ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR NO DOMÍNIO DA FREQÜÊNCIA DE SISTEMAS ESTRUTURAIS COM AMORTECIMENTO NÃO-PROPORCIONAL

Walnório Graça Ferreira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Webe João Mansur, Ph.D.
Presidente

Antonio Maria Claret de Gouvêia, D.Sc.

José Antonio Marques Carrer, D.Sc.

Luís Volnei Sudati Sagrilo, D.Sc.

Francisco Célio de Araújo, Dr.-Ing.

Carlos Friedrich Loeffler Neto, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
FEVEREIRO DE 1998

FERREIRA, WALNÓRIO GRAÇA

Análise Dinâmica Não-Linear no Domínio da Freqüência de Sistemas Estruturais com Amortecimento Não-Proporcional

[Rio de Janeiro] 1998

viii, 93 p., 29.7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia Civil, 1998)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Dinâmica Estrutural

2. Análise no Domínio da Freqüência

3.Análise Não-Linear Física

4. Amortecimento Não-Proporcional

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

À minha família

AGRADECIMENTOS

Ao Professores Webe João Mansur, Fernando Venâncio Filho e Antonio Maria Claret de Gouvêia, pela competente orientação desta pesquisa.

Aos colegas e amigos da COPPE/UFRJ e das cidades de Mariana, Ouro Preto e Vitória.

Aos alunos e professores do Mestrado em Construção Metálica da Escola da Minas de Ouro Preto.

Ao Centro Tecnológico e ao Departamento de Estruturas e Edificações da UFES.

À FACITEC da Prefeitura Municipal de Vitória.

Ao Banco de Desenvolvimento do Estado do Espírito Santo (BANDES).

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR NO DOMÍNIO DA FREQÜÊNCIA DE SISTEMAS ESTRUTURAIS COM AMORTECIMENTO NÃO-PROPORCIONAL

Walnório Graça Ferreira

Fevereiro de 1998

Orientadores: Webe João Mansur
Fernando Venâncio Filho
Antonio Maria Claret de Gouvêia

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma formulação no domínio da freqüência para viabilizar a solução das equações de equilíbrio dinâmico com um ou múltiplos graus de liberdade, dotados de amortecimento não-proporcional viscoso, histerético ou dependente da freqüência, possuindo comportamento fisicamente não-linear. O histórico de resposta de sistemas com múltiplos graus de liberdade é obtido utilizando-se a técnica da superposição modal clássica, com os termos responsáveis pelo acoplamento modal, quer provenientes da matriz modal de amortecimento, quer da matriz modal de rigidez, transferidos para o lado direito do sistema de equações e tratados como pseudo-forças. As equações de movimento são solucionadas por uma formulação matricial das transformadas discretas de Fourier, apresentadas sob forma compacta e elegante, denominada de *transformada implícita de Fourier*. Uma importante contribuição é dada pela presente pesquisa, pelo correto tratamento das condições iniciais, essenciais para a análise não-linear, passo-a-passo. Exemplos numéricos validam a formulação proposta.

Abstract of the Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

NON-LINEAR DYNAMIC ANALYSIS OF STRUCTURAL SYSTEMS WITH NON-PROPORTIONAL DAMPING IN THE FREQUENCY DOMAIN

Walnório Graça Ferreira

February, 1998

Advisors: Webe João Mansur
Fernando Venâncio Filho
Antonio Maria Claret de Gouvêia

Department: Civil Engineering

This work presents a frequency domain formulation developed with the aim of solving single or multiple degrees-of-freedom dynamic equilibrium equations which takes into account non-proportional viscous damping, hysteretic or frequency dependent damping and non-linear material behavior. Time history response for multi-degree-of-freedom systems is obtained by the classical mode superposition technique, with the coefficients related to the modal coupling of the modal damping and modal stiffness matrices transferred to the right-hand-side of the system of equations and treated as pseudo-forces. Movement equations are solved by a matrix formulation of the discrete Fourier transform, presented in a compact and elegant fashion known as *implicit Fourier transform* (*ImFT*). The correct treatment of the initial conditions contributions, essential for a step-by-step non-linear analysis is an important contribution of this research work. Numerical examples validate the proposed formulation.

ÍNDICE

1.	**INTRODUÇÃO**	**1**
	1.1. Objetivos	1
	1.2. Histórico Geral	2
	1.3. Conteúdo	7
2.	**ANÁLISE DINÂMICA LINEAR DE SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE**	**9**
	2.1. Introdução	9
	2.2. Resposta Dinâmica para Sistemas Lineares com um Grau de Liberdade	11
	2.3. Propriedades das Matrizes Discretas de Fourier	16
	2.4. Consideração do Amortecimento Histerético	20
3.	**ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR DE SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE**	**22**
	3.1. Introdução	22
	3.2. Tratamento das Condições Iniciais	23
	3.3. Resposta para Sistema Não-Linear com um Grau de Liberdade	25
	3.4. Critério de Convergência	33
4.	**ANÁLISE DE SISTEMAS LINEARES COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE DOTADOS DE AMORTECIMENTO PROPORCIONAL**	**35**
	4.1. Introdução	35
	4.2. Construção da Matriz de Amortecimento Proporcional	36
	4.3. Cálculo da Resposta	45

5. ANÁLISE DE SISTEMAS NÃO-LINEARES COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE DOTADOS DE AMORTECIMENTO NÃO-PROPORCIONAL **50**

5.1. Introdução 50

5.2. Sistema Não-Linear com Múltiplos Graus de Liberdade com Amortecimento Proporcional 51

5.3. Construção da Matriz de Amortecimento Não-Proporcional 56

5.4. Algumas Considerações sobre Soluções de Sistemas com Amortecimento Proporcional 58

5.5. Sistemas Lineares com Múltiplos Graus de Liberdade Dotados de Amortecimento Não-Proporcional 66

5.6. Sistemas Não-Lineares com Múltiplos Graus de Liberdade Dotados de Amortecimento Não-Proporcional 69

5.7. Critério de Convergência 70

6. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO **71**

6.1. Introdução 71

6.2. Exemplo 1 72

6.3. Exemplo 2 75

6.4. Exemplo 3 79

6.5. Exemplo 4 81

6.6. Exemplo 5 83

7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES **86**

7.1. Conclusões 86

7.2. Sugestões 88

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS **90**

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

1.1. OBJETIVOS

O objetivo desta pesquisa é apresentar uma formulação no domínio da freqüência para viabilizar a solução das equações de equilíbrio dinâmico de sistemas com um ou múltiplos graus de liberdade, dotados de amortecimento viscoso, histerético ou dependente da freqüência, possuindo comportamento fisicamente não linear. Com esse enfoque, optou-se por solucionar as equações de movimento com o uso das transformadas discretas de Fourier, apresentando-as sob uma compacta formulação matricial, como elaborada por VENANCIO-FILHO e CLARET (1992), na qual em uma única matriz são realizadas todas as operações intermediárias da série de Fourier, sendo em virtude disso chamada de *transformada implícita de Fourier.*

O histórico de resposta de sistemas com múltiplos graus de liberdade é obtido, para sistemas não lineares e dotados de modelo não proporcional de amortecimento, utilizando-se a técnica da superposição modal, em segmentos de tempo, com os termos responsáveis pelo acoplamento modal tratados como pseudo-forças, com solução obtida por iteração. O método da superposição modal apresenta a propriedade de permitir o truncamento modal, podendo reduzir ainda mais o esforço computacional.

Uma importante contribuição dada pela presente pesquisa consiste no correto tratamento das condições iniciais, essencial para análise não linear, onde o histórico é apresentado segmento-a-segmento, marchando-se até o tempo desejado. A resposta devido ao deslocamento inicial, v_0, é obtida adicionando-se a este deslocamento a resposta à força elástica, aplicada negativamente, correspondente ao estado de deformação estática devido a v_0. A resposta à velocidade inicial é a resposta ao impulso associado a $m\dot{v}_0$, obtida da função de resposta a um impulso unitário. Este conceito é facilmente estendido para o caso de sistemas com múltiplos graus de liberdade.

1.2. HISTÓRICO GERAL

Os procedimentos que são utilizados em análise dinâmica para obter a solução das equações diferenciais de movimento podem ser elaborados no domínio do tempo ou no domínio da freqüência.

A análise no domínio da freqüência tornou-se de uso corrente somente após o surgimento do algoritmo da *FFT* (*Fast Fourier Transform*), desenvolvido por COOLEY e TUKEY (1965), pois reduziu substancialmente o esforço computacional na avaliação da *DFT* (*Discret Fourier Transform*), tornando-a competitiva com os métodos do domínio do tempo. Desde essa época, os métodos do domínio da freqüência vêm recebendo importantes contribuições na busca de sua eficiência. CLOUGH e PENZIEN (1975), em sua primeira edição de excelente texto em dinâmica estrutural, apresentaram alguns elementos de análise estrutural no domínio da freqüência. Em sua mais recente edição (CLOUGH e PENZIEN, 1993) há um tratamento mais detalhado de análise no domínio da freqüência. VENANCIO-FILHO e CLARET (1992) apresentaram

uma formulação matricial de análise dinâmica para sistemas de um grau de liberdade que pode ser alternativa ao uso do algoritmo da *FFT* e uma formulação para sistemas com vários graus de liberdade (VENANCIO-FILHO e CLARET, 1995). HALL (1982) propõe modificar a exigência clássica da *FFT*, de um número de termos de Fourier igual a potência de dois, para um número de termos igual a potência inteira de dois multiplicada por dois ou três.

Tradicionalmente, a análise dinâmica de sistemas não lineares sempre foi feita no domínio do tempo, através de um processo passo-a-passo, em que a equação de movimento em cada passo é resolvida ou usando diferenças finitas ou integração numérica (métodos da família *Newmark-Beta*). Entretanto, para garantir a estabilidade numérica e a precisão da solução, o intervalo de tempo Δt adotado deve ser muito pequeno, mais precisamente, deve ser selecionado um valor Δt cuja ordem de grandeza seja menor do que T_i /10, onde T_i é o menor período a ser incluído na análise (BATHE, 1982).

Os processos passo-a-passo de integração numérica no tempo são bastante gerais, podendo ser aplicados para qualquer tipo de não-linearidade, tais como: mudança na massa, nas propriedades de amortecimento e nas de rigidez. Porém, para sistemas complexos, como é o caso de sistemas de interação solo-estrutura e fluido-estrutura, nos quais as forças de interação são dependentes da freqüência e, consequentemente, as propriedades desses sistemas também o são, ou em estruturas modeladas com amortecimento histerético, a análise no domínio da freqüência é a mais indicada. Além do mais, devido à estabilidade da transformada discreta de Fourier, a análise no domínio da freqüência pode ser feita com intervalos de tempo maiores do que aqueles adotados

pelos processos de integração no tempo. Embora os métodos no domínio da freqüência sejam baseados em superposição e, portanto, sejam essencialmente lineares, eles podem ser aplicados em análise não linear através de apropriada técnica de linearização.

Por outro lado, em estruturas construídas com mais de um tipo de material, tal heterogeneidade proporciona diferenças drásticas nos mecanismos de perda de energia em várias partes da estrutura, resultando em amortecimento não-proporcional. Nesse caso, a matriz de amortecimento não é ortogonal à matriz modal oriunda de vibração livre não amortecida, consequentemente a matriz modal de amortecimento é cheia e o sistema de equações modais de movimento não é desacoplável com o emprego de transformação modal. Não-linearidade física também pode ocorrer. No caso de interação solo-estrutura, ela decorre de altos níveis de deformação no solo.

Métodos computacionalmente eficientes para a integração das equações de equilíbrio dinâmico de sistemas estruturais com vários graus de liberdade, considerando amortecimento não-proporcional, dependente da freqüência e não-linearidade física, constituem um dos domínios que justificam intensas pequisas na moderna engenharia estrutural.

Nos últimos anos diversos métodos foram propostos para a análise no domínio da freqüência. Para sistemas estruturais dotados de amortecimento não proporcional HURTY e RUBINSTEIN (1964), VELETSOS e VENTURA (1976), SINGH e GHAFORY-ASHTIANY (1986), BORINO e MUSCOLINO (1986), CHEN e TAYLOR (1987) e BARBAT e CANET (1994) preconizam o emprego de modos complexos na análise de estruturas com essas características, variando apenas, entre eles,

a técnica de extração modal e sua superposição para encontrar a resposta. SINGH e GHAFORY-ASHTIANY (1986) desenvolveram um algoritmo em que se utiliza álgebra real para o cálculo da resposta. CHEN e TAYLOR (1987) e MAU (1988) usam o método de iteração por subespaço para solução do problema de autovalor complexo. Conceitualmente o método de superposição modal com modos complexos é idêntico ao clássico método da superposição modal, contudo, envolve um esforço computacional significativamente maior, visto que o problema de autovalor complexo é de ordem de *2Nx2N* para um sistema estrutural com *N* graus de liberdade. CLOUGH e PENZIEN (1993) propõem um interessante procedimento de interpolação, no domínio da freqüência, para achar a resposta de sistemas com amortecimento não proporcional. Este procedimento foi implementado, com sucesso, por FERREIRA *et al.* (1996).

Existem outras técnicas para a análise de sistemas com amortecimento não proporcional. ROESSET *et al.* (1973) propõem a aplicação do clássico método da superposição modal aos sistemas solo-estrutura, introduzindo um coeficiente de amortecimento viscoso ponderado equivalente. WARBURTON e SONI (1977) avaliam a influência na precisão da resposta, quando se desprezam os termos de fora da diagonal da matriz de amortecimento modal.

Os sistemas estruturais que abrangem a interação solo-estrutura que podem possuir propriedades dependentes da freqüência, amortecimento histerético e comportamento fisicamente não linear vem despertando o interesse de muitos pesquisadores (VELETSOS e WEI, 1971; SARRAZIN e ROESSET, 1972; ROESSET *et al.*, 1973; VELETSOS e MEEK, 1974; NOVAK, 1974 e BIELAK, 1975). KOBORI *et al.* (1984), em sua análise, considerando as propriedades do sistema dependentes da

freqüência, estudam o levantamento de fundações por um método em que as forças de levantamento são corrigidas no domínio do tempo e as equações de movimento são integradas no domínio da freqüência. HILLMER e SCHMID (1988) sugerem o uso de transformadas de Laplace na análise no domínio da freqüência, objetivando o tratamento das condições de contorno e a introdução de distribuições contínuas de massa.

Outro procedimento que vem recebendo atenção dos pequisadores para a análise de sistemas estruturais com amortecimento não-proporcional e não-linearidade física é aquele que utiliza o conceito de pseudo-forças. Esse procedimento utiliza o clássico método da superposição modal, baseando-se na idéia de que toda contribuição responsável pelo acoplamento modal deve ser movida para o lado direito do sistema de equações modais de movimento, sendo conseqüentemente tratada como pseudo-força, ficando o lado esquerdo desacoplado. Nessa linha de pesquisa estão os trabalhos de KAWAMOTO (1983), LING e WU (1987), CAMERON e GRIFFIN (1989), CLARET (1991), VENANCIO-FILHO e CLARET (1996) e IBRAHINBEGOVIC e WILSON (1988). APRILE *et al.* (1994) estenderam o método de Kawamoto com a consideração de amortecimento histerético e não-proporcional, denominando-o de método de alternância tempo-freqüência generalizado ou *G-AFT* (Generalized-Alternating Frequency/Time method). Para análise não-linear e amortecimento não-proporcional CHANG *et al.* (1989) utilizam superposição modal com modos complexos e tratamento de não linearidade por processo de pseudo-forças.

1.3. CONTEÚDO

Este texto foi organizado em duas partes. A primeira parte abrange os capítulos 2 e 3, englobando a análise de sistemas estruturais que podem ser modelados com um grau de liberdade.

No segundo capítulo descrevem-se os procedimentos para encontrar a solução da equação de movimento com o uso das transformadas discretas de Fourier expressas segundo uma compacta e elegante formulação matricial. Este procedimento recebeu o nome de *transformada implícita de Fourier* (em inglês, Implicit Fourier Transform, ou *ImFT*). Visando a economia de esforço computacional tira-se proveito das propriedades dos termos de Fourier, finalizando-se com a consideração do amortecimento histerético.

O capítulo 3 é dedicado à solução de sistemas não-lineares constituídos de materiais com comportamento físico bilinear, com o intuito de facilitar a explanação do método, sem prejuízo da generalidade. A solução é obtida utilizando-se a técnica das pseudo-forças, segundo a qual deve-se transferir para o lado direito da equação de movimento o termo não-linear, que é tratado como pseudo-força. Um processo iterativo é necessário para se chegar à solução conforme determinado critério de convergência.

Na segunda parte estão incluídos os capítulos 4 e 5, enfocando a análise de sistemas estruturais com múltiplos graus de liberdade. Como se adotou a técnica da superposição modal, a solução da primeira parte é integralmente aproveitada. Dedica-se o capítulo 4 à solução de sistemas lineares com amortecimento proporcional, apresentando técnicas de construção de matrizes de amortecimento proporcional.

O capítulo 5 é voltado para a solução de sistemas estruturais complexos onde se admitem não-linearidades físicas e propriedades distintas de amortecimento, resultando em amortecimento não-proporcional. Por questões didáticas, apresenta-se sequencialmente a solução dos seguintes sistemas: sistemas não-lineares com amortecimento proporcional, sistemas lineares com amortecimento não-proporcional e sistemas não-lineares com amortecimento não-proporcional. Como no caso dos sistemas com um grau de liberdade, utilizou-se o conceito de pseudo-forças para a solução do sistema de equações dinâmicas.

Após as transformações modais, os termos responsáveis pelo acoplamento tanto da matriz modal de rigidez quanto da matriz modal de amortecimento são transferidos para o lado direito do sistema de equações e tratados como pseudo-forças. À esquerda o sistema é desacoplado, sendo a solução encontrada por superposição modal, acompanhada de processo iterativo, devido ao acoplamento das pseudo-forças, obedecendo prévio critério de convergência. Neste capítulo inclui-se uma explanação sobre a construção de matrizes de amortecimento não-proporcional, complementada com considerações sobre técnicas de solução para sistemas estruturais possuindo essas características.

No capítulo 6 são apresentados vários exemplos numéricos com a utilização da formulação proposta, englobando sistemas com um ou vários graus de liberdade, com amortecimento viscoso, histerético, dependente da freqüência, não proporcional ou com comportamento fisicamente não linear. O capítulo 7 se refere às conclusões e sugestões.

CAPÍTULO

2

ANÁLISE DINÂMICA LINEAR DE SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE

2.1. INTRODUÇÃO

Os procedimentos para encontrar a resposta, no campo da análise dinâmica, podem ser formulados no domínio do tempo ou no domínio da freqüência. Um procedimento usado no domínio do tempo é considerar a carga como uma sucessão de impulsos de curta duração. A resposta da vibração livre correspondente a cada impulso torna-se uma separada contribuição para a resposta total, em qualquer tempo subsequente (integral de Duhamel). Um segundo procedimento muito usado é a integração direta da equação de movimento, baseado em algoritmos de integração numérica. De outra maneira, os métodos formulados no domínio da freqüência são baseados na resposta do sistema a excitação harmônica e são implementados pela técnica da transformada de Fourier (em inglês, Fourier transform, ou simplesmente *FT*).

Os métodos baseados no domínio do tempo são bastante conhecidos e têm sido amplamente usados. Por outro lado, os métodos baseados no domínio da freqüência tornaram-se competitivos, em relação àqueles baseados no domínio do tempo, desde o aparecimento do algoritmo da transformada rápida de Fourier (em inglês, fast Fourier transform, ou simplesmente *FFT*) para a avaliação da transformada discreta de Fourier

(discrete Fourier transform, *DFT*). Ademais, quando o sistema estrutural é dotado de amortecimento histerético ou possui propriedades dependentes da freqüência, a análise no domínio da freqüência é a mais indicada.

A redução do esforço computacional para a determinação dos termos da série de Fourier com o uso da *FFT*, em relação àquele correspondente ao uso da *DFT*, é significativo, quando o período de duração da análise é dividido em um grande número de intervalos. Por exemplo, quando este número é 1024, o tempo computacional requerido pela *FFT* para a obtenção de todos os valores requeridos pela transformada é da ordem de 0,5 % daquele requerido para obter os mesmos valores com o uso da *DFT*.

Neste capítulo é apresentada uma formulação para a análise no domínio da freqüência onde o número de termos requeridos para a resposta é escolhido arbitrariamente, sendo a escolha desse número desvinculada do número N de termos da transformada discreta de Fourier. A única condição para N é que seja múltiplo de 4, condição que incorpora interessantes propriedades dos termos de Fourier, reduzindo enormemente o esforço computacional. Outra importante característica dessa formulação está no fato de as transformadas discretas de Fourier serem executadas implicitamente, no mesmo procedimento que conduz à resposta no domínio do tempo.

2.2. RESPOSTA DINÂMICA PARA SISTEMAS LINEARES COM UM GRAU DE LIBERDADE

Considere um sistema com um grau de liberdade com massa m, rigidez k e amortecimento viscoso c, submetido a uma carga $p(t)$. A equação de equilíbrio dinâmico é

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = p(t) \tag{2.1}$$

onde $v(t)$, $\dot{v}(t)$ e $\ddot{v}(t)$ são respectivamente, deslocamento, velocidade e aceleração da massa.

Aplicando-se a transformada de Fourier na Eq. (2.1) resulta, para condições iniciais nulas:

$$\left[-\bar{\omega}^2 m + k + i\bar{\omega}c\right]V(i\bar{\omega}) = P(i\bar{\omega}) \tag{2.2}$$

onde $V(i\bar{\omega})$ e $P(i\bar{\omega})$ são as transformadas de Fourier de $v(t)$ e $p(t)$, respectivamente, ou

$$V(i\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)e^{-i\bar{\omega}t}dt \tag{2.3}$$

$$P(i\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)e^{-i\bar{\omega}t}dt \tag{2.4}$$

Portanto, $v(t)$ e $V(i\bar{\omega})$ formam o par de transformadas de Fourier correspondente aos deslocamentos e $p(t)$ e $P(i\bar{\omega})$ formam o par de transformadas de Fourier correspondente ao carregamento.

A resposta no domínio da frequência é obtida da Eq. (2.2), ou

$$V(i\bar{\omega}) = \frac{P(i\bar{\omega})}{-\bar{\omega}^2 m + k + i\bar{\omega}c} \tag{2.5}$$

A Eq. (2.5) também pode ser colocada na seguinte forma:

$$V(i\bar{\omega}) = H(i\bar{\omega})P(i\bar{\omega}) \tag{2.6}$$

onde

$$H(i\bar{\omega}) = \frac{1}{-\bar{\omega}^2 m + k + i\bar{\omega}c} = \frac{1}{-\bar{\omega}^2 m + k(1 + i2\beta\xi)} \tag{2.7}$$

sendo $H(i\bar{\omega})$ a função complexa de resposta em freqüência, ξ é a taxa de amortecimento, e $\beta = \bar{\omega}/\omega$, sendo ω a freqüência natural de excitação.

A resposta no domínio do tempo será imediatamente obtida da transformada inversa de $V(i\bar{\omega})$, ou

$$v(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} V(i\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t}d\bar{\omega} \tag{2.8}$$

Quando $p(t)$ é conhecido em valores discretos de t, igualmente espaçados, ou seja, quando são conhecidos $p(t_n)$, para n=0,1,2,...,N-1, $P(i\bar{\omega})$ poderá ser avaliado, numericamente, através da expressão

$$P(i\bar{\omega}_n) = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} p(t_j) e^{-\left(i\frac{2\pi}{N}\right)nj} \tag{2.9}$$

fornecendo $P(i\bar{\omega}_n)$, para n=0,1,2,...,N-1, com $\bar{\omega}_n$ igualmente espaçado no espectro de freqüência. A Eq. (2.9) é a transformada discreta de Fourier de $p(t)$. Para cada $P(i\bar{\omega}_n)$

encontra-se $V(i\overline{\omega}_n)=H(i\overline{\omega}_n)P(i\overline{\omega}_n)$. A resposta no domínio do tempo poderá então ser avaliada pela expressão:

$$v(t_n)=\frac{\Delta\overline{\omega}}{2\pi}\sum_{j=0}^{N-1}H(i\overline{\omega}_j)P(i\overline{\omega}_j)e^{\left(i\frac{2\pi}{N}\right)nj} \tag{2.10}$$

A Eq. (2.10) é a transformada inversa discreta de Fourier de $V(i\overline{\omega})$.

Seja

$$\mathbf{p}=\{p(t_0),p(t_1),p(t_2),\ \ldots\ ,p(t_{N-1})\} \tag{2.11}$$

e

$$\mathbf{v}=\{v(t_0),v(t_1),v(t_2),\ \ldots\ ,v(t_{N-1})\} \tag{2.12}$$

os vetores de carga e de resposta nos tempos discretos

$$t_n=n\Delta t\ \ (n=0,1,2,\ \ldots\ ,N-1) \tag{2.13}$$

onde $\Delta t=T_p/N$ é o intervalo de tempo no qual T_p é igualmente dividido. E seja

$$\mathbf{P}=\{P(i\overline{\omega}_0),P(i\overline{\omega}_1),P(i\overline{\omega}_2),\ \ldots\ ,P(i\overline{\omega}_{N-1})\} \tag{2.14}$$

o vetor de transformadas discretas de Fourier da carga nas frequências discretas.

Com a definição das Eqs. (2.11) e (2.14) a Eq. (2.9) pode ser disposta na seguinte forma matricial

$$\mathbf{P}=\Delta t\mathbf{E}^{*}\mathbf{p} \tag{2.15}$$

onde $\boldsymbol{E}^*$ é uma matriz, (*NxN*), com elemento genérico dado como se segue

$$E^*_{nj} = e^{-\left(i\frac{2\pi}{N}\right)nj} \tag{2.16}$$

ou, explicitamente

$$\mathbf{E}^* = \begin{bmatrix} e^0 & e^0 & e^0 & \cdots & e^0 & \cdots & e^0 \\ & e^{-(i2\pi/N)} & e^{-2(i2\pi/N)} & \cdots & e^{-j(i2\pi/N)} & \cdots & e^{-(N-1)(i2\pi/N)} \\ & & e^{-4(i2\pi/N)} & \cdots & e^{-2j(i2\pi/N)} & \cdots & e^{-2(N-1)(i2\pi/N)} \\ & & & & \vdots & & \\ & & \text{Simétrico} & & e^{-nj(i2\pi/N)} & & e^{-n(N-1)(i2\pi/N)} \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & e^{-(N-1)^2(i2\pi/N)} \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

Pelo mesmo motivo a resposta (Eq. (2.10)) será escrita na seguinte forma matricial:

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta\overline{\omega}}{2\pi}\mathbf{EHP} \tag{2.18}$$

onde $\boldsymbol{E}$ é uma matriz (*NxN*), com elementos genéricos dados como se segue:

$$E_{nj} = e^{\left(i\frac{2\pi}{N}\right)nj} \tag{2.19}$$

$\boldsymbol{H}$ é uma matriz diagonal cujos elementos são a função complexa de resposta em freqüência, para as freqüências discretas do espectro de freqüências, ou

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_0 & & & \mathbf{0} \\ & H_1 & & \\ & & \cdots & \\ \mathbf{0} & & & H_{N-1} \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

sendo

$$H_n = H(i\bar{\omega}_n) = \frac{1}{-\bar{\omega}_n^2 m + k + i\bar{\omega}_n c} = \frac{1}{k}\,\frac{1}{(1-\beta_n^2) + i(2\xi\beta_n)} \tag{2.21}$$

onde $\beta_n = {}^{\bar{\omega}_n}/_{\omega}$, $\bar{\omega}_n = \mu\Delta\bar{\omega}$ e $\Delta\bar{\omega} = {}^{2\pi}/_{T_p}$, sendo μ dado pela Tabela 2.1.

Tanto ***E*** quanto ***H*** são calculados de acordo com as freqüências discretas mostradas na tabela abaixo

Tabela 2.1. Freqüências discretas

n	μ	$\bar{\omega}_n$
0	0	0
1	1	$\Delta\bar{\omega}$
2	2	$2\Delta\bar{\omega}$
...	...	
N/2	N/2	$(N/2)\Delta\bar{\omega}$
...		...
N-2	-2	$-2\Delta\bar{\omega}$
N-1	-1	$-\Delta\bar{\omega}$

Substituindo-se agora ***P*** da Eq. (2.15) na Eq. (2.18) e considerando que ${}^{\Delta\bar{\omega}\Delta t}/_{2\pi} = {}^{1}/_{N}$, a seguinte equação é obtida

$$\mathbf{v} = \frac{1}{N}\mathbf{E}\mathbf{H}\mathbf{E}^{*}\mathbf{p} \tag{2.22}$$

Na Eq. (2.22) estão incluídos, a transformada de Fourier do carregamento, seu produto pela função complexa de resposta em freqüência e a transformada inversa desse produto, para a obtenção da resposta no domínio do tempo.

2.3. PROPRIEDADES DAS MATRIZES DISCRETAS DE FOURIER

Tendo em conta que o espectro de frequência é definido como mostrado na Tabela 2.1, podem ser obtidas as seguintes propriedades para as matrizes da Eq. (2.22), quais sejam:

$$1^{\underline{o}}) \quad E_{n(N-k)} = \text{conjg}\left(E_{nk}\right) \tag{2.23}$$

$$2^{\underline{o}}) \quad E_{nj} = \text{conjg}\left(E^{*}_{jn}\right) \tag{2.24}$$

$$3^{\underline{o}}) \quad H_{(N-n)} = \text{conjg}\left(H_{n}\right) \tag{2.25}$$

Devido a estas características, um termo genérico do triplo produto matricial da Eq. (2.22) será dado por

$$\left\{\mathbf{EHE}^{*}\right\}_{mn} = \frac{1}{k}\left\{1 + E_{m1}H_{1}E^{*}_{1n} + E_{m2}H_{2}E^{*}_{2n} + \ldots + E_{mN/2}H_{N/2}E^{*}_{N/2n} + \right. \\ \left. + \overline{E}_{m2}\overline{H}_{2}\overline{E}^{*}_{2n} + \overline{E}_{m1}\overline{H}_{1}\overline{E}^{*}_{1m}\right\} \tag{2.26}$$

onde a barra superior representa o complexo conjugado. Este elemento possui um termo real $\left(1/k\right)$, um termo central imaginário e $\left(N/2-1\right)$ termos de pares conjugados, quando N é par. O resultado será um número complexo, cujo termo complexo é proveniente da parte imaginária do termo $\frac{1}{k}\left(E_{mN/2}H_{N/2}E^{*}_{N/2n}\right)$. Como a resposta deve ser real, este

termo deve ser desprezado. Conforme demonstrou CLARET (1991), isto não afeta a precisão da resposta.

Além disso, quando se adota um número N par, múltiplo de 4, surge mais uma propriedade ($4^{\underline{a}}$ propriedade) na geração de $\boldsymbol{E}$, que é:

$$4^{\underline{o}}) \quad E_{j(N/2-k)} = (-1)^j \, \mathrm{conjg}\left(E_{jk}\right) \tag{2.27}$$

Considerando as propriedades acima e levando-se em conta que se deseja calcular somente S termos da resposta, conclui-se que será preciso gerar somente S linhas e $N/4$ colunas da matriz $\boldsymbol{E}$, reduzindo substancialmente o esforço computacional.

De maneira compacta a Eq. (2.22) pode ser apresentada sob a forma:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{N} \mathbf{e}\,\mathbf{p} \tag{2.28}$$

onde

$$\mathbf{e} = \mathbf{E}\mathbf{H}\mathbf{E}^{*} \tag{2.29}$$

sendo $\boldsymbol{E}$ de ordem (SxN), $\boldsymbol{H}$ de (NxN), $\boldsymbol{E}^{*}$ de (NxS), $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{v}$ de $(Sx1)$. Consequentemente $\boldsymbol{e}$ é de ordem (SxS). Pela Eq. (2.28), o vetor de cargas é transformado diretamente na resposta no domínio do tempo. Todas as operações intermediárias são realizadas na matriz $\boldsymbol{e}$. Devido a esta característica esta matriz é chamada de *matriz transformada implícita de Fourier* (ou, em inglês, *implicit Fourier transform matrix*, ou, simplesmente, *ImFT matrix*), sendo a Eq. (2.28) chamada de *transformada implícita de*

Fourier (ou, em inglês, *ImFT*). Na Eq. (2.28) deve ser respeitada a *causalidade*, isto é, um valor discreto de $p(t_j)$ não contribui para um valor discreto $v(t_i)$, quando $j > i$.

A matriz **e** apresenta também a seguinte propriedade (5ª propriedade):

$$5^{a}) \quad e_{n+1,j+1} = e_{nj} \tag{2.30}$$

Através desta propriedade, conhecendo-se somente a 1ª linha e a 1ª coluna de ***e***, todos os outros elementos ficam determinados, como mostra o exemplo abaixo, correspondente a uma matriz ***e*** de ordem 6x6:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} \\ e_{31} & e_{21} & e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{41} & e_{31} & e_{21} & e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{51} & e_{41} & e_{31} & e_{21} & e_{11} & e_{12} \\ e_{61} & e_{51} & e_{41} & e_{31} & e_{21} & e_{11} \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

Deste modo, somente (*2S-1*) elementos de **e** precisam ser gerados.

Para o cálculo dos elementos de ***E*** se poderá utilizar também a propriedade (6ª propriedade) abaixo:

$$6^{a}) \quad e^{inj\left(2\pi/N\right)} = e^{i\,\mathrm{mod}(nj,N)\left(2\pi/N\right)} \tag{2.32}$$

sendo mod(*nj*,*N*) o resto da divisão de *nj* por *N*. Com o uso desta propriedade, uma matriz ***E*** de ordem (*NxS*) será armazenada em um vetor com *N* elementos. O exemplo a seguir esclarecerá melhor.

Seja a matriz **E** de ordem (*8x8*), a seguir

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 & w^8 & w^{10} & w^{12} & w^{14} \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 & w^{12} & w^{15} & w^{18} & w^{21} \\ 1 & w^4 & w^8 & w^{12} & w^{16} & w^{20} & w^{24} & w^{28} \\ 1 & w^5 & w^{10} & w^{15} & w^{20} & w^{25} & w^{30} & w^{35} \\ 1 & w^6 & w^{12} & w^{18} & w^{24} & w^{30} & w^{36} & w^{42} \\ 1 & w^7 & w^{14} & w^{21} & w^{28} & w^{35} & w^{42} & w^{49} \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

onde $w=e^{i2\pi/N}$. Através da propriedade representada pela Eq. (2.32) a matriz acima valerá agora

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 & 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w & w^4 & w^7 & w^2 & w^5 \\ 1 & w^4 & 1 & w^4 & 1 & w^4 & 1 & w^4 \\ 1 & w^5 & w^2 & w^7 & w^4 & w & w^6 & w^3 \\ 1 & w^6 & w^4 & w^2 & 1 & w^6 & w^4 & w^2 \\ 1 & w^7 & w^6 & w^5 & w^4 & w^3 & w^2 & w \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

Assim, somente os termos da 2ª linha de ***E*** precisam ser armazenados. Os outros são calculados em função desses, de acordo com sua posição na matriz ***E***. Para a matriz $\boldsymbol{E}^*$ a propriedade (7ª propriedade) é similar, sendo agora definida da seguinte forma:

$$7\overset{a}{)}e^{-inj(2\pi/N)} = e^{i[N-\mathrm{mod}(nj,N)](2\pi/N)} \tag{2.35}$$

2.4. CONSIDERAÇÃO DO AMORTECIMENTO HISTERÉTICO

Toda a formulação apresentada até aqui utilizou o modelo viscoso de amortecimento. Ele é correntemente adotado porque leva a uma solução conveniente da Eq. (2.1). Porém, para movimentos harmônicos, conduz a uma expressão de perda de energia dependente da frequência de excitação, o que contraria evidências experimentais. É desejável, portanto, adotar um modelo de amortecimento para o qual não haja esta dependência. Isto pode ser conseguido adotando-se uma força de amortecimento que seja proporcional à força elástica e em fase com a velocidade, que para um sistema com um grau de liberdade, em movimento harmônico, resulta na expressão:

$$f_d = i\zeta kv(t) \tag{2.36}$$

onde i é a unidade complexa e ζ é um fator de amortecimento. Este tipo de amortecimento é denominado de *amortecimento histerético*. Para garantir que a perda de energia, por ciclo, seja independente da freqüência de excitação $\overline{\omega}$, de uma fixada amplitude de excitação harmônica, deve-se adotar

$$\zeta = 2\xi \tag{2.37}$$

onde ξ é a taxa de amortecimento, conforme mencionado anteriormente (Eq. 2.7). É oportuno frisar que é mais adequado expressar a força de amortecimento histerético no domínio da freqüência. De fato, como se partiu da premissa de movimento harmônico, pode-se afirmar que

$$f_d(t) = F_d(\bar{\omega})e^{i\omega t} \tag{2.38}$$

e

$$v(t) = V(\bar{\omega})e^{i\omega t} \tag{2.39}$$

Assim, após simplificação, a Eq. (2.36) assume a forma

$$F_d(\bar{\omega}) = i\zeta k V(\bar{\omega}) \tag{2.40}$$

que é a maneira correta de se definir a força de amortecimento, quando se adota o modelo de amortecimento histerético. E, ao contrário do caso de modelo viscoso, a equação de equilíbrio dinâmico deve ser expressa apenas no domínio da freqüência, ou seja

$$\left[\left(k - \bar{\omega}^2 m\right) + i\zeta k\right]V(\bar{\omega}) = P(\bar{\omega}) \tag{2.41}$$

onde $V(\bar{\omega})$ e $P(\bar{\omega})$ são variáveis complexas. Quando a carga é geral, transiente, $V(\bar{\omega})$ e $P(\bar{\omega})$ serão expressas pelas Eqs. (2.3) e (2.4), respectivamente.

A solução da equação de movimento de um sistema massa-mola dotado de amortecimento histerético será dada pela Eq. (2.28), com a função complexa de resposta em freqüência, para as freqüências discretas, dada por:

$$H_n = H\left(i\bar{\omega}_n\right) = \frac{1}{-\bar{\omega}_n^2 m + k\left(1 + i\zeta\right)} \tag{2.42}$$

CAPÍTULO

3

ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR DE SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE

3.1. INTRODUÇÃO

No campo da análise dinâmica de sistemas fisicamente não lineares, diversas técnicas podem ser utilizadas para a obtenção da resposta. No domínio do tempo podem ser mencionados três métodos que encontram a solução das equações de movimento, marchando no tempo, através de procedimento passo-a-passo. Esses métodos são: *piecewise exact method*, métodos baseados em diferenças finitas e métodos de integração nos quais se enquadram os conhecidos métodos da família *Newmark-Beta*. Foge do escopo deste trabalho discorrer sobre os procedimentos específicos de cada um desses métodos. O que é importante comentar é que, embora sejam métodos bastante gerais, não são adequados para a análise de sistemas cujas propriedades estruturais sejam dependentes da freqüência ou quando o sistema é dotado de amortecimento histerético. Para esses sistemas é fortemente recomendável fazer a análise através de técnicas que encontrem a solução da equação de movimento no domínio da freqüência.

O procedimento apresentado neste capítulo resolve a equação diferencial de movimento no domínio da freqüência, executando a análise por segmentos de tempo, segundo um procedimento similar àquele passo-a-passo adotado correntemente na

família dos métodos baseados no domínio do tempo. A resposta em cada segmento é calculada das condições iniciais (deslocamento e velocidade) existentes no início do segmento e da história do carregamento no segmento.

Diferentemente dos procedimentos que fazem a análise no domínio do tempo, o tratamento das condições iniciais em uma análise no domínio da freqüência é mais elaborado. O histórico de resposta devido ao deslocamento inicial v_0, com o uso da transformada implícita de Fourier (*ImFT*) é obtido adicionando-se a v_0 a resposta a uma força constante $-f_0$. O histórico de resposta devido à velocidade inicial $\dot{v}_0$ é a resposta ao impulso associado a $m\dot{v}_0$, que é obtida da função de resposta a um impulso unitário.

A estratégia de solução da análise não-linear é transferir para o lado direito da equação de movimento a parcela da força correspondente à mudança de rigidez, a qual será tratada como pseudo-força atuando no sistema massa-mola. Como essa pseudo-força é função da resposta, deve ser usado um processo iterativo para encontrar a solução da equação de movimento. Esse procedimento é muito adequado quando se usa a *ImFT* pois, como o lado esquerdo da equação fica inalterado, a matriz e também permanece a mesma, alterando-se somente a carga externa p, com a adição da pseudo-força.

3.2. TRATAMENTO DAS CONDIÇÕES INICIAIS

Visando-se a execução de análise não linear por segmentação, onde o deslocamento e a velocidade no final de um segmento são as condições iniciais para o

segmento seguinte, apresentam-se a seguir os procedimentos para a sua consideração na formulação apresentada.

A resposta ao deslocamento inicial v_o pode ser obtida adicionando-se a v_o a resposta a uma força constante $-f_0$. Pela Eq. (2.28) ela será expressa como:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{N}\mathbf{e}\left(-\mathrm{f}_0\mathbf{1}\right) + \mathrm{v}_0\mathbf{1} \tag{3.1}$$

onde *1* é um vetor (*Sx1*), com *1* em todas as posições e f_0 é a força na mola correspondente a v_0. Se a análise for em regime elástico linear $f_0=k_0v_0$, caso contrário deverá ser calculado do diagrama carga *x* deslocamento. Este aspecto será esclarecido mais na frente.

A resposta à velocidade inicial $\dot{v}_0$ é a resposta ao impulso associado a $m\dot{v}_0$ que é obtida da função de resposta a um impulso unitário, isto é,

$$\mathrm{v}(\mathrm{t}) = \mathrm{m}\dot{\mathrm{v}}_0\mathrm{h}(\mathrm{t}) \tag{3.2}$$

onde *h(t)* é a função de resposta ao impulso unitário. Ela pode ser expressa como a transformada inversa da função complexa de resposta em freqüência $H(\overline{\omega})$, da seguinte forma

$$\mathrm{h}(\mathrm{t}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{H}(\overline{\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overline{\omega}\mathrm{t}}\mathrm{d}\overline{\omega} \tag{3.3}$$

Usando a transformada inversa discreta de Fourier para avaliar *h(t)* na Eq. (3.3), a resposta discreta à velocidade inicial será expressa como

$$v(t_n) = \frac{\Delta\overline{\omega}}{2\pi} m\dot{v}_0 \sum_{m=0}^{N-1} H(\overline{\omega}_m) e^{mn\left(i\frac{2\pi}{N}\right)} \tag{3.4}$$

que na forma matricial será apresentada como

$$\mathbf{v} = \frac{1}{N\Delta t} m\dot{v}_0 \mathbf{e}\delta \tag{3.5}$$

onde $\Delta\overline{\omega}/2\pi = 1/N\Delta t$ e δ é um vetor $(Sx1)$ com 1 na primeira posição e zero nas outras.

Finalmente, a resposta, incluindo as contribuições das condições iniciais será expressa como

$$\mathbf{v} = \frac{1}{N} \mathbf{e}\left(\mathbf{p} - f_0\mathbf{1} + \frac{m\dot{v}_0}{\Delta t}\delta\right) + v_0\mathbf{1} \tag{3.6}$$

3.3 RESPOSTA PARA SISTEMA NÃO-LINEAR COM UM GRAU DE LIBERDADE

Nesta seção serão apresentados os procedimentos para se encontrar a resposta de sistemas cuja relação carga-deslocamento (ou tensão-deformação) não seja linear. Para isso algumas simplificações foram adotadas. Uma simplificação foi a adoção de

diagramas bilineares para a definição da relação de não linearidade. Existem vários modelos para definir essa não linearidade, como ilustra a Fig. 3.1.

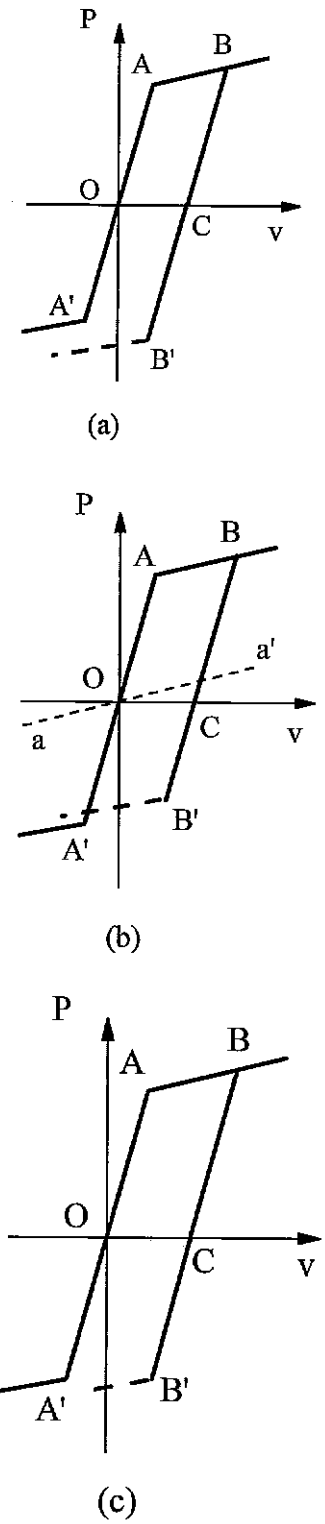


Fig. 3.1. Modelos de diagramas não lineares carga-deslocamento.

A Fig. 3.1a mostra o modelo de *endurecimento isotrópico*, em que o valor da força de tração na reversão do carregamento, em B, é igual ao valor absoluto da força final de compressão em B', isto é, $|BC|=|CB'|$. Também os valores correspondentes aos escoamentos convencionais iniciais são iguais, ou $|OA|=|OA'|$, com $|OA|<|BC|$.

O outro modelo, denominado de *endurecimento cinemático*, está mostrado na Fig 3.1b. Nele se adota a hipótese de que a variação total das deformações elásticas é sempre a mesma, ou seja, sempre se tem $|AA'|=|BB'|$. O centro da região elástica se move ao longo da reta a-a'.Como se vizualiza, após uma máxima tração, em B, ocorrerá, na reversão, uma máxima compressão em valor absoluto, inferior àquela tração máxima. Esse fenômeno é conhecido como *efeito Bauschinger.*

Finalmente, a Fig. 3.1c apresenta o modelo de *endurecimento independente.* Nesse modelo se admite que o endurecimento em tração é independente daquele em compressão; nesse caso, $|BC|>|OA|$, mas $|CB'|=|OA'|$. O material tem endurecimento somente em tração, comportando-se como um material virgem quando ocorre a reversão para esforço de compressão.

Embora não tenha sido usado para aplicações nesta pesquisa, para complementar registra-se aqui o clássico modelo *elasto-plástico perfeito*, ilustrado na Fig. 3.2. Neste modelo se despreza o endurecimento. A partir de A ocorre o escoamento, ou seja, há deformação sem aumento de carga.

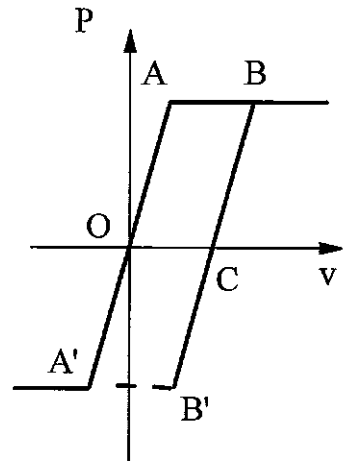


Fig. 3.2. Modelo elasto-plástico perfeito.

Neste caso, como no modelo de endurecimento cinemático, a variação total das deformações elásticas é sempre a mesma. O centro da região elástica se move ao longo da abscissa.

Considere um sistema com um grau de liberdade cuja relação carga-deslocamento segue a lei bilinear mostrada na Fig. 3.3.

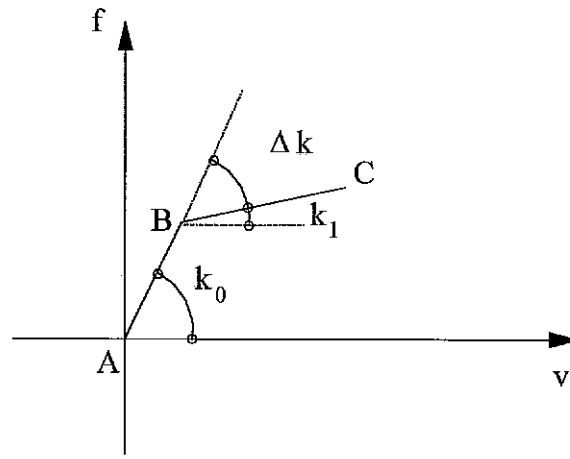


Fig. 3.3. Diagrama bilinear carga *x* deslocamento.

Considere a análise sendo efetuada em dois segmentos: A-B e B-C. Iniciando o processo, a análise é efetuada no segmento A-B, com condições iniciais nulas; assim, a equação de movimento é:

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + k_0 v = p \tag{3.7}$$

e a resposta será

$$\mathbf{v} = \frac{1}{N}\mathbf{e}\,\mathbf{p} \tag{3.8}$$

Para o segundo segmento, a equação de movimento é

$$m\ddot{v}_n + c\dot{v}_n + k_1 v_n = p_n \tag{3.9}$$

com condições iniciais iguais às condições finais do segmento A-B, sendo v_n e p_n, respectivamente, o deslocamento e a carga no segmento B-C, devidamente avaliados no tempo. Porém,

$$k_1 = k_0 - \Delta k \tag{3.10}$$

como se pode visualizar na Fig. 3.3. Assim, sustituindo a Eq. (3.10) na Eq.(3.9), resulta

$$m\ddot{v}_n + c\dot{v}_n + (k_0 - \Delta k)v_n = p_n \tag{3.11}$$

Contudo, se o termo não linear, correspondente à mudança de rigidez, for transferido para o lado direito, a equação de movimento torna-se

$$m\ddot{v}_n + c\dot{v}_n + k_0 v_n = p_n + \Delta k v_n \tag{3.12}$$

onde o lado esquerdo se refere ao sistema linear inicial e o termo $\Delta k v_n$, correspondente à mudança de rigidez, é tratado como pseudo-força no lado direito da Eq. (3.12). Nesse caso devem ser efetuadas iterações para obter o equilíbrio entre os dois lados da equação. Para a k-ésima iteração a equação de equilíbrio é expressa como

$$m\ddot{v}_n^{(k)} + c\dot{v}_n^{(k)} + k_0 v_n^{(k)} = p + \Delta k v_n^{(k-1)} \tag{3.13}$$

O histórico de resposta valerá

$$\mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{v}_n^{(k)} + v_0 \mathbf{1} \tag{3.14a}$$

onde

$$\mathbf{v}_n^{(k)} = \frac{1}{N}\,\mathbf{e}\left(\mathbf{p}_n - f_0\mathbf{1} + \frac{m\dot{v}_0}{\Delta t}\delta + \Delta k \mathbf{v}_n^{(k-1)}\right) \tag{3.14b}$$

sendo f_0 a força que resulta da análise estática quando a massa é submetida ao deslocamento v_0. Notar que para o cálculo de **e** usam-se as propriedades lineares iniciais do sistema massa-mola.

Na análise não-linear passo-a-passo há a necessidade de se avaliar o deslocamento e a velocidade no final de cada segmento. Estas variáveis serão usadas como condições iniciais para o próximo segmento de tempo, como indica a Eq. (3.14). Dessa forma se conduzirá a análise até o tempo desejado. A resposta, em termos de deslocamento, está expressa pela Eq. (3.8). Portanto, será necessário encontrar a expressão que fornecerá o valor da velocidade.

Para a análise linear, a velocidade pode ser facilmente avaliada da Eq. (2.28) idêntica à Eq. (3.8). Como a transformada discreta de Fourier é composta de termos harmônicos, a velocidade valerá

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{N}\dot{\mathbf{e}}\,\mathbf{p} \tag{3.15}$$

sendo

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{E}^{*}\dot{\mathbf{H}}\mathbf{E} \tag{3.16}$$

onde $\dot{H}$ é uma matriz diagonal cujos elementos valem

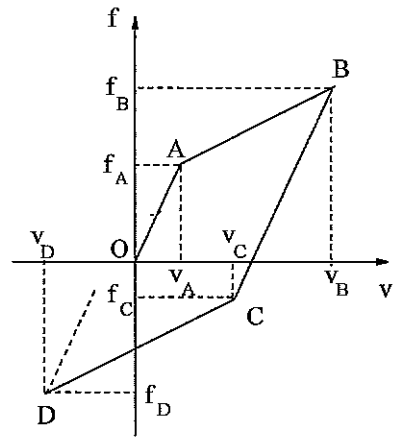
$$\dot{H}_n = \frac{i\bar{\omega}_n}{-\bar{\omega}_n^2 m + k + i\bar{\omega}_n c} \tag{3.17a}$$

ou

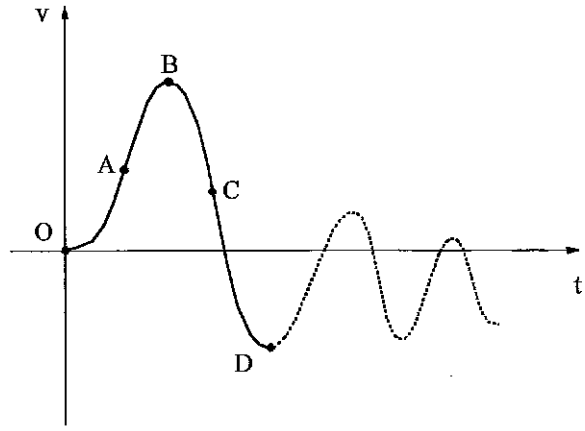
$$\dot{H}_n = \frac{i\bar{\omega}_n}{\left(k - \bar{\omega}_n^2 m\right) + i\zeta k} \tag{3.17b}$$

quando se adotam, respectivamente, modelos viscoso ou histerético de amortecimento.

Para esclarecer melhor, seja um sistema massa-mola, cuja mola possui comportamento bilinear, como mostrado na Fig. 3.4.



(a)



(b)

Fig. 3.4. Diagrama bilinear e resposta correspondente no tempo.

A análise é executada por segmentação conforme mostrado na Tabela 3.1.

Tabela 3.1. Seqüência da análise por segmentação.

Primeiro segmento	O-A
Segundo segmento	A-B
Terceiro segmento	B-C
Quarto segmento	C-D
Quinto segmento	D-

Após o ponto D o sistema oscila linearmente até parar. As condições iniciais para cada segmento são mostradas na Tabela 3.2.

Tabela 3.2. Condições iniciais de cada segmento.

Segmento	Condições iniciais		
O-A	$f_0=0$	$v_0=0$	$\dot{v}_0=0$
A-B	$f_0=f_A$	$v_0=v_A$	$\dot{v}_0=\dot{v}_A$
B-C	$f_0=f_B$	$v_0=v_B$	$\dot{v}_0=\dot{v}_B$
C-D	$f_0=f_C$	$v_0=v_C$	$\dot{v}_0=\dot{v}_C$
D-	$f_0=f_D$	$v_0=v_D$	$\dot{v}_0=\dot{v}_D$

3.4. CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA

Como foi dito anteriormente, devem ser feitas iterações para se obter o equilíbrio entre as forças da Eq. (3.12). Durante cada iteração, essa equação é resolvida através da transformada implícita de Fourier, como indicado pela Eq. (3.14), determinando-se o deslocamento e a velocidade no final do segmento de tempo. A iteração é encerrada quando o balanço de forças indicado pela Eq. (3.13) convergir para um nível desejado de tolerância. O critério de convergência desse processo iterativo é

$$\left|\frac{v^{(k)}(t_n) - v^{(k-1)}(t_n)}{v^{(k)}(t_n)}\right| \leq \varepsilon \tag{3.18}$$

onde ε deve ser suficientemente pequeno, sendo t_n o tempo discreto.

CLARET (1991) observou que é necessário verificar apenas a convergência dos valores máximos. Assim, o critério de convergência pode ser mudado para uma condição mais relaxada, ou

$$\left|\frac{v_{max}^{(k)} - v_{max}^{(k-1)}}{v_{max}^{(k)}}\right| \leq \varepsilon \tag{3.19}$$

CAPÍTULO

4

ANÁLISE DE SISTEMAS LINEARES COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE COM AMORTECIMENTO PROPORCIONAL

4.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo será apresentada a solução para a resposta, no domínio da freqüência, de sistemas com vários graus de liberdade, dotados de amortecimento proporcional quando se admite que o mecanismo de perda de energia está uniformemente distribuído em toda a estrutura. Consequentemente, as forças de amortecimento estarão distribuídas de maneira similar às forças elásticas e de inércia. Assim, as propriedades de ortogonalidade do problema de autovalor $\boldsymbol{k\Phi=m\Phi\Lambda}$, onde $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{\Phi}$ e $\boldsymbol{\Lambda}$ são, respectivamente, matriz de rigidez, matriz de massa, matriz dos autovetores e matriz diagonal dos quadrados dos autovalores, também se aplicarão à matriz de amortecimento. Em vista disso, ao se converter o sistema de equações, *NxN*, de coordenadas nodais para coordenadas modais, resultarão N equações modais desacopladas.

Cada equação modal é a equação de movimento de um sistema de um grau de liberdade, sendo a resposta obtida com o uso da transformada implícita de Fourier, devidamente expressa em coordenada modal. A resposta em coordenadas nodais é obtida

classicamente pela superposição das respostas modais individuais. É o conhecido *método da superposição modal.*

Ao longo do texto, apresenta-se também a solução de sistemas com vários graus de liberdade dotados de amortecimento histerético. Finalmente, vale lembrar que no processo da superposição modal, o cálculo da resposta das equações modais individuais requer pouco esforço computacional e, em muitos casos, somente um relativamente pequeno número de modos de vibração será significativo para uma boa precisão da resposta. A série pode ser truncada, reduzindo consideravelmente o tempo de processamento computacional.

4.2. CONSTRUÇÃO DA MATRIZ DE AMORTECIMENTO PROPORCIONAL

O equilíbrio dinâmico de um sistema estrutural, de ordem *NxN*, dotado de amortecimento viscoso é expresso pela equação diferencial abaixo:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{c}\dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{k}\mathbf{v}(t) = \mathbf{p}(t) \tag{4.1}$$

onde $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{k}$ são, respectivamente, matriz de massa, matriz de amortecimento proporcional e matriz de rigidez, sendo $\boldsymbol{v(t)}$ a resposta em coordenadas nodais e $\boldsymbol{p(t)}$ a carga externa.

O problema de autovalor, para vibração livre, está associado com as matrizes de massa e de rigidez e é definido como:

$$\mathbf{k}\Phi = \mathbf{m}\Phi\Lambda \tag{4.2}$$

onde Φ é a matriz dos modos de vibração e Λ é a matriz diagonal dos quadrados dos autovalores. Uma importante característica da matriz dos modos de vibração é que ela é constituída de vetores que possuem propriedades de ortogonalidade em relação às matrizes de massa e de rigidez.

O problema de autovalor definido pela Eq.(4.2) é constituído de N modos de vibração. Cada um desses modos expressa uma configuração de deslocamento do sistema estrutural, cujas amplitudes podem servir como coordenada generalizada dos deslocamentos físicos, de maneira similar às funções trigonométricas nas séries de Fourier, e são usadas pelo mesmo motivo, pois possuem propriedades de ortogonalidade e com o emprego de poucos modos se consegue uma boa precisão para os deslocamentos.

Conhecidos os modos de vibração, pode-se expresssar os deslocamentos físicos da seguinte forma:

$$\mathbf{v}(t) = \Phi\mathbf{Y}(t) \tag{4.3}$$

sendo $\boldsymbol{Y(t)}$ o vetor de coordenada generalizada.

Substituindo-se o valor de $\boldsymbol{v(t)}$ na Eq.(4.3) na Eq.(4.1) e pré-multiplicando-se o resultado por Φ^T a seguinte equação é obtida:

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}}(t) + \Lambda\mathbf{Y}(t) = \mathbf{P}(t) \tag{4.4}$$

onde

$$\mathbf{P}(t) = \Phi^T \mathbf{p}(t) \tag{4.5}$$

é o vetor de carga generalizada ou modal e $\boldsymbol{C}$ é a matriz modal de amortecimento, dada por

$$\mathbf{C} = \Phi^T \mathbf{c} \Phi \tag{4.6}$$

Se a matriz **c** for proporcional, ou seja se **c** for ortogonal à matriz dos autovetores, C_{ij} é nulo, para $i \neq j$ e

$$C_{ii} = 2\xi_i \omega_i \tag{4.7}$$

sendo ξ_i a taxa modal de amortecimento correspondente ao modo i e ω_i a freqüência natural de vibração associada a esse modo.

A Eq.(4.4) é a equação modal de movimento. Como todas matrizes envolvidas, nessa equação, são diagonais, o sistema é desacoplado, resultando um conjunto de N equações independentes de um grau de liberdade, em coordenadas modais. A resposta em coordenadas físicas é encontrada pela superposição da solução de cada uma dessas equações modais, de acordo com a Eq.(4.3).

Em sistemas estruturais onde o mecanismo de perda de energia está uniformemente distribuído em toda a estrutura, pode-se adotar uma distribuição das forças de amortecimento similar àquela das forças elásticas e de inércia. A matriz de amortecimento desses sistemas pode ser definida como

$$\mathbf{c} = a_0 \mathbf{m} + a_1 \mathbf{k} \tag{4.8}$$

onde as constantes de proporcionalidade a_0 e a_1 possuem respectivamente as unidades s^{-1} e s. O amortecimento que é regido por uma matriz de amortecimento definida pela Eq.(4.8) é chamado de *amortecimento de Rayleigh*. Das Eqs.(4.6) e (4.7), deduz-se que a taxa de amortecimento é

$$\xi = \frac{a_0}{2\omega_n} + \frac{a_1 \omega_n}{2} \tag{4.9}$$

Conhecidas duas taxas de amortecimento associadas a dois quaisquer modos especificados e substituindo-se seus valores na Eq.(4.9), um sistema de duas equações a duas incógnitas é formado. Sua solução fornece os valores de a_0 e a_1.

Existem outras maneiras de se definir uma matriz de amortecimento que atenda às condições de ortogonalidade em relação à base modal, não sendo aquela definida pela Eq.(4.8) a única possível.

Para encontrar uma outra maneira de expressar uma matriz de amortecimento dentro dessas condições é conveniente apresentar o problema de autovalor em termos de um modo de vibração, a saber:

$$\mathbf{k}\boldsymbol{\varphi}_n = \omega_n^2 \mathbf{m}\boldsymbol{\varphi}_n \tag{4.10}$$

Pré-multiplicando esta equação por $\boldsymbol{\varphi}_m^T \mathbf{k}\mathbf{m}^{-1}$ será obtido

$$\boldsymbol{\varphi}_m^T \mathbf{k}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}\boldsymbol{\varphi}_n = \omega_n^2 \boldsymbol{\varphi}_m^T \mathbf{k}\boldsymbol{\varphi}_n \tag{4.11}$$

do qual resulta

$$\boldsymbol{\varphi}_m^T \mathbf{k}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}\boldsymbol{\varphi}_n = 0 \,, \qquad \text{para } m \neq n \tag{4.12}$$

visto que $\varphi_m^T \mathbf{k} \varphi_n$ é zero. Na Eq.(4.12) a matriz $\mathbf{k}\ \mathbf{m}^{-1}\ \mathbf{k}$ atende às propriedades de ortogonalidade em relação aos autovetores.

Pré-multiplicando agora a Eq.(4.10) por $\varphi_m^T \mathbf{k} \mathbf{m}^{-1} \mathbf{k} \mathbf{m}^{-1}$ será obtido

$$\varphi_m^T \mathbf{k} \mathbf{m}^{-1} \mathbf{k} \mathbf{m}^{-1} \mathbf{k} \varphi_n = \omega_n^2 \varphi_m^T \mathbf{k} \mathbf{m}^{-1} \mathbf{k} \varphi_n \qquad (4.13)$$

que, com o uso da Eq.(4.12), fornece

$$\varphi_m^T \mathbf{k} \mathbf{m}^{-1} \mathbf{k} \mathbf{m}^{-1} \mathbf{k} \varphi_n = 0\,, \qquad \text{para } m \neq n \qquad (4.14)$$

Na Eq.(4.14) $\mathbf{k} \mathbf{m}^{-1} \mathbf{k} \mathbf{m}^{-1} \mathbf{k}$ atende às propriedades de ortogonalidade em relação aos autovetores.

Alternativamente, pode-se pré-multiplicar a Eq.(4.10) por $\left(1/\omega_n^2\right) \varphi_m^T \mathbf{m} \mathbf{f}$, fornecendo

$$\frac{1}{\omega_n^2} \varphi_m^T \mathbf{m} \varphi_n = \varphi_m^T \mathbf{m} \mathbf{f} \mathbf{m} \varphi_n \qquad (4.15)$$

onde **f** é a matriz inversa da matriz de rigidez. Daí resulta

$$\varphi_m^T \mathbf{m} \mathbf{f} \mathbf{m} \varphi_n = 0\,, \qquad \text{para } m \neq n \qquad (4.16)$$

visto que $\varphi_m^T \mathbf{m} \varphi_n$ é zero. Na Eq.(4.16) **mfm** atende às condições de ortogonalidade.

Pré-multiplicando-se agora a Eq.(4.10) por $\left(1/\omega_n^2\right) \varphi_m^T \mathbf{m} \mathbf{f} \mathbf{m} \mathbf{f}$, será obtido

$$\frac{1}{\omega_n^2} \varphi_m^T \mathbf{m} \mathbf{f} \mathbf{m} \varphi_n = \varphi_m^T \mathbf{m} \mathbf{f} \mathbf{m} \mathbf{f} \mathbf{m} \varphi_n \qquad (4.17)$$

que com o uso da Eq.(4.16) fornece

$$\varphi_m^T \mathbf{mfmfm} \varphi_n = 0 , \qquad \text{para } m \neq n \tag{4.18}$$

Na Eq.(4.18), **mfmfm** atende às condições de ortogonalidade em relação aos autovetores.

As propriedades acima podem ser reunidas em uma única expressão, na seguinte forma:

$$\varphi_m^T \mathbf{m}\left[\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}\right]^b \varphi_n = 0 \qquad -\infty < b < \infty \tag{4.19}$$

fornecendo um conjunto completo de matrizes que atendem às relações de ortogonalidade.

Com amparo na Eq.(4.19), pode-se definir uma matriz de amortecimento

$$\mathbf{c} = \mathbf{m}\sum_b a_b\left[\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}\right]^b = \sum_b \mathbf{c}_b \tag{4.20}$$

sendo a_b coeficientes arbitrários. Notar que quando se adota uma série somente com dois termos, com b=0 e b=1, a Eq.(4.8) é obtida. Esta série pode contar com qualquer número de termos, porém, na condição de se conhecer igual número de taxa modal de amortecimento, para permitir a determinação dos coeficientes a_b. Para esclarecer melhor como isso é feito se deduzirá, a seguir, a relação entre ξ_n e os coeficientes a_b.

Por definição, o termo da diagonal da matriz modal de amortecimento é

$$C_n = \varphi_n^T \mathbf{c} \varphi_n = 2\xi_n \omega_n M_n \tag{4.21}$$

onde

$$M_n = \varphi_n^T \mathbf{m} \varphi_n \tag{4.22}$$

A contribuição de um termo b à diagonal da matriz modal de amortecimento será dada por

$$C_{nb} = \varphi_n^T \mathbf{c}_b \varphi_n = a_b \varphi_n^T \mathbf{m}\left[\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}\right]^b \varphi_n \tag{4.23}$$

Retornando-se à Eq.(4.10) e pré-multiplicando-a por $\varphi_n^T \mathbf{k}\mathbf{m}^{-1}$, será obtido

$$\varphi_n^T \mathbf{k}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}\varphi_n = \omega_n^2 \varphi_n^T \mathbf{k}\varphi_n = \omega_n^2 K_n \tag{4.24}$$

pois, $K_n = \varphi_n^T \mathbf{k}\varphi_n$. Porém, como $K_n=\omega_n^2 M_n$, resulta

$$\varphi_n^T \mathbf{k}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}\varphi_n = \omega_n^4 M_n \tag{4.25}$$

Através de operações matriciais equivalentes chega-se à seguinte expressão

$$\varphi_n^T \mathbf{m}\left[\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}\right]^b \varphi_n = \omega_n^{2b} M_n \tag{4.26}$$

Substituindo a Eq.(4.26) na Eq.(4.23) será obtido

$$C_{nb} = a_b \omega_n^{2b} M_n \tag{4.27}$$

Portanto,

$$C_n = \sum_b C_{nb} = \sum_b a_b \omega_n^{2b} M_n \tag{4.28}$$

Das Eqs.(4.28) e (4.21), resulta

$$\xi_n = \frac{1}{2\omega_n} \sum_b a_b \omega_n^{2b} \tag{4.29}$$

A Eq.(4.29) estabelece a relação entre a taxa modal e os coeficientes a_b. Conhecidas as taxas modais, um conjunto de equações simultâneas é formado, de cuja solução serão conhecidos os correspondentes coeficientes a_b. A seguir, será apresentada uma nova matriz que atenderá às propriedades de ortogonalidade em relação à base modal.

Conforme foi mostrado na primeira seção deste capítulo, a matriz modal de amortecimento vale

$$\mathbf{C} = \Phi^T \mathbf{c} \Phi \tag{4.30}$$

onde **C** é uma matriz diagonal cujos elementos são dados pela Eq.(4.21). É evidente que

$$\mathbf{c} = \left[\Phi^T\right]^{-1} \Phi^T \mathbf{c} \Phi \Phi^{-1} = \left[\Phi^T\right]^{-1} \mathbf{C} \Phi^{-1} \tag{4.31}$$

Por sua vez a matriz modal de massa vale

$$\mathbf{M} = \Phi^T \mathbf{m} \Phi \tag{4.32}$$

sendo **M** uma matriz diagonal, cujos termos são dados pela Eq.(4.22). Pré-multiplicando a Eq.(4.32) por $\mathbf{M}^{-1}$ será obtido

$$\mathbf{I} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \left[\mathbf{M}^{-1}\Phi^T \mathbf{m}\right]\Phi \tag{4.33}$$

donde conclui-se que

$$\Phi^{-1} = \mathbf{M}^{-1}\Phi^T \mathbf{m} \tag{4.34}$$

Da equação acima, através de operações matriciais, deduz-se que

$$\left[\Phi^{T}\right]^{-1} = \mathbf{m}\Phi\mathbf{M}^{-1} \tag{4.35}$$

Levando as Eqs.(4.35) e (4.34) na Eq.(4.31) resulta

$$\mathbf{c} = \left[\mathbf{m}\Phi\mathbf{M}^{-1}\right]\mathbf{C}\left[\mathbf{M}^{-1}\Phi^{T}\mathbf{m}\right] \tag{4.36}$$

Como a matriz C é diagonal, sendo seus termos dados pela Eq.(4.21), um elemento da matriz resultante do produto das três matrizes centrais da Eq.(4.36) será designado por d_n e valerá

$$d_n = \frac{2\xi_n\omega_n}{M_n} \tag{4.37}$$

Assim, a Eq.(4.36) poderá ser reescrita na seguinte forma

$$\mathbf{c} = \mathbf{m}\Phi\mathbf{d}\Phi^{T}\mathbf{m} \tag{4.38}$$

onde d é uma matriz diagonal cujos elementos são d_n. Porém, é mais adequado imaginar cada taxa modal de amortecimento tendo uma contribuição independente para a formação da matriz de amortecimento, do qual resulta

$$\mathbf{c}_n = \mathbf{m}\varphi_n d_n \varphi_n^{T}\mathbf{m} \tag{4.39}$$

Por conseguinte, a matriz de amortecimento pode ser expressa como a soma da contribuição de cada modo, ou

$$\mathbf{c} = \sum_{n=1}^{N}\mathbf{c}_n = \mathbf{m}\left[\sum_{n=1}^{N}\frac{2\xi_n\omega_n}{M_n}\varphi_n\varphi_n^{T}\right]\mathbf{m} \tag{4.40}$$

4.3. CÁLCULO DA RESPOSTA

A equação de equilíbrio dinâmico de um sistema estrutural em coordenadas físicas pode ser genericamente apresentada na seguinte forma:

$$\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_d + \mathbf{f}_s = \mathbf{p}(t) \tag{4.41}$$

onde f_i , f_d e f_s são, respectivamente, os vetores das forças de inércia, de amortecimento e elásticas e $p(t)$ é o vetor de carga externa nodal. Sendo $v(t)$ o vetor de deslocamento nodal, m a matriz de massa e k a matriz de rigidez, as forças de massa e de rigidez valerão:

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{m}\,\ddot{\mathbf{v}}(t) \tag{4.42}$$

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{k}\mathbf{v}(t) \tag{4.43}$$

onde $\ddot{v}(t)$ é o vetor de aceleração nodal. Sendo assim, a equação de equilíbrio dinâmico será dada por

$$\mathbf{m}\,\ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{k}\mathbf{v}(t) + \mathbf{f}_d = \mathbf{p}(t) \tag{4.44}$$

Diferentemente das forças de massa e de rigidez que podem ser facilmente avaliadas, o mesmo não é possível afirmar para as forças de amortecimento, pois estas dependem dos mecanismos básicos de perda de energia que são raramente compreendidos em muitos sistemas práticos. Portanto, a complexidade da tarefa de solucionar a Eq. (4.41) vai depender da escolha de um modelo de amortecimento adequado.

A forma viscosa de amortecimento é aquela tradicionalmente utilizada na literatura especializada, visto que leva à conveniente solução da Eq. (4.41). O amortecimento viscoso é um modelo linear de dissipação de energia, em que a força de amortecimento, f_d, é proporcional e oposta à velocidade da massa, $\dot{v}(t)$.

Para o caso de sistemas com muitos graus de liberdade, quando o mecanismo de perda de energia está uniformemente distribuído em toda a estrutura, pode-se adotar uma distribuição de forças de amortecimento similar àquela das forças de inércia e elásticas. Neste caso as forças de amortecimento serão dadas por

$$\mathbf{f}_d = \mathbf{c}\dot{\mathbf{v}}(t) \tag{4.45}$$

onde $\boldsymbol{c}$ é a matriz de amortecimento definida como proporcional à combinação das matrizes de massa e de rigidez, ou seja,

$$\mathbf{c} = a_0\mathbf{m} + a_1\mathbf{k} \tag{4.46}$$

em que as constantes de proporcionalidade a_0 e a_1 têm unidades s^{-1} e s, respectivamente. Neste caso a Eq. (4.44) assumirá a seguinte forma:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{c}\dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{k}\mathbf{v}(t) = \mathbf{p}(t) \tag{4.47}$$

com $\boldsymbol{c}$ dada pela Eq. (4.46).

A Eq. (4.47) pode ser transformada para coordenadas modais ou generalizadas através de transformações modais levando-a a assumir a seguinte forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{Y}(t) = \mathbf{P}(t) \tag{4.48}$$

onde $v(t) = \Phi Y$, sendo Φ a base modal, de vibração livre não amortecida.

Com a aplicação da transformada de Fourier nas Eqs. (4.47) e (4.48) serão obtidas suas correspondentes no domínio da freqüência que, no caso de condições iniciais nulas, serão dadas por:

$$\left[-\bar{\omega}^2\mathbf{m}+\mathbf{k}+i(\bar{\omega}\mathbf{c})\right]\mathbf{V}(i\bar{\omega})=\mathbf{P}(i\bar{\omega}) \tag{4.49}$$

$$\left[-\bar{\omega}^2\mathbf{M}+\mathbf{K}+i(\bar{\omega}\mathbf{C})\right]\mathbf{Z}(i\bar{\omega})=\mathbf{W}(i\bar{\omega}) \tag{4.50}$$

onde $\mathbf{V}(i\bar{\omega})$, $\mathbf{P}(i\bar{\omega})$, $\mathbf{Z}(i\bar{\omega})$ e $\mathbf{W}(i\bar{\omega})$ são, respectivamente, as transformadas de Fourier de $v(t)$, $p(t)$, $Y(t)$ e $P(t)$.

Para sistemas com amortecimento histerético as equações no domínio da frequência são:

$$\left[-\bar{\omega}^2\mathbf{m}+(1+i2\xi)\mathbf{k}\right]\mathbf{V}(i\bar{\omega})=\mathbf{P}(i\bar{\omega}) \tag{4.51}$$

$$\left[-\bar{\omega}^2\mathbf{M}+(1+i2\xi)\mathbf{K}\right]\mathbf{Z}(i\bar{\omega})=\mathbf{W}(i\bar{\omega}) \tag{4.52}$$

Quando a base modal é ortonormalizada (CLOUGH e PENZIEN, 1993) em relação à matriz de massa, as Eqs. (4.48) , (4.50) e (4.52) passam a ser representadas, respectivamente, sob a forma

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{Y}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}}(t)+\Lambda\,\mathbf{Y}(t)=\mathbf{P}(t) \tag{4.53}$$

$$\left[-\bar{\omega}^2\mathbf{I}+\Lambda+i(\bar{\omega}\mathbf{C})\right]\mathbf{Z}(i\bar{\omega})=\mathbf{W}(i\bar{\omega}) \tag{4.54}$$

$$\left[-\bar{\omega}^2\mathbf{I}+(1+i2\xi)\Lambda\right]\mathbf{Z}(i\bar{\omega})=\mathbf{W}(i\bar{\omega}) \tag{4.55}$$

onde Λ é a matriz diagonal cujos elementos são os quadrados das frequências naturais de vibração do sistema.

Admitindo-se que os r primeiros modos de vibração sejam predominantes na resposta do sistema, a matriz modal truncada será denotada por Φ_r e será da ordem $N \times r$, sendo N o número de graus de liberdade. As Eqs. (4.53), (4.54) e (4.55) serão dadas agora por:

$$\mathbf{I}_r\,\ddot{\mathbf{Y}}(t)+\mathbf{C}_r\,\dot{\mathbf{Y}}(t)+\Lambda_r\mathbf{Y}(t)=\mathbf{P}(t) \tag{4.56}$$

$$\left[-\bar{\omega}^2\mathbf{I}_r+\Lambda_r+i\left(\bar{\omega}\mathbf{C}_r\right)\right]\mathbf{Z}(i\bar{\omega})=\mathbf{W}(i\bar{\omega}) \tag{4.57}$$

$$\left[-\bar{\omega}^2\mathbf{I}_r+(1+i2\xi)\Lambda_r\right]\mathbf{Z}(i\bar{\omega})=\mathbf{W}(i\bar{\omega}) \tag{4.58}$$

Ao se adotar uma matriz de amortecimento proporcional, como dada pela Eq. (4.46), após a transformação modal, a matriz modal de amortecimento também será diagonal. Assim , o conjunto de equações acopladas, em coordenadas físicas, pode ser transformado em um conjunto de equações desacopladas, em coordenadas modais.

Para tais sistemas, a solução para cada coordenada modal, *j*, pode ser obtida com o uso da transformada implícita de Fourier, que neste caso valerá:

$$\mathbf{Y}_j=\frac{1}{N}\mathbf{e}_j\mathbf{P}_j \tag{4.59}$$

onde

$$\mathbf{e}_j = \mathbf{E}\mathbf{G}_j\mathbf{E}^* \tag{4.60}$$

onde $\boldsymbol{G_j}$ é uma matriz diagonal , em coordenada modal, cujos elementos são a função de resposta em freqüência para a freqüência natural j, ou

$$G_j = \frac{1}{\left[-\bar{\omega}_n^2 + \omega_j^2 + i\bar{\omega}_n C_{jj}\right]} \tag{4.61a}$$

para o caso de amortecimento viscoso e

$$G_j = \frac{1}{\left[-\bar{\omega}_n^2 + (1+i2\xi)\omega_j^2\right]} \tag{4.61b}$$

para o caso de amortecimento histerético.

A resposta em coordenadas físicas será dada por:

$$\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{Y} \tag{4.62}$$

CAPÍTULO

5

ANÁLISE DE SISTEMAS NÃO-LINEARES COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE DOTADOS DE AMORTECIMENTO NÃO-PROPORCIONAL

5.1 INTRODUÇÃO

A seção anterior encontrou a solução de sistemas com vários graus de liberdade para os quais as forças elásticas eram regidas por um comportamento fisicamente linear e as forças de amortecimento possuiam distribuição proporcional às forças elásticas e de massa. A solução pelo método da superposição modal foi imediata, visto que, quando as coordenadas físicas foram convertidas para coordenadas modais, as matrizes modais resultantes de massa, de rigidez e de amortecimento tornaram-se diagonais, implicando no desacoplamento do sistema de equações.

Agora, o sistema a ser analisado é mais complexo. As forças elásticas não possuem mais comportamento linear e as forças de amortecimento não estão distribuídas uniformemente como as forças elásticas e de massa. Nesses sistemas, quando ocorrem as transformações modais, as matrizes modais de rigidez e de amortecimento não são mais diagonais, são cheias. As clássicas propriedades de ortogonalidade dos autovetores em relação às matrizes de rigidez e de amortecimento não são mais atendidas. A técnica adotada para a solução da resposta para esses sistemas é transferir para o lado direito da equação de movimento os coeficientes de fora da diagonal, responsáveis pelo

acoplamento, definindo assim pseudo-forças atuando no sistema estrutural. Dessa forma, o lado esquerdo da equação de movimento permanece só com as diagonais, permitindo o uso do método da superposição modal.

Esse procedimento é conceitualmente o mesmo adotado no capítulo 3, para a solução de sistemas estruturais de um grau de liberdade. A diferença é que agora estão envolvidas operações matriciais e além do mais a técnica das pseudo-forças é usada tanto para os coeficientes da matriz de rigidez quanto da matriz de amortecimento. Como naquele caso, os coeficientes transferidos para o lado direito da equação de movimento, e tratados como pseudo-forças, são funções da resposta, sendo necessário o uso de um processo iterativo para encontrar a solução.

5.2 SISTEMA NÃO-LINEAR COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE COM AMORTECIMENTO PROPORCIONAL

Para sistemas com vários graus de liberdade com amortecimento proporcional, usa-se um procedimento similar ao adotado para sistemas com um grau de liberdade. Inicia-se o processo com a matriz definida com as propriedades do início do segmento, cuja equação de movimento é

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{k}_0\mathbf{v} = \mathbf{p} \tag{5.1}$$

A partir de um certo instante, a matriz de rigidez não é mais $\boldsymbol{k}_0$, e sim $\boldsymbol{k}_1$, sendo a equação de equilíbrio então expressa como

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{v}}_n + \mathbf{c}\dot{\mathbf{v}}_n + \mathbf{k}_1\mathbf{v}_n = \mathbf{p}_n \tag{5.2}$$

sendo v_n e p_n os vetores de deslocamentos e cargas externas do segmento não-linear. Ora, k_1 pode ser colocada na seguinte forma

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_0 - \Delta\mathbf{k} \tag{5.3}$$

Substituindo-se a Eq. (5.3) na Eq. (5.2) obtém-se

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{v}}_n + \mathbf{c}\dot{\mathbf{v}}_n + \left(\mathbf{k}_0 - \Delta\mathbf{k}\right)\mathbf{v}_n = \mathbf{p}_n \tag{5.4}$$

Como no caso unidimensional, o termo não linear, correspondente à mudança de rigidez, é transferido para o lado direito da Eq. (5.4) , que assumirá a forma

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{v}}_n + \mathbf{c}\dot{\mathbf{v}}_n + \mathbf{k}_0\mathbf{v}_n = \mathbf{p}_n + \Delta\mathbf{k}\mathbf{v}_n \tag{5.5}$$

O termo não linear correspondente à mudança de rigidez é tratado como pseudo-força. A solução do sistema de equações deve ser encontrada por processo iterativo. Na k-ésima iteração a equação de equilíbrio é

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{v}}_n^{(k)} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{v}}_n^{(k)} + \mathbf{k}_0\mathbf{v}_n^{(k)} = \mathbf{p}_n + \Delta\mathbf{k}\mathbf{v}_n^{(k-1)} \tag{5.6}$$

É possível se usar um método de integração direta, passo-a-passo, para achar a solução da Eq. (5.6). Entretanto, o método da superposição modal torna-se atrativo pois, com o truncamento modal, se reduzirá a quantidade de variáveis que deverão ser avaliadas por iteração.

Como o termo do lado esquerdo continua com as mesmas propriedades da matriz originada no início do segmento elástico linear, o sistema pode ser desacoplado, pois os modos são obtidos com aquelas propriedades.

Porém, os autovetores do sistema inicial não são ortogonais à matriz incremental Δk. Consequentemente, a matriz modal incremental $K_N = \Phi^t \Delta k \Phi$ conterá coeficientes modais acoplados, que serão tratados como pseudo-forças.

Portanto, usando a transformação clássica modal na Eq. (5.6), a mesma assume a seguinte forma

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{Y}}^{(k)} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}}^{(k)} + \Lambda \mathbf{Y}^{(k)} = \mathbf{P} + \Phi^t \Delta \mathbf{k}\, \Phi \mathbf{Y}^{(k-1)} \tag{5.7}$$

em que se omitiu o subscrito *n* que caracterizava os deslocamentos da fase não-linear da análise com o intuito de evitar confusão.

Usando o procedimento da transformada implícita de Fourier, a solução modal para o ciclo de iteração *k*, quando as condições iniciais são nulas, é

$$\mathbf{Y}_j^{(k)} = \frac{1}{N}\mathbf{e}_j\left(\mathbf{P}_j + \sum_{p=1}^{NGL} K_{Njp}\mathbf{Y}_p^{(k-1)}\right) \tag{5.8}$$

Entretanto, problemas não-lineares classicamente possuem condições iniciais, pois são solucionados por segmentos onde o deslocamento e velocidade no final de um segmento são as condições iniciais para o segmento seguinte. Assim, a Eq. (5.8) deve incluir condições iniciais. Neste caso, a resposta modal é

$$\mathbf{Y}_j^{(k)} = \frac{1}{N}\mathbf{e}_j\left(\mathbf{P}_j - F_{0j}\mathbf{1} + \frac{\dot{Y}_{0j}}{\Delta t}\delta + \sum_{p=1}^{NGL} K_{Njp}\mathbf{Y}_p^{(k-1)}\right) + Y_{0j}\mathbf{1} \tag{5.9}$$

onde Y_{0j} e $\dot{Y}_{0j}$ são, respectivamente, os deslocamentos e velocidades iniciais modais. F_{0j}, analogamente ao caso de sistemas com um grau de liberdade, é a força na massa, em

coordenada modal, correspondente ao estado de deformação estática definido pelo deslocamento inicial Y_{0j}.

Para esclarecer melhor como F_{0j} é avaliado, seja um sistema estrutural de vários graus de liberadade, modelado como shear building, possuindo somente uma mola não linear, com o comportamento bilinear mostrado na Fig. 5.1.

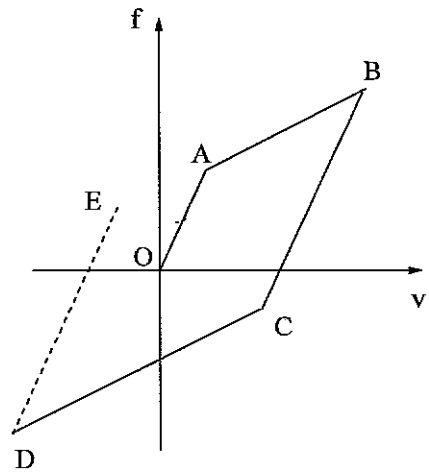


Fig. 5.1. Deslocamentos físicos da mola bilinear do shear building

Imagine agora que a análise foi efetuada por segmentação e que em três seguidos segmentos a análise transcorreu no regime indicado na Tabela 5.1.

Tabela 5.1. Regime de análise nos segmentos indicados.

Segmento	Regime da análise
B-C	linear
C-D	não linear
D-E	linear

Para calcular a resposta no segmento C-D, as condições finais do segmento B-C são as condições iniciais do segmento C-D. Nesse caso, F_{0j} para o segmento C-D é

$$F_{0j} = F^a + \Lambda_{0j}\Delta Y_{0j} \tag{5.10}$$

onde ΔY_{0j} são os deslocamentos incrementais modais referentes às condições finais do segmento B-C, linear, e F^a são as forças nas massas do final do segmento anterior. Fica claro que $\Lambda_{0j}\Delta Y_{0j}$ são forças incrementais modais elásticas lineares.

Como o procedimento é passo-a-passo, a próxima etapa é encontrar a resposta no segmento D-E. As condições finais do segmento C-D agora são as condições iniciais do segmento D-E. Nesse caso, F_{0j} para o segmento D-E é

$$F_{0j} = F^a + \varphi_j^T \mathbf{k}_1 \mathbf{v}_n \tag{5.11}$$

onde $\mathbf{v}_n$ são os deslocamentos incrementais físicos das massas no final do segmento C-D, não linear. Consequentemente, $\varphi_j^T \mathbf{k}_1 \mathbf{v}_n$ são as forças incrementais modais referentes ao final do segmento C-D, sendo F^a igual ao valor de F_{0j} da Eq. (5.10). Deste modo as forças F^a serão da forma

$$F^a = \sum_a \left[\Lambda_{0j}\Delta Y_{0j}\right]^a + \sum_a \left[\varphi^T \mathbf{k}_1 \mathbf{v}_n\right]^a \tag{5.12}$$

onde o somatório se refere às contribuições dos passos anteriores, lineares e não lineares. O termo $\varphi_j^T \mathbf{k}_1 \mathbf{v}_n$ inclui o acoplamento entre todos os modos do sistema estrutural.

5.3. CONSTRUÇÃO DA MATRIZ DE AMORTECIMENTO NÃO-PROPORCIONAL

O amortecimento proporcional estudado na seção anterior só pode ser adotado em estruturas onde o mecanismo de perda de energia esteja uniformemente distribuído, em conformidade com a massa e a rigidez. Sob essa condição, os autovetores também serão ortogonais à matriz de amortecimento, resultando em um sistema de equações modais independentes, permitindo o uso do método clássico da superposição modal para a obtenção da solução.

Quando existem acentuadas diferenças no mecanismo de perda de energia em distintas partes do sistema estrutural, as propriedades de ortogonalidade dos autovetores só se aplicarão às matrizes de massa e de rigidez. Assim, somente as matrizes modais de massa e de rigidez serão diagonais. A matriz modal de amortecimento será cheia, não permitindo o desacoplamento das equações modais de movimento. Para essas estruturas, diz-se que o amortecimento é não proporcional. Entre os sistemas estruturais que possuem amortecimento não proporcional podem-se citar as estruturas compostas de mais de um material, como ilustrado na Fig. 5.2, os casos de interação solo-estrutura, fluido-estrutura ou aquelas estruturas onde encontram-se acoplados amortecedores discretos em alguns graus de liberdade.

Para exemplificar a montagem de uma matriz de amortecimento não proporcional, considere a estrutura mostrada na Fig. 5.2, na qual se adotou o modelo de amortecimento de Rayleigh, separadamente, para a parte metálica e para a parte de concreto.

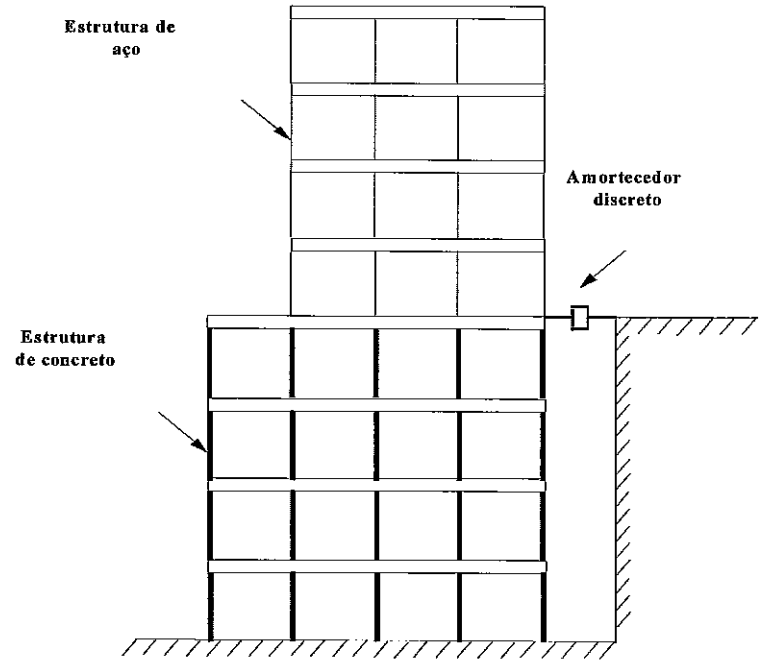


Fig. 5.2. Sistema estrutural com amortecimento não proporcional.

Seja adotada uma taxa de amortecimento modal corrente da estrutura metálica igual a ξ_s e uma taxa de amortecimento modal corrente da estrutura de concreto igual a ξ_c, com $\xi_c > \xi_s$. Após a extração modal da estrutura global, com a aplicação separada da Eq.(4.8), determina-se a matriz de amortecimento $\mathbf{c}_s$ para a parte metálica e a matriz de amortecimento $\mathbf{c}_c$ da parte de concreto. A matriz de amortecimento $\mathbf{c}$ da estrutura global será montada da maneira clássica do método dos elementos finitos, ou seja, um coeficiente da matriz de amortecimento é igual à soma de todos os coeficientes pertinentes a esse grau de liberdade. Na ocorrência de amortecedor discreto, soma-se diretamente ao coeficiente da diagonal o valor da constante de amortecimento do mesmo.

Para ilustrar o acoplamento de um sistema estrutural, onde as forças de amortecimento não têm distribuição proporcional àquelas pertinentes à massa e à rigidez,

apresenta-se a seguir um sistema de equações, em coordenadas modais, de uma estrutura com essas características. Para simplificar, adota-se um sistema com três graus de liberdade, sem perda de generalidade. Conforme a Eq. (4.48) a equação modal agora é

$$\begin{bmatrix} M_1 & & \\ & M_2 & \\ & & M_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{Y}_1 \\ \ddot{Y}_2 \\ \ddot{Y}_3 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{Y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & & \\ & K_2 & \\ & & K_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} \tag{5.13}$$

onde vê-se que os termos C_{ij} $(i \neq j)$ da matriz modal de amortecimento C são não nulos. Portanto, o sistema é acoplado.

5.4 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE SOLUÇÕES DE SISTEMAS COM AMORTECIMENTO NÃO-PROPORCIONAL

Existem vários procedimentos para encontrar a solução de sistemas estruturais cujas características de amortecimento induzem a formação de uma matriz de amortecimento não proporcional. Dentre esses métodos destaca-se o processo de integração numérica passo-a-passo da equação de movimento, com o qual se pode efetuar a análise de estruturas bastante complexas, possuindo, além de amortecimento não proporcional, também comportamento não-linear. Por esse processo as equações podem ser integradas tanto em coordenadas físicas quanto em coordenadas modais, como o fazem CLOUGH e MOJTAHEDI (1979), os quais tiram proveito do truncamento modal para reduzir o número de coordenadas.

Uma solução aproximada é adotada por WARBURTON e SONI (1977) que propõem ignorar os coeficientes acoplados da matriz modal de amortecimento, resolvendo o sistema de equação por uma análise clássica de superposição modal. CHEN e TAYLOR (1987, 1990), MAU (1988), SINGH e GHAFORY-ASHTIANY (1986) e BARBET e CANET (1994) apresentam a formulação da solução com o uso do método da superposição modal com modos complexos. Esse procedimento aumenta enormemente o esforço computacional em relação àquele que usa modos ortogonais de vibração. Além do mais, os modos complexos de vibração não apresentam pontos estacionários, dificultando a interpretação física do comportamento.

Em todos os métodos relacionados acima, as equações de movimento são resolvidas no domínio do tempo. Portanto, não são adequados para a solução de sistemas de equações oriundos de sistemas estruturais com amortecimento histerético e com propriedades dependentes da freqüência. Para esses sistemas é fortemente recomendado efetuar a análise no domínio da freqüência. A seguir se apresentam duas soluções para equações de movimento no domínio da freqüência.

CLOUGH e PENZIEN (1993) apresentam um interessante procedimento, no domínio da freqüência, baseado em interpolações dos coeficientes da matriz complexa de resposta em freqüência, como será mostrado mais adiante. Este procedimento foi implementado e testado em aplicações numéricas por FERREIRA *et al.* (1996).

Considere, abaixo, a equação de movimento expressa no domínio da freqüência

$$\left[\left(\mathbf{k}-\bar{\omega}^2\mathbf{m}\right)+\mathrm{i}\bar{\omega}\mathbf{c}\right]\mathbf{V}(\mathrm{i}\bar{\omega})=\mathbf{P}(\mathrm{i}\bar{\omega}) \tag{5.14}$$

Esta equação pode ser reescrita na forma

$$\mathbf{I}(i\bar{\omega})\mathbf{V}(i\bar{\omega}) = \mathbf{P}(i\bar{\omega}) \tag{5.15}$$

em que $\mathbf{I}(i\bar{\omega}) = \left(\mathbf{k} - \bar{\omega}^2\mathbf{m}\right) + i\bar{\omega}\mathbf{c}$ é a matriz de impedância. A solução da Eq. (5.15) será dada por

$$\mathbf{V}(i\bar{\omega}) = \mathbf{H}(i\bar{\omega})\mathbf{P}(i\bar{\omega}) \tag{5.16}$$

sendo

$$\mathbf{H}(i\bar{\omega}) = \mathbf{I}^{-1}(i\bar{\omega}) \tag{5.17}$$

O procedimento de inversão para a obtenção de $\mathbf{H}(i\bar{\omega})$, como mostrado na Eq. (5.17), é o mesmo daquele envolvendo matrizes reais, estando a única diferença nos coeficientes envolvidos, pois não são mais reais, e sim, complexos. Embora as rotinas computacionais estejam prontamente disponíveis para realizar este tipo de tarefa, a inversão de matrizes complexas de ordem *NxN* em cada valor discreto de $\bar{\omega}$, estreitamente espaçado do espectro de freqüências, torna esta tarefa impraticável na realidade.

Para contornar a árdua tarefa de inversão da matriz de impedância ($\mathbf{I}(i\bar{\omega})$) para todos os valores do espectro de freqüência, CLOUGH e PENZIEN (1993) propuseram

fazer esta inversão para certos valores de $\overline{\omega}$ esparsamente espaçados e, fazendo uso de procedimentos de interpolação, obter as matrizes complexas de função de resposta para valores estreitamente espaçados.

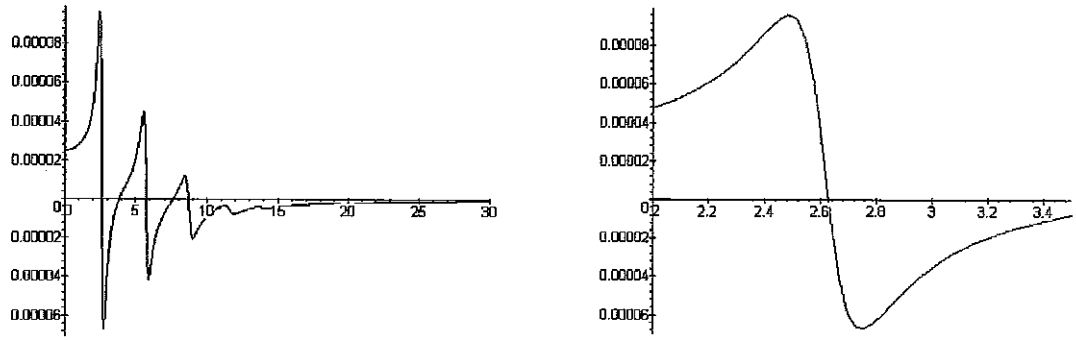


Fig. 5.3a. Gráfico de $Re(H_{ij})$ *x* $\overline{\omega}$ em escalas distintas de $\overline{\omega}$

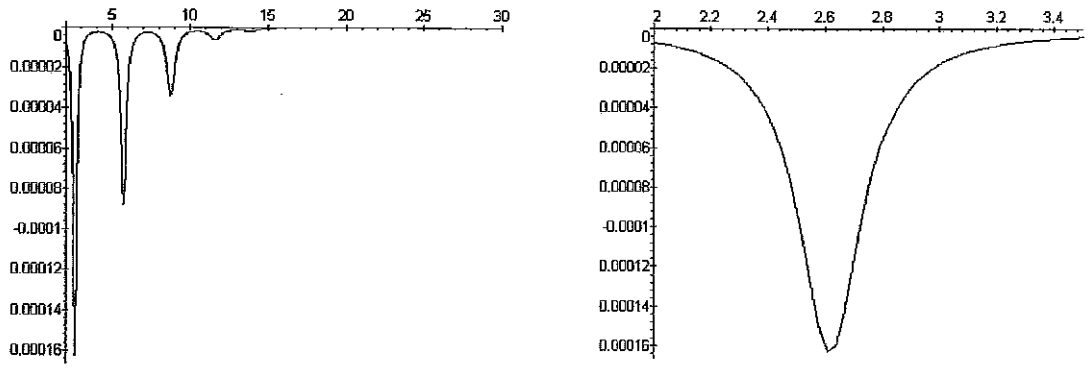


Fig. 5.3b. Gráfico de $Im(H_{ij})$ *x* $\overline{\omega}$ em escalas distintas de $\overline{\omega}$

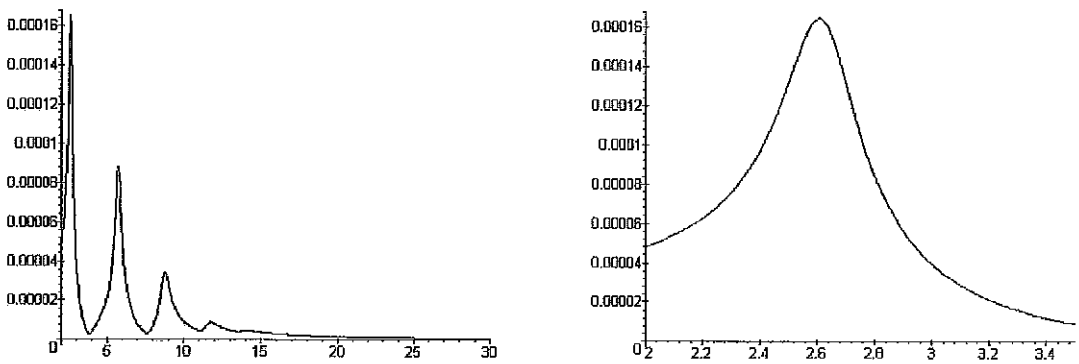


Fig. 5.3c. Gráfico de Im$|H_{ij}|$ x $\overline{\omega}$ em escalas distintas de $\overline{\omega}$

Para entender a interpolação proposta por CLOUGH e PENZIEN (1993), mostra-se na Fig. 5.3 os gráficos da parte real de H_{ij}, $Re(H_{ij})$, da parte imaginária de H_{ij}, $Im(H_{ij})$ e $|H_{ij}|$ versus $\overline{\omega}$ de um sistema estrutural. Os gráficos são apresentados em duas distintas escalas de $\overline{\omega}$, na primeira, gráfico à esquerda, $\overline{\omega}$ está compreendida entre 0 e 30 *rd/s*, na segunda, gráfico à direita, $\overline{\omega}$ está compreendida entre 2 e 3,5 *rd/s*. Como pode-se perceber os coeficientes das matrizes complexas de resposta em freqüência são funções suaves de $\overline{\omega}$. Por este motivo, conhecendo-se alguns valores de H_{ij} e escolhendo-se adequadamente uma curva de interpolação com os mesmos, podem ser determinados facilmente os valores intermediários através da expressão gerada pela escolha daquela curva.

CLOUGH e PENZIEN (1993) propõem para função de interpolação uma curva correspondente à forma da função complexa de resposta em freqüência de um sistema de dois graus de liberdade, desacoplável, dotado de amortecimento histerético. Para este caso as equações modais no domínio da freqüência são:

$$\left[\left(K_1 - \overline{\omega}^2 M_1\right) + i\left(2\xi K_1\right)\right] Z_1(i\overline{\omega}) = \Phi_1^T \mathbf{P}(i\overline{\omega}) \tag{5.18}$$

$$\left[\left(K_2 - \overline{\omega}^2 M_2\right) + i\left(2\xi K_2\right)\right] Z_2(i\overline{\omega}) = \Phi_2^T \mathbf{P}(i\overline{\omega}) \tag{5.19}$$

Para se encontrar uma forma de função de interpolação optou-se por tomar como referência H_{11} desse sistema, que é a relação entre $P_1(i\overline{\omega})$ e $V_1(i\overline{\omega})$ dada abaixo

$$V_1(i\overline{\omega}) = \varphi_{11} Z_1(i\overline{\omega}) + \varphi_{12} Z_2(i\overline{\omega}) \tag{5.20}$$

Para a obtenção de $H_{11}(i\bar{\omega})$ deve-se adotar $\mathbf{P}(i\bar{\omega}) = \{1 \quad 0\}^T$. Assim os termos à direita das Eqs. (5.18) e (5.19) valerão

$$\mathbf{\Phi}_1^T\mathbf{P}(i\bar{\omega}) = \{\varphi_{11} \quad \varphi_{21}\}\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} = \varphi_{11} \tag{5.21}$$

e

$$\mathbf{\Phi}_2^T\mathbf{P}(i\bar{\omega}) = \{\varphi_{12} \quad \varphi_{22}\}\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} = \varphi_{12} \tag{5.22}$$

que levados nas Eqs. (5.18) e (5.19) resulta

$$Z_1 = \frac{\varphi_{11}}{\left(K_1 - \bar{\omega}^2 M_1\right) + i\left(2\xi K_1\right)} \tag{5.23}$$

e

$$Z_2 = \frac{\varphi_{12}}{\left(K_2 - \bar{\omega}^2 M_2\right) + i\left(2\xi K_2\right)} \tag{5.24}$$

Substituindo-se as Eqs. (5.23) e (5.24) na Eq. (5.20), finalmente será obtido

$$H_{11}(i\bar{\omega}) = \frac{\varphi_{11}^2}{\left(K_1 - \bar{\omega}^2 M_1\right) + i\left(2\xi K_1\right)} + \frac{\varphi_{12}^2}{\left(K_2 - \bar{\omega}^2 M_2\right) + i\left(2\xi K_2\right)} \tag{5.25}$$

Através de operações algébricas a equação acima pode ser apresentada genericamente sob a forma

$$H_{11}(i\bar{\omega}) = \frac{A\bar{\omega}^2 + B}{\bar{\omega}^4 + C\bar{\omega}^2 + D} \tag{5.26}$$

em que A é uma constante real e B, C e D são constantes complexas, todas expressas em termos das constantes apresentadas na Eq. (5.25). Agora, o que é mais importante , as formas dessas expressões não são de interesse e, sim, tão somente a forma funcional de $H_{11}(i\bar{\omega})$ com respeito a $\bar{\omega}$ é necessária. Repetindo o desenvolvimento acima para as outras três funções complexas de resposta em freqüência $H_{12}(i\bar{\omega})$, $H_{21}(i\bar{\omega})$ e $H_{22}(i\bar{\omega})$, obtém-se a mesma forma dada pela Eq. (5.26).

A Eq. (5.26), na sua forma discreta, é dada por

$$H_{ij}(i\bar{\omega}_m) = \frac{A_n \bar{\omega}_m^2 + B_n}{\bar{\omega}_m^4 + C_n \bar{\omega}_m^2 + D_n} \qquad \left(n - \frac{3}{2}q\right)\Delta\bar{\omega} < \bar{\omega}_m < \left(n + \frac{3}{2}q\right)\Delta\bar{\omega} \tag{5.27}$$

onde $\bar{\omega}_m = m\Delta\bar{\omega}$ e $\Delta\bar{\omega}$ é o intervalo constante das freqüências discretas estreitamente espaçadas requeridas pela *FFT* na geração do vetor de carga $\mathbf{P}(i\bar{\omega})$. As constantes A_n , B_n , C_n e D_n são encontradas em função dos valores de $H_{ij}(i\bar{\omega})$ para as quatro freqüências discretas $m_1\Delta\bar{\omega}$, $m_2\Delta\bar{\omega}$, $m_3\Delta\bar{\omega}$ e $m_4\Delta\bar{\omega}$ — com o uso da Eq.(5.17) — sendo m_i obtida de n, ou explicitamente, $m_1 = \left(n - \frac{3}{2}q\right)$, $m_2 = \left(n - \frac{1}{2}q\right)$, $m_3 = \left(n + \frac{1}{2}q\right)$ e $m_4 = \left(n + \frac{3}{2}q\right)$, como mostrado na Fig. 5.4, onde q representa o número de intervalos de frequências estreitamente espaçadas dentro do intervalo largamente espaçado. Aquelas constantes são todas tratadas como constantes complexas, mesmo sabendo da Eq. (5.26) que A é real.

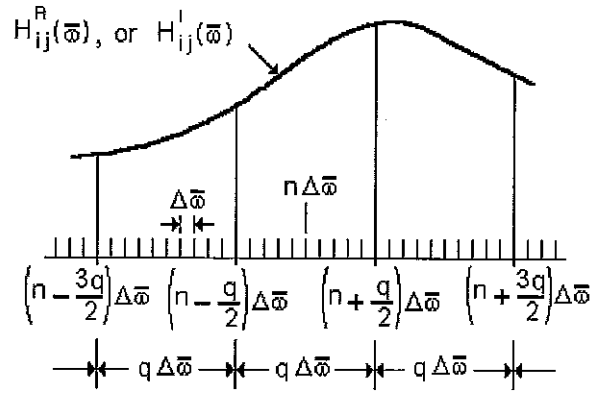


Fig. 5.4-2. Interpolação da função de transferência

Uma vez encontrados os valores de A_n , B_n , C_n e D_n para um determinado n, podem ser calculados os valores intermediários de $H_{ij}(i\bar{\omega}_m)$ nas freqüências discretas estreitamente espaçadas no intervalo $\left(n-\frac{3}{2}q\right)\Delta\bar{\omega} < m\Delta\bar{\omega} < \left(n+\frac{3}{2}q\right)\Delta\bar{\omega}$. Este mesmo procedimento é então repetido para $n=\frac{3}{2}q,\ \frac{9}{2}q,\ \frac{15}{2}q,\ \cdots$, até cobrir todo o espectro de freqüência de interesse.

Tendo sido obtidas todas matrizes de função de resposta complexa em freqüência com o procedimento acima, a resposta no domínio da freqüência valerá

$$\mathbf{V}(i\bar{\omega}) = \mathbf{H}(i\bar{\omega})\mathbf{P}(i\bar{\omega}) \qquad \text{[repetida],(5.16)}$$

É oportuno lembrar que quando $\mathbf{H}(i\bar{\omega})$ é conhecida, a resposta do sistema estrutural para outros conjuntos de carregamento pode ser prontamente avaliada, necessitando apenas calcular as transformadas de Fourier daqueles conjuntos e encontrar a resposta para cada caso com a utilização da Eq. (5.16). Os deslocamentos no domínio

do tempo, para cada conjunto de cargas, serão obtidos pelas transformadas inversas de Fourier dos respectivos valores no domínio da frequência $\left(\mathbf{V}(i\bar{\omega})\right)$.

O outro procedimento é aquele efetivamente utilizado nesta pesquisa e que já foi comentado na introdução. Trata-se de transpor para o lado direito da equação modal de movimento os termos da matriz de amortecimento responsáveis pelo acoplamento e tratá-los como pseudo-forças. Nesse caso, como a pseudo-força depende da resposta, um processo iterativo é usado para encontrar a solução da equação. Em cada iteração as equações são resolvidas no domínio da freqüência com o uso da transformada implícita de Fourier. A próxima seção explicará em detalhes esse procedimento.

5.5. SISTEMAS LINEARES COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE COM AMORTECIMENTO NÃO-PROPORCIONAL

Quando o amortecimento é não-proporcional, a matriz de amortecimento $\boldsymbol{c}$ não satisfará mais as condições de ortogonalidade, em relação à base modal. Consequentemente a matriz modal de amortecimento $\boldsymbol{C}$ será cheia e o sistema, acoplado. O valor relativo dos elementos de fora da diagonal de $\boldsymbol{C}$ em relação aos seus elementos da diagonal é expresso por (CLARET, 1991):

$$\alpha_{ij} = \frac{C_{ij}^2}{C_{ii}C_{jj}} \tag{5.28}$$

O índice de acoplamento do amortecimento no sistema, α, é definido como o máximo valor de α_{ij} e indica o quanto ele é não-proporcional.

Para encontrar a resposta para um sistema com amortecimento não proporcional pela transformada implícita de Fourier, primeiramente põe-se a matriz de amortecimento como a soma de duas matrizes, da seguinte forma:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_D + \mathbf{C}_F \tag{5.29}$$

onde C_D é a matriz diagonal, cujos elementos são os elementos da diagonal de C e C_F tem os elementos nulos na diagonal e os correspondentes de fora da diagonal de C. Em seguida substitui-se C da Eq. (5.29) na Eq. (4.53), resultando:

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{Y}}(t) + \left(\mathbf{C}_D + \mathbf{C}_F\right)\dot{\mathbf{Y}}(t) + \Lambda\ \mathbf{Y}(t) = \mathbf{P}(t) \tag{5.30}$$

ou

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{C}_D\ \dot{\mathbf{Y}}(t) + \Lambda\ \mathbf{Y}(t) = \mathbf{P}(t) - \mathbf{C}_F\dot{\mathbf{Y}}(t) \tag{5.31}$$

Na Eq. (5.31) o acoplamento devido ao amortecimento não proporcional é tratado como um vetor de pseudo-forças $\left(-\mathbf{C}_F\dot{\mathbf{Y}}(t)\right)$ no segundo membro à direita da igualdade.

A Eq. (5.31) é resolvida por um processo iterativo cujo k-ésimo passo é expresso pela equação abaixo

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{Y}}(t)^{(k)} + \mathbf{C}_D\ \dot{\mathbf{Y}}(t)^{(k)} + \Lambda\mathbf{Y}(t)^{(k)} = \mathbf{P}(t) - \mathbf{C}_F\dot{\mathbf{Y}}(t)^{(k-1)} \tag{5.32}$$

Em cada modo, a equação de movimento assume a forma

$$\ddot{Y}_j^{(k)}(t) + 2\xi_j\omega_j\dot{Y}_j^{(k)}(t) + \omega_j^2 Y_j^{(k)}(t) = P_j(t) - \sum_{p=1}^{NGL} C_{Fjp}\dot{Y}_p^{(k-1)}(t) \tag{5.33}$$

onde *NGL* é o número de graus de liberdade do sistema estrutural, quando não se utiliza truncamento modal.

Na primeira iteração adota-se $\dot{\mathbf{Y}}(t)^{(0)} = \mathbf{0}$. Nas próximas iterações o vetor de resposta e o de velocidade modais, para cada modo j, serão dados, respectivamente, por

$$\mathbf{Y}_j^{(k)} = \mathbf{e}_j \left(\mathbf{P}_j - \sum_{p=1}^{NGL} C_{Fjp} \dot{\mathbf{Y}}_p^{(k-1)} \right) \tag{5.34}$$

e

$$\dot{\mathbf{Y}}_j^{(k)} = \dot{\mathbf{e}}_j \left(\mathbf{P}_j - \sum_{p=1}^{NGL} C_{Fjp} \dot{\mathbf{Y}}_p^{(k-1)} \right) \tag{5.35}$$

onde

$$\dot{\mathbf{e}}_j = \frac{1}{N} \mathbf{E} \dot{\mathbf{G}}_j \mathbf{E}^* \tag{5.36}$$

sendo $\dot{\mathbf{G}}$ uma matriz diagonal, em coordenada modal, cujos elementos, para condições iniciais nulas, valem

$$\dot{G}_j = \frac{i\bar{\omega}_n}{\left[-\bar{\omega}_n^2 + \omega_j^2 + i\bar{\omega}_n C_{jj} \right]} \tag{5.37}$$

para o caso de amortecimento viscoso.

5.6 SISTEMAS COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE NÃO-LINEARES E COM AMORTECIMENTO NÃO-PROPORCIONAL

Em sistemas estruturais complexos, que admitem a presença simultânea de comportamento não-linear e de forças de amortecimento não-proporcionais à massa e à rigidez, todos os termos acoplados originados dessas características podem ser agrupados do lado direito do sistema de equações e tratados como pseudo-forças. Portanto, a equação diferencial em coordenada modal será expressa como

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}_D\dot{\mathbf{Y}} + \Lambda\mathbf{Y} = \mathbf{P} + \Phi^t \Delta k\, \Phi\mathbf{Y} - \mathbf{C}_F\dot{\mathbf{Y}} \tag{5.38}$$

na qual, para evitar confusão, se omitiu a indicação de dependência do tempo e o subíndice indicativo de análise na fase não-linear.

A Eq. (5.38) deve ser resolvida por um processo iterativo, passo-a-passo, cuja solução, com o procedimento da transformada implícita de Fourier, à luz das Eqs. (5.9) e (5.34), valerá

$$\mathbf{Y}_j^{(k)} = \frac{1}{N}\mathbf{e}_j\left(\mathbf{P}_j - F_{0j}\mathbf{1} + \frac{\dot{Y}_{0j}}{\Delta t}\delta + \sum_{p=1}^{NGL} K_{Njp}\mathbf{Y}_p^{(k-1)} - \sum_{p=1}^{NGL} C_{Fjp}\dot{\mathbf{Y}}_p^{(k-1)}\right) + Y_{0j}\mathbf{1} \tag{5.39}$$

5.7. CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA

O procedimento para verificar a convergência para sistemas com múltiplos graus de liberdade é o mesmo daquele apresentado para sistemas com um grau de liberdade. Porém, como se usa superposição modal, pode-se determinar a convergência pelos deslocamentos modais, segundo o critério abaixo

$$\left|\frac{Y_j^{(k)}(t_n) - Y_j^{(k-1)}(t_n)}{Y_j^{(k)}(t_n)}\right| \leq \varepsilon\,, \qquad j = 1,2,\cdots,NGL \tag{5.40}$$

podendo, também, ser usada a condição mais relaxada

$$\left|\frac{Y_{j,max}^{(k)} - Y_{j,max}^{(k-1)}}{Y_{j,max}^{(k)}}\right| \leq \varepsilon\,, \qquad j = 1,2,\cdots,NGL \tag{5.41}$$

CAPÍTULO

6

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

6.1. INTRODUÇÃO

Com o objetivo de validar as implementações feitas nesta pesquisa, programou-se a execução de diversos experimentos numéricos representativos da complexidade de sistemas estruturais com um ou múltiplos graus de liberdade.

O primeiro exemplo objetivou a validação das equações que expressam as condições iniciais. Em um sistema massa-mola faz-se uma análise dinâmica, marchando-se no tempo, em um procedimento segmento-a-segmento, em que as condições finais de um segmento são as condições iniciais do segmento subsequente.

Através do exemplo 2 percebe-se a versatilidade da formulação proposta, visto que o mesmo algoritmo foi usado para mostrar a solução de sistemas com propriedades físicas distintas: um sistema massa-mola com amortecimento viscoso, um sistema com amortecimento dependente da freqüência e um sistema com amortecimento histerético.

Nos outros exemplos as soluções são encontradas usando-se o conceito de pseudo-forças, representando o exemplo 5 um complexo sistema estrutural, em virtude de possuir comportamento fisicamente não linear e amortecimento não proporcional.

6.2. EXEMPLO 1

Com o objetivo de validar as equações deduzidas na seção 3.2, para as condições iniciais, a equação de movimento de um sistema massa-mola, com: m=17500 *kg*, k=17.5 *MN/m* e ξ=5% é resolvida, separadamente para $v(0) = 0.03$ m e $\dot{v}(0) = 0.60$ m / s. O histórico de resposta foi obtido por segmentos de tempo, sendo cada segmento igual a um quinto do período natural. Inicia-se o cálculo da resposta usando as Eqs. (3.1) e (3.5), respectivamente. Em seguida, a partir do segundo segmento, o histórico é calculado pela Eq. (3.6) com $v(0)$ e $\dot{v}(0)$ tomados, respectivamente, como deslocamento e velocidade finais do segmento anterior. Observe que, neste exemplo, a carga externa é nula, na Eq. (3.6).

Trata-se, este exemplo, de vibração livre de um sistema massa-mola com condições iniciais. Neste caso, qualquer texto clássico de dinâmica estrutural apresenta sua solução no domínio do tempo. As respostas exatas para esse sistema são:

$$v(t) = v(0)\left[\cos\omega_D t + \frac{\xi\omega}{\omega_D}\sin\omega_D t\right] e^{-\xi\omega t} \tag{6.1}$$

$$v(t) = \frac{\dot{v}(0)}{\omega_D}\sin\omega_D t\, e^{-\xi\omega t} \tag{6.2}$$

para deslocamento inicial e velocidade inicial, respectivamente, onde $\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$. As Figs. 6.1 e 6.2 mostram a excelente concordância entre as soluções no domínio do tempo e domínio da freqüência.

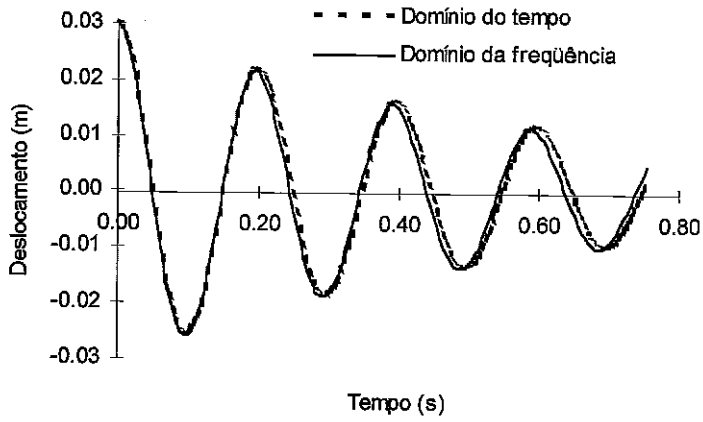


Fig. 6.1 Histórico de resposta para $v(0) = 0.03$ m.

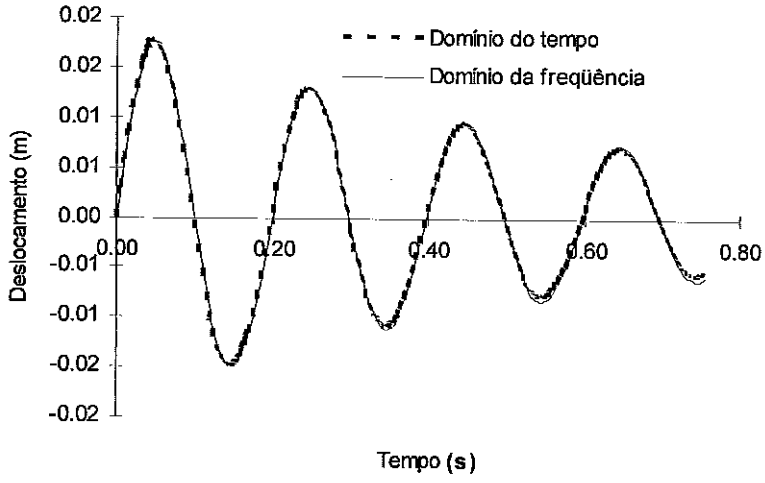


Fig. 6.2. Histórico de resposta para $\dot{v}(0) = 0{,}60$ m/s.

Para levar em conta a dependência da freqüência de c, a equação de movimento é resolvida para o deslocamento inicial $v(0) = 0{,}03\ m$. As Figs. 6.3 e 6.4 mostram curvas que indicam a variação de c com a freqüência. Os correspondentes resultados são mostrados nas Figs. 6.5 e 6.6.

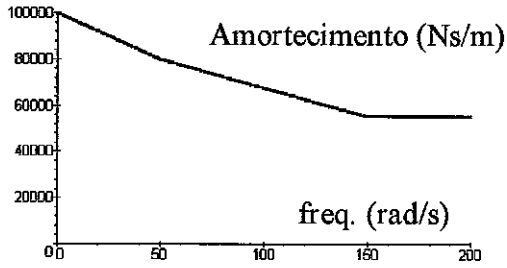


Fig. 6.3. Primeira curva de dependência

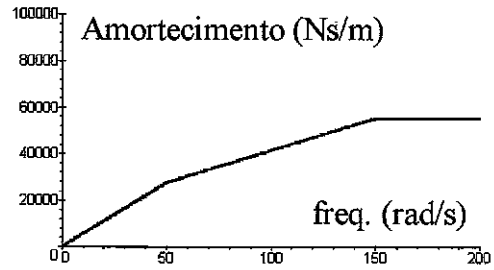


Fig. 6.4. Segunda curva de dependência

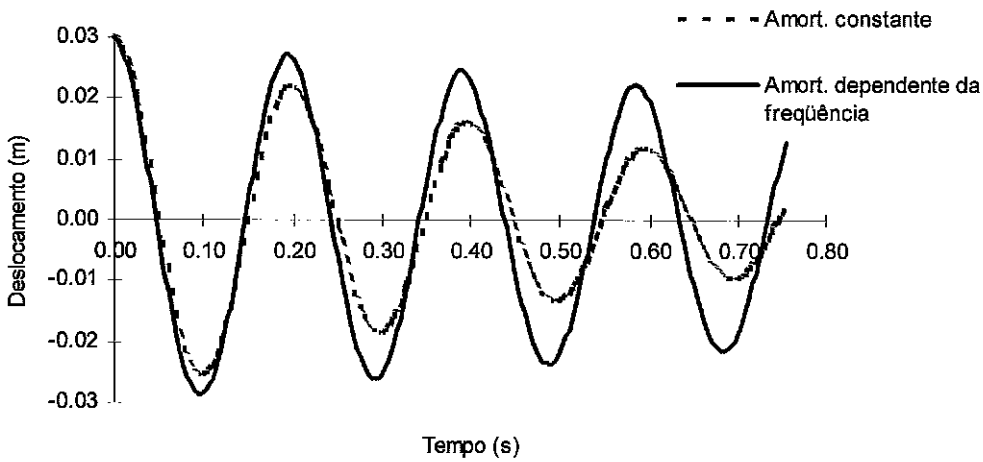


Fig. 6.5. Solução para *v(0)* com *c* dependente da freqüência (Fig. 6.4).

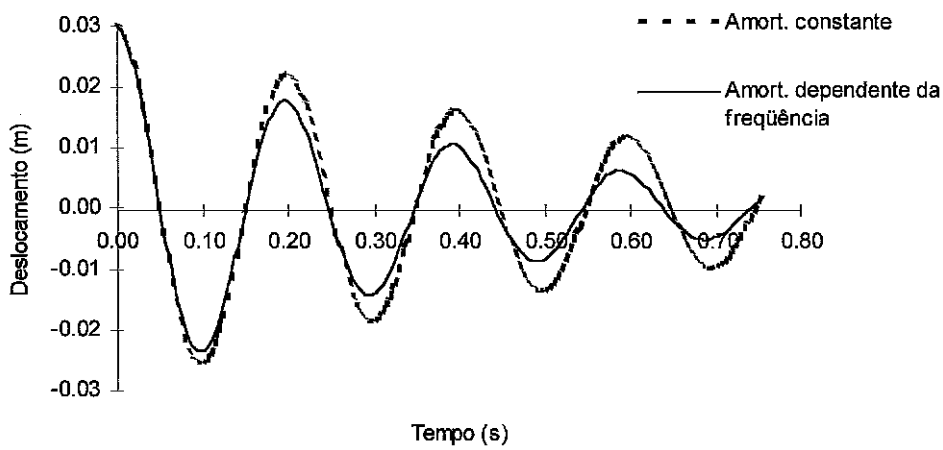


Fig. 6.6. Solução para *v(0)* com *c* dependente da freqüência (Fig. 6.3).

Os exemplos ilustrados nas Figs. (6.5) e (6.6) mostram que o procedimento elaborado neste trabalho soluciona adequadamente equações de movimento de sistemas estruturais que possuem propriedades dependentes da freqüência. Nestes exemplos, foram adotados os seguintes valores: N= 800, S=50 e Δt=0.02 s.

6.3. EXEMPLO 2

O sistema estrutural ilustrado na Fig. 6.7 é composto de uma massa de 17,5 t e

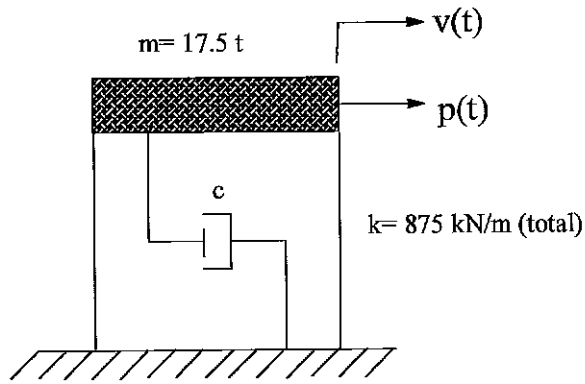


Fig. 6.7. Sistema massa-mola linear.

uma rigidez de 875 *kN/m* e está sujeito a uma carga triangular impulsiva mostrada na Fig. 6.8.

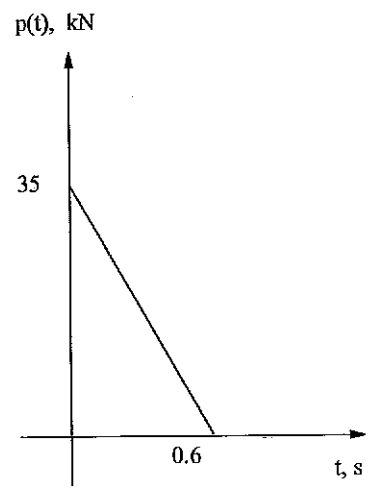


Fig. 6.8. Carga triangular impulsiva.

A seguir esse sistema é analisado considerando-se três modelos distintos de amortecimento, a saber, amortecimento viscoso, amortecimento dependente da freqüência e amortecimento histerético.

Inicialmente se adotará um amortecimento viscoso constante, com $c = 21$ *kNs/m*, correspondendo a uma taxa de amortecimento $\xi = 8{,}49$ %. Nesse caso, usam-se dois procedimentos para achar a solução da equação de movimento. No domínio do tempo ela é encontrada pelo processo de Newmark-Beta. No domínio da freqüência, utiliza-se a *ImFT*, com oitocentos termos de Fourier ($N = 800$) e duzentos termos no histórico de resposta ($S = 200$). Para os dois processos o intervalo de tempo é 0,0125 *s*. Os históricos de resposta estão plotados na Fig. 6.9.

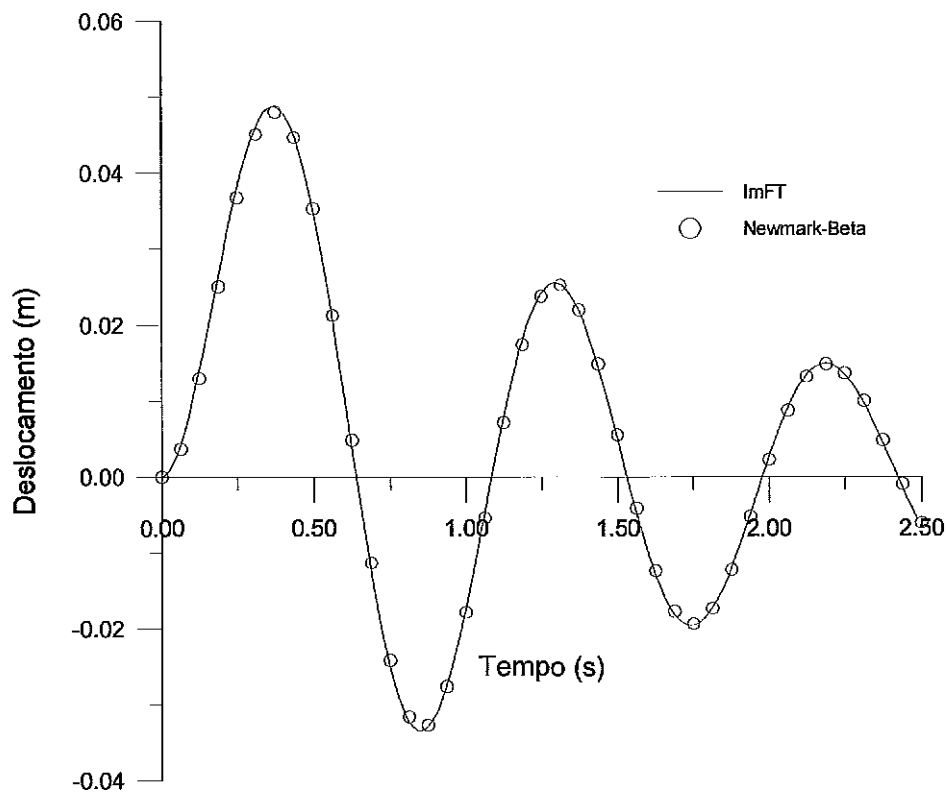


Fig. 6.9. Respostas obtidas por processos no domínio do tempo e freqüência.

Um outro modelo é aquele dotado de amortecimento variável com a freqüência, $c = c(\overline{\omega})$, cuja lei de variação está ilustrada na Fig. 6.10.

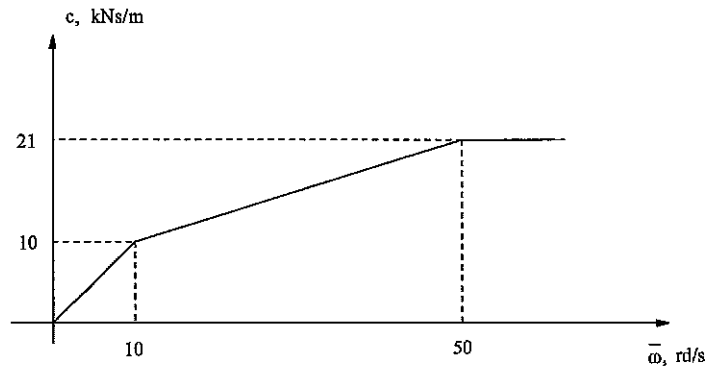


Fig. 6.10. Lei de variação do amortecimento com a freqüência.

As equações foram resolvidas pelo procedimento da *ImFT*, comparando os históricos do modelo de amortecimento variável com aquele dotado de amortecimento constante, como mostra a Fig. 6.11.

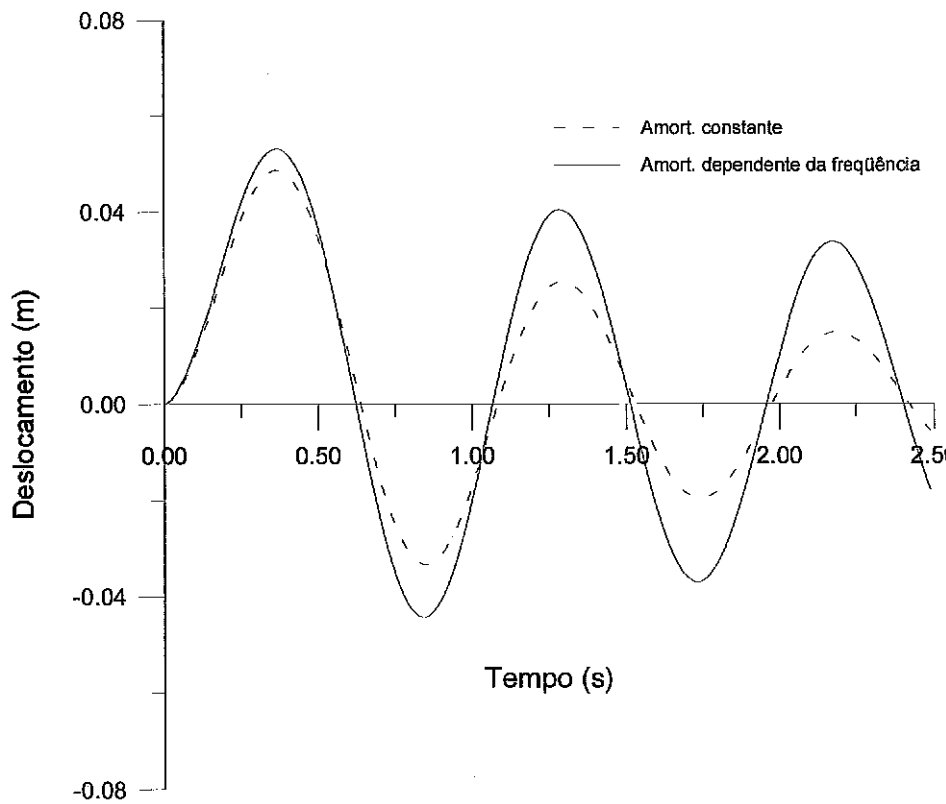


Fig. 6.11. Históricos de resposta de sistema com amortecimento constante e variável.

Finalmente, faz-se a análise do sistema estrutural dotado, agora, de amortecimento histerético, com o coeficiente de proporcionalidade dado pela Eq. (2.37). A Fig. 6.12 apresenta a resposta para essa hipótese, comparando-a com o modelo para o qual adotou-se amortecimento viscoso constante. Para as duas últimas análises, adotaram-se os mesmos parâmetros do primeiro modelo, isto é, oitocentos termos de Fourier, duzentos termos na resposta e mesmo Δt.

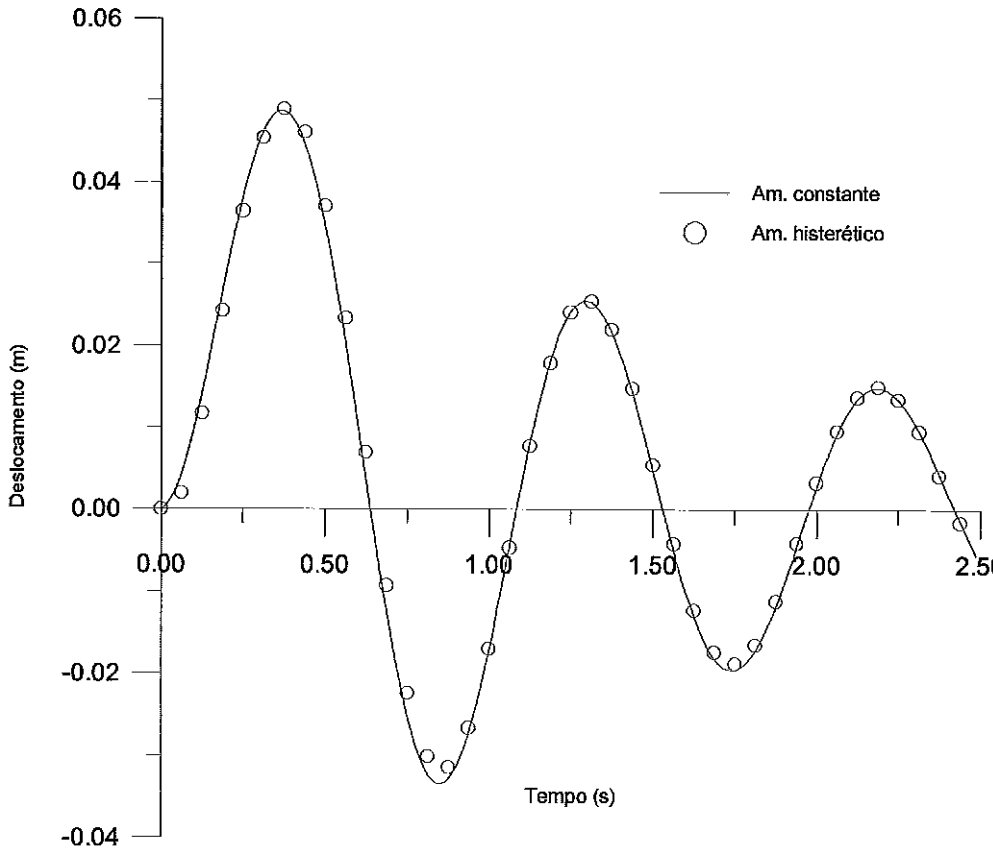


Fig. 6.12. Históricos de resposta de sistema com amortecimento viscoso e histerético.

6.4. EXEMPLO 3

O sistema massa-mola com um grau de liberdade, mostrado na Fig. 6.13a, possui massa igual a 17,5 *t* e amortecimento viscoso constante igual a 21 *kNs/m*. A mola possui rigidez bilinear mostrada na Fig. 6.13b.

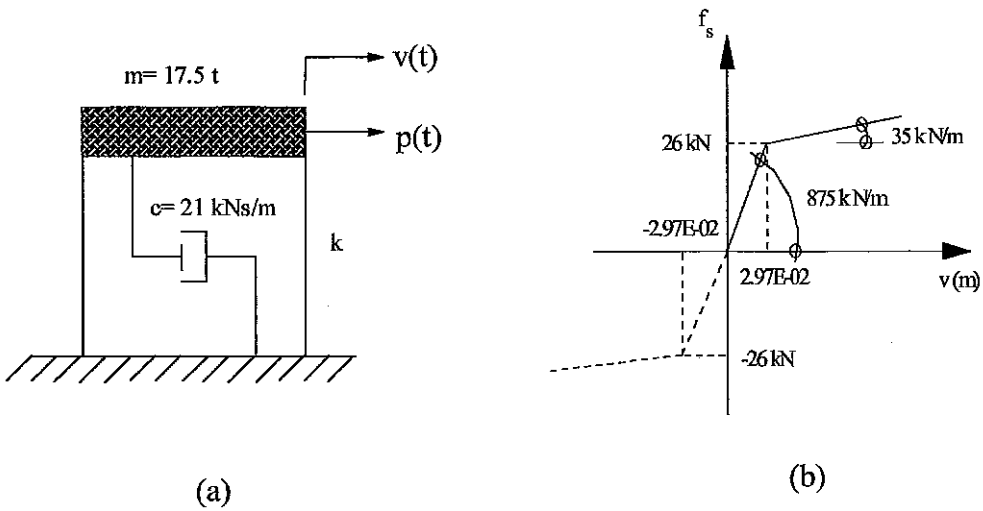


Fig. 6.13. Sistema massa-mola.

O sistema está sujeito ao histórico de carregamento indicado na Fig. 6.14. A freqüência natural vale 7,07 *rd/s* e a taxa de amortecimento é de 8,49%.

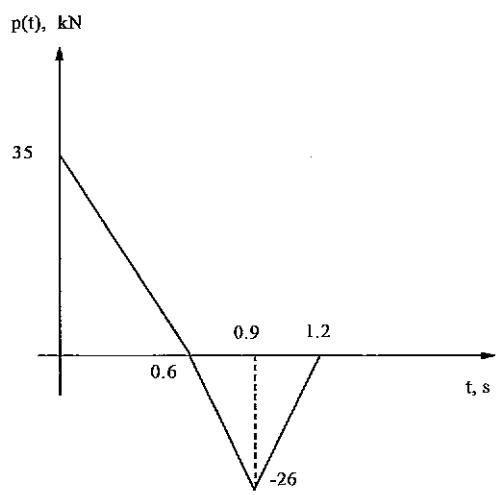


Fig. 6.14. Histórico do carregamento.

Neste exemplo, foram adotados: N=2000, Δt=0.0125 s e S=120 termos por segmento de tempo. A Fig. 6.15 apresenta o histórico da resposta. Também está plotado, para comparação, o histórico de resposta da análise linear. O gráfico mostra que a estrutura inicia o movimento em regime linear, depois entra em regime não linear em tração, volta a comportar-se linearmente, entra em regime não linear em compressão e, finalmente, oscila linearmente até parar. Assim, quando em repouso, a mola estará submetida a uma deformação residual de compressão.

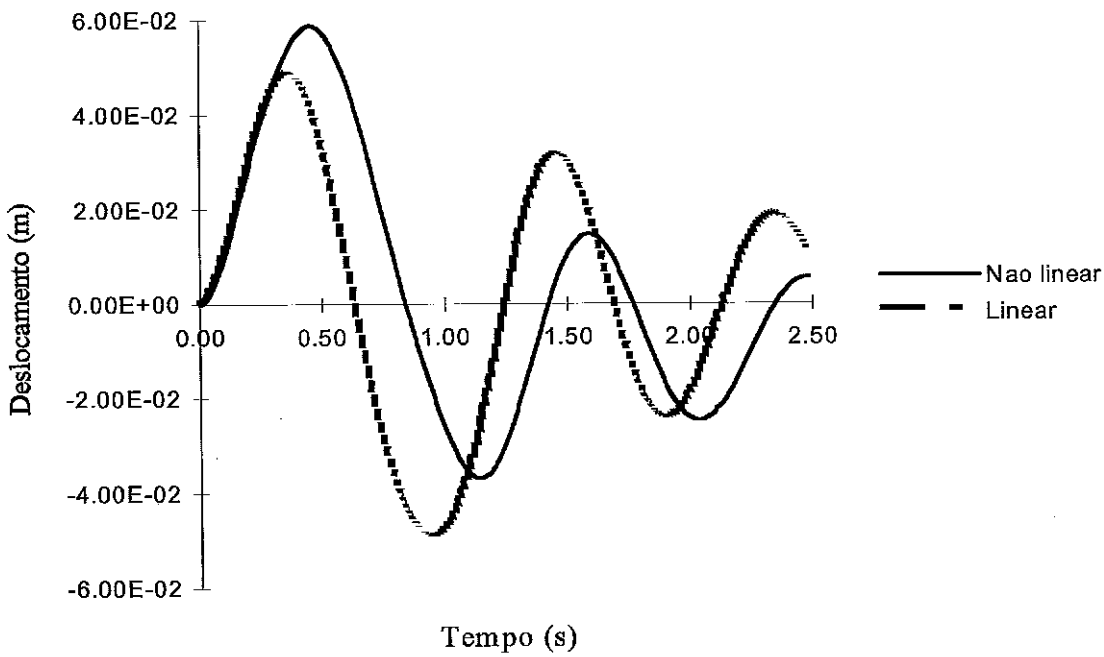


Fig. 6.15. Histórico de deslocamentos, linear e não-linear.

6.5. EXEMPLO 4

A Fig. 6.16 apresenta um *shear building* (CLOUGH e PENZIEN, 1993),dotado de um amortecedor discreto na direção do primeiro grau de liberdade.

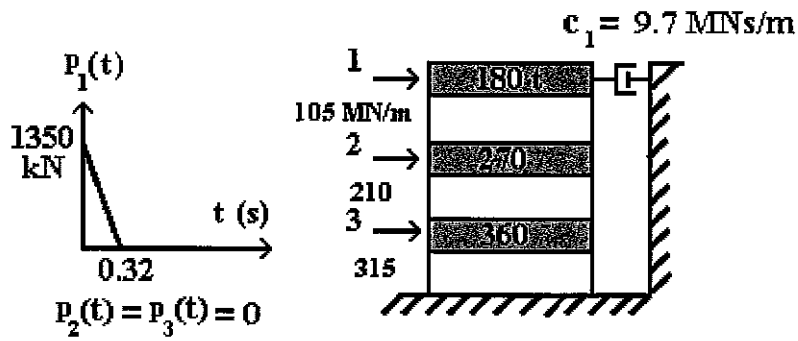


Fig. 6.16. *Shear building* com 3 GL e amortecedor discreto no 1° GL.

Neste caso, o amortecimento é não-proporcional visto que a matriz modal de amortecimento deixa de ser ortogonal à base modal obtida do sistema em vibração livre não amortecida. A análise exata foi feita com o uso da Eq.(5.16). Após a conversão do carregamento para o domínio da freqüência (com o uso de *FFT* com 1024 termos), a resposta no domínio da frequência foi encontrada multiplicando-o pela inversa da matriz de impedância. A aplicação da transformada inversa de Fourier (com o uso de *iFFT* com 1024 termos) ao resultado forneceu a resposta exata no domínio do tempo.

Os gráficos 6.17, 6.18 e 6.19 apresentam as respostas para os três graus de liberdade, comparando as respostas exatas com aquelas obtidas através da aplicação dos procedimentos de pseudo-forças e *ImFT*, para ε=5% e ε=1% (Eq. (5.41)), com N=1024 termos no espectro de freqüências, S=30 termos na resposta e Δt=0.01 *s*. As freqüências naturais (*rad/s*) desse sistema são: 14.318, 30.613 e 45.455. Como se pode observar, a

resposta foi exata quando se reduziu ε (Eq. (5.41)) de 5% para 1%. Alternativamente, conservando ε=5%, resultados mais precisos também poderiam ser obtidos com valores mais elevados de *N*.

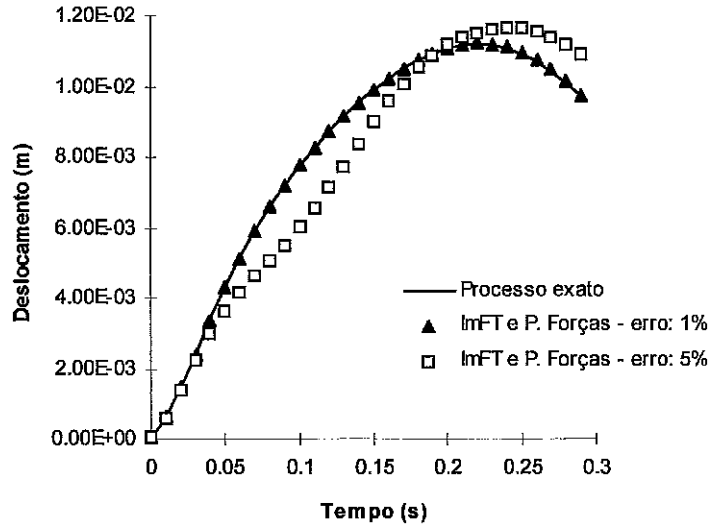


Fig. 6.17. Respostas do *shear building* obtidas por processo exato e pela *ImFT* (1o. GL).

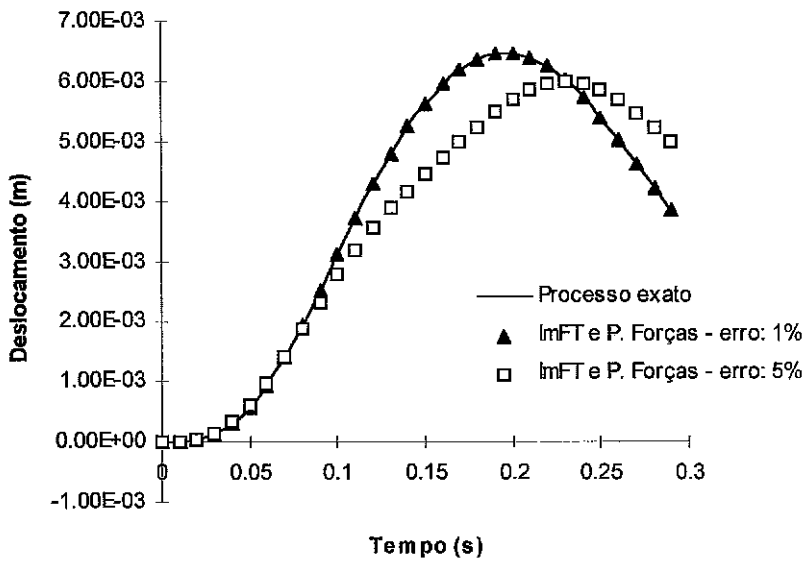


Fig. 6.18. Respostas do *shear building* obtidas por processo exato e pela ImFT (2o. GL).

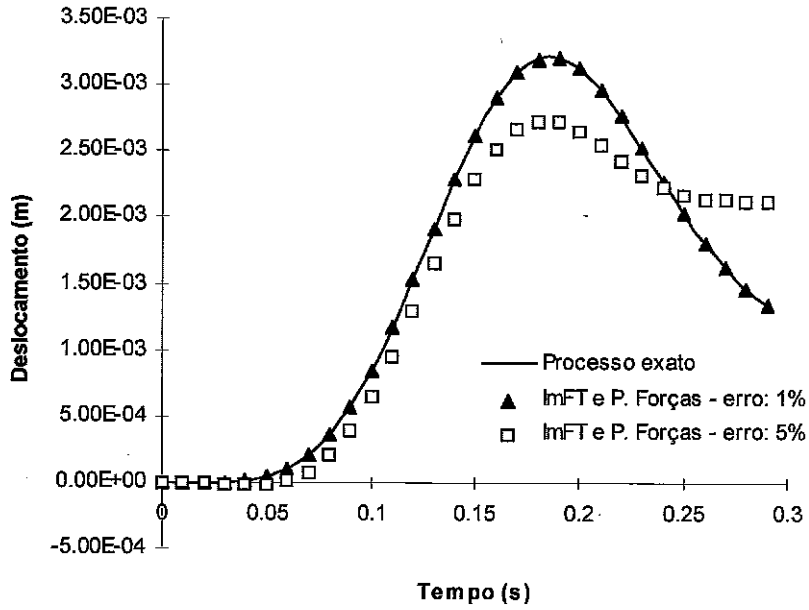


Fig. 6.19. Respostas do *shear building* obtidas por processo exato e pela ImFT (3o. GL).

6.6. EXEMPLO 5

O sistema de dois graus de liberdade mostrado na Fig. 6.20 é um modelo simplificado de um reator nuclear. As massas da fundação e da estrutura são, respectivamente, 1.E+08 *kg* e 3.E+11 *kg*. O coeficiente de rigidez da estrutura é k_s=6.E+11 *N/m*.

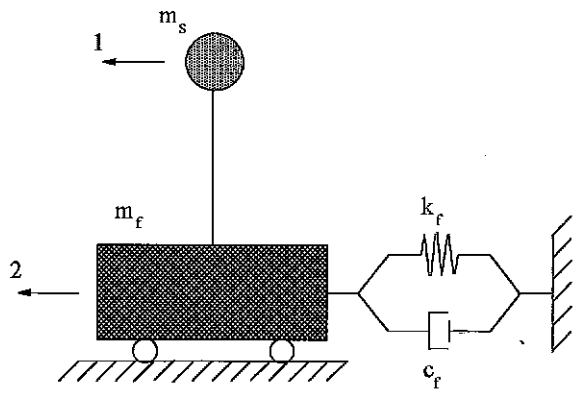


Fig. 6.20. Sistema de dois graus de liberdade.

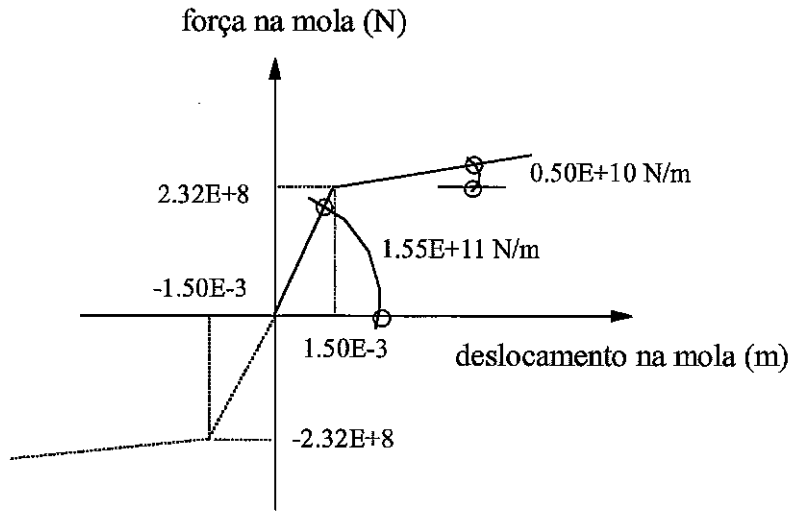


Fig. 6.21. Rigidez bilinear do solo.

O solo possui comportamento não-linear, com rigidez definida por modelo bilinear com endurecimento cinemático (Fig. 6.21). O sistema é submetido a uma carga de impacto na direção 1, como mostrado na Fig. 6.22, representando um choque da estrutura com uma aeronave, segundo WOLF (1987). A constante de amortecimento do solo é 3.79E+09 *Ns/m*, calculada segundo as expressões de RICHART *et al.* (1970).

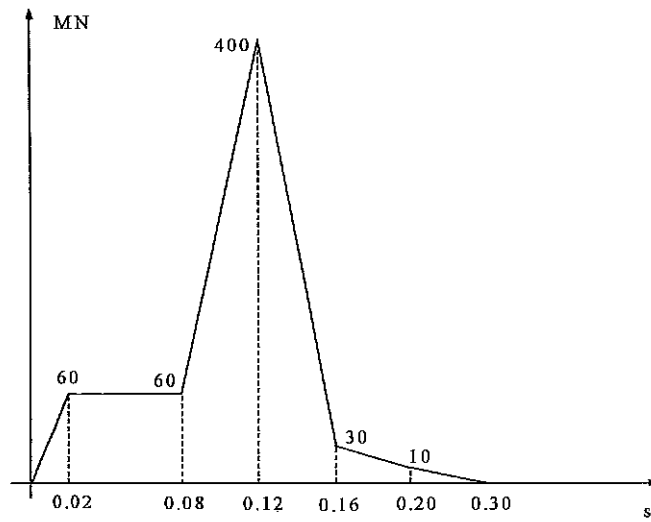


Fig. 6.22. Carga de impacto atuante sobre a estrutura.

A Tabela 6.1 abaixo mostra as freqüências naturais dos modos de vibração e correspondentes taxas de amortecimento.

Tab. 6.1. Freqüências naturais e taxas de amortecimento.

Modo	Freqüência (*rad/s*)	Taxa de amortecimento
1	31,26	0,2824
2	56,33	0,1797

A resposta foi encontrada adotando-se N=1024, S=60 e Δt=0.01 s. O histórico dos deslocamentos da fundação é mostrado na Fig. 6.23. Essa análise mostra a aplicabilidade do método apresentado para sistemas não lineares dotados de amortecimento não proporcional.

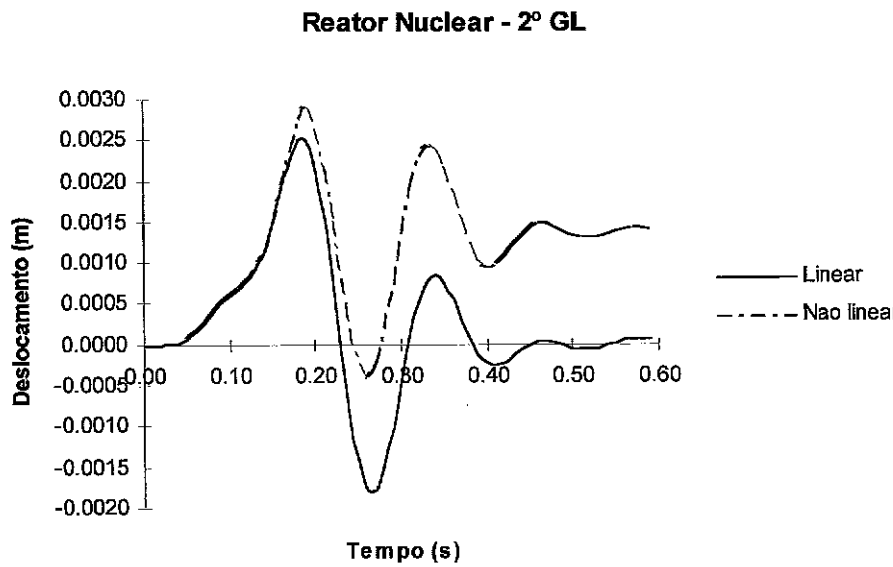


Fig. 6.23. Histórico dos deslocamentos da fundação.

CAPÍTULO

7

7.1. CONCLUSÕES

Procurou-se com este trabalho apresentar um estudo cujo objetivo foi o de viabilizar a determinação da resposta das equações diferenciais de movimento, através de um método de integração no domínio da freqüência, de sistemas estruturais possuindo não-linearidade física e dotado de amortecimento com distribuição não-uniforme ou com amortecedores discretos, caracterizando amortecimento não-proporcional. Utilizou-se para isso as transformadas discretas de Fourier, apresentadas sob uma compacta e elegante forma matricial, denominada *transformada implícita de Fourier* (*ImFT*).

Diversas conclusões podem ser extraídas do presente estudo. O cálculo das transformadas discretas de Fourier pelo algoritmo da *FFT* exige um número N de termos de Fourier muito elevado para a obtenção de precisão adequada dos resultados, sendo tradicionalmente adotado igual a uma potência de 2. Esse número de termos é o mesmo tanto para o cálculo da resposta no domínio da freqüência quanto para aquele exigido para a sua conversão para o domínio do tempo, através da transformada discreta inversa, encarecendo o esforço computacional. Pela transformada implícita de Fourier o número de termos da resposta é arbitrário, independe do número de termos de Fourier.

A estabilidade das transformadas de Fourier permite se usar, na análise dinâmica não-linear, intervalos de tempo Δt maiores do que aqueles adotados nos métodos de integração no tempo. Conforme mencionou-se na introdução, os métodos de integração no tempo requerem um valor de Δt da ordem de grandeza de $T_i /10$, sendo T_i o menor período natural a ser incluído na análise, para garantir a estabilidade e precisão aceitável dos resultados. KAWAMOTO (1983) faz menção que em uma análise no domínio da freqüência o valor de Δt é de 5 a 10 vezes maior do que aquele exigido por métodos de integração no tempo.

O correto tratamento das condições iniciais foi essencial para a consecução dos objetivos propostos, isto é, a análise por segmentação de tempo de sistemas com comportamento fisicamente não-linear, usando-se superposição modal. Para validar as expressões deduzidas, elaborou-se através do exemplo 1 um teste rigoroso, no qual comparou-se o resultado obtido pela *ImFT* com o exato, obtido no domínio do tempo. O histórico de resposta foi obtido pela *ImFT*, tanto para o exemplo de deslocamento inicial quanto para o de velocidade inicial, por segmento de tempo, sendo cada segmento igual a um quinto do período natural do sistema massa-mola. As Figs. 6.1 e 6.2 ilustram a excelente concordância dos resultados.

O procedimento adotado mostrou ser uma ferramenta poderosa na análise dinâmica, visto que uma mesma formulação pode ser utilizada para encontrar a solução das equações de movimento de sistemas com diferentes tipos de comportamento, como ilustrado no exemplo 2. Iniciou-se este exemplo comparando o histórico de respostas de um sistema linear massa-mola obtido pela *ImFT* com aquele obtido por integração no tempo. Depois, calcularam-se os históricos desse mesmo sistema, porém adotando-se

em uma hipótese, modelo com amortecimento variável com a freqüência e na outra, modelo com amortecimento histerético, como ilustram as Figs. 6.11 e 6.12.

Para sistemas com múltiplos graus de liberdade o método proposto mostrou sua versatilidade graças ao uso do conceito de pseudo-forças e superposição modal clássico. Em um mesmo procedimento são tratados sistemas estruturais com comportamento fisicamente não-linear ou com amortecimento não-proporcional. Isto é fortemente evidenciado no exemplo 5, onde se analisa a interação solo-estrutura de um modelo simplificado de um reator nuclear. Trata-se de um sistema estrutural extremamente complexo, com amortecimento não proporcional e fisicamente não-linear.

7.2. SUGESTÕES

Esta pesquisa objetivou estudar a viabilidade da análise de sistemas dinâmicos não lineares com amortecimento não proporcional, dependente da freqüência ou histerético. Os objetivos foram plenamente alcançados, aplicando-se sua formulação em exemplos modelados como *shear building*, com poucos graus de liberdade, porém, complexos e representativos, portanto sem perda de generalidade. Como uma primeira sugestão, propõe-se implementar o presente procedimento em um programa de elementos finitos de propósito geral, para testar o algoritmo de solução em grandes sistemas estruturais como, por exemplo, em estruturas reticulares, placas e cascas, fazendo um estudo comparativo com os métodos de integração no tempo quanto ao esforço computacional, precisão e eficiência.

Quanto à técnica de superposição modal, sugere-se que sejam implementadas outras técnicas de extração modal e de truncamento modal, adequadas para grandes sistemas, incluindo estudos de outros critérios de convergência.

Deve-se estender também a aplicação desta formulação à análise não-linear de sistemas estruturais para os quais as relações σ x ε não sejam mais bilineares, mas obedeçam a uma relação não-linear mais geral, especificada para o material que compõe a estrutura, adotando-se uma estratégia de solução compatível com a complexidade exigida.

CAPÍTULO

8

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

APRILE, A., BENEDETTI, A., TROMBETTI, T., 1994, "On Non-Linear Dynamic Analysis in the Frequency Domain: Algorithm and Applications", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 23, pp. 363-388.

BARBAT, A.H., CANET, J.M., 1994, Estructuras Sometidas a Acciones Sismicas, 2 ed. Barcelona, CIMNE.

BATHE, K.J., 1982, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. New Jersey, Prentice-Hall.

BIELAK, J., 1975, "Dynamic Behaviour of Structures with Embedded Foundations", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 3, pp. 259-274.

BORINO, G., MUSCOLINO, G., 1986, "Mode Superposition Methods in Dynamic Analysis of Classically and Non-Classically Damped Linear Systems", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 14, pp. 705-717.

CAMERON, T.M., GRIFFIN, J.H., 1989, "An Aternating Frequency/Time Domain method for Calculating the Steady-State Response of Non-Linear Dynamic Systems", Journal of Applied Mechanic, ASME, 56, 149-154.

CHANG, C.J., ELGHADAMSI, F.E., MOHRAZ, B., 1989, "Modal Analysis of Nonlinear Systems with Nonclassical Damping", American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, n. 89-1198-CP.

CHEN, T., TAYLOR, R.L., 1987, "Properties and Solutions of Eigensystem of Nonproportionally Damped Linear Dynamic Systems", In: *Numerical Methods in Engineering Theory and Applications* (*NUMETA 87*), n. t5/1.

CLARET, A.M., 1991, *Solução de Sistemas Estruturais Dinâmicos Não-Lineares com Amortecimento Não-Proporcional e Dependente da Freqüência.* Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

CLOUGH, R.W., MOJTAHEDI, 1979, "Earthquake Response Analysis Considering Non-Proportional Damping", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 4, pp. 489-496.

CLOUGH, R.W., PENZIEN, J., 1975, *Dynamics of Structures.* 1 ed. New York, McGraw-Hill.

CLOUGH, R.W., PENZIEN, J., 1993, *Dynamics of Structures.* 2 ed. New York, McGraw-Hill.

COOLEY, J.W., TUKEY, 1965, "An Algorithm for Machine Calculation of Complex Fourier Series, *Mathematical Computations*, v. 19, pp. 297-301.

FERREIRA, W.G., CLARET, A.. M., VENANCIO-FILHO, F., MANSUR, W.J., RIBEIRO, M.V., 1996, "Interpolation Procedure for Dynamic Analysis in Frequency Domain", Join Conference of Italian Group of Computational Mechanics and Ibero-Latin American Association of Computational Methods in Engineering, Padova, Italy, September.

HALL, J.F., 1982, "An FFT Algorithm for Structural Dynamics", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 10, pp. 797-811.

HILLMER, P., SCHMID, G., 1988, "Calculation of Foundation Uplift Effects Using a Numerical Laplace Transform", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 16, pp. 789-801.

HURTY, W.C., RUBINSTEIN, M.F., 1964, *Dynamics of Structures.* New Jersey, Prentice-Hall.

IBRAHIMBEGOVIC, A., WILSON, E.L., 1989, "Simple Numerical Algorithms for the Mode Superposition Analysis of Linear Structural Systems with Non-Proportional Damping", *Computers & Structures*, v. 33, 523-531.

KAWAMOTO, J.D., 1983, *Solution of the Nonlinear Dynamic Structural Systems by a Hybrid Frequency-Time Domain Approach.* MIT Research Report R83-5, Dept. of Civil Engineeering, Cambridge.

KOBORI, T., HISATOKU, T., NAGASE, T., 1984, *Nonlinear Uplift Behaviour of Soil-Structure System with Frequency-Dependent Characteristics.* In: WORLD CONFERENCE IN EARTHQUAKE ENGINEERING (Proceedings), 8, pp. 897-904, San Francisco.

LING, F.H., WU, X.X., 1987, "Fast Galerkin Method and its Application to determine periodic solution of non-linear oscillators", *Int. J. Non-Linear Mech.*, v. 22, 89-98.

MAU, S.T., 1988, "A Subspace Modal Superposition Method for Non-Classically Damped Systems", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 16, pp. 931-942.

NOVAK, M., 1974, "Dynamic Stiffness and Damping of Piles", *Canadian Geotechnical Journal*, v. 11, pp. 574-598.

RICHART, F.E., WOODS, R.D., HALL, J.R., 1970, Vibrations of Soil and Foundations, New Jersey, Prentice-Hall.

ROESSET, J.M., WHITMAN, R.V., DOBRY, R., 1973, "Modal Analysis of Structures with Foundation Interaction", *Journal of The Structural Division*, v. ST3, pp. 399-416.

SARRAZIN, M.A., ROSSET, J.M., 1972, "Dynamic Soil-Structure Interaction", *Journal of the Structural Division (Proceedings of th American Society of Civil Engineeers)*, v. ST7, pp. 1541-1544.

SINGH, M.P., GHAFORY-ASHTIANY, M., 1986, "Modal Time History Analysis of Non-Classically Damped Structures for Seismic Motions", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 14, pp. 797-811.

VELETSOS, A.S., MEEK, J.W., 1974, "Dynamic Behaviour of Building-Foundation Systems", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 3, pp. 121-138.

VELETSOS, A.S., VENTURA, C.E., 1976, "Modal Analysis of Non-Classically Danped Linear Systems", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 14, pp. 217-243.

VELETSOS, A.S., WEI, Y.T., 1971, "Lateral and Rocking Vibration of Footing", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, v. SM9, pp. 1227-1248.

VENANCIO-FILHO F. , CLARET, A.M., 1992, "Matrix Formulation of the Dynamic Analysis of SDOF in the Frequency Domain", *Computers & Structures*, v. 14, pp. 217-243.

VENANCIO-FILHO F. , CLARET, A.M., 1995, "Frequency Domain Analysis of MDOF Systems: Nodal and Modal Coordinates Formulations", *Computers & Structures*, v. 56, n. 1, pp. 189-191.

VENANCIO-FILHO F. , CLARET, A.M., 1996, "Frequency Domain Dynamic Analysis with Application to Soil-Structure Interaction: Linear and Nonlinear Systems", *Advances in Computational Methods for Simulation*, edited by B.H.V. Topping, Edinburgh, UK.

WARBURTON, G.B., SONI, S.R., 1977, "Errors in Response Calculations for Non-Classically Damped Structures", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 5, pp. 365-376.

WOLF, J.P.. 1987, Nonlinear Soil-Structure Interaction Analysis Based on Hybrid Frequency-Time Domain Formulation. Zurique: Electrowatt Engineering Services, pp. 5.5/25-5.5/32.