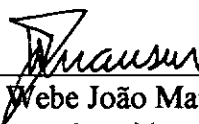


MODELO DISCRETO PARA ESTRUTURAS MULTILAMINADAS COM
CONTINUIDADE DE TENSÕES NAS INTERFACES

Amir Elias Abdalla Kurban

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
CIVIL.

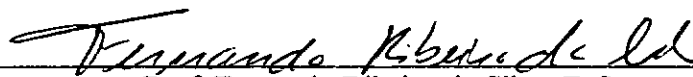
Aprovada por:



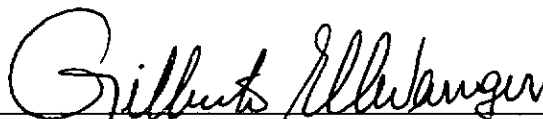
Prof. Webe João Mansur, Ph.D.
(Presidente)



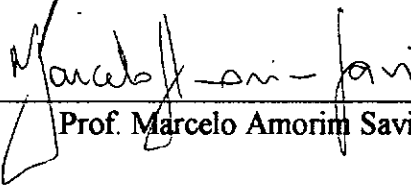
Prof. Humberto Lima Soriano, D.Sc.



Prof. Fernando Ribeiro da Silva, D.Sc.



Prof. Gilberto Bruno Ellwanger, D.Sc.



Prof. Marcelo Amorim Savi, D.Sc.



Prof. Pedro Colmar Gonçalves da Silva Vellasco, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ, BRASIL

AGOSTO DE 1999

KURBAN, AMIR ELIAS ABDALLA

Modelo Discreto para Estruturas

Multilaminadas com Continuidade de Tensões
nas Interfaces [Rio de Janeiro] 1999

XV, 127 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,
Engenharia Civil, 1999)

Tese – Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Estruturas multilaminadas
2. Cascas laminadas
3. Vigas laminadas
4. Compósitos
5. Método dos Elementos Finitos

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

DEDICATÓRIA

À minha querida esposa Vera Lúcia e aos meus
filhos, André e Paulo, cujo apoio e confiança
tornaram possível o presente trabalho.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Humberto Lima Soriano, pela sua inestimável orientação e pelos ensinamentos que transcenderam os assuntos acadêmicos.

Ao professor Webe João Mansur, pela predisposição em ajudar, principalmente nos momentos que seu auxílio se fez necessário.

Ao Cel. Paulo Roberto Dias Morales, um amigo para todas as horas e que jamais negou apoio para a conclusão deste trabalho.

Aos companheiros e funcionários da COPPE/UFRJ e do IME, pela atenção que sempre me dedicaram.

À CAPES pelo apoio financeiro concedido.

Ao Exército Brasileiro, ao Instituto Militar de Engenharia e ao Departamento de Engenharia de Fortificação e Construção, instituições nobres e valorosas que me concederam a oportunidade de realizar o curso que culmina com a presente tese e assim contribuir para o engrandecimento de nosso estimado Brasil.

À minha “sêtt” Rahje Abdalla (in memoriam) pela benção que recebi ainda criança e que tem iluminado meu caminho.

Ao meu pai, Anis Chedid Kurban (in memoriam), e ao meu tio Antonio Jorge Abdalla (in memoriam) de quem guardo as mais tenras lembranças e cuja memória sempre me cedeu inspiração e forças para superar obstáculos.

À minha mãe, Clara Abdalla Kurban, exemplo de luta e perseverança, e irmãos, Antonio Jorge, Anis Carlos, Maria do Rosário e Adib Paulo, cujo estímulo sempre pude sentir, apesar da distância que nos separa.

Em especial, à minha querida esposa Vera Lúcia e aos meus amados filhos André e Paulo, a quem devo a razão de viver, a confiança, a vontade e a motivação para vencer mais esta etapa de minha vida profissional.

A Deus, que se faz presente ao me permitir conviver com todas as pessoas a quem dirijo esses agradecimentos.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D. Sc.)

MODELO DISCRETO PARA ESTRUTURAS MULTILAMINADAS COM
CONTINUIDADE DE TENSÕES NAS INTERFACES

Amir Elias Abdalla Kurban

Agosto/ 1999

Orientadores: Webe João Mansur
Humberto Lima Soriano

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho visou o desenvolvimento de teorias necessárias para a formulação de elementos finitos para vigas e cascas laminadas e a conseqüente implementação computacional desses elementos.

A teoria apresentada aqui para a análise de vigas e cascas laminadas inclui efeitos da distorção transversal e atende às condições de compatibilidade de deslocamentos e de continuidade de tensões de cisalhamento nas interfaces das lâminas.

Para a análise de vigas laminadas, a teoria desenvolvida foi implementada para um elemento unidimensional com 3 nós e oito graus de liberdade e para a análise de cascas, a teoria desenvolvida foi implementada para um elemento quadrático serendipity, com 5 graus de liberdade por nó.

Foram analisadas várias aplicações numéricas e os valores obtidos foram comparados com os fornecidos pela literatura existente. Os resultados mostraram a versatilidade dos elementos e que esses apresentam boa acurácia para a análise de vigas e cascas laminadas, finas ou espessas.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D. Sc.)

DISCRETE MODEL FOR MULTILAYERED STRUCTURES WITH CONTINUOUS
INTERLAMINAR STRESSES

Amir Elias Abdalla Kurban

August/1999

Advisors: Webe João Mansur

Humberto Lima Soriano

Department: Civil Engineering

This work aimed to develop the necessary theory to formulate laminated beam and shell finite elements and to implement those elements computationally.

The theory presented here to analyze laminated beams and shells includes transverse shearing strain effects and allows the contact conditions for the compatibility of displacements and the continuity of transverse shear stresses to be satisfied simultaneously at the layer interfaces.

To analyze laminated beams, the developed theory was implemented for a 3-node 8-dof one-dimensional element. The laminated shells were considered with the aid of an 8-node 5-dof quadratic serendipity element specially designed for this task.

Several numerical applications have been performed and the obtained values were compared to current literature formulations. The numerical results indicate that the beam and shell laminated elements are quite versatile and that they perform accurately for the analysis of both thick and thin layered composite beams and shells.

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

LETRAS ROMANAS

A, B	coeficientes da primeira forma fundamental da superfície de referência
a_k, b_k, c_k, d_k	coeficientes de correção da rotação da normal em cada camada
b	largura da seção transversal da viga
C_{ij}	constantes elásticas (notação abreviada)
C_{ijkl}	constantes elásticas
E_{ij}	módulo de elasticidade longitudinal
E_L	módulo de elasticidade longitudinal, na direção longitudinal às fibras
E_T	módulo de elasticidade longitudinal, na direção transversal às fibras
G_{ij}	módulo de elasticidade transversal
h	altura (espessura)
H_α, H_β	coeficientes de Lamé (segunda forma fundamental da superfície)
J	Jacobiano
J_S	Jacobiano de superfície
$[K]$	matriz de rigidez
$[K_\theta]$	matriz de rigidez considerando os graus de liberdade $\theta_{i\xi}$ e $\theta_{i\eta}$
$[K_\phi]$	matriz de rigidez considerando os graus de liberdade $\phi_{i\xi}$ e $\phi_{i\eta}$
L	vão
l, m, n	cossenos diretores
N	funções de interpolação

\mathbf{n}	vetor unitário normal à superfície
n_i	número de interfaces entre camadas
p	pressão normal.
\bar{q} e \bar{p}	esforços externos
\mathbf{r}	vetor posição
R_α, R_β	raios de curvatura segundo as direções principais
T	matriz de cossenos diretores
t_{ij}	cossenos diretores
U	energia de deformação
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	deslocamentos da superfície de referência
u, v, w	componentes do deslocamento de um ponto
V_{1i}, V_{2i}, V_{3i}	vetores nodais
W_1, W_2	pesos da quadratura gaussiana
$Y(z - z_k)$	função unitária de Heaviside que apresenta valor unitário se $z > z_k$ e valor nulo se $z \leq z_k$
z_i	coordenada da interface i ao longo da espessura

LETRAS GREGAS

α, β	linhas principais de curvatura
Γ	contorno do corpo sobre o qual forças externas são prescritas
γ_{ij}	distorção
Δ	deslocamentos

ε_{ij}	componentes de deformação
θ	rotação total da normal
ν_{ij}	coeficiente de Poisson
ξ, η, ζ	sistema de coordenadas locais
σ_{ij}	componentes de tensão
Φ	energia de deformação
ϕ_α, ϕ_β	rotações da normal devidas ao cisalhamento
ϕ	rotação de uma fibra
χ	matriz de transformação
ψ_k, ϑ_k	fatores de continuidade da tensão de cisalhamento
\cdot	produto escalar
\times	produto vetorial

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 2.1	Compósitos de fibras.	5
FIGURA 2.2	Compósitos de partículas.	5
FIGURA 2.3	Laminados.	6
FIGURA 2.4	Compósitos de flocos.	6
FIGURA 2.5	Compósitos com preenchimento.	6
FIGURA 2.6	Painéis de estruturas sanduíche com (a) núcleo de material plástico, (b) núcleo em colméia e (c) núcleo corrugado.	9
FIGURA 2.7	Variações da idéia de núcleo em colméia.	10
FIGURA 2.8	Variações de núcleos corrugados.	11
FIGURA 3.1	Tensões no paralelepípedo elementar de um corpo elástico.	15
FIGURA 3.2	Cisalhamento no paralelepípedo elementar.	15
FIGURA 3.3	Sistema de coordenadas para um plano de simetria.	18
FIGURA 4.1	Sistema de coordenadas, número de lâminas e interfaces de uma viga laminada.	28
FIGURA 4.2	Campo de deslocamentos admitido.	30
FIGURA 4.3	Campo de deslocamentos de uma viga laminada.	35
FIGURA 4.4	Sistema de eixos principais do material (1,2,3), eixos geométricos da viga e sentido positivo do ângulo φ .	38
FIGURA 4.5	Esquema do carregamento externo da viga laminada.	45
FIGURA 4.6	Elemento finito de viga laminada.	48
FIGURA 4.7	Viga homogênea isotrópica de aço	52
FIGURA 4.8	Viga laminada ortotrópica.	55

FIGURA 5.1	Croqui da Cápsula Apollo.	57
FIGURA 5.2	Sistema sanduíche da cápsula Apollo.	58
FIGURA 5.3	Elemento da cúpula de Hanover (1970).	59
FIGURA 5.4	Divisão Esquemática das Teorias para Cascas Laminadas.	60
FIGURA 5.5	O vetor posição antes e após a deformação.	68
FIGURA 5.6	O campo de deslocamentos.	72
FIGURA 5.7	Vetores nodais.	82
FIGURA 5.8	Elemento Serendipity de 8 nós.	95
FIGURA 5.9	Gráfico dos deslocamentos do ponto central da placa obtidos em função da variação da espessura.	105
FIGURA 5.10	Casca homogênea.	106
FIGURA 5.11	Casca Laminada.	108
FIGURA 5.12	Ângulo de orientação das fibras para placas e cascas laminadas.	110
FIGURA 5.13	Gráfico de deslocamentos do ponto central da casca cilíndrica para disposição das camadas em 0.	113
FIGURA 5.14	Gráfico de deslocamentos do ponto central da casca cilíndrica para disposição das camadas em $-45/45$.	113
FIGURA 5.15	Gráfico de deslocamentos do ponto central da casca cilíndrica para disposição das camadas em $45/-45/-45/45$.	114
FIGURA 5.16	Gráfico de deslocamentos do ponto central da casca cilíndrica para disposição das camadas em $0/90/90/0$.	114

LISTA DE TABELAS

TABELA 3.1:	Cossenos diretores para materiais com um plano de simetria.	18
TABELA 3.2:	Número de coeficientes elásticos envolvidos em determinadas classes de materiais.	24
TABELA 4.1:	Deslocamentos transversais na extremidade livre.	53
TABELA 4.2:	Efeito de travamento (“locking”).	54
TABELA 4.3:	Valores de deslocamento transversal na extremidade livre.	56
TABELA 5.1:	Deslocamentos do ponto central (espessura 0,05 m).	102
TABELA 5.2:	Deslocamentos do ponto central (espessura 0,01 m).	103
TABELA 5.3:	Valores obtidos para os deslocamentos no ponto central da casca em função da variação da espessura.	104
TABELA 5.4:	Deslocamentos da extremidade da casca homogênea engastada.	107
TABELA 5.5:	Deslocamento radial do ponto central de casca cilíndrica.	111

ÍNDICE

RESUMO	v
ABSTRACT	vi
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS	vii
LISTA DE ILUSTRAÇÕES	x
LISTA DE TABELAS	xii
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	
1.1 - Objetivos	1
1.2 - Justificativa	1
1.3 - Organização da Tese	3
CAPÍTULO 2 - COMPÓSITOS ESTRUTURAIS	
2.1 - Introdução	4
2.2 - Tipos de Compósitos	5
2.3 - Estruturas Laminadas	7
CAPÍTULO 3 - FUNDAMENTOS DE ELASTICIDADE ANISOTRÓPICA	
3.1 - Introdução	14
3.2 - Materiais Anisotrópicos	16
3.3 - Materiais com um Plano de Simetria	18
3.4 - Materiais Ortotrópicos	20
3.5 - Materiais Transversalmente Isotrópicos	21
3.6 - Materiais Isotrópicos	22

CAPÍTULO 4 - ELEMENTO FINITO PARA VIGAS LAMINADAS

4.1 - Introdução	25
4.2 - Descrição Cinemática	27
4.2.1 - Relações Fundamentais	27
4.2.2 - Determinação do Fator de Continuidade de Tensão Cisalhante	31
4.2.3 - Campo de Deslocamentos	34
4.2.4 - Relações Deformação – Deslocamento	36
4.3 - Relações Constitutivas	36
4.4 - Princípio dos Trabalhos Virtuais	40
4.4.1 - Energia de Deformação	41
4.4.2 - Trabalho das Forças Externas	44
4.5 - Formulação de Modelo de Elementos Finitos para Vigas Laminadas	47
4.6 - Aplicações Numéricas	50
4.6.1 - Viga Homogênea Isotrópica	51
4.6.2 - Viga Laminada Ortotrópica	54

CAPÍTULO 5 - ELEMENTO FINITO PARA CASCAS LAMINADAS

5.1 - Introdução	57
5.2 - Fundamentos de Teoria de Continuidade de Tensões	67
5.3 - Expressões Iniciais para o Campo de Deslocamentos e para Deformações	70
5.4 - Determinação dos Fatores de Continuidade de Tensões Cisalhantes	74
5.5 - Expressões Finais para o Campo de Deslocamentos e para Deformações	77
5.6 - Formulação de Modelo de Elementos Finitos para Cascas Laminadas	79
5.7 - Particularização ao Elemento Serendipity de 8 Nós	95
5.8 - Aplicações Numéricas	100

5.8.1 - Placa Homogênea	100
5.8.2 - Casca Homogênea	105
5.8.3 - Casca Laminada	107
CAPÍTULO 6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS	
6.1 - Conclusões	115
6.2 - Sugestões para Pesquisa	117
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	119

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 OBJETIVOS

O presente trabalho tem por objetivos desenvolver a teoria e formular elementos finitos para vigas e cascas laminadas, respeitando a compatibilidade de deslocamentos e a continuidade de tensões de cisalhamento nas interfaces, além de implementar os programas computacionais correspondentes.

1.2 JUSTIFICATIVA

Em muitos projetos, especialmente nas indústrias aeroespacial, automotiva e petroquímica, as vigas, placas e cascas constituídas de materiais compósitos estão sendo utilizadas amplamente como elementos estruturais. Isso se deve ao fato de que, para resolver os problemas emergentes necessita-se de novos materiais que ofereçam melhor desempenho do que os existentes. Assim, a comunidade científica internacional vem dedicando interesse crescente ao desenvolvimento de teorias e métodos para analisar estruturas constituídas de materiais compósitos.

Se, por um lado, os materiais compósitos oferecem muitas características estruturais desejáveis, por outro apresentam comportamento e processos de fabricação mais complexos. Os materiais compósitos estão inseridos em uma área interdisciplinar onde engenheiros estruturais, mecânicos e químicos colaboram para o produto final.

Laminados, por sua vez, consistem da união de duas ou mais camadas de materiais distintos. Procura-se com isso combinar as melhores propriedades de seus constituintes de modo a obter um compósito adequado para uma determinada aplicação. Resistência, rigidez e condutividade térmica são algumas dessas propriedades que variam com a direção, no caso de camadas anisotrópicas. Estruturas que exigem que seus materiais constituintes apresentem altos valores de resistência e rigidez em relação ao de sua densidade utilizam amplamente laminados, como é o caso de mísseis, foguetes, blindados, próteses etc. Em muitas aplicações é possível, usando materiais laminados, obter a mesma rigidez do aço com uma economia de 30% no peso. Pode-se ainda conseguir o triplo da resistência do alumínio com um peso 40% menor [1].

Os primeiros estudos sobre estruturas constituídas de materiais laminados foram praticamente adaptações de teorias existentes para materiais homogêneos. Em face das hipóteses simplificadoras empregadas, seu campo de atuação ficava muito limitado. Isso levou à criação de teorias mais sofisticadas para refletir melhor o comportamento físico real das estruturas nas quais era feito um refinamento do campo de deslocamentos pela inclusão novos termos. Para satisfazer às condições cinemáticas de equilíbrio, foram introduzidos no campo de deslocamentos, termos que possibilitassem a compatibilidade de deslocamentos e a continuidade de tensões de cisalhamento nas interfaces. No entanto, de uma maneira geral, as teorias e formulações existentes sobre estruturas laminadas, listadas nas referências bibliográficas e destacadas nos capítulos subseqüentes, mostram complexidade crescente com o aumento do número de camadas.

O presente trabalho apresenta teorias para vigas e cascas laminadas nas quais é verificada a continuidade de tensões de cisalhamento entre as camadas sem que se faça necessária a utilização de maior número de incógnitas do que o envolvido na análise de

estruturas homogêneas, segundo desenvolvimento não encontrado pelo autor na literatura à qual teve acesso.

1.3 ORGANIZAÇÃO DA TESE

Esta tese é composta de seis capítulos, sendo este primeiro dedicado à motivação e ao posicionamento inicial do trabalho no contexto do assunto.

O Capítulo 2 descreve os tipos de compósitos e de estruturas laminadas e faz uma apresentação das noções introdutórias de materiais compósitos e laminados.

O Capítulo 3 destina-se a apresentar os fundamentos da elasticidade anisotrópica e as matrizes constitutivas referentes aos vários tipos de anisotropia que os materiais podem exibir.

O Capítulo 4 é destinado à análise de vigas laminadas. Nesse capítulo são desenvolvidas as equações de uma teoria que atenda às condições de compatibilidade de deslocamentos e de continuidade da tensão de cisalhamento nas interfaces das lâminas. A seguir, finalizando o capítulo, são apresentados alguns resultados da utilização do programa computacional implementado segundo a teoria desenvolvida.

O Capítulo 5 é destinado à análise de cascas laminadas. Seguindo em linhas gerais o mesmo procedimento do capítulo anterior, dedicado às vigas laminadas, inicialmente são desenvolvidas as equações necessárias para uma teoria que respeite a compatibilidade de deslocamentos e a continuidade de tensões de cisalhamento nas interfaces, a seguir é formulado um elemento finito compatível com essa teoria e finalmente são apresentadas algumas aplicações práticas do programa implementado.

O Capítulo 6 expõe as conclusões do presente trabalho sobre o assunto e contém sugestões para futuros trabalhos.

CAPÍTULO 2

COMPÓSITOS ESTRUTURAIS

2.1 INTRODUÇÃO

A combinação de dois ou mais materiais para formar um compósito estrutural com melhores propriedades é um fato histórico bem documentado [1]. Os trabalhadores judeus sob o jugo egípcio incluíam palha em seus tijolos como um meio de aumentar sua integridade estrutural. Os samurais usavam metais laminados ao forjar suas espadas para obter as propriedades desejadas. Alguns artesãos do Mediterrâneo usavam uma espécie de tecnologia de materiais compósitos para fazer os moldes de seus trabalhos, que eram fabricados colocando pedaços de papel de tamanhos diferentes em várias camadas para produzir as formas e contornos desejados. Os compósitos são construídos visando a obtenção de melhores características do que os materiais convencionais. Algumas das propriedades que podem ser melhoradas com a utilização de compósitos são: rigidez, resistência estrutural, peso, resistência à corrosão, propriedades térmicas, resistência à fadiga e resistência ao desgaste. Os compósitos encontram utilização em vários sistemas estruturais, incluindo estruturas aerospaciais e submarinas, automóveis, carros de combate, equipamentos de esportes, próteses médicas e placas de circuitos eletrônicos. Exigências funcionais e mecânicas de projeto obrigam os engenheiros a procurarem métodos práticos e precisos para determinar as características estáticas e dinâmicas dos componentes estruturais.

2.2 TIPOS DE COMPÓSITOS

Para apresentar o assunto de uma maneira consistente, torna-se necessário definir precisamente o que constitui esta classe de materiais. Sob um ponto de vista meramente introdutório, muitos pesquisadores definem materiais compósitos como sendo uma combinação de dois ou mais materiais para obter um novo material ou uma propriedade específica. Conforme a composição estrutural dos materiais compostos, pode-se distinguir os seguintes tipos de compósitos:

- Compósitos de Fibras (Figura 2.1)

Constituídos de fibras contínuas ou não, imersas em outro material.

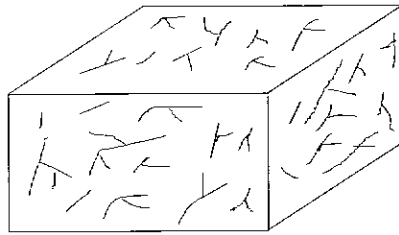


FIGURA 2.1: Compósitos de fibras.

- Compósitos de Partículas (Figura 2.2)

Constituídos de partículas de um determinado material inseridas em outro.

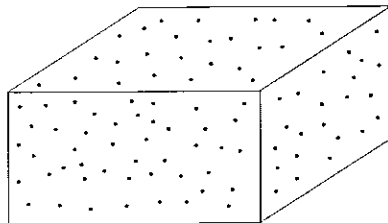


FIGURA 2.2: Compósitos de partículas.

- Laminados (Figura 2.3)

Constituídos de lâminas de materiais diferentes.

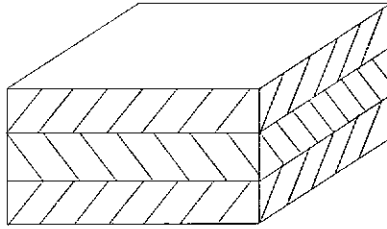


FIGURA 2.3: Laminados.

- Compósitos de Flocos (Figura 2.4)

Constituídos de flocos planos imersos em outro material.

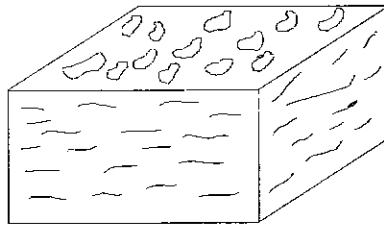


FIGURA 2.4: Compósitos de flocos.

- Compósitos com Preenchimento (Figura 2.5)

Constituídos de uma estrutura contínua com a função de matriz e preenchida por um segundo material.

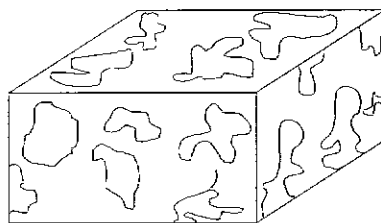


FIGURA 2.5: Compósitos com preenchimento.

VINSON e SIERAKOWSKI [1] definem compósitos como “combinações de elementos que diferem entre si em composição ou forma, em termos macroscópicos. Em geral, as fibras constituintes podem ser feitas pelo homem, são insolúveis, conservam suas características no interior do material composto e podem ser contínuas ou descontínuas”.

2.3 ESTRUTURAS LAMINADAS

Estruturas laminadas são constituídas por lâminas, unidas, de no mínimo, dois materiais que diferem em constituição e/ou direção das fibras. O objetivo é combinar as melhores propriedades de seus constituintes, de modo a obter um componente estrutural adequado a uma determinada aplicação. Geralmente, estas estruturas são formadas com lâminas dos mais variados materiais (isotrópicos, ortotrópicos ou anisotrópicos).

Uma típica estrutura de três lâminas é usualmente chamada de estrutura sanduíche. Estruturas sanduíches são constituídas por uma lâmina espessa, de pequena resistência e densidade, intercalada entre duas lâminas finas, de alta resistência e peso. As duas lâminas finas são chamadas *faces*, e a intermediária é o núcleo da estrutura sanduíche. O tipo mais simples de estrutura sanduíche consiste de duas chapas de material denso separado por uma camada espessa que pode ser muito menos rígida e resistente. (Figura 2.6a). Uma regra prática determinada por ALLEN [2] indica que se obtém uma estrutura sanduíche eficiente quando o peso do núcleo é aproximadamente igual ao peso combinado das faces. O conjunto assim formado apresenta baixo peso próprio, aliado à alta rigidez à flexão e resistência à flambagem. Nos programas aeroespaciais Apollo e Saturno foram utilizados sistemas sanduíches constando de duas lâminas exteriores de

ção e um núcleo do tipo colméia, conforme a representação da Figura 2.6b. Em asas de aviões convencionais o sistema sanduíche também tem sido empregado com muito sucesso. Nessas aplicações, o núcleo é uma lâmina de material viscoelástico que tem como característica principal um alto poder de dissipação de energia. Dessa forma, o núcleo é utilizado no controle de vibrações e ruídos, e também no combate à fadiga estrutural.

Em uma estrutura sanduíche, o núcleo e as faces desempenham papéis distintos. Dentre as funções do núcleo de uma estrutura sanduíche, distinguem-se duas: o núcleo deve manter as faces separadas e garantir a estabilidade das mesmas. Ele deve, portanto, possuir uma certa rigidez em relação às deformações normais ao plano das faces. Além disso, o núcleo deve permitir às faces se comportarem praticamente como membrana, devendo, assim, possuir uma certa rigidez ao cisalhamento nos planos normais a elas. É também importante que o adesivo que une as lâminas não seja muito flexível, para não permitir movimentos relativos substanciais entre as faces e o núcleo. Se estes movimentos forem permitidos, as faces se comportarão como duas estruturas independentes e o núcleo não desempenhará sua função de aumentar a rigidez do conjunto.

Constata-se, pelas estruturas sanduíches clássicas, que o núcleo, muito espesso, suporta praticamente todos os efeitos do cisalhamento e que as faces finas resistem ao efeito da flexão. Em linhas gerais, o papel do núcleo é de manter as faces separadas de modo a aumentar a rigidez do sistema sem muito ganho de peso. Painéis utilizados em estruturas espaciais empregam quase invariavelmente faces metálicas com núcleos em colméia (Figura 2.6b) ou corrugados (Figura 2.6c). Determinadas variações da idéia de núcleo em colméia são ilustradas na Figura 2.7 e variações da idéia de núcleo corrugado são apresentadas na Figura 2.8.

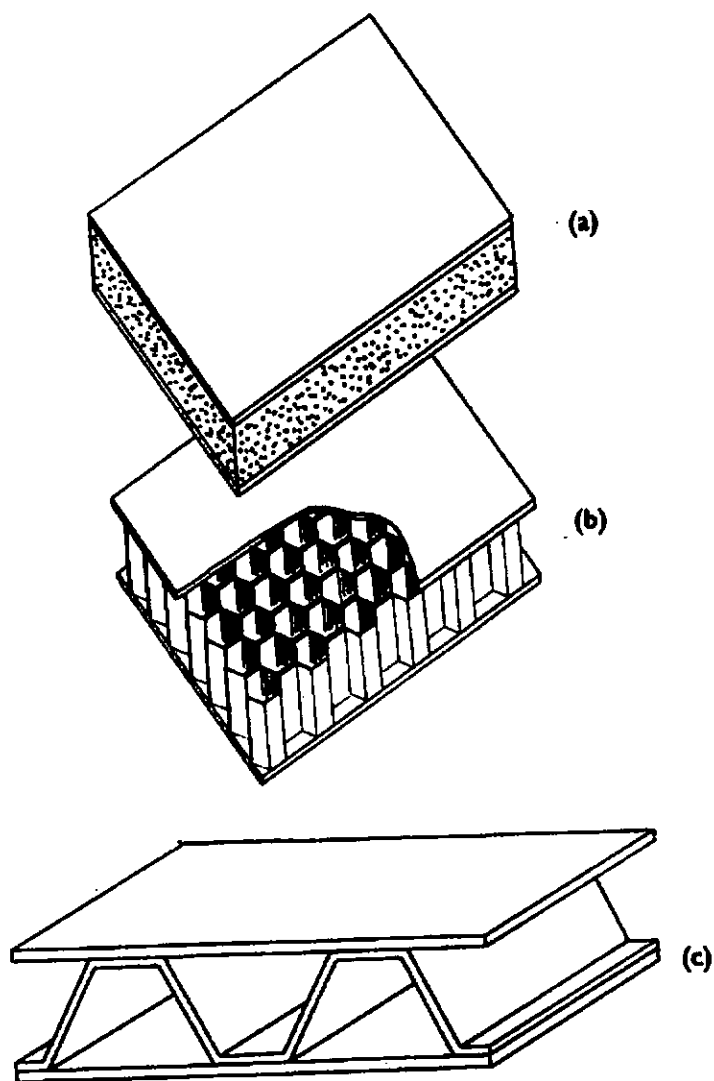


FIGURA 2.6: Painéis de estruturas sanduíche com (a) núcleo de material plástico, (b) núcleo em colméia e (c) núcleo corrugado.

Em aplicações atuais de estruturas sanduíche, em especial na construção civil, estas tendem a ser projetadas com faces relativamente espessas. Nessas circunstâncias, as suposições feitas quando as faces são finas, deixam de ser válidas, já que ocorre uma introdução adicional de forças cisalhantes nas faces. Assim sendo, torna-se importante estabelecer os limites em que as faces podem ser consideradas finas. De uma certa forma,

esses limites dependem da distância entre o eixo médio de faces opostas/espessura da lâmina das faces.

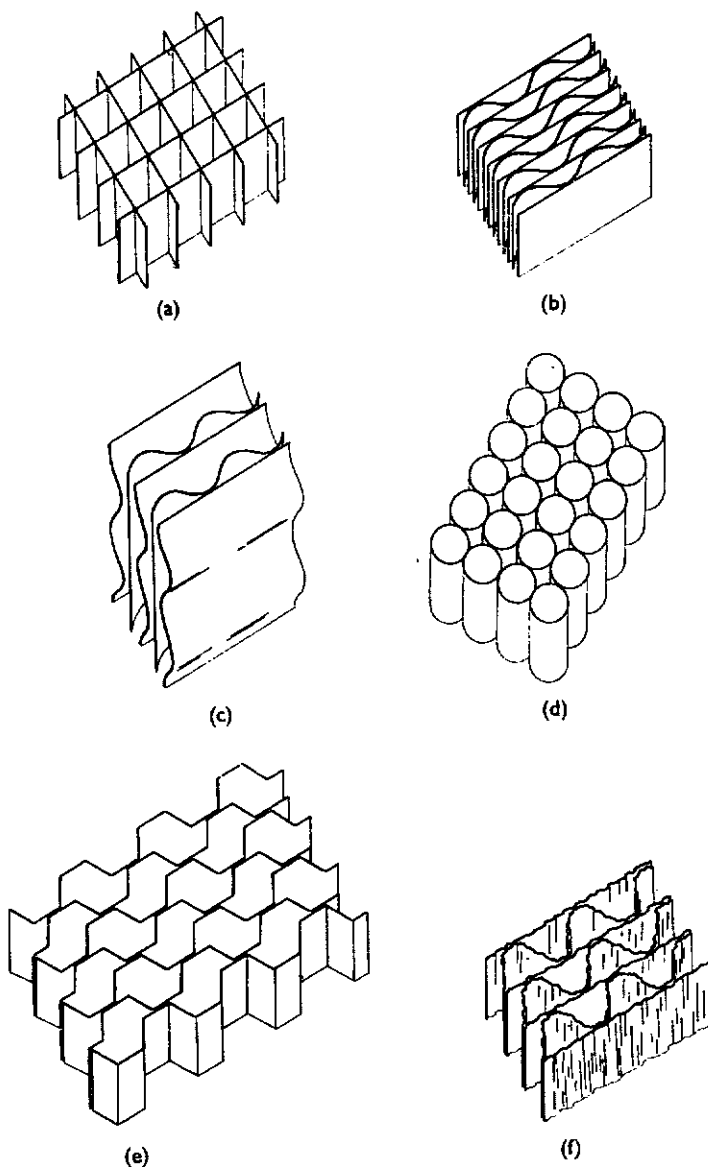


FIGURA 2.7: Variações da idéia de núcleo em colméia.

A teoria clássica de estruturas sanduíche considera os efeitos de alongamento e flexão das faces e a deformação de cisalhamento do núcleo. Teorias mais recentes incluem, além dos efeitos já citados, a deformação cisalhante nas faces e a ação de alongamento e

flexão do núcleo. De certa forma, essas teorias são extensões diretas da teoria de Timoshenko para viga homogênea.

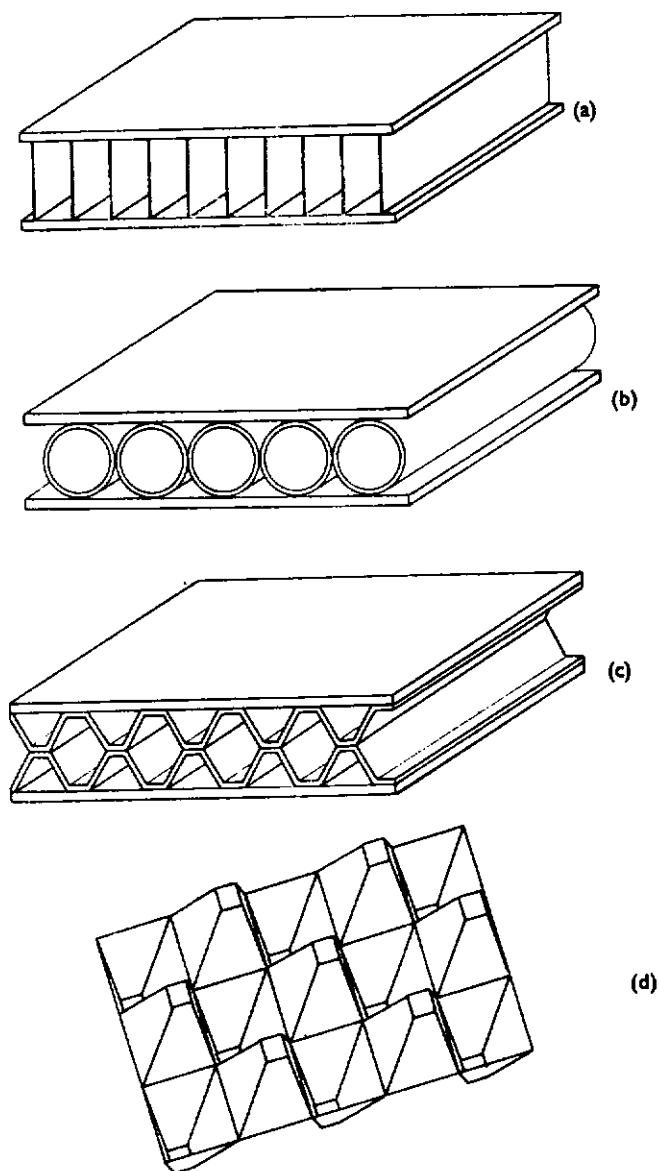


FIGURA 2.8: Variações de núcleos corrugados.

Na maioria das aplicações atuais, as lâminas das estruturas laminadas também, por sua vez, estão sendo fabricadas de materiais compósitos. Tais materiais são constituídos por fibras de alta resistência e custo embebidas numa matriz. De certa forma, as fibras conferem resistência mecânica a componentes estruturais feitos de material compósito,

enquanto a matriz lhes confere rigidez. A direção e a quantidade de fibras podem variar para cada lâmina. Com isto o projetista dispõe de liberdade muito maior para definir uma seção que resista a um dado esforço. Em geral, estruturas laminadas feitas de materiais compósitos são utilizadas em aplicações que requerem altas relações resistência-peso e rigidez-peso. Exemplos da engenharia moderna, são: fuselagem de aviões e submarinos, estruturas espaciais, suspensão de automóveis, prótese médica, circuitos eletrônicos e equipamentos de esporte.

Nos compósitos unidirecionais, a resistência longitudinal é dada pela propriedade das fibras, enquanto que a resistência transversal é dominada pela matriz. Na maioria das aplicações de engenharia, a resistência transversal de tais compósitos apresenta-se insatisfatória. Essa aparente limitação no uso de compósitos puramente unidirecionais é contornada pela formação de laminados a partir de camadas unidirecionais.

Numa estrutura laminada as direções principais das fibras, em cada lâmina, são orientadas de forma a produzir um elemento estrutural capaz de resistir aos esforços nas direções a que será solicitado. As aplicações dos materiais compósitos laminados, em especial os reforçados por fibras contínuas unidirecionais, vêm despertando considerável interesse nas últimas décadas, devido a possibilidade de se minimizar peso de estruturas em inúmeros projetos. São incluídas ainda rigidez, resistência e isolamento térmico como características marcantes de sua potencialidade. Estruturalmente, esses laminados são usados em várias formas e desenhos, sendo estruturas mais comuns as constituídas de vigas, placas e cascas.

A resposta estática, assim como dinâmica de estruturas com materiais compósitos, reforçados por fibras contínuas unidirecionais, é função das direções em que as fibras são orientadas nos elementos estruturais. O estudo teórico e o projeto de estruturas de materiais compósitos exige o conhecimento da elasticidade anisotrópica, teoria estrutural

e critérios de ruptura. Ao contrário dos materiais isotrópicos e ortotrópicos, os materiais anisotrópicos apresentam acoplamento entre deformação normal e deformação cisalhante.

Atualmente, há pesquisas voltadas para o desenvolvimento de métodos e teorias que melhor representem a resposta estática e dinâmica das estruturas laminadas. As principais razões são, por um lado, a necessidade do entendimento dos mecanismos que levam à falha da estrutura, por outro, a criação de critérios efetivos de projeto. De certa maneira, estruturas laminadas apresentam grande deformabilidade por força cortante. Neste sentido, fica claro que considerar tal efeito é imprescindível e leva a resultados mais confiáveis quanto aos deslocamentos e frequências naturais de vibração.

CAPÍTULO 3

FUNDAMENTOS DE ELASTICIDADE ANISOTRÓPICA

3.1 INTRODUÇÃO

Considere-se um corpo elástico de forma geral e composto de uma infinidade de pontos materiais. Para lidar com um meio contínuo, é necessário admitir também que os pontos materiais são infinitamente grandes comparados com o espaçamento da estrutura molecular do material elástico. Adotando um sistema de referência para o corpo elástico mostrado na Figura 3.1, pode-se considerar esse ponto como um paralelepípedo elementar de dimensões dx , dy e dz .

Na superfície do paralelepípedo elementar podem existir tensões normais, perpendiculares aos planos das faces, e tensões de cisalhamento, contidas no plano das faces.

O primeiro subscrito de qualquer componente de tensão em qualquer face do paralelepípedo elementar significa o eixo ao qual a normal externa da face é paralela; o segundo subscrito se refere ao eixo ao qual aquele componente de tensão é paralelo.

As deformações que ocorrem em um corpo elástico possuem o mesmo subscrito que os componentes de tensão e são de duas espécies. As deformações longitudinais são representadas por ϵ_{ii} e são proporcionais aos alongamentos e contrações lineares do paralelepípedo elementar na direção indicada, além de servir como medida das variações no volume do paralelepípedo elementar.

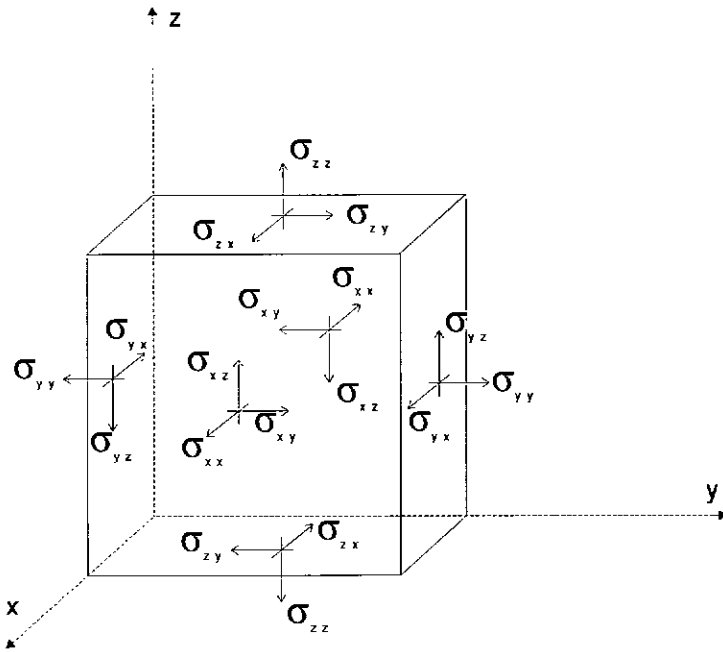


FIGURA 3.1: Tensões no paralelepípedo elementar de um corpo elástico.

As deformações angulares são proporcionais às modificações dos ângulos retos do paralelepípedo elementar. Por exemplo, examinando o plano x-y do paralelepípedo elementar, mostrado na Figura 3.2, as tensões de cisalhamento σ_{xy} e σ_{yx} fazem com que o elemento quadrado de controle se torne um paralelogramo com ângulos de canto iguais a ω , como indicado. Neste caso, a variação de ângulo γ_{xy} é

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \omega \quad (3.1)$$

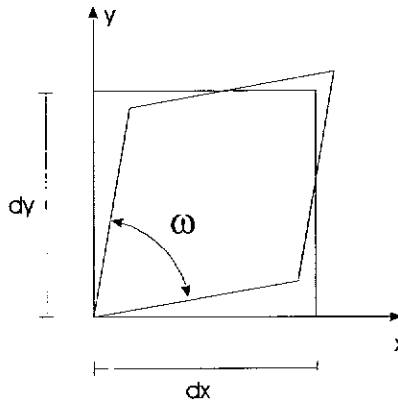


FIGURA 3.2: Cisalhamento no paralelepípedo elementar.

A deformação angular é uma quantidade tensorial definida por

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} \quad (3.2)$$

Similarmente

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\gamma_{xz}}{2} \quad (3.3)$$

e

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2} \quad (3.4)$$

3.2 MATERIAIS ANISOTRÓPICOS

Como σ_{ij} e ε_{ij} são tensores de segunda ordem, que possuem nove componentes no espaço tridimensional, eles se relacionam através de um tensor de quarta ordem, C_{ijkl} , que portanto possui 81 componentes e a equação constitutiva correspondente resulta em

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (3.5)$$

onde i, j, k e l assumem valores 1, 2, 3, ou x, y, z no sistema Cartesiano normalmente adotado, e índices repetidos indicam somatório. Não há na natureza material com 81 constantes elásticas diferentes. Em face de os tensores de tensão e deformação serem simétricos as constantes elásticas se reduzem a 36 e a notação abreviada seguinte pode ser utilizada:

$$\sigma_{11} = \sigma_1, \sigma_{22} = \sigma_2, \sigma_{33} = \sigma_3, \sigma_{23} = \sigma_4, \sigma_{31} = \sigma_5, \sigma_{12} = \sigma_6 \quad (3.6)$$

e

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2, \varepsilon_{33} = \varepsilon_3, 2\varepsilon_{23} = \varepsilon_4, 2\varepsilon_{31} = \varepsilon_5, 2\varepsilon_{12} = \varepsilon_6 \quad (3.7)$$

A equação constitutiva pode então ser escrita como:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 + C_{14}\varepsilon_4 + C_{15}\varepsilon_5 + C_{16}\varepsilon_6 \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_6 &= C_{61}\varepsilon_1 + C_{62}\varepsilon_2 + C_{63}\varepsilon_3 + C_{64}\varepsilon_4 + C_{65}\varepsilon_5 + C_{66}\varepsilon_6 \end{aligned} \quad (3.8)$$

ou seja

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad (3.9)$$

Deve-se observar aqui que os valores C_{ij} não são componentes tensoriais e, portanto, não respeitam suas leis de transformação.

Sendo a energia de deformação expressa por uma função U tal que

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (3.10)$$

e

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \sigma_{ij} \quad (3.11)$$

as componentes linearmente independentes de C_{ijkl} são reduzidas a 21, pois $C_{ijkl} = C_{klij}$ e essa expressão pode agora ser escrita como $C_{ij} = C_{ji}$.

Na forma matricial, a equação (3.9) pode ser escrita como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Para tratar dos casos de anisotropia mais importantes, será considerado apenas o sistema de coordenadas cartesianas, embora os resultados sejam aplicados a qualquer sistema de coordenadas curvilíneas.

3.3 MATERIAIS COM UM PLANO DE SIMETRIA

Inicialmente, seja um corpo elástico cujas propriedades elásticas sejam simétricas em relação ao plano $x_1 - x_2$. A simetria resultante pode ser expressa pelo fato de que os valores C_{ij} mencionados anteriormente devem ser invariantes na transformação $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$ e $x_3 = -x'_3$, como mostra a Figura 3.3.

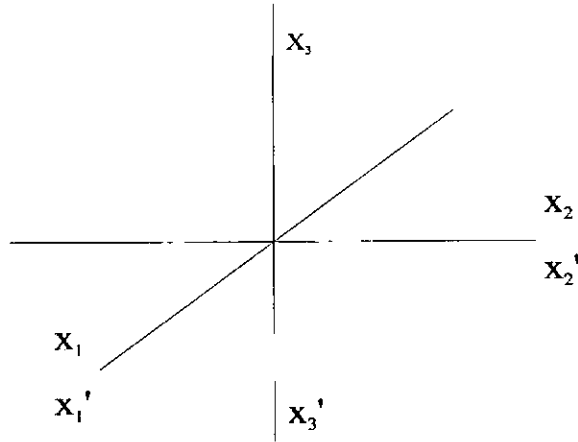


FIGURA 3.3: Sistema de coordenadas para um plano de simetria.

A Tabela 3.1 mostra os cossenos diretores, t_{ij} , associados a essa transformação.

TABELA 3.1: Cossenos diretores para materiais com um plano de simetria.

	x_1	x_2	x_3
x'_1	1	0	0
x'_2	0	1	0
x'_3	0	0	-1

As tensões e deformações dos sistema de coordenadas com o sobrescrito (') estão associadas àquelas do sistema original (sem sobrescrito) através das equações

$$\sigma'_{\alpha\beta} = t_{\alpha i} t_{\beta j} \sigma_{ij} \quad (3.13)$$

e

$$\varepsilon'_{\alpha\beta} = t_{\alpha i} t_{\beta j} \varepsilon_{ij} \quad (3.14)$$

Portanto, para $i = 1, 2, 3$ e 6 , $\sigma'_i = \sigma_i$ e $\varepsilon'_i = \varepsilon_i$. Entretanto, para $i = 4, 5$, $\sigma'_i = -\sigma_i$ e $\varepsilon'_i = -\varepsilon_i$.

Examinando detalhadamente a equação (3.12) tem-se por exemplo,

$$\sigma'_4 = C_{41}\varepsilon'_1 + C_{42}\varepsilon'_2 + C_{43}\varepsilon'_3 + C_{44}\varepsilon'_4 + C_{45}\varepsilon'_5 + C_{46}\varepsilon'_6 \quad (3.15)$$

$$\sigma_4 = C_{41}\varepsilon_1 + C_{42}\varepsilon_2 + C_{43}\varepsilon_3 + C_{44}\varepsilon_4 + C_{45}\varepsilon_5 + C_{46}\varepsilon_6 \quad (3.16)$$

Assim, verifica-se claramente que

$$C_{41} = C_{42} = C_{43} = C_{46} = 0 \quad (3.17)$$

Através de equações similares pode-se concluir que

$$C_{25} = C_{35} = C_{64} = C_{65} = 0, C_{51} = C_{53} = C_{56} = 0 \text{ e } C_{14} = C_{15} = C_{24} = C_{34} = 0 \quad (3.18)$$

Desta forma, para um material que possua apenas um plano de simetria, o número de constantes elásticas diferentes de zero é reduzido a 20, sendo 13 delas linearmente independentes. Deve-se observar que isto exigiria 13 ensaios diferentes de laboratório (para cada condição de temperatura e umidade, o que é uma tarefa difícil de ser realizada).

Neste caso, a Equação (3.12) fica sendo:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & \text{sim.} & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

3.4 MATERIAIS ORTOTRÓPICOS

Materiais que possuam três planos de simetria elástica mutuamente ortogonais são chamados ortotrópicos (um termo abreviado para anisotrópicos ortogonalmente). Neste caso, outros termos da matriz C_{ij} também são nulos. São eles:

$$C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = 0 \quad (3.20)$$

Portanto, a matriz constitutiva para materiais ortotrópicos é mostrada a seguir,

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Deve-se observar que, em materiais ortotrópicos, não há interação entre os componentes normais e de cisalhamento quando o carregamento se processa ao longo dos eixos do sistema de coordenadas das propriedades do material.

Os coeficientes C_{ij} podem ser expressos em termos dos módulos de elasticidade longitudinal e transversal e dos coeficientes de Poisson relativos aos eixos do sistema de coordenadas de propriedades do material através de

$$C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta E_2 E_3} \quad (3.22)$$

$$C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\Delta E_1 E_3} \quad (3.23)$$

$$C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\Delta E_1 E_2} \quad (3.24)$$

$$C_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{\Delta E_2 E_3} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{\Delta E_1 E_2} \quad (3.25)$$

$$C_{13} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{\Delta E_2 E_3} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{\Delta E_1 E_2} \quad (3.26)$$

$$C_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{\Delta E_1 E_3} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{\Delta E_1 E_2} \quad (3.27)$$

$$C_{44} = G_{23} \quad (3.28)$$

$$C_{55} = G_{13} \quad (3.29)$$

$$C_{66} = G_{12} \quad (3.30)$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \quad (3.31)$$

3.5 MATERIAIS TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICOS

Se o material é isotrópico em um dos planos de simetria elástica de um sistema de material ortotrópico, ele é chamado *transversalmente isotrópico*. Para essa classe de

materiais, há apenas cinco constantes elásticas independentes. Se, por exemplo, x_1 indicar a coordenada normal ao plano de isotropia, a relação tensão-deformação assume a forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \hat{C} & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

onde

$$\hat{C} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2} \quad (3.33)$$

3.6 MATERIAIS ISOTRÓPICOS

Finalmente, para um material isotrópico, qualquer plano é um plano de simetria (ou, em outras palavras, não há direções preferenciais) e os termos da matriz constitutiva daquele material serão função de apenas dois coeficientes elásticos. Assim sendo, as relações tensão-deformação de um material isotrópico assumem a forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \hat{C} & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & \hat{C} & 0 \\ & & & & & \hat{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

onde

$$\hat{C} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \quad (3.35)$$

Os coeficientes C_{11} e C_{12} estão relacionados ao módulo de elasticidade longitudinal (E) e ao coeficiente de Poisson (ν) do material isotrópico através de

$$C_{11} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.36)$$

e

$$C_{12} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.37)$$

Um material compósito reforçado por fibras é um material anisotrópico porque possui módulos diferentes ao longo das direções normais e transversais às fibras. Se todas as fibras forem consideradas como aproximadamente paralelas, pode-se caracterizar o material como um material ortotrópico homogêneo.

A Tabela 3.2 mostra o número de constantes elásticas não nulas e linearmente independentes para determinadas classes de materiais.

TABELA 3.2: Número de coeficientes elásticos envolvidos em determinadas classes de materiais.

Classe de Material	Número de coeficientes não nulos	Número de coeficientes independentes
<i>Caso tridimensional</i>		
Anisotropia	36	21
Um plano de simetria	20	13
Três planos de simetria	12	9
Transversalmente isotrópico	12	5
Isotrópico	12	2
<i>Caso bidimensional</i>		
Anisotropia	9	6
Um plano de simetria	9	6
Dois planos de simetria	5	4
Transversalmente isotrópico	5	4
Isotrópico	5	2

CAPÍTULO 4

ELEMENTO FINITO PARA VIGAS LAMINADAS

4.1 INTRODUÇÃO

Após a Segunda Guerra Mundial, as vigas sanduíche e laminadas despertaram um maior interesse nos pesquisadores tendo em vista a necessidade de estruturas mais leves que propiciassem aeronaves mais velozes e com menor consumo de combustível e que fossem ao mesmo tempo suficientemente resistentes e rígidas.

Em 1948, HOFF e MAUTNER [3] desenvolveram uma teoria para vigas sanduíche na qual os efeitos de flexão e alongamento do núcleo e a deformação de cisalhamento das faces não eram considerados. Os deslocamentos adotados eram similares aos da teoria de Timoshenko para vigas homogêneas.

Esse desenvolvimento tornou-se clássico devido ao fato de que, para a limitação das aplicações comuns de então, o aumento de complexidade da formulação não compensava a melhoria na precisão dos resultados. Seguiram esta metodologia os trabalhos de DITARANTO [4], JONES *et al.* [5] e BERT *et al.* [6].

O crescimento das aplicações tornou necessário melhorar a qualidade dos resultados obtidos e assim surgiram proposições que incluíam o efeito da distorção e da flexão, tanto das faces como do núcleo, como demonstram os trabalhos de RAO [7] e MEAD e MARKUS [8].

Com exceção de RAO [7] e MEAD e MARKUS [8], os outros autores mencionados restringiram seus estudos a vigas sanduíches simétricas.

KRAJCINOVIC [9] formulou uma teoria que considerava válida a hipótese de Bernoulli para cada camada independentemente mas não para a seção transversal como um todo. Deste modo foram incluídos termos que incorporavam os efeitos da tensão de cisalhamento. Além disso, não eram feitas quaisquer restrições quanto à espessura, densidade e constantes elásticas dos materiais constituintes de cada uma das camadas da viga.

MURTY e SHIMPY [10] propuseram uma teoria que utilizava um campo de deslocamentos de forma polinomial e com potências elevadas, de modo a permitir a obtenção de uma distribuição parabólica da tensão de cisalhamento ao longo da seção, no entanto, a continuidade da tensão de cisalhamento nas interfaces das lâminas era violada.

Essas teorias apresentam restrições devido ao fato da tensão normal σ_{zz} não ser considerada e assim elas encontram aplicação no caso de pequenas cargas concentradas ou quando a relação L/h (vão/espessura) é suficientemente grande para que as tensões na direção z , normal ao eixo da viga, sejam pequenas em relação às tensões normais na direção do eixo x ou ainda quando a estrutura apresenta uma grande rigidez normal no sentido da espessura. Do contrário, a deformação normal nesse sentido poderá ser predominante e o comportamento da viga pode não ser o esperado.

Por abandonarem os efeitos de deformação de cisalhamento das faces e os efeitos de flexão e alongamento do núcleo, as teorias que seguem a formulação clássica levam a um valor pouco representativo da energia de deformação do corpo. Em consequência, os resultados de tais teorias se mostram satisfatórios apenas para vigas sanduíche de faces finas e com núcleo de grande rigidez normal.

De uma maneira geral, os trabalhos anteriores mostram-se de difícil adaptação quando o número de camadas tende a crescer, uma vez que isso leva a um maior número de

incógnitas a serem encontradas.

Buscando atender à condição de continuidade da tensão de cisalhamento entre as camadas, é apresentada aqui uma teoria para vigas laminadas na qual tal continuidade é mantida, com base em um trabalho elaborado por DI SCIUVA [11] para placas laminadas. A seguir, é formulado um elemento finito de viga segundo a teoria desenvolvida e os resultados de tal formulação são analisados.

4.2 DESCRIÇÃO CINEMÁTICA

O objetivo desta seção é apresentar as equações que descrevem a geometria do movimento e da deformação do corpo. Mais precisamente, pretende-se definir todas as grandezas envolvidas na representação cinemática, tais como deslocamentos, rotações e deformações. As equações a serem apresentadas têm um caráter universal no sentido de que não dependem de forças causadoras de movimento, nem das propriedades físicas que formam o componente estrutura em estudo.

4.2.1 – Relações Fundamentais

Seja uma viga laminada com espessura h e consistindo de n lâminas perfeitamente unidas de material ortotrópico, cada uma das quais formada de fibras e resina. As propriedades e espessuras podem variar de uma lâmina para outra. A superfície de referência é suposta no plano $z_0 = 0$, que coincide com uma das superfícies externas da viga, conforme a Figura 4.1.

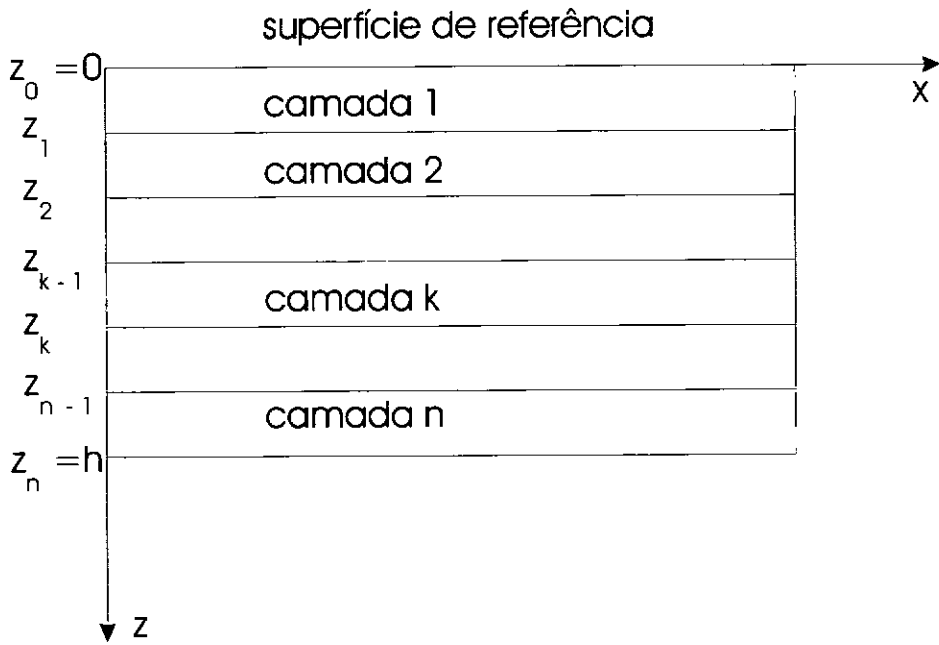


FIGURA 4.1: Sistema de coordenadas, número de lâminas e interfaces de uma viga laminada.

A suposição de perfeita união entre as lâminas que constituem o laminado, exige que as seguintes condições de contato sejam satisfeitas na interface entre as camadas k e $(k+1)$:

$$u^- = u^+ \quad (4.1)$$

e

$$w^- = w^+ \quad (4.2)$$

sendo u e w os deslocamentos segundo os eixos x e z , respectivamente.

Além disso, para atender à continuidade da tensão cisalhante na interface entre duas lâminas adjacentes, é necessário que a seguinte condição seja obedecida:

$$\sigma_{xz}^- = \sigma_{xz}^+ \quad (4.3)$$

onde os símbolos + e - indicam os valores das grandezas para $z = z_k + 0$ e $z = z_k - 0$, respectivamente, onde z_k é a coordenada z da interface entre a k -ésima e $(k+1)$ -ésima lâmina.

Admite-se que não há tensões na direção do eixo y , de acordo com a hipótese clássica de vigas. A tensão normal na direção z não é considerada, por ser muito pequena em comparação com a tensão normal na direção do eixo x , uma vez que a relação vão/espessura (L/h) é grande o suficiente que justifica este procedimento, de acordo com TIMOSHENKO e GOODIER [12]. Conforme indicam as expressões (4.1) e (4.2) supõe-se a existência de uma interface perfeita que permita a já mencionada continuidade de deslocamentos entre as camadas, de forma a não haver deslizamento ou formação de vazios em qualquer ponto das interfaces de camadas adjacentes. Admite-se também que, em cada lâmina, o segmento de normal ao eixo permanece retilíneo após a deformação e sofre uma rotação que varia de uma camada para outra, de acordo com as características dos materiais que as constituem. Assim, os segmentos de retas normais de todas as camadas, que eram colineares antes da deformação assumem o aspecto de uma linha poligonal, como mostra a Figura 4.2.

O campo de deslocamentos que atende a essas condições deve ser da forma:

$$u(x, z) = \bar{u}(x) + z\bar{\theta}(x) + \sum_{k=1}^{n_i} \psi_k(x) (z - z_k) Y(z - z_k) \quad (4.4)$$

$$w(x, z) = \bar{w}(x) \quad (4.5)$$

onde o símbolo $(\bar{\quad})$ indica que essas grandezas estão associadas a deslocamentos e rotações de pontos situados no eixo de referência. Nas expressões anteriores, $\bar{\theta}$ significa a rotação total da normal. A rotação devida ao cisalhamento no plano (x,z) é denominada $\bar{\phi}$, de forma que $(\bar{\theta} = \bar{\phi} - \bar{w}_{,x})$. A combinação linear destas grandezas fornece os componentes de deslocamentos u e w de pontos arbitrários localizados sobre a normal deformada. Além disso, $Y(z - z_k)$ é a função unitária de Heaviside, n_i é o número de interfaces entre camadas e n é o número de camadas, de modo que $(n_i = n - 1)$. A função unitária de Heaviside é utilizada para ajustar a função ψ_k , de uma camada para outra.

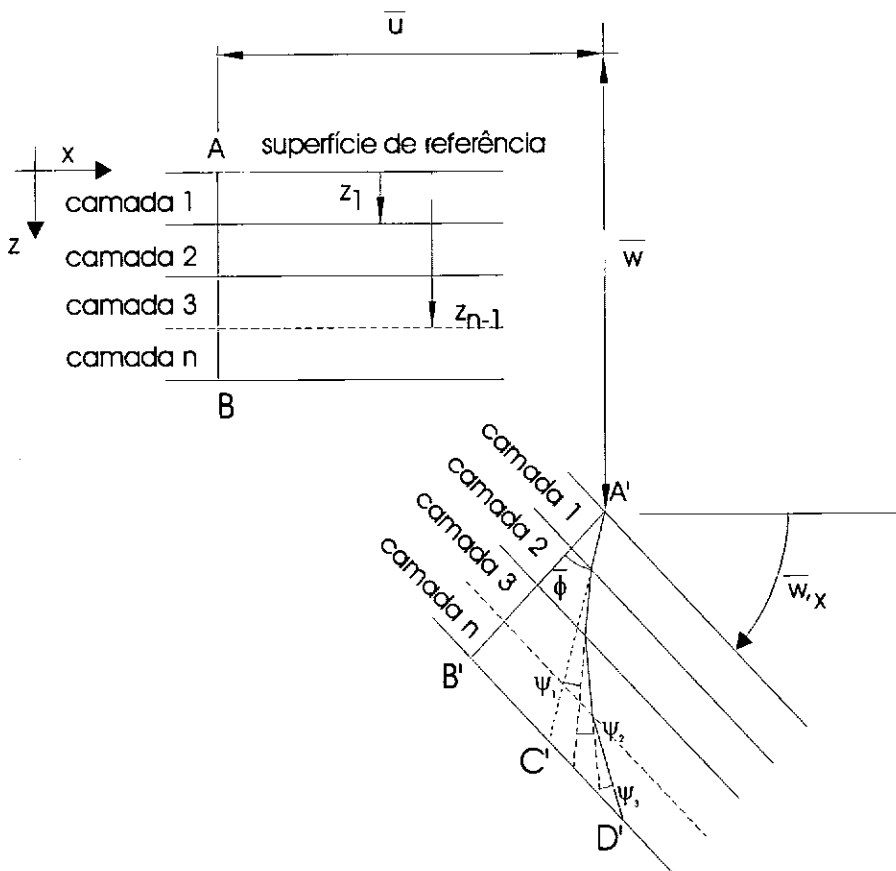


FIGURA 4.2: Campo de deslocamentos admitido.

As deformações valem

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.6)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.7)$$

Substituindo (4.4) e (4.5) em (4.6) e (4.7), obtêm-se:

$$\varepsilon_{xx} = \bar{u}_{,x} + z \bar{\theta}_{,x} + \sum_{k=1}^{ni} \psi_{k,x} (z - z_k) Y(z - z_k) \quad (4.8)$$

$$\varepsilon_{xz} = \bar{\phi} + \sum_{k=1}^{ni} \psi_k Y(z - z_k) \quad (4.9)$$

4.2.2 Determinação do Fator de Continuidade de Tensão Cisalhante

Em consequência das hipóteses iniciais, todas as tensões, exceto σ_{xx} e σ_{xz} são nulas.

Assim sendo, as relações constitutivas podem ser escritas como

$$\sigma_{xx} = E_{xx} \varepsilon_{xx} \quad (4.10)$$

$$\sigma_{xz} = G_{xz} \varepsilon_{xz} \quad (4.11)$$

Deste modo, as tensões de cisalhamento na interface k são calculadas por

$$\sigma_{xz}^- = G_{xz}^{(k)} \varepsilon_{xz}^- \quad (4.12)$$

$$\sigma_{xz}^+ = G_{xz}^{(k+1)} \varepsilon_{xz}^+ \quad (4.13)$$

Como já foi mencionado, os sobrescritos + e – significam valores referentes a pontos imediatamente acima e abaixo da interface k, respectivamente e os sobrescritos (k) e (k+1) utilizados nas constantes elásticas G_{xz} indicam o módulo de elasticidade transversal dos materiais separados por aquela interface.

Da relação (4.9) obtém-se, para o ponto imediatamente abaixo da interface k qualquer

$$\varepsilon_{xz}^- = \bar{\phi} + \sum_{i=1}^{k-1} \psi_i \quad (4.14)$$

A deformação do ponto imediatamente acima da mesma interface é dada por

$$\varepsilon_{xz}^+ = \varepsilon_{xz}^- + \psi_k \quad (4.15)$$

Substituindo as equações (4.14) e (4.15) em (4.12) e (4.13) e levando as expressões resultantes para a equação (4.9), obtém-se

$$\psi_k = \left[\frac{G_{xz}^{(k)}}{G_{xz}^{(k+1)}} - 1 \right] \varepsilon_{xz}^- \quad (4.16)$$

Como se pode ver, a função ψ_k depende das propriedades dos materiais separados pela interface e da deformação cisalhante da camada anterior. Como a deformação ε_{xz} da primeira camada é igual a $\bar{\phi}$, a função ψ_1 assume a forma

$$\psi_1 = a_1 \bar{\phi} \quad (4.17)$$

onde

$$a_1 = \left(\frac{G_{xz}^{(1)}}{G_{xz}^{(2)}} - 1 \right) \quad (4.18)$$

Desta forma, devido ao carácter iterativo do cálculo das funções ψ_k subseqüentes, pode-se escrever para uma camada genérica

$$\psi_k = a_k \bar{\phi} \quad (4.19)$$

Substituindo a equação (4.14) em (4.16) e utilizando a relação encontrada para ψ_k , encontra-se a expressão para o coeficiente a_k , que permite a continuidade da tensão de cisalhamento transversal

$$a_k = \left(\frac{G_{xz}^{(k)}}{G_{xz}^{(k+1)}} - 1 \right) \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} a_i \right) \quad (4.20)$$

Observando que

$$a_2 = \left(\frac{G_{xz}^{(2)}}{G_{xz}^{(3)}} - 1 \right) (1 + a_1) \quad (4.21)$$

verifica-se que a_2 pode ser escrito como

$$a_2 = \left(\frac{G_{xz}^{(2)}}{G_{xz}^{(3)}} - 1 \right) \left(\frac{G_{xz}^{(1)}}{G_{xz}^{(2)}} \right) = \frac{G_{xz}^{(1)}}{G_{xz}^{(3)}} - \frac{G_{xz}^{(1)}}{G_{xz}^{(2)}} = G_{xz}^{(1)} \left(\frac{1}{G_{xz}^{(3)}} - \frac{1}{G_{xz}^{(2)}} \right) \quad (4.22)$$

Utilizando o mesmo procedimento para o coeficiente a_k de uma camada genérica, verifica-se que

$$a_k = G_{xz}^{(1)} \left(\frac{1}{G_{xz}^{(k+1)}} - \frac{1}{G_{xz}^{(k)}} \right) \quad (4.23)$$

Expandindo o termo que contém o somatório dos coeficientes a_i na expressão (4.19), verifica-se que

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=1}^{k-1} a_i &= 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{k-2} + a_{k-1} = \\ &= 1 + \left(\frac{G_{xz}^{(1)}}{G_{xz}^{(2)}} - 1 \right) + \left(\frac{G_{xz}^{(1)}}{G_{xz}^{(3)}} - \frac{G_{xz}^{(1)}}{G_{xz}^{(2)}} \right) + \dots + \left(\frac{G_{xz}^{(1)}}{G_{xz}^{(k-1)}} - \frac{G_{xz}^{(1)}}{G_{xz}^{(k-2)}} \right) + \left(\frac{G_{xz}^{(1)}}{G_{xz}^{(k)}} - \frac{G_{xz}^{(1)}}{G_{xz}^{(k-1)}} \right) = (4.24) \\ &= \frac{G_{xz}^{(1)}}{G_{xz}^{(k)}} \end{aligned}$$

A tensão de cisalhamento em uma camada genérica é então dada por

$$\sigma_{xz}^{(k)} = G_{xz}^{(k)} \varepsilon_{xz}^{(k)} \quad (4.25)$$

e a deformação correspondente, utilizando o valor de (4.18) em (4.9), fica sendo

$$\varepsilon_{xz}^{(k)} = \bar{\phi} \left(1 + \sum_{k=1}^{n_i} a_k Y(z - z_k) \right) \quad (4.26)$$

Substituindo (4.26) em (4.25) tem-se que

$$\sigma_{xz}^{(k)} = G_{xz}^{(k)} \bar{\phi} \left(1 + \sum_{k=1}^{n_i} a_k Y(z - z_k) \right) \quad (4.27)$$

Substituindo em (4.27) o valor obtido em (4.24), observa-se que a tensão de cisalhamento é constante ao longo de toda espessura da viga, independente da camada onde está sendo calculada, e vale

$$\sigma_{xz}^{(k)} = G_{xz}^{(1)} \bar{\phi} \quad (4.28)$$

Isso pode ser encarado como uma extensão da teoria de Timoshenko para vigas isotrópicas, apesar da heterogeneidade de camadas.

4.2.3 Campo de Deslocamentos

Substituindo em (4.4) a expressão encontrada para ψ_k em (4.18) fica-se com o campo de deslocamentos da forma:

$$u(x, z) = \bar{u}(x) + z \bar{\theta}(x) + \bar{\phi}(x) \sum_{k=1}^m a_k (z - z_k) Y(z - z_k) \quad (4.29)$$

$$w(x, z) = \bar{w}(x) \quad (4.30)$$

A Figura 4.3 mostra os componentes de deslocamentos u e w . A linha $A'B'$ ressalta os deslocamentos no caso da hipótese das seções planas continuarem planas e normais à superfície de referência deformada. A linha $A'C'$ mostra os deslocamentos no caso das seções planas permanecerem planas, mas não normais à superfície deformada. Para vigas isotrópicas este campo de deslocamentos leva a tensões cisalhantes constantes ao longo da altura. Em vigas laminadas o mesmo resultado pode ser obtido com a poligonal $A'D'$. É importante perceber que tal resultado diverge das teorias clássicas de laminados onde, em virtude das suposições cinemáticas admitidas, as tensões cisalhantes são descontínuas a cada lâmina.

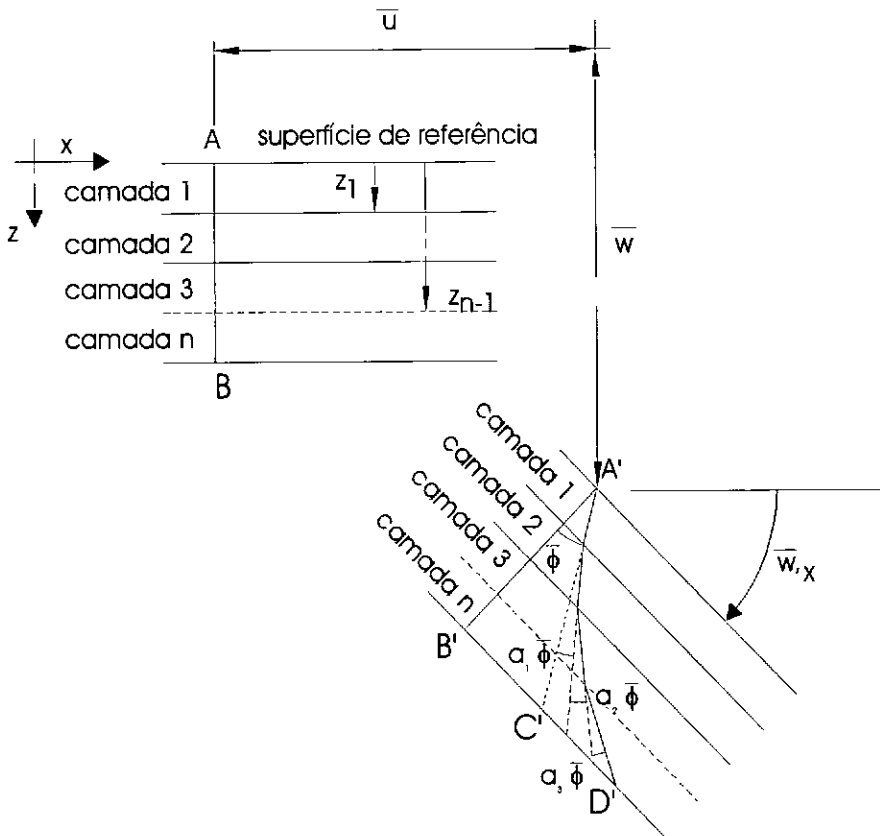


FIGURA 4.3: Campo de deslocamentos de uma viga laminada.

O campo de deslocamentos atende às hipóteses iniciais, uma vez que, na interface z_k de duas lâminas adjacentes, u^- é automaticamente igual a u^+ , para k variando de 1 até

ni. Tal fato é oriundo da existência do termo $(z - z_k)$ no interior do somatório. A continuidade em w é verificada mais facilmente, visto que tal deslocamento é constante através da espessura do laminado.

4.2.4 Relações Deformação-Deslocamento

Considerando pequenos deslocamentos e que a deformação é restrita ao plano vertical, definem-se as duas únicas deformações existentes por

$$\varepsilon_{xx} = \bar{u}_{,x} + z \bar{\theta}_{,x} + \bar{\phi}_{,x} \sum_{k=1}^{ni} a_k (z - z_k) Y(z - z_k) \quad (4.31)$$

$$\varepsilon_{xz} = \bar{\phi} \left[1 + \sum_{k=1}^{ni} a_k Y(z - z_k) \right] \quad (4.32)$$

que denotam o componente axial e o cisalhante. Esse estado de deformação representa uma simplificação do estado plano e é decorrente da consideração de um deslocamento transversal constante através da espessura do laminado. Dito de outra forma, é suposto que durante a deformação da viga não ocorre mudança na sua altura.

4.3 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

Como resultado das suposições realizadas anteriormente todas as tensões, exceto duas, são nulas. Assim sendo, a relação constitutiva para cada camada individual adquire a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (4.33)$$

onde C_{11} e C_{55} são os coeficientes elásticos do material, chamados anteriormente de E_{xx} e G_{xz} , e o sobrescrito k , como já foi convencionado, está associado à camada em questão. Neste trabalho, cada lâmina será um compósito unidirecional de fibras paralelas embebidas em uma matriz. O grande propósito da matriz é proteger as fibras, uni-las e transferir para elas os esforços, de modo a formar elementos estruturais.

O compósito unidirecional está dentro da classe de materiais denominados ortotrópicos. A diferença básica entre um material ortotrópico e um anisotrópico pode ser descrita por sua resposta a esforços aplicados. Quando o ortotrópico é solicitado ao longo de seus eixos de simetria, ele responderá como material isotrópico, não ocorrendo acoplamento entre efeitos normais e cisalhantes. No entanto, se o material for solicitado fora de seus eixos de simetria, ele responderá como um anisotrópico. No caso mais geral de ortotropia, como já foi visto no Capítulo 1, tais materiais possuem 9 constantes elásticas independentes.

Como se pode observar na Figura 4.4, uma lâmina unidirecional possui três planos mutuamente ortogonais de simetria (quais sejam, planos 1-2, 2-3 e 1-3) e, por isso, é chamada ortotrópica. Entretanto, o termo “ortotrópico”, apenas, não é suficiente para descrever a forma da matriz de coeficientes, visto que ela depende do sistema de eixos adotado. Os eixos coordenados 1-2-3 referem-se às direções principais do material, uma vez que são associados às direções do reforço.

Quando a ortotropia do material está associada às direções naturais de ortotropia (no caso da lâmina, direções 1-2-3), ele é então dito ortotrópico, possuindo nove constantes elásticas. Há mais uma simetria muito interessante no estudo dos compósitos

unidirecionais. Em sua maioria, o arranjo das fibras na seção transversal 2-3 é aleatório. Assim, as propriedades da lâmina são as mesmas em qualquer direção perpendicular às fibras (isto é, as propriedades ao longo da direção 2 são iguais àquelas da direção 3) e o material é denominado transversalmente isotrópico, possuindo agora cinco constantes elásticas independentes. Essa classe de materiais é bastante utilizada nas mais variadas aplicações de engenharia.

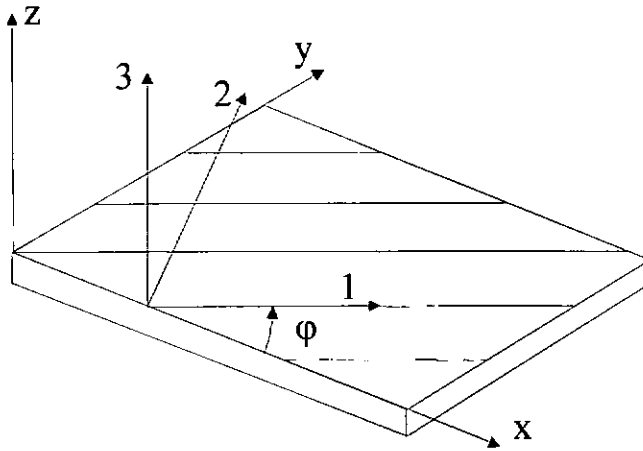


FIGURA 4.4: Sistema de eixos principais do material (1,2,3), eixos geométricos da viga e sentido positivo do ângulo φ .

Na lâmina, as direções principais de ortotropia freqüentemente não coincidem com o sistema de eixos geométricos, adotados por serem convenientes à solução de um dado problema. Assim, é necessário calcular as constantes elásticas do material no novo sistema de coordenadas. Os coeficientes elásticos do material em função de seus módulos de elasticidade longitudinal e transversal são

$$C_{11} = \frac{1}{a_{11}} \quad , \quad C_{55} = \frac{1}{a_{55}} \quad (4.34)$$

onde

$$a_{11} = \frac{1}{E_{11}} \cos^4 \varphi + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_{11}} \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \frac{1}{E_{22}} \sin^4 \varphi \quad (4.35)$$

$$a_{55} = \frac{1}{G_{12}} + \left(\frac{1+\nu_{12}}{E_{11}} + \frac{1+\nu_{12}}{E_{22}} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^2 2\varphi \quad (4.36)$$

Deve ser lembrado que para um material transversalmente isotrópico, no qual o plano 2-3 é o plano de isotropia, as constantes elásticas estão relacionadas do seguinte modo

$$E_{33} = E_{22} ; G_{13} = G_{12} ; \nu_{13} = \nu_{12} \quad (4.37)$$

Geralmente, as propriedades e o empilhamento de um laminado são escolhidos conforme os requisitos de uso a que deve atender. As propriedades do laminado podem ser previstas, desde que se conheçam as propriedades e a orientação de cada uma de suas lâminas constituintes. O grande propósito do empilhamento é adequar a resistência e a rigidez do material resultante às direções de maior carregamento, realizando assim, em última análise, o controle da anisotropia do material. Ultimamente, os laminados à base de fibras estão sendo muito usados em estruturas esbeltas, pois, variando-se a direção das fibras em cada lâmina, consegue-se rigidez e resistência adequada a estas direções.

Do ponto de vista de construção, vigas laminadas são constituídas de lâminas de espessura uniforme ou não. Cada uma destas pode ser de material isotrópico, ortotrópico ou anisotrópico. Uma vez unidas as lâminas, o arranjo assim estabelecido caracteriza-se por um alto grau de heterogeneidade, tornando a análise bastante complexa.

Paralelamente ao aprimoramento dos laminados, houve a necessidade da criação de métodos que melhor elucidassem o seu comportamento com vista às suas aplicações na engenharia. Este trabalho tem como principal objetivo criar uma base a partir da qual sejam obtidas condições que auxiliem no projeto e construção de vigas laminadas.

4.4 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Considere um corpo elástico em equilíbrio submetido a um sistema de esforços generalizados e a condições de contorno. Se aos deslocamentos reais causados no corpo é superposto um conjunto arbitrário de deslocamentos virtuais pequenos, a partir da configuração real, sem violar as condições geométricas e as relações deslocamento-deformação, a seguinte equação pode ser escrita

$$\int_V (\sigma_{xx} \delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{xz} \delta\varepsilon_{xz}) dV - \int_{\Gamma} (\bar{\mathbf{q}} \cdot \delta\mathbf{r} + \bar{\mathbf{p}} \cdot \delta\mathbf{r}) d\Gamma = 0 \quad (4.38)$$

onde

- σ_{xx} e σ_{xz} - componentes de tensão normal e cisalhante
- ε_{xx} e ε_{xz} - componentes de deformação normal e de cisalhamento
- $\bar{\mathbf{q}}$ e $\bar{\mathbf{p}}$ - esforços externos
- $\delta\mathbf{r}$ - deslocamentos virtuais
- $\delta\varepsilon_{ij}$ - deformações virtuais normal e de cisalhamento
- Γ - contorno do corpo sobre o qual forças externas são prescritas

A seguir, é apresentada a formulação variacional dada ao problema físico, que servirá de base para a aplicação do método dos elementos finitos. Isto é um passo fundamental

no presente trabalho, pois possibilita obter um problema matematicamente consistente que represente as situações reais que se deseja analisar.

4.4.1 Energia de Deformação

Quando corpos deformáveis são submetidos a um conjunto de ações externas, deformações e conseqüentemente tensões, são introduzidas nele. O produto destas duas grandezas, integrado sobre o volume do corpo, fornece o dobro da energia de deformação elástica acumulada no corpo durante o processo de carregamento. Assim, a variação da energia de deformação é dada por

$$\delta\Phi = \int_V \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\} dv \quad (4.39)$$

onde

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

Para um laminado, a variação da energia de deformação é dada por

$$\delta\Phi = b \int_0^L \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} (\sigma_{xx} \delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{xz} \delta\varepsilon_{xz}) dz dx \quad (4.41)$$

onde b e L são respectivamente a largura da seção e o comprimento da viga.

A substituição das equações (4.31) e (4.32) em (4.41) leva a

$$\delta\Phi = b \int_0^L \left\{ \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \left[\sigma_{xx} (\delta\bar{u}_{,x} + z(\delta\bar{\phi}_{,x} - \delta\bar{w}_{,xx})) + \sigma_{xz} \delta\bar{\phi} \right] dz + \right. \\ \left. + \sum_{i=2}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \left[\sigma_{xx} \left(\delta\bar{\phi}_{,x} \sum_{j=1}^{i-1} a_k (z - z_k) \right) + \sigma_{xz} \left(\delta\bar{\phi} \sum_{j=1}^{i-1} a_k \right) \right] dz \right\} dx \quad (4.42)$$

Procurando explicitar cada termo associado a uma variação, obtém-se

$$\delta\Phi = b \int_0^L \left\{ \sum_{i=1}^n \delta\bar{u}_{,x} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \sigma_{xx} dz + (\delta\bar{\phi}_{,x} - \delta\bar{w}_{,xx}) \int \sigma_{xx} z dz + \delta\bar{\phi} \sigma_{xz} dz + \right. \\ \left. + \sum_{i=2}^n \left[\sigma_{xx} \left(\delta\bar{\phi}_{,x} \sum_{j=1}^{i-1} a_k (z - z_k) \right) + \sigma_{xz} \left(\delta\bar{\phi} \sum_{j=1}^{i-1} a_k \right) \right] \int_{z_{i-1}}^{z_i} dz \right\} dx \quad (4.43)$$

Partindo da relação constitutiva (4.33) e realizando uma manipulação algébrica simples, chega-se à expressão específica para esse modelo unidimensional

$$\delta\Phi = b \int_0^L \left[\sum_{k=1}^n \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} \{ \varepsilon \}^T [C] \{ \delta \varepsilon \} dz \right] dx \quad (4.44)$$

onde 0 e L denotam as duas extremidades da viga, b a largura da viga e C a matriz de coeficientes elásticos.

Expressando as deformações em termos dos deslocamentos tem-se, em uma forma compacta, que

$$\{ \varepsilon \} = [H] \{ \Delta \} \quad (4.45)$$

onde

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -z & Z_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_k \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$$A_k = 1 + \sum_{j=1}^{k-1} a_j Y(z - z_j) \quad (4.47)$$

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{,x} \\ \bar{w}_{,xx} \\ \bar{\phi}_{,x} \\ \bar{\phi} \end{Bmatrix} \quad (4.48)$$

$$Z_k = z + \sum_{j=1}^{k-1} a_j (z - z_j) Y(z - z_j) \quad (4.49)$$

É conveniente ressaltar que essas relações são obtidas diretamente das equações (4.6) e (4.7) e lembrando que $(\bar{\theta} = \bar{\phi} - \bar{w}_{,x})$. Substituindo (4.45) na equação (4.44), obtém-se a seguinte expressão para a variação da energia de deformação

$$\delta\Phi = b \int_0^L [\{\Delta\}^T [D] \{\delta\Delta\}] dx \quad (4.50)$$

onde

$$[D] = \sum_{k=1}^n \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} [H]^T [C] [H] dz \quad (4.51)$$

ou mais explicitamente

$$[D] = \sum_{k=1}^n \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} \begin{bmatrix} C_{11}^{(k)} & -z C_{11}^{(k)} & Z_k C_{11}^{(k)} & 0 \\ -z C_{11}^{(k)} & -z^2 C_{11}^{(k)} & -z Z_k C_{11}^{(k)} & 0 \\ Z_k C_{11}^{(k)} & -z Z_k C_{11}^{(k)} & Z_k^2 C_{11}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_k^2 C_{55}^{(k)} \end{bmatrix} dz \quad (4.52)$$

Pode-se verificar que, na matriz D, o termo D_{11} representa a rigidez longitudinal da viga, D_{12} e D_{21} representam o acoplamento do cortante com a flexão, D_{22} representa a rigidez à flexão e D_{44} representa a rigidez ao cisalhamento. Todas essas grandezas são dadas por unidade de comprimento. Vale ser mencionado que os termos D_{12} e D_{21} aparecem tendo em vista que o eixo de referência foi tomado no plano $z_0 = 0$. Na maioria dos laminados em que existe simetria em relação ao plano médio, essa parcela é

nula. Os termos restantes não são convencionais e surgem do ajuste dado na normal deformada, linha A'D' da Figura 4.3. De certa forma, esse ajuste leva a uma nova redistribuição de energia para o sistema, tornando muitas vezes complexa a interpretação física dos termos resultantes.

4.4.2 Trabalho das Forças Externas

Considerando que atuem no contorno lateral da viga, Γ_1 , as seguintes forças por unidade de comprimento:

em $x=0$:

$$\bar{\mathbf{q}}(x, z) = \bar{q}_x^0(z) \mathbf{i} + \bar{q}_z^0(z) \mathbf{k} \quad (4.53)$$

em $x=L$:

$$\bar{\mathbf{q}}(x, z) = \bar{q}_x^L(z) \mathbf{i} + \bar{q}_z^L(z) \mathbf{k} \quad (4.54)$$

Considerando que no contorno superior e inferior do laminado, Γ_2 , atuam forças por unidade de comprimento dadas por:

em $z=0$:

$$\bar{\mathbf{p}}(x, z) = \bar{p}_x^0(x) \mathbf{i} + \bar{p}_z^0(x) \mathbf{k} \quad (4.55)$$

em $z=h$:

$$\bar{\mathbf{p}}(x, z) = \bar{p}_x^h(x) \mathbf{i} + \bar{p}_z^h(x) \mathbf{k} \quad (4.56)$$

Desta forma, a variação do trabalho das forças externas é dada por:

$$\delta W_e = \int_{\Gamma_1} (\bar{\mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{r}) dz + \int_2 (\bar{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{r}) dx \quad (4.57)$$

sendo

$$\delta \mathbf{r} = \delta u \mathbf{i} + \delta w \mathbf{k} \quad (4.58)$$

Desenvolvendo a expressão (4.57) fica-se com

$$\delta W_e = \int_0^h [(\bar{q}_x^0 + \bar{q}_x^L) \delta u + (\bar{q}_z^0 + \bar{q}_z^L) \delta w] dz + \int_0^L [(\bar{p}_x^0 + \bar{p}_x^h) \delta u + (\bar{p}_z^0 + \bar{p}_z^h) \delta w] dx \quad (4.59)$$

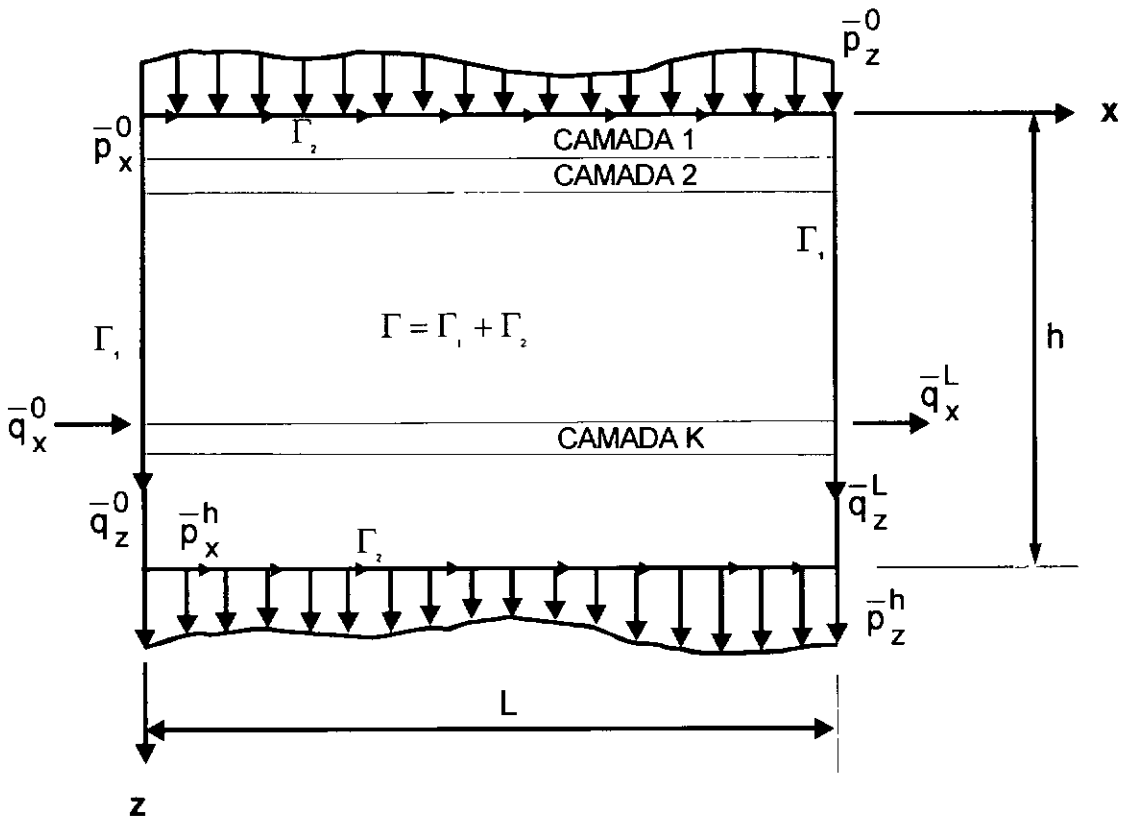


FIGURA 4.5: Esquema do carregamento externo da viga laminada.

Substituindo as expressões para deslocamentos obtidas em (4.29) e (4.30) chega-se a

$$\begin{aligned} \delta W_e = & \int_0^h \left[\bar{q}_x^0 (\delta \bar{u} + z(\delta \phi - \delta w_{,x}) + \delta \phi A_i) + \bar{q}_z^0 \delta w + \bar{q}_x^L (\delta \bar{u} + z(\delta \phi - \delta w_{,x}) + \delta \phi A_i) + \bar{q}_z^L \delta w \right] dz \\ & + \int_0^L \left[\bar{p}_x^0 \delta \bar{u} + \bar{p}_z^0 \delta w + \bar{p}_x^h (\delta \bar{u} + h(\delta \phi - \delta w_{,x}) + \delta \phi A_i) + \bar{p}_z^h \delta w \right] dx \end{aligned} \quad (4.60)$$

Manipulando convenientemente a equação anterior e efetuando as integrações indicadas, pode-se obter a expressão final para a variação virtual das forças externas, exprimindo claramente os termos associados a cada variação. Assim sendo,

$$\begin{aligned} \delta W_e = & \int_0^L \left[(\bar{p}_x^0 + \bar{p}_x^h) \delta \bar{u} + (\bar{m} + \bar{m}^a) \delta \phi + (\bar{m}_{,x} + \bar{p}_z^0 + \bar{p}_z^h) \delta w \right] dx - \\ & - \bar{N}_0 \delta \bar{u}(0) + \bar{N}_L \delta \bar{u}(L) - (\bar{Q}_0 + \bar{m}) \delta w(0) + (\bar{Q}_L - \bar{m}) \delta w(L) - \bar{M}_0 \delta w_{,x}(0) + \\ & + \bar{M}_L \delta w_{,x}(L) - \bar{M}_0^* \delta \phi(0) + \bar{M}_L^* \delta \phi(L) \end{aligned} \quad (4.61)$$

onde os termos presentes na equação anterior são dados por

$$\bar{m} = h \bar{p}_x^h \quad (4.62)$$

$$\bar{m}^a = \bar{p}_x^h A_i(z) \quad (4.63)$$

$$\bar{N}_0 = \int_0^h \bar{q}_x^0(z) dz \quad (4.64)$$

$$\bar{N}_L = \int_0^h \bar{q}_x^L(z) dz \quad (4.65)$$

$$\bar{Q}_0 = \int_0^h \bar{q}_z^0(z) dz \quad (4.66)$$

$$\bar{Q}_L = \int_0^h \bar{q}_z^L(z) dz \quad (4.67)$$

$$\bar{M}_0 = \int_0^h \bar{q}_x^0(z) z dz \quad (4.68)$$

$$\bar{M}_L = \int_0^h \bar{q}_x^L(z) z dz \quad (4.69)$$

$$\bar{M}_0^a = \int_{z_{i-1}}^{z_i} \bar{q}_x^0(z) A_i(z) dz \quad (4.70)$$

$$\bar{M}_L^a = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{q}_x^L(z) A_i(z) dz \quad (4.71)$$

$$\bar{M}_0^* = \bar{M}_0 + \bar{M}_0^a \quad (4.72)$$

$$\bar{M}_L^* = \bar{M}_L + \bar{M}_L^a \quad (4.73)$$

onde

$$A_i(z) = \sum_{k=1}^{i-1} a_k (z - z_k) \quad (4.74)$$

4.5 FORMULAÇÃO DE MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA VIGAS LAMINADAS

No item anterior desenvolveu-se todo o arcabouço necessário para a formulação de elementos finitos. Aqui é construído um espaço de aproximação de dimensão finita para Δ (definido em 4.48) e $\delta\Delta$. Em outras palavras, a partir do método dos elementos finitos, pretende-se transformar o problema inicial de dimensão infinita, em outro equivalente de dimensão finita. Para tanto, é necessário que a equação (4.50) seja submetida a um processo de discretização. Nesse processo, é admitido que as variáveis de interesse, em geral deslocamentos, devem ser calculadas em determinados pontos ao longo do corpo chamados nós. Uma vez obtidos os deslocamentos nodais, a configuração no interior de cada elemento fica bem definida pelo conjunto de funções de interpolação arbitrado inicialmente. Como se pode observar na equação (4.29), que contém $\bar{\phi}$ no termo que

apresenta um somatório, torna-se necessária a inclusão dessa grandeza como grau de liberdade, a fim de reduzir a complexidade das expressões resultantes.

O elemento finito construído neste trabalho é unidimensional e possui três nós e oito graus de liberdade, que são o deslocamento axial dos nós extremos e o deslocamento transversal e a rotação total de todos os nós. Para o deslocamento axial são usados elementos finitos de Hermite de primeiro grau. Assim fazendo, para o elemento de referência tomado no intervalo de $[-1, 1]$, são os seguintes os graus de liberdade: u_1 e u_3 . O deslocamento transversal e a rotação total são discretizados com elementos de Lagrange do segundo grau. Com isto, são os seguintes os graus de liberdade para o elemento de referência: $w_1, \theta_1, w_2, \theta_2, w_3$ e θ_3 . Aqui, o subscrito colocado em cada deslocamento denota a numeração nodal. Desta forma, tem-se

$$\{ X \}^T = \{ u_1, w_1, \theta_1, w_2, \theta_2, u_3, w_3, \theta_3 \} \quad (4.75)$$

onde $\{ X \}$ é o vetor deslocamento nodal.

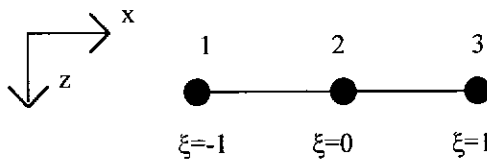


FIGURA 4.6: Elemento finito de viga laminada.

De acordo com o que foi mencionado, os deslocamentos são interpolados por

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^2 N_i^*(\xi) u_{2i-1} \quad (4.76)$$

$$w(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) w_i \quad (4.77)$$

$$\theta(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) \theta_i \quad (4.78)$$

onde

$$N_1^* = 0,5(1 - \xi) \quad (4.79)$$

$$N_2^* = 0,5(1 + \xi) \quad (4.80)$$

$$N_1 = 0,5\xi(\xi - 1) \quad (4.81)$$

$$N_2 = (1 - \xi^2) \quad (4.82)$$

$$N_3 = 0,5\xi(\xi + 1) \quad (4.83)$$

Diante do exposto, pode-se relacionar as deformações com os deslocamentos nodais e as derivadas das funções de interpolação pela expressão abaixo

$$\{ \Delta \} = [B] \{ X \} \quad (4.84)$$

onde

$$[B]^T = \begin{bmatrix} N_{1,x}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,xx} & N_{1,xx} & N_{1,x} \\ 0 & 0 & N_{1,x} & N_1 \\ 0 & N_{2,xx} & N_{2,xx} & N_{2,x} \\ 0 & 0 & N_{2,x} & N_2 \\ N_{2,x}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{3,xx} & N_{3,xx} & N_{3,x} \\ 0 & 0 & N_{3,x} & N_3 \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

O Jacobiano pode ser calculado pela seguinte expressão

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3 \quad (4.86)$$

Como o segundo nó é tomado no meio do elemento, J é facilmente obtido como $0.5 \ell^e$, onde ℓ^e é o comprimento do elemento. Deve-se observar que J atua simplesmente como um fator de escala. Na formulação de Galerkin, as mesmas funções que interpolam o campo de deslocamentos são adotadas como funções peso e portanto são usadas na variação do campo de deslocamentos. Agora, voltando à equação (4.50) e substituindo (4.84) tem-se

$$\delta\Phi = \{X\}^T \left[b \int_0^L [B]^T [D] [B] dx \right] \{\delta X\} \quad (4.87)$$

A expressão compreendida entre o símbolo colchetes é chamada matriz de rigidez do elemento. Para um elemento típico ela toma a forma

$$[K]^e = \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] b J d\xi \quad (4.88)$$

Desta maneira, a variação da energia de deformação do elemento fica sendo

$$\delta\Phi = \{X\} [K]^e \{\delta X\} \quad (4.89)$$

onde o sobrescrito e se refere a um elemento genérico.

Neste trabalho utiliza-se a regra de integração de Gauss de três pontos, uma vez que o produto das funções de base de maior ordem é do quarto grau.

4.6 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Estudos através de testes de modelos físicos, usualmente em laboratório, levam, em

geral, a bons resultados. No entanto, os custos são quase sempre muito altos devido à grande variedade de situações a serem analisadas. Em aplicações industriais é necessária uma ferramenta que forneça resultados precisos, mas também que implique em baixos custos. Assim, uma estratégia cada vez mais adotada é a simulação numérica dos casos de interesse.

A importância deste item reside na apresentação de alguns resultados numéricos que buscam validar o modelo e o código computacional desenvolvido neste trabalho. O primeiro exemplo trata de uma viga homogênea isotrópica, onde os valores obtidos são comparados com os fornecidos por teorias tradicionais. O segundo exemplo tem como objetivo principal a análise de uma aplicação de viga laminadas cujo empilhamento das lâminas possui direções variadas. Os valores obtidos são passíveis de comparação com os de outros autores . Nesses exemplos, são usados diferentes tipos de condições de contorno e carregamentos visando demonstrar a versatilidade do programa desenvolvido. Da análise destes resultados pode-se atestar uma boa concordância para os valores de deslocamentos.

4.6.1 - Viga Homogênea Isotrópica

Neste exemplo, esquematizado na Figura 4.6, uma viga isotrópica está engastada na extremidade $x = 0$ e submetida a uma força distribuída ao longo do seu comprimento. Para efeito de análise o comprimento da viga é mantido constante, enquanto sua altura é variada. As propriedades geométricas e as características do material são dadas na Figura 4.7.

Dados do Problema

$$E_{\text{aço}} = 210 \text{ GPa} \quad G_{\text{aço}} = 84 \text{ GPa}$$

$$\nu_{\text{aço}} = 0,25 \quad \varphi = 0^\circ \quad L = 5 \text{ m}$$

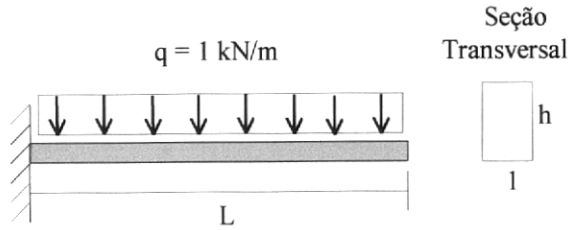


FIGURA 4.7: Viga homogênea isotrópica de aço

É conveniente comentar que, com os parâmetros materiais indicados os próprios coeficientes elásticos presentes na equação constitutiva (4.33). Este exemplo tem como objetivo calcular o deslocamento transversal na extremidade livre, quando a viga é colocada sobre várias relações comprimento versus espessura. A comparação dos resultados obtidos pelo programa aqui desenvolvido com aqueles da teoria clássica, que satisfazem a hipótese de Bernoulli [13], ressalta uma boa concordância entre os valores quando a relação L/h é grande, pois neste caso o efeito da flexão é mais dominante. Para pequenas relações L/h o efeito de cisalhamento começa a ficar mais significativo. Como a teoria de Bernoulli desconsidera tal efeito, a diferença torna-se maior. Aliás, conforme a relação L/h diminui, esta diferença tende a ser mais acentuada.

Na Tabela 4.1 são mostrados os valores de deslocamentos transversais obtidos pelo programa desenvolvido e pela fórmula clássica da resistência dos materiais. A viga foi discretizada em 10 (dez) elementos de mesmo tamanho, o que possibilita o grau de refinamento necessário para obter a acurácia exigida para o estudo do elemento. Vale

ressaltar que o modelo desenvolvido neste trabalho torna-se igual ao desenvolvido por HINTON e OWEN [14] com base na viga de Timoshenko, quando não houver ajuste na distorção da normal deformada, linha A'C' da Figura 4.3. Isso acontece quando as propriedades das lâminas são as mesmas ao longo da altura da viga, ou quando a viga em análise é formada de uma única lâmina.

Buscando avaliar o efeito de travamento no elemento desenvolvido, a viga é analisada sob uma força vertical de 1 kN na extremidade livre. Este exemplo tem um intuito puramente numérico. Como mostrado por ALLEN [2], nas aplicações onde altura da viga é muito menor que seu comprimento ocorre um enrijecimento espúrio da estrutura. A Tabela 4.2 mostra os resultados dessa análise, onde o comprimento da viga foi mantido constante e sua altura assumiu valores diversos.

TABELA 4.1: Deslocamentos transversais na extremidade livre.

L/h	Teoria Clássica [m]	Elementos Finitos [m]	Diferença
5	$4,4642 \times 10^{-6}$	$4,6015 \times 10^{-6}$	3,10 %
10	$3,5714 \times 10^{-5}$	$3,5919 \times 10^{-5}$	0,57 %
15	$1,2053 \times 10^{-4}$	$1,2067 \times 10^{-4}$	0,12 %
20	$2,8571 \times 10^{-4}$	$2,8557 \times 10^{-4}$	0,05 %
25	$5,5803 \times 10^{-4}$	$5,5798 \times 10^{-4}$	0,03 %
30	$9,6428 \times 10^{-4}$	$9,6400 \times 10^{-4}$	0,01%

TABELA 4.2: Efeito de travamento (“locking”).

L/h	Teoria Clássica [m]	Elementos Finitos [m]	Diferença
5	$2,381 \times 10^{-6}$	$2,436 \times 10^{-6}$	2,31%
10	$1,905 \times 10^{-5}$	$1,913 \times 10^{-5}$	0,42%
15	$6,428 \times 10^{-5}$	$6,434 \times 10^{-5}$	0,10%
20	$1,524 \times 10^{-4}$	$1,528 \times 10^{-4}$	0,07%
25	$2,976 \times 10^{-4}$	$2,974 \times 10^{-4}$	0,07%
30	$5,143 \times 10^{-4}$	$5,134 \times 10^{-4}$	0,17%
50	$2,381 \times 10^{-3}$	$2,377 \times 10^{-3}$	0,17%
100	$1,905 \times 10^{-2}$	$1,901 \times 10^{-2}$	0,18%
500	$0,238 \times 10^{+1}$	$0,237 \times 10^{+1}$	0,17%
1000	$1,905 \times 10^{+1}$	$1,902 \times 10^{+1}$	0,19%
10000	$1,905 \times 10^{+4}$	$1,902 \times 10^{+4}$	0,18%
100000	$1,905 \times 10^{+7}$	$1,902 \times 10^{+7}$	0,18%
1000000	$1,905 \times 10^{+10}$	$1,873 \times 10^{+10}$	1,67%
10000000	$1,905 \times 10^{+13}$	$6,919 \times 10^{+12}$	64,0%

4.6.2 - Viga Laminada Ortotrópica

O material que constitui as camadas da viga laminada possui as seguintes propriedades:

$$E_{11} = 210 \text{ GPa}$$

$$E_{22} = 5,2 \text{ GPa}$$

$$G_{13} = 3,1 \text{ GPa}$$

$$\nu_{13} = 0,25$$

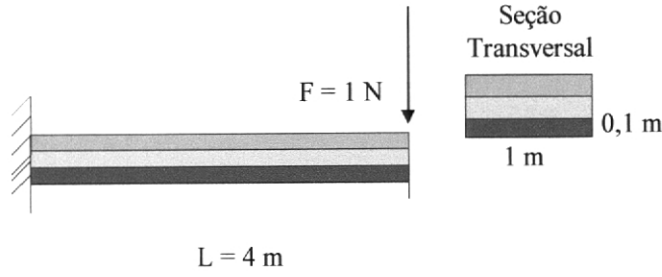


FIGURA 4.8: Viga laminada ortotrópica.

Este exemplo, cuja motivação é a análise do comportamento de vigas laminadas constituídas de várias camadas e orientação das fibras, é tratado em [15]. A viga em foco é engastada na extremidade $x = 0$ e sujeita a uma força vertical F em $x = L$. A viga foi discretizada em 8 (oito) elementos de mesmo tamanho. O objetivo da análise é de comparar os resultados obtidos a partir do presente modelo com aqueles de LEKHNITSKII *et al.* [15]. Segundo esses autores, para vigas laminadas ortotrópicas o deslocamento transversal na extremidade livre é dado por

$$w = \frac{F L^3}{3 D} \quad (4.90)$$

onde

$$D = \frac{b S}{12 S_1} \quad (4.91)$$

$$S = 4 S_1 S_3 - 3 S_2^2 \quad (4.92)$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) C_{11}^{(k)} \quad (4.93)$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) C_{11}^{(k)} \quad (4.94)$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^n (z_k^3 - z_{k-1}^3) C_{11}^{(k)} \quad (4.95)$$

É conveniente ressaltar que na fórmula desenvolvida por LEKHNITSKII *et al.* [15] não é considerado o cisalhamento e que igualmente a este trabalho a superfície de referência é tomada no plano $z = 0$. Na Tabela (4.3) é mostrado o valor de deslocamento transversal na extremidade livre $x = L$. Durante a análise são adotados diferentes números de lâminas e orientação das fibras e a relação L/h é mantida constante. A viga possui espessura das lâminas uniforme. Uma vez alterado o número de lâminas, cada uma terá a espessura tal que multiplicada pelo número de lâminas resultará na mesma altura da viga.

Os resultados apresentados na Tabela 4.3 ressaltam uma boa concordância entre os valores de deslocamento transversal obtidos a partir do elemento finito desenvolvido neste trabalho e os obtidos de acordo com LEKHNITSKII *et al.* [15], citado anteriormente.

TABELA 4.3 : Valores de deslocamento transversal na extremidade livre.

φ [GRAUS]	Lekhnitskii [m]	Elementos finitos [m]	Diferença
0	$1,237 \times 10^{-6}$	$1,228 \times 10^{-6}$	0,68%
30	$1,914 \times 10^{-5}$	$1,908 \times 10^{-5}$	0,30%
0/90 /0/90	$2,919 \times 10^{-6}$	$2,911 \times 10^{-6}$	0,28%
0/90 /90/0	$1,416 \times 10^{-6}$	$1,417 \times 10^{-6}$	0,07%
0/+45/-45/90/90/-45/+45/0	$2,083 \times 10^{-6}$	$2,285 \times 10^{-6}$	8,84%

CAPÍTULO 5

ELEMENTO FINITO PARA CASCAS LAMINADAS

5.1 INTRODUÇÃO

As indústrias aeroespacial, automotiva e petroquímica, entre outras, estão utilizando, cada vez mais, vigas, placas e cascas laminadas como elementos estruturais. No projeto Apollo, por exemplo, tornou-se necessária a construção de uma estrutura em casca que, apesar de seu peso reduzido, suportasse com segurança suficiente todos os esforços resultantes da decolagem e aceleração, além das solicitações conseqüentes das operações de alunissagem [16]. Essa tecnologia é materializada em técnicas de painéis sanduíches como está esquematizado na Figura 5.1.

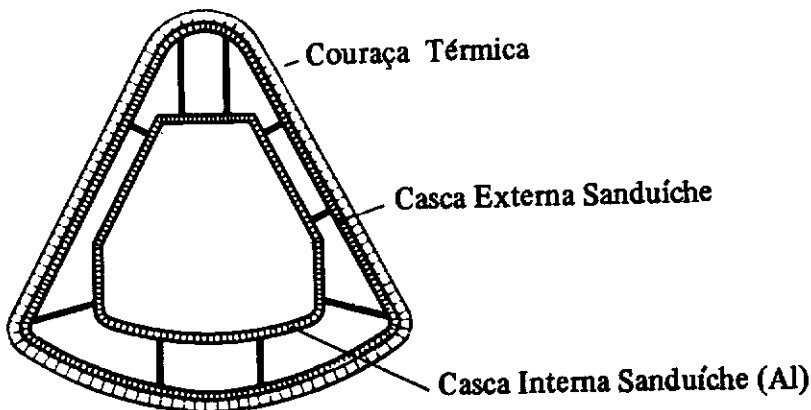


FIGURA 5.1: Croqui da Cápsula Apollo.

A grande utilização de materiais compósitos se deriva da necessidade de encontrar novos materiais cujo comportamento estrutural seja superior aos utilizados até então. Desta maneira verificou-se, especialmente nas últimas duas décadas, especial atenção dos pesquisadores para o desenvolvimento de métodos e teorias para a análise de estruturas em materiais conjugados, também chamados compósitos. Obviamente, os grandes laboratórios espaciais foram os responsáveis pelo maior estímulo a essas pesquisas.

O sistema sanduíche adotado para os compartimentos nos programas Apollo e Saturno, previamente testado para o jato supersônico XB-70 (MACH-3), consistiu de camadas exteriores de aço com 0,2 mm a 0,5 mm de espessura, ligadas de maneira resistente ao cisalhamento a uma camada tipo "colméia" ("honeycomb") de aproximadamente 0,038 mm de espessura (Figura 5.2).

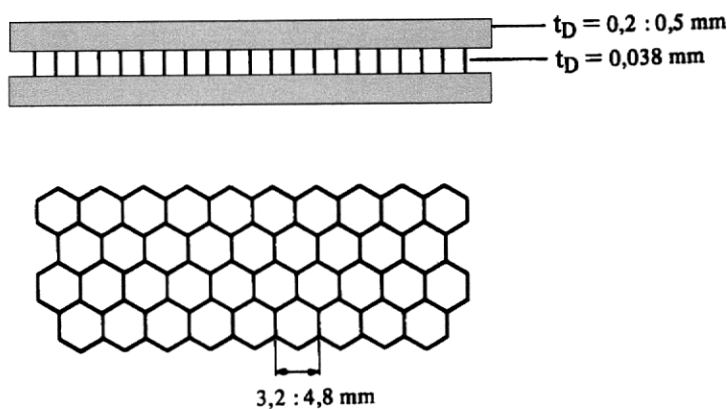


FIGURA 5.2: Sistema sanduíche da cápsula Apollo.

A eficiência da técnica sanduíche de aço e poliuretano foi comprovada também na feira de Hanover em 1970, onde foi construída uma cúpula esférica com 45 m de vão [16]. Essa cúpula foi formada por 40 segmentos de casca de 19 metros de comprimento,

cada um dos quais tendo sido, por sua vez, dividido em 3 peças simples de modo a que nenhuma peça ultrapassasse a largura máxima de produção de 1500 mm, da chapa galvanizada. A seção transversal de um elemento pré-fabricado era formada por duas chapas externas com 1 mm de espessura, aumentadas para 2 mm na região das colunas de apoio, em face da concentração de tensões, e uma camada interna de poliuretano com 150 mm de espessura (Figura 5.3).

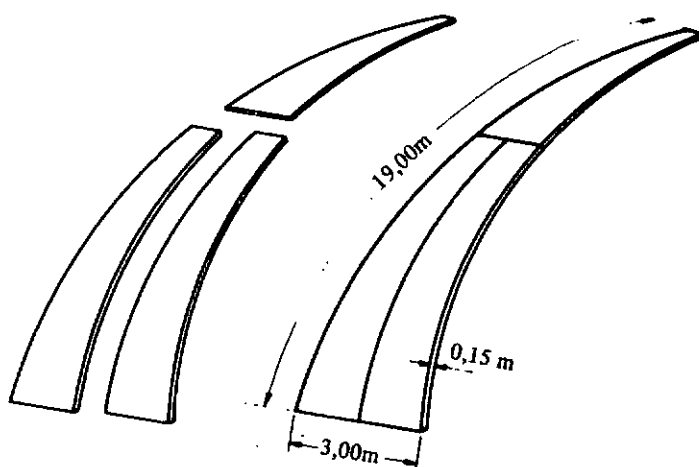


FIGURA 5.3: Elemento da cúpula de Hanover (1970).

Como a solução de cascas via análise tridimensional envolve dificuldades matemáticas consideráveis, foram desenvolvidas algumas teorias bidimensionais. Atualmente muitas das teorias para placas e cascas anisótropas laminadas são extensões diretas dos métodos desenvolvidos anteriormente para placas e cascas homogêneas, isotrópicas ou ortótropas.

De uma forma esquemática pode-se dividir as teorias que tratam do problema de acordo com a Figura 5.4.

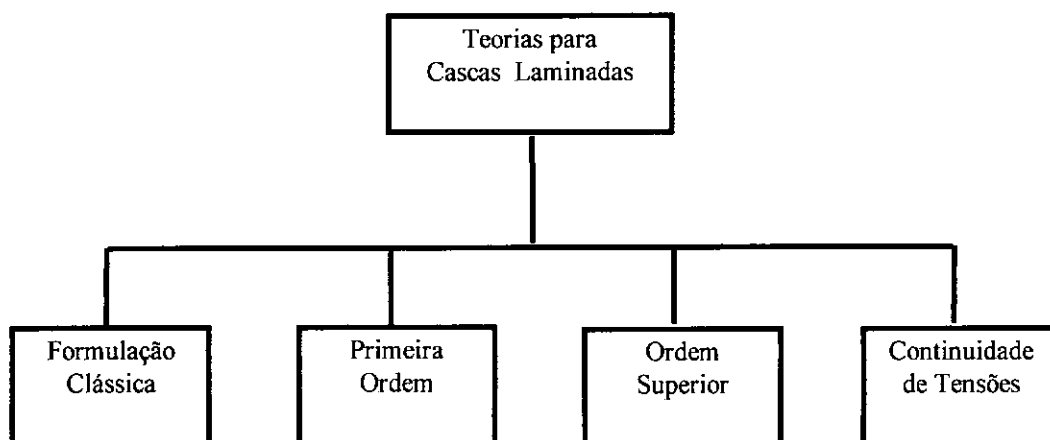


FIGURA 5.4: Divisão Esquemática das Teorias para Cascas Laminadas.

Nas teorias que seguem a formulação clássica, adotam-se as conhecidas hipóteses de Kirchoff-Love. Fazem parte deste grupo as teorias apresentadas por: REISSNER e STAVSKY [17] para placas laminadas de material anisótropo ; DONG *et al.* [18], para cascas finas laminadas e de geometria arbitrária e que aplica as equações constitutivas obtidas por REISSNER e STAVSKY [17] aliadas à teoria de primeira aproximação de LOVE [19]; AMBARTSUMYAN [20], que particularizou o estudo para o caso de camadas ortótropas, antes que anisótropas, sendo os eixos principais de simetria do material coincidentes com as direções principais da superfície de referência da casca; e BERT [21], que igualmente utiliza as equações constitutivas de REISSNER e STAVSKY [17], porém aliadas agora à teoria de cascas desenvolvida por VLASOV [22]. São adotadas as seguintes hipóteses e limitações das teorias lineares clássicas de pequenos deslocamentos:

- a) Os deslocamentos são considerados tão pequenos que as equações linearizadas de deformações-deslocamentos são válidas;

- b) A fração espessura / menor raio de curvatura deve ser pequena para que (de acordo com Kirchhoff-Love) as seguintes aproximações sejam aceitáveis:
- b1) as normais à superfície de referência antes da deformação, permanecem normais àquela superfície, após a deformação;
 - b2) a espessura da casca não se altera com o carregamento, ou seja, a deformação normal no sentido da espessura é abandonada;
- c) A tensão normal transversal é pequena, comparada com as tensões em outras direções e portanto é considerada nula.
- d) A espessura das camadas é uniforme e os coeficientes elásticos do material não variam com a posição na superfície de referência.

REISSNER e STAVSKY [17] demonstraram que, para placas laminadas, os efeitos de alongamento e de flexão estão acoplados. Assim, tanto forças paralelas à superfície como momentos estão associados a deformações no plano da placa e a deslocamentos transversais. A placa em questão consistia de duas camadas de material ortótropo de igual espessura, laminadas de tal maneira que os eixos de simetria elástica faziam um ângulo $-\varphi$ com os eixos coordenados em uma camada, e $+\varphi$ na outra.

Se para cascas homogêneas o abandono das deformações normais no sentido da espessura e das distorções nos planos verticais α - ζ e β - ζ (sendo α e β direções tangentes à casca e ζ a direção da espessura) eram aceitáveis, o mesmo não se pode dizer para cascas laminadas. A hipótese da normal indeformável leva a tensões de cisalhamento incompatíveis entre duas camadas adjacentes. Além disso, o fato de considerar uma única normal mostra-se inadequado para modelar o perfil das seções transversais, ou seja, para refletir a influência das tensões transversais de cisalhamento na distorção da normal deformada. Há ainda que se considerar uma perfeita ligação entre as camadas por um adesivo de espessura infinitesimal. Isto limita as análises efetuadas às estruturas

laminadas rígidas ao cisalhamento, excluindo portanto aquelas que possuem um núcleo flexível. Deve-se ainda considerar que o fato de se assumir um estado plano de tensões para a determinação das equações constitutivas elimina a possibilidade de um cálculo rigoroso de tensões interlaminares.

Assim sendo, essas teorias conduzem a uma precisão aceitável quando:

- a) a relação dimensão lateral / espessura é grande;
- b) a ortotropia do material não é severa e as propriedades do material não variam acentuadamente de camada para camada.

Como as excitações dinâmicas não foram abordadas pelas teorias, só se poderia esperar resultados satisfatórios no caso de baixas frequências e elevados comprimentos de onda.

Da análise dos resultados destes tratamentos, obteve-se a indicação de que o abandono das distorções transversais poderia levar a erros consideráveis. Estes aconteciam principalmente nos casos de pequenas relações raio de curvatura / espessura e comprimento / espessura. Visando superar as limitações introduzidas pela formulação clássica de cascas finas, foram desenvolvidos refinamentos das mesmas, de modo a incluir as deformações devidas ao cisalhamento transversal. Assim, surgiram propostas que, partindo de deslocamentos similares à formulação clássica, adotavam ângulos de distorções transversais constantes para toda a seção. Assim, pode-se citar os trabalhos de: YANG *et al.* [23], para placas laminadas e DONG e TSO [24], para cascas laminadas ortótropas. A teoria de YANG *et al.* [23] aplica-se na propagação de ondas planas e para que o espectro de frequências dessa formulação correspondesse ao obtido pela teoria da elasticidade, houve a necessidade de incluir um fator de correção. Ela demonstra, para o caso dinâmico, a existência de um acoplamento entre os efeitos de flexão e extensão, do mesmo tipo apresentado por REISSNER e STAVSKY [17] para o

caso estático. O material é considerado heterogêneo apenas na direção da espessura. WHITNEY e PAGANO [25] aplicaram a teoria de YANG *et al.* [23] a várias condições de contorno e teceram considerações sobre o valor do fator de correção mencionado anteriormente para placas laminadas. A teoria de DONG e TSO [24] também apresenta necessidade de utilizar fatores de correção análogos aos utilizados por MINDLIN [26] e YANG *et al.* [23] a fim de levar em consideração as distorções das camadas constituintes. As equações de movimento são obtidas da mesma forma que a formulação clássica [27], com exceção dos termos relativos à inércia. Esses termos são diferentes devido ao fato de que a disposição laminar gera um acoplamento entre as inércias extensional e rotacional.

As formulações anteriores, porém, mostraram-se satisfatórias para descrever até o primeiro modo de vibração à flexão de cascas em que a rigidez das camadas constituintes fossem próximas. Para o caso de frequências elevadas ou de uma variação acentuada da rigidez camada a camada, a resposta fornecida afastava-se da realidade.

Essas teorias sofrem as mesmas limitações das que seguem a formulação clássica, no que diz respeito à consideração de uma normal inextensível e o conseqüente abandono das tensões normais transversais. Isto traz como resultado que a mesma somente é aplicável para materiais cuja rigidez normal transversal seja suficientemente grande. Em caso contrário, a deformação normal ao longo da espessura será predominante e o comportamento da casca não será o previsto. Desta forma, a formulação apresentada serve para prever o comportamento estrutural da casca como um todo (deslocamentos, tensões, resultantes de tensões e frequências de vibração) de maneira aceitável.

Além disso, a influência da curvatura da casca no valor dos fatores de correção adotados é abandonada, levando a que, para grandes curvaturas, os resultados afastem-se da realidade.

Tanto as teorias que seguem a formulação clássica como as de primeira ordem, que incluem deformações transversais, partem de deslocamentos paralelos à superfície de referência que variam linearmente ao longo de toda espessura da casca. Se a rigidez ao cisalhamento das camadas constituintes variar muito pouco, tem-se, como já foi afirmado, resultados satisfatórios até para o primeiro modo de vibração.

Em contrapartida, no caso de grande variação da rigidez ao cisalhamento entre as camadas, os resultados alcançados por tais teorias não se mostram, em geral, aceitáveis.

Visando a aumentar a precisão dos resultados surgiram teorias que passaram a utilizar campos de deslocamentos de forma polinomial e com potências mais elevadas. Desta forma, tornava-se possível chegar a uma distribuição parabólica das tensões cisalhantes ao longo da seção. Assim, para que a fidelidade dos resultados aumentasse, surgiu a necessidade da inclusão de termos envolvendo potências da coordenada normal à superfície de referência (placa ou casca) maiores do que a unidade nas expressões adotadas para os deslocamentos. Essas potências definem a ordem das teorias em questão.

Inserido neste contexto existem os trabalhos de: WHITNEY e SUN [28], que formularam em 1973 uma teoria para placas laminadas e em 1974 chegaram às equações de governo de cascas cilíndricas anisótropas, no caso estático [29]; LIBRESCU [30], que restringiu o estudo para placas laminadas simétricas constituídas de 3 camadas; LO *et al.*, [31], que igualmente desenvolveram uma teoria para placas laminadas; BHIMARADDI [32], que desenvolveu uma teoria para respostas dinâmicas de cascas cilíndricas ortótropas homogêneas e REDDY e LIU [33], que em 1985 formularam uma teoria para cascas laminadas, ampliando uma teoria anterior de REDDY [34] para placas que considerava uma variação parabólica das distorções ao longo da espessura.

As teorias de ordem elevada procuram remover as imprecisões contidas nas teorias baseadas na formulação clássica de cascas e nas teorias de distorções de primeira ordem.

De um certo modo, estas teorias se apresentam muito trabalhosas para resolver o sistema de equações diferenciais de governo com condições de contorno estabelecidas. Isso se deve ao fato de que, para cada potência adicional da coordenada da espessura introduzida no campo de deslocamentos, aparece uma nova incógnita no sistemas de equações.

A teoria de REDDY e LIU [33], no entanto, contém o mesmo número de incógnitas que a teoria de distorções de primeira ordem.

Em geral, estas teorias são complicadas e exigentes, no que diz respeito à utilização do computador (a de REDDY e LIU [33] parece ser a mais apropriada para um tratamento numérico computacional).

De uma maneira geral, os campos de deslocamentos admitidos pelas teorias acima, que valem para toda a seção e portanto para diferentes lâminas, levavam a que a continuidade das tensões de cisalhamento transversais fosse violada nas interfaces.

Por isso algumas teorias foram desenvolvidas permitindo serem satisfeitas simultaneamente as condições de contato para os deslocamentos e as tensões cisalhantes nas interfaces das várias camadas. Assim, tem-se os trabalhos de: AMBARTSUMYAN [35], que formulou uma teoria para placas ortótropas laminadas, com um número ímpar de camadas e simétricas em relação à superfície média, WHITNEY [36], que estendeu o trabalho de AMBARTSUMYAN [35] para laminados simétricos em que os eixos dos materiais de cada camada têm orientação arbitrária em relação aos eixos da placa; HSU e WANG [37], que procuraram estabelecer uma teoria para cascas laminadas cilíndricas ortótropas; WHITNEY e SUN [38], que propuseram uma teoria refinada para placas multilamelares ; SRINIVAS [39], que igualmente desenvolveu uma teoria para placas

laminadas; ZUKAS e VINSON [40], que tratam de cascas cilíndricas laminadas sujeitas a carregamento mecânico e térmico axissimétrico; RATH e DAS [41], que estenderam a teoria proposta por WHITNEY [36] para cascas; WALTZ e VINSON [42], que propuseram uma teoria para cascas cilíndricas carregadas simetricamente em relação ao seu eixo e DI SCIUVA, que em 1984 formulou uma teoria para placas anisótropas laminadas [43] e em 1987 realizou a extensão da mesma para cascas [44].

Como se pode verificar, as teorias mencionadas procuram atingir uma maior precisão nos resultados, porém são muito trabalhosas e exigentes no que diz respeito ao seu desenvolvimento em computador. Um grande problema da maior parte das teorias para laminados é sua adequação a um método numérico, como por exemplo, elementos finitos. Poucas são as que se apresentam atrativas a uma solução computacional mesmo quando o número de camadas é grande. O número de equações do sistema a resolver aumenta com o de camadas. Assim, com exceção da teoria proposta por DI SCIUVA [44], torna-se difícil utilizar essas proposições visando a formular elementos finitos de placa ou casca em deslocamentos.

Na teoria de DI SCIUVA [44], por sua vez, o número de equações diferenciais parciais que compõem o sistema resultante independe do número de camadas. Além disso é possível modelar a distorção da normal deformada sem aumentar o número e a ordem das equações diferenciais parciais com relação à teoria de distorções transversais de primeira ordem.

Certamente o estudo aqui realizado não poderia deixar de abordar algumas teorias de placas laminadas, uma vez que muitas delas serviram de fundamento para uma posterior aplicação para cascas.

5.2 FUNDAMENTOS DE TEORIA DE CONTINUIDADE DE TENSÕES

Seja uma superfície arbitrária S , aqui designada de superfície de referência, definida por duas coordenadas curvilíneas ortogonais (α, β) , coincidindo com as linhas principais de curvatura. Seja $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \beta)$ o vetor posição de um ponto qualquer da superfície.

Tem-se que:

$$A^2 = \mathbf{r}_{,\alpha} \cdot \mathbf{r}_{,\alpha} \quad (5.1)$$

$$B^2 = \mathbf{r}_{,\beta} \cdot \mathbf{r}_{,\beta} \quad (5.2)$$

A e B são os coeficientes da primeira forma fundamental da superfície de referência da casca. O vetor unitário perpendicular a S é chamado \mathbf{n} e é escolhido de modo que forme junto aos vetores unitários nas direções de α e β um sistema ortogonal que respeite a regra da mão direita. Os raios de curvatura nas direções de α e β são chamados de R_α e R_β , respectivamente, e são considerados positivos quando o centro de curvatura estiver na direção positiva de \mathbf{n} .

Chama-se ζ a coordenada medida ao longo da normal \mathbf{n} e os coeficientes de Lamé (segunda forma fundamental da superfície) da superfície de referência são:

$$H_\alpha = A (1 - \zeta / R_\alpha) \quad (5.3)$$

$$H_\beta = B (1 - \zeta / R_\beta) \quad (5.4)$$

A Figura 5.5 apresenta o valor de r antes e após a deformação.

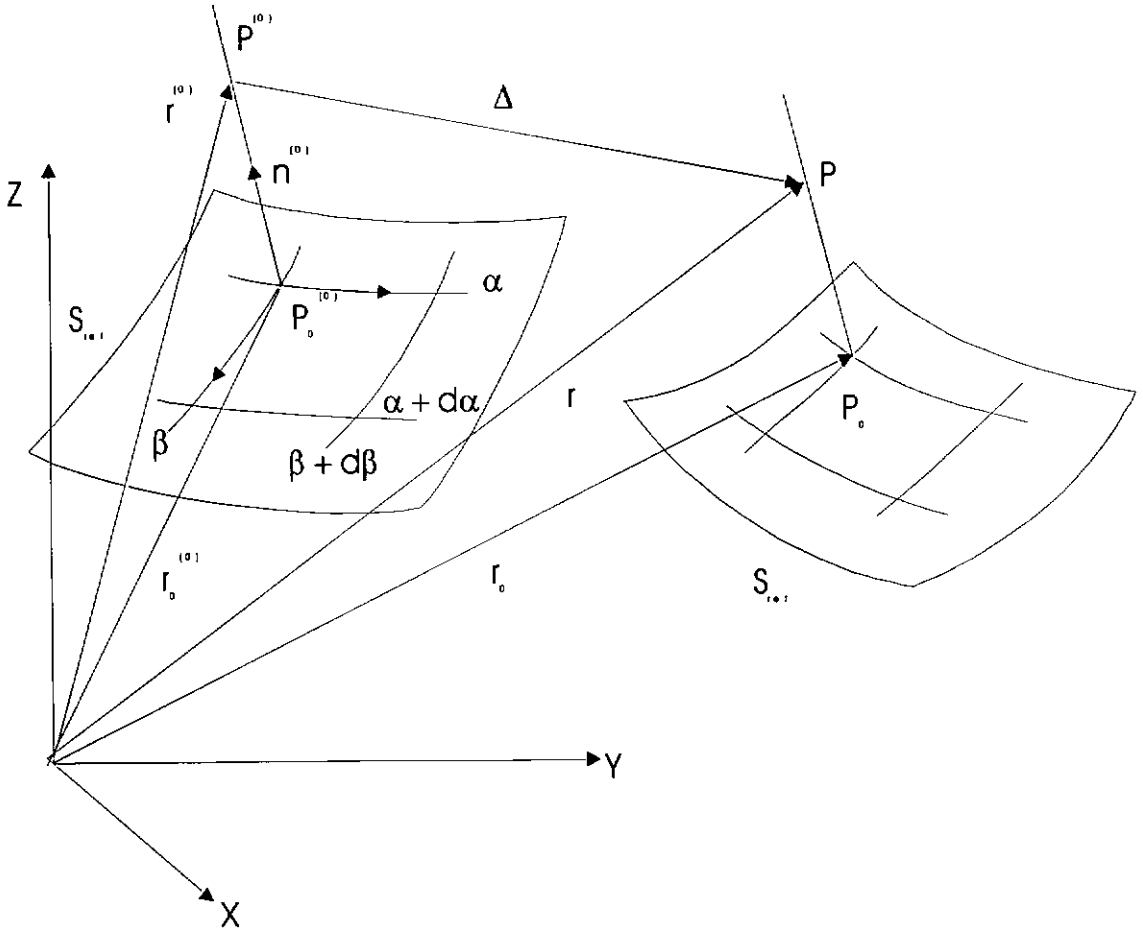


FIGURA 5.5: O vetor posição antes e após a deformação.

As expressões para deformações em um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais coincidentes com as linhas principais de curvatura são:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{A \left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha} \right)} \left(u_{,\alpha} + v \frac{A_{,\beta}}{B} - w \frac{A}{R_\alpha} \right) \quad (5.5)$$

$$\varepsilon_{\beta\beta} = \frac{1}{B\left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right)} \left(v_{,\beta} + u \frac{B_{,\alpha}}{A} - w \frac{B}{R_\beta} \right) \quad (5.6)$$

$$\varepsilon_{\zeta\zeta} = w_{,\zeta} \quad (5.7)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{B\left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right)}{A\left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right)} \left[\frac{v}{B\left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right)} \right]_{,\alpha} + \frac{A\left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right)}{B\left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right)} \left[\frac{u}{A\left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right)} \right]_{,\beta} \quad (5.8)$$

$$\varepsilon_{\alpha\zeta} = \frac{1}{A\left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right)} w_{,\alpha} + A\left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right) \left[\frac{u}{A\left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right)} \right]_{,\zeta} \quad (5.9)$$

$$\varepsilon_{\beta\zeta} = \frac{1}{B\left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right)} w_{,\beta} + B\left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right) \left[\frac{v}{B\left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right)} \right]_{,\zeta} \quad (5.10)$$

Onde u , v e w são as componentes do deslocamento de um ponto arbitrário nas direções α , β e ζ , respectivamente.

Aplicando as condições de Gauss-Codazzi, a equação (5.8) poderia assumir a forma

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{A\left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right)} \left(v_{,\alpha} - u \frac{A_{,\beta}}{B} \right) + \frac{1}{B\left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right)} \left(u_{,\beta} - v \frac{B_{,\alpha}}{A} \right) \quad (5.11)$$

Admitindo uma perfeita ligação entre as camadas que não permite a ocorrência de deslizamento entre elas, as seguintes condições de contato devem ser satisfeitas na interface entre as camadas (m) e (m+1):

$$u^+ = u^- \quad (5.12)$$

$$v^+ = v^- \quad (5.13)$$

$$w^+ = w^- \quad (5.14)$$

Além disso, para satisfazer à continuidade de tensões, é necessário que as seguintes condições de equilíbrio sejam obedecidas:

$$\sigma_{\alpha\zeta}^+ = \sigma_{\alpha\zeta}^- \quad (5.15)$$

$$\sigma_{\beta\zeta}^+ = \sigma_{\beta\zeta}^- \quad (5.16)$$

$$\sigma_{\zeta\zeta}^+ = \sigma_{\zeta\zeta}^- \quad (5.17)$$

Os símbolos + e - indicam valores referentes a pontos situados infinitesimalmente acima ($\zeta_m + 0$) e abaixo ($\zeta_m - 0$), respectivamente, da interface com coordenada $\zeta = \zeta_m$.

5.3 EXPRESSÕES INICIAIS PARA O CAMPO DE DESLOCAMENTOS E PARA DEFORMAÇÕES

Considere-se o campo de deslocamentos

$$u(\alpha, \beta, \zeta) = \left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right) \bar{u}(\alpha, \beta) + \zeta \left(\bar{\phi}_\alpha(\alpha, \beta) - \frac{\bar{w}_{,\alpha}(\alpha, \beta)}{A} \right) + \sum_{k=1}^{n_i} \psi_k(\alpha, \beta) (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \quad (5.18)$$

$$v(\alpha, \beta, \zeta) = \left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right) \bar{v}(\alpha, \beta) + \zeta \left(\bar{\phi}_\beta(\alpha, \beta) - \frac{\bar{w}_{,\beta}(\alpha, \beta)}{B} \right) + \sum_{k=1}^{n_i} \vartheta_k(\alpha, \beta) (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \quad (5.19)$$

$$w(\alpha, \beta, \zeta) = \bar{w}(\alpha, \beta) \quad (5.20)$$

A Figura 5.6 mostra as parcelas presentes na equação do deslocamento u onde, apenas para facilitar a representação das grandezas envolvidas, a direção α é colocada paralela à direção do deslocamento u . Para o deslocamento v , basta uma troca adequada de índices. \bar{u} , \bar{v} e \bar{w} são os deslocamentos de um ponto situado na superfície de referência da casca, $\bar{\phi}_\alpha$ e $\bar{\phi}_\beta$ são os valores das rotações devidas ao cisalhamento nos planos (α, ζ) e (β, ζ) , respectivamente; Y é a função unitária de Heaviside e ψ_k e ϑ_k são funções a serem determinadas pelas condições de contato das tensões de cisalhamento transversais nas interfaces. O índice k , presente no somatório, varia de 1 a n_i (número de interfaces), que é igual a $N - 1$, sendo N o número de camadas.

A continuidade em u e v é verificada facilmente no campo de deslocamentos fornecido, devido à presença do termo $(\zeta - \zeta_k)$ no interior do somatório. A continuidade em w é ainda mais evidente.

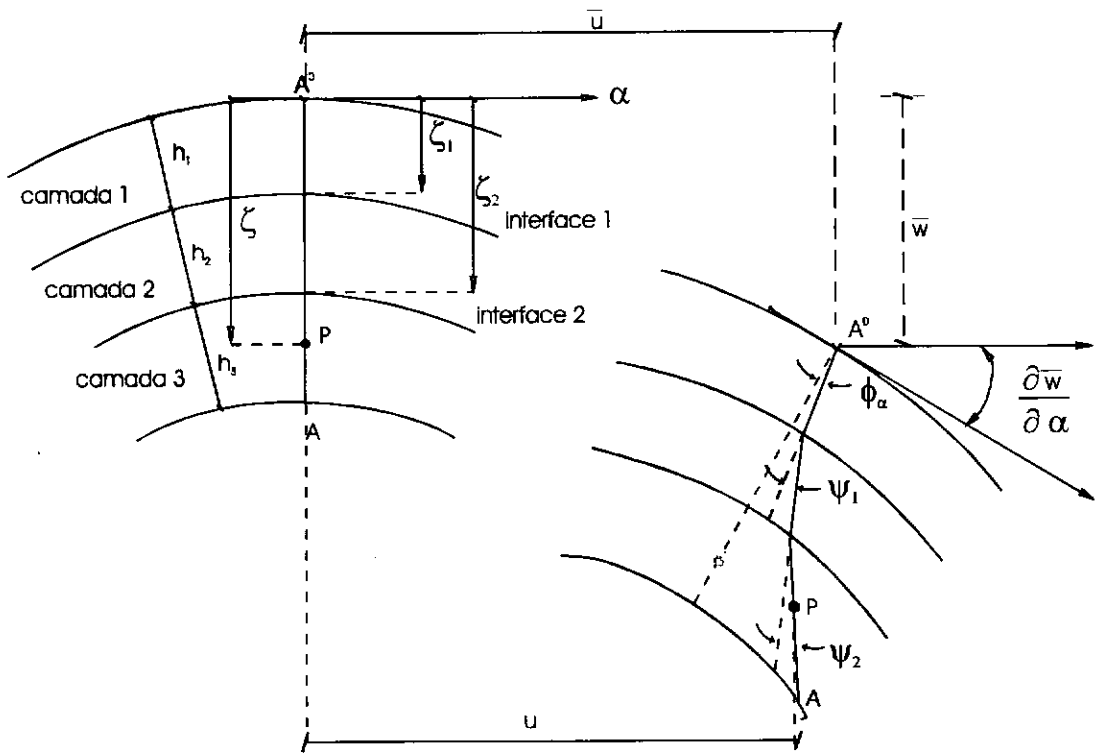


FIGURA 5.6: O campo de deslocamentos.

Na superfície de referência, as deformações ficam:

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{A} \left(\bar{u}_{,\alpha} + \bar{v} \frac{A_{,\beta}}{B} - \bar{w} \frac{A}{R_\alpha} \right) \quad (5.21)$$

$$\bar{\varepsilon}_{\beta\beta} = \frac{1}{B} \left(\bar{v}_{,\beta} + \bar{u} \frac{B_{,\alpha}}{A} - \bar{w} \frac{B}{R_\beta} \right) \quad (5.22)$$

$$\bar{\varepsilon}_{\zeta\zeta} = \bar{w}_{,\zeta} \quad (5.23)$$

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{A} \left(\bar{v}_{,\alpha} - \bar{u} \frac{A_{,\beta}}{B} \right) + \frac{1}{B} \left(\bar{u}_{,\beta} - \bar{v} \frac{B_{,\alpha}}{A} \right) \quad (5.24)$$

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha\zeta} = \bar{\phi}_\alpha \quad (5.25)$$

e

$$\bar{\varepsilon}_{\beta\zeta} = \bar{\phi}_\beta \quad (5.26)$$

Fazendo as substituições adequadas pode-se chegar às seguintes expressões que exprimem as deformações em pontos fora da superfície de referência.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} = & \bar{\varepsilon}_{\alpha\alpha} \frac{1}{\left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right)} + \frac{\zeta}{A \left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right)} \left[\bar{\phi}_{\alpha,\alpha} + \bar{\phi}_\beta \frac{A_{,\beta}}{B} - \left(\frac{\bar{w}_{,\alpha}}{A} + \frac{\bar{u}}{R_\alpha} \right)_{,\alpha} - \frac{A_{,\beta}}{B} \left(\frac{\bar{w}_{,\beta}}{B} + \frac{\bar{v}}{R_\beta} \right) \right] + \\ & + \sum_k \left(\psi_{k,\alpha} + \vartheta_k \frac{A_{,\beta}}{B} \right) (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\beta\beta} = & \bar{\varepsilon}_{\beta\beta} \frac{1}{\left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right)} + \frac{\zeta}{B \left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right)} \left[\bar{\phi}_{\beta,\beta} + \bar{\phi}_\alpha \frac{B_{,\alpha}}{A} - \left(\frac{\bar{w}_{,\beta}}{B} + \frac{\bar{v}}{R_\beta} \right)_{,\beta} - \frac{B_{,\alpha}}{A} \left(\frac{\bar{w}_{,\alpha}}{A} + \frac{\bar{u}}{R_\alpha} \right) \right] + \\ & + \sum_k \left(\vartheta_{k,\alpha} + \psi_k \frac{B_{,\alpha}}{A} \right) (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} = & \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \frac{1}{A \left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right)} \left\{ \zeta \left[\left(\frac{\bar{v}_{,\alpha}}{R_\alpha} - \bar{u} \frac{A_{,\beta}}{R_\alpha B} \right) + \left(\bar{\phi}_\beta - \frac{\bar{w}_{,\beta}}{B} - \frac{\bar{v}}{R_\beta} \right)_{,\alpha} - \frac{A_{,\beta}}{B} \left(\bar{\phi}_\alpha - \frac{\bar{w}_{,\alpha}}{A} - \frac{\bar{u}}{R_\alpha} \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{B \left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right)} \left\{ \zeta \left[\left(\frac{\bar{u}_{,\beta}}{R_\beta} - \bar{v} \frac{B_{,\alpha}}{R_\beta A} \right) + \left(\bar{\phi}_\alpha - \frac{\bar{w}_{,\alpha}}{A} - \frac{\bar{u}}{R_\alpha} \right)_{,\beta} - \frac{B_{,\alpha}}{A} \left(\bar{\phi}_\beta - \frac{\bar{w}_{,\beta}}{B} - \frac{\bar{v}}{R_\beta} \right) \right] \right\} + \\ & + \sum_k \left[\frac{1}{B \left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right)} \left(\psi_{k,\beta} - \vartheta_k \frac{B_{,\alpha}}{A} \right) + \frac{1}{A \left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right)} \left(\vartheta_{k,\alpha} + \psi_k \frac{A_{,\beta}}{B} \right) \right] (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\varepsilon_{\alpha\zeta} = \frac{\bar{\phi}_\alpha}{\left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right)} + \frac{1}{\left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right)} \sum_k \psi_k \left(1 - \frac{\zeta_k}{R_\alpha}\right) Y(\zeta - \zeta_k) \quad (5.30)$$

$$\varepsilon_{\beta\zeta} = \frac{\bar{\phi}_\beta}{\left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right)} + \frac{1}{\left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right)} \sum_k \vartheta_k \left(1 - \frac{\zeta_k}{R_\beta}\right) Y(\zeta - \zeta_k) \quad (5.31)$$

5.4 DETERMINAÇÃO DOS FATORES DE CONTINUIDADE DE TENSÕES CISALHANTES

Para determinação das funções ψ_k e ϑ_k considera-se uma casca de espessura h com N camadas de material anisotrópico perfeitamente ligadas. Considera-se também que o material de cada camada possui simetria elástica em relação a uma superfície paralela à de referência $\zeta = \text{constante}$. As propriedades e espessuras podem variar para cada camada e a superfície de referência está em contato com o exterior. Admitindo a existência de um plano de simetria elástica, as relações constitutivas para cada camada são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\alpha\alpha} \\ \sigma_{\beta\beta} \\ \sigma_{\zeta\zeta} \\ \sigma_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha\zeta} \\ \sigma_{\beta\zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{16} & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} & E_{26} & 0 & 0 \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} & E_{36} & 0 & 0 \\ E_{16} & E_{26} & E_{36} & E_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{44} & E_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{45} & E_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\alpha\alpha} \\ \varepsilon_{\beta\beta} \\ \varepsilon_{\zeta\zeta} \\ \varepsilon_{\alpha\beta} \\ \varepsilon_{\alpha\zeta} \\ \varepsilon_{\beta\zeta} \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

Se uma determinada camada constitui-se de material composto fibra-matriz, pode ser tratada como uma camada ortotrópica, estando os eixos de simetria do material paralelos

e normal em direção às fibras. Neste caso, apenas 9, em vez de 13, coeficientes E_{ij} são independentes.

Como a tensão $\sigma_{\zeta\zeta}$ é muito pequena comparada às outras tensões normais existentes, pode-se considerá-la igual a zero e desta forma ela pode ser abandonada.

Assim, eliminando $\sigma_{\zeta\zeta}$ na equação (5.32), as equações constitutivas assumem a forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\alpha\alpha} \\ \sigma_{\beta\beta} \\ \sigma_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha\zeta} \\ \sigma_{\beta\zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\alpha\alpha} \\ \varepsilon_{\beta\beta} \\ \varepsilon_{\alpha\beta} \\ \varepsilon_{\alpha\zeta} \\ \varepsilon_{\beta\zeta} \end{Bmatrix} \quad (5.33)$$

onde

$$C_{ij} = E_{ij} - E_{i3}E_{j3} / E_{33} \quad , \text{ para } i, j = 1, 2, 6 \quad (5.34)$$

e

$$C_{ij} = E_{ij} \quad , \text{ para } i, j = 4, 5 \quad (5.35)$$

Aplicando numa interface genérica (m) as condições de continuidade de tensões de cisalhamento expressas pelas equações (5.15) e (5.16), chega-se a

$$\begin{Bmatrix} \Psi_m \\ \mathfrak{G}_m \end{Bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} -C_{55}^+ & C_{45}^+ \\ C_{45}^+ & -C_{44}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_{44}^{(m)} & \Delta C_{45}^{(m)} \\ \Delta C_{45}^{(m)} & \Delta C_{55}^{(m)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\alpha\zeta}^- \\ \varepsilon_{\beta\zeta}^- \end{Bmatrix} \quad (5.36)$$

onde utilizou-se a notação

$$\Delta C_{ij}^{(m)} = C_{ij}^+ - C_{ij}^- \quad (5.37)$$

e

$$\lambda = C_{44}^+ C_{55}^+ - (C_{45}^+)^2 \quad (5.38)$$

Pode-se escrever a equação (5.36) sob a forma

$$\begin{Bmatrix} \Psi_m \\ \mathfrak{G}_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(m)} & Q_{12}^{(m)} \\ Q_{21}^{(m)} & Q_{22}^{(m)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\alpha\zeta}^- \\ \varepsilon_{\beta\zeta}^- \end{Bmatrix} \quad (5.39)$$

onde os coeficientes Q_{ij} dependem exclusivamente das propriedades elásticas das camadas separadas pela interface m .

Desta forma, os coeficientes que determinam a deformação de cada camada são dependentes das propriedades dos materiais vizinhos à interface considerada e da deformação da camada anterior. Como as deformações da primeira camada são funções exclusivas de $\bar{\phi}_\alpha$ e $\bar{\phi}_\beta$, os coeficientes em pauta podem ser expressos por:

$$\psi_k = a_k \bar{\phi}_\alpha + c_k \bar{\phi}_\beta \quad (5.40)$$

$$\vartheta_k = d_k \bar{\phi}_\alpha + b_k \bar{\phi}_\beta \quad (5.41)$$

Para a primeira interface tem-se

$$\begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \vartheta_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(1)} & Q_{12}^{(1)} \\ Q_{21}^{(1)} & Q_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_\alpha \\ \bar{\phi}_\beta \end{Bmatrix} \quad (5.42)$$

e portanto

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ d_1 & b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(1)} & Q_{12}^{(1)} \\ Q_{21}^{(1)} & Q_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Aplicando a equação (5.39) para as várias camadas de uma casca laminada e colocando as expressões resultantes na forma das equações (5.40) e (5.41), verifica-se que os valores de a_k , b_k , c_k e d_k para uma determinada interface k são dependentes dos valores destes coeficientes para as interfaces anteriores e valem

$$\begin{bmatrix} a_k & c_k \\ d_k & b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k)} & Q_{12}^{(k)} \\ Q_{21}^{(k)} & Q_{22}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \sum_{i=1}^{k-1} a_i & \sum_{i=1}^{k-1} c_i \\ \sum_{i=1}^{k-1} d_i & 1 + \sum_{i=1}^{k-1} b_i \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

5.5 EXPRESSÕES FINAIS PARA O CAMPO DE DESLOCAMENTOS E PARA DEFORMAÇÕES

As expressões que definem os deslocamentos de um ponto qualquer da casca podem então ser escritas como:

$$u = \left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right) \bar{u} + \zeta \left(\bar{\phi}_\alpha - \frac{\bar{w}_{,\alpha}}{A} \right) + \sum_{k=1}^{ni} (a_k \bar{\phi}_\alpha + c_k \bar{\phi}_\beta) (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \quad (5.45)$$

$$v = \left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right) \bar{v} + \zeta \left(\bar{\phi}_\beta - \frac{\bar{w}_{,\beta}}{B} \right) + \sum_{k=1}^{ni} (d_k \bar{\phi}_\alpha + b_k \bar{\phi}_\beta) (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \quad (5.46)$$

$$w = \bar{w} \quad (5.47)$$

A aplicação das equações (5.45) a (5.47) nas equações (5.21) a (5.26) e posteriormente a (5.5) a (5.10) leva às expressões para as deformações, tanto na superfície de referência como fora dela

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} = & \frac{1}{A \left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right)} \left(\bar{u}_{,\alpha} + \bar{v} \frac{A_{,\beta}}{B} - \bar{w} \frac{A}{R_\alpha} \right) + \\ & + \frac{\zeta}{A \left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right)} \left[\bar{\phi}_{\alpha,\alpha} + \bar{\phi}_\beta \frac{A_{,\beta}}{B} - \left(\frac{\bar{w}_{,\alpha}}{A} + \frac{\bar{u}}{R_\alpha} \right)_{,\alpha} - \frac{A_{,\beta}}{B} \left(\frac{\bar{w}_{,\beta}}{B} + \frac{\bar{v}}{R_\beta} \right) \right] + \\ & + \sum_k \left[(a_k \bar{\phi}_\alpha + c_k \bar{\phi}_\beta)_{,\alpha} + (d_k \bar{\phi}_\alpha + b_k \bar{\phi}_\beta) \frac{A_{,\beta}}{B} \right] (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\beta\beta} = & \frac{1}{B\left(1-\frac{\zeta}{R_\beta}\right)} \left(\bar{u} \frac{B_{,\alpha}}{A} + \bar{v}_{,\beta} - \bar{w} \frac{B}{R_\beta} \right) + \\
& + \frac{\zeta}{B\left(1-\frac{\zeta}{R_\beta}\right)} \left[\bar{\phi}_{\beta,\beta} + \bar{\phi}_\alpha \frac{B_{,\alpha}}{A} - \left(\frac{\bar{w}_{,\beta}}{B} + \frac{\bar{v}}{R_\beta} \right)_{,\beta} - \frac{B_{,\alpha}}{A} \left(\frac{\bar{w}_{,\alpha}}{A} + \frac{\bar{u}}{R_\alpha} \right) \right] + \\
& + \sum_k \left[(d_k \bar{\phi}_\alpha + b_k \bar{\phi}_\beta)_{,\beta} + (a_k \bar{\phi}_\alpha + c_k \bar{\phi}_\beta) \frac{B_{,\alpha}}{A} \right] (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k)
\end{aligned} \tag{5.49}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\beta} = & \frac{1}{A\left(1-\frac{\zeta}{R_\alpha}\right)} \left\{ \bar{v}_{,\alpha} - \bar{u} \frac{A_{,\beta}}{B} + \zeta \left[\left(\bar{\phi}_\beta - \frac{\bar{w}_{,\beta}}{B} - \frac{\bar{v}}{R_\beta} \right)_{,\alpha} - \frac{A_{,\beta}}{B} \left(\bar{\phi}_\alpha - \frac{\bar{w}_{,\alpha}}{A} - \frac{\bar{u}}{R_\alpha} \right) \right] \right\} + \\
& + \frac{1}{B\left(1-\frac{\zeta}{R_\beta}\right)} \left\{ \bar{u}_{,\beta} - \bar{v} \frac{B_{,\alpha}}{A} + \zeta \left[\left(\bar{\phi}_\alpha - \frac{\bar{w}_{,\alpha}}{A} - \frac{\bar{u}}{R_\alpha} \right)_{,\beta} - \frac{B_{,\alpha}}{A} \left(\bar{\phi}_\beta - \frac{\bar{w}_{,\beta}}{B} - \frac{\bar{v}}{R_\beta} \right) \right] \right\} + \\
& + \sum_k \left\{ \frac{1}{B\left(1-\frac{\zeta}{R_\beta}\right)} \left[(a_k \bar{\phi}_\alpha + c_k \bar{\phi}_\beta)_{,\beta} - (d_k \bar{\phi}_\alpha + b_k \bar{\phi}_\beta) \frac{B_{,\alpha}}{A} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{A\left(1-\frac{\zeta}{R_\alpha}\right)} \left[(d_k \bar{\phi}_\alpha + b_k \bar{\phi}_\beta)_{,\alpha} - (a_k \bar{\phi}_\alpha + c_k \bar{\phi}_\beta) \frac{A_{,\beta}}{B} \right] \right\} (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k)
\end{aligned} \tag{5.50}$$

$$\varepsilon_{\alpha\zeta} = \frac{\bar{\phi}_\alpha}{\left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right)} + \frac{1}{\left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right)} \sum_k \left(a_k \bar{\phi}_\alpha + c_k \bar{\phi}_\beta \right) \left(1 - \frac{\zeta_k}{R_\alpha} \right) Y(\zeta - \zeta_k) \quad (5.51)$$

$$\varepsilon_{\beta\zeta} = \frac{\bar{\phi}_\beta}{\left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right)} + \frac{1}{\left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right)} \sum_k \left(d_k \bar{\phi}_\alpha + b_k \bar{\phi}_\beta \right) \left(1 - \frac{\zeta_k}{R_\beta} \right) Y(\zeta - \zeta_k) \quad (5.52)$$

5.6 FORMULAÇÃO DE MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA CASCAS LAMINADAS

A literatura atual sobre elementos finitos para cascas laminadas não se mostra muito extensa. A maior parte dos trabalhos disponíveis referentes a laminados se dedica a placas. NOOR e BURTON [45] relacionaram as diferentes formulações de elementos finitos para placas e as teorias utilizadas.

PANDA e NATARAJAN [46] formularam, em 1976, elementos finitos para cascas laminadas de revolução e, em 1981, estenderam esse trabalho para a análise de cascas laminadas com geometria arbitrária [47]. Foram utilizados elementos quadriláteros de lados curvos, superparamétricos, com 5 graus de liberdade por nó e 8 nós. O procedimento segue basicamente o desenvolvido por AHMAD *et al.* [48] para cascas homogêneas espessas.

RAO [49] formulou, em 1982, um elemento finito para cascas laminadas onde eram empregados elementos quadriláteros similares aos usuais para cascas homogêneas. VENKATESH e RAO [50] realizaram posteriormente a análise de cascas laminadas com

enrijecedores também laminados. Nesse caso os elementos de casca possuem 48 graus de liberdade e os elementos de enrijecedores possuem 16.

Na análise de cascas laminadas de revolução efetuada por NOOR e PETERS [51], as propriedades da casca e o carregamento na direção circunferencial são representados em séries de Fourier e na direção meridional são utilizados elementos finitos. Emprega-se aqui a formulação mista, onde as incógnitas consistem de 8 resultantes de tensão e 5 deslocamentos. Em um trabalho posterior, os mesmos autores acrescentaram 8 deformações às incógnitas anteriores a fim de melhorar a qualidade dos resultados [52].

BHIMARADDI *et al.* [53] apresentaram um elemento finito quadrilátero e isoparamétrico para análise de cascas laminadas de revolução que possui 12 nós e 64 graus de liberdade (8 graus de liberdade por nó de canto e 4 graus de liberdade por nó restante). A teoria utilizada é a descrita na referência bibliográfica [32].

Deve-se citar ainda os trabalhos de CHAO e REDDY [54], LIAO *et al.* [55] e LIAO e REDDY [56] e LIAO e REDDY [57] que utilizam elementos desenvolvidos por AHMAD *et al* [48].

OCHOA e REDDY, na referência [58], fazem uma revisão dos fundamentos do Método dos Elementos Finitos e desenvolvem modelos baseados nas teorias que seguem a teoria clássica e nas que seguem a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem além de apresentarem uma análise não linear de uma casca esférica sujeita a pressão uniforme.

Em [59] pode-se encontrar uma cobertura detalhada de várias teorias de laminados, soluções analíticas e modelos de elementos finitos para vigas, placas e cascas laminadas. XAVIER *et al.* [60, 61] estenderam para cascas laminadas a teoria que LEE *et al.* [62, 63] desenvolveram originalmente para cascas, na qual é considerada a variação cúbica

dos deslocamentos u e v . No entanto, essa teoria foi incapaz de refletir com precisão as tensões e deslocamentos nas interfaces.

Desenvolve-se aqui uma formulação de elementos finitos para a análise estática de cascas laminadas com base na consideração de uma variação linear para os deslocamentos u e v em cada camada e na satisfação das condições de contato nas interfaces. Assume-se a superfície de referência como sendo a superfície superior da casca.

A definição geométrica do elemento é feita em coordenadas cartesianas. O sistema de coordenadas curvilíneas apresenta as direções ξ e η na superfície de referência e ζ no sentido da espessura, sendo considerados os seguintes limites: $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$ e $0 \leq \zeta \leq 1$

As coordenadas (x, y, z) de um ponto qualquer no interior do elemento são expressas a partir das coordenadas dos pontos nodais correspondentes às superfícies externas, na forma a seguir:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^m N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{sup}} + \sum_{i=1}^m N_i(\xi, \eta) \zeta V_{3i} \quad (5.53)$$

O número de nós do elemento é chamado de mn e V_{3i} é o vetor normal à superfície de referência cujo módulo corresponde à espessura t_i do elemento no ponto nodal i , pois os pontos superior (i) e inferior (j) são definidos sobre as superfícies externas (Figura 5.7).

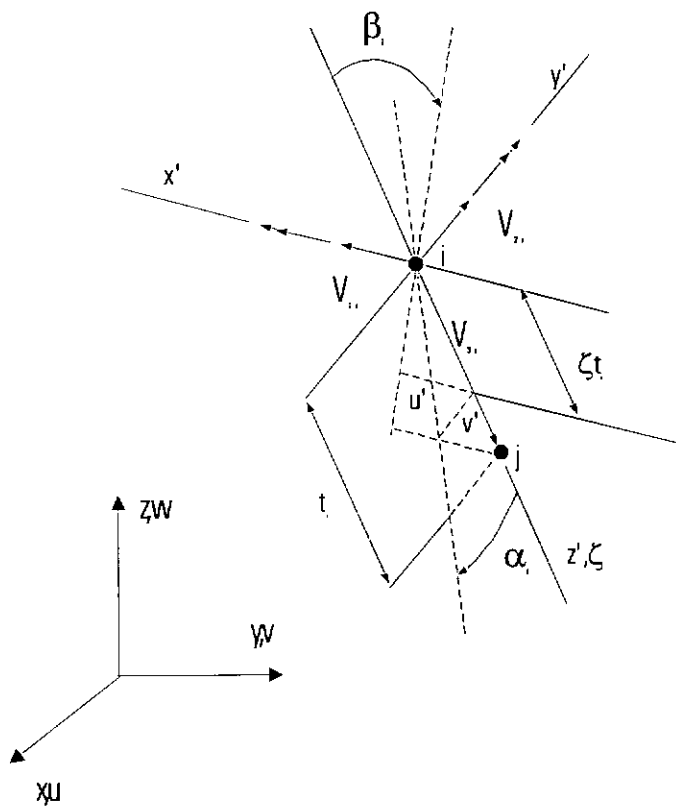


FIGURA 5.7: Vetores nodais.

Desta forma, encontra-se V_{3i} calculando

$$V_{3i} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{inf}} - \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{sup}} \quad (5.54)$$

Substituindo a expressão (5.54) na (5.53) pode-se exprimir as coordenadas de um ponto qualquer em função das coordenadas de pontos situados nas superfícies superior e inferior. Ou seja:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{nn} N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{sup}} + \sum_{i=1}^{nn} N_i(\xi, \eta) \zeta \left(\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{inf}} - \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{sup}} \right) \quad (5.55)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^m N_i(\xi, \eta) \left[(1-\zeta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{sup}} + \zeta \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{inf}} \right] \quad (5.56)$$

Como as deformações na direção normal à superfície de referência podem ser abandonadas, o deslocamento de qualquer ponto do elemento pode ser definido em termos das três componentes cartesianas dos deslocamentos dos nós da superfície de referência e das duas rotações do vetor nodal V_{3i} . Essas rotações são medidas em relação às direções V_{1i} e V_{2i} , ortogonais a V_{3i} e tangentes à superfície naquele nó, cujos valores unitários são dados por v_{1i} e v_{2i} . A rotação total do vetor V_{3i} é constituída de duas parcelas, sendo uma delas a derivada do deslocamento transversal do nó considerado e a outra a rotação devida ao cisalhamento. A Figura 5.7 mostra as translações locais u' e v' (nas direções de V_{1i} e V_{2i}) devidas às rotações locais α_i e β_i respectivamente. Seus valores são: $u' = \zeta t_i \beta_i$ e $v' = -\zeta t_i \alpha_i$

Como a rotação da normal sofrerá uma variação a cada camada, que depende exclusivamente das propriedades elásticas que compõem o laminado, pode-se escrever os deslocamentos de um ponto P, situado sobre o vetor V_{3i} , nas direções x, y e z, em relação aos deslocamentos de um nó i (na superfície de referência) como:

$$\begin{aligned} u_i = \bar{u}_i - l_{2i} & \left[\zeta t_i (\bar{\phi}_{i\xi} - \bar{w}_{i,\xi}) + \sum_{k=1}^{ni} (a_k \bar{\phi}_{i\xi} + c_k \bar{\phi}_{in}) (\zeta - \zeta_k) t_i Y(\zeta - \zeta_k) \right] + \\ & + l_{1i} \left[\zeta t_i (\bar{\phi}_{in} - \bar{w}_{i,\eta}) + \sum_{k=1}^{ni} (d_k \bar{\phi}_{i\xi} + b_k \bar{\phi}_{in}) (\zeta - \zeta_k) t_i Y(\zeta - \zeta_k) \right] \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned}
v_i = \bar{v}_i - m_{2i} \left[\zeta t_i (\bar{\phi}_{i\xi} - \bar{w}_{i,\xi}) + \sum_{k=1}^{n_i} (a_k \bar{\phi}_{i\xi} + c_k \bar{\phi}_{i\eta}) (\zeta - \zeta_k) t_i Y(\zeta - \zeta_k) \right] + \\
+ m_{1i} \left[\zeta t_i (\bar{\phi}_{i\eta} - \bar{w}_{i,\eta}) + \sum_{k=1}^{n_i} (d_k \bar{\phi}_{i\xi} + b_k \bar{\phi}_{i\eta}) (\zeta - \zeta_k) t_i Y(\zeta - \zeta_k) \right]
\end{aligned} \tag{5.58}$$

$$\begin{aligned}
w_i = \bar{w}_i - n_{2i} \left[\zeta t_i (\bar{\phi}_{i\xi} - \bar{w}_{i,\xi}) + \sum_{k=1}^{n_i} (a_k \bar{\phi}_{i\xi} + c_k \bar{\phi}_{i\eta}) (\zeta - \zeta_k) t_i Y(\zeta - \zeta_k) \right] + \\
+ n_{1i} \left[\zeta t_i (\bar{\phi}_{i\eta} - \bar{w}_{i,\eta}) + \sum_{k=1}^{n_i} (d_k \bar{\phi}_{i\xi} + b_k \bar{\phi}_{i\eta}) (\zeta - \zeta_k) t_i Y(\zeta - \zeta_k) \right]
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Nas expressões anteriores, l_{1i} , m_{1i} e n_{1i} são os cossenos diretores do vetor v_{1i} , l_{2i} , m_{2i} e n_{2i} são os cossenos diretores de v_{2i} e t_i é a espessura do elemento. Esses vetores são ortogonais ao vetor V_{3i} e entre si, mas a escolha da direção de qualquer um deles é arbitrária. Assim, pode-se definir

$$V_{1i} = e_x \times V_{3i} \tag{5.60}$$

No caso de V_{3i} ser paralelo a e_x , encontra-se V_{1i} por meio de

$$V_{1i} = e_y \times V_{3i} \tag{5.61}$$

Consequentemente,

$$V_{2i} = V_{3i} \times V_{1i} \tag{5.62}$$

As equações (5.57) a (5.59) também podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
u_j = \bar{u}_i - l_{2i} t_i \left[\left(\zeta + \sum_{k=1}^{ni} a_k (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \right) \bar{\phi}_{i\xi} - \zeta \bar{w}_{i,\xi} + \sum_{k=1}^{ni} c_k \bar{\phi}_{i\eta} (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \right] + \\
+ l_{1i} t_i \left[\left(\zeta + \sum_{k=1}^{ni} b_k (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \right) \bar{\phi}_{i\eta} - \zeta \bar{w}_{i,\eta} + \sum_{k=1}^{ni} d_k \bar{\phi}_{i\xi} (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \right]
\end{aligned} \tag{5.63}$$

$$\begin{aligned}
v_i = \bar{v}_i - m_{2i} t_i \left[\left(\zeta + \sum_{k=1}^{ni} a_k (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \right) \bar{\phi}_{i\xi} - \zeta \bar{w}_{i,\xi} + \sum_{k=1}^{ni} c_k \bar{\phi}_{i\eta} (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \right] + \\
+ m_{1i} t_i \left[\left(\zeta + \sum_{k=1}^{ni} b_k (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \right) \bar{\phi}_{i\eta} - \zeta \bar{w}_{i,\eta} + \sum_{k=1}^{ni} d_k \bar{\phi}_{i\xi} (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \right]
\end{aligned} \tag{5.64}$$

$$\begin{aligned}
w_j = \bar{w}_i - n_{2i} t_i \left[\left(\zeta + \sum_{k=1}^{ni} a_k (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \right) \bar{\phi}_{i\xi} - \zeta \bar{w}_{i,\xi} + \sum_{k=1}^{ni} c_k \bar{\phi}_{i\eta} (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \right] + \\
+ n_{1i} t_i \left[\left(\zeta + \sum_{k=1}^{ni} b_k (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \right) \bar{\phi}_{i\eta} - \zeta \bar{w}_{i,\eta} + \sum_{k=1}^{ni} d_k \bar{\phi}_{i\xi} (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \right]
\end{aligned} \tag{5.65}$$

Fazendo

$$\zeta_a = \sum_{k=1}^{ni} a_k (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \tag{5.66}$$

$$\zeta_b = \sum_{k=1}^{ni} b_k (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \tag{5.67}$$

$$\zeta_c = \sum_{k=1}^{ni} c_k (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \tag{5.68}$$

$$\zeta_d = \sum_{k=1}^{ni} d_k (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \tag{5.69}$$

as equações (5.63) a (5.65) ficam sob forma mais simplificada

$$u_i = \bar{u}_i - l_{2i} t_i [(\zeta + \zeta_a) \bar{\phi}_{i\xi} - \zeta \bar{w}_{i,\xi} + \bar{\phi}_{i\eta} \zeta_c] + l_{1i} t_i [(\zeta + \zeta_b) \bar{\phi}_{i\eta} - \zeta \bar{w}_{i,\eta} + \bar{\phi}_{i\xi} \zeta_d] \quad (5.70)$$

$$v_i = \bar{v}_i - m_{2i} t_i [(\zeta + \zeta_a) \bar{\phi}_{i\xi} - \zeta \bar{w}_{i,\xi} + \bar{\phi}_{i\eta} \zeta_c] + m_{1i} t_i [(\zeta + \zeta_b) \bar{\phi}_{i\eta} - \zeta \bar{w}_{i,\eta} + \bar{\phi}_{i\xi} \zeta_d] \quad (5.71)$$

$$w_i = \bar{w}_i - n_{2i} t_i [(\zeta + \zeta_a) \bar{\phi}_{i\xi} - \zeta \bar{w}_{i,\xi} + \bar{\phi}_{i\eta} \zeta_c] + n_{1i} t_i [(\zeta + \zeta_b) \bar{\phi}_{i\eta} - \zeta \bar{w}_{i,\eta} + \bar{\phi}_{i\xi} \zeta_d] \quad (5.72)$$

Para um ponto qualquer do elemento pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^{nn} N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^{nn} N_i t_i [\mu_i] \begin{bmatrix} \zeta + \zeta_a & \zeta_c \\ \zeta_d & \zeta + \zeta_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_{i\xi} \\ \bar{\phi}_{i\eta} \end{Bmatrix} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{nn} \zeta t_i [\mu_i] \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix} \bar{w}_i \end{aligned} \quad (5.73)$$

onde

$$[\mu_i] = \begin{bmatrix} -l_{2i} & l_{1i} \\ -m_{2i} & m_{1i} \\ -n_{2i} & n_{1i} \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

A matriz jacobiana exigida para este elemento é:

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

As derivadas presentes nos termos da matriz jacobiana são encontradas através de

$$x_{,\xi} = \sum_{i=1}^{nn} N_{i,\xi} x_i + \sum_{i=1}^{nn} N_{i,\xi} \zeta t_i l_{3i}$$

$$x_{,\eta} = \sum_{i=1}^{nn} N_{i,\eta} x_i + \sum_{i=1}^{nn} N_{i,\eta} \zeta t_i l_{3i}$$

$$x_{,\zeta} = \sum_{i=1}^{nn} N_i t_i l_{3i}$$

$$y_{,\xi} = \sum_{i=1}^{nn} N_{i,\xi} y_i + \sum_{i=1}^{nn} N_{i,\xi} \zeta t_i m_{3i}$$

etc...

Os termos da matriz jacobiana também podem ser encontrados em função das coordenadas dos pontos situados nas superfícies superior e inferior da casca. Assim,

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{,\xi} = \sum_{i=1}^{nn} N_{i,\xi} \left[(1-\zeta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{sup} + \zeta \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{inf} \right] \quad (5.76)$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{,\eta} = \sum_{i=1}^{nn} N_{i,\eta} \left[(1-\zeta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{sup} + \zeta \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{inf} \right] \quad (5.77)$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{,\zeta} = \sum_{i=1}^{nn} N_i \left[- \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{sup} + \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{inf} \right] \quad (5.78)$$

Segundo o procedimento usual no Método dos Elementos Finitos, exprimindo as deformações como derivadas dos deslocamentos genéricos pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = [H] \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \\ v_{,x} \\ \vdots \\ w_{,z} \end{Bmatrix} \quad (5.79)$$

onde

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

As derivadas em relação ao sistema global são obtidas pela aplicação da matriz inversa da jacobiana sobre as derivadas em relação ao sistema local:

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \\ v_{,x} \\ \vdots \\ w_{,z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & J^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ \vdots \\ w_{,\zeta} \end{Bmatrix} \quad (5.81)$$

As derivadas no sistema local podem ser expressas como o vetor-coluna a seguir:

$$\begin{Bmatrix} u_{\zeta} \\ u_{\eta} \\ u_{\zeta} \\ v_{\zeta} \\ \vdots \\ w_{\zeta} \end{Bmatrix} =$$

$$\sum_{i=1}^{ni} \begin{bmatrix} N_{1\zeta} & 0 & -\zeta_i(l_{11}N_{1\eta\zeta} - l_{21}N_{1\zeta\zeta}) & N_{1\zeta} t_i[l_{11}\zeta_i - l_{21}(\zeta + \zeta_a)] & N_{1\zeta} t_i[l_{11}(\zeta + \zeta_b) - l_{21}\zeta_c] \\ N_{1\eta} & 0 & -\zeta_i(l_{11}N_{1\eta\eta} - l_{21}N_{1\zeta\eta}) & N_{1\eta} t_i[l_{11}\zeta_i - l_{21}(\zeta + \zeta_a)] & N_{1\eta} t_i[l_{11}(\zeta + \zeta_b) - l_{21}\zeta_c] \\ 0 & 0 & -t_i(l_{11}N_{1\eta\zeta} - l_{21}N_{1\zeta\zeta}) & N_{1\zeta} t_i[l_{11}\Delta_d - l_{21}(1 + \Delta_a)] & N_{1\zeta} t_i[l_{11}(1 + \Delta_b) - l_{21}\Delta_c] \\ 0 & N_{1\zeta} & -\zeta_i(m_{11}N_{1\eta\zeta} - m_{21}N_{1\zeta\zeta}) & N_{1\zeta} t_i[m_{11}\zeta_i - m_{21}(\zeta + \zeta_a)] & N_{1\zeta} t_i[m_{11}(\zeta + \zeta_b) - m_{21}\zeta_c] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -t_i(n_{11}N_{1\eta\zeta} - n_{21}N_{1\zeta\zeta}) & N_{1\zeta} t_i[n_{11}\Delta_d - n_{21}(1 + \Delta_a)] & N_{1\zeta} t_i[n_{11}(1 + \Delta_b) - n_{21}\Delta_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \phi_{\zeta a} \\ \phi_{\zeta b} \end{Bmatrix} \quad (5.82)$$

onde

$$\Delta_a = \sum_{k=1}^{ni} a_k Y(\zeta - \zeta_k) \quad (5.83)$$

$$\Delta_b = \sum_{k=1}^{ni} b_k Y(\zeta - \zeta_k) \quad (5.84)$$

$$\Delta_c = \sum_{k=1}^{ni} c_k Y(\zeta - \zeta_k) \quad (5.85)$$

$$\Delta_d = \sum_{k=1}^{ni} d_k Y(\zeta - \zeta_k) \quad (5.86)$$

Desta forma, fazendo uso das equações (5.81) e (5.82) na equação (5.79), pode-se encontrar a matriz [B]

[B] =

$$[H] \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & J^{-1} \end{bmatrix} \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} N_{i,\xi} & 0 & -\zeta_i(l_{ii}N_{i,\eta\xi} - l_{2i}N_{i,\xi\xi}) & N_{i,\xi} t_i [l_{ii}\zeta_d - l_{2i}(\zeta + \zeta_a)] & N_{i,\xi} t_i [l_{ii}(\zeta + \zeta_b) - l_{2i}\zeta_c] \\ N_{i,\eta} & 0 & -\zeta_i(l_{ii}N_{i,\eta\eta} - l_{2i}N_{i,\xi\eta}) & N_{i,\eta} t_i [l_{ii}\zeta_d - l_{2i}(\zeta + \zeta_a)] & N_{i,\eta} t_i [l_{ii}(\zeta + \zeta_b) - l_{2i}\zeta_c] \\ 0 & 0 & -t_i(l_{ii}N_{i,\eta\xi} - l_{2i}N_{i,\xi\xi}) & N_{i,t} t_i [l_{ii}\Delta_d - l_{2i}(1 + \Delta_a)] & N_{i,t} t_i [l_{ii}(1 + \Delta_b) - l_{2i}\Delta_c] \\ 0 & N_{i,\xi} & -\zeta_i(m_{ii}N_{i,\eta\xi} - m_{2i}N_{i,\xi\xi}) & N_{i,\xi} t_i [m_{ii}\zeta_d - m_{2i}(\zeta + \zeta_a)] & N_{i,\xi} t_i [m_{ii}(\zeta + \zeta_b) - m_{2i}\zeta_c] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -t_i(n_{ii}N_{i,\eta} - n_{2i}N_{i,\xi}) & N_{i,t} t_i [n_{ii}\Delta_d - n_{2i}(1 + \Delta_a)] & N_{i,t} t_i [n_{ii}(1 + \Delta_b) - n_{2i}\Delta_c] \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

tal que

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{nn} [B_i] \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{\phi}_{\alpha i} \\ \bar{\phi}_{\beta i} \end{Bmatrix} \quad (5.88)$$

As relações tensão-deformação nas direções locais permitem que se escreva, para cada camada

$$\{\sigma'\} = [C'] \{\varepsilon'\} \quad (5.89)$$

O apóstrofo indica referência ao sistema de coordenadas locais e

$$[C'] = \begin{bmatrix} C_{1'1'} & C_{1'2'} & 0 & C_{1'6'} & 0 & 0 \\ C_{1'2'} & C_{2'2'} & 0 & C_{2'6'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{1'6'} & C_{2'6'} & 0 & C_{6'6'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{4'4'} & C_{4'5'} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{4'5'} & C_{5'5'} \end{bmatrix} \quad (5.90)$$

Observar que $[C']$ é obtida pela inserção de uma linha e uma coluna de zeros na matriz $[C]$ apresentada na equação (5.33), de forma a gerar tensões normais nulas na direção da espessura. A matriz $[C']$ pode ser transformada para as direções globais através de um operador T . Assim,

$$[C^*] = [T]^T [C'] [T] \quad (5.91)$$

Para calcular a matriz $[T]$ num ponto de integração deve-se encontrar os cossenos diretores para os vetores V_1 , V_2 e V_3 no ponto. Isto pode ser feito através das seguintes expressões

$$e_1 = (J_1)_{\text{norm}} \quad (5.92)$$

$$e_3 = (J_1 \times J_2)_{\text{norm}} \quad (5.93)$$

$$e_2 = e_3 \times e_1 \quad (5.94)$$

Nas expressões acima, $(J_1)_{\text{norm}}$ indica a primeira linha da matriz jacobiana no referido ponto, normalizada para comprimento unitário e assim por diante. Uma vez encontrados os cossenos diretores para os vetores unitários e_1 , e_2 e e_3 , calcula-se a matriz $[T]$ por

$$[T] = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & l_1 n_1 & m_1 n_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & l_2 n_2 & m_2 n_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & l_3 n_3 & m_3 n_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & l_1 n_2 + l_2 n_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 \\ 2l_1 l_3 & 2m_1 m_3 & 2n_1 n_3 & l_1 m_3 + l_3 m_1 & l_1 n_3 + l_3 n_1 & m_1 n_3 + m_3 n_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & l_2 n_3 + l_3 n_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 \end{bmatrix} \quad (5.95)$$

Agora, pode-se formular a matriz de rigidez do elemento como se segue

$$[K] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [C^*] [B] |J| d\zeta d\eta d\xi \quad (5.96)$$

Como as condições geométricas de contorno são estipuladas em termos das rotações totais em torno dos eixos 1 e 2 locais e não apenas das rotações de cisalhamento em torno dos mesmo eixos, torna-se necessário uma transformação na matriz de rigidez.

Sabendo que a rotação total em qualquer ponto é dada por

$$\theta_\xi = \phi_\xi - w_{,\xi} \quad (5.97)$$

e

$$\theta_\eta = \phi_\eta - w_{,\eta} \quad (5.98)$$

Exprimindo as rotações totais em um ponto qualquer em função das rotações totais dos nós do elemento vem:

$$\theta_\xi = \sum_{i=1}^{nn} N_i \bar{\phi}_{i\xi} - \sum_{i=1}^{nn} N_{i,\xi} \bar{w}_i \quad (5.99)$$

e

$$\theta_\eta = \sum_{i=1}^{nn} N_i \bar{\phi}_{i\eta} - \sum_{i=1}^{nn} N_{i,\eta} \bar{w}_i \quad (5.100)$$

Desta forma, as rotações totais em cada nó podem ser calculadas por

$$\bar{\theta}_{j\xi} = \sum_{i=1}^{nn} N_i(\xi_j, \eta_j) \bar{\phi}_{i\xi} - \sum_{i=1}^{nn} N_{i,\xi}(\xi_j, \eta_j) \bar{w}_i \quad (5.101)$$

e

$$\bar{\theta}_{j\eta} = \sum_{i=1}^m N_i(\xi_j, \eta_j) \bar{\phi}_{i\eta} - \sum_{i=1}^m N_{i,\eta}(\xi_j, \eta_j) \bar{w}_i \quad (5.102)$$

Sabendo que

$$N_i(\xi_j, \eta_j) = 1 \quad , \text{ se } i = j \quad (5.103)$$

$$N_i(\xi_j, \eta_j) = 0 \quad , \text{ se } i \neq j \quad (5.104)$$

pode-se escrever

$$\bar{\theta}_{j\xi} = \bar{\phi}_{j\xi} - \sum_{i=1}^m N_{i,\xi}(\xi_j, \eta_j) \bar{w}_i \quad (5.105)$$

$$\bar{\theta}_{j\eta} = \bar{\phi}_{j\eta} - \sum_{i=1}^m N_{i,\eta}(\xi_j, \eta_j) \bar{w}_i \quad (5.106)$$

ou

$$\bar{\phi}_{j\xi} = \bar{\theta}_{j\xi} + \sum_{i=1}^m N_{i,\xi}(\xi_j, \eta_j) \bar{w}_i \quad (5.107)$$

$$\bar{\phi}_{j\eta} = \bar{\theta}_{j\eta} + \sum_{i=1}^m N_{i,\eta}(\xi_j, \eta_j) \bar{w}_i \quad (5.108)$$

Assim sendo, pode-se montar a matriz de transformação χ onde

$$\{\delta_\phi\} = [\chi]\{\delta_\theta\} \quad (5.109)$$

onde

$$\{\delta_\phi\}^T = \{\bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{w}_1 \quad \bar{\phi}_{1\xi} \quad \bar{\phi}_{1\eta} \quad \bar{u}_2 \quad \bar{v}_2 \quad \cdots \quad \bar{w}_8 \quad \bar{\phi}_{8\xi} \quad \bar{\phi}_{8\eta}\} \quad (5.110)$$

$$\{\delta_\theta\}^T = \{\bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{w}_1 \quad \bar{\theta}_{i\xi} \quad \bar{\theta}_{i\eta} \quad \bar{u}_2 \quad \bar{v}_2 \quad \dots \quad \bar{w}_8 \quad \bar{\theta}_{8\xi} \quad \bar{\theta}_{8\eta}\} \quad (5.111)$$

e

$$[\chi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,\xi}(-1,-1) & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_{8,\xi}(-1,-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,\eta}(-1,-1) & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & N_{8,\eta}(-1,-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,\xi}(-1,0) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_{8,\xi}(-1,0) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,\eta}(-1,0) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_{8,\eta}(-1,0) & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.112)$$

Assim, a matriz de rigidez para os graus de liberdade de liberdade $\bar{\theta}_{i\xi}$ e $\bar{\theta}_{i\eta}$ fica sendo

$$[K_\theta] = [\chi]^T [K_\phi] [\chi] \quad (5.113)$$

onde

$[K_\theta]$ = matriz de rigidez considerando os graus de liberdade $\theta_{i\xi}$ e $\theta_{i\eta}$

$[K_\phi]$ = matriz de rigidez considerando os graus de liberdade $\phi_{i\xi}$ e $\phi_{i\eta}$

5.7 PARTICULARIZAÇÃO AO ELEMENTO SERENDIPITY DE 8

NÓS

De posse das expressões encontradas anteriormente, pode-se particularizá-las para o elemento serendipity de 8 nós [64], numerados de acordo com a Figura 5.8. Esse elemento isoparamétrico é usado aqui apenas com a finalidade de validar a teoria desenvolvida. Melhores resultados podem ser obtidos com a mesma formulação aplicada a elementos mais sofisticados.

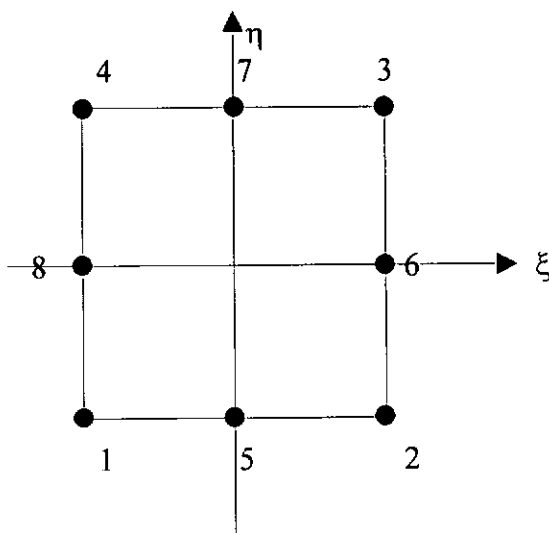


FIGURA 5.8: Elemento Serendipity de 8 nós.

Sendo assim, as funções de interpolação correspondentes são:

$$N_1 = 0,25 (1-\xi) (1-\eta) (-1-\xi-\eta)$$

$$N_2 = 0,25 (1+\xi) (1-\eta) (-1+\xi-\eta)$$

$$N_3 = 0,25 (1+\xi) (1+\eta) (-1+\xi+\eta)$$

$$N_4 = 0,25 (1-\xi) (1+\eta) (-1-\xi+\eta) \tag{5.114}$$

$$N_5 = 0,5 (1-\xi^2) (1-\eta)$$

$$N_6 = 0,5 (1+\xi) (1-\eta^2)$$

$$N_7 = 0,5 (1-\xi^2) (1+\eta)$$

$$N_8 = 0,5 (1-\xi) (1-\eta^2)$$

As expressões para as primeiras derivadas das funções de interpolação ficam

- em relação a ξ :

$$\partial N_1 / \partial \xi = 0,25 (1-\eta) (2\xi+\eta)$$

$$\partial N_2 / \partial \xi = 0,25 (1-\eta) (2\xi-\eta)$$

$$\partial N_3 / \partial \xi = 0,25 (1+\eta) (2\xi+\eta)$$

$$\partial N_4 / \partial \xi = 0,25 (1+\eta) (2\xi-\eta)$$

(5.115)

$$\partial N_5 / \partial \xi = (-1+\eta) \xi$$

$$\partial N_6 / \partial \xi = 0,5 (1-\eta^2)$$

$$\partial N_7 / \partial \xi = (-1-\eta) \xi$$

$$\partial N_8 / \partial \xi = 0,5 (-1+\eta^2)$$

- em relação a η :

$$\partial N_1 / \partial \eta = 0,25 (1-\xi) (\xi+2\eta)$$

$$\partial N_2 / \partial \eta = 0,25 (1+\xi) (-\xi+2\eta)$$

$$\partial N_3 / \partial \eta = 0,25 (1+\xi) (\xi+2\eta)$$

$$\partial N_4 / \partial \eta = 0,25 (1+\xi) (-\xi+2\eta)$$

(5.116)

$$\partial N_5 / \partial \eta = 0,5 (-1+\xi^2)$$

$$\partial N_6 / \partial \eta = (-1-\xi) \eta$$

$$\partial N_7 / \partial \eta = 0,5 (1-\xi^2)$$

$$\partial N_8 / \partial \eta = (-1 + \xi) \eta$$

As segundas derivadas ficam:

- em relação a ξ e ξ :

$$\begin{aligned} \partial^2 N_1 / \partial \xi^2 &= 0,5 (1 - \eta) \\ \partial^2 N_2 / \partial \xi^2 &= 0,5 (1 - \eta) \\ \partial^2 N_3 / \partial \xi^2 &= 0,5 (1 + \eta) \\ \partial^2 N_4 / \partial \xi^2 &= 0,5 (1 + \eta) \\ \partial^2 N_5 / \partial \xi^2 &= -1 + \eta \\ \partial^2 N_6 / \partial \xi^2 &= 0 \\ \partial^2 N_7 / \partial \xi^2 &= -1 - \eta \\ \partial^2 N_8 / \partial \xi^2 &= 0 \end{aligned} \tag{5.117}$$

- em relação a ξ e η :

$$\begin{aligned} \partial^2 N_1 / \partial \xi \partial \eta &= 0,25 (1 - 2\xi - 2\eta) \\ \partial^2 N_2 / \partial \xi \partial \eta &= 0,25 (-1 - 2\xi + 2\eta) \\ \partial^2 N_3 / \partial \xi \partial \eta &= 0,25 (1 + 2\xi + 2\eta) \\ \partial^2 N_4 / \partial \xi \partial \eta &= 0,25 (-1 + 2\xi - 2\eta) \\ \partial^2 N_5 / \partial \xi \partial \eta &= \xi \\ \partial^2 N_6 / \partial \xi \partial \eta &= -\eta \\ \partial^2 N_7 / \partial \xi \partial \eta &= -\xi \\ \partial^2 N_8 / \partial \xi \partial \eta &= \eta \end{aligned} \tag{5.118}$$

- em relação a η e η :

$$\begin{aligned}
 \partial^2 N_1 / \partial \eta^2 &= 0,5 (1-\xi) \\
 \partial^2 N_2 / \partial \eta^2 &= 0,5 (1+\xi) \\
 \partial^2 N_3 / \partial \eta^2 &= 0,5 (1+\xi) \\
 \partial^2 N_4 / \partial \eta^2 &= 0,5 (1-\xi) \\
 \partial^2 N_5 / \partial \eta^2 &= 0 \\
 \partial^2 N_6 / \partial \eta^2 &= -1-\xi \\
 \partial^2 N_7 / \partial \eta^2 &= 0 \\
 \partial^2 N_8 / \partial \eta^2 &= -1+\xi
 \end{aligned} \tag{5.119}$$

Para o cálculo da matriz de rigidez, a integração em ξ , η e ζ é realizada por intermédio de quadratura gaussiana. Sendo diferentes entre si as matrizes constitutivas de cada camada, as funções presentes nos termos da matriz de rigidez não serão funções contínuas em ζ e a integração ao longo desta direção deve ser realizada dentro dos limites de cada camada. Os limites de integração inferior e superior para uma camada genérica serão ζ_{k-1} e ζ_k , onde sempre se terá $1 \leq k \leq$ número de camadas.

Utilizando dois pontos para integração ao longo de ζ , os coeficientes para a quadratura de Gauss serão calculados para cada camada, segundo a seguinte fórmula

$$\int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k} F(\zeta) d\zeta = W_1 F(r_1) + W_2 F(r_2) \tag{5.120}$$

onde

$$W_1 = W_2 = \frac{\zeta_k - \zeta_{k-1}}{2} \tag{5.121}$$

e

$$r_1 = \frac{\zeta_{k-1} + \zeta_k}{2} - \frac{\zeta_k - \zeta_{k-1}}{2\sqrt{3}} \quad (5.122)$$

$$r_2 = \frac{\zeta_{k-1} + \zeta_k}{2} + \frac{\zeta_k - \zeta_{k-1}}{2\sqrt{3}} \quad (5.123)$$

O vetor das forças nodais equivalentes a uma pressão normal à superfície de referência é calculado a partir das componentes daquela pressão no sistema global.

Assim

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_8 \end{Bmatrix} \quad (5.124)$$

onde

$$\{p_i\} = \int_s [N_i]^T p \{n\} J_s dS \quad (5.125)$$

sendo

$$J_s = \|\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}\| \quad (\text{Jacobiano de superfície}) \quad (5.126)$$

$$[N_i] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.127)$$

$$\{n\} = \frac{\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta}{\|\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta\|} \quad (5.128)$$

e p a pressão normal.

5.8 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

O elemento finito desenvolvido anteriormente constitui a base de um programa computacional para análise de cascas e placas em geral, laminadas ou não. Assim sendo, são examinadas a seguir algumas estruturas para validar o programa e demonstrar sua versatilidade. Inúmeras outras análises podem ser feitas a fim de colher subsídios para futuros aprimoramentos do programa.

5.8.1 Placa Homogênea

Inicialmente foi analisada uma casca plana quadrada com 0,4 m de lado e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído de 210 kN/m^2 em toda sua superfície superior.

O material empregado é isotrópico e possui módulo de elasticidade longitudinal igual a $4 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ e coeficiente de Poisson igual a 0,3

A Tabela 6.1 mostra os deslocamentos do ponto central da placa, obtidos por vários programas, chamados CASCA3.EXE, CASCA6.EXE e CASCA7.EXE, e ainda pelo sistema SALT, desenvolvido por SORIANO e LIMA [65].

O programa CASCA3.EXE tem como superfície de referência a superfície superior e a matriz de rigidez da estrutura é obtida com as rotações de cisalhamento constituindo graus de liberdade. Posteriormente é aplicada uma matriz de transformação para modificação dos graus de liberdade de rotações de cisalhamento para rotações totais e compatibilização com as condições de contorno. Esse programa emprega o elemento serendipity desenvolvido nas seções anteriores do presente trabalho.

A fim de reproduzir o material homogêneo, a placa foi considerada como consistindo de três lâminas idênticas, de mesmo material e espessura. Convém ressaltar aqui que foi necessário aplicar o fator $k=5/6$ para correção do valor dos coeficientes da matriz constitutiva referentes aos planos de cisalhamento transversais a fim de possibilitar a comparação dos resultados.

O programa CASCA6.EXE tem como superfície de referência a superfície superior e a matriz de rigidez da estrutura é obtida em função das rotações totais, não havendo portanto necessidade de uma matriz de transformação para compatibilização com as condições de contorno. Esse programa emprega o elemento serendipity e foi desenvolvido segundo o procedimento usual de análise de cascas homogêneas por elementos finitos explicada em WEAVER e JOHNSTON [66].

O programa CASCA7.EXE tem como superfície de referência a superfície média e foi desenvolvido de acordo com o método padrão explorado e explicado por WEAVER e JOHNSTON [66], ou seja a matriz de rigidez da estrutura é obtida em função das rotações totais dos nós.

O sistema SALT utiliza elemento bilinear e tem como superfície de referência a superfície média, encontrando também a matriz de rigidez da estrutura em função das rotações totais dos nós.

Em todos os casos analisados, o deslocamento w de nós situados nas bordas encontra-se restrito, assim como os deslocamentos u e v do nó de um dos cantos e o deslocamento v de seu nó adjacente.

O resultado teórico, calculado segundo TIMOSHENKO e KRIEGER [67] é $4,776 \times 10^{-5}$ m. Deve-se levar em conta no entanto que a casca plana em questão não pode ser considerada fina e conseqüentemente o resultado teórico encontrado não deve ser encarado como exato.

TABELA 5.1: Deslocamentos do ponto central (espessura 0,05 m).

Valores dos deslocamentos em 10^{-5} m					
Programa	Rotações dos nós de canto	Malha	Tipo de Elemento	Deslocamento Máximo	Diferença (%)
CASCA3.EXE	Restritas	2 x 2	Serendipity	4,953	1,037
CASCA3.EXE	Livres	2 x 2	Serendipity	4,958	1,038
CASCA3.EXE	Restritas	4 x 4	Serendipity	5,153	1,079
CASCA3.EXE	Livres	4 x 4	Serendipity	5,184	1,085
CASCA6.EXE	Restritas	2 x 2	Serendipity	4,953	1,037
CASCA6.EXE	Livres	2 x 2	Serendipity	4,958	1,038
CASCA7.EXE	Restritas	2 x 2	Serendipity	4,953	1,037
CASCA7.EXE	Livres	2 x 2	Serendipity	4,958	1,038
CASCA7.EXE	Restritas	4 x 4	Serendipity	5,153	1,079
CASCA7.EXE	Livres	4 x 4	Serendipity	5,184	1,085
SALT	Restritas	4 x 4	Bilinear	5,097	1,067
SALT	Livres	4 x 4	Bilinear	5,538	1,160
SALT	Restritas	16 x 16	Bilinear	4,672	0,978
SALT	Livres	16 x 16	Bilinear	4,736	0,992

Com a espessura igual a 0,01 m, foram obtidos os resultados mostrados na Tabela

5.2.

O resultado teórico fornecido por TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER [67]

é $5,967 \times 10^{-3}$ m

TABELA 5.2: Deslocamentos do ponto central (espessura 0,01 m).

Valores dos deslocamentos em 10^{-3} m					
Programa	Rotações dos nós de canto	Malha	Tipo de Elemento	Deslocamento Máximo	Diferença (%)
CASCA3.EXE	Restritas	2 x 2	Serendipity	4,095	0,686
CASCA3.EXE	Livres	2 x 2	Serendipity	5,307	0,889
CASCA3.EXE	Restritas	4 x 4	Serendipity	5,969	1,000
CASCA3.EXE	Livres	4 x 4	Serendipity	5,979	1,002
CASCA7.EXE	Restritas	2 x 2	Serendipity	4,095	0,686
CASCA7.EXE	Livres	2 x 2	Serendipity	5,307	0,889
CASCA7.EXE	Restritas	4 x 4	Serendipity	5,969	1,000
CASCA7.EXE	Livres	4 x 4	Serendipity	5,979	1,002
SALT	Restritas	4 x 4	Bilinear	5,847	0,980
SALT	Livres	4 x 4	Bilinear	6,272	1,051
SALT	Restritas	16 x 16	Bilinear	5,951	0,997
SALT	Livres	16 x 16	Bilinear	6,010	1,007

Verifica-se que, em face da malha 2 x 2 ser muito grosseira, os resultados fornecidos pelos programas CASCA3 e CASCA7 afastaram-se muito do valor teórico e o fato de

restringir as rotações dos nós de canto piora ainda mais o resultado. Ao ser empregada uma malha um pouco mais refinada, o resultado de ambos os programas, com as rotações dos nós de canto impedidas ou não, aproxima-se do valor teórico esperado.

Para examinar o efeito do travamento foi utilizada uma malha 4x4, sem considerações de simetria e os nós de canto tiveram suas rotações restritas em ambas as direções. Com a espessura variando, foram obtidos os resultados mostrados na Tabela 5.3.

TABELA 5.3: Valores obtidos para os deslocamentos no ponto central da casca em função da variação da espessura.

Esp. (m)	L / t	Desl. Obtido (CASCA7)	Desl. Obtido (CASCA3)	Desl. Teórico Ref. [60]	Desl. Norm. (CASCA7)	Desl. Norm. (CASCA3)
0,05	8	$5,18 \times 10^{-5}$	$5,18 \times 10^{-5}$	$4,78 \times 10^{-5}$	1,0860	1,0860
0,04	10	$9,85 \times 10^{-5}$	$9,85 \times 10^{-5}$	$9,32 \times 10^{-5}$	1,0563	1,0563
0,01	40	$5,98 \times 10^{-3}$	$5,98 \times 10^{-3}$	$5,97 \times 10^{-3}$	1,0019	1,0019
0,004	100	$9,22 \times 10^{-2}$	$9,20 \times 10^{-2}$	$9,32 \times 10^{-2}$	0,9888	0,9872
0,002	200	$7,12 \times 10^{-1}$	$7,14 \times 10^{-1}$	$7,46 \times 10^{-1}$	0,9542	0,9566
0,0004	1000	$4,28 \times 10^1$	$7,25 \times 10^1$	$9,32 \times 10^1$	0,4594	0,7779
0,00004	10000	$9,37 \times 10^3$	$48,4 \times 10^3$	$93,2 \times 10^3$	0,1005	0,5192

Com base nos dados da Tabela 5.3, pode-se construir o gráfico a seguir que ilustra o comportamento dos programas CASCA7 e CASCA3, que correspondem às colunas legendas MEF (1) e MEF (2), respectivamente, do gráfico apresentado na Figura 5.9.

Casca Plana - Malha 4x4 Travamento (Locking)

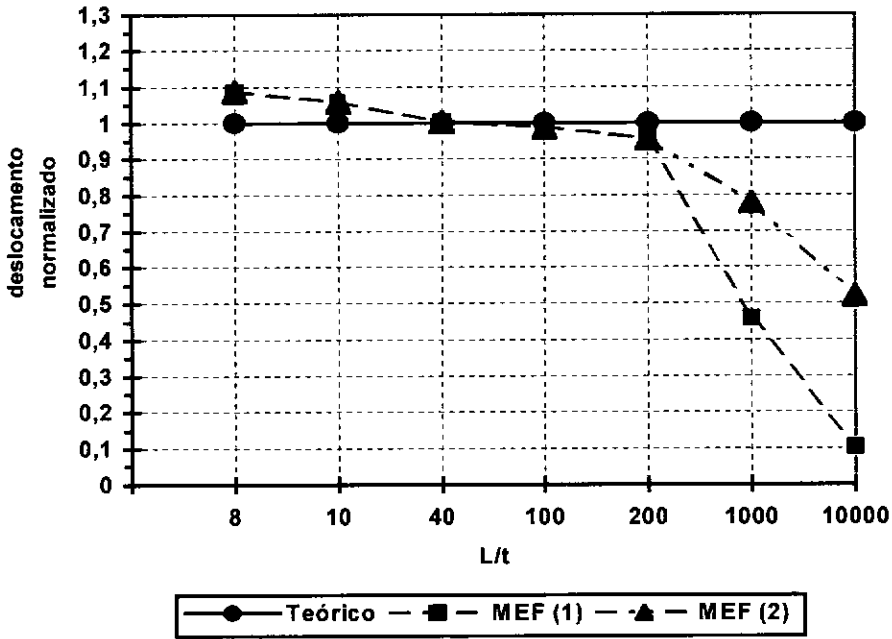


FIGURA 5.9: Gráfico dos deslocamentos do ponto central da placa obtidos em função da variação da espessura.

Observa-se no gráfico da Figura 5.9 que o travamento ocorre para valores de espessura fora da faixa de utilidade dos materiais normalmente empregados em estruturas.

5.8.2 Casca Homogênea

Para validar o programa no cálculo de cascas foi calculada inicialmente a estrutura da Figura 5.10, cujos resultados também foram obtidos por WEAVER e JOHNSTON [66].

Os parâmetros físicos do problema são

$$L = 0,2 \text{ m}$$

$$t \text{ (espessura)} = 0,05 \text{ m}$$

$$E = 4 \times 10^7 \text{ kN/m}$$

$$\nu = 0,3$$

$$P_z = 5 \text{ kN}$$

Na referência [66] foi utilizado apenas um elemento e verifica-se que os valores obtidos empregando a teoria e o elemento finito desenvolvidos neste trabalho praticamente se confundem com os da referência mencionada. Os nós 6, 7 e 8 são fixos e os nós 1, 3, 4 e 5 são parcialmente restritos. O deslocamento dos pontos A, B e C obtidos na referência [66] é de $3,5061 \times 10^{-3} \text{ m}$.

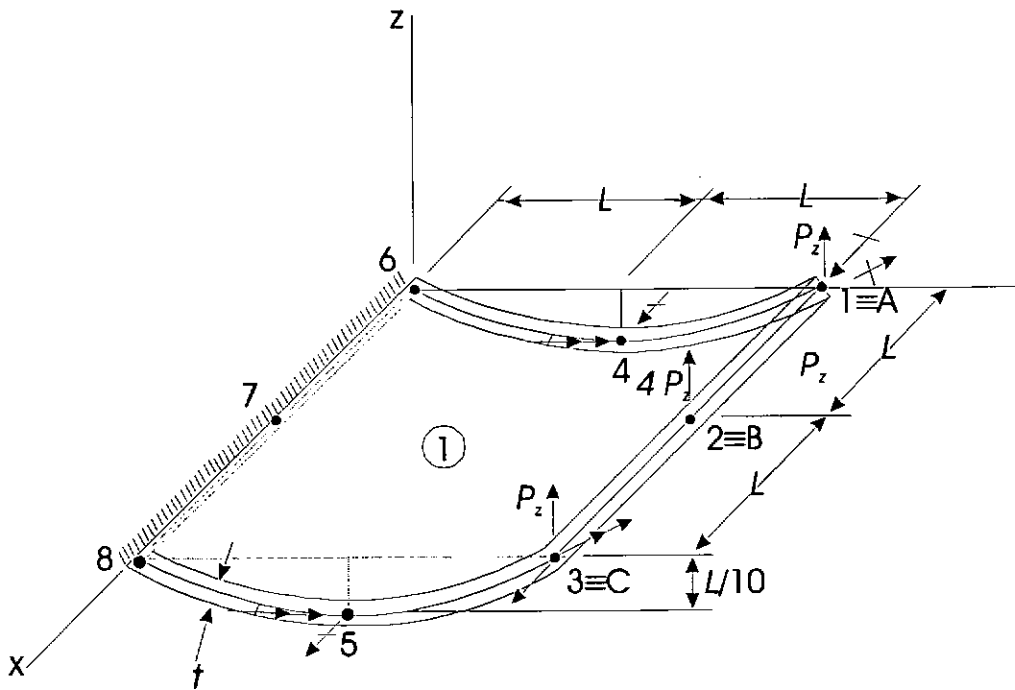


FIGURA 5.10: Casca homogênea.

TABELA 5.4: Deslocamentos da extremidade da casca homogênea engastada.

	Pontos A e C		Ponto B	
	Deslocamento (x 10 ⁻³ m)	Diferença	Deslocamento (x 10 ⁻³ m)	Diferença
1 x 1	3,4963	0,997	3,4945	0,967
2 x 2	3,4171	0,975	3,4822	0,993
4 x 4	3,4277	0,978	3,4931	0,996
8 x 8	3,4319	0,979	3,5006	0,998

Para obter os resultados do programa desenvolvido no presente trabalho e comparar com os da referência [66], a casca foi considerada como constituída de duas camadas idênticas de mesmo material.

5.8.3 Casca Laminada

Esta aplicação trata de um segmento de casca cilíndrica submetido a uma pressão interna e com o contorno engastado, conforme mostra a Figura 5.11. O material constituinte da casca é ortotrópico, consiste de fibras embebidas em uma matriz e possui as seguintes propriedades elásticas:

$$E_L = 7,5 \times 10^6 \text{ psi} = 51,7107 \text{ GPa}$$

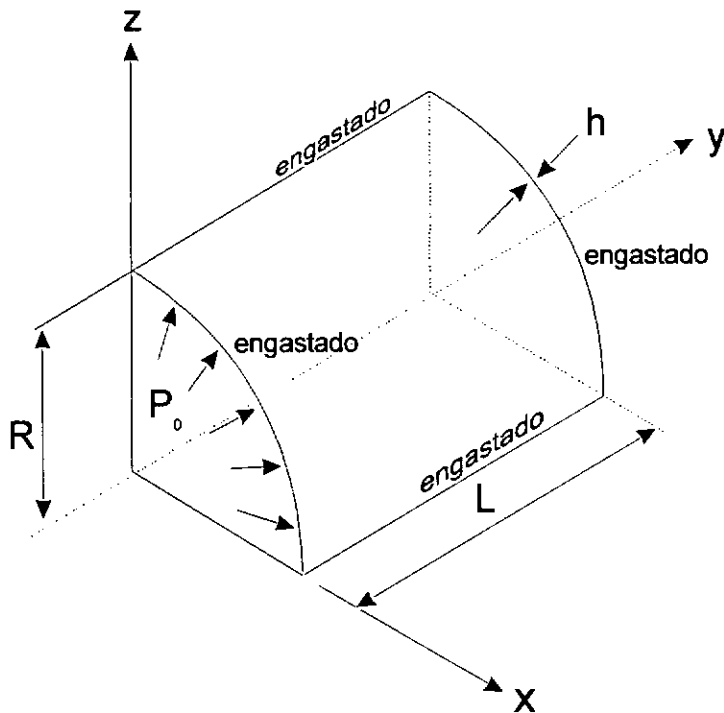
$$E_T = 2,0 \times 10^6 \text{ psi} = 13,7895 \text{ GPa}$$

$$G_{LT} = 1,25 \times 10^6 \text{ psi} = 8,6184 \text{ GPa}$$

$$G_{TO} = 0,625 \times 10^6 \text{ psi} = 4,3092 \text{ GPa}$$

$$G_{LO} = 0,625 \times 10^6 \text{ psi} = 4,3092 \text{ GPa}$$

$$\nu_{LT} = \nu_{LT} = 0,25$$



$$R = 20 \text{ in} = 50,8 \text{ cm}$$

$$P_0 = 6,41/\pi \text{ psi} = 14,068 \text{ kPa}$$

$$L = 20 \text{ in} = 50,8 \text{ cm}$$

FIGURA 5.11: Casca Laminada.

Os subscritos L e T indicam as direções longitudinal (coincidente com o eixo y) e transversal às fibras, respectivamente. O subscrito O indica a direção normal a L e T simultaneamente.

Os coeficientes elásticos presentes na equação (5.90) foram calculados em função dos módulos de elasticidade longitudinal e transversal do material segundo as relações:

$$C_{LT} = (\cos \varphi)^4 C_{1111} + 2 (\cos \varphi)^2 (\sin \varphi)^2 C_{1122} + (\sin \varphi)^4 C_{2222} + 4 (\cos \varphi)^2 (\sin \varphi)^2 C_{1212}$$

(5.129)

$$\begin{aligned}
C_{1'2'} &= (\cos \varphi)^2 (\text{sen } \varphi)^2 C_{1111} + [(\cos \varphi)^4 + (\text{sen } \varphi)^4] C_{1122} + (\cos \varphi)^2 (\text{sen } \varphi)^2 C_{2222} + \\
&+ 4 (\cos \varphi)^2 (\text{sen } \varphi)^2 C_{1212}
\end{aligned}
\tag{5.130}$$

$$\begin{aligned}
C_{1'6'} &= (\cos \varphi)^3 (\text{sen } \varphi) C_{1111} + (\cos \varphi) (\text{sen } \varphi) [(\text{sen } \varphi)^2 - (\cos \varphi)^2] C_{1122} - \\
&- (\cos \varphi) (\text{sen } \varphi)^3 C_{2222} + 2 (\cos \varphi) (\text{sen } \varphi) [(\text{sen } \varphi)^2 - (\cos \varphi)^2] C_{1212}
\end{aligned}
\tag{5.131}$$

$$\begin{aligned}
C_{2'2'} &= (\text{sen } \varphi)^4 C_{1111} + 2 (\cos \varphi)^2 (\text{sen } \varphi)^2 C_{1122} + (\cos \varphi)^4 C_{2222} + 4 (\cos \varphi)^2 (\text{sen } \varphi)^2 \\
&C_{1212}
\end{aligned}
\tag{5.132}$$

$$\begin{aligned}
C_{2'6'} &= (\text{sen } \varphi)^3 (\cos \varphi) C_{1111} + (\cos \varphi) (\text{sen } \varphi) [(\cos \varphi)^2 - (\text{sen } \varphi)^2] C_{1122} - \\
&- (\text{sen } \varphi) (\cos \varphi)^3 C_{2222} + 2 (\cos \varphi) (\text{sen } \varphi) [(\cos \varphi)^2 - (\text{sen } \varphi)^2] C_{1212}
\end{aligned}
\tag{5.133}$$

$$\begin{aligned}
C_{6'6'} &= (\cos \varphi)^2 (\text{sen } \varphi)^2 C_{1111} - 2 (\cos \varphi)^2 (\text{sen } \varphi)^2 C_{1122} + (\cos \varphi)^2 (\text{sen } \varphi)^2 C_{2222} + \\
&+ [(\cos \varphi)^4 - 2 (\cos \varphi)^2 (\text{sen } \varphi)^2 + (\text{sen } \varphi)^4] C_{1212}
\end{aligned}
\tag{5.134}$$

$$C_{4'4'} = (\cos \varphi)^2 C_{1313} + (\text{sen } \varphi)^2 C_{2323} \tag{5.135}$$

$$C_{5'5'} = (\text{sen } \varphi)^2 C_{1313} + (\cos \varphi)^2 C_{2323} \tag{5.136}$$

$$C_{4'5'} = (\cos \varphi) (\sen \varphi) C_{1313} + (\sen \varphi) (\cos \varphi) C_{2323} \quad (5.137)$$

onde

$$C_{1111} = E_L / (1 - \nu_{LT}\nu_{TL}) \quad (5.138)$$

$$C_{2222} = E_T / (1 - \nu_{LT}\nu_{TL}) \quad (5.139)$$

$$C_{1122} = \nu_{LT} E_T / (1 - \nu_{LT}\nu_{TL}) \quad (5.140)$$

$$C_{1212} = G_{LT} \quad (5.141)$$

$$C_{1313} = G_{LO} \quad (5.142)$$

$$C_{2323} = G_{TO} \quad (5.143)$$

e φ é o ângulo entre a direção das fibras e o sentido positivo do eixo x, local do elemento (Figura 5.12).

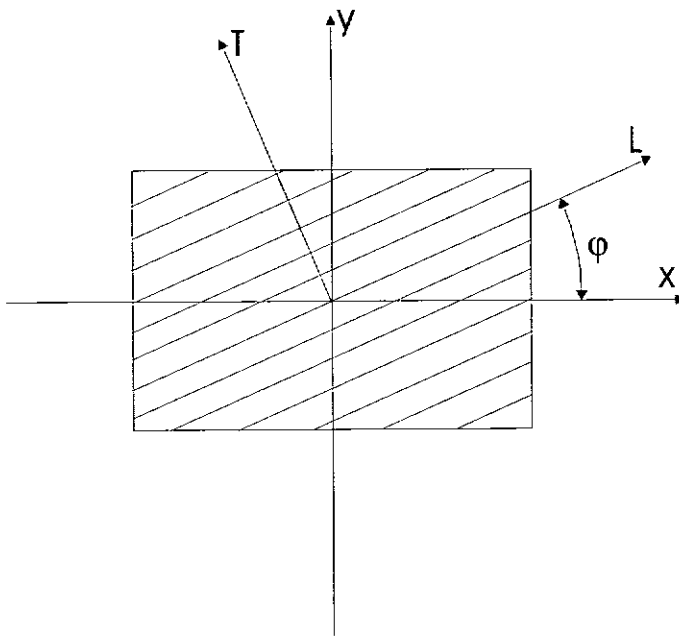


FIGURA 5.12: Ângulo de orientação das fibras para placas e cascas laminadas.

A estrutura da Figura 5.11 foi calculada por GROENWOLD e STANDER [68], que utilizaram para isso um elemento quadrilátero com 4 nós e 24 graus de liberdade, e por HAAS e LEE [69], que empregaram um elemento quadrilátero de 9 nós e 45 graus de

liberdade. Em ambos os elementos as deformações são assumidas como variando segundo uma distribuição polinomial.

A Tabela 5.5 mostra os valores, em centímetros, obtidos pelo programa desenvolvido aqui e os constantes nas referências [68] e [69] para o deslocamento radial do ponto central da casca. .

TABELA 5.5: Deslocamento radial do ponto central de casca cilíndrica.

Valores dos deslocamentos em 10^{-4} centímetros					
Malha		Disposição das camadas			
		0	-45/45	45/-45/-45/45	0/90/90/0
4 x 4	CASCA3	10,940	7,277	7,315	5,720
	Ref. [69]	11,011	7,396	7,407	5,812
6 x 6	CASCA3	10,996	7,333	7,343	5,806
	Ref. [69]	11,082	7,402	7,386	5,839
8 x 8	CASCA3	11,069	7,358	7,384	5,845
	Ref. [68]	11,217	7,711	7,658	6,045
10 x 10	CASCA3	11,085	7,371	7,389	5,855
	Ref. [69]	11,092	7,407	7,389	5,842
16 x 16	CASCA3	11,087	7,371	7,389	5,855
	Ref. [68]	11,133	7,485	7,452	5,895
32 x 32	Ref. [68]	11,085	7,440	7,468	5,847

Com base nos valores da tabela, foram traçados os gráficos das Figuras 5.13, 5.14, 5.15 e 5.16. Nas mencionadas figuras, a legenda TCTC refere-se aos deslocamentos

obtidos para o elemento formulado com base na teoria de continuidade de tensões de cisalhamento desenvolvida neste trabalho.

O programa aqui implementado foi executado com diferentes malhas, até que a convergência fosse verificada, de modo a possibilitar comparação de resultados. Os valores obtidos na referência [68] convergem por valores superiores para qualquer disposição das camadas e os valores da referência [69] convergem ora por valores inferiores (para as disposições 0, -45/+45 e 0/90/90/0), ora por valores superiores (para a disposição 45/-45/-45/45). O elemento gerado no presente trabalho apresentou convergência somente por valores inferiores. Isso se deve ao fato de se tratar de elemento conforme, cuja matriz de rigidez foi calculada sem aproximações numéricas. Como era de se esperar, a disposição de camadas 0/90/90/0 é a mais rígida. A comparação dos valores de convergência obtidos para as várias disposições de camadas, com as formulações mencionadas, indica uma tendência de que o elemento aqui desenvolvido forneça resultados menores de deslocamentos (apesar de levar ao maior deslocamento na disposição 0/90/90/0) e de que o elemento da referência [69] seja o que conduz a maiores resultados de deslocamentos (apesar de apresentar o menor deslocamento para o caso de casca homogênea).

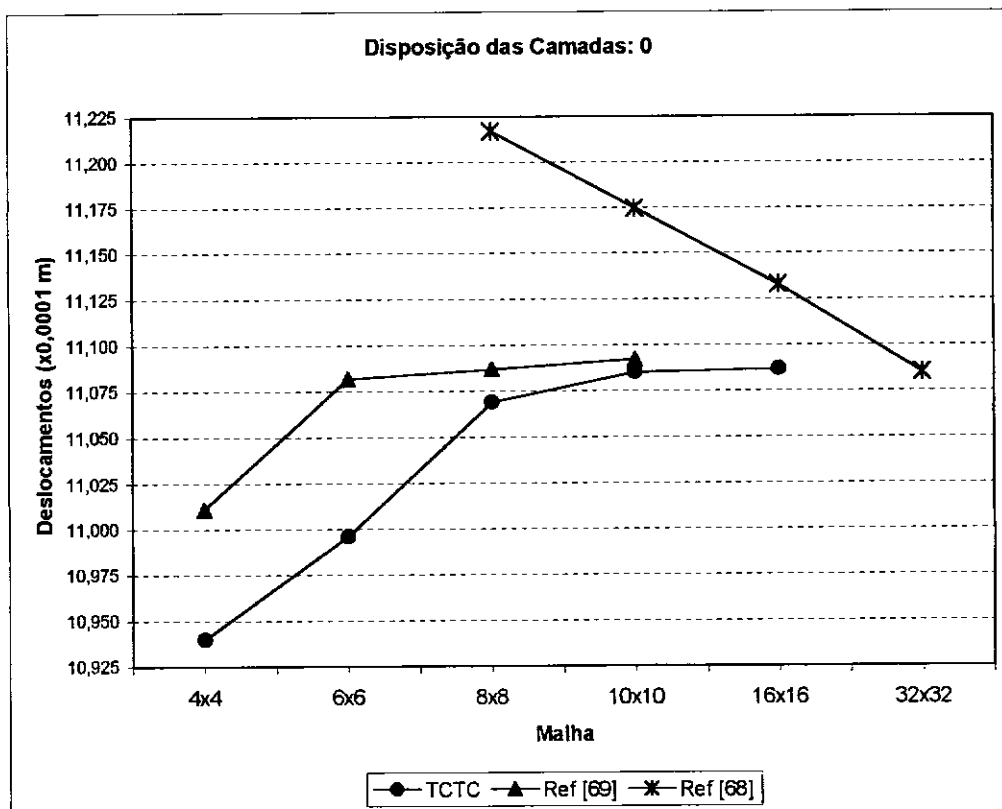


FIGURA 5.13: Gráfico dos deslocamentos do ponto central de casca cilíndrica para disposição das camadas em 0.

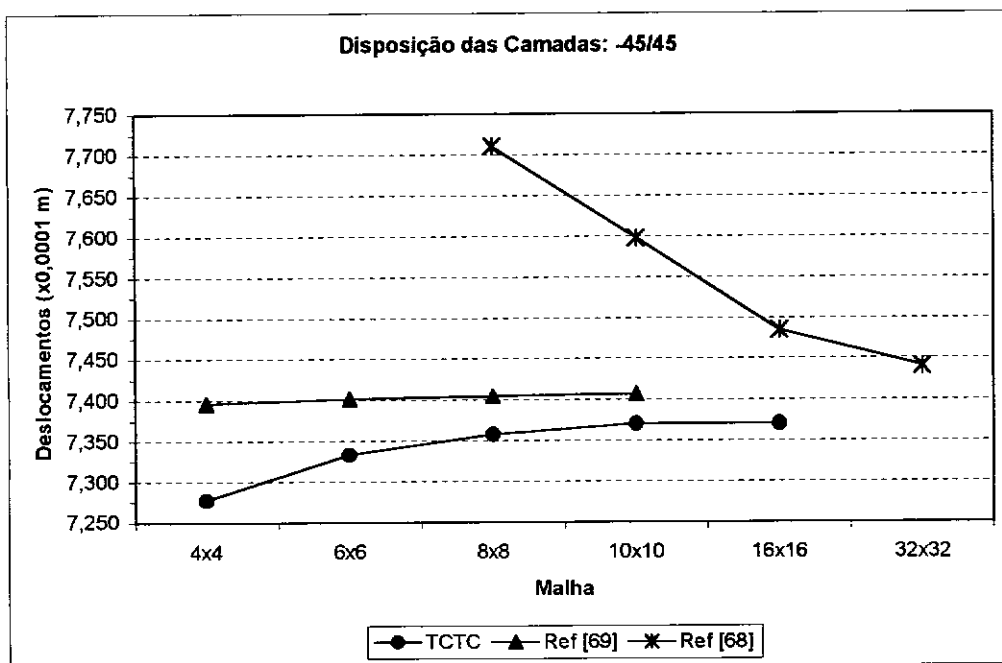


FIGURA 5.14: Gráfico de deslocamentos do ponto central de casca cilíndrica para disposição das camadas em -45/45.

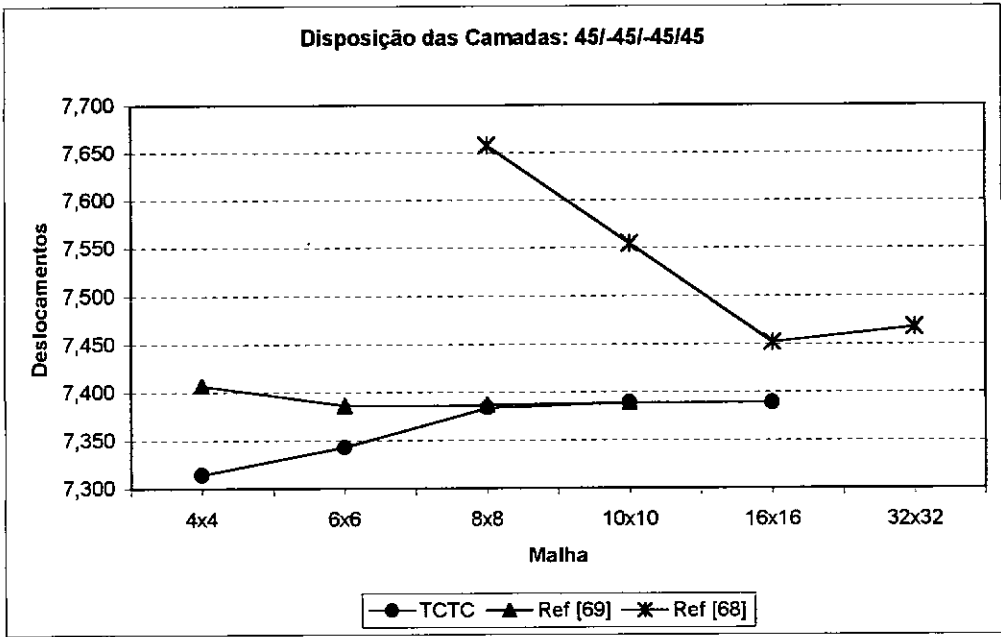


FIGURA 5.15: Gráfico de deslocamentos do ponto central de casca cilíndrica para disposição das camadas em 45/-45/-45/45.

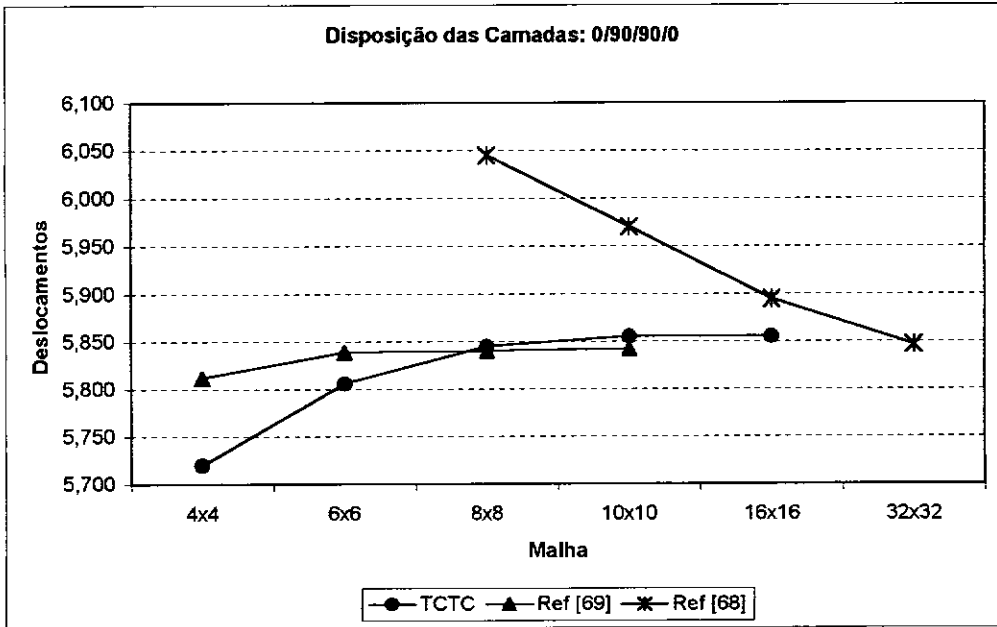


FIGURA 5.16: Gráfico de deslocamentos do ponto central de casca cilíndrica para disposição das camadas em 0/90/90/0.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1 CONCLUSÕES

Inicialmente, este trabalho apresentou noções introdutórias e conceitos básicos referentes a materiais compósitos e laminados e foram descritos os fundamentos da elasticidade anisotrópica.

A seguir, foram apresentadas as principais teorias que tratam de vigas e cascas laminadas e foram desenvolvidas e demonstradas as equações correspondentes a teorias específicas para vigas e cascas laminadas, que respeitam a continuidade de tensões de cisalhamento nas interfaces. Essas teorias, por sua originalidade, constituem a principal contribuição do presente trabalho ao tema em questão, por possibilitarem maior facilidade na análise de estruturas laminadas, já que foram elaboradas visando especialmente a utilização do Método dos Elementos Finitos, e apresentam os termos referentes às rotações devidas ao cisalhamento isolados dos termos referentes às rotações devidas à flexão. Isso abre amplo espectro para pesquisa, onde as parcelas referentes às rotações devidas ao cisalhamento e as referentes às rotações devidas à flexão podem sofrer tratamento diferenciado, já que anteriormente as mencionadas rotações eram tratadas em conjunto em um único termo de rotação total, e a manipulação daquelas parcelas isoladamente oferecia grande dificuldade.

Após terem sido apresentadas as equações que expressam a teoria, foram formulados, de acordo com essas equações, elementos finitos específicos para vigas e cascas

laminadas e foram implementados os respectivos programas computacionais. As expressões obtidas para a implementação dos referidos programas foram desenvolvidas de forma genérica e podem ser aplicadas a qualquer família de elementos. Isso permite o desenvolvimento de novas metodologias para o cálculo e projeto de estruturas laminadas.

A formulação de casca foi particularizada ao elemento quadrático serendipity apenas para validação da teoria. Ressalta-se que os elementos finitos aqui formulados não apresentam acréscimo de graus de liberdade em relação aos elementos gerados para análise de estruturas homogêneas e isotrópicas.

A implementação dos mencionados elementos configura outra importante contribuição importante do presente trabalho pelo fato de que, naqueles elementos, as rotações devidas ao cisalhamento constituem graus de liberdade isolados. Isso permite utilização de rotinas numéricas diferentes para manipulação das grandezas correspondentes ao cisalhamento e à flexão.

Além disso, outro aspecto original deste trabalho é o procedimento de transformação da matriz de rigidez obtida, na qual as rotações de cisalhamento são graus de liberdade, em matriz de rigidez expressa em termos de rotações totais como graus de liberdade. Isso significa uma valiosa ferramenta para o desenvolvimento de novos procedimentos de análises numéricas, pois permite liberdade para desenvolver uma formulação de elementos finitos adequada e, posteriormente, torna possível uma manipulação algébrica extremamente simples da matriz de rigidez obtida para que sejam estabelecidas as condições geométricas de contorno.

As aplicações numéricas atestam a boa concordância dos resultados fornecidos pelos programas implementado com os fornecidos pela literatura consultada.

6.2 SUGESTÕES PARA PESQUISA

Sendo materiais compósitos uma área de pesquisa recente e multidisciplinar, resta ainda muito a ser objeto de investigação, estudos e experiências.

Os modelos de elementos finitos aqui implementados merecem análise mais profunda e o respaldo de resultados experimentais. O elemento quadrático serendipity aqui utilizado mostra-se muito propenso a apresentar travamento por cortante e por isso um melhoramento que se apresenta de imediato é o de adaptar o programa para utilização do elemento quadrático Lagrange ou o elemento heterosis.

Na teoria desenvolvida, o campo de deslocamentos, tanto em vigas como em cascas laminadas, por levar a uma variação linear por partes de u e v ao longo da espessura, não consegue reproduzir a condição de tensões de cisalhamento nulas nas superfícies superior e inferior da estrutura, por isso, o refinamento do campo de deslocamentos surge também como importante objeto de pesquisas e que seguramente levará a uma melhor precisão dos resultados.

Outros assuntos que se mostram favoráveis a estudos mais avançados são:

- estudo das interfaces, envolvendo problemas de descolamento de camadas e de delaminação. Isso levaria a uma redistribuição de tensões e, em consequência, a um novo estado de equilíbrio a ser determinado;
- otimização de laminados, onde os ângulos que fazem entre si as direções principais de cada camada e as características dos materiais constituintes poderiam ser incluídas como variáveis de projeto. Desta forma, procurar-se-ia encontrar analiticamente a melhor disposição das lâminas, suas dimensões e os materiais mais indicados para uma determinada estrutura, em face das solicitações às quais ela estará submetida;

- tensões térmicas ocasionadas pela variação de temperatura em camadas que apresentem diferentes coeficientes de dilatação térmica;
- concentração de tensões e comportamento de cascas e vigas laminadas ao serem incluídos reforços e enrijecedores;
- problemas de plasticidade onde a análise levaria em conta o comportamento da estrutura no regime plástico;
- flambagem, onde a principal meta seria a determinação da influência das diferentes propriedades das camadas na determinação da carga crítica.

Em qualquer um desses estudos a realização de ensaios é de suma importância a fim de estabelecer os limites de validade de cada teoria.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] VINSON, J. R., SIERAKOWSKI, R. L., *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*, Dordrecht, Martinus Nijhoff Publishers, 1986.
- [2] ALLEN, H. G., *Analysis and Design of Structural Sandwich Panels*, London, Pergamon Press, 1969.
- [3] HOFF, N. J. e MAUTNER, S. E., “Vibration of Sandwich Beams”, *Journal of Aerospace Sciences*, v. 15, pp. 707-720, 1948.
- [4] DITARANTO, R. A., “Theory of Vibratory Bending for Elastic and Viscoelastic Layered Finite-Length Beams”, *Journal of Applied Mechanics*, v. 32, pp 881-886, 1965.
- [5] JONES, I. W., SALERNO, V. L. e SAVACCHIO, A., “An Analytical and Experimental Evaluation of the Damping Capacity of Sandwich Beams with Viscoelastic Core”, *Journal of Engineering for Industry*, v. 89, pp 438-444, 1967.
- [6] BERT, C. W., WILKINS Jr., D. J. e CRISMAN, W. C., “Damping in Sandwich Beams with Shear-Flexible Cores”, *Journal of Engineering for Industry*, v. 89, pp. 662-670, 1967.
- [7] RAO, D. K., “Vibration of Short Sandwich Beams”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 52, pp. 253-263, 1977.

- [8] MEAD, D. J. e MARKUS, S., “Coupled Flexural, Longitudinal and Shear Wave Motion in Two and Three Layered Damped Beams”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 99, pp. 501-519, 1984.
- [9] KRAJČINOVIC, D., “Vibrations of Laminated Beams”, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, v. 10, pp. 1265-1266, 1972.
- [10] MURTY, A. V. Krishna e SHIMPI, R. P., “Vibrations of Laminated Beams”, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, v. 36, pp. 273-284, 1974.
- [11] DI SCIUVA, M., “Bending, Vibration and Buckling of Simply Supported Thick Multilayered Orthotropic Plates: An Evaluation of A New Displacement Model”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 105, pp. 425-442, 1986.
- [12] TIMOSHENKO, S. P. e GOODIER, J. N., *Teoria da Elasticidade*, Rio de Janeiro, Editora Guanabara Dois, 1980.
- [13] SHAMES, I. H., *Introdução à Mecânica dos Sólidos*, Rio de Janeiro, Prentice-Hall do Brasil, 1983.
- [14] HINTON, E. e OWEN, D. R. J., *Finite Element Programming*, London, Academic Press, 1977.
- [15] LEKHNISTKII, S. G., TSAI, S. N., e CHUON, T., *Anisotropic Plates*, London, Gordon and Breach Science Publishers, 1968.

- [16] JUNGBLUTH, O., *Aplicações das Estruturas em Painéis Sanduíche na Engenharia Civil*, Fascículo 6, Rio de Janeiro, PUC/RJ, 1973.
- [17] REISSNER, E. e STAVSKY, Y. “Bending and Stretching of Certain Types of Heterogeneous Anisotropic Elastic Plates”, *Journal of Applied Mechanics*, v. 28, pp. 402-408, 1961.
- [18] DONG, S. B., PISTER K. S. e TAYLOR R. L. “On the Theory of Laminated Anisotropic Shells and Plates”, *Journal of Aerospace Sciences*, v. 29, pp. 969-975, 1962.
- [19] LOVE, A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, New York, Dover Publications, 1944.
- [20] AMBARTSUMYAN, S. A. *Theory of Anisotropic Shells*, NASA TT F-118, 1964.
- [21] BERT, C. W., “Structural Theory for Laminated Anisotropic Elastic Shells”, *Journal of Composite Materials*, v. 1, pp. 414-423, 1967.
- [22] VLASOV, V. Z., *General Theory of Shells and Its Applications In Engineering*, NASA TT F-99, 1964.
- [23] YANG, P. C., NORRIS, C. H. e STAVSKY, Y. “Elastic Wave Propagation in Heterogeneous Plates”, *International Journal of Solids and Structures*, v. 2, pp. 665-684, 1966.

- [24] DONG, S. B. e TSO, F. K. W., “On a Laminated Orthotropic Shell Theory Including Transverse Shear Deformation”, *Journal of Applied Mechanics*, v. 39, pp. 1091-1097, 1972.
- [25] WHITNEY, J. M. e PAGANO, N. J., “Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates”, *Journal of Applied Mechanics*, v. 37, pp. 1031-1036, 1970.
- [26] MINDLIN, R. D. “Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates”, *Journal of Applied Mechanics*, v. 18, pp. 31-38, 1951.
- [27] KRAUS, H., *Thin Elastic Shells*, New York, John Wiley & Sons, 1967.
- [28] WHITNEY, J. M. e SUN, C. T., “A Higher Order Theory for Extensional Motion of Laminated Composites”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 30, pp. 85-97, 1973.
- [29] WHITNEY, J. M. e SUN, C. T., “A Refined Theory for Laminated Anisotropic Cylindrical Shells”, *Journal of Applied Mechanics*, v. 41, pp. 471-476, 1974.
- [30] LIBRESCU, L., *Elastostatics and Kinetics of Anisotropic and Heterogeneous Shell-Type Structures*, Leyden, Nordhoff International, 1975.
- [31] LO, K. H., CHRISTENSEN, R. M. e WU, E. M., “A High-Order Theory of Plate Deformation, Part 2: Laminated Plates”, *Journal of Applied Mechanics*, v. 44, pp. 669-676, 1977.

- [32] BHIMARADDI, A., "Dynamic Response of Orthotropic Homogeneous And Cylindrical Shells", *AIAA Journal*, v. 27, pp. 1834-1837, 1985.
- [33] REDDY, J. N. e LIU, C. F., "A Higher-Order Shear Deformation Theory of Laminated Elastic Shells", *International Journal Of Engineering Science*, v. 23, pp. 319-330, 1985.
- [34] REDDY, J. N. "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates", *Journal of Applied Mechanics*, v. 51, pp. 745-752, 1984.
- [35] AMBARTSUMYAN, S. A. *Theory of Anisotropic Plates*, New York, J. E. Ashton, Technomic Publishing Co. 1969.
- [36] WHITNEY, J. M., "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Laminated Plates", *Journal of Composite Materials*, v. 3, pp. 534-547, 1969.
- [37] HSU, T. M. e WANG, J. T. S., "A Theory of Laminated Cylindrical Shells Consisting of Layers of Orthotropic Laminae", *AIAA Journal*, v. 8, pp. 2141-2146, 1970.
- [38] WHITNEY, J. M. e SUN, C. T., "Theories for the Dynamic Response of Laminated Plates", *AIAA Journal*, v. 11, pp. 178-183, 1973.
- [39] SRINIVAS, S. A., "Refined Analysis of Composite Laminates", *Journal of Sound and Vibration*, v. 30, pp. 495-507, 1973.

- [40] ZUKAS, J. A. & VINSON, J. R., "Laminated Transversely Isotropic Cylindrical Shells", *Journal of Applied Mechanics*, v. 38, pp. 400-407, 1971.
- [41] RATH, B. K. e DAS, Y. C., "Vibration of Layered Shells", *Journal of Sound and Vibration*, v. 28, pp. 737-757, 1973.
- [42] WALTZ, T. L. e VINSON, J. R., "Interlaminar Stresses in Laminated Cylindrical Shells of Composite Materials", *AIAA Journal*, v. 14, pp. 1213-1218, 1976.
- [43] DI SCIUVA, M., "Development of an Anisotropic, Multilayered Shear-Deformable Rectangular Plate Element", *Computers & Structures*, v. 21, pp. 789-796, 1984.
- [44] DI SCIUVA, M., "An Improved Shear-Deformation Theory For Moderately Thick Multilayered Anisotropic Shells and Plates", *Journal of Applied Mechanics*, v. 54, pp. 589-596, 1987.
- [45] NOOR, A. K. e BURTON, W. S., "Assessment of Shear Deformation Theories for Multilayered Composite Plates", *Applied Mechanics Review*, v. 42, pp. 1-13, 1989.
- [46] PANDA, S. e NATARAJAN, R. "Finite Element Analysis of Laminated Shells of Revolution", *Computers & Structures*, v. 6, pp. 61-64, 1976.
- [47] PANDA, S. e NATARAJAN, R. "Analysis of Laminated Composite Shell Structures by Finite Element Method", *Computers & Structures*, v. 14, pp. 225-230, 1981.

- [48] AHMAD, S., IRONS, B. M. e ZIENKIEWICZ, O. C., “Analysis of Thick And Thin Shell Structures by Curved Finite Elements”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 2, pp. 419-451, 1970.
- [49] RAO, K. P., “Rectangular Laminated Anisotropic Shallow Thin Shell Finite Element”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 15, pp. 13-33, 1978.
- [50] VENKATESH, A. e RAO, K. P., “Analysis of Laminated Shells with Laminated Stiffeners Using Rectangular Shell Finite. Elements”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 38, pp. 255-272, 1983.
- [51] NOOR, A. K. e PETERS, J. M., “Analysis of Laminated Anisotropic Shells of Revolution”, *Journal of Engineering Mechanics*, v. 113, pp. 49-65, 1987.
- [52] NOOR, A. K. e PETERS, J. M., “Stress and Vibration Analysis of Anisotropic Shells of Revolution”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 26, pp. 1145-1167, 1988.
- [53] BHIMARADDI, A., CARR, A. J. e MOSS, P. J., “A Shear Deformable Finite Element for the Analysis of General Shells of Revolution”, *Computers & Structures*, v. 31, pp. 299-308, 1989.
- [54] CHAO, W. C. e REDDY, J. N., “Analysis of Laminated Composite Shells Using a Degenerated 3-D Element”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 20, pp. 1991-2007, 1984.

- [55] LIAO, C. L., REDDY, J. N. e ENGELSTAD, S. P., "A Solid-Shell Transition Element for Geometrically Non-Linear Analysis of Laminated Composite Structures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 26, pp. 1843-1854, 1988.
- [56] LIAO, C. L. e REDDY, J. N., "A Continuum-Based Stiffened Composite Shell Element for Geometrically Nonlinear Analysis", *AIAA Journal*, v. 27, pp. 95-101, 1989.
- [57] LIAO, C. L. e REDDY, J. N., "Analysis of Anisotropic, Stiffened Composite Laminates Using a Continuum-Based Shell Element", *Computers & Structures*, v. 34, pp. 805-815, 1990.
- [58] OCHOA, O. O. e REDDY, J. N., *Finite Element Analysis of Composite Laminates*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [59] REDDY, J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates – Theory and Analysis*, Boca Raton, CRC Press, 1997.
- [60] XAVIER, P. B., LEE, K. H. e CHEW, C. H., "An Improved Zigzag Model for the Bending of Laminated Composite Shells", *Composite Structures*, v.26, pp. 123-138, 1993.
- [61] XAVIER, P. B., CHEW, C. H. e LEE, K. H., "Buckling and Vibration of Multilayer Orthotropic Composite Shells Using a Simple Higher-Order Layerwise Theory", *International Journal of Solids and Structures*, v.32, pp. 3479-3497, 1995.

- [62] LEE, K. H. *et al.*, "An Improved Zig-Zag Model for the Bending of Laminated Composite Plates", *Composite Structures*, v.15, pp. 137-148, 1990.
- [63] LEE, K. H., KIN, W. Z. e CHOW, S. T., "Bi-Directional Bending of Laminated Composite Plates Using an Improved Zig-Zag Model", *Composite Structures*, v. 28, 283-294, 1994.
- [64] ZIENKIEWICZ, O. C. e TAYLOR, R. L., *The Finite Element Method*, 4 ed. Vol. I London, McGraw-Hill, 1989.
- [65] SORIANO, H. L. e LIMA, S. S., *SALT – Sistema de Análise de Estruturas, Manual do Usuário*, UFRJ, 1999.
- [66] WEAVER, Jr., W. e JOHNSTON, P. R., *Finite Elements for Structural Analysis*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1984.
- [67] TIMOSHENKO, S. P. e WOINOWSKY-KRIEGER, S., *Theory of Plates and Shells*, 2 ed. Singapore, McGraw-Hill, 1987
- [68] GROENWOLD, A. G. e STANDER, N., "A 24 d.o.f. four-node flat shell finite element for general unsymmetric orthotropic layered composites", *Engineering Computations*, v. 15, n. 4, pp. 518-543, 1998.
- [69] HAAS, D. J. e LEE, S. W., "A Nine-Node Assumed-Strain Finite Element for Composite Plates and Shells", *Computers & Structures*, v. 26, pp. 445-452, 1987.