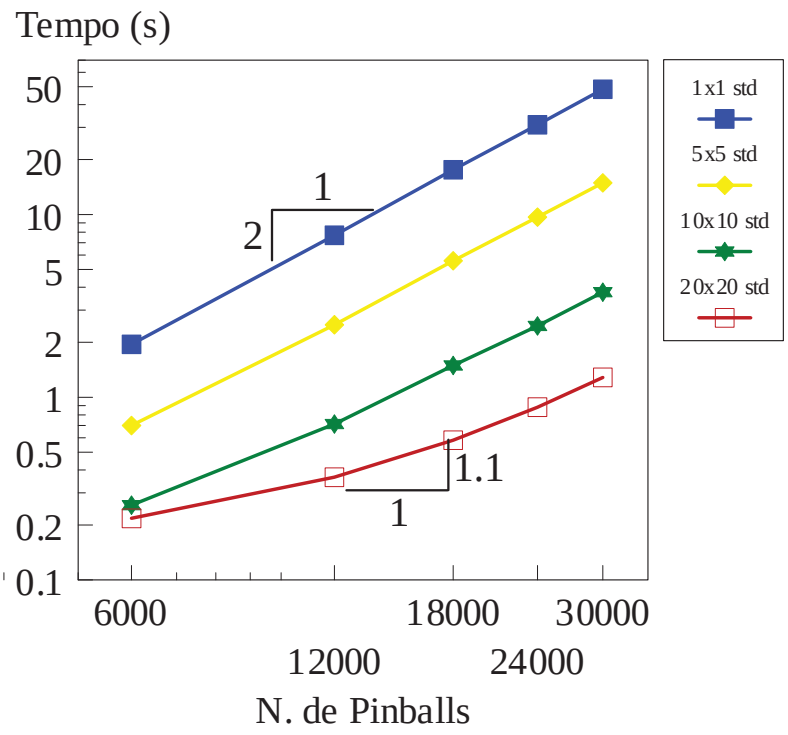


Figura 5.6 - Efeito da estrutura de células no algoritmo convencional.

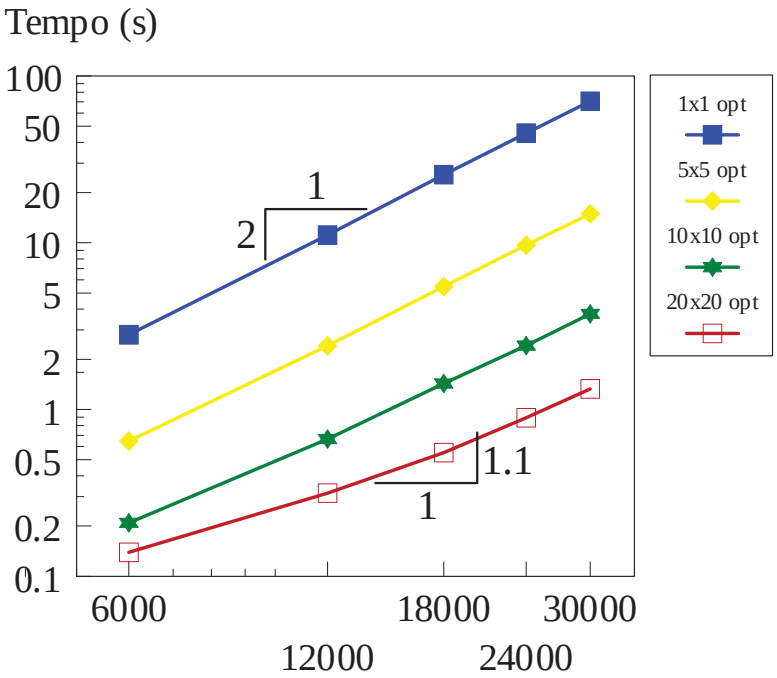


Figura 5.7 - Efeito da estrutura de células no algoritmo otimizado.

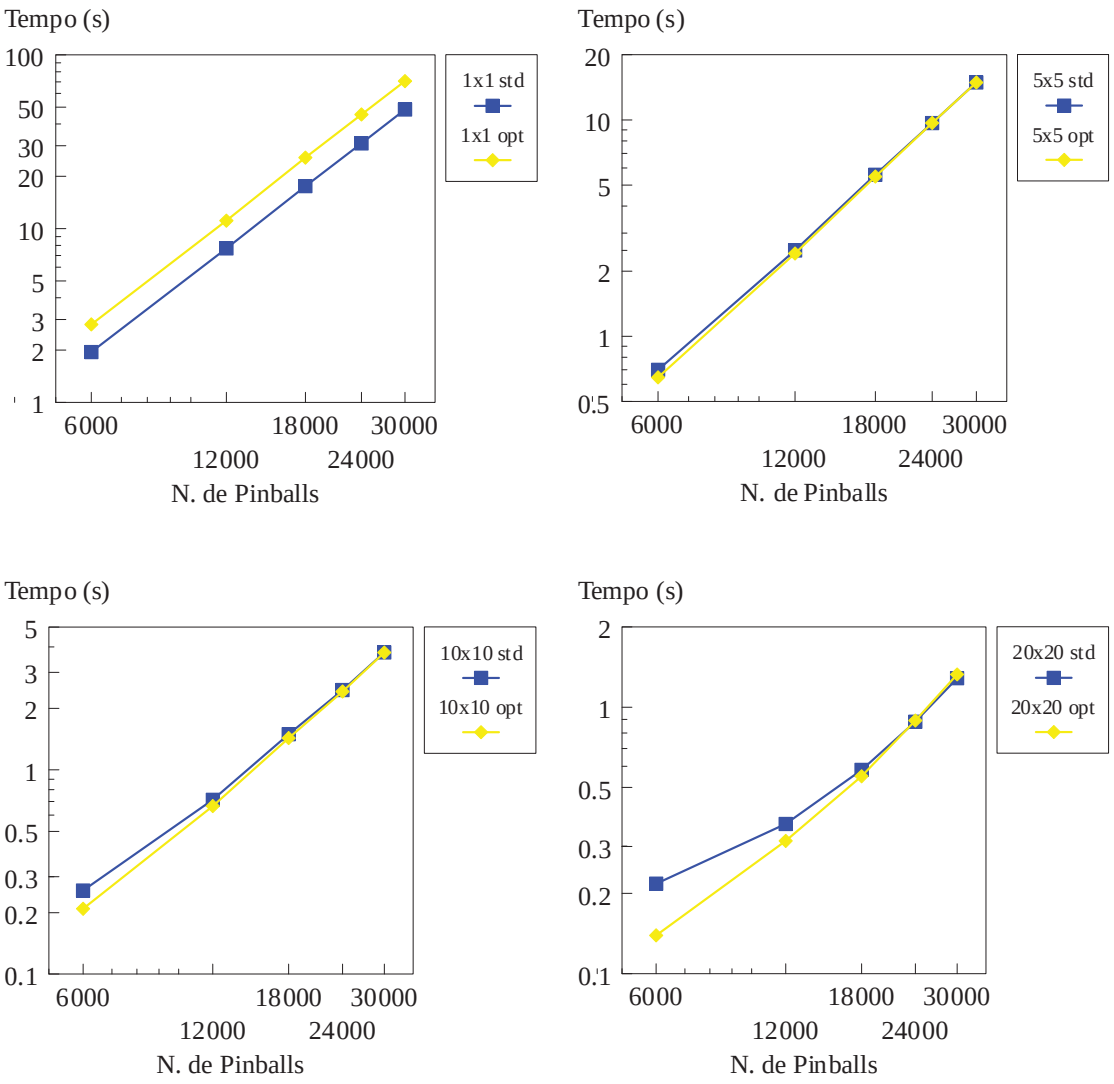


Figura 5.8 - Comparação entre os algoritmos de células.

5.2. Impacto Simétrico Entre Dois Tubos Idênticos (*Pipe Whip*)

Neste exemplo e no seguinte são apresentadas aplicações do algoritmo de *splitting pinballs* na análise de problemas de impacto entre estruturas laminares. Para tal, o algoritmo foi testado no programa de análise não-linear transiente explícita de cascas de SILVA (1997, 1999).

O primeiro problema consiste na colisão entre dois tubos idênticos, lançados um contra o outro com velocidades iguais e contrárias, conforme ilustra a figura 5.9. Este problema e descrito e analisado nas referências (YEH, 1992, ZHONG, 1993) e é reproduzido aqui, ilustrando a versatilidade e robustez da implementação do algoritmo de *splitting pinball* em elementos quadriláteros bilineares de casca.

Os dois tubos possuem as mesmas características físicas e geométricas. A malha de elementos finitos utilizada é apresentada na figura 5.10 e consiste de 192 elementos com 229 nós, resultando em um total de 1248 equações atualizadas em 1000 passos de tempo com incremento Δt = 7.0E-6 s.

Uma observação importante sobre este exemplo é o fato do número de elementos em contato aumenta gradativamente como conseqüência das grandes deformações sofridas pelos tubos durante uma primeira fase da análise. Em uma segunda fase, quando ocorre o rebote dos tubos, ocorre exatamente o contrário, com a redução dos pares de elementos em contato. Este fato comprova a necessidade do uso de algoritmos robustos para a determinação automática dos elementos envolvidos no fenômeno, tarefa que é realizada adequadamente pelo algoritmo de *splitting pinballs*.

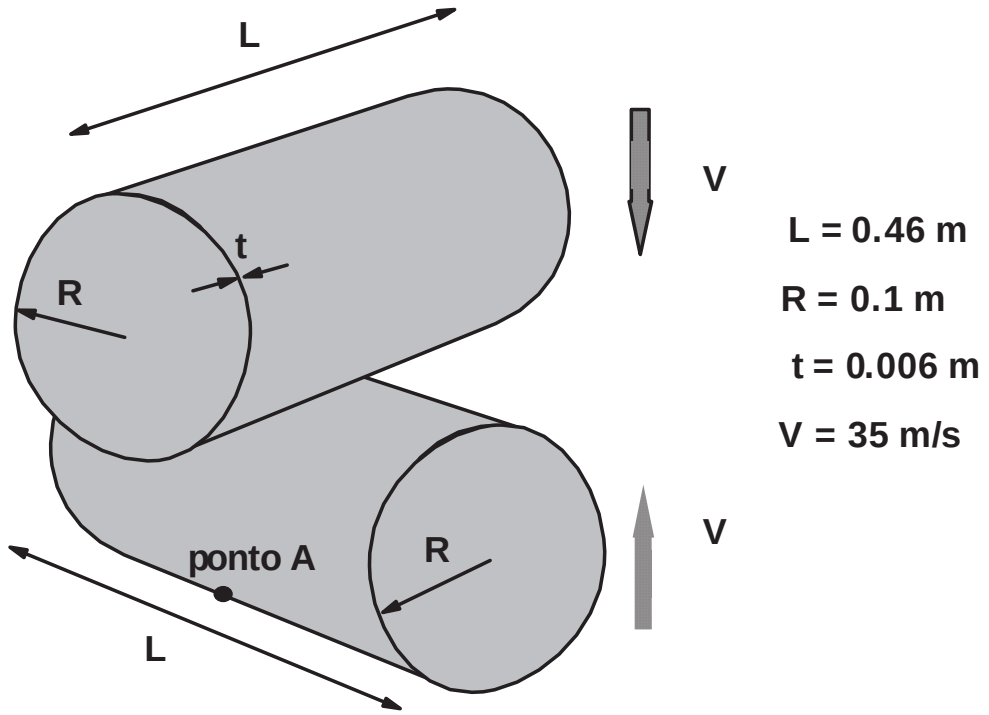


Figura 5.9 – Definição do problema dos dois tubos idênticos.

As propriedades físicas do material dos tubos são: Módulo de elasticidade E = 2.5 E+10 N/m^2, coeficiente de Poisson ν = 0.3, densidade ρ = 7640 Kg/m^3, tensão de escoamento σ_y = 1.0 E+8 N/m^2 e módulo tangente 2.3 E+8 N/m^2.

A deformada final da malha é mostrada também na figura 5.10. A representação das *pinballs* no início da análise é mostrada nas figuras 5.11 e a ilustração da configuração das *splitting pinballs* também no início da análise é mostrada na figura 5.12. A figura 5.12 ilustra ainda um detalhe incluindo também os vetores que representam as forças de penalização neste instante.

As figuras 5.13 e 5.14 mostram a história dos deslocamentos e velocidades com o tempo do ponto **A** da figura 5.9, que está localizado no plano de simetria do problema. Estes resultados apresentam uma concordância com os apresentados em (YEH, 1992).

As figuras 5.15 ilustram uma seqüência das configurações deformadas durante a evolução do problema, com a representação das franjas dos deslocamentos (m).

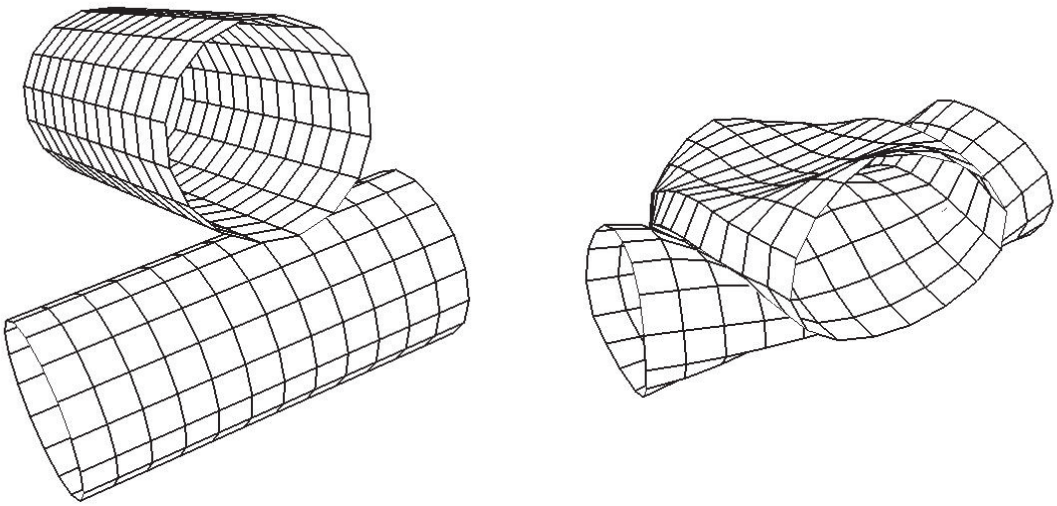


Figura 5.10 – Malha inicial e configuração deformada final dos dois tubos.

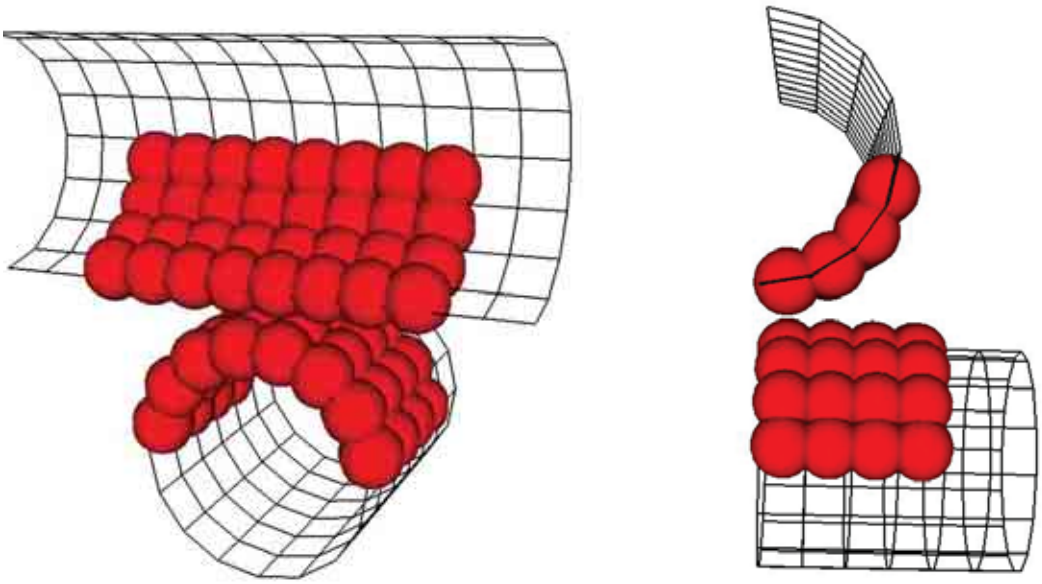


Figura 5.11 – Detalhe das *pinballs* na configuração indeformada.

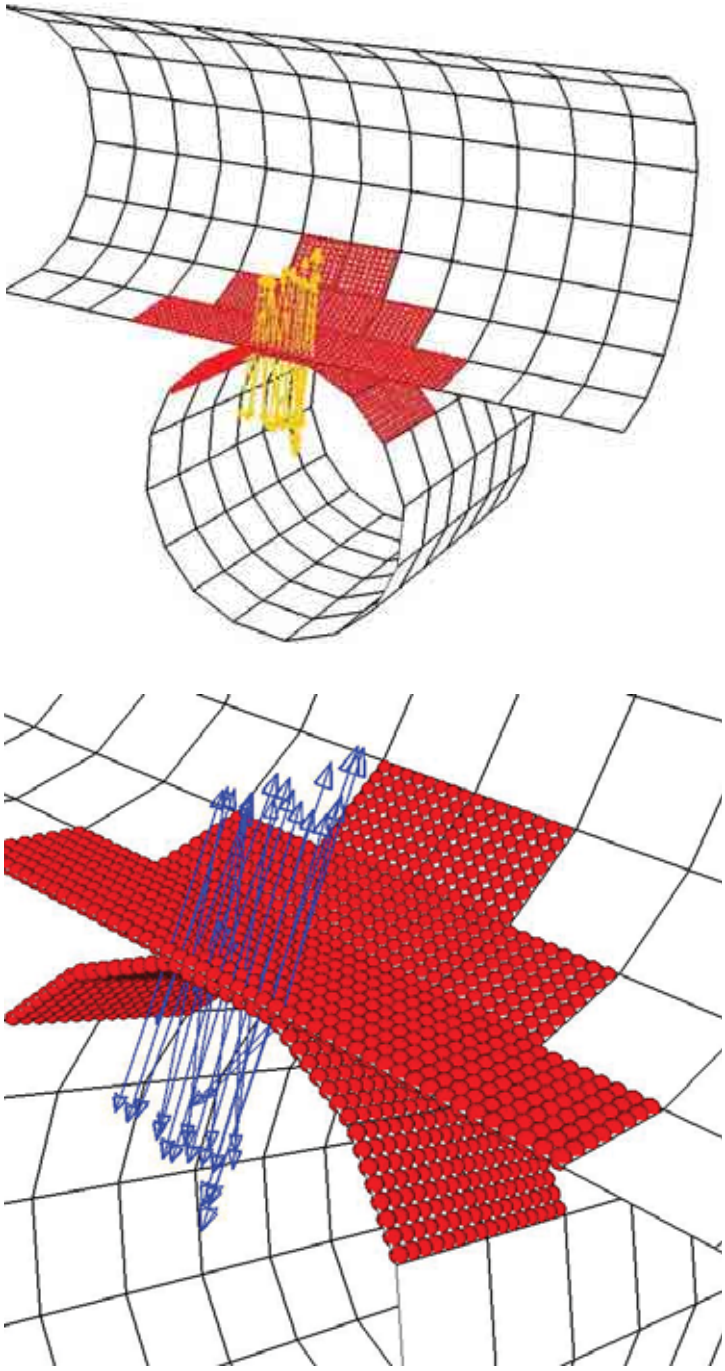


Figura 5.12 – Detalhe das *splitting pinballs* e das forças de penalização.

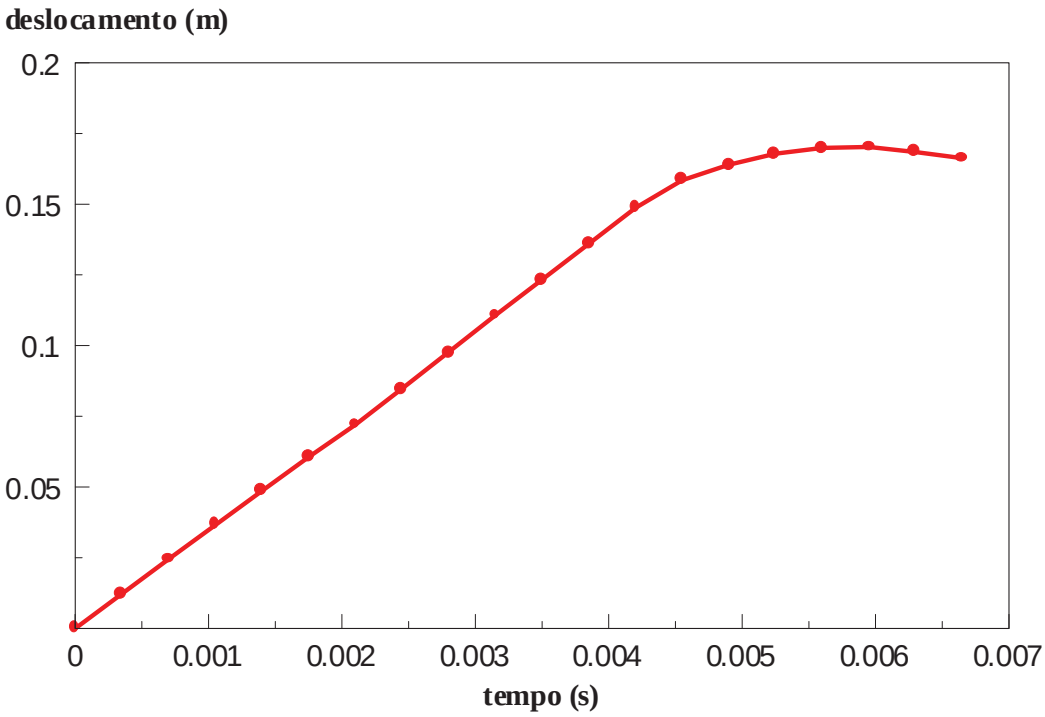


Figura 5.13 - Gráfico deslocamento x tempo para o ponto A.

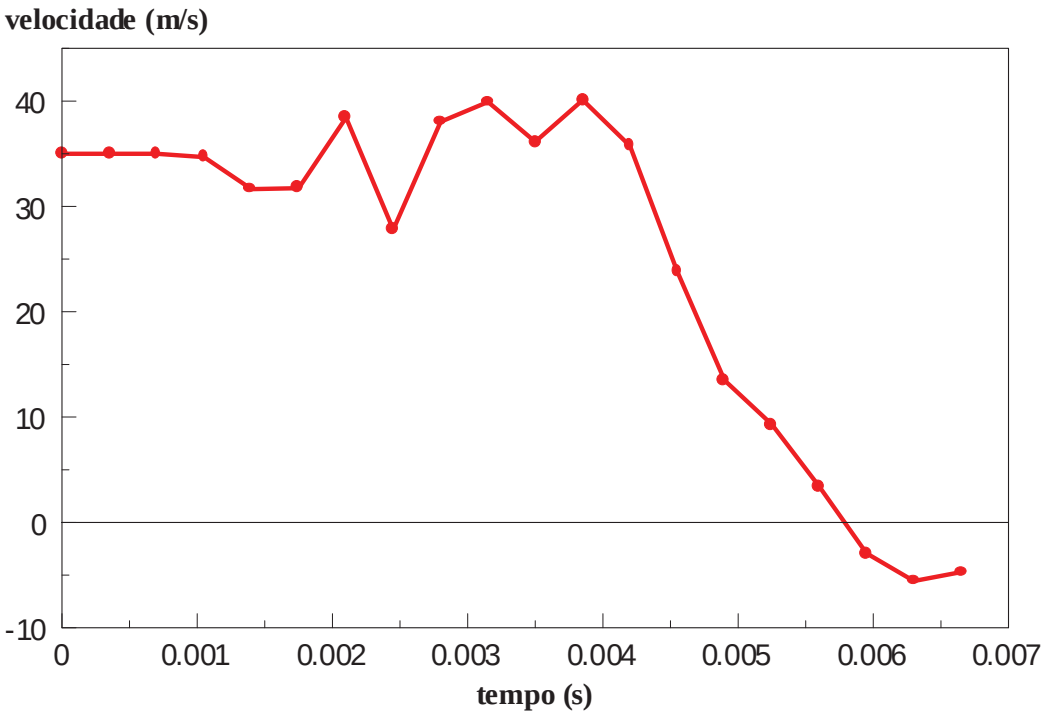
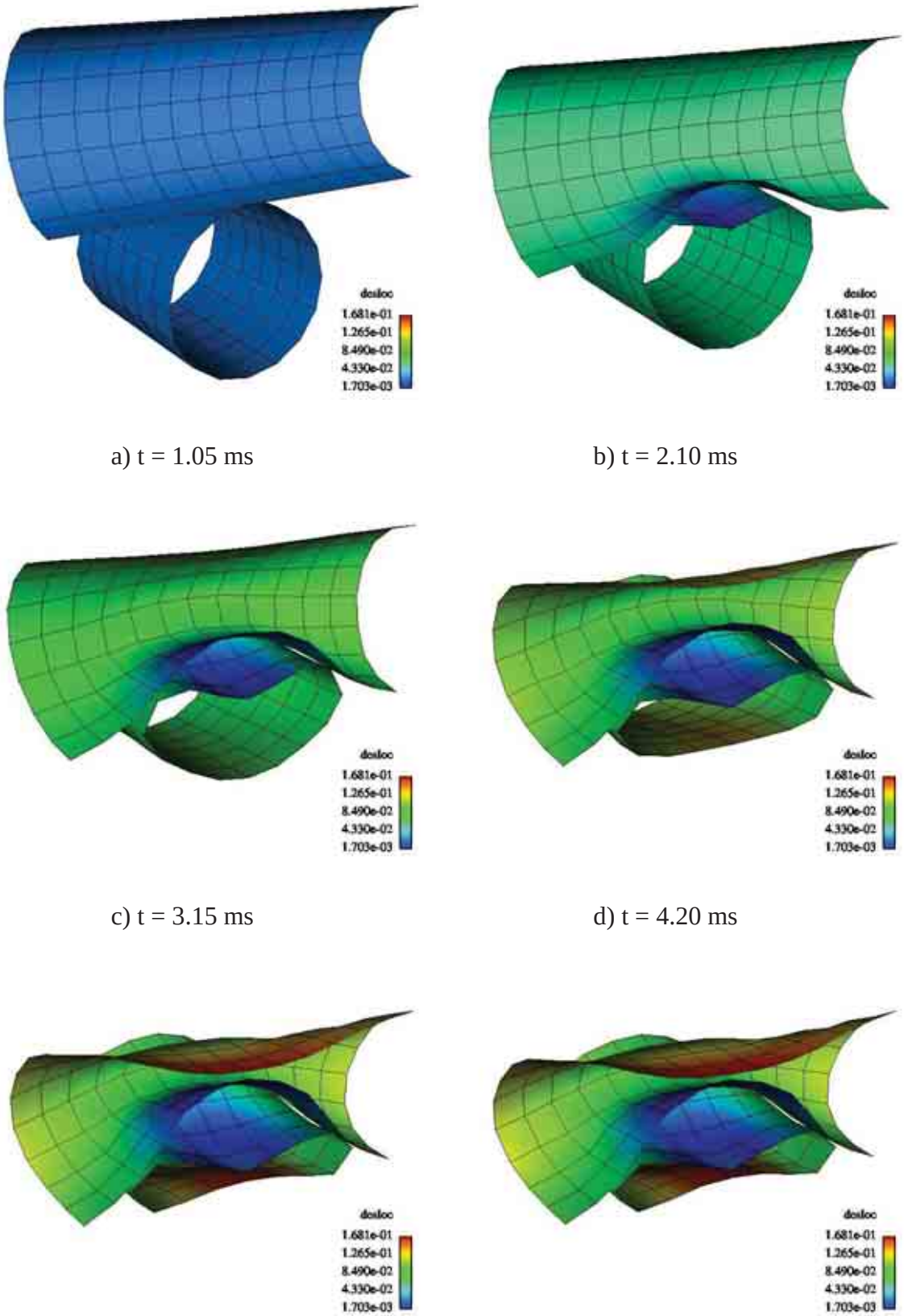


Figura 5.14 - Gráfico velocidade x tempo para o ponto A.



a) t = 1.05 ms

b) t = 2.10 ms

c) t = 3.15 ms

d) t = 4.20 ms

e) t = 5.25 ms

f) t = 6.65 ms

Figura 5.15 – Evolução do problema dos dois tubos idênticos.

5.3. Problema de Auto-Contato (*Box Beam*)

Este também é um problema clássico de contato-impacto utilizado como *benchmark* em análises envolvendo estruturas laminares.

A descrição do problema é ilustrada na figura 5.16 e consiste em uma estrutura laminar, de pequena espessura, em formato de caixa e com uma massa M de valor muito maior que a sua localizada em sua extremidade livre. O conjunto é lançado e colide contra uma parede rígida a uma velocidade de 15.6 m/s. Para a simulação desta parede, utiliza-se condições de deslocamento nulo para os nós localizados naquela extremidade.

Este problema também é tratado nas referências (YEH, 1992, ZHONG, 1993) e é reproduzido aqui mostrando a versatilidade do algoritmo de *splitting pinballs* em problemas de auto-contato, com relativa simplicidade.

Em situações deste tipo, todos os elementos são definidos como mestres e escravos ao mesmo tempo. Além disso, é necessário estabelecer um arranjo que contenha a lista dos elementos vizinhos a cada elemento, para evitar a aplicação incorreta de forças de penalização entre esses elementos, e um monitoramento para evitar que um mesmo par de elementos seja considerado mais de uma vez.

Experimentos numéricos semelhantes são também analisados em NEAL (1989), BELYTSCHKO (1991a, 1993) e BENSON (1990). Em NEAL (1989) e BELYTSCHKO (1991a, 1993) utiliza-se como procedimento para disparar o processo de colapso o emprego de uma malha com pequenas imperfeições geométricas iniciais para forçar um sentido de orientação nas deformações, artifício que não foi utilizado na presente análise. Em QUARANTA (1995) uma análise em um problema semelhante a este é efetuada utilizando malhas de elementos quadriláteros axissimétricos.

A malha de elementos finitos utilizada nesta análise é apresentada na figura 5.17, assim como a malha com as reflexões dos elementos em simetria representando a estrutura completa. A malha utilizada contém 756 elementos com 829 nós totalizando 4320 equações atualizadas em 120000 intervalos de tempo com incremento Δt=1.0E-7 s.

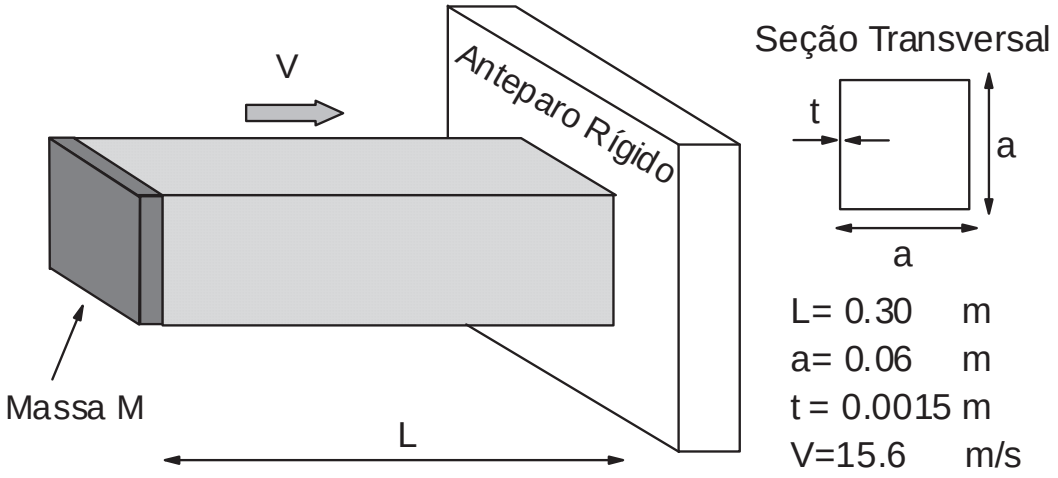


Figura 5.16 – Definição do problema de auto contato.

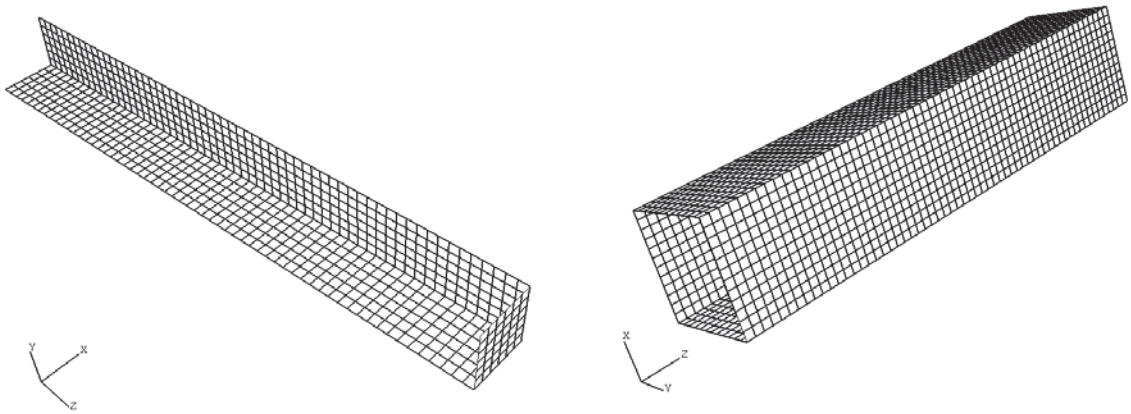
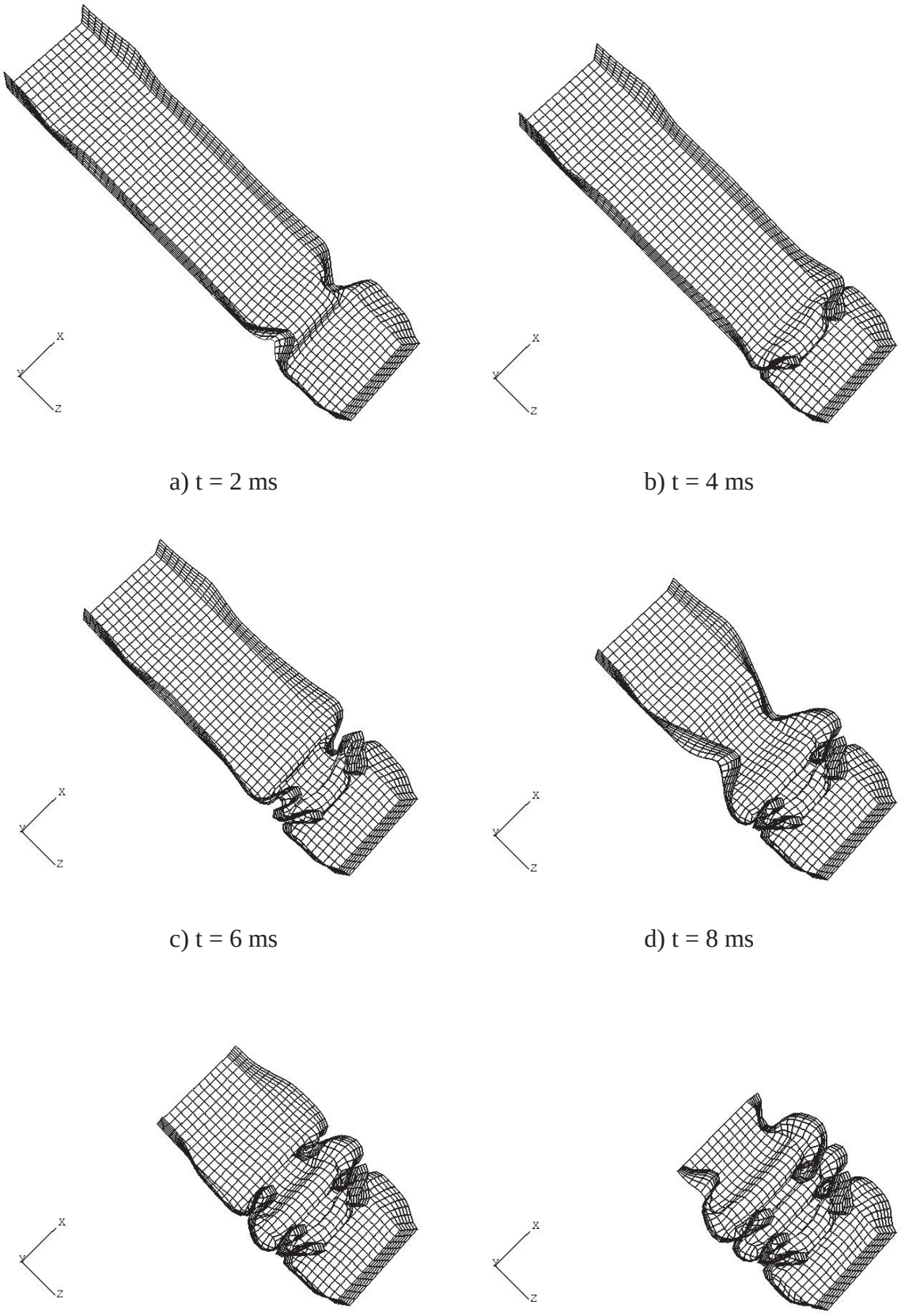


Figura 5.17 – Malha de elementos finitos do problema de auto-contato.

As propriedades físicas do material são: Módulo de Elasticidade E = 2.0 E+11 N/m^2, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$, densidade $\rho = 7640$ Kg/m^3, tensão de escoamento para o critério de von Mises σ_y = 2.0 E+8 N/m^2 e módulo de endurecimento H = 6.3 E+8 N/m^2. A espessura dos elementos é t = 1.5E-3 m.

Uma seqüência de configurações deformadas da malha é mostrada nas figuras 5.18 e 5.19. Estes resultados concordam com os apresentados em (YEH, 1992, ZHONG, 1993). As deformações observadas no instante final da análise apontam para uma redução de aproximadamente 75% no comprimento original da viga.



a) t = 2 ms

b) t = 4 ms

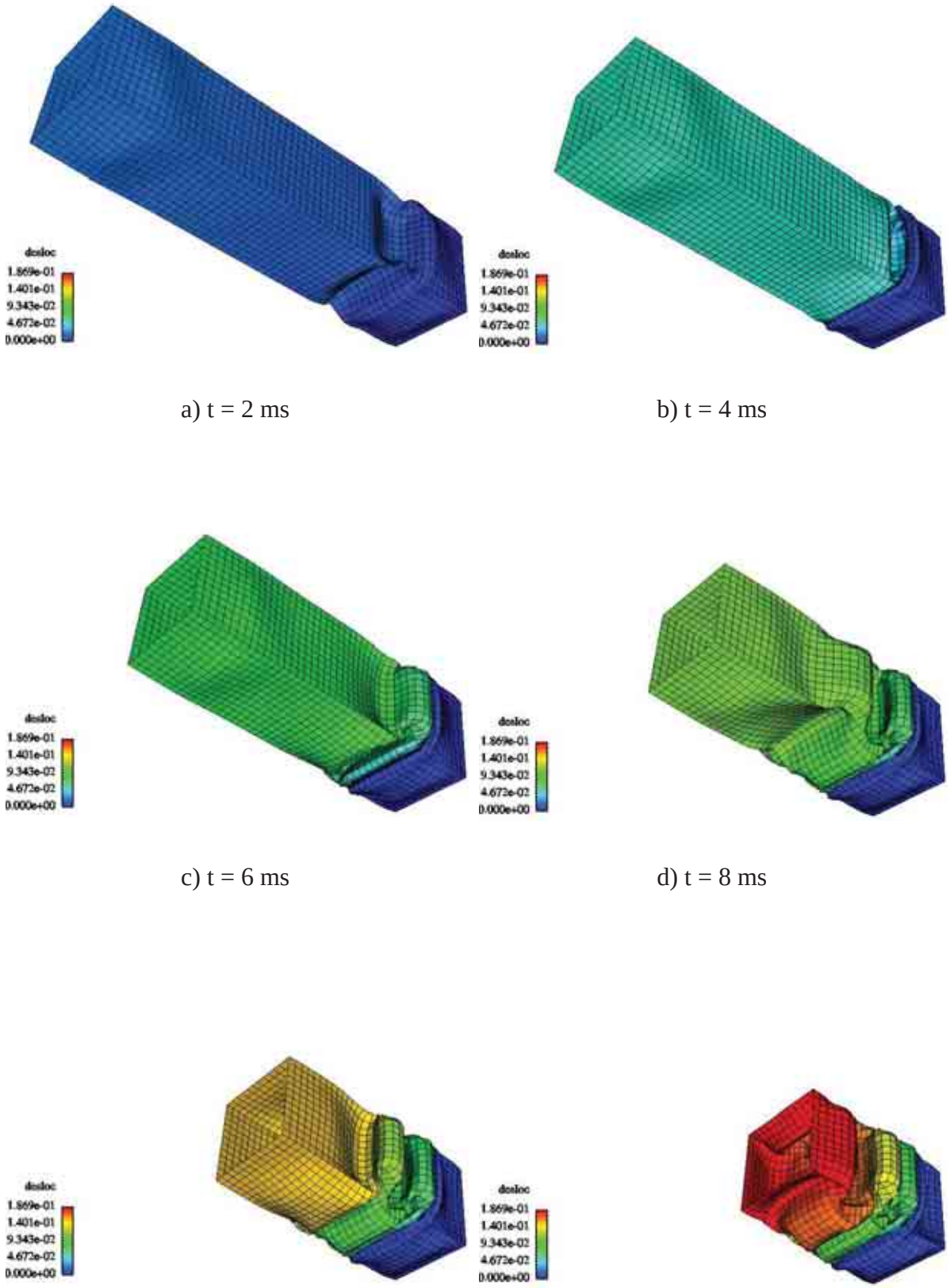
c) t = 6 ms

d) t = 8 ms

e) t = 10 ms

f) t = 12 ms

Figura 5.18 – Deformações da malha do problema de auto-contato.



a) t = 2 ms

b) t = 4 ms

c) t = 6 ms

d) t = 8 ms

e) t = 10 ms

f) t = 12 ms

Figura 5.19 – Evolução do problema de auto-contato.

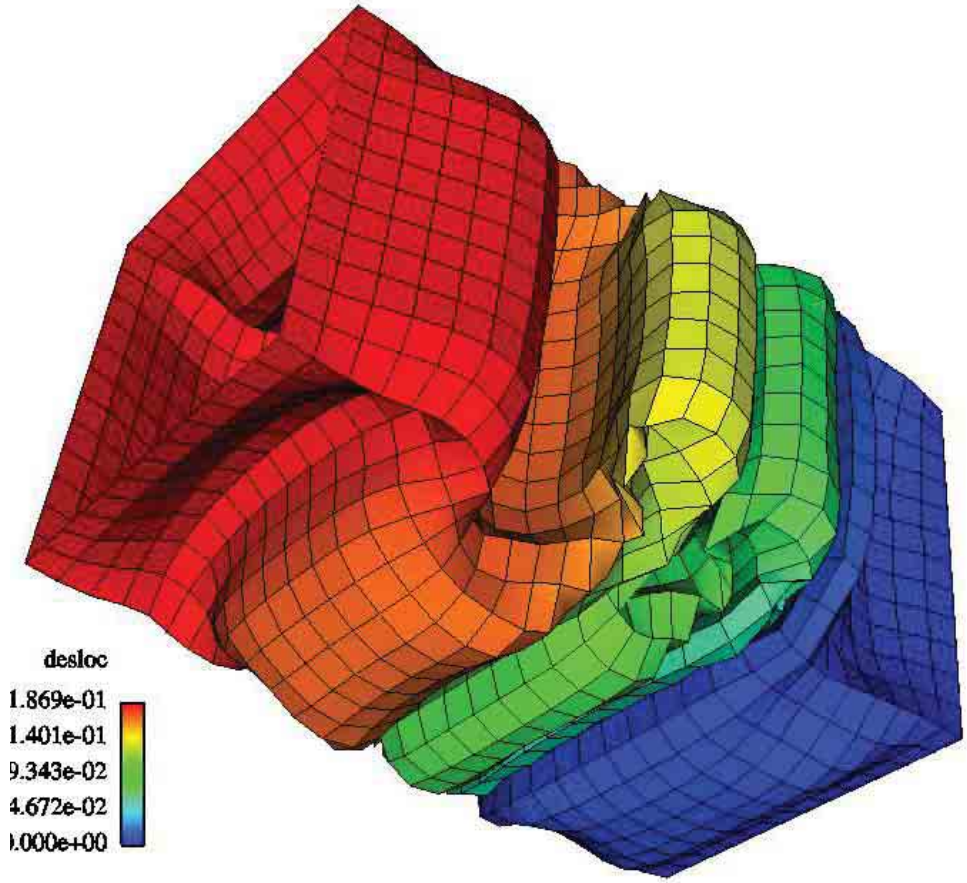


Figura 5.20 – Configuração deformada final do problema de auto-contato.

5.4. Análise de Impacto de Alta Velocidade (Barra de Taylor)

Nesta análise é realizada a modelagem do impacto de uma barra cilíndrica de cobre contra um anteparo rígido, como ilustra a figura 5.21, e que representa o comportamento de um projétil disparado contra uma blindagem.

A velocidade da barra no instante do choque é de 227.0 m/s, caracterizando o problema pelo impacto de alta velocidade. Este problema é descrito com maiores detalhes e tratado com enfoque analítico e experimental em JOHNSON (1972) e KAMOULAKOS (1990).

Devido aos efeitos de grandes deslocamentos e deformações resultantes na barra cilíndrica e a possibilidade de comparações dos aspectos analítico, experimental e computacional, este problema é classicamente utilizado como teste de validação de formulações e implementações computacionais de análise não-linear, estando presente em diversos trabalhos da literatura, como por exemplo, ALVES (1991), BONET (1998, 2001), COSTA (1997b), CANET (1987), LAURSEN (2002), STAINIER (1994), QUARANTA (1995) e ZIENKIEVICZ (1998), entre outros.

Entretanto, o que normalmente se observa nas referências é a simulação do contato através do artificio da consideração de deslocamentos verticais nulos como condição de contorno na base da barra. Nos trabalhos de COSTA (1997b) e QUARANTA (1995), este problema foi analisado utilizando este artificio e também utilizando a técnica das *pinballs* em elementos hexaédricos e axissimétricos, respectivamente. Em LAURSEN (2002), o problema é simulado com uma análise implícita e o método Lagrangeano aumentado, com e sem a consideração do atrito.

A barra cilíndrica tem 3.2 mm de raio e 32.4 mm de comprimento e foi modelada com 7748 elementos tetraédricos e 1839 pontos nodais, resultando em 5096 equações para o problema. A malha de elementos finitos utilizada é ilustrada na figura 5.22a.. A análise é efetuada em 16000 intervalos de tempo com $\Delta t = 5.0 \times 10^{-9}$ s até o instante t = 80 μs. As não-linearidades geométrica e física são tratadas através da formulação Lagrangeana atualizada, o modelo elastoplástico com critério de von Mises e o algoritmo de pressões médias nodais descritos no capítulo 3.

As propriedades físicas da barra de cobre (módulo de elasticidade longitudinal E, coeficiente de Poisson ν, densidade ρ, tensão de escoamento σ_y e módulo tangente E_T) são as indicadas na figura 5.21.

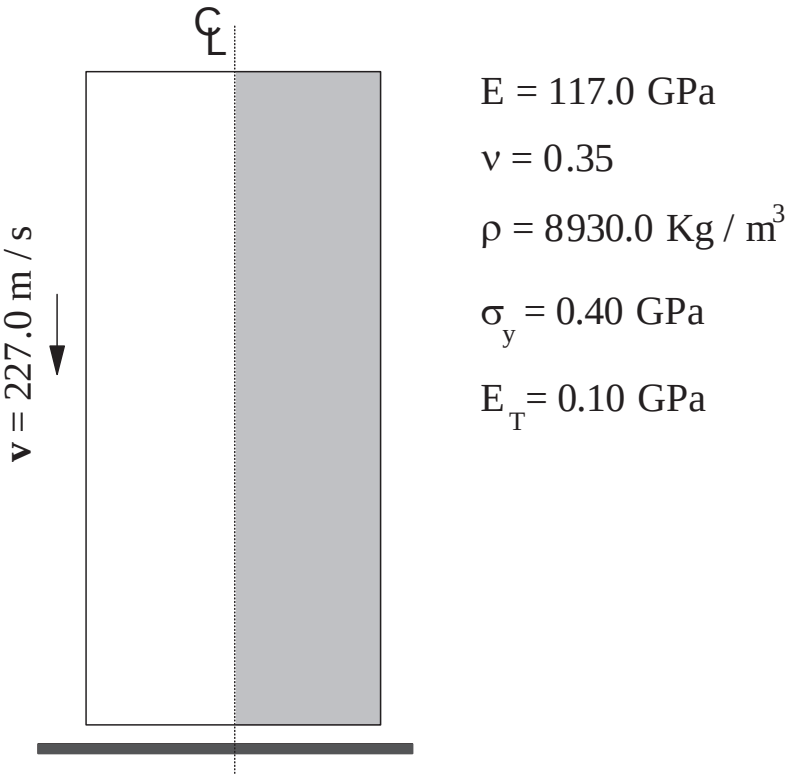
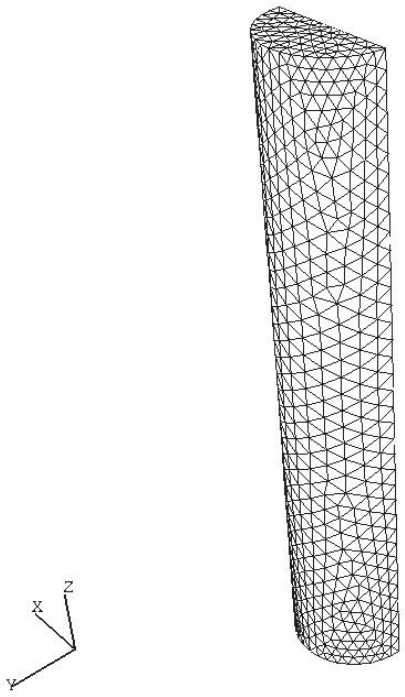


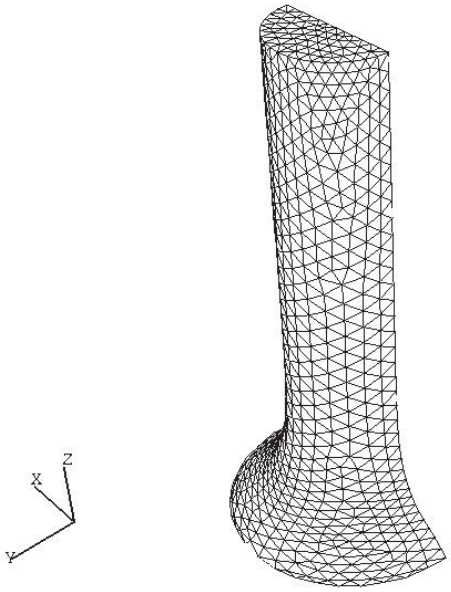
Figura 5.21 - Definição do problema da barra de Taylor.

Nas figuras 5.22 são apresentadas a configuração inicial da malha utilizada no problema e as configurações deformadas no tempo final da análise (t = 80 μs) e nos tempos t = 25.0 μs e t = 47.5 μs. Como pode ser observado pelas configurações deformadas, a grande quantidade de energia cinética da barra é transformada em energia de deformação.

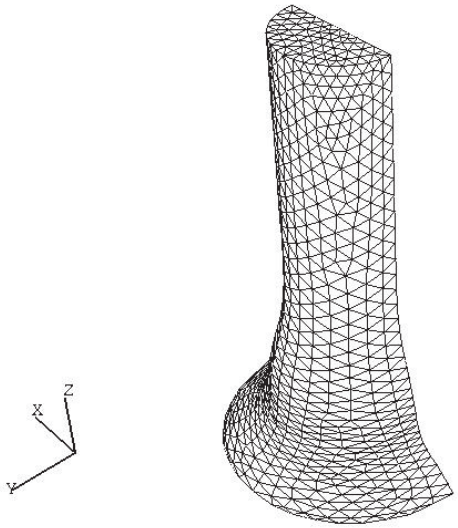
Para uma comprovação dos diferentes resultados obtidos com as formulações do elemento tetraédrico, a figura 5.23a apresenta a configuração deformada final da barra de Taylor no tempo 80 μs utilizando a formulação padrão do elemento tetraédrico e na figura 5.23b utilizando o algoritmo de pressões médias nodais, ficando evidente no primeiro caso o efeito do travamento volumétrico, principalmente nos elementos da base da barra.



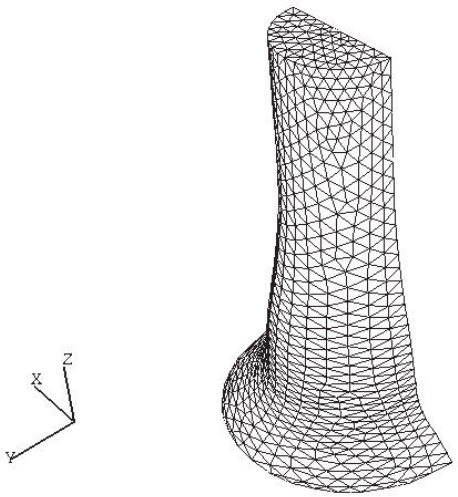
a) Configuração Inicial



b) Configuração em t = 25.0 μs

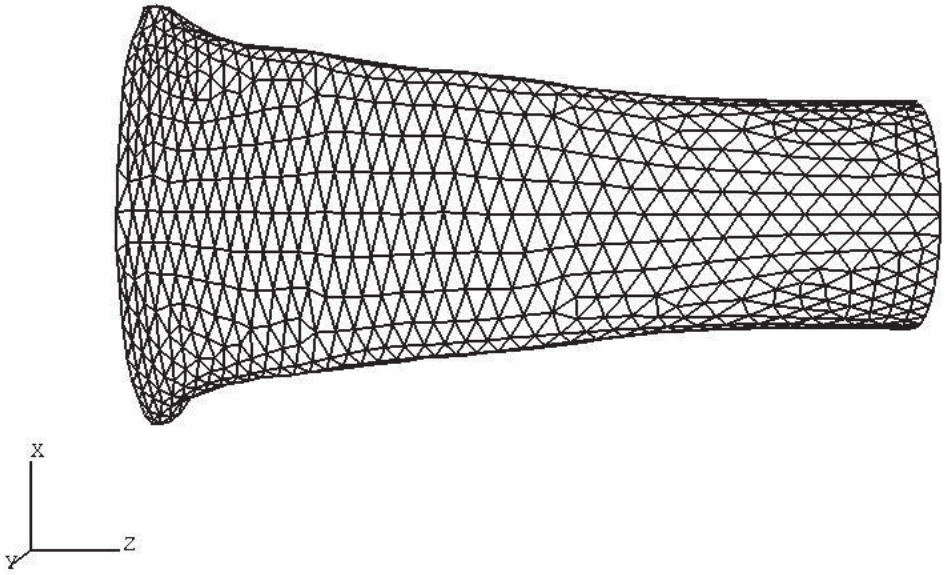


c) Configuração em t = 47.5 μs

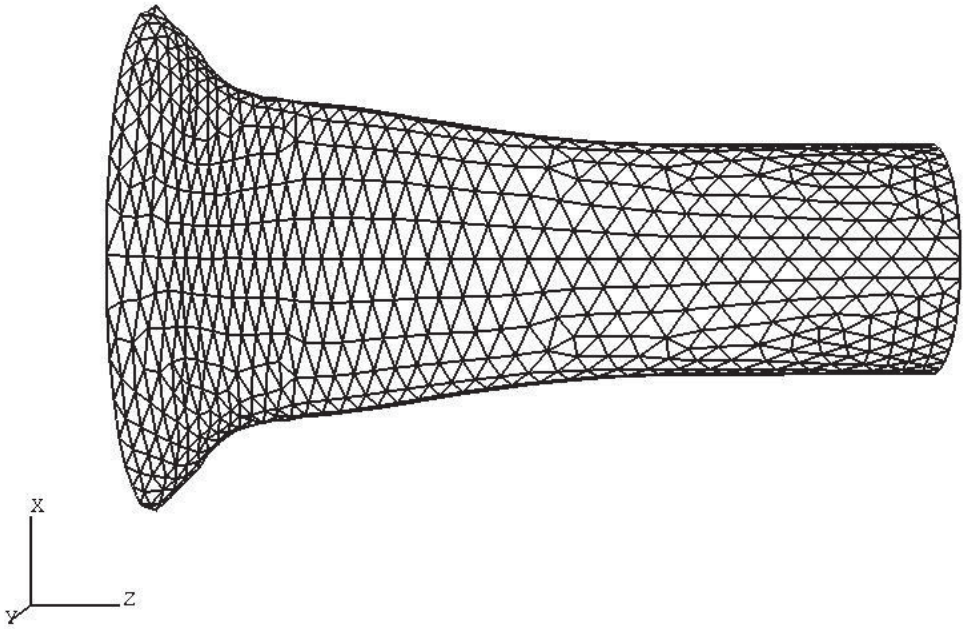


d) Configuração em t = 80.0 μs

Figura 5.22 - Evolução do problema da barra de Taylor.



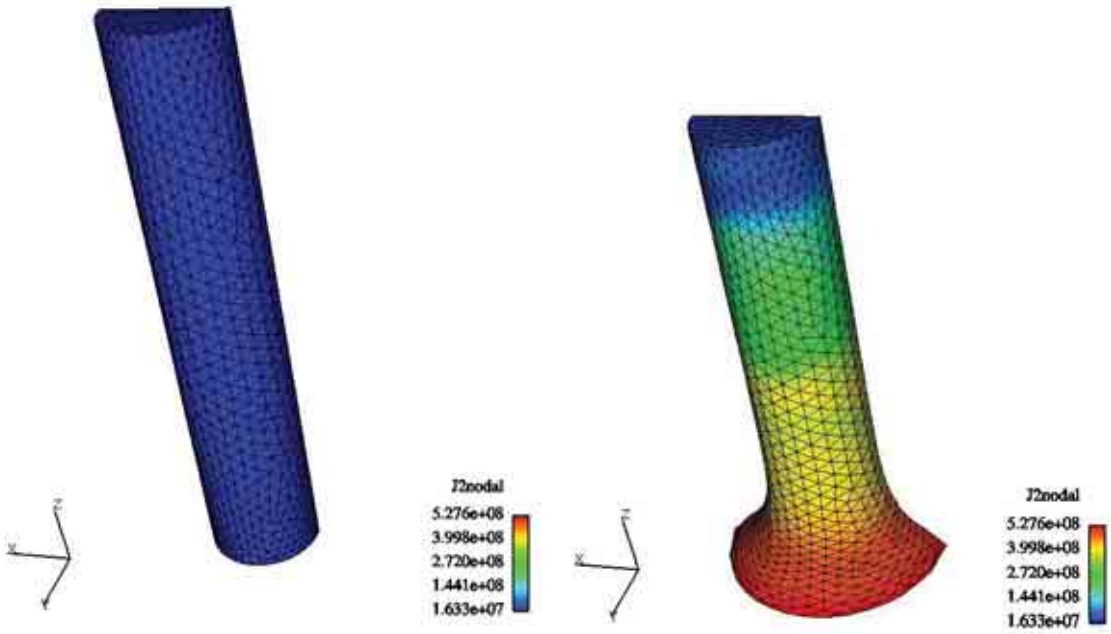
a) Configuração final – formulação padrão



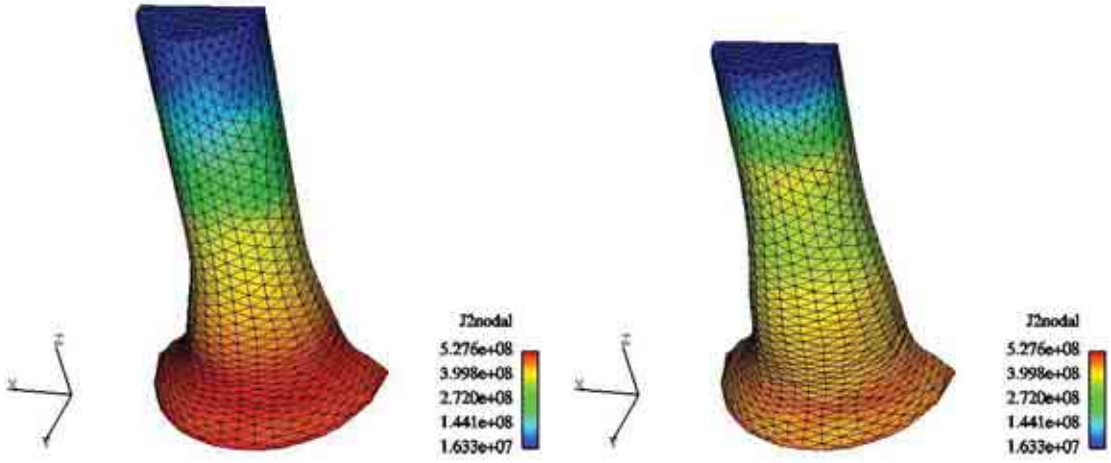
b) Configuração final – algoritmo *ANP*

Figura 5.23 – Barra de Taylor - comparação entre as deformadas finais.

Para a representação das distribuições de tensão durante a evolução do problema, as figuras 5.24 apresentam as tensões de von Mises na barra cilíndrica nos instantes t = 0.0, 25.0, 47.5 e 80.0 μs. As tensões em cada ponto nodal são calculadas como uma média aritmética das tensões dos elementos que concorrem em cada nó.



a) Tensões em t = 0.0 μs b) Tensões em t = 25.0 μs



c) Tensões em t = 47.5 μs d) Tensões em t = 80.0 μs

Figura 5.24 - Evolução do problema da barra de Taylor – distribuição de tensões.

Na comparação de resultados entre diferentes códigos comerciais consagrados, (KAMOULAKOS, 1990) apresenta os valores contidos na tabela 5.6 e que servem como uma referência para a avaliação dos resultados obtidos na simulação do problema da barra de Taylor.

Na tabela 5.7 são apresentados os resultados obtidos no presente trabalho, utilizando o elemento tetraedro com a sua formulação padrão e o elemento tetraedro com o algoritmo de pressões médias nodais. Assim como mostra a figura 5.23a, os valores da tabela 5.7 indicam que o efeito do travamento volumétrico, quando se utiliza a formulação padrão do elemento, é mais evidente na base da barra cilíndrica, onde se observa um valor menor para o raio final da base.

CÓDIGO	**MARC**	**DYNA2D**	**DYNA3D**	**NIKE2D**
Comprimento Final (mm)	21.66	21.49	21.47	21.47
Raio Final da Base (mm)	7.023	7.119	7.034	7.068
Deformação Plástica Equivalente Máxima	3.0	3.03	2.96	2.47
Tensão de von Mises Máxima (Mpa)	476	472	-	-

Tabela 5.6 – Comparação de resultados entre programas comerciais.

	TETRAEDRO PADRÃO	**TETRAEDRO COM *ANP***
Comprimento Final (mm)	21.25	21.59
Raio Final da Base (mm)	5.739	7.09
Deformação Plástica Equivalente Máxima	-	2.76
Tensão de von Mises Máxima (Mpa)	339.3	425.6

Tabela 5.7 – Resultados do presente trabalho.

Além dos valores apresentados na tabela 5.7, os resultados obtidos no presente trabalho podem ainda ser avaliados a partir dos gráficos “deslocamento x tempo” e “velocidade x tempo” apresentados nas figuras 5.25 e 5.26, respectivamente. Os valores plotados nestes gráficos são relativos ao ponto nodal localizado simultaneamente no eixo longitudinal e no topo da barra cilíndrica.

Uma outra forma importante de avaliar os resultados obtidos está na representação da deformação plástica efetiva, que é ilustrada na figura 5.27, correspondente ao tempo final da análise. Estes resultados apresentam concordância com os apresentados em STAINIER (1994).

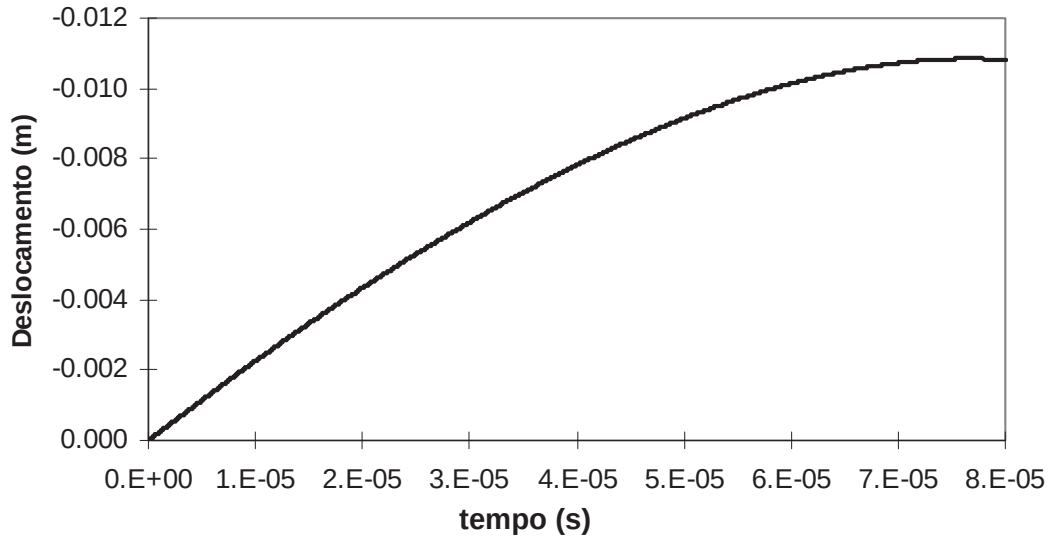


Figura 5.25 – Gráfico deslocamento x tempo no topo da barra de Taylor.

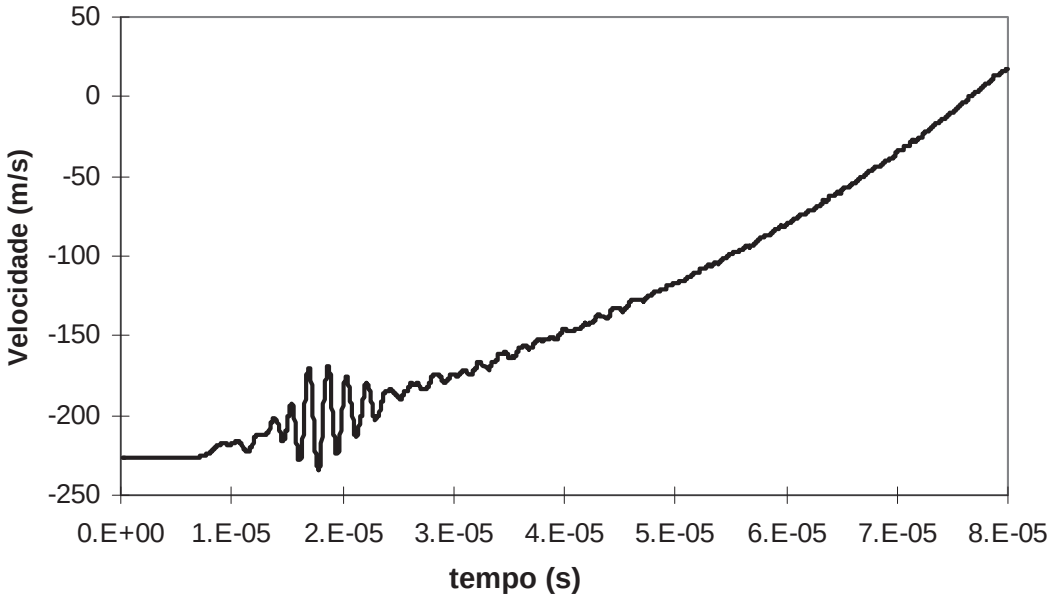


Figura 5.26 – Gráfico velocidade x tempo no topo da barra de Taylor.

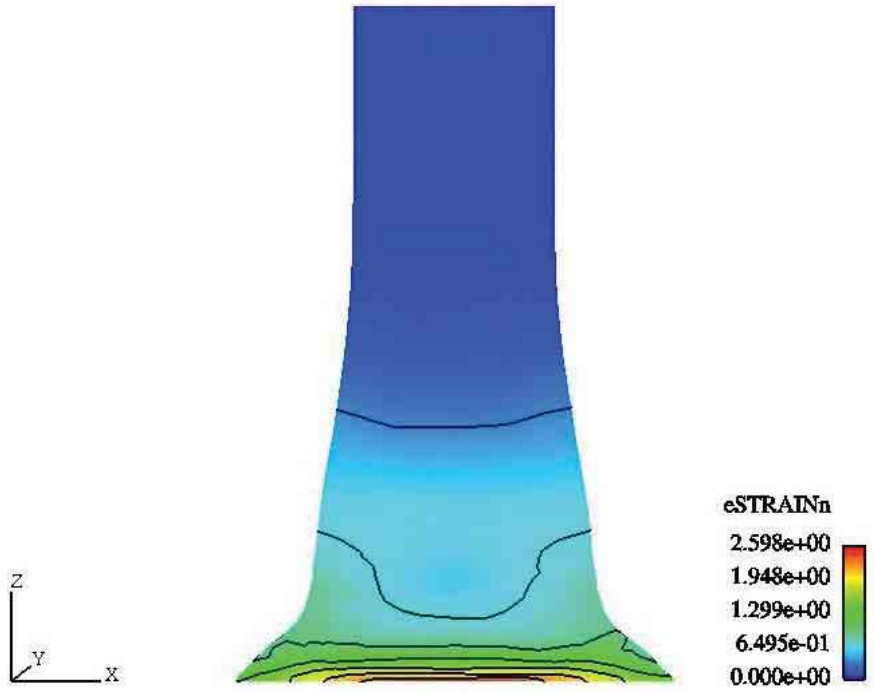


Figura 5.27 – Deformação plástica efetiva em t = 80.0 μs.

5.5. Impacto Oblíquo de uma Haste Esbelta

Este exemplo consiste na análise do impacto de uma haste esbelta de alumínio na vertical contra um anteparo rígido inclinado a 10° em relação à horizontal.

As deformações por flexão são as que predominam neste exemplo, sendo portanto uma situação bastante interessante não somente para o teste do algoritmo de *splitting pinballs*, como também para observar o comportamento do elemento tetraedro com o algoritmo de pressões médias nodais neste tipo de solicitação.

Este problema é descrito em BONET (1998, 2001) e CANET (1987) e o resultado das suas simulações é comparado com a configuração deformada final obtida em ensaios experimentais.

A haste apresenta uma geometria com comprimento L = 0.305 m e diâmetro D= 0.00638 m sendo lançada contra o anteparo rígido inclinado a uma velocidade V=201.7 m/s. A figura 5.28 apresenta a definição do problema.

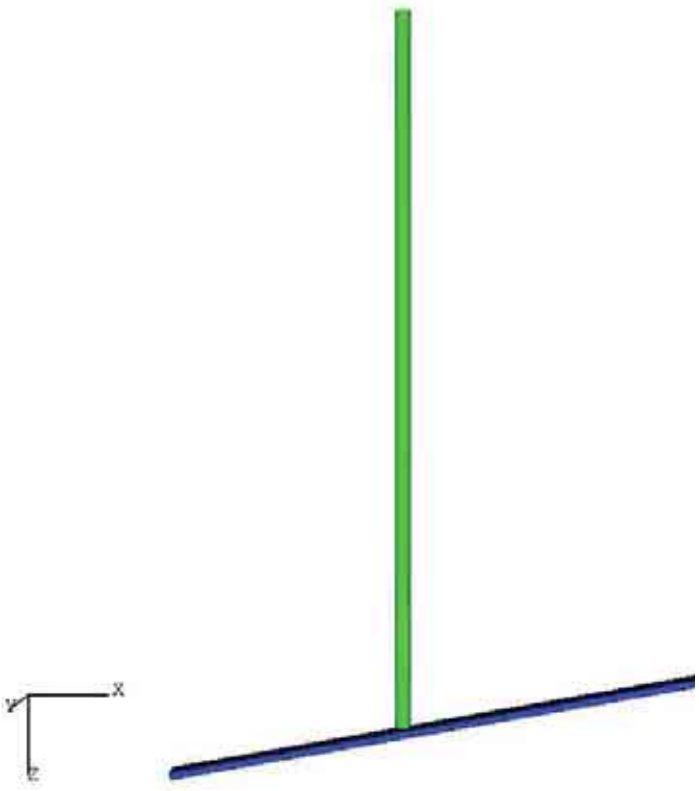


Figura 5.28 – Definição do problema de impacto oblíquo da haste esbelta.

As propriedades físicas da haste de alumínio são: módulo de deformação volumétrica B = 57.5 GPa, módulo de elasticidade transversal G = 26.5 GPa, valores equivalentes a um módulo de elasticidade longitudinal E = 69.0 GPa e coeficiente de Poisson ν = 0.3; densidade ρ = 2700 Kg/m^3, tensão de escoamento σ_y = 0.29 GPa e módulo de endurecimento H = 0.055 GPa. Para o parâmetro de amortecimento viscoso artificial adotou-se o valor de 10%.

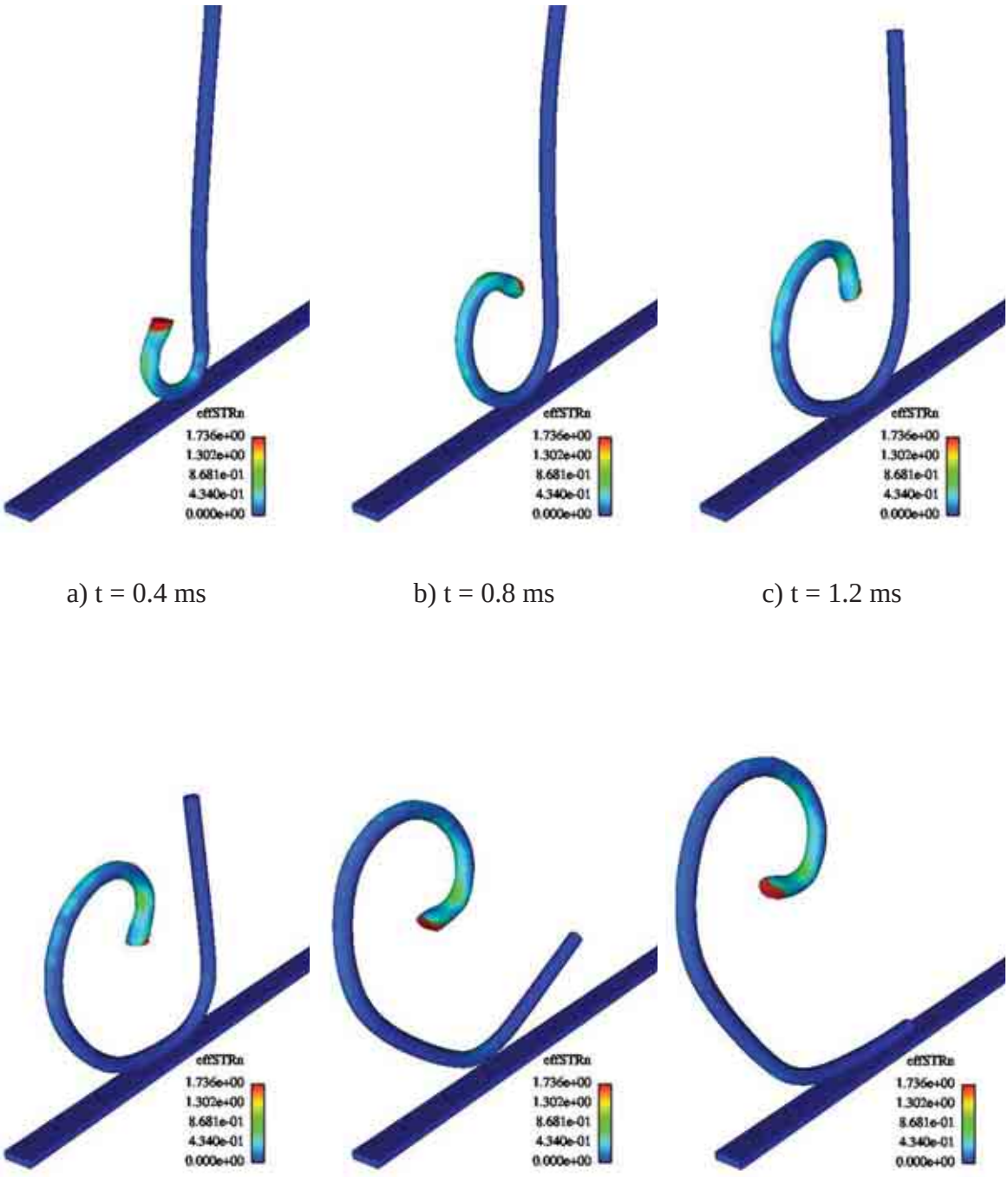
Utilizando a simetria do modelo, metade da haste e do anteparo rígido são descretizados com uma malha de elementos finitos de 3089 nós com 7746 elementos. Destes, 1548 nós e 4025 elementos representam a haste de alumínio e 1541 nós, com deslocamentos impedidos em todas as direções, e 3721 elementos são utilizados para representar o anteparo rígido.

Esta discretização resulta em um total de 4021 equações atualizadas em 26000 passos de tempo com incremento $\Delta t = 1.0 \times 10^{-7}$ s até o instante t = 2.6 ms.

As figuras 5.29 ilustram a evolução do problema, mostrando as configurações deformadas nos instantes t = 0.4, 0.8, 1.2, 2.0, 2.4 e 2.6 ms. Os resultados obtidos demonstram a capacidade do elemento tetraedro, implementado com o algoritmo de pressões médias nodais, na simulação deste problema onde predominam deformações provocadas pela grande flexão sofrida pela haste de alumínio.

Na comparação entre estes resultados obtidos e os resultados apresentados nas referências BONET (1998, 2001) e CANET (1987), observa-se a concordância tanto com simulações efetuadas com malhas de elementos tetraédricos quanto com as obtidas com malhas de elementos hexaédricos.

Um detalhe da malha na configuração indeformada e uma imagem ampliada da configuração deformada no instante final da análise são apresentadas, respectivamente, nas figuras 5.30 e 5.31.



a) t = 0.4 ms b) t = 0.8 ms c) t = 1.2 ms

d) t = 1.6 ms e) t = 2.4 ms f) t = 2.8 ms

Figura 5.29 – Evolução do problema do impacto oblíquo da haste esbelta.

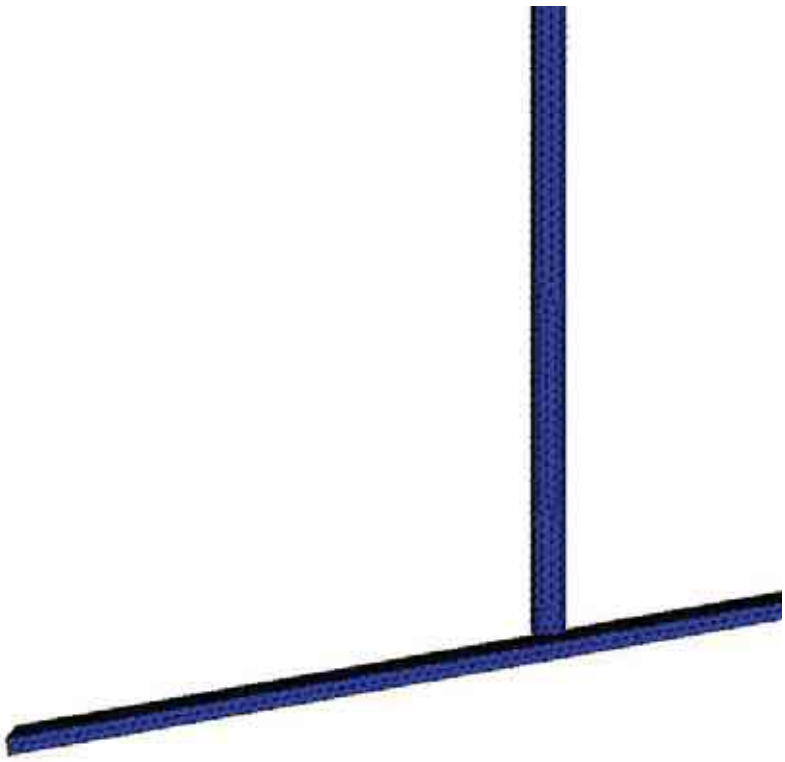


Figura 5.30 – Detalhe da malha indeformada.

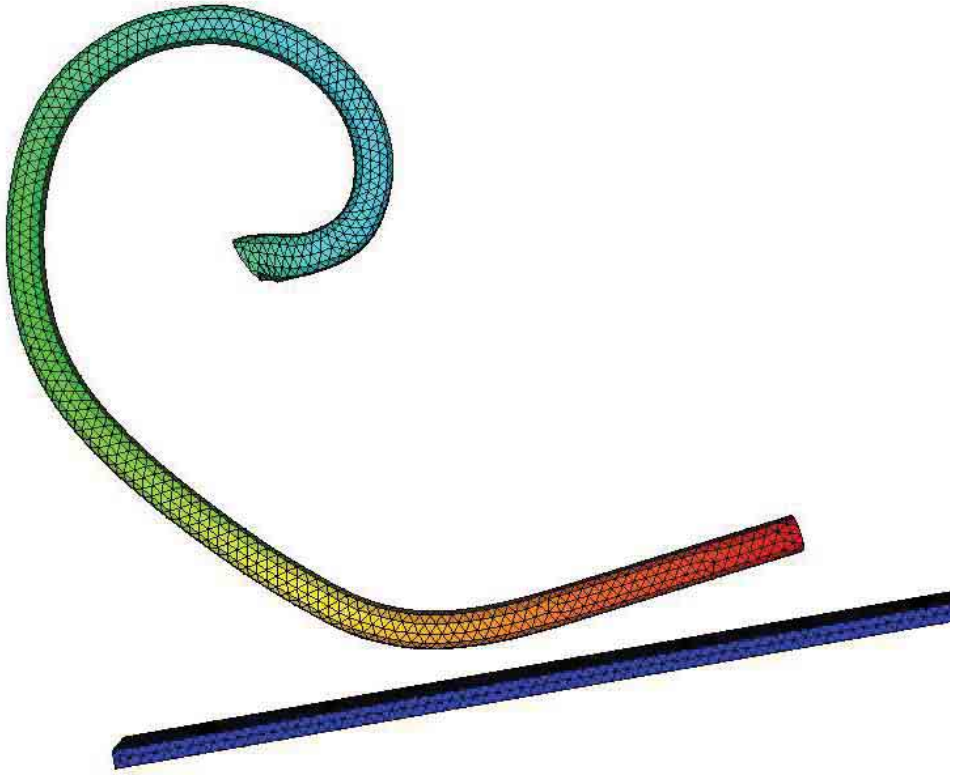


Figura 5.31 – Configuração deformada final.

5.6. Impacto de um Cilindro Sobre Trilhos Deformáveis

Este exemplo trata de um problema de contato-impacto também utilizado como *benchmark*. A descrição do problema é apresentada em LAURSEN (2002) e a análise consiste na colisão entre um cilindro lançado com uma velocidade V = 80 m/s contra dois trilhos deformáveis em repouso, conforme ilustra a figura 5.32.

O cilindro apresenta uma geometria com comprimento L = 80.00 cm e diâmetro interno DI = 9.00 cm e diâmetro externo DE = 10.00 cm. Os trilhos possuem comprimento igual ao do cilindro e seção transversal retangular de 4.67 cm x 5.00 cm, sendo posicionados paralelos entre si e separados por uma distância igual a 58.67 cm. Os trilhos são engastados nas extremidades e os nós da base podem rolar na horizontal. Para a separação inicial entre o cilindro e os trilhos foi adotado o valor de 1.00 cm.

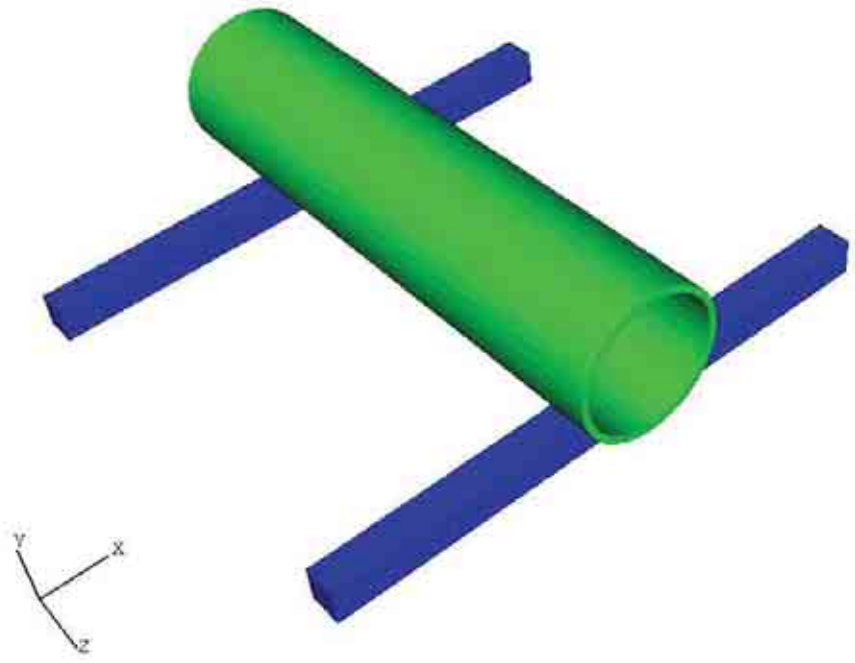


Figura 5.32 – Definição do problema do cilindro sobre trilhos deformáveis.

As propriedades físicas do material do cilindro e dos trilhos são: módulo de deformação volumétrica B = 175 GPa, Módulo de elasticidade transversal G = 80.77

GPa, valores equivalentes a um módulo de elasticidade longitudinal E = 210 GPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$; a densidade $\rho = 7850$ Kg/m^3, tensão de escoamento σ_y = 700 MPa e módulo de endurecimento H = 400 MPa.

Utilizando os dois planos de simetria do modelo, a malha de elementos finitos utilizada na discretização é apresentada na figura 5.33 e consiste de 1036 nós com 2804 elementos, sendo 813 nós e 2228 elementos para o cilindro e 223 nós e 576 elementos para o trilho, resultando em um total de 2840 equações atualizadas em 3000 passos de tempo com incremento $\Delta t = 1.0 \times 10^{-6}$ s até o instante t = 3 ms.

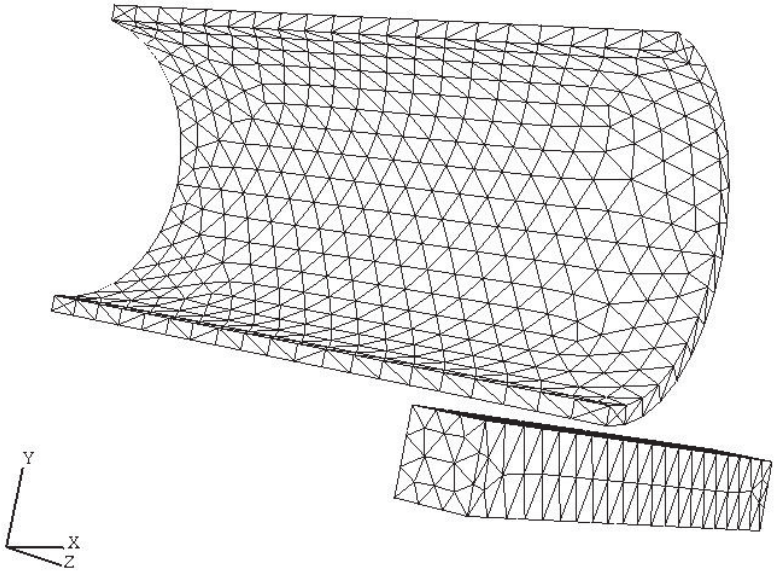
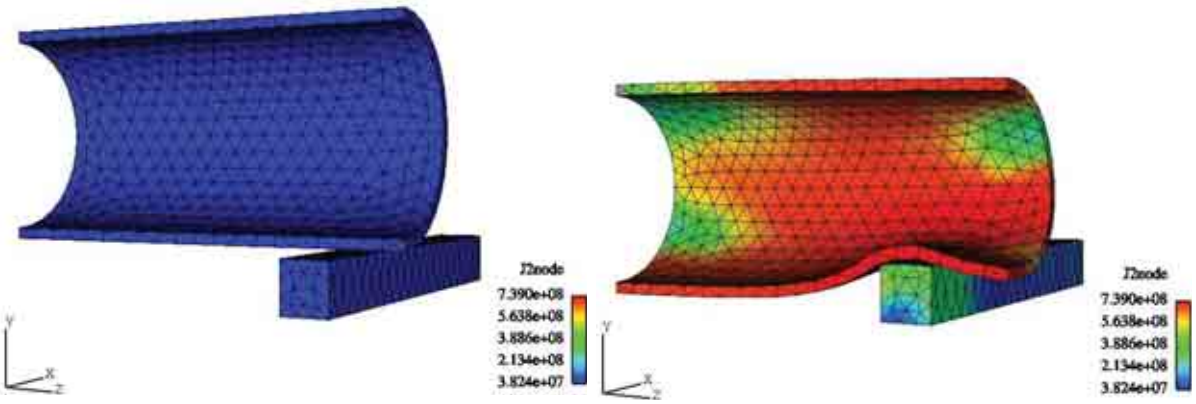


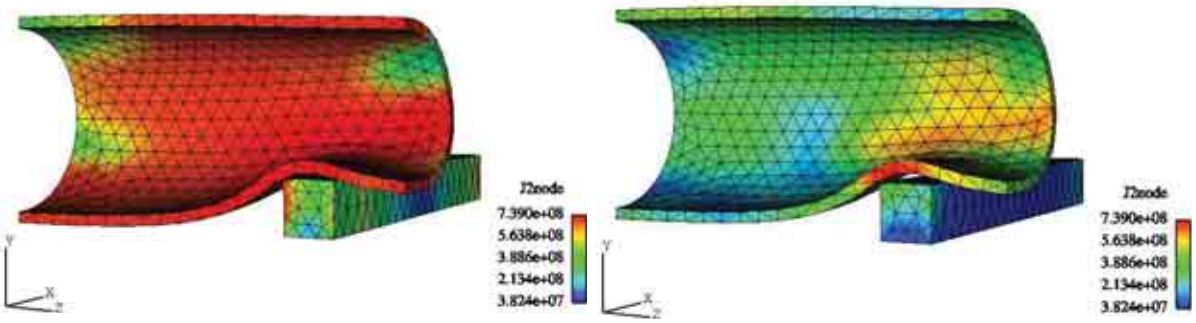
Figura 5.33 – Malha do problema do cilindro sobre trilhos deformáveis.

As figuras 5.34 ilustram a evolução do problema, mostrando as configurações deformadas e a distribuição de tensões nos instantes t = 0.0, 0.7, 1.2, 1.9, 2.5 e 3.0 ms. A partir da figura 5.34d (t = 1.9 ms) é possível observar o inicio do rebote do cilindro.



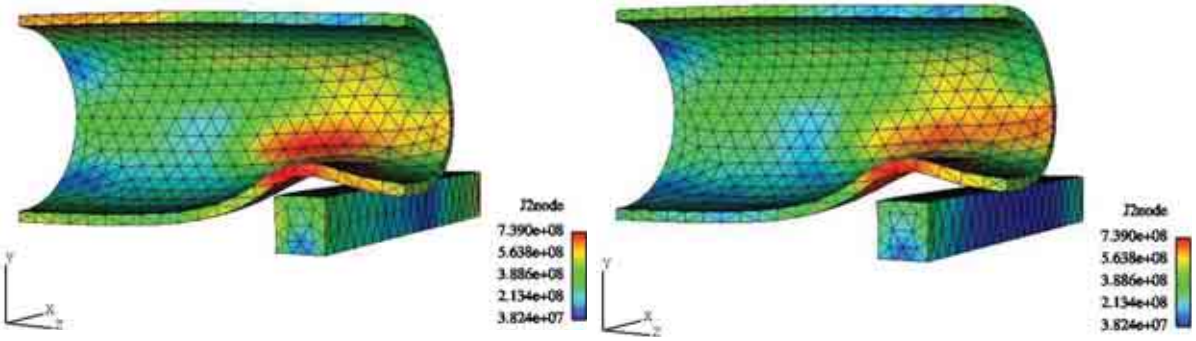
a) Tensões em t = 0.0

b) Tensões em t = 0.7 ms



c) Tensões em t = 1.2 ms

d) Tensões em t = 1.9 ms



e) Tensões em t = 2.5 ms

f) Tensões em t = 3.0 ms

Figura 5.34 – Seqüência de configurações deformadas e respectivas franjas de tensão de von Mises.

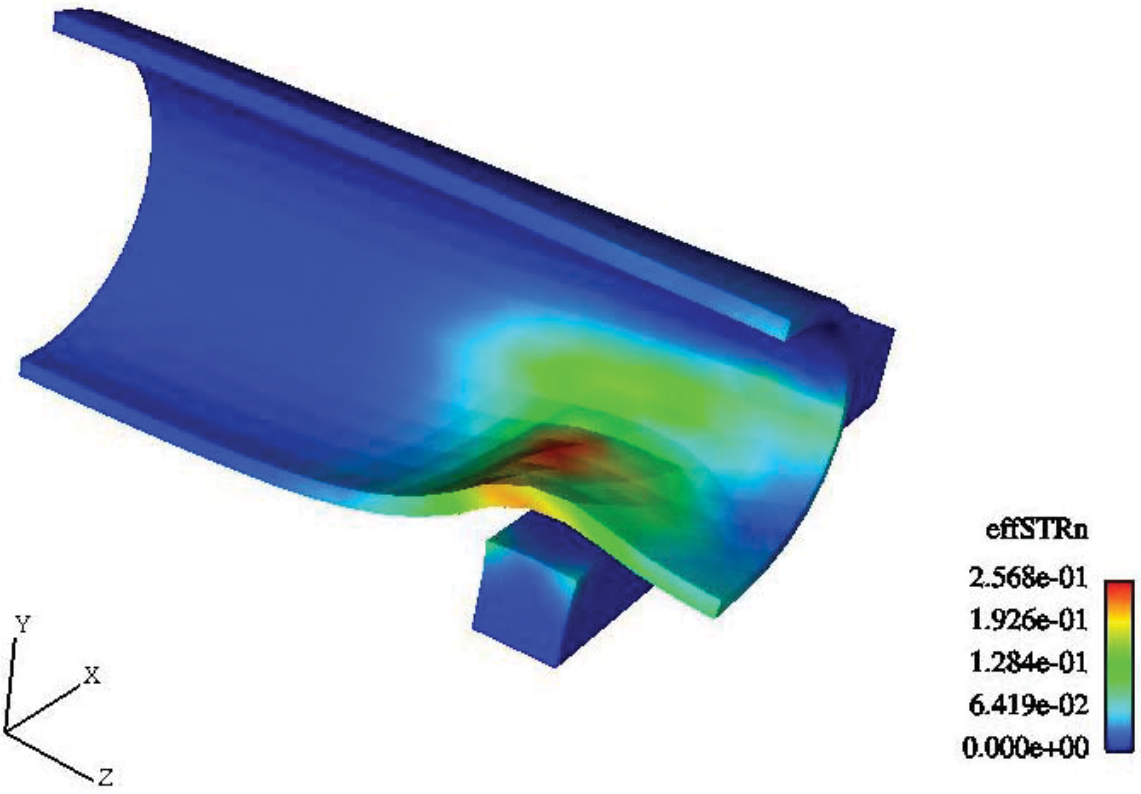
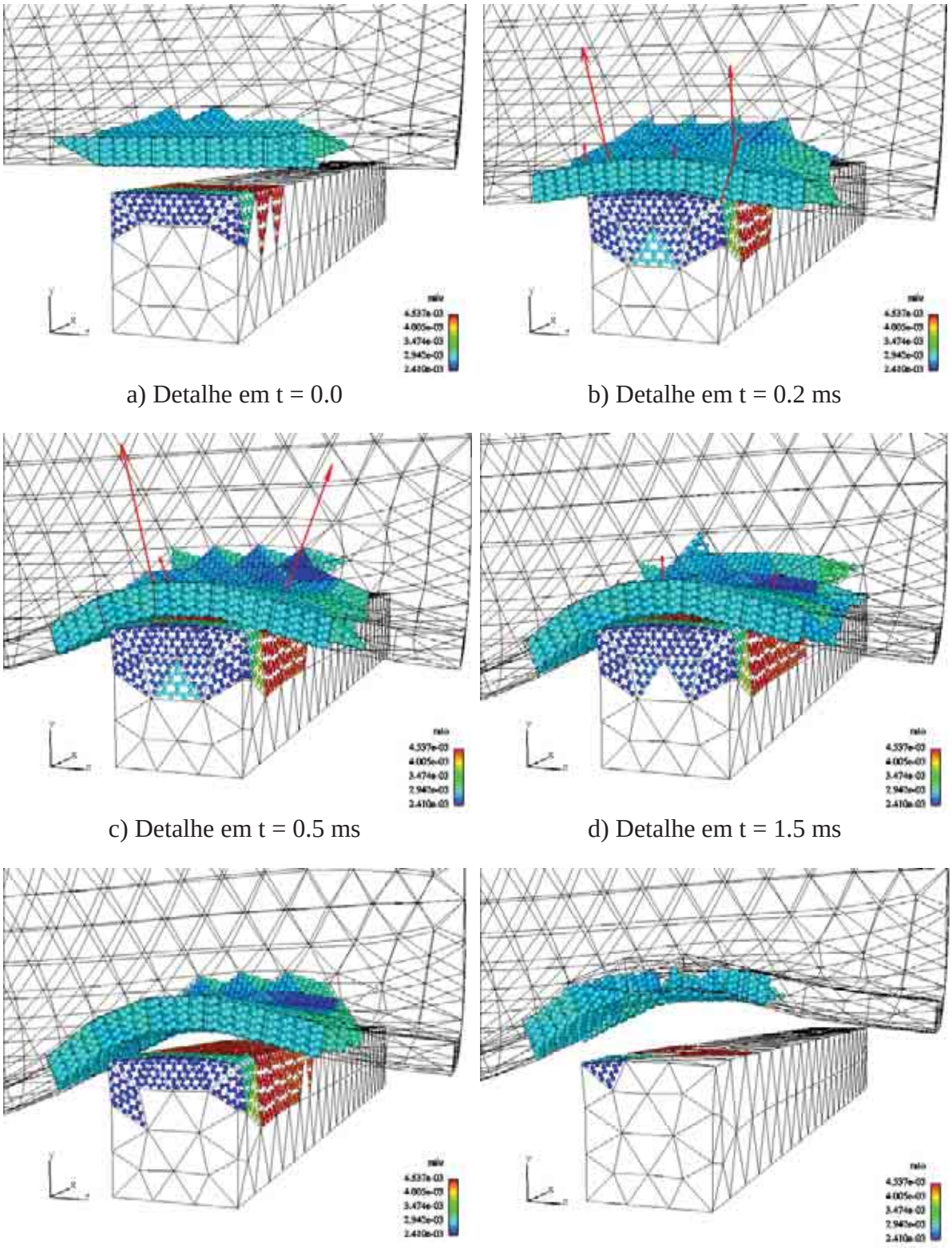


Figura 5.35 – Deformações plásticas efetivas do cilindro sobre trilhos deformáveis.

Na figura 5.35 é ilustrada a distribuição das deformações plásticas efetivas no modelo no instante final da análise. Este resultado, assim como os da figura 5.34, apresentam uma boa concordância com aqueles apresentados em LAURSEN (2002), apesar de naquele trabalho a simulação considerar o atrito entre o cilindro e os trilhos, utilizar o esquema implícito (Newmark) de solução e o método Lagrangeano aumentado para o imposição das restrições de contato.

As figuras 5.36 apresentam os detalhes das *splitting pinballs* e das forças de penalização em alguns instantes da análise. As *splitting pinballs* são representadas com a faixa de cores indicando os valores dos raios. As forças de penalização aplicadas sobre o cilindro são representadas pelas setas em vermelho. Durante a simulação é possível observar a variação da quantidade de elementos envolvidos no contato, assim como na quantidade de *splitting pinballs* presentes.



a) Detalhe em t = 0.0

b) Detalhe em t = 0.2 ms

c) Detalhe em t = 0.5 ms

d) Detalhe em t = 1.5 ms

e) Detalhe em t = 2.0 ms

f) Detalhe em t = 3.0 ms

Figura 5.36 – Detalhes da evolução das *splitting pinballs* na região de impacto entre o cilindro e o trilho para diferentes instantes da simulação.

Capítulo 6

Conclusões

A análise de problemas de contato-impacto é de grande importância em diversas áreas da engenharia, possuindo aplicação direta em vários setores industriais como por exemplo: nas indústrias automobilística; de manufatura; petrolífera; etc.

Este trabalho apresentou como principal contribuição uma nova abordagem computacional para o tratamento de problemas tridimensionais de contato-impacto entre corpos deformáveis, associando a técnica das *splitting pinballs* com um elemento tetraédrico linear baseado na formulação de pressões médias nodais em um código de análise não-linear transiente explícita, com o operador de diferenças centrais.

Na técnica de *splitting pinballs*, um conjunto de esferas com diâmetro apropriado é uniformemente distribuído pelos elementos finitos candidatos ao contato e permite o tratamento, com bastante robustez, do impacto entre estruturas discretizadas tanto com elementos de casca quanto as discretizadas com elementos sólidos tridimensionais.

O elemento tetraédrico linear com formulação de pressões médias nodais é capaz de tratar as situações de incompressibilidade durante o processo de deformação em regime elasto-plástico sem apresentar travamento volumétrico.

Este conjunto de técnicas é aplicado na análise de problemas com situações gerais de contato (grandes deslocamentos e deformações nos elementos, auto-contato, erosão, etc.), graças à busca e determinação automática dos elementos envolvidos no fenômeno de contato.

O trabalho apresenta exemplos de aplicação variados que demonstram a capacidade de modelagem e robustez da técnica das *splitting pinballs* tanto em estruturas laminares quanto em sólidos, neste caso utilizando uma implementação

simples, e igualmente robusta, do elemento tetraédrico com tratamento da incompressibilidade pela formulação de pressões médias nodais.

Os problemas de contato-impacto em geral apresentam as não-linearidades física e geométrica e também as devidas às condições mecânicas do contato. Existem diversos métodos bem estabelecidos de abordagem e solução para esta classe de problemas e o crescente avanço dos modernos ambientes computacionais permite a modelagem numérica dos problemas reais de grande escala.

O método dos elementos finitos é uma das principais ferramentas numéricas utilizadas nessas modelagens e, dentro da sua vasta tecnologia, foi apresentado no texto do presente trabalho, os aspectos da implementação computacional realizada para a análise transiente explícita com o operador de diferenças centrais em conjunto com o método das penalizações no tratamento dos problemas de contato-impacto.

A utilização da técnica das *pinballs* (NEAL, 1989) permite uma implementação simples e eficiente quando em conjunto com o método das penalizações. A técnica apresentada nesta referência fornece uma metodologia para o cálculo das forças de penalização, que dependem da escolha de um parâmetro empírico para a sua determinação.

Neste mesmo trabalho NEAL (1989) mostra que este parâmetro representa a relação entre a rigidez equivalente dos elementos em contato e a rigidez da “mola”, que pode ser fisicamente interpretada como o mecanismo gerador das forças de penalização, indicando que a sua escolha deve atender simultaneamente as condições de estabilidade numérica e de impenetrabilidade não-excessiva entre as *pinballs* em contato. Apesar deste não ser o principal complicador, existem na literatura outras metodologias livres deste tipo de escolha empírica do parâmetro, como por exemplo em YEH (1992) e ZHONG (1993).

Na análise dos problemas de contato-impacto, pelo método dos elementos finitos, um dos pontos mais críticos, em termos de desempenho computacional, está na determinação dos pares de elementos em contato em cada instante de tempo da análise.

Em geral, o tempo gasto para executar esta tarefa possui ordem de grandeza quadrática $O(N^2)$, onde N representa o número de elementos na malha de elementos finitos.

No algoritmo de *splitting pinballs* é necessário efetuar esta busca em dois momentos: primeiro associar a cada elemento da superfície da malha uma *pinball* que circunscreve todo o elemento; para estes elementos é efetuada uma primeira busca. Nos pares de elementos em que o contato é observado é feita a geração do conjunto de *splitting pinballs*, onde nova busca é efetuada para determinar *splitting pinballs* em contato e finalmente a partir destas calcular as forças de penalização e as acumular nos nós dos elementos.

No âmbito da técnica das *pinballs* foram apresentados dois algoritmos de busca baseados na subdivisão, em células cartesianas, da região do espaço onde ocorre o contato. Utilizando o número ótimo de células, os algoritmos apresentaram um tempo de processamento de ordem linear, O(N). Este fato constitui um evento animador, mas é ao mesmo tempo apenas um ponto de partida para a busca de algoritmos ainda mais eficientes.

Existem outros algoritmos que prometem uma eficiência semelhante. O trabalho de MUNJIZA (1998) utiliza uma metodologia similar ao dos algoritmos de células (*bucket sort*) para problemas envolvendo partículas discretas, empregando diversos tipos de estruturas de dados.

Em termos de avanços em pesquisa, uma das áreas que mais desenvolve novos algoritmos para detecção de colisões (*colision detection*) é a computação gráfica, que utiliza esses algoritmos para aplicativos de animação em tempo real (simuladores e *vídeo games*). Em BLOW (1998) são citados, em linhas gerais, vários algoritmos de busca, inclusive alguns para problemas semelhantes aos encontrados na utilização da técnica das *pinballs*.

Apesar do tratamento da colisão em programas de computação gráfica não envolver necessariamente algum modelo de comportamento físico, as tecnologias dos seus algoritmos de busca podem se adequar ao tratamento do problema de contato-impacto em mecânica dos sólidos. Os algoritmos que prometem maior desempenho,

possuem em comum uma tendência de utilização de estruturas de dados espaciais do tipo árvore, como as árvores binárias (*Binary Trees*), *Quadtrees, Octrees* (SAMET, 1998).

No momento, já se encontram em andamento os estudos para a adaptação de alguns desses algoritmos de busca de grande eficiência computacional aplicados às técnicas de *pinballs* e de *splitting pinballs*. Espera-se que com a comprovação do seu desempenho, se obtenha maior eficiência computacional nos programas que utilizam estas técnicas, que assim como outras técnicas que utilizam partículas discretas, requerem, para o seu bom funcionamento, a utilização de algoritmos de busca bastante otimizados.

Unindo todas estas considerações e experiências, tendo conseguido simular vários exemplos importantes de referência, uma das idéias em trabalhos futuros é reunir os diferentes elementos finitos estudados em um único programa capaz de simular problemas cuja discretização exija a utilização simultânea de elementos sólidos, casca, membranas e barras, como é fundamental em problemas de colisão de veículos.

Além desta, outras sugestões para implementações em trabalhos futuros são:

- A inclusão de formulações para a consideração do fenômeno de atrito;
- Estudo dos algoritmos de busca apresentados e de outros citados na literatura, visando a obtenção de maior eficiência computacional dos programas nesta fase das simulações;
- Aplicação e estudo dos fenômenos de penetração e fragmentação, para problemas de balística;
- Modelagem dos problemas de contato-impacto utilizando outros recursos da vasta tecnologia do método dos elementos finitos: formulação Lagrangeana-Euleriana arbitrária (*ALE*), análises adaptativas, entre outras;
- Avaliação dos possíveis ganhos com a utilização de técnicas de partição explícita/explícita;

- O estudo comparativo com os resultados das análises efetuadas utilizando outros programas desenvolvidos nas pesquisas acadêmicas ou os programas comerciais consagrados;

- Aplicação na análise e solução de problemas de importância real para as indústrias automobilística, petrolífera, de manufatura (conformação mecânica de metais), entre outras.

Referências Bibliográficas

ALVES, J. L. D., 1991, *Análise Transiente de Grandes Deformações em Computadores de Arquitetura Vetorial/Paralela*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

BATHE, K. J., 1982, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

BEISSEL, S. R., JOHNSON, G. R., 2000, "Large-Deformation Triangular and Tetrahedral Element Formulations for Unstructured Meshes", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 187, pp. 469-482.

BELYTSCHKO, T., 1983, "An Overview of Semidiscretization and Time Integration Procedures," in *Computational Methods for Transient Analysis*, T. Belytschko and T. J. R. Hughes (eds.), North-Holland, Amsterdam, pp. 1-65.

BELYTSCHKO, T., LIN, J. I., 1987,"A Three-Dimensional Impact-Penetration Algorithm with Erosion", *Comput. Struct.*, vol. 25, pp. 95-104.

BELYTSCHKO, T., NEAL, M. O., 1991a, "Contact-Impact by The Pinball Algorithm With Penalty and Lagrangean Methods", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 31, pp. 547-572.

BELYTSCHKO, T., PLASKACZ, E. J., CHIANG, H. Y., 1991b, "Explicit Finite Element Methods With Contact-Impact on SIMD Computers", *Computing Systems in Engineering*, vol. 2, No. 2/3, pp. 269-276.

BELYTSCHKO, T., YEH, I. S., 1993, "The Splitting Pinball Method for Contact-Impact Problems", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 105, pp. 375-393.

BELYTSCHKO, T., LIU, W. K., MORAN, B., 2000, *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley & Sons Ltd., England.

BENSON, D. J., HALLQUIST, J. O., 1990, "A Single Surface Contact Algorithm for The Postbuckling Analysis of Shell Structures", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 78, pp. 141-163.

BLOW, J., 1998, *Practical Collision Detection*, Lecture #177, http://www.bolt-action.com

BONET, J., BURTON, A. J., 1998, "A Simple Average Nodal Pressure Tetrahedral Element for Incompressible and Nearly Incompressible Dynamic Explicit Applications", *Commun. Numer. Meth. Engng.*, vol. 14, pp. 437-449.

BONET, J., MARRIOT, H., HASSAN, O., 2001, “Stability and Comparison of Different Linear Tetrahedral Formulations for Nearly Incompressible Explicit Dynamic Applications”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 50, pp. 119-133.

CANET, J. M., CARBONELL, J. B., 1987, “Estudio de Estructuras Sometidas a Esfuerzos de Impacto en Régimen Elastoplástico y con Grandes Deformaciones por El Método de Los Elementos Finitos. Parte II: Algoritmo de Contato-Impacto y Ejemplos”, *R. Int. de Met. Num. para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, vol. 3, N°3, pp. 275-296.

COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E., 1989, *Concepts and Application of Finite Element Analysis*, 3rd. Ed., Wiley, New York.

COSTA, L. A. G., QUARANTA, F., ALVES, J. L. D., 1997a, “An Implementation for the Analysis of Tridimensional Contact-Impact Problems by the Pinball Algorithm”, *XVIII CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia*, Brasilia/DF.

COSTA, L. A. G., 1997b, *Análise de Problemas Tridimensionais de Contato-Impacto Com Deslizamento Via Formulações Penalizadas de Elementos Finitos*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

HALLQUIST, J. O., GOUDREAU, G. L., BENSON, D. J., 1985, “Sliding Interfaces With Contact-Impact in Large-Scale Lagrangean Computations”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 51, pp. 107-137.

HUGHES, T. J. R., TAYLOR, R. L., SACKMAN, J. L., CURNIER, A., KANOKNUKULCHAI, W., 1976, “A Finite Element Method for a Class of Contact-Impact Problems”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 8, pp. 249 – 276.

HUGHES, T. J. R., 1984, “Numerical Implementation of Constitutive Models: Rate-Independent Deviatoric Plasticity”, in *Theorical Foundations for Large-Scale Computations for Non-Linear Material Behavior*, S. Nemat-Nasser, R. J. Asaro and G. A. Hegemeier (eds.), Martinus Nijhoff, Dordrecht, pp. 29 – 57.

HUGHES, T. J. R., 1987, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

HUNEK, I., 1993, “On a Penalty Formulation for Contact-Impact Problems”, *Comp. Struct.*, vol. 48, pp. 193-203.

JOHNSON, W., 1972, *Impact Strength of Materials*, Edward Arnold Ltd., London.

JOHNSON, G. R., SCHONHARDT, J. A., 1992, “Some Parametric Sensitivity Analyses for High Velocity Impact Computations”, *Nuclear Engrg. and Design*, vol. 138, pp. 75-91.

KAMOULAKOS, A., 1990, “A Simple Benchmark for Impact”, *Benchmark Magazine of NAFEMS – National Agency for Finite Element Methods and Standards – Contents July 1990*, Dr George Leckie (Ed.), Glasgow UK.

KIKUCHI, N., ODEN, J. T., 1988, “Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods”, *SIAM Studies in Applied Mathematics*, Philadelphia.

KULAK, R. F., FIALA, C., 1988, “Neptune: A System of Finite Element Programs for Three-Dimensional Nonlinear Analysis”, *Nuclear Engrg. and Design*, vol. 106, pp. 47-68.

KULAK, R. F., 1989, “Adaptive Contact Elements for Three-Dimensional Explicit Transient Analysis”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 43, pp. 277 - 292.

LAURSEN, T. A., 2002, *Computational Contact and Impact Mechanics – Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis*, Springer, Germany.

LIU, W. K., HU, Y-K., BELYTSCHKO, T., 1994, “Multiple Quadrature Underintegrated Finite Elements”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 37, pp. 3263-3289.

MUNJIZA, A., ANDREWS, K. R. F., 1998, “NBS Contact Detection Algorithm for Bodies of Similar Size”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 43, pp. 131-149.

NEAL, M. O., 1989, *Contact-Impact by The Pinball Algorithm With Penalty, Projection and Augmented Lagrangean Methods*, Ph. D. Dissertation, Northwestern University, Evanston IL.

PERSSON, P., 1996, *Parallel Numerical Procedures for The Solution of Contact-Impact Problems*, Licenciate Thesis 1996:49, Linkoping University, Linkoping.

QUARANTA, F., 1995, *Estratégias Computacionais para a Simulação de Problemas de Contato-Impacto via Formulações Penalizadas de Elementos Finitos*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

QUARANTA, F., 1998, *Avaliação Computacional de Uma Técnica Para a Detecção de Regiões de Contato em Simulações por Elementos Finitos*, Seminário de Qualificação ao Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

QUARANTA, F., ALVES, J. L. D., 1999, “Assessment of a Finite Element Implementation for Contact-Impact Analysis”, *Sixth Pan American Congress of Applied Mechanics-PACAM VI*, Rio de Janeiro, RJ.

SAMET, H., WEBBER, R. E., 1998, “Hierarchical Data Structures and Algorithms for Computer Graphics, Part I: Fundamentals,” IEEE Computer Graphics & Applications, pp. 48-68.

SILVA, E. F., 1997, *Implementação Computacional de Elemento de Casca com formulação Co-Rotacional para Análise Transiente*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

SILVA, E. F., ALVES, J. L. D., COUTINHO, A. L. G. A., 1999, “Performance of a parallel Finite Elements Code for Nonlinear Transient Analysis of Shell structures”, *Sixth Pan American Congress of Applied Mechanics - PACAM VI*, Rio de Janeiro, RJ.

SILVA, E. F., QUARANTA, F., ALVES, J. L. D., 2002, “An Implementation for Finite Element Contact-Impact Analysis of Shell Structures”, *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V)*, July 7-12, 2002, Vienna, Austria, Editors: Mang, H.A.; Rammerstorfer, F.G.; Eberhardsteiner, J., Publisher: Vienna University of Technology, Austria, ISBN 3-9501554-0-6, http://wccm.tuwien.ac.at .

STAINIER, L., PONTHOT, J. Ph., 1994, “An Improved One-Point Integration Method for Large Strain Elastoplastic Analysis”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 118, pp. 163 - 177.

UNDERWOOD, P., 1983, “Dynamic Relaxation”, in *Computational Methods for Transient Analysis*, T. Belytschko and T. J. R. Hughes (eds.), North-Holland, Amsterdam, pp. 245-263.

YAGAWA, G., OHTSUBO, H., TAKEDA, H., TOI, Y., AIZAWA, T., IKUSHIMA, T., 1984, “A Round Robin on Numerical Analyses for Impact Problems”, *Nuclear Engrg. and Design*, vol. 78, pp. 377-387.

YEH, I. S., 1992, *Adaptivity and Splitting Pinball Method in Nonlinear Structural Dynamics With Contact-Impact*, Ph. D. Dissertation, Northwestern University, Evanston IL.

ZHONG, Z.-H., 1993, *Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems*, Oxford University Press, Oxford.

ZHONG, Z.-H., MACKERIE, J., 1994a, “Contact-Impact Problems: A Review with Bibliography”, *Appl. Mech. Rev.* , vol. 47 N° 2.

ZHONG, Z.-H., NILSSON, L., 1994b, “Automatic Contact Searching Algorithm for Dynamic Finite Element Analysis”, *Comp. Struct.*, vol. 52, N° 2, pp. 187-197.

ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L., 1991, *The Finite Element Methods – Fourth Edition: Vol.1: Basic Formulation and Linear Problems, Vol.2: Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-Linearity*, McGraw Hill, London.

ZIENKIEWICZ, O. C., ROJEK, J., TAYLOR, R. L., PASTOR, M., 1998, "Triangles and Tetrahedra in Explicit Dynamic Codes for Solids", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 43, pp. 565-583.

Apêndices

Apêndice A - Coordenadas de Área das *Splitting Pinballs* no Elemento Triangular

Utilizando as equações (4.35) – (4.37) e a metodologia descrita na seção 4.5.2, é possível determinar as coordendas de área das *splitting pinballs* distribuídas uniformemente no elemento triangular linear. A tabela A.1 contém as coordenadas de área para cálculo dos centros das *splitting pinballs* no nível de refinamento n = 3.

Tabela A.1 – Coordenadas de Área das *Splitting Pinballs* no Elemento Triangular (n = 3).

Splitting Pinballs	ξ_i	ξ_j	ξ_m	***Splitting Pinballs***	ξ_i	ξ_j	ξ_m
1	22/24	1/24	1/24	**33**	10/24	7/24	7/24
2	20/24	2/24	2/24	**34**	8/24	8/24	8/24
3	19/24	4/24	1/24	**35**	7/24	10/24	7/24
4	17/24	5/24	2/24	**36**	5/24	11/24	8/24
5	16/24	7/24	1/24	**37**	4/24	13/24	7/24
6	14/24	8/24	2/24	**38**	2/24	14/24	8/24
7	13/24	10/24	1/24	**39**	1/24	16/24	7/24
8	11/24	11/24	2/24	**40**	13/24	1/24	10/24
9	10/24	13/24	1/24	**41**	11/24	2/24	11/24
10	8/24	14/24	2/24	**42**	10/24	4/24	10/24
11	7/24	16/24	1/24	**43**	8/24	5/24	11/24
12	5/24	17/24	2/24	**44**	7/24	7/24	10/24
13	4/24	19/24	1/24	**45**	5/24	8/24	11/24
14	2/24	20/24	2/24	**46**	4/24	10/24	10/24
15	1/24	22/24	1/24	**47**	2/24	11/24	11/24
16	19/24	1/24	4/24	**48**	1/24	13/24	10/24
17	17/24	2/24	5/24	**49**	10/24	1/24	13/24
18	16/24	4/24	4/24	**50**	8/24	2/24	14/24
19	14/24	5/24	5/24	**51**	7/24	4/24	13/24
20	13/24	7/24	4/24	**52**	5/24	5/24	14/24
21	11/24	8/24	5/24	**53**	4/24	7/24	13/24
22	10/24	10/24	4/24	**54**	2/24	8/24	14/24

23	8/24	11/24	5/24	**55**	1/24	10/24	13/24
24	7/24	13/24	4/24	**56**	7/24	1/24	16/24
25	5/24	14/24	5/24	**57**	5/24	2/24	17/24
26	4/24	16/24	4/24	**58**	4/24	4/24	16/24
27	2/24	17/24	5/24	**59**	2/24	5/24	17/24
28	1/24	19/24	4/24	**60**	1/24	7/24	16/24
29	16/24	1/24	7/24	**61**	4/24	1/24	19/24
30	14/24	2/24	8/24	**62**	2/24	2/24	20/24
31	13/24	4/24	7/24	**63**	1/24	4/24	19/24
32	11/24	5/24	8/24	**64**	1/24	1/24	22/24

Apêndice B - Coordenadas de Volume das *Splitting Pinballs* no Elemento Tetraédrico

Utilizando as equações (4.38) – (4.40) e a metodologia descrita na seção 4.5.2, é possível determinar as coordendas de volume das *splitting pinballs* distribuídas uniformemente no elemento tetraedrico linear.

A tabela B.1 contém as coordenadas de volume para cálculo dos centros das *splitting pinballs* no nível de refinamento n = 2 e a tabela B.2 contém as coordenadas de volume para cálculo dos centros das *splitting pinballs* no nível de refinamento n = 3.

Tabela B.1 – Coordenadas de Volume das *Splitting Pinballs* no Elemento Tetraédrico (n = 2).

Splitting Pinballs	ξ_i	ξ_j	ξ_m	ξ_p
1	39/48	3/48	3/48	3/48
2	27/48	15/48	3/48	3/48
3	15/48	27/48	3/48	3/48
4	3/48	39/48	3/48	3/48
5	31/48	7/48	7/48	3/48
6	19/48	19/48	7/48	3/48
7	7/48	31/48	7/48	3/48
8	27/48	3/48	15/48	3/48
9	15/48	15/48	15/48	3/48
10	3/48	27/48	15/48	3/48
11	19/48	7/48	19/48	3/48
12	7/48	19/48	19/48	3/48
13	15/48	3/48	27/48	3/48
14	3/48	15/48	27/48	3/48
15	7/48	7/48	31/48	3/48
16	3/48	3/48	39/48	3/48
17	31/48	7/48	3/48	7/48
18	19/48	19/48	3/48	7/48
19	7/48	31/48	3/48	7/48
20	27/48	3/48	3/48	15/48
21	15/48	15/48	3/48	15/48
22	3/48	27/48	3/48	15/48

23	19/48	7/48	3/48	19/48
24	7/48	19/48	3/48	19/48
25	15/48	3/48	3/48	27/48
26	3/48	15/48	3/48	27/48
27	7/48	7/48	3/48	31/48
28	3/48	3/48	3/48	39/48
29	3/48	31/48	7/48	7/48
30	3/48	19/48	19/48	7/48
31	3/48	7/48	31/48	7/48
32	3/48	15/48	15/48	15/48
33	3/48	3/48	27/48	15/48
34	3/48	19/48	7/48	19/48
35	3/48	7/48	19/48	19/48
36	3/48	3/48	15/48	27/48
37	3/48	7/48	7/48	31/48
38	7/48	3/48	31/48	7/48
39	19/48	3/48	19/48	7/48
40	31/48	3/48	7/48	7/48
41	15/48	3/48	15/48	15/48
42	7/48	3/48	19/48	19/48
43	19/48	3/48	7/48	19/48
44	7/48	3/48	7/48	31/48

Tabela B.2 – Coordenadas de Volume das *Splitting Pinballs* no Elemento Tetraedrico (n = 3).

Splitting Pinballs	ξ_i	ξ_j	ξ_m	ξ_p
1	87/96	3/96	3/96	3/96
2	79/96	7/96	7/96	3/96
3	75/96	15/96	3/96	3/96
4	67/96	19/96	7/96	3/96
5	63/96	27/96	3/96	3/96
6	55/96	31/96	7/96	3/96
7	51/96	39/96	3/96	3/96
8	43/96	43/96	7/96	3/96
9	39/96	51/96	3/96	3/96
10	31/96	55/96	7/96	3/96
11	27/96	63/96	3/96	3/96
12	19/96	67/96	7/96	3/96
13	15/96	75/96	3/96	3/96
14	7/96	79/96	7/96	3/96
15	3/96	87/96	3/96	3/96
16	75/96	3/96	15/96	3/96
17	67/96	7/96	19/96	3/96
18	63/96	15/96	15/96	3/96

19	55/96	19/96	19/96	3/96
20	51/96	27/96	15/96	3/96
21	43/96	31/96	19/96	3/96
22	39/96	39/96	15/96	3/96
23	31/96	43/96	19/96	3/96
24	27/96	51/96	15/96	3/96
25	19/96	55/96	19/96	3/96
26	15/96	63/96	15/96	3/96
27	7/96	67/96	19/96	3/96
28	3/96	75/96	15/96	3/96
29	63/96	3/96	27/96	3/96
30	55/96	7/96	31/96	3/96
31	51/96	15/96	27/96	3/96
32	43/96	19/96	31/96	3/96
33	39/96	27/96	27/96	3/96
34	31/96	31/96	31/96	3/96
35	27/96	39/96	27/96	3/96
36	19/96	43/96	31/96	3/96
37	15/96	51/96	27/96	3/96
38	7/96	55/96	31/96	3/96
39	3/96	63/96	27/96	3/96
40	51/96	3/96	39/96	3/96
41	43/96	7/96	43/96	3/96
42	39/96	15/96	39/96	3/96
43	31/96	19/96	43/96	3/96
44	27/96	27/96	39/96	3/96
45	19/96	31/96	43/96	3/96
46	15/96	39/96	39/96	3/96
47	7/96	43/96	43/96	3/96
48	3/96	51/96	39/96	3/96
49	39/96	3/96	51/96	3/96
50	31/96	7/96	55/96	3/96
51	27/96	15/96	51/96	3/96
52	19/96	19/96	55/96	3/96
53	15/96	27/96	51/96	3/96
54	7/96	31/96	55/96	3/96
55	3/96	39/96	51/96	3/96
56	27/96	3/96	63/96	3/96
57	19/96	7/96	67/96	3/96
58	15/96	15/96	63/96	3/96
59	7/96	19/96	67/96	3/96
60	3/96	27/96	63/96	3/96
61	15/96	3/96	75/96	3/96
62	7/96	7/96	79/96	3/96
63	3/96	15/96	75/96	3/96
64	3/96	3/96	87/96	3/96
65	79/96	7/96	3/96	7/96

66	67/96	19/96	3/96	7/96
67	55/96	31/96	3/96	7/96
68	43/96	43/96	3/96	7/96
69	31/96	55/96	3/96	7/96
70	19/96	67/96	3/96	7/96
71	7/96	79/96	3/96	7/96
72	75/96	3/96	3/96	15/96
73	67/96	7/96	3/96	19/96
74	63/96	15/96	3/96	15/96
75	55/96	19/96	3/96	19/96
76	51/96	27/96	3/96	15/96
77	43/96	31/96	3/96	19/96
78	39/96	39/96	3/96	15/96
79	31/96	43/96	3/96	19/96
80	27/96	51/96	3/96	15/96
81	19/96	55/96	3/96	19/96
82	15/96	63/96	3/96	15/96
83	7/96	67/96	3/96	19/96
84	3/96	75/96	3/96	15/96
85	63/96	3/96	3/96	27/96
86	55/96	7/96	3/96	31/96
87	51/96	15/96	3/96	27/96
88	43/96	19/96	3/96	31/96
89	39/96	27/96	3/96	27/96
90	31/96	31/96	3/96	31/96
91	27/96	39/96	3/96	27/96
92	19/96	43/96	3/96	31/96
93	15/96	51/96	3/96	27/96
94	7/96	55/96	3/96	31/96
95	3/96	63/96	3/96	27/96
96	51/96	3/96	3/96	39/96
97	43/96	7/96	3/96	43/96
98	39/96	15/96	3/96	39/96
99	31/96	19/96	3/96	43/96
100	27/96	27/96	3/96	39/96
101	19/96	31/96	3/96	43/96
102	15/96	39/96	3/96	39/96
103	7/96	43/96	3/96	43/96
104	3/96	51/96	3/96	39/96
105	39/96	3/96	3/96	51/96
106	31/96	7/96	3/96	55/96
107	27/96	15/96	3/96	51/96
108	19/96	19/96	3/96	55/96
109	15/96	27/96	3/96	51/96
110	7/96	31/96	3/96	55/96
111	3/96	39/96	3/96	51/96
112	27/96	3/96	3/96	63/96

113	19/96	7/96	3/96	67/96
114	15/96	15/96	3/96	63/96
115	7/96	19/96	3/96	67/96
116	3/96	27/96	3/96	63/96
117	15/96	3/96	3/96	75/96
118	7/96	7/96	3/96	79/96
119	3/96	15/96	3/96	75/96
120	3/96	3/96	3/96	87/96
121	3/96	79/96	7/96	7/96
122	3/96	67/96	19/96	7/96
123	3/96	55/96	31/96	7/96
124	3/96	43/96	43/96	7/96
125	3/96	31/96	55/96	7/96
126	3/96	19/96	67/96	7/96
127	3/96	7/96	79/96	7/96
128	3/96	67/96	7/96	19/96
129	3/96	63/96	15/96	15/96
130	3/96	55/96	19/96	19/96
131	3/96	51/96	27/96	15/96
132	3/96	43/96	31/96	19/96
133	3/96	39/96	39/96	15/96
134	3/96	31/96	43/96	19/96
135	3/96	27/96	51/96	15/96
136	3/96	19/96	55/96	19/96
137	3/96	15/96	63/96	15/96
138	3/96	7/96	67/96	19/96
139	3/96	3/96	75/96	15/96
140	3/96	55/96	7/96	31/96
141	3/96	51/96	15/96	27/96
142	3/96	43/96	19/96	31/96
143	3/96	39/96	27/96	27/96
144	3/96	31/96	31/96	31/96
145	3/96	27/96	39/96	27/96
146	3/96	19/96	43/96	31/96
147	3/96	15/96	51/96	27/96
148	3/96	7/96	55/96	31/96
149	3/96	3/96	63/96	27/96
150	3/96	43/96	7/96	43/96
151	3/96	39/96	15/96	39/96
152	3/96	31/96	19/96	43/96
153	3/96	27/96	27/96	39/96
154	3/96	19/96	31/96	43/96
155	3/96	15/96	39/96	39/96
156	3/96	7/96	43/96	43/96
157	3/96	3/96	51/96	39/96
158	3/96	31/96	7/96	55/96
159	3/96	27/96	15/96	51/96

160	3/96	19/96	19/96	55/96
161	3/96	15/96	27/96	51/96
162	3/96	7/96	31/96	55/96
163	3/96	3/96	39/96	51/96
164	3/96	19/96	7/96	67/96
165	3/96	15/96	15/96	63/96
166	3/96	7/96	19/96	67/96
167	3/96	3/96	27/96	63/96
168	3/96	7/96	7/96	79/96
169	3/96	3/96	15/96	75/96
170	7/96	3/96	79/96	7/96
171	19/96	3/96	67/96	7/96
172	31/96	3/96	55/96	7/96
173	43/96	3/96	43/96	7/96
174	55/96	3/96	31/96	7/96
175	67/96	3/96	19/96	7/96
176	79/96	3/96	7/96	7/96
177	7/96	3/96	67/96	19/96
178	15/96	3/96	63/96	15/96
179	19/96	3/96	55/96	19/96
180	27/96	3/96	51/96	15/96
181	31/96	3/96	43/96	19/96
182	39/96	3/96	39/96	15/96
183	43/96	3/96	31/96	19/96
184	51/96	3/96	27/96	15/96
185	55/96	3/96	19/96	19/96
186	63/96	3/96	15/96	15/96
187	67/96	3/96	7/96	19/96
188	7/96	3/96	55/96	31/96
189	15/96	3/96	51/96	27/96
190	19/96	3/96	43/96	31/96
191	27/96	3/96	39/96	27/96
192	31/96	3/96	31/96	31/96
193	39/96	3/96	27/96	27/96
194	43/96	3/96	19/96	31/96
195	51/96	3/96	15/96	27/96
196	7/96	55/96	3/96	31/96
197	7/96	3/96	43/96	43/96
198	15/96	3/96	39/96	39/96
199	19/96	3/96	31/96	43/96
200	27/96	3/96	27/96	39/96
201	31/96	3/96	19/96	43/96
202	39/96	3/96	15/96	39/96
203	43/96	3/96	7/96	43/96
204	7/96	3/96	31/96	55/96
205	15/96	3/96	27/96	51/96
206	19/96	3/96	19/96	55/96

207	27/96	3/96	15/96	51/96
208	31/96	3/96	7/96	55/96
209	7/96	3/96	19/96	67/96
210	15/96	3/96	15/96	63/96
211	19/96	3/96	7/96	67/96
212	7/96	3/96	7/96	79/96