ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA TRIDIMENSIONAL ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO UTILIZANDO TÉCNICAS IMPLÍCITAS

Beatris Maria Teixeira Neitzel

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. José Claudio de Faria Telles, Ph.D.
(Presidente)

Prof. Webe João Mansur, Ph.D.

Prof. José Antonio Marques Carrer, D.Sc.

Prof. Álvaro Luiz Gayoso de A. Coutinho, D.Sc.

Prof. Luiz Henry Monken e Silva, Dr. Eng.

RIO DE JANEIRO, RJ-BRASIL
OUTUBRO DE 1997

NEITZEL, BEATRIS MARIA TEIXEIRA
Análise Elastoplástica Tridimensional Através do Método dos Elementos de Contorno Utilizando Técnicas Implícitas [Rio de Janeiro] 1997.
VII, 84 p 29.7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia Civil, 1997).
Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.
1. Elementos de Contorno.
2. Não linearidade física.
I. COPPE/UFRJ II. TÍTULO(série)

AGRADECIMENTOS

Ao professor José Claudio de Faria Telles pela orientação, atenção, amizade e estímulo durante o desenvolvimento deste trabalho.

À Beatriz S. L. P. de Lima e Rosane M. Alves pelo apoio constante e pelo privilégio da convivência e amizade.

Aos professores José Antonio M. Carrer, Álvaro Luiz G. de A. Coutinho e Luiz Landau pelas sugestões, que enriqueceram este trabalho.

À Izete Marina L. Rizzo e Nara Villanova Menon, professoras da Universidade Estadual de Maringá, pelo apoio incondicional.

À todos os colegas e professores do Programa de Engenharia Civil da COPPE.

À Universidade Estadual de Maringá (PR).

À Coordenação do Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Para o meu marido Ivo, cujo apoio, carinho e compreensão em todas as horas, tornaram possível a execução deste trabalho.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.).

ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA TRIDIMENSIONAL ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO UTILIZANDO TÉCNICAS IMPLÍCITAS.

Beatris Maria Teixeira Neitzel

Setembro/1997

Orientador: José Claudio de Faria Telles.
Programa: Engenharia Civil.

Este trabalho emprega o Método dos Elementos de Contorno na solução de problemas elastoplásticos tridimensionais, utilizando a formulação das Tensões Iniciais e técnicas implícitas, dando ênfase à técnica de Newton-Raphson em sua forma original. Para o cálculo das integrais singulares de domínio, presentes no tipo de problemas aqui analisados, foi desenvolvido e é apresentado um procedimento de integração.

A solução dos sistemas de equações lineares resultantes da análise elastoplástica foi efetuada através de um algoritmo iterativo, que teve seu desempenho comparado a dois algoritmos de solução direta. Foi, também, implementada uma forma de controle de erro algébrico do algoritmo iterativo, com o objetivo de minimizar o esforço computacional durante a execução da análise elastoplástica.

Os exemplos apresentados demonstram a viabilidade da aplicação do Método dos Elementos de Contorno na análise elastoplástica tridimensional utilizando técnicas implícitas, assim como o bom desempenho do algoritmo iterativo adotado.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

THREE-DIMENSIONAL ELASTOPLASTIC ANALYSIS WITH BOUNDARY ELEMENT METHOD APPLYING IMPLICIT TECHNIQUES.

Beatris Maria Teixeira Neitzel

Setembro/1997

Advisors: José Claudio de Faria Telles.
Department: Civil Engineering

This work applies the Boundary Element Method to the solution of three-dimensional elastoplastic problems, using the initial stress formulation and implicit techniques. Emphasis was given to the Newton-Raphson technique in its original form. For calculation of the domain singular integrals, present in the type of problems here analyzed, an integration procedure was developed and is also presented.

The solution of the linear equation systems, resultant of the elastoplastic analysis, was made through an iterative algorithm, that was compared with two direct solution algorithms. A strategy for control of the algebraic error of the iterative algorithm was implemented, with the objective of minimizing the computational effort during the execution of the elastoplastic analysis.

The examples presented demonstrate the viability of the application of the Boundary Element Method in three-dimensional elastoplastic analysis using implicit techniques, as well as the good performance of the iterative algorithm adopted.

Índice

Capítulo I - Introdução. 1
Capítulo II - Solução de Problemas Elásticos e Elastoplásticos. 3
II.1. Introdução 3
II.2. Solução de Problemas Elásticos 3
II.3. Comportamento Inelástico dos Materiais 5
II.4. Solução do problema Elastoplástico 8
II.4.1. Critérios de Escoamento 8
II.4.2. Relações Tensão-Deformação Pós Escoamento 10
II.5. A formulação do Problema elastoplástico através das considerações de Tensões Iniciais e Deformações Iniciais 12
Capítulo III - O problema Elastoplástico analisado através do MEC. 14
III.1. Introdução 14
III.2. A Identidade de Somigliana 14
III.3. Equação Integral das Componentes de Tensão nos pontos internos 18
III.4. Equação Integral de Contorno 19
Capítulo IV - Solução Numérica do Problema Elastoplástico. 20
IV.1. Introdução 20
IV.2. Solução Numérica 20
IV.3. Técnicas Implícitas de Solução do Problema Elastoplástico 23
IV.4. Técnicas implícitas adotadas 24
Capítulo V - Discretização do Contorno e Domínio 26
V.1. Introdução 26
V.2. Discretização do contorno 26
V.3. Discretização do Domínio 26
V.4. Integrais a serem efetuadas 28
V.5. Funções de Forma 29
V.6. Integração Não Singular 31
V.7. Integração Singular 34
V.7.1. Execução das Integrais I_{jki} 35
V.7.2. Execução das Integrais I_{ijkl} 38
V.7.2.1. Obtenção do Raio da Esfera 38
V.7.2.2. Procedimento para Integração Numérica 38
Capítulo VI - Solução Iterativa dos Sistemas de Equações Lineares Resultantes da Análise Elastoplástica 41
VI.1. Introdução 41
VI.2. O Algoritmo GMRESm 42
VI.3. Controle de Erro Algébrico da Solução dos Sistemas de Equações Lineares Resultantes do Processo Elastoplástico 43
VI.4. Processos de Solução direta Utilizados para avaliação do GMRES 45
VI.4.1. Subrotina LSLRG 45
VI.4.2. Subrotina INVER 46
Capítulo VII - Aplicações 47
VII.1. Introdução 47
VII.2. Prisma Tracionado 48
VII.3. Placa Circular Perfurada 51
VII.4. Poliestireno sob Tensão 60
Capítulo VIII - Conclusão 80
Referências Bibliográficas 84

Capítulo I

Introdução

A formulação do Método dos Elementos de Contorno para problemas inelásticos bi e tridimensionais foi apresentada por Telles e Brebbia em 1979 (1979). Resultados da análise de problemas elastoplásticos em estado plano de tensão e deformação, com o método formulado através de deformações iniciais, foram apresentados pelos mesmos autores (1980a) utilizando o critério de von Mises, demonstrando a potencialidade do método para este tipo de problemas. Em outra publicação (1980b), os mesmos autores apresentaram a formulação das tensões iniciais, com quatro critérios de escoamento: Tresca, von Mises, Mohr-Coulomb e Drucker-prager. O desenvolvimento do método baseado no modelo de Perzyna, para materiais que apresentam comportamento elástico / viscoplástico foi apresentado também por estes autores (1981). Este modelo permite o tratamento unificado para problemas de plasticidade, viscoplasticidade e fluência. O estudo completo foi apresentado por Telles (1983).

Inicialmente, os problemas elastoplásticos solucionados através do Método dos Elementos de Contorno utilizavam técnicas explícitas, de fácil implementação computacional e grande eficiência. As técnicas implícitas, mais gerais, foram, posteriormente, aplicadas na solução de problemas viscoplásticos axissimétricos por Telles (1985), problemas de torção elastoplástica de sólidos de revolução por Carrer e Telles (1988) e problemas bidimensionais estáticos e dinâmicos transientes por Carrer e Telles (1990) e Carrer (1991). Nestes trabalhos foi utilizada a técnica de Newton-Raphson modificada e uma versão alternativa desta, onde a matriz tangente é atualizada na primeira e segunda iterações de um mesmo incremento de carga.

O objetivo do trabalho aqui desenvolvido é a aplicação do Método dos Elementos de Contorno à análise elastoplástica tridimensional estática. Para isto foi utilizada a formulação das Tensões Iniciais e as técnicas implícitas de Newton-Raphson e Newton-Raphson modificada para solução do problema elastoplástico, com ênfase para a técnica de Newton-Raphson na sua forma original.

Como é de conhecimento, a integração é de fundamental importância na obtenção de resultados através do Método dos Elementos de Contorno. Neste trabalho foram desenvolvidos os procedimentos de integração para as integrais de domínio presentes na formulação elastoplástica do método.

Considerando o esforço computacional demandado pelas técnicas implícitas, foi concedida atenção especial à forma de solução dos sistemas de equações gerados pela análise elastoplástica. Assim, foi adotado um método de solução iterativa que tem demonstrado grande eficiência na solução de sistemas de equações lineares gerados pelo MEC. Este algoritmo foi apresentado por Saad e Schultz (1986) e denominado GMRES tendo duas versões. Aqui, será utilizada a versão GMRESm. Esta versão do algoritmo foi empregada anteriormente por Barra, Coutinho, Mansur e Telles (1992) na solução de sistemas de equações gerados por problemas elásticos bidimensionais e por Neitzel

(1995) na solução de sistemas de equações gerados por problemas elastoplásticos bidimensionais. Nos dois casos o desempenho do método foi excelente, motivando sua escolha para o caso tridimensional. Ainda, com o objetivo de minimizar o tempo computacional do procedimento de análise, foi implementado um controle para o erro algébrico da solução dos sistemas de equações lineares gerados.

Os capítulos a seguir mostram a formulação elastoplástica utilizada para o MEC assim como detalham todos os procedimentos necessários para a sua implementação numérica e os resultados obtidos com a mesma.

Descrição dos capítulos:

O capítulo II apresenta, com o intuito de revisão, as formas de solução de problemas elásticos e elastoplásticos através das equações da Teoria da Elasticidade e da teoria clássica da Plasticidade.

No capítulo III são apresentadas as equações integrais do Método dos Elementos de Contorno para a formulação das Tensões Iniciais.

O capítulo IV apresenta a solução numérica das equações do capítulo III, juntamente com as expressões matriciais das mesmas.

O capítulo V tem por objetivo descrever as formas de discretização utilizadas para o contorno e para o domínio, apresentando o desenvolvimento das integrais de domínio singulares, quase singulares e não singulares.

No capítulo VI é feita uma exposição sobre a solução iterativa dos sistemas de equações resultantes da análise elastoplástica, do controle de erro algébrico aplicado ao método iterativo e das formas de avaliação do desempenho deste método, o GMRESm.

O capítulo VII apresenta os resultados numéricos obtidos e contém a avaliação dos resultados da análise elastoplástica e do desempenho do GMRESm e do GMRESmc.

O capítulo VIII apresenta as conclusões do trabalho e sugestões de desenvolvimento e complementações para o mesmo.

CAPÍTULO II:

Solução de Problemas Elásticos e Elastoplásticos.

II.1: Introdução.

O objetivo deste capítulo é uma breve revisão sobre a forma geral de solução de problemas elásticos e elastoplásticos, incluindo as equações principais que os descrevem. Para avaliação do comportamento inelástico dos materiais foi considerado o estado uniaxial de tensão. Posteriormente, são apresentados os tópicos principais para que seja obtido um modelo que solucione o problema elastoplástico, com as respectivas equações constitutivas. Dentro da teoria clássica da plasticidade, considerada um fenômeno independente do tempo, foi adotado o endurecimento linear isotrópico para obtenção das relações que descrevem a plasticidade.

II.2: Solução de problemas elásticos:

A solução de um problema elástico inclui a determinação de tensões e deformações de forma a satisfazer as equações da teoria da Elasticidade (Mendelson,1968).

Assim, as tensões determinadas devem atender as equações de equilíbrio representadas por:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \qquad \text{(II.1)}$$

e as condições de contorno

$$p_i = \sigma_{ij}\, n_j \qquad \text{(II.2)}$$

Nestas equações, σ_{ij} representa as componentes do tensor de tensões, b_i as componentes de forças de volume, p_i as componentes de forças de superfície e n_j os cosenos diretores da normal aum plano que passe pelo ponto onde o tensor de tensões é conhecido.

As deformações devem satisfazer as equações de compatibilidade dadas por:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{lk,ji} - \varepsilon_{ji,lk} = 0 \qquad \text{(II.3)}$$

que garantem um campo unívoco de deslocamentos.

O tensor de deformações ε_{ij} presente na equação (II.3) é representado, considerando as componentes de deslocamentos tais que o quadrado e o produto de suas derivadas parciais sejam desprezíveis, por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad \text{(II.4)}$$

Finalmente, as tensões e deformações devem ser relacionadas, considerando-se um material elástico isotrópico, através da lei de Hooke:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \qquad \text{(II.5)}$$

ou

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_{kk}\delta_{ij}) \qquad \text{(II.6)}$$

onde G é o modulo de elasticidade transversal e δ_{ij} o símbolo de Kronecker.

A forma geral da lei de Hooke é escrita como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad \text{(II.7)}$$

onde C_{ijkl} é o tensor de constantes elásticas representado pela equação:

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \qquad \text{(II.8)}$$

Alternativamente, o conjunto de equações acima pode ser reduzido a três equações diferenciais parciais de segunda ordem, produzindo uma outra forma de definição de problemas elásticos. Estas equações são obtidas através da substituição da equação (II.4) na equação (II.5). O resultado é conhecido como equações de Navier, envolvendo somente os deslocamentos u_i:

$$Gu_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu}u_{k,kj} + b_j = 0 \qquad \text{(II.9)}$$

Esta equação é particularmente conveniente quando as condições de contorno especificadas são deslocamentos.

As equações de equilíbrio e compatibilidade são válidas para comportamentos elásticos e plásticos, o mesmo acontecendo com as condições de contorno.

A diferença entre os dois tipos de problema é verificada nas relações tensão-deformação. Se o problema plástico ocorre, estas relações deixam de ser lineares.

II.3: Comportamento inelástico dos materiais.

Na teoria da elasticidade considerada no item II.2 são assumidos dois fatores em relação ao comportamento do material: a recuperação de configuração indeformada após a retirada do carregamento e a dependência das deformações relacionada apenas às tensões finais, independentes da história do carregamento. No comportamento plástico estes dois fatores não ocorrem (Mendelson, 1968).

A plasticidade é a propriedade que permite ao material deformar-se contínua e permanentemente sem ruptura durante a aplicação de tensões que excedem seu limite elástico. Desta forma, ocorrem deformações residuais quando o carregamento é retirado e as deformações finais dependem da história deste, a partir do início do escoamento.

A formulação de relações físicas que descrevam o comportamento real do material durante a ocorrência da plasticidade é complexa. Isto deve-se à não linearidade e irreversibilidade do processo de deformação e a fenômenos que ocorrem somente após o início do comportamento plástico. Na teoria clássica da plasticidade, as deformações plásticas independem do tempo de permanência do carregamento.

Para ilustrar o comportamento descrito acima, considere-se o diagrama tensão-deformação mostrado na figura II.1, obtido em ensaio de um corpo de provas cilíndrico sujeito à tração:

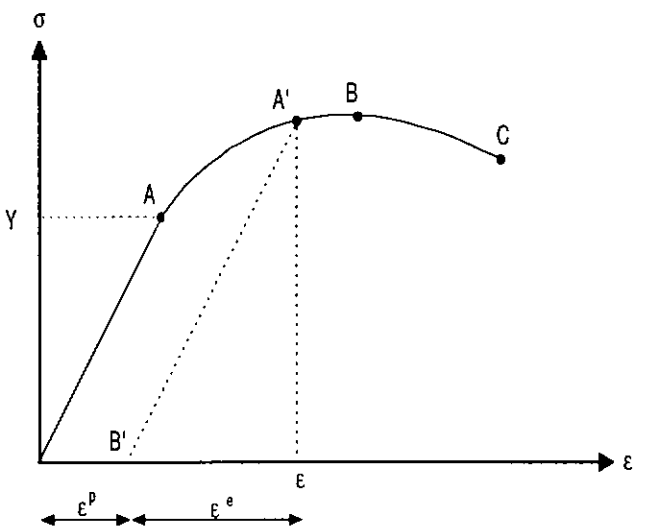


Figura II.1: Diagrama Tensão-Deformação.

Neste diagrama pode ser observada a relação linear entre as tensões e as deformações no trecho OA onde, retirado o carregamento, o cilindro volta à sua forma

original. O ponto A é o limite elástico do material que, uma vez atingido, têm início as deformações residuais ou plásticas.

Ultrapassado o limite elástico, para pequenos acréscimos de tensão, ocorrem grandes acréscimos de deformação, gerando o fenômeno do encruamento ou endurecimento. O ponto B, definido como ponto de carga máxima ou ponto de possível instabilidade, as deformações ocorrem sem acréscimo de carga, acontecendo a ruptura no ponto C. O ponto B representa, portanto, o limite prático da aplicação da teoria da plasticidade (Chen, Saleeb, 1982).

Ocorrendo a retirada do carregamento em qualquer ponto entre o limite elástico A e o ponto de carga máxima B, o descarregamento ocorre segundo a linha $A'B'$, paralela a OA. Parte da deformação total é recuperada e parte permanece como deformação residual. A deformação total é, então, considerada composta por uma parcela elástica ε^e e por uma parcela plástica ε^p:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \qquad \text{(II.10)}$$

O recarregamento irá ocorrer através de $B'A'$, não havendo escoamento até que o ponto A' seja atingido. Este ponto representa um novo limite de escoamento.

Para a teoria de endurecimento isotrópico que será adotada no decorrer deste trabalho, o mecanismo que produz endurecimento age de forma igual na tração e na compressão.

Desta forma, o diagrama tensão deformação é simétrico em relação ao ponto O. Considerando apenas $\sigma \geq 0$, tem-se o diagrama da figura II.2.

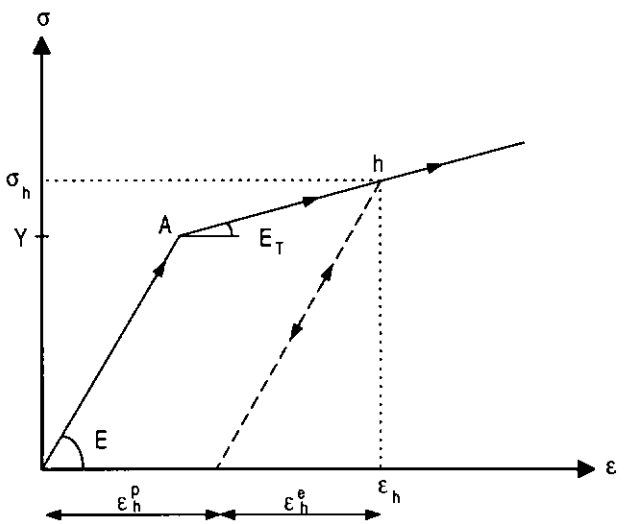


Figura II.2: Diagrama Tensão-Deformação, Material com Endurecimento Linear Isotrópico.

Observando-se a figura II.2, em relação ao ponto de escoamento inicial, o comportamento elástico ocorre para:

$$\sigma - Y < 0 \qquad \text{(II.11)}$$

Ultrapassado o valor da tensão em A, a equação (II.11) deve ser substituída por:

$$\sigma - \sigma_0 < 0 \qquad \text{(II.12)}$$

onde σ_0 é a nova tensão de escoamento e varia a medida que o escoamento prossegue. Para o endurecimento isotrópico linear apresentado na figura II.2, σ_0 varia com a expressão:

$$\sigma_0 = Y + \frac{EE_T}{E - E_T}\varepsilon^p \qquad \text{(II.13)}$$

Nesta expressão, E é o módulo de elasticidade longitudinal e E_T é a inclinação do trecho do diagrama tensão-deformação correspondente ao comportamento elastoplástico.

Para que a expressão (II.13) torne-se genérica, pode-se relacioná-la a hipótese de trabalho de endurecimento, assumindo-se que σ_0 é uma função do parâmetro κ, que representa o trabalho plástico total:

$$\kappa = \int \sigma \, d\varepsilon^p \qquad \text{(II.14)}$$

Portanto:

$$\sigma_0 = g\left(\int \sigma \, d\varepsilon^p\right) \qquad \text{(II.15)}$$

$$\frac{dg}{d\kappa} = \frac{1}{\sigma}\frac{dg}{d\varepsilon^p} = \frac{H'}{\sigma} \qquad \text{(II.16)}$$

Na equação (II.16), H' é a inclinação do trecho do diagrama uniaxial, que relaciona tensões plásticas e deformações plásticas.

Considerando a equação (II.12), o comportamento plástico ocorre quando a seguinte condição ou critério é satisfeita:

$$F(\sigma,\kappa) = \sigma - \sigma_0 = 0 \qquad \text{(II.17)}$$

onde $F(\sigma,\kappa)$ é a função de escoamento, sujeita à condição:

$$F(\sigma,\kappa) \leq 0 \qquad \text{(II.18)}$$

II.4: Solução do problema elastoplástico.

Para obter um modelo que descreva o comportamento elastoplástico de materiais, três condições devem ser atendidas (Telles, 1983):

i. Obter relações tensão-deformação elásticas que descrevam o comportamento do material antes do início das deformações plásticas.

ii. Definir um critério de escoamento que indique o nível de tensão a partir do qual o escoamento terá início.

iii. Obter relações tensão-deformação que descrevam o comportamento pós-escoamento do material.

O item **i** foi apresentado no tópico II.2 deste capítulo. Os demais passarão a ser descritos a seguir.

II.4.1: Critérios de escoamento.

A forma geral do critério de escoamento para endurecimento isotrópico é escrita:

$$F(\sigma_{ij}, \kappa) = 0 \qquad \text{(II.19)}$$

Na expressão (II.19), κ é o parâmetro de endurecimento que representa o trabalho plástico total. A expressão fornece a posição instantânea da superfície de escoamento no espaço das tensões.

O critério de escoamento é independente da orientação do sistema de coordenadas adotado, sendo função dos invariantes de tensão. É comum a representação destes invariantes através das tensões desviatórias S_{ij}. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{kk} \\ J_2 &= \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \\ J_3 &= \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki} \end{aligned} \qquad \text{(II.20)}$$

O invariante J_3 pode ser substituído pelo ângulo de Lode e expresso sob a forma (Nayak, Zienkiewicz, 1972):

$$\alpha = \frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}.\frac{J_3}{J_2^{3/2}}\right) \qquad \text{(II.21)}$$

com

$$-\frac{\pi}{6} \le \alpha \le \frac{\pi}{6} \qquad \text{(II.22)}$$

Através dos invariantes de tensão podem ser definidos os seguintes critérios de escoamento:

- Tresca:

$$2\sqrt{J_2}\cos\alpha - \sigma_0 = 0 \qquad \text{(II.23)}$$

- von Mises:

$$\sqrt{3J_2} - \sigma_0 = 0 \qquad \text{(II.24)}$$

Mohr-Coulomb:

$$\frac{I_1}{3}\operatorname{sen}\phi' + \sqrt{J_2}\left(\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\phi'\right) - c'\cos\phi' = 0 \qquad \text{(II.25)}$$

Drucker-Prager:

$$\alpha' I_1 + \sqrt{J_2} - k' = 0 \qquad \text{(II.26)}$$

Na expressão (II.25) ϕ' é o ângulo de atrito interno e c' a coesão do material. Na expressão (II.26), α' e k' são definidos por:

$$\alpha' = \frac{2\operatorname{sen}\phi'}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen}\phi')} \qquad \text{(II.27)}$$

$$k' = \frac{6c'\cos\phi'}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen}\phi')} \qquad \text{(II.28)}$$

A equação (II.19) pode ser escrita na forma:

$$F(\sigma_{ij}, \kappa) = f(\sigma_{ij}) - \psi(\kappa) = 0 \qquad \text{(II.29)}$$

onde $f(\sigma_{ij})$ é uma função escalar de σ_{ij} que pode ser substituída por uma tensão equivalente σ_e. Consequentemente, é definida uma deformação plástica equivalente ε_e^p, de forma a tornar o incremento de trabalho plástico equivalente igual ao incremento de trabalho plástico total, tornando válida a relação:

$$\sigma_e \, d\varepsilon_e^p = \sigma_{ij} \, d\varepsilon_{ij}^p = d\kappa \qquad \text{(II.30)}$$

Assim, o critério de escoamento descrito pela equação (II.29) pode ser substituído por:

$$\sigma_e = \psi(\kappa) = \psi\left(\int \sigma_e d\varepsilon_e^p\right) \qquad \text{(II.31)}$$

II.4.2: Relações tensão-deformação pós-escoamento.

Na plasticidade, conforme já mencionado anteriormente, o estado final das deformações depende das etapas de aplicação do carregamento. Isto considerado, para obter-se as relações tensão deformação pós-escoamento, a equação (II.7) deve ser escrita na sua forma incremental:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) \qquad \text{(II.32)}$$

Dentro do contexto da plasticidade associativa (Mendelson,1968), a lei de escoamento pode ser escrita, considerando a hipótese da normalidade dos incrementos de deformação plástica, sob a forma:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \text{(II.33)}$$

onde $d\lambda$ é o fator de proporcionalidade ou multiplicador plástico.
Substituindo a equação (II.33) na equação (II.32) tem-se:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} - a_{kl} d\lambda) \qquad \text{(II.34)}$$

Na equação (II.34), a_{kl} é definido por:

$$a_{kl} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \qquad \text{(II.35)}$$

Quando a plasticidade ocorre, as tensões devem satisfazer a equação (II.29) que, diferenciada, torna-se:

$$dF = a_{ij} d\sigma_{ij} - \frac{d\psi}{d\kappa} d\kappa \qquad \text{(II.36)}$$

ou, considerando a equação (II.30):

$$a_{ij} d\sigma_{ij} - \frac{d\psi}{d\kappa} \sigma_{ij} \, d\varepsilon_{ij}^{p} = 0 \qquad \text{(II.37)}$$

Aplicando-se o princípio da normalidade descrito na equação (II.33):

$$a_{ij} d\sigma_{ij} - \frac{d\psi}{d\kappa} \sigma_{ij} a_{ij} d\lambda = 0 \qquad \text{(II.38)}$$

Substituindo a equação (II.34) na equação (II.38) e solucionando a equação resultante para $d\lambda$, tem-se:

$$d\lambda = \frac{1}{\gamma'} a_{ij} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \qquad \text{(II.39)}$$

onde

$$\gamma' = a_{ij} C_{ijkl} a_{kl} + \frac{d\psi}{d\kappa} \sigma_{ij} a_{ij} \qquad \text{(II.40)}$$

Considerando a função $f(\sigma_{ij})$ homogênea e de grau um, a seguinte relação é válida:

$$\sigma_{ij} a_{ij} = \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = f(\sigma_{ij}) = \sigma_e \qquad \text{(II.41)}$$

Desta forma, pode-se escrever:

$$\gamma' = a_{ij} C_{ijkl} \, a_{kl} + \frac{d\psi}{d\varepsilon_e^p} \qquad \text{(II.42)}$$

Nesta expressão, definindo-se ψ como a tensão de escoamento uniaxial:

$$\frac{d\psi}{d\varepsilon_e^p} = H' = \frac{E E_T}{E - E_T} \qquad \text{(II.43)}$$

Assim, a equação (II.39) pode ser substituída na equação (II.34) para que a relação tensão-deformação pós-escoamento seja obtida na forma incremental:

$$d\sigma_{ij} = C^{ep}_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \qquad \text{(II. 44)}$$

onde

$$C^{ep}_{ijkl} = C_{ijkl} - \frac{1}{\gamma'} C_{ijmn} a_{mn} a_{op} C_{opkl} \qquad \text{(II.45)}$$

Definindo um incremento de tensão elástica, que representa o valor fictício de um incremento de tensão como se o problema analisado fosse puramente elástico:

$$d\sigma^{e}_{ij} = C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \qquad \text{(II.46)}$$

a equação (II.44) é reescrita sob a forma:

$$d\sigma_{ij} = d\sigma^{e}_{ij} - \frac{1}{\gamma'} C_{ijmn} a_{mn} a_{kl} d\sigma^{e}_{kl} \qquad \text{(II.47)}$$

A partir da equação (II.47) conclui-se que o incremento de tensão real pode ser obtido através do incremento de tensão elástica definido pela expressão (II.46).

II.5: A formulação do problema elastoplástico através das considerações de tensões iniciais e deformações iniciais:

Considerando a teoria das pequenas deformações, o tensor total de deformações é representado por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \varepsilon^{e}_{ij} + \varepsilon^{p}_{ij} \qquad \text{(II.48)}$$

com ε^{e}_{ij} e ε^{p}_{ij} representando, respectivamente, as parcelas elásticas e plásticas do tensor.

Para um campo de deformações plásticas considerado como um campo de deformações iniciais, a aplicação da lei de Hooke à parcela elástica do tensor de deformações totais resulta na seguinte expressão:

$$\sigma_{ij} = 2G(\varepsilon_{ij} - \varepsilon^{p}_{ij}) + \frac{2G\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{kk} - \varepsilon^{p}_{kk})\delta_{ij} \qquad \text{(II.49)}$$

A equação acima pode, também, ser escrita em função das tensões iniciais:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - \sigma_{ij}^{p} \qquad \text{(II.50)}$$

onde σ_{ij}^{p} representa as componentes do tensor de tensões iniciais,

$$\sigma_{ij}^{p} = 2G\varepsilon_{ij}^{p} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{ii}^{p}\delta_{ij} \qquad \text{(II.51)}$$

Ainda, através da equação (II. 47), pode-se obter os incrementos de tensão inicial, que são escritos sob a forma:

$$d\sigma_{ij}^{p} = d\sigma_{ij}^{e} - d\sigma_{ij} \qquad \text{(II.52)}$$

$$d\sigma_{ij}^{p} = \frac{1}{\gamma'} C_{ijmn} a_{mn} a_{kl} d\sigma_{kl}^{e} \qquad \text{(II.53)}$$

Capítulo III

O Problema Elastoplástico analisado através do MEC:

III.1: Introdução.

Uma das formas de solução de problemas elastoplásticos através do Método dos Elementos de Contorno é a formulação denominada "**Tensões Iniciais** ".

Os itens a seguir, considerando esta formulação, mostram a obtenção das equações integrais empregadas para a solução de problemas elastoplásticos, iniciando com a Identidade de Somigliana. A seguir são apresentadas as expressões das tensões nos pontos internos e a equação integral de contorno, com os respectivos tensores fundamentais (Telles,1983, Carrer,1991).

III.2: A identidade de Somigliana.

O estado de equilíbrio de um sólido elástico de volume Ω^* e contorno Γ^* pode ser representado pela equação de Navier para os deslocamentos (Capítulo II, II.2):

$$Gu^*_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu} u^*_{k,kj} + b^*_j = 0 \qquad \text{(III.1)}$$

onde as forças de volume b^*_j são admitidas como forças unitárias concentradas aplicadas num ponto ξ do domínio Ω^*, nas três direções ortogonais dadas pelos vetores unitários P_j. Assim, estas forças podem ser escritas na forma:

$$b^*_j = \delta(\xi, x) P_j \qquad \text{(III.2)}$$

Na equação (III.2), $\delta(\xi, x)$ é a função Delta de Dirac, que relaciona o ponto ξ, onde atuam as forças P_j ao ponto x. Estes pontos são denominados, respectivamente, ponto fonte e ponto campo, sendo $x \in \Omega^*$.

Considerando Ω^* como um meio elástico infinito e Γ^* o seu contorno, a solução singular ou solução fundamental correspondente à equação (III.1) é a solução de Kelvin.

Para um sólido de domínio Ω e contorno Γ, contido no sólido infinito descrito anteriormente, o estado de equilíbrio será representado por σ_{ij}, ε_{ij}, u_i, p_i e b_i. Admitindo-se a validade das propriedades elásticas nos dois casos e que σ^*_{ij}, ε^*_{ij}, u^*_i, p^*_i e b^*_i representam, também, o estado de equilíbrio do sólido infinito, tem-se:

$$\sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon^*_{ij} \qquad \text{(III.3)}$$

onde, considerada a simetria de tensor C_{ijkl}:

$$C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon^*_{ij} = \varepsilon_{kl}C_{klij}\varepsilon^*_{ij} \qquad \text{(III.4)}$$

Assim:

$$\sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij} = \sigma^*_{ij}\varepsilon_{ij} \qquad \text{(III.5)}$$

Para um material que apresente comportamento elastoplástico, a parcela das deformações elásticas do tensor de deformações totais pode ser escrita, considerando a equação (II.48), como:

$$\varepsilon^e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon^p_{ij} \qquad \text{(III.6)}$$

Reescrevendo a equação (III.5):

$$\sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij} = \sigma^*_{ij}\varepsilon^e_{ij} \qquad \text{(III.7)}$$

Combinando as equações (III.6) e (III.7):

$$\sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij} = \sigma^*_{ij}\varepsilon_{ij} - \sigma^*_{ij}\varepsilon^p_{ij} \qquad \text{(III.8)}$$

Retirando-se do domínio Ω uma esfera de raio ε e de superfície $\overline{\Gamma}_\varepsilon$, com centro no ponto fonte ξ, a integração do domínio resultante Ω_ε é:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ij}\ \varepsilon^*_{ij}\ d\Omega = \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma^*_{ij}\ \varepsilon_{ij}\ d\Omega - \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma^*_{ij}\ \varepsilon^p_{ij}\ d\Omega \qquad \text{(III.9)}$$

Na expressão (III.9), σ_{ij}, ε_{ij} e ε^p_{ij} são admitidos contínuos e limitados. Os tensores correspondentes à solução fundamental não são singulares pois o ponto fonte não pertence ao domínio que está sendo integrado.

Aplicando-se o teorema da divergência na integral à esquerda e a primeira integral à direita da expressão (III.9) e utilizando-se (II.1), (II.2) e (II.4), tem-se:

$$\int_{\Gamma+\overline{\Gamma}_\varepsilon} p_i^* \ (\xi,x)\, u_i \ (x)\, d\Gamma(x) = \int_{\Gamma+\overline{\Gamma}_\varepsilon} u_i^* (\xi,x)\, p_i \ (x)\, d\Gamma(x) +$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u_i^* (\xi,x)\, b_i \ (x)\, d\Omega(x) + \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ij}^* \ (\xi,x)\, \varepsilon_{ij}^p \ d\Omega(x)$$

(III.10)

Aplicando-se o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e considerando-se cada força P_j agindo separadamente, obtém-se, a partir da equação (III.10):

$$u_i(\xi) = \int_\Gamma u_{ij}^* \ (\xi,x)\, p_j \ (x)\, d\Gamma(x) - \int_\Gamma p_{ij}^* \ (\xi,x)\, u_j \ (x)\, d\Gamma(x) +$$

$$\int_\Omega u_{ij}^* \ (\xi,x)\, b_j(x)\, d\Omega(x) + \int_\Omega \sigma_{jki}^* \ (\xi,x)\, \varepsilon_{jk}^p (x)\, d\Omega(x)$$

(III.11)

A equação (III.11) representa a identidade de Somigliana para a formulação das Deformações Iniciais. Esta expressão, obtida para a formulação das Tensões iniciais, representa a integral de domínio das deformações sob a forma:

$$\int_\Omega \sigma_{jki}^* \ (\xi,x)\, \varepsilon_{jk}^p \ (x)\, d\Omega(x) = \int_\Omega C_{jkrs}\ \varepsilon_{rsi}^* \ (\xi,x)\, \varepsilon_{jk}^p \ (x)\, d\Omega(x)$$

(III.12)

Considerando a simetria do tensor C_{jkrs}:

$$\int_\Omega \sigma_{jki}^* \ (\xi,x)\, \varepsilon_{jk}^p \ (x)\, d\Omega(x) = \int_\Omega \varepsilon_{rsi}^* \ (\xi,x)\, C_{rsjk}\ \varepsilon_{jk}^p \ (x)\, d\Omega(x)$$

(III.13)

Através da expressão (II.51), tem-se:

$$\int_\Omega \sigma_{jki}^* (\xi,x)\, \varepsilon_{jk}^p \ (x)\, d\Omega(x) = \int_\Omega \varepsilon_{jki}^* (\xi,x)\, \sigma_{jk}^p \ (x)\, d\Omega(x)$$

(III.14)

Observando-se a expressão (III.14), verifica-se a equivalência entre as formulações das Deformações Iniciais e das Tensões Iniciais. Assim, pode-se escrever:

$$u_i(\xi) = \int_\Gamma u_{ij}^* (\xi,x)\, p_j (x)\, d\Gamma(x) - \int_\Gamma p_{ij}^* (\xi,x)\, u_j (x)\, d\Gamma(x) +$$

$$\int_\Omega u_{ij}^* (\xi,x)\, b_j(x)\, d\Omega(x) + \int_\Omega \varepsilon_{jki}^* (\xi,x)\, \sigma_{jk}^p (x)\, d\Omega(x)$$

(III.15)

A equação (III.15) é a Identidade de Somigliana para a formulação das Tensões Iniciais (Carrer, 1991).

Os tensores fundamentais apresentados nas equações (III.11) e (III.15) têm, para o caso tridimensional, a forma:

$$u_{ij}^*(\xi,x) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)G\,r}[(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}\, r_{,j}]$$

(III.16)

$$p_{ij}^*(\xi,x) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)\,r^2}\left\{\left[(1-2\nu)\,\delta_{ij} + 3r_{,i}\, r_{,j}\right]\frac{\partial r}{\partial n} - \right.$$

$$\left. -(1-2\nu)\,(r_{,i}\, n_j - r_{,j}\, n_i)\right\}$$

(III.17)

$$\sigma_{jki}^*(\xi,x) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)\,r^2}[(1-2\nu)\,(r_{,k}\,\delta_{ij} + r_{,j}\,\delta_{ki} -$$

$$-r_{,i}\,\delta_{jk}) + 3r_{,i}\, r_{,j}\, r_{,k}]$$

(III.18)

$$\varepsilon_{jki}^*(\xi,x) = -\frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr^2}[(1-2\nu)\,(r_{,k}\,\delta_{ij} + r_{,j}\,\delta_{ik}) -$$

$$-r_{,i}\,\delta_{jk} + 3r_{,i}\, r_{,j}\, r_{,k}]$$

(III.19)

Nas equações acima, $r = r(\xi,x)$ é a distância entre o ponto fonte ξ e o ponto campo x. Suas derivadas são calculadas em relação às coordenadas do ponto campo x:

$$r = (r_i\, r_i)^{\frac{1}{2}}$$

$$r_i = x_i(x) - x_i(\xi) \qquad \text{(III.20)}$$

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(x)} = \frac{r_i}{r}$$

O tensor fundamental $u^*_{ij}(\xi,,x)$ é a solução fundamental de Kelvin para a equação de Navier representada na equação (III.1) e é a componente de deslocamento na direção j do ponto x devido a uma força concentrada unitária aplicada na direção i do ponto ξ. Da mesma forma, os tensores fundamentais $p^*_{ij}(\xi,x)$, $\varepsilon^*_{jki}(\xi,x)$ e $\sigma^*_{jki}(\xi,x)$ são, respectivamente, força de superfície na direção j, deformações ε^*_{jk} tensões σ^*_{jk} no ponto x para uma força unitária aplicada na direção i do ponto ξ. Ainda, $u_j(x)$, $p_j(x)$, $b_j(x)$, $\varepsilon^p_{jk}(x)$ e $\sigma^p_{jk}(x)$ representam componentes de deslocamentos, forças de superfície, forças de volume, deformações iniciais plásticas e tensões iniciais plásticas.

III.3: Equação integral das componentes de tensão nos pontos internos.

As componentes de tensão nos pontos internos são obtidas a partir da substituição da equação (III.15) na equação (II.50). Desta forma, reescrevendo a equação (II.50):

$$\sigma_{ij} = G\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\delta_{ij} - \sigma^p_{ij}$$

(III.21)

Na equação (III.21), as derivadas espaciais deverão ser efetuadas em relação às coordenadas do ponto fonte ξ. Da mesma forma que no caso elástico, as derivadas podem ser aplicadas diretamente sobre os tensores fundamentais nas integrais de contorno e na integral de domínio das forças de volume. A derivação da integral de volume das tensões iniciais requer maior atenção. A representação formal desta integral é:

$$V_i = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon^*_{jki}(\xi,x)\, \sigma^p_{jk}(x)\, d\Omega(x)$$

(III.22)

onde Ω_ε é o resultado da remoção de uma esfera de raio ε do domínio Ω, com centro no ponto fonte ξ. No domínio Ω_ε ,conforme já dito, os tensores fundamentais não apresentam singularidade.

A expressão da derivada de V_i é;

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_m} = \lim_{\varepsilon \to 0} [\frac{\partial}{\partial x_m} \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon^*_{jki}\ (\xi, x)\ \sigma^p_{jk}\ (x)\ d\Omega(x)]$$

(III.23)

A derivação completa da expressão (III.23) foi apresentada por Telles (1979, 1983). Com as derivadas apropriadas desta equação, as componentes de tensão nos pontos internos são obtidas segundo a equação integral:

$$\sigma_{ij}(\xi) = \int_\Gamma u^*_{ijk}\ (\xi, x)\ p_k(x)\ d\Gamma(x) - \int_\Gamma p^*_{ijk}\ (\xi, x)\ u_k(x)\ d\Gamma(x) +$$

$$+ \int_\Omega u^*_{ijk}\ (\xi, x)\ b_k\ (x)\ d\Omega(x) + \int_\Omega \varepsilon^*_{ijkl}(\xi, x)\ \sigma^p_{kl}\ (x)\ d\Omega(x) + g_{ij}\ (\sigma^p_{kl}(\xi))$$

(III.24)

Na equação (III.24) a segunda integral de domínio existe segundo o valor principal de Cauchy e os novos tensores fundamentais são:

$$u^*_{ijk}\ (\xi, x) = -\sigma^*_{ijk}\ (\xi, x) \qquad \text{(III.25)}$$

$$p^*_{ijk}\ (\xi, x) = \frac{G}{4\pi(1-\nu)r^3} \left\{ \frac{3\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\ \delta_{ij}\ r_{,k} + \nu(\ \delta_{ik}\ r_{,j} + \delta_{jk}\ r_{,i}\ ) - \right.$$

$$-5 r_{,i}\ r_{,j}\ r_{,k}\ ] + 3\nu(n_i\ r_{,j}\ r_{,k} + n_j\ r_{,i}\ r_{,k}\ ) + (1-2\nu)\ (3 n_k\ r_{,i}\ r_{,j} +$$

$$\left. + n_j\ \delta_{ik} + n_i\ \delta_{jk}\ ) - (1-4\nu) n_k\ \delta_{ij} \right\}$$

(III.26)

$$\varepsilon^*_{ijkl}(\xi, x) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^3} [(1-2\nu)\ (\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{jk}\delta_{li} - \delta_{ij}\delta_{kl} +$$

$$3\delta_{ij}\ r_{,k}\ r_{,l}\ ) + 3\nu(\delta_{li}\ r_{,j}\ r_{,k} + \delta_{jk}\ r_{,l}\ r_{,i} + \delta_{ik}\ r_{,l}\ r_{,j} + \delta_{jl}\ r_{,i}\ r_{,k}\ ) +$$

$$+ 3\delta_{kl}\ r_{,i}\ r_{,j} - 15 r_{,i}\ r_{,j}\ r_{,k}\ r_{,l}\ ]$$

(III.27)

O termo $g_{ij}(\sigma^{p}_{kl}(\xi))$ é dado, para o caso tridimensional, por:

$$g_{ij} = -\frac{1}{15(1-\nu)}[(7-5\nu)\,\sigma^{p}_{ij} + (1-5\nu)\,\sigma^{p}_{ll}\delta_{ij}] \qquad \text{(III.28)}$$

III.4: Equação Integral de Contorno.

Para utilização das equações (III.15) e (III.24) é necessário primeiramente que sejam determinadas as componentes de deslocamentos e forças de superfície em todo o contorno. Estes dados são obtidos após a solução da forma limite da Identidade de Somigliana. Nesta expressão, o ponto fonte pertence ao contorno do problema considerado:

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) = \int_{\Gamma} u^{*}_{ij}(\xi,x)\,p_j(x)\,d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p^{*}_{ij}(\xi,x)\,u_j(x)\,d\Gamma(x) +$$

$$+\int_{\Omega} u^{*}_{ij}(\xi,x)\,b_j(x)\,d\Omega(x) + \int_{\Omega} \varepsilon^{*}_{jki}(\xi,x)\,\sigma^{p}_{jk}(x)\,d\Omega(x) \qquad \text{(III.29)}$$

A segunda integral de contorno à direita da equação (III.29) deve ser calculada no sentido do valor principal de Cauchy.

Expressões genéricas para o coeficiente $C_{ij}(\xi)$ encontram-se em Hartmann (1981) e, para contornos suaves, o valor do mesmo é:

$$C_{ij}(\xi) = \frac{\delta_{ij}}{2} \qquad \text{(III.30)}$$

Capítulo IV:

Solução Numérica do Problema Elastoplástico.

IV.1: Introdução:

Os tópicos a seguir têm por objetivo apresentar a solução numérica das equações (III.24) e (III.29).

Inicialmente estas equações são apresentadas nas suas formas discretizadas e, a partir destas, são expostas as formas matriciais que produzirão a solução numérica do problema elastoplástico.

Após, é apresentada a forma de solução destes problemas através de técnicas implícitas e descrita a utilização destas técnicas para a formulação das Tensões Iniciais.

IV.2: Solução Numérica.

A solução numérica tridimensional das equações (III.15) e (III.24) a partir da equação (III.29) é obtida discretizando-se o contorno Γ em elementos sobre os quais as componentes nodais de deslocamentos e forças de superfície são interpoladas. Na região do domínio Ω onde são previstas as deformações plásticas, a discretização é efetuada através de células, onde as componentes nodais do tensor de tensões iniciais são interpoladas.

Assumindo-se um número N de elementos no contorno e M células no domínio, a forma discretizada da equação (III.29), desprezando-se as forças de volume, é:

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\Gamma_j} p^*_{ij}(\xi,x)\, M(x)\, d\Gamma(x)\right)u_j(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\Gamma_j} u^*_{ij}(\xi,x)\, M(x)\, d\Gamma(x)\right)\, p_j(x) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{M}\left(\int_{\Omega_l} \varepsilon^*_{jki}(\xi,x)\, \overline{M}(x)\, d\Omega(x)\right)\sigma^p_{jk}(x)$$

(IV.1)

Na expressão (IV.1), $M(x)$ e $\overline{M}(x)$ são funções de interpolação que têm por objetivo aproximar os deslocamentos e forças de superfície sobre os elementos e as tensões iniciais sobre as células.

Com as mesmas considerações, obtém-se a forma discretizada da equação (III. 24):

$$\sigma_{ij}(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \left(\int_{\Gamma_j} u^*_{ijk}(\xi, x)\, M(x)\, d\Gamma(x) \right) p_k(x) -$$

$$- \sum_{j=1}^{N} \left(\int_{\Gamma_j} p^*_{ijk}(\xi, x)\, M(x)\, d\Gamma(x) \right) u_k(x) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{M} \left(\int_{\Omega_l} \varepsilon^*_{ijkl}(\xi, x)\, \overline{M}(x) d\Omega(x) \right) \sigma^p_{kl}(x) + g_{ij}\left(\sigma^p_{kl}(\xi) \right)$$

(IV.2)

A colocação da equação (IV.1) aos pontos nodais utilizados na discretização do contorno e do domínio gera um sistema de equações lineares cuja forma matricial é:

$$Hu = Gp + Q\sigma^p \qquad \text{(IV.3)}$$

Em (IV.3), a matriz H é resultado da incorporação da matriz C dos termos C_{ij} à matriz $\hat{H}$ resultante da integração dos elementos que discretizam o contorno. A matriz G é, igualmente, resultado da integração no contorno e a matriz Q, da integração sobre as células que discretizam o domínio.

A equação (IV.2), aplicada aos pontos nodais que discretizam o domínio, origina a representação matricial a seguir:

$$\sigma = G'p - H'u + (Q' + E)\,\sigma^p \qquad \text{(IV.4)}$$

onde G' e H' resultam da integração dos elementos que discretizam o contorno e Q' resulta da integração das células que discretizam o domínio.

Impondo-se as condições de contorno às expressões (IV.3) e (IV.4), tem-se:

$$Ay = f + Q\sigma^p \qquad \text{(IV.5)}$$

$$\sigma = -A'y + f' + (Q' + E)\,\sigma^p \qquad \text{(IV.6)}$$

Nas equações (IV.5) e (IV.6). os vetores f e f' contêm a contribuição das condições de contorno.

Multiplicando-se a equação (IV.5) por A^{-1}:

$$y = m + R\sigma^p \qquad \text{(IV.7)}$$

Na expressão (IV.7) tem-se:

$$R = A^{-1}Q \qquad \text{(IV.8)}$$

$$m = A^{-1}f \qquad \text{(IV.9)}$$

O cálculo das tensões é obtido pela substituição da equação (IV.7) em (IV.6):

$$\sigma = n + S\sigma^p \qquad \text{(IV.10)}$$

onde

$$S = (Q' + E) - A'R \qquad \text{(IV.11)}$$

$$n = f' - A'm \qquad \text{(IV.12)}$$

Nas equações acima, os vetores m e n representam, respectivamente, a solução elástica do problema para deslocamentos e forças de superfície no contorno e tensões no domínio.

A observação das expressões (IV.7) e (IV.10) mostra que estas, uma vez obtidas, tornam-se independentes. Desta forma, para a determinação das tensões iniciais σ^p só é necessária a equação (IV.10). A equação (IV.7) é aplicada após a determinação dos valores das tensões iniciais.

IV.3: Técnicas Implícitas de Solução do Problema Elastoplástico.

Os incrementos de tensão elástica definidos em (II.46) podem ser calculados através da forma incremental proposta em (IV.10). Para isto, o termo livre $g_{ij}(\sigma^p_{kl}(\xi))$ deve ser substituído por:

$$g'_{ij}(\sigma^p_{kl}(\xi)) = g_{ij}(\sigma^p_{kl}(\xi)) + \sigma^p_{ij}(\xi) \qquad \text{(IV.13)}$$

Assim, a matriz E passará a ser escrita:

$$E' = E + I \qquad \text{(IV.14)}$$

onde I é a matriz identidade.

Considerando a equação (IV.10), a forma incremental da tensão elástica é dada por:

$$\Delta\sigma^e = \overline{S}\Delta\sigma^p + \Delta n \qquad \text{(IV.15)}$$

onde a matriz $\overline{S}$ é definida por:

$$\overline{S} = (Q' + E') - A'R \qquad \text{(IV.16)}$$

O processo incremental iterativo tem início com a redução da tensão equivalente máxima $\sigma_{e,\max}$ encontrada na análise elástica à tensão de escoamento inicial σ_0 através de um fator, denominado fator de carga inicial λ_0:

$$\lambda_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma_{e,max}} \qquad \text{(IV.17)}$$

Adotando-se um incremento de carga w em relação à carga no primeiro escoamento, o fator de carga correspondente ao i -ésimo incremento é dado por:

$$\lambda_i = \lambda_{i-1} + \lambda_0 w \qquad \text{(IV.18)}$$

Os incrementos de tensão elástica serão:

$$\Delta n = \lambda_o \, w \, n \qquad \text{(IV.19)}$$

O fator de carga λ varia de acordo com os limites:

$$\lambda_0 \leq \lambda \leq 1 \qquad \text{(IV.20)}$$

A adoção de técnicas implícitas para a solução de problemas elastoplásticos através do Método dos Elementos de Contorno estabelece um procedimento onde a equação (II.53), aplicada aos pontos do domínio, fornece:

$$\Delta\sigma^p = D^p \Delta\sigma^e \qquad \text{(IV.21)}$$

Com a substituição da equação (IV.21) na forma acumulada da equação (IV.15) tem-se, para a k-ésima iteração do i-ésimo incremento de carga, a expressão:

$$\sigma^{e}_{k-1} + \Delta\sigma^{e}_{k} = \overline{S}(\sigma^{p}_{k-1} + D^{p}_{k}\,\Delta\sigma^{e}_{k}) + \lambda_{i-1}n + \Delta n \qquad \text{(IV.22)}$$

Com a equação (IV.22) pode ser definido o resíduo:

$$\Psi_{k-1} = \overline{S}\sigma^{p}_{k-1} + \lambda_{i-1}n - \sigma^{e}_{k-1} \qquad \text{(IV.23)}$$

Substituindo (IV.23) em (IV.22):

$$S^{p}\Delta\sigma^{e}_{k} = \Delta n + \Psi_{k-1} \qquad \text{(IV.24)}$$

onde

$$S^{p} = I - \overline{S}D^{p} \qquad \text{(IV.25)}$$

A obtenção dos incrementos de tensão elástica com a equação (IV.24) não requer, a princípio, nenhuma iteração. Entretanto, se os incrementos de carga não forem pequenos o suficiente, deverão ser efetuadas algumas iterações para que esta equação seja satisfeita (Telles, 1985).

IV.4: Técnicas Implícitas Adotadas.

O estudo apresentado neste trabalho empregou duas técnicas implícitas: a técnica de Newton-Raphson e a técnica de Newton-Raphson modificada.

Na técnica de Newton-Raphson a equação (IV.24) é aplicada a cada iteração de um fator de carga λ, com a matriz S^{p} atualizada nestas iterações. Para implementação desta técnica é decisiva a definição da situação de carregamento de cada ponto avaliado a cada iteração, para que a matriz tangente S^{p} possa ser definida de forma correta (Telles, Carrer, 1994).

Considerando a primeira iteração de um incremento de carga, tem-se:

$$S^{p}\Delta\sigma^{e} = \Delta n + \Psi_{k-1} \qquad \text{(IV.26)}$$

Para as demais iterações, até que o resíduo Ψ torne-se pequeno o suficiente ($\Psi \rightarrow 0$ dentro de uma margem de tolerância), a expressão (IV.26) é substituída por:

$$S^{p}\Delta\sigma^{e} = \Psi_{k} \qquad \text{(IV.27)}$$

Na técnica de Newton-Raphson modificada, a matriz S^{p} presente na equação (IV.26) é atualizada apenas na primeira iteração de cada fator de carga λ, mantendo-se constante nas demais iterações.

Capítulo V:

Discretização do Contorno e Domínio.

V.1: Introdução.

A obtenção de bons resultados com o emprego do Método dos Elementos de Contorno está diretamente vinculada à eficiência do cálculo das integrais apresentadas nas equações discretizadas que representam o problema em estudo.

Neste capítulo serão indicados os elementos de contorno e detalhadas as integrais das células com as quais as integrais de contorno e de domínio presentes nas equações (IV.1) e (IV.2) foram computadas.

V.2: Discretização do Contorno.

Para o estudo do comportamento elastoplástico dos problemas que serão apresentados neste trabalho, o contorno foi discretizado com a utilização de elementos de geometria linear reta, com interpolação linear das condições de contorno. Estes elementos fazem parte da biblioteca do Programa CAV3D (Silva, 1989, Mansur, Telles, 1993).

Os elementos lineares empregados foram contínuos, descontínuos e de transição. A adoção destes elementos está relacionada ao tipo de célula desenvolvida para a discretização do domínio.

V.3: Discretização do Domínio.

Para a discretização de domínio presentes nas equações (IV.1) e (IV.2), foram utilizadas células hexaédricas com geometria linear e oito nós geométricos, conforme mostra a figura (V.1). A interpolação funcional foi considerada constante sobre toda a célula, gerando um único nó funcional.

Isto considerado, as coordenadas cartesianas x_i de um ponto x qualquer sobre o domínio Ω_c, da célula, para $i = 1,3$, serão obtidas a partir dos nós geométricos da mesma e de funções de forma lineares φ. Deverão ser atendidas as relações abaixo, considerando os oito nós geométricos da célula de coordenadas x_i^m:

$$x_i = \sum_{m=1}^{8} \varphi_m \, x_i^m \qquad \text{(V.1)}$$

As funções φ_m devem obedecer à:

$$\sum_{m=1}^{8} \varphi_m(x) = 1 \quad x \in \Omega_c \tag{V.2}$$

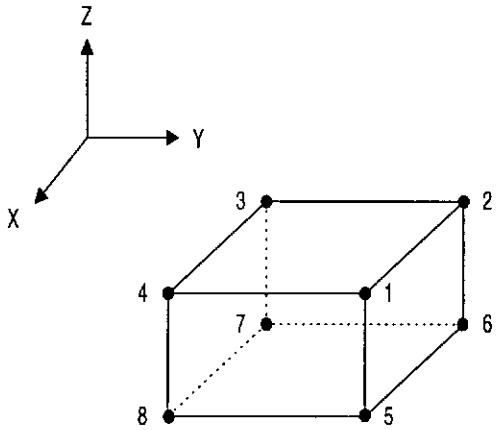


Figura V.1: Célula Hexaédrica.

As funções de forma serão expressas através de um sistema de coordenadas locais adimensionais (η_1, η_2, η_3).

Para que as transformações de coordenadas possam ser efetuadas, deve-se considerar:

$$d\Omega = \left| \frac{\partial r}{\partial \eta_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial \eta_2} \times \frac{\partial r}{\partial \eta_3} \right| d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \tag{V.3}$$

onde

$$\left| \frac{\partial r}{\partial \eta_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial \eta_2} \times \frac{\partial r}{\partial \eta_3} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x}{\partial \eta_2} & \frac{\partial x}{\partial \eta_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta_1} & \frac{\partial y}{\partial \eta_2} & \frac{\partial y}{\partial \eta_3} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta_1} & \frac{\partial z}{\partial \eta_2} & \frac{\partial z}{\partial \eta_3} \end{vmatrix} = |J| \tag{V.4}$$

A expressão (V.4) representa o jacobiano da transformação de coordenadas cartesianas em coordenadas locais (η_1, η_2, η_3), indicadas na figura (V.2).

Em relação às tensões iniciais σ_{ij}^{p}, estas serão aproximadas de forma constante, e seus valores calculados sobre o nó funcional da célula.

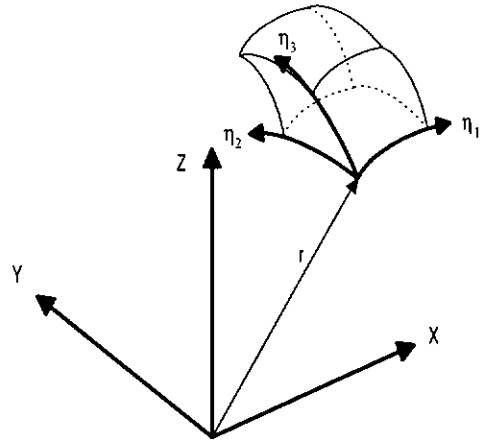


Figura V.2: Sistemas de Coordenadas.

V.4: Integrais a serem efetuadas.

Nas integrais efetuadas sobre o domínio Ω_c das células serão considerados dois casos em relação à posição do ponto fonte ξ:

i. Ponto fonte localizado no contorno do problema:

Esta posição do ponto fonte causará singularidade em células que possuam faces no contorno, coincidindo com algum elemento. A forma das integrais para este caso é:

$$I_{jki} = \int_{\Omega_c} \varepsilon^{*}_{jki}(\xi, x)\, d\Omega(x) \qquad \text{(V.5)}$$

A integral representada na equação (V.5) está presente na equação integral de contorno, cuja forma discretizada é apresentada na equação (IV.1).

ii. Ponto fonte localizado no domínio do problema:

Para o ponto fonte localizado no domínio, ocorrerá singularidade em células cujo nó funcional coincida com este ponto. A forma das integrais para este caso é:

$$I_{ijkl} = \int_{\Omega_c} \varepsilon^*_{ijkl}(\xi, x)\, d\Omega(x) \qquad \text{(V.6)}$$

A integral contida na equação (V.6) pertence à equação integral que determina tensões nos pontos do domínio. A forma discretizada desta equação é a expressão (IV.2).

Nos dois casos indicados acima as integrais poderão ser singulares ou não singulares. Em todos os casos serão efetuadas numericamente.

Considerando o sistema de coordenadas locais apresentado na figura (V.2), deverá ser obedecida a seguinte transformação de coordenadas nas equações (V.5) e (V.6):

$$I_{jki} = \int_{\Omega_c} \varepsilon^*_{jki}(\xi, x)\,|J|\, d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \qquad \text{(V.7)}$$

$$I_{ijkl} = \int_{\Omega_c} \varepsilon^*_{ijkl}(\xi, x)\,|J|\, d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \qquad \text{(V.8)}$$

V.5: Funções de Forma.

Para descrever a geometria de célula foram utilizadas funções de forma lineares, escritas em relação ao sistema de coordenadas locais. Este sistema de coordenadas fará o mapeamento da célula em um hexaédro regular e terá como origem o nó funcional da mesma.

O sistema de coordenadas locais (η_1, η_2, η_3) faz o mapeamento da célula apresentada na figura (V.1) para a figura (V.3), onde as coordenadas dos nós são: nó 1≡ (1,1,1); nó 2≡ (-1,1,1), nó 3≡ (-1,-1,1); nó 4≡ (1,-1,1); nó 5≡ (1,1,-1); nó 6≡ (-1,1,-1); nó 7≡ (-1,-1,-1); nó 8≡ (1,-1,-1).

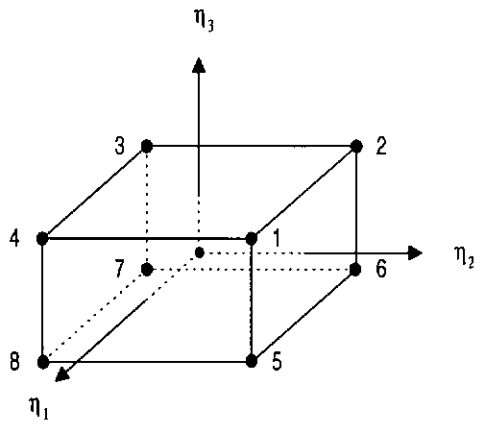


Figura V.3:Coordenadas Locais.

O grupo de funções de forma lineares correspondente às posições locais dos nós indicados acima são:

$$\varphi_1 = \frac{1}{8}(1+\eta_1)(1+\eta_2)(1+\eta_3)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{8}(1-\eta_1)(1+\eta_2)(1+\eta_3)$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{8}(1-\eta_1)(1-\eta_2)(1+\eta_3)$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{8}(1+\eta_1)(1-\eta_2)(1+\eta_3) \qquad \text{(V.9)}$$

$$\varphi_5 = \frac{1}{8}(1+\eta_1)(1+\eta_2)(1-\eta_3)$$

$$\varphi_6 = \frac{1}{8}(1-\eta_1)(1+\eta_2)(1-\eta_3)$$

$$\varphi_7 = \frac{1}{8}(1-\eta_1)(1-\eta_2)(1-\eta_3)$$

$$\varphi_8 = \frac{1}{8}(1+\eta_1)(1-\eta_2)(1-\eta_3)$$

V.6: Integração não singular.

As integrais das expressões (V.7) e (V.8) não serão singulares quando o ponto fonte ξ estiver fora do domínio de integração. Considerando o mapeamento da célula, a forma destas integrais será:

$$I_{jki} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \varepsilon^*_{jki}(\xi,x)\,|J|\,d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \tag{V.10}$$

$$I_{ijkl} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \varepsilon^*_{ijkl}(\xi,x)\,|J|\,d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \tag{V.11}$$

O cálculo das equações (V.10) e (V.11) foi efetuado através da integração numérica de Gauss. Desta forma, suas expressões passam a ser:

$$I_{jki} = \sum_{L=1}^{NG_L}\sum_{N=1}^{NG_N}\sum_{K=1}^{NG_K}(\varepsilon^*_{jki}(\xi,x)\,|J|\,w_L w_N w_K) \tag{V.12}$$

$$I_{ijkl} = \sum_{L=1}^{NG_L}\sum_{N=1}^{NG_N}\sum_{K=1}^{NG_K}(\varepsilon^*_{ijkl}(\xi,x)\,|J|\,w_L w_N w_K) \tag{V.13}$$

Para obter o número de pontos de Gauss a ser empregado nas integrais não singulares e quase-singulares foi utilizado um processo seletivo que determina a menor distância relativa entre o ponto fonte e o ponto sobre a célula que esteja mais próximo deste. Quanto menor a distância relativa, maior o número de pontos de Gauss necessários para um bom resultado na integração.

Ainda, para obter melhor precisão de resultados na integrais quase-singulares foi utilizada a transformação de coordenadas proposta por Telles (1987). O procedimento consiste em aplicar uma transformação não linear de coordenadas sobre as coordenadas locais. Esta transformação foi aplicada anteriormente para os elementos utilizados para discretização do contorno (Silva,1989) sendo, também, aplicada às células que discretizam o domínio. A forma desta transformação é descrita a seguir:

$$\eta_i^T = a_i \gamma_i^3 + b_i \gamma_i^2 + c_i \gamma_i + d_i, \quad i = 1,3 \qquad \text{(V.14)}$$

O jacobiano desta transformação é:

$$J_i^T = 3a_i \gamma_i^2 + 2b_i \gamma_i + c_i \qquad \text{(V.15)}$$

Nas expressões (V.14) e (V.15), os coeficientes a_i , b_i , c_i e d_i são dados por:

$$a_i = \frac{(1-\bar{r}_i)}{Q_i} \qquad \text{(V.16)}$$

$$b_i = -\frac{3(1-\bar{r}_i)\cdot\gamma_i}{Q_i} \qquad \text{(V.17)}$$

$$c_i = \frac{(\bar{r}_i + 3\bar{\gamma}_i^2)}{Q_i} \qquad \text{(V.18)}$$

$$d_i = -b_i \qquad \text{(V.19)}$$

$$Q_i = 1 + 3\bar{\gamma}_i^2 \qquad \text{(V.20)}$$

Ainda:

$$\bar{\gamma}_i = \sqrt[3]{[-q_i + \sqrt{(q_i^2 + p_i^3)}]} + \sqrt[3]{[-q_i - \sqrt{(q_i^2 + p_i^3)}]} + \frac{\bar{\eta}_i}{1+2\bar{r}_i} \qquad \text{(V.21)}$$

$$q_i = \frac{1}{3(1+2\bar{r}_i)}[(\bar{\eta}_i(3-1\bar{r}_i) - \frac{2\bar{\eta}_i^3}{1+2\bar{r}_i}).\frac{1}{(1+2\bar{r}_i)} - \bar{\eta}_i] \qquad \text{(V.22)}$$

$$p_i = \frac{1}{3(1+2\bar{r}_i)^2}.[4\bar{r}_i(1-\bar{r}_i) + 3(1-\bar{\eta}_i^2)] \qquad \text{(V.23)}$$

Na transformação de coordenadas antes descrita, $\overline{\eta}_i$ corresponde às coordenadas locais do ponto sobre a célula campo que estiver mais próximo do ponto fonte ξ. A distância relativa DCMIN é tomada entre dois pontos e calculada no espaço real.

O parâmetro $\overline{r}_i$ é obtido para um valor de DCMIN de forma a produzir o menor erro de integração no sentido dos mínimos quadrados (Telles, 1987):

$$\overline{r}_i = 0.85 + 0.24 \ln (D_i) \quad \text{para} \quad 0.05 \leq D_i \leq 1.3 \tag{V.24}$$

$$\overline{r}_i = 0.893 + 0.0832 \ln(D_i) \quad \text{para} \quad 1.3 \leq D_i \leq 3.618 \tag{V.25}$$

$$\overline{r} = 1 \quad \text{para} \quad D_i \geq 3.618 \tag{V.26}$$

As distâncias relativas D_i são obtidas através de:

$$D_1 = 2\,DCMIN \,/\, \left| x(1,\overline{\eta}_2,\overline{\eta}_3) - x(-1,\overline{\eta}_2,\overline{\eta}_3) \right| \tag{V.27}$$

$$D_2 = 2\,DCMIN \,/\, \left| x(\overline{\eta}_1,1,\overline{\eta}_3) - x(\overline{\eta}_1,-1,\overline{\eta}_3) \right| \tag{V.28}$$

$$D_3 = 2\,DCMIN \,/\, \left| x(\overline{\eta}_1,\overline{\eta}_2,1) - x(\overline{\eta}_1,\overline{\eta}_2,-1) \right| \tag{V.29}$$

As correções indicadas nas equações (V.27), (V.28) e (V.29) correspondem ao mapeamento da célula em um cubo de arestas com comprimento 2. Nestas expressões, o símbolo $|\ldots|$ significa a distância entre dois pontos no espaço real, cujas coordenadas no espaço mapeado estão indicadas entre parênteses.

Após a aplicação da transformação de coordenadas expressa na equação (V.14) sobre os pontos de Gauss, as formas das integrais (V.12) e (V.13) passam a ser:

$$I_{jki} \cong \sum_{L=1}^{NG_L} \sum_{N=1}^{NG_N} \sum_{K=1}^{NG_K} [\varepsilon^*_{jki}(\xi,x) \left| J \right|]_{L,N,K} J_L^T J_N^T J_K^T w_L w_N w_K \tag{V.30}$$

$$I_{ijkl} \cong \sum_{L=1}^{NG_L} \sum_{N=1}^{NG_N} \sum_{K=1}^{NG_K} [\varepsilon^*_{ijkl}(\xi, x)|J|]_{L,N,K} J_L^T J_N^T J_K^T w_L w_N w_K \qquad (V.31)$$

É importante salientar que, na transformação de coordenadas acima, $\bar{r} \to 1$ quando $D \to \infty$, significando que o esquema é auto-adaptativo e a transformação desaparece quando o ponto fonte afasta-se do domínio de integração Ω_c. Quando $\bar{r}_i$ for negativo, o ponto fonte estará muito próximo do domínio de integração e a precisão das integrais não é garantida. Neste caso, o programa é interrompido.

V.7: Integração singular.

Quando o ponto fonte ξ pertence ao domínio de integração Ω_c, as integrais das expressões (V.7) e (V.8) tornam-se singulares.

Para efetua-las, inicialmente será aplicada sobre estas uma transformação de coordenadas esféricas com origem no ponto fonte. Considerando o sistema de coordenadas locais (η_1, η_2, η_3) transladado para o ponto fonte e as coordenadas esféricas indicadas na figura (V.4), tem-se:

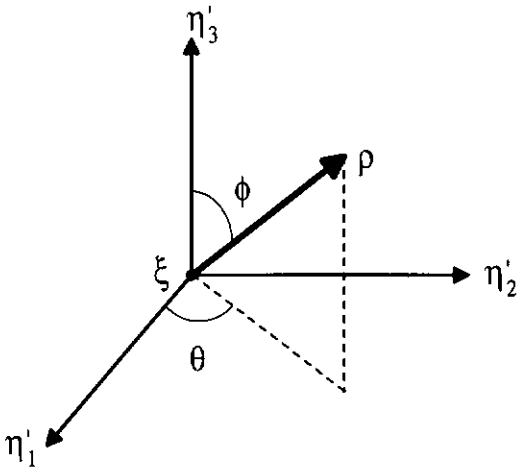


Figura V.4: Coordenadas Esféricas.

$$\begin{aligned} \eta_1' &= \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ \eta_2' &= \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ \eta_3' &= \rho \cos\phi \end{aligned} \qquad (V.32)$$

Na translação do sistema de coordenadas locais para o ponto fonte, indicada na figura (V.4), as coordenadas $(\eta_1', \eta_2', \eta_3')$ são obtidas com:

$$\eta_1' = \eta_1 - \eta_1^{pf}$$
$$\eta_2' = \eta_2 - \eta_2^{pf} \qquad \text{(V.33)}$$
$$\eta_3' = \eta_3 - \eta_3^{pf}$$

onde η_i^{pf} representa as coordenadas do ponto fonte no sistema (η_1, η_2, η_3).

O Jacobiano da transformação esférica é dado por:

$$|J_E| = \rho^2 \operatorname{sen}\phi \qquad \text{(V.34)}$$

Após a transformação de coordenadas esféricas as expressões das integrais (V.7) e (V.8) tornam-se:

$$I_{jki} = \int_{\theta} \int_{\phi(\theta)} \int_{\rho(\theta,\phi)} \varepsilon_{jki}^{*}(\xi, x) |J| |J_E| \, d\rho \, d\phi \, d\theta \qquad \text{(V.35)}$$

$$I_{ijkl} = \int_{\theta} \int_{\phi(\theta)} \int_{\rho(\theta,\phi)} \varepsilon_{ijkl}^{*}(\xi, x) |J| |J_E| \, d\rho \, d\phi \, d\theta \qquad \text{(V.36)}$$

Nas expressões (V.35) e (V.36) as variáveis ξ e x são funções de (θ, ϕ, ρ).

As integrais singulares serão efetuadas considerando a célula hexaédrica dividida em seis pirâmides, tendo como bases as faces do hexaédro e, como vértices, o ponto fonte. Será sempre considerada uma pirâmide base, onde todos os cálculos serão efetuados. O resultado para as demais pirâmides será obtido por rotação.

Uma célula que possua o ponto fonte no interior de seu domínio terá a pirâmide utilizada como base representada de acordo com a figura (V.5).

V.7.1: Execução das integrais I_{jki}.

Após a aplicação da transformação esférica de coordenadas, a singularidade contida na expressão (V.7), de ordem $O(1/r^2)$, é removida pela presença da variável ρ no integrando. A expressão representada em (V.35) é, então, de uma integral não singular.

Com isto, a integração efetuada sobre os domínios das seis pirâmides será executada numericamente, aplicando-se quadratura de Gauss.

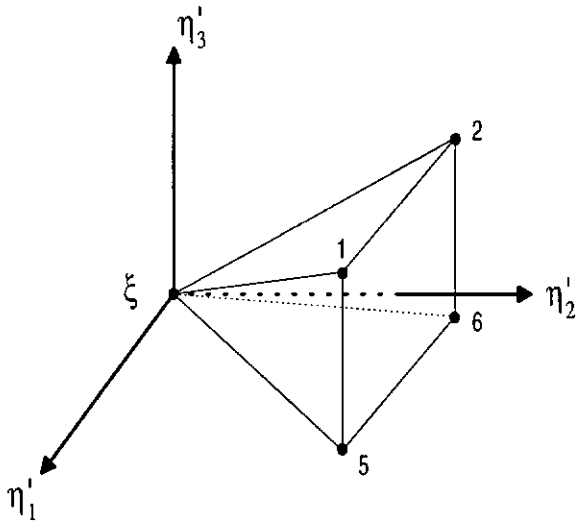


Figura V.5: Pirâmide Base.

Os limites de integração definidos a partir da pirâmide base mostrada na figura (V.5), consideram a altura HP desta pirâmide definida pela coordenada η_2' de qualquer dos nós indicados.

Para o ângulo θ, estes limites inicial e final são, respectivamente:

$$\theta_i = \arctan\left(\frac{HP}{\eta_1'^{(1,5)}}\right) \tag{V.37}$$

$$\theta_f = \arctan\left(\frac{HP}{\eta_1'^{(2,6)}}\right)$$

Em relação a ϕ, os limites de integração foram definidos como sendo:

$$\phi_i = \arctan\left(\frac{HP}{(\eta_3'^{(1,2)} \cdot sen\theta}\right) \tag{V.38}$$

$$\phi_f = \arctan\left(\frac{HP}{(\eta_3'^{(5,6)} \cdot sen\theta}\right)$$

Nas equações (V.37) e (V.38) os números entre parênteses contidos nos superindices das variáveis η' indicam os nós da pirâmide base em relação aos quais o valor das coordenadas destas variáveis pode ser tomado. Assim, tendo-se como exemplo

$\eta_3'^{(1,2)}$, o valor desta coordenada pode ser o pertencente ao nó 1 ou ao nó 2 da pirâmide base.

A variável $\rho(\theta,\phi)$ tem limite inferior igual a zero e o limite superior igual a:

$$\rho_f(\theta,\phi) = \left| \frac{HP}{(sen\phi \cdot sen\theta)} \right| \qquad \text{(V.39)}$$

Considerados os limites de integração contidos nas equações (V.37), (V.38) e (V.39), a integral da expressão (V.35) terá as variáveis θ, ϕ e ρ escritas, para a integração de Gauss no intervalo $(-1,1)$, sob a forma:

$$\theta = J_\theta \cdot \theta_G + 0.5 \cdot (\theta_i + \theta_f) \qquad \text{(V.40)}$$

$$\phi = J_\phi \cdot \phi_G + 0.5 \cdot (\phi_i + \phi_f) \qquad \text{(V.41)}$$

$$\rho = J_\rho \cdot \rho_G + 0.5 \cdot \rho_f(\theta,\phi) \qquad \text{(V.42)}$$

Nas expressões acima, θ_G, ϕ_G e ρ_G representam as abcissas de Gauss. J_θ, J_ϕ e J_ρ são os jacobianos das transformações das variáveis, dados por:

$$J_\theta = 0.5 \cdot (\theta_f - \theta_i) \qquad \text{(V.43)}$$

$$J_\phi = 0.5 \cdot (\phi_f - \phi_i) \qquad \text{(V.44)}$$

$$J_\rho = 0.5 \cdot \rho_f(\theta,\phi) \qquad \text{(V.45)}$$

Os limites de integração indicados nas equações (V.37), (V.38) e (V.39) foram escritos em relação à pirâmide base e variam de acordo com a posição das demais pirâmides. Assim, para que os mesmos possam ser utilizados em todas as pirâmides, é feita a rotação destas posições para a pirâmide base. Após efetuadas as operações, os resultados obtidos são novamente rotacionados para as suas posições originais.

Isto considerado, a expressão final para a integração numérica da equação (V.35) para as seis pirâmides que representam o domínio Ω_c da célula é:

$$I_{jki} = \sum_{NP=1}^{6} \left[\sum_{L=1}^{NG_L} \sum_{N=1}^{NG_N} \sum_{K=1}^{NG_K} \left(\varepsilon^*_{jki}(\xi,x) \left|J\right| \left|J_E\right| \right)_{L,N,K} J_K^\rho \, J_N^\phi \, J_L^\theta \, w_\rho w_\phi w_\theta \right]$$

(V.46)

As integrais numéricas representadas na equação (V.46) foram executadas com 16 pontos de integração para a variável θ e 8 pontos para as variáveis ϕ e ρ.

V.7.2: Execução das integrais I_{ijkl}.

Conforme mencionado anteriormente, as integrais representadas na equação (V.36) ocorrem quando o ponto fonte encontra-se no interior do domínio da célula. Sua singularidade de ordem $O\left(1/r^3\right)$ é reduzida, mas não eliminada, após a aplicação do sistema de coordenadas esféricas, passando à $O\left(1/r\right)$.

Para efetuar estas integrais, que só existem no sentido de seu valor principal, a remoção da singularidade foi feita através da retirada de um domínio esférico de raio R_c, em torno do ponto singular. Neste domínio, a integral da função ε^*_{ijkl} é igual a zero devido a existência do valor principal de Cauchy. Após a remoção do domínio esférico, a integral da expressão (V.36) torna-se não singular, podendo ser executada numericamente. O procedimento adotado para esta execução é descrito a seguir.

V.7.2.1: Obtenção do raio da esfera.

Considerando a geometria linear reta adotada para a célula, o escalar R_c, que representa o raio da esfera a ser removida, foi obtido através do cálculo da distância entre o nó funcional da célula e as superfícies representadas por suas faces. Após a determinação de todas as distâncias entre o nó funcional e as faces da célula, é escolhida a menor delas para ser utilizada como raio.

V.7.2.2: Procedimento para integração numérica.

Com a determinação do raio R_c, a integração numérica é efetuada no domínio da célula dividido em pirâmides.

A integração é efetuada sobre a célula mapeada no espaço $(\eta_1', \eta_2', \eta_3')$ e, para o caso de integral I_{ijkl}, são geradas seis pirâmides iguais. Assim, considerando a pirâmide base representada na figura (V.5), os limites de integração para o ângulo θ para I_{ijkl} são:

$$\theta_i = \frac{\pi}{4}$$

$$\theta_f = \frac{3\pi}{4} \qquad \text{(V.47)}$$

Os limites de integração para o ângulo ϕ são idênticos aos representados nas equações (V.38).

Conhecidos R_c, θ_i , θ_f , ϕ_i e ϕ_f , os limites de integração para a variável ρ podem ser determinados. O valor máximo para este limite é idêntico ao representado na equação (V.39). Para que o limite inferior seja obtido deve-se levar em conta a remoção da esfera de raio R_c no espaço real. Esta esfera tem sua forma modificada no espaço $(\eta_1', \eta_2', \eta_3')$, fazendo com que ρ_i modifique-se para cada ponto de integração.

Considerando conhecidos os valores de θ_G e ϕ_G para um determinado ponto de integração numérica G, na pirâmide base, pode ser construído o vetor Np_b que passa por G. Este vetor é, então, rotacionado para sua posição real sobre a pirâmide que estiver sendo integrada através de:

$$Np_i = R_i \; Np_b \qquad \text{(V.48)}$$

onde Np_b é o vetor na pirâmide base, R_i é a matriz de rotação correspondente à pirâmide i que está sendo integrada e Np_i é o vetor posicionado sobre esta pirâmide.

Uma vez determinado Np_i , o problema passa a ser obter o comprimento correspondente a R_c , do espaço real, no espaço $(\eta_1', \eta_2', \eta_3')$, conhecendo-se a direção deste comprimento, dada pelo vetor Np_i , ou seja,

$$\rho_G : \left\| Np_i(\theta_G, \phi_G, \rho_G) \right\|_{[x,y,z]} = R_c \qquad \text{(V.49)}$$

A solução adotada foi converter a situação acima em um problema escalar do tipo:

$$\textit{determinar } \alpha : \left\| Np_i(\theta_G, \phi_G, \alpha) \right\|^2_{[x,y,z]} - R_c^2 = 0 \qquad \text{(V.50)}$$

uma vez que, das três componentes que determinam o vetor Np_i no espaço $(\eta_1', \eta_2', \eta_3')$, duas são conhecidas: θ_G e ϕ_G. Assim, a equação (V.50) toma a forma

$$\alpha : \sum_{j=1}^{3} \left[\sum_{m=1}^{8} \varphi_m(\theta_G, \phi_G, \alpha)\, x_j^m \right]^2 - R_c^2 = 0 \qquad \text{(V.51)}$$

Considerando que existe solução para o problema, ou seja, existe um comprimento no espaço $(\eta_1', \eta_2', \eta_3')$ correspondente ao raio R_c no espaço real, foi escolhida, entre as várias formas de solução existentes para o caso, a subrotina ZBREN, pertencente a biblioteca IMSL (1991). Por exigência do tipo de solução adotada pela subrotina, devem ser fornecidos dois valores da variável α que definam o intervalo que contenha a solução do problema. Como condição de programação deve-se ter:

$$F(\alpha_0) \cdot F(\alpha_1) < 0 \qquad \text{(V.52)}$$

indicando que, no intervalo (α_0, α_1), a função F, representada pela equação (V.50), passa por um zero.

No caso do problema representado pela equação (V.50), o intervalo foi definido por $\alpha_0 = 0$, que é o centro da esfera no espaço $(\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3)$ e $\alpha_1 = 2$, valor que garante um comprimento para o vetor Np_i maior do que a célula mapeada e, consequentemente, maior que o raio R_c da esfera no espaço real. A facilidade de escolha destes limites também motivou a escolha deste tipo de solução.

A solução do problema é o valor de α que satisfaz a equação (V.50) e fornece o valor de ρ_i, que representa o limite inferior de integração da variável ρ no espaço $(\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3)$ para o ponto de integração G em consideração.

A subrotina adotada (ZBREN), mostrou-se eficiente na obtenção dos valores de α, atingindo a solução desejada com um número pequeno de tentativas e para uma tolerância $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-7}$. Esta subrotina exige que a função fornecida como argumento seja uma função escalar, descrita na forma de uma estrutura em linguagem FORTRAN do tipo FUNCTION, com um único argumento sendo este um escalar (IMSL, 1991).

O procedimento de obtenção das variáveis de integração de Gauss, após a determinação de ρ_i descrita acima, é idêntico aos já descritos, resultando:

$$\rho = J_\rho \cdot \rho_G + 0.5(\rho_f - \rho_i) \qquad \text{(V.53)}$$

onde o jacobiano J_ρ tem a forma:

$$J_\rho = 0.5 \cdot (\rho_f - \rho_i) \qquad \text{(V.54)}$$

A expressão final para a integração numérica da equação (V.36), consideradas as seis pirâmides que representam o domínio total da célula é:

$$I_{ijkl} = \sum_{NP=1}^{6} \left[\sum_{L=1}^{NG_L} \sum_{N=1}^{NG_N} \sum_{K=1}^{NG_K} \left(\varepsilon^*_{ijkl}(\xi, x) \left| J \right| \left| J_E \right| \right)_{L,N,K} J_K^\rho \, J_N^\phi \, J_L^\theta \, w_\rho w_\phi w_\theta \right]$$

(V.55)

As integrais numéricas representadas na equação (V.55) foram executadas com 16 pontos de integração para as varáveis θ e ϕ e 8 pontos para a variável ρ.

Capítulo VI:

Solução Iterativa dos Sistemas de Equações Lineares Resultantes da Análise Elastoplástica.

VI.1: Introdução.

A aplicação de técnicas implícitas na solução de problemas elastoplásticos leva à necessidade de solução de sistemas de equações lineares, conforme indicado na expressão (IV.24). Se a técnica implícita adotada for a de Newton-Raphson, este sistema será solucionado à cada iteração de um fator de carga λ_i, até a convergência. Para que o processo seja viável em termos de tempo computacional é fundamental a eficiência da forma de solução empregada para estes sistemas. No trabalho aqui desenvolvido, onde todas as soluções foram obtidas com técnicas implícitas, especificamente as técnicas de Newton-Raphson e Newton-Raphson modificada, foi utilizado um processo de solução iterativo destes sistemas, o GMRES(Generalized Minimum Residual). Este algoritmo, apresentado em duas versões (Saad, Schultz, 1986), foi empregado em sua versão denominada GMRESm, diferenciada do algoritmo original por fixar previamente a dimensão do subespaço de Krylov, onde o resíduo da solução aproximada é minimizado.

Juntamente com o GMRESm, foi implementado um controle de erro algébrico na solução dos sistemas, com o objetivo de minimizar o tempo computacional na execução do processo elastoplástico.

Embora nos estágios iniciais do MEC os sistemas de equações gerados hajam sido solucionados através de métodos de solução direta, com o algoritmo de eliminação de Gauss, os métodos iterativos foram testados, obtendo-se bons resultados (Mansur, Araújo, Malaghini, 1992). Nestes testes foram avaliados sistemas de equações originários de problemas elásticos bi e tridimensionais, destacando-se a performance do Método dos Gradientes bi-Conjugados com pré-condicionamento de Jacobi. O GMRESm foi, também, testado anteriormente para problemas elásticos bidimensionais (Barra, Coutinho, Mansur, Telles, 1992). Nestes testes, as matrizes dos sistemas de equações foram précondicionadas e o desempenho do GMRESm foi comparado ao método dos Gradientes bi-Conjugados e com a versão précondicionada deste, mostrando excelentes resultados para o GMRESm.

No presente trabalho o GMRESm foi empregado para solucionar sistemas de equações lineares originários da solução de problemas elastoplásticos tridimensionais. A mesma avaliação foi efetuada para o caso bidimensional destes problemas, com excelentes resultados (Neitzel, 1995). O desempenho do algoritmo com e sem controle

de erro algébrico foi comparado a dois algoritmos de solução direta de sistemas de equações lineares. Um dos algoritmos pertence à biblioteca IMSL (IMSL,1991) e utiliza a eliminação de Gauss. O segundo algoritmo utiliza inversão de matrizes, explorando a forma da matriz S^p contida na equação (IV.24).

VI.2: O algoritmo GMRESm.

O algoritmo do GMRESm apresentado a seguir (Saad, Schultz, 1986) é empregado de forma iterativa em relação aos seus ciclos. Isto significa que o algoritmo é reiniciado à cada m passos, sendo m um valor fixo da dimensão da base de Krylov.

Este valor foi fixado em 10% do número de equações que compõem o sistema a ser solucionado (Barra, Coutinho, Mansur, Telles, 1992) e foi testado para sistemas resultantes de aplicações do MEC à problemas elásticos bidimensionais.

As matrizes elastoplásticas aqui geradas receberam um único tipo de precondicionamento, relacionado às diferenças dimensionais entre os vetores de deslocamentos e os de força de superfície. Assim, as matrizes G e G' presentes nas equações (IV.3) e (IV.4) foram multiplicadas por uma constante para evitar erros de arredondamento e problemas de convergência em soluções iterativas sem precondicionamento.

A matriz S^p, apresentada na equação (IV.24) não sofreu nenhum outro tipo de precondicionamento. Da mesma forma, a existência de colunas da matriz identidade na formação da mesma, principalmente nas iterações iniciais do processo elastoplástico, não foi explorada.

Para um sistema de equações lineares da forma:

$$Ax = b \qquad \text{(VI.1)}$$

o algoritmo do GMRESm possui os seguintes passos (Saad, Schultz, 1986):

i. Início:

Arbitrar x_0 e calcular $r_0 = b - Ax_0$ e $u_1 = \dfrac{r_0}{\|r_0\|}$

ii. Iterações:

Para $j = 1,2,\ldots,m$

$h_{ij} = (Au_j, u_i) \qquad i = 1,2,\ldots,j$

$u_{j+1} = Au_j - \sum_{i=1}^{j} h_{ij} u_i$

$h_{j+1,j} = \|\hat{u}_{j+1}\|$

$$u_{j+1} = \frac{\hat{u}_{j+1}}{h_{j+1,j}}$$

iii. Formação da solução:

$x_m = x_0 + V_m y_m$, onde y_m minimiza $\left\| \beta e_1 - \overline{H}_m y \right\|$, $y \in R^m$ e $\beta = \left\| r_0 \right\|$.

iv. Reinicio:

Determinar $r_m = b - A \cdot x_m$; se a relação é satisfeita, o processo é encerrado.

Caso contrário:

$x_0 = x_m$, $u_1 = \frac{r_m}{\left\| r_m \right\|}$, retornar ao passo *ii.*

As iterações do GMRESm consistem na formação de uma base ortogonal no subespaço de Krylov através do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt modificado, triangularização de uma matriz de Hessemberg pelo algoritmo Q-R e uma retro substituição. Se a convergência não é atingida num "loop" de m iterações, o último x é utilizado para reiniciar o próximo "loop". O número de reinícios é especificado no início do algoritmo (Higham, 1996, Shakib, Hughes, Johan, 1989).

VI.3: Controle de Erro Algébrico da Solução Iterativa dos Sistemas de Equações do processo Elastoplástico.

Quando a solução do problema elastoplástico é efetuada, conforme descrito nos capítulos (III) e (IV), observa-se que, para as iterações iniciais de um fator de carga λ_i , os resultados estão distantes da convergência. À medida que o processo iterativo avança para atender a equação (IV.24) dentro do fator de carga em questão, os valores esperados são atingidos, considerado um limite especificado como critério de convergência. Para obtenção destes resultados é necessário solucionar os sistemas de equações lineares gerados pela aplicação da equação citada, reescrita a seguir:

$$S^p \Delta\sigma^e = \Delta n + \Psi_{k-1} \qquad \text{(VI.3)}$$

A solução destes sistemas pode ser efetuada por métodos diretos ou iterativos. Qualquer destes procedimentos acarreta um erro inerente à solução adotada, denominado erro algébrico.

Considerando o vínculo entre a solução do sistema de equações gerado na k iteração de um incremento de carga λ_i e a convergência do problema elastoplástico para este fator, foi utilizada uma estratégia para controle do erro algébrico durante este procedimento.

A adoção da estratégia de controle teve como base a exigência desnecessária de um erro algébrico pequeno no início das iterações de um fator de carga λ_i, devido a estes resultados estarem ainda distantes da convergência, conforme já foi dito.

A estratégia de controle de erro algébrico utilizada foi vincular o critério de convergência do processo elastoplástico à convergência do método de solução dos sistemas de equações gerados por este. Esta vinculação foi feita através do controle da tolerância utilizada para a solução dos sistemas de equações.

A escolha recaiu sobre uma relação linear(Coutinho, 1993), escrita sob a forma:

$$TOL = d\,\Theta + l \qquad \text{(VI.4)}$$

Na equação (VI.4), as constantes d e l são obtidas para que o erro $\overline{\Theta}$ desejado para a solução da expressão (VI.3) seja atingido na iteração k do fator de carga em questão.

A variável Θ é determinada de forma a representar uma medida percentual da convergência do processo elastoplástico, sendo definida por:

$$\Theta = \frac{\left\|\Delta\varepsilon^{p}_{e_k}\right\|}{\left\|\Delta\varepsilon^{p}_{e_t}\right\|} \qquad \text{(VI.5)}$$

onde $\Delta\varepsilon^{p}_{e_k}$ é o incremento de deformação plástica equivalente na iteração k de um incremento de carga λ_i e $\Delta\varepsilon^{p}_{e_t}$ o incremento de deformação plástica total acumulado durante todas as k iterações do mesmo λ_i.

Para efetuar o controle de erro algébrico são fornecidos como dados limite do erro não linear desejado Θ_b (limite superior) e Θ_a (limite inferior). Para a tolerância, TOL_b é o limite superior e TOL_a o limite inferior. Com estes valores e as equações (VI.4) e (VI.5) obtém-se a variação da tolerância para as iterações k do fator de carga λ_i. A figura (VI.1) mostra a reta representada na equação (VI.4).

O controle de erro foi aplicado ao algoritmo do GMRESm, que foi denominado, para este caso, GMRESmc. Este procedimento teve como objetivo principal a minimização do tempo de execução do processo elastoplástico quando são utilizadas as técnicas implícitas anteriormente citadas, principalmente a técnica de Newton-Raphson.

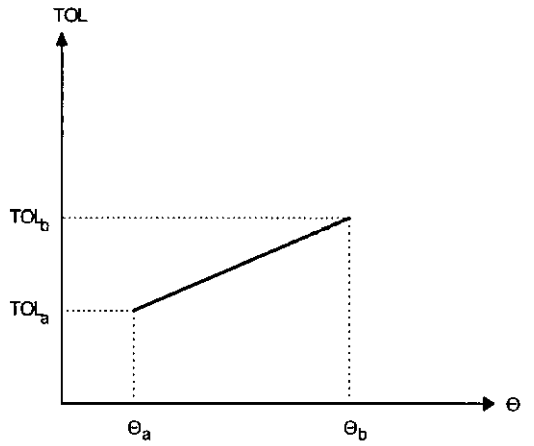


Figura VI.1: Forma Linear do Controle de Erro Algébrico.

VI.4: Processos de Solução Direta Utilizados para a avaliação do Desempenho do GMRES.

Para avaliar o desempenho dos algoritmos GMRESm e GMRESmc, foram empregados dois algoritmos de solução direta, que serão descritos a seguir.

VI.4.1: Subrotina LSLRG.

A subrotina LSLRG pertence à biblioteca IMSL (IMSL,1991) e soluciona sistemas de equações lineares com matrizes de coeficientes reais.

Para iniciar a solução é feita uma fatorização do tipo LU nos coeficientes da matriz do sistema através de eliminação de Gauss com pivotação parcial. Para efetuar este procedimento é utilizada a subrotina LFCRG (IMSL, 1991), da mesma biblioteca, que efetua a pivotação parcial utilizando a estratégia de transformar as linhas da matriz para que todas passem a ter a mesma norma infinita (scaled partial pivoting). Esta subrotina indica erro se a parte triangular superior da fatorização apresentar um zero na diagonal, o que ocorre somente se a matriz do sistema é singular. A subrotina LFCRG é baseada na subrotina SGECO da biblioteca LINPACK.

A solução do sistema é obtida com a subrotina LFSRG, também da biblioteca IMSL (IMSL, 1991), onde a solução da equação (VI.1) é determinada a partir de sistemas triangulares do tipo:

$$L\,y = b \qquad \text{(VI.6)}$$

e

$$U\,x = y \qquad \text{(VI.7)}$$

Os passos de eliminação "para a frente" (forward elimination) consistem em solucionar o sistema da equação (VI.6) aplicando as mesmas operações de permutação e eliminação que foram utilizadas na fatorização das colunas de A em b. A substituição "para trás" (backward substituition) soluciona o sistema da equação (VI.7) para x.

A subrotina LFSRG é baseada na subrotina SGESL da biblioteca LINPACK.

VI.4.2: Subrotina INVER.

A subrotina INVER (Carrer,1991) opera por inversão da matriz A para solucionar o sistema de equações lineares descrito na equação (VI.1). Este algoritmo utiliza as colunas da matriz identidade que surgem na matriz S^p representada na equação (IV.24) e correspondem a pontos internos com comportamento ainda elástico no processo de carregamento. Sobre estas colunas não são efetuadas operações de fatorização, melhorando o desempenho do algoritmo, principalmente nas iterações iniciais dos fatores de carga λ_i do processo elastoplástico.

Capítulo VII:

Aplicações:

VII.1: Introdução.

Os resultados numéricos apresentados a seguir têm como objetivo demonstrar aplicações do Método dos Elementos de Contorno em análise elastoplástica tridimensional utilizando técnicas implícitas e, também, avaliar o comportamento da solução dos sistemas de equações gerados nesta análise utilizando um método iterativo, o GMRES.

As técnicas implícitas adotadas para a solução do problema elastoplástico foram a técnica de Newton-Raphson e uma versão alternativa desta, a técnica de Newton-Raphson modificada de acordo com o capítulo IV.

Para modelagem numérica tridimensional das aplicações foram utilizados elementos lineares retos contínuos, descontínuos e de transição (Silva, 1989). Esta opção resultou do emprego de células de geometria linear e aproximação constante para as tensões iniciais, conforme descrito no capítulo V.

A avaliação do desempenho do GMRES na solução dos sistemas de equações lineares gerados durante a análise elastoplástica foi feita através de comparação com dois processos de solução direta.

Isto considerado, cada aplicação constará de duas partes:

i. Apresentação dos resultados da análise elastoplástica, onde o Método dos Elementos de Contorno é comparado ao Método do Elementos Finitos ou ao próprio Método dos Elementos de Contorno.

ii. Avaliação do desempenho do GMRES nas suas versões GMRESm e GMRESmc, conforme descrito no capítulo VI, onde os mesmos são comparados a algoritmos de solução direta.

Os resultados foram obtidos em um microcomputador PENTIUM 166 MHz.

VII.2: Prisma Tracionado:

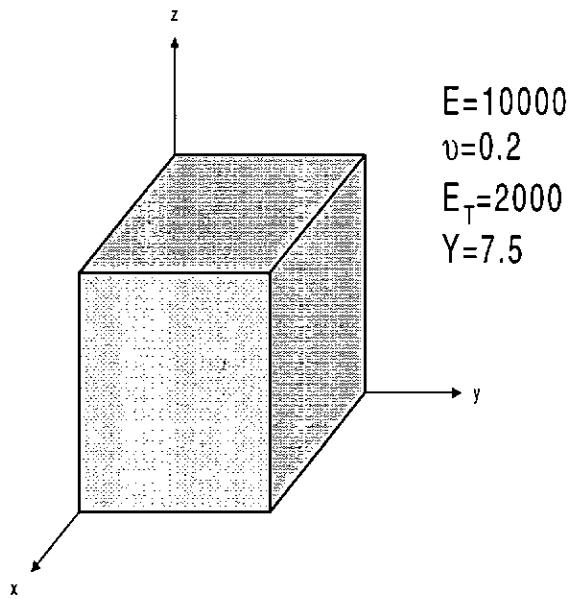


Figura VII.1: Prisma tracionado.

O prisma apresentado na figura (VII.1) é tracionado na direção Z em sua face contida no plano XY. Para sua modelagem numérica foram utilizados 24 elementos lineares retos de transição (Silva, 1989), sendo 4 por face e 8 células de geometria linear e aproximação constante das tensões iniciais. O comportamento do material foi caracterizado como endurecimento linear isotrópico e suas constantes estão indicadas na figura. O critério de escoamento adotado foi o de von Mises.

Com um incremento de carga de 30% obteve-se, após o primeiro escoamento, dois fatores de carga λ. Os resultados da análise tridimensional obtidos na direção da tração foram comparados à solução analítica do problema (Owen, Hinton, 1980). As tabelas (VII.1) a (VII.4) apresentam estes resultados para as tensões e deformações plásticas nos pontos do domínio correspondentes aos nós funcionais das células. Cada uma destas tabelas apresenta, também, os erros percentuais relativos de cada item calculado, considerando como valores base os resultados obtidos na análise unidimensional.

Como pode ser observado, o maior erro obtido foi 0.23%, mostrando a plena concordância dos valores entre os dois métodos.

Tabela VII.1: Deformações Plásticas: $\lambda = 0.974774$.			
Ponto	EPZ (MEC)	EPZ (analítico)	Erro (%)
1	0.8994661E-03	0.899099E-03	0.04
2	0.8996634E-03	0.899099E-03	0.06
3	0.8996634E-03	0.899099E-03	0.06
4	0.8998846E-03	0.899099E-03	0.09
5	0.9007020E-03	0.899099E-03	0.18
6	0.9005235E-03	0.899099E-03	0.16
7	0.9003503E-03	0.899099E-03	0.14
8	0.9005253E-03	0.899099E-03	0.16

Tabela VII.2: Tensões: $\lambda = 0.974774$.			
Ponto	σ_z (MEC)	σ_z (analítico)	Erro (%)
1	0.9747E+01	0.9748E+01	0.00
2	0.9748E+01	0.9748E+01	0.00
3	0.9748E+01	0.9748E+01	0.00
4	0.9748E+01	0.9748E+01	0.00
5	0.9751E+01	0.9748E+01	0.03
6	0.9751E+01	0.9748E+01	0.03
7	0.9751E+01	0.9748E+01	0.03
8	0.9751E+01	0.9748E+01	0.03

Tabela VII.3: Deformações Plásticas: $\lambda = 1.0$			
Pontos	EPZ (MEC)	EPZ (analítico)	Erro (%)
1	0.1000599E-02	0.100000E-02	0.06
2	0.1000509E-02	0.100000E-02	0.05
3	0.1000509E-02	0.100000E-02	0.05
4	0.1000496E-02	0.100000E-02	0.05
5	0.1002303E-02	0.100000E-02	0.23
6	0.1001939E-02	0.100000E-02	0.19
7	0.1000907E-02	0.100000E-02	0.09
8	0.1001939E-02	0.100000E-02	0.19

Tabela VII.4: Tensões: $\lambda = 1.0$.			
Pontos	σ_z (MEC)	σ_z (analítico)	Erro (%)
1	0.1000E+02	0.1000E+02	0.00
2	0.1000E+02	0.1000E+02	0.00
3	0.1000E+02	0.1000E+02	0.00
4	0.1000E+02	0.1000E+02	0.00
5	0.1000E+02	0.1000E+02	0.00
6	0.1000E+02	0.1000E+02	0.00
7	0.1000E+02	0.1000E+02	0.00
8	0.1000E+02	0.1000E+02	0.00

A avaliação do desempenho do GMRES foi feita através dos seguintes testes:

i.: GMRESm: algoritmo sem controle de erro algébrico, testado para uma tolerância igual a 1×10^{-7}***, denominada TOL1.***

ii: GMRESmc: algoritmo com controle de erro algébrico, testado considerando os seguintes limites:

Erro Não Linear: $\Theta_b = 10\%$ e $\Theta_a = 1\%$.

Tolerância:

TOL2 : $TOL_a = 1\times10^{-7}$ a $TOL_b = 1\times10^{-4}$.

TOL3 : $TOL_a = 1\times10^{-7}$ a $TOL_b = 1\times10^{-3}$.

iii: INVER: algoritmo que utiliza inversão de matriz.

iv: LSLRG: algoritmo que utiliza eliminação de Gauss com pivotação parcial e posterior solução de um sistema triangularizado.

A tabela (VII.5) mostra os tempos de processamento obtidos para o processo de Newton-Raphson, normalizados em relação à subrotina INVER. Para este exemplo, em particular, foi incluída a montagem da matriz elastoplástica S^p citada na equação

(IV.24). Este procedimento foi adotado para que a medida de tempo fosse confiável, considerando o tempo mínimo possível de ser medido por microcomputador do tipo PCAT sem auxílio de produtos especiais, que é ($1/18.3\ s$).

Tabela VII.5: PRISMA TRACIONADO, S^p (48 × 48).	
ALGORITMO	TEMPO (normalizado)
INVER	1
DLSLRG (IMSL)	0.9749
GMRESm (TOL1)	0.9824
GMRESmc (TOL2)	0.9807
GMRESmc (TOL3)	0.9807

Para ilustrar os resultados de tempo de processamento obtidos, as tabelas (VII.6) a (VII.11) mostram o número de ciclos efetuados pelas duas versões do GMRES, assim como o número total de iterações (ITER) correspondente a cada iteração do processo elastoplástico (ITR) dentro de um fator de carga λ. Comparando estes resultados pode-se verificar a redução no número de ciclos e, principalmente, no número de iterações do GMRES quando o erro algébrico é controlado.

Tabela VII.6: λ = 0.974774, TOL1.		
Número máximo de iterações por ciclo do GMRESm: ITER = 5.		
ITR	N° de ciclos	N° de iter.: ITER
2	1	5
3	3	13

Tabela VII.7: λ = 0.974774, TOL2.		
Número máximo de iterações por ciclo do GMRESmc: ITER = 5.		
ITR	N° de ciclos	N° de iter.: ITER
2	1	2
3	2	9

Tabela VII.8: λ = 0.974774, TOL3.		
Número máximo de iterações por ciclo do GMRESmc: ITER = 5.		
ITR	N° de ciclos	N° de iter.: ITER.
2	1	1
3	2	6

Tabela VII.9: λ = 1.0, TOL1.		
Número máximo de iterações por ciclo do GMRESm: ITER = 5.		
ITR	N° de ciclos	N° de iter.: ITER
1	1	3
2	3	14
3	4	17
4	4	16

Tabela VII.10: λ = 1.0, TOL2.		
Número máximo de iterações por ciclo do GMRESmc: ITER = 5.		
ITR	N° de ciclos	N° de iter.: ITER
1	1	4
2	2	9
3	2	7
4	2	9

Tabela VII.11: λ = 1.0 , TOL3.		
Número máximo de iterações por ciclo do GMRESmc: ITER = 5.		
ITR	N° de ciclos	N° de iter.: ITER
1	1	4
2	2	7
3	1	5
4	2	10

Os resultados apresentados nas tabelas (VII.1) a (VII.4) mantiveram-se os mesmos para a solução do problema elastoplástico através das técnicas de Newton-Raphson e Newton-Raphson modificada. O número de iterações do processo elastoplástico foi, para $\lambda = 0.974774$, igual a 3 para a técnica de Newton-Raphson e 30 para a técnica de Newton-Raphson modificada. Com $\lambda = 1.0$, os valores foram, respectivamente, 4 e 12.

Da mesma forma, durante a aplicação do procedimento de controle de erro algébrico no algoritmo GMRESmc, as alterações nos resultados não foram significativas, mantendo as porcentagens de erro mostradas nas figuras acima citadas.

É importante salientar que este exemplo numérico teve como objetivo validar o programa desenvolvido.

VII.3: Placa circular perfurada.

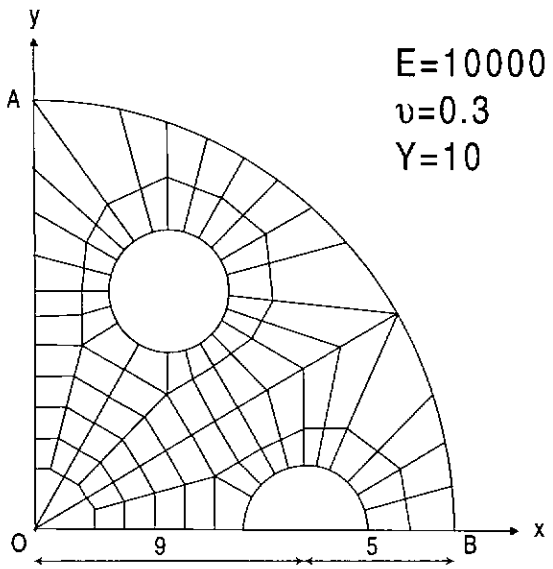


Figura VII.2: Discretização da Placa Perfurada, setor de 90^0.

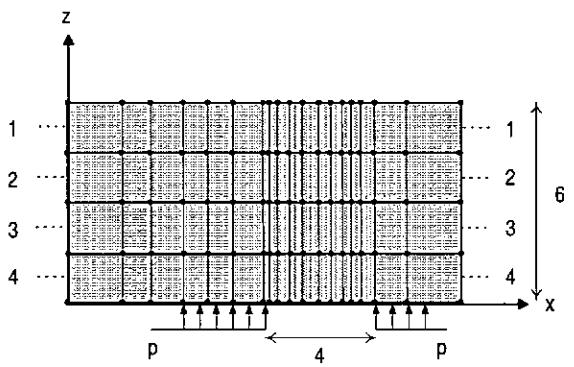


Figura VII.3: Discretização da Placa Perfurada, Corte zx.

O segundo problema analisado é uma placa circular espessa contendo seis perfurações também circulares e simétricas (Owen, Salonen, 1975). O segmento considerado é um setor de 90^0, conforme indicado nas figuras (VII.2) e (VII.3).

Para a modelagem numérica deste problema foram utilizados 436 elementos lineares retos contínuos, descontínuos e de transição no contorno e 360 células de geometria linear e aproximação constante das tensões iniciais no domínio. Os nós contidos na direção OA indicada na figura possuem deslocamentos prescritos e iguais a zero em x. Na direção OB, os deslocamentos prescritos e iguais a zero estão em y. A face circular AB possui deslocamentos prescritos nas três direções dos eixos coordenados e iguais a zero. O critério de escoamento adotado foi o de von Mises e o material, caracterizado como perfeitamente plástico, tem suas constantes indicadas na figura(VII.2).

Do segmento considerado foi destacado um setor de 30^0 para efetuar a comparação de desenvolvimento de zonas plásticas com aquela contida em Owen, Salonen (1975). Nesta referência, o mesmo problema foi analisado através do Método dos Elementos Finitos, com a discretização indicada na figura (VII.4), com 32 elementos quadráticos. No Método dos Elementos Finitos a carga limite do problema foi atingida para um valor da força distribuída na face inferior da placa ($z = 0$) igual a $0.41Y$, na oitava iteração do quinto incremento de carga. Para o Método dos Elementos de Contorno a carga limite foi atingida na vigésima iteração do décimo fator de carga λ do processo elastoplástico, com um valor da força distribuída igual a $0.397Y$ e um incremento de carga de 5%.

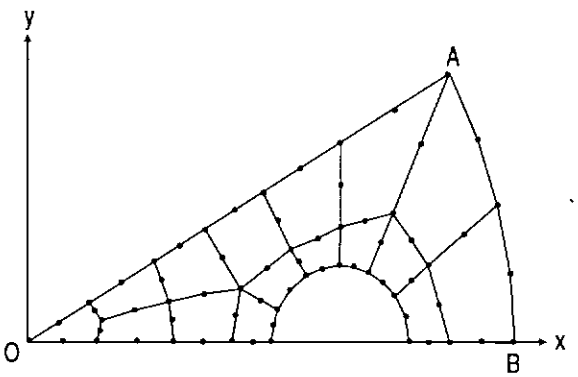


Figura VII.4: Discretização da Placa Perfurada para o MEF, setor de 30^0.

Respeitadas as diferenças entre o número de pontos oferecidos para comparação pelos dois métodos numéricos neste caso pois, para a célula constante o escoamento é detectado em um único nó, as figuras (VII.5) e (VII.6) mostram a boa concordância entre as zonas plásticas obtidas com os dois métodos para valores próximos da força distribuída .

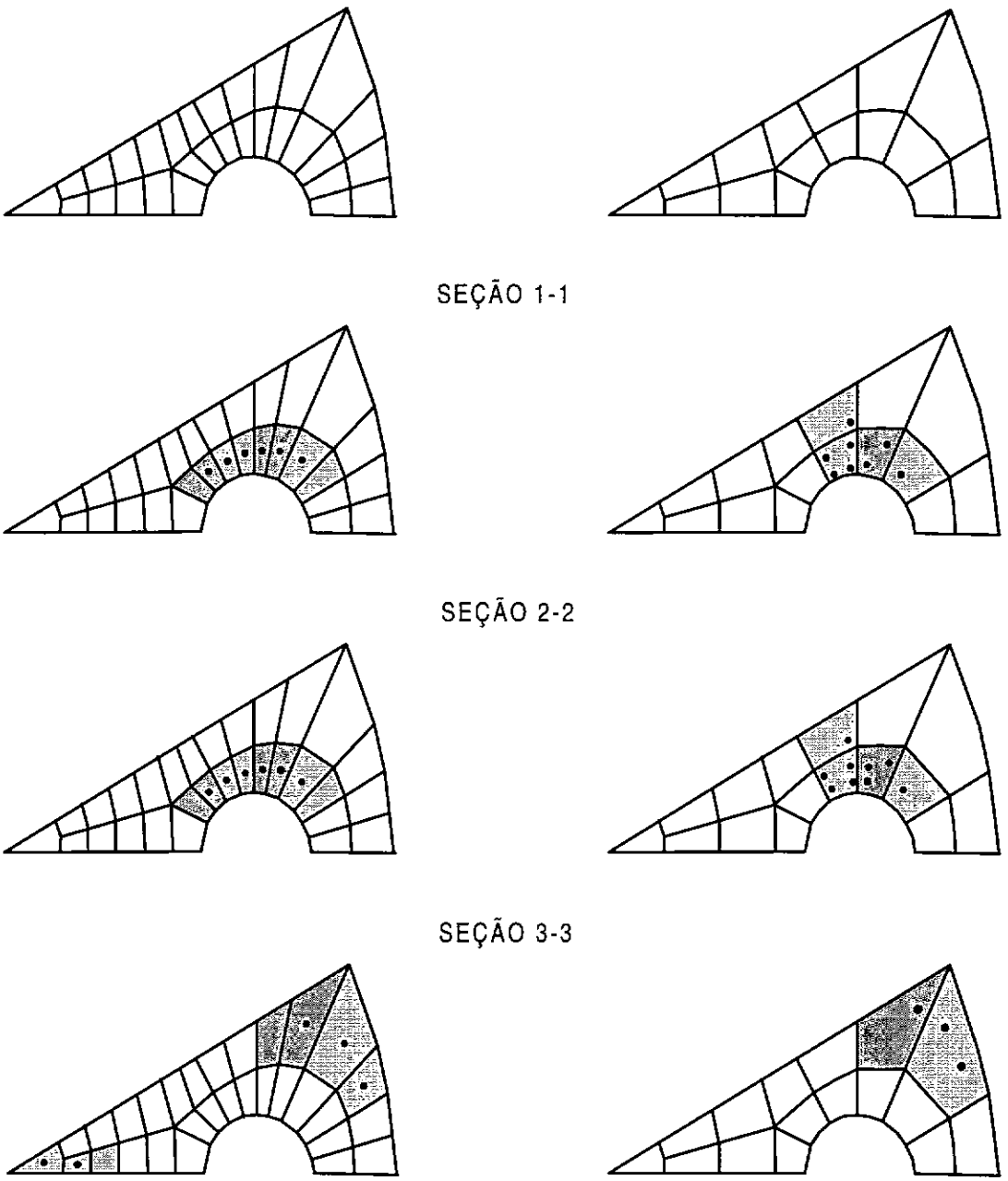
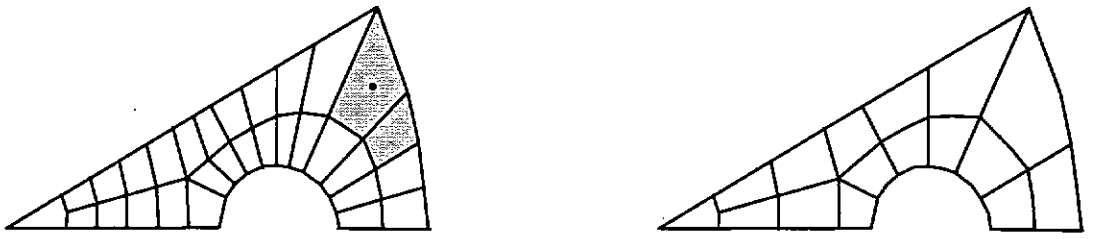


Figura VII.5: Desenvolvimento da Zona Plástica, Comparação entre MEF (Owen, Salonen,1975) e MEC.



SEÇÃO 1-1

SEÇÃO 2-2

SEÇÃO 3-3

SEÇÃO 4-4

p = 0.384 * Y

(a) MEC

p = 0.39 * Y

(b) MEF

Figura VII.6: Desenvolvimento da Zona Plástica, Comparação entre MEF(Owen, Salonen, 1975) e MEC.

O desempenho do GMRES foi avaliado considerando-se o final do problema como sendo o incremento de carga anterior à carga limite ($p = 0.384Y$). Os testes cumpridos foram os mesmos da aplicação do item VII.2(i, ii, iii, iv), solucionando um sistema de 2160 incógnitas.

Os limites adotados para o erro não linear foram $\Theta_b = 2\%$ e $\Theta_a = 0.1\%$, com as seguintes tolerâncias:

TOL1 : 1×10^{-7} (GMRESm).

TOL2 : $TOL_a = 1\times10^{-7}$ a $TOL_b = 1\times10^{-4}$ (GMRESmc).

TOL3 : $TOL_a = 1\times10^{-7}$ a $TOL_b = 1\times10^{-3}$ (GMRESmc).

TOL7 : $TOL_a = 1\times10^{-7}$ a $TOL_b = 1\times10^{-5}$ (GMRESmc).

A tabela (VII.12) mostra os tempos de execução do processo elastoplástico obtidos com os dados acima, normalizados em relação à subrotina INVER.

Tabela VII.12: Placa Perfurada: S^p (2160×2160)	
ALGORITMO	TEMPO (normalizado)
INVER	1
DLSLRG (IMSL)	1.63
GMRESm (TOL1)	0.20
GMRESmc (TOL7)	0.16
GMRESmc (TOL2)	0.15
GMRESmc (TOL3)	0.13

As variações de tempo de execução entre o GMRESm e o GMRESmc são ilustradas através das figuras (VII.7) a (VII.9), que mostram o número de iterações ITER em relação ao número de iterações do processo elastoplástico ITR para os três fatores de carga λ indicados.

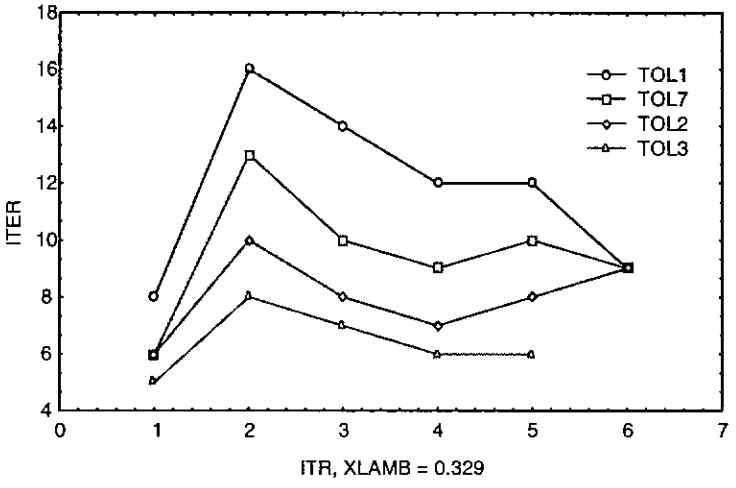


Figura VII.7: Variação do Número de Iterações, λ =0.329.

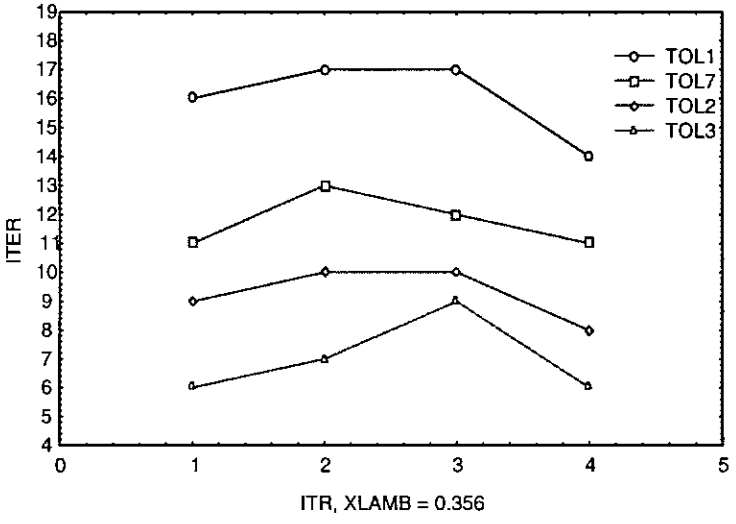


Figura VII.8: Variação do Número de Iterações, λ =0.356.

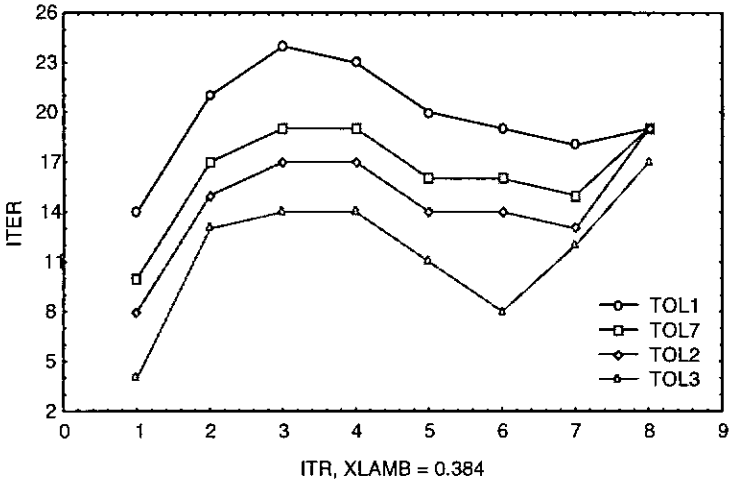


Figura VII.9: Variação do Número de Iterações, λ =0.384.

Os desenvolvimentos de zonas plásticas mostrados nas figuras (VII.5) e (VII.6) não apresentaram variações quando, para solução do problema elastoplástico, foram aplicadas as técnicas de Newton-Raphson e Newton-Raphson modificada. Da mesma forma, estas zonas plásticas mantiveram-se inalteradas durante as aplicações do controle de erro algébrico com o algoritmo GMRESmc.

VII.4. Poliestireno sob tensão:

O terceiro problema avaliado mostra o comportamento do poliestireno quando, sob certo nível de tensão, desenvolve vazios no seu interior. Assim, considerando um conjunto tridimensional destes, foi analisada a fração indicada na figura (VII.40) sob três situações.

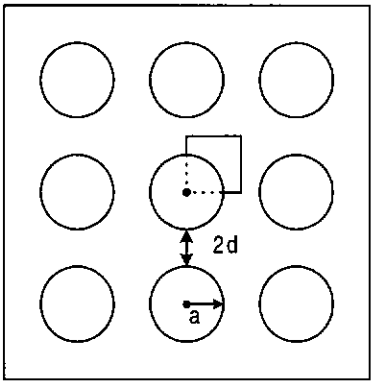


Figura VII.40: Fração do Poliestireno analisada.

Inicialmente foi simulado, através da análise tridimensional, o problema bidimensional correspondente a este caso. A forma da fração acima citada é apresentada na figura (VII.41). Os círculos possuem raio a e a distância entre seus centros é $2(a+d)$. Como condições de contorno, foram prescritos deslocamentos iguais a zero nas faces $x=0$, $y=0$, $z=0$ e $z=a+d$, nas direções x, y e z, respectivamente. Nas faces $x=a+d$ e $y=a+d$ os deslocamentos foram, também, prescritos e iguais a Δ, nas direções x e y. A relação entre o raio dos círculos e a distância entre os mesmos é $d/a=0.5$.

O critério de escoamento adotado foi o de Von Mises. Para um material considerado perfeitamente plástico, foram utilizadas as seguintes constantes: módulo de elasticidade $E=43 Tf/cm^2$, coeficiente de Poisson $\nu=0.33$, tensão limite de escoamento $Y=1.07\,Tf/cm^2$. O incremento de carga foi de $25\,\%$ e o raio dos círculos, $25\ cm$.

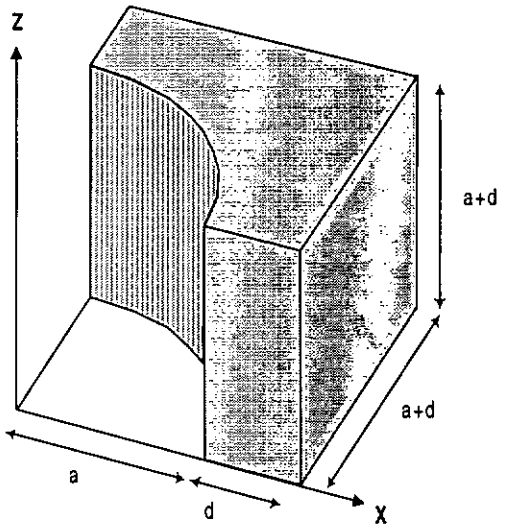


Figura VII.41: Fração do Poliestireno analisada na Simulação Bidimensional.

A discretização do problema é apresentada nas figuras (VII.42) e (VII.43). O número de elementos lineares retos contínuos e de transição foi 136 e o número de células de geometria linear e aproximação constante das tensões iniciais, 96.

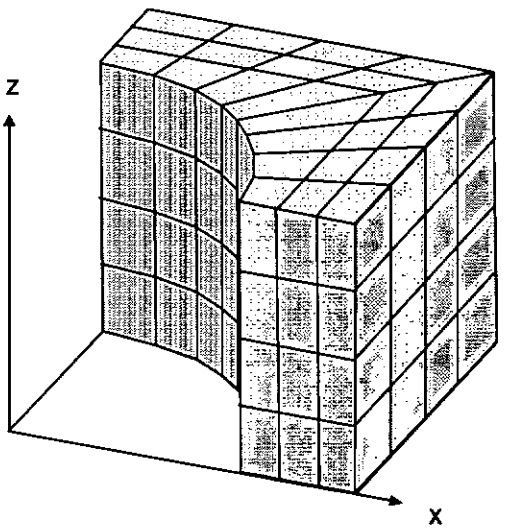


Figura VII.42: Discretização do Contorno para a Simulação Bidimensional.

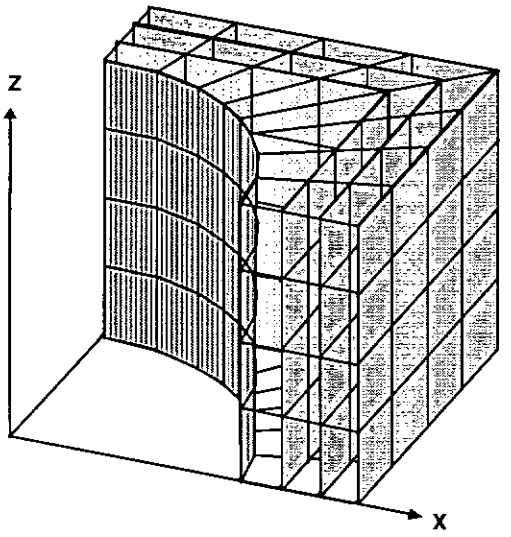


Figura VII.43: Discretização do Domínio para a Simulação Bidimensional.

Os resultados foram comparados aos obtidos por Telles (Telles, 1983) , com a discretização apresentada na figura (VII.44). Nesta referência, o problema foi avaliado através do Método dos Elementos de Contorno em análise bidimensional e comparado ao Método dos Elementos Finitos, mostrando resultados excelentes.

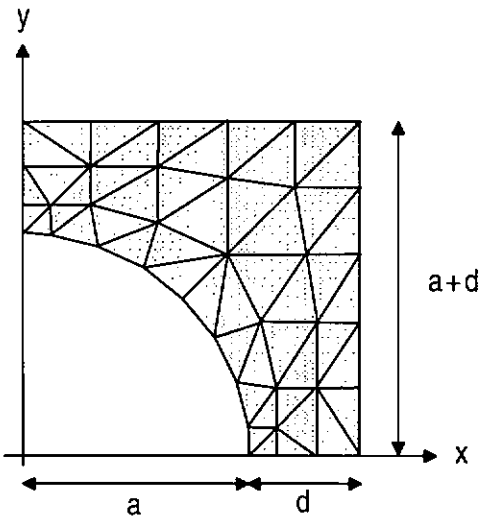


Figura VII.44: Discretização para o Problema Bidimensional do Poliestireno.

O gráfico da figura (VII.45) mostra os resultados da simulação do problema através da análise tridimensional (SOLMEC3D) comparados aos da análise bidimensional (SOLMEC2D) acima citada, podendo-se observar a concordância entre os mesmos. Os valores são válidos para as faces $x = a + d$ e $y = a + d$.

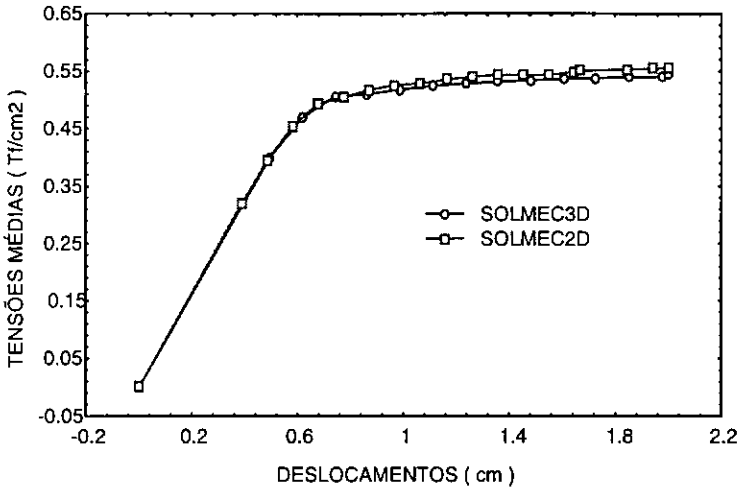


Figura VII.45: Comparação de Resultados entre a Análise Bidimensional e a Simulação Tridimensional.

A figura (VII.46) apresenta os resultados deste problema utilizando a técnica de Newton-Raphson (MECNR) e a técnica de Newton-Raphson modificada (MECNRM). Todas as tensões médias apresentadas nesta aplicação estão multiplicadas por 10^{-3}.

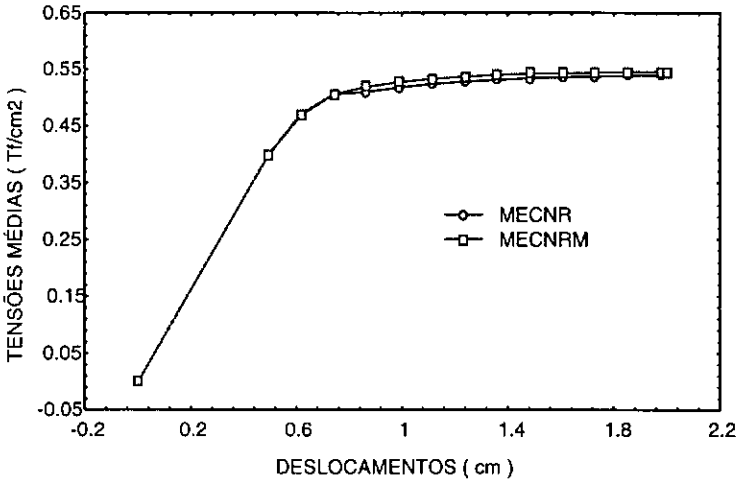


Figura VII.46: Resultados obtidos com os Métodos de Newton-Raphson e Newton-Raphson Modificado.

A avaliação do desempenho do GMRES cumpriu os mesmos itens de I a IV descritos na aplicação do item VII.2, apenas não sendo necessária a inclusão da formação da matriz S^p, por tratar-se de um sistema de equações de maior ordem, com 576 incógnitas.

Os erros não lineares limite adotados foram $\Theta_b = 2\%$ e $\Theta_a = 0.1\%$ e as tolerâncias limite:

TOL4 : 1×10^{-6} (GMRESm).

TOL5 : $TOL_a = 1\times10^{-6}\, a\ TOL_b = 1\times10^{-4}$ (GMRESmc).

TOL6 : $TOL_a = 1\times10^{-6} a TOL_b = 1\times10^{-3}$ (GMRESmc).

A figura (VII.47) mostra os resultados obtidos para o problema de acordo com a variação de tolerâncias.

Os tempos de execução obtidos e normalizados em relação a subrotina INVER são apresentados na tabela (VII.13) para o método de Newton-Raphson.

Estes resultados são ilustrados através dos gráficos de variação do número de iterações do GMRESm e do GMRESmc em relação ao número de iterações do processo elastoplástico para os valores do fator de carga λ indicados nas figuras (VII.48) a (VII.51).

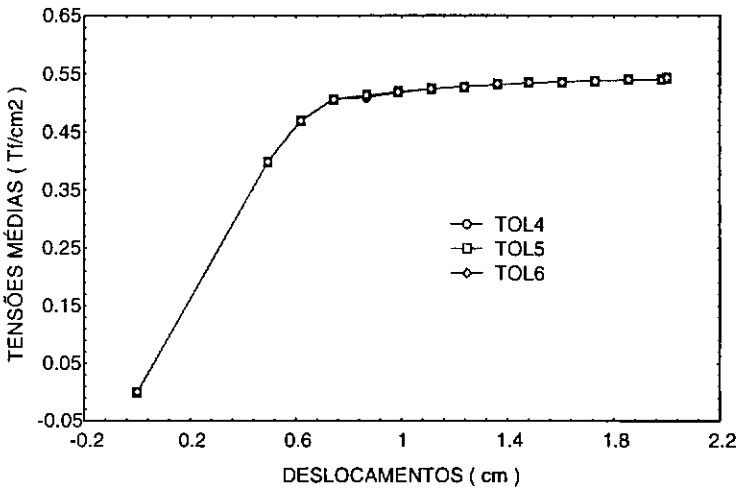


Figura VII.47: Resultados Obtidos com os Algoritmos GMRESm e GMRESmc.

Tabela VII.13: POLIESTIRENO: S^p (576×576)	
ALGORITMO	TEMPO (normalizado)
INVER	1
DLSLRG (IMSL)	0.49
GMRESm (TOL4)	0.14
GMRESmc (TOL5)	0.12
GMRESmc (TOL6)	0.11

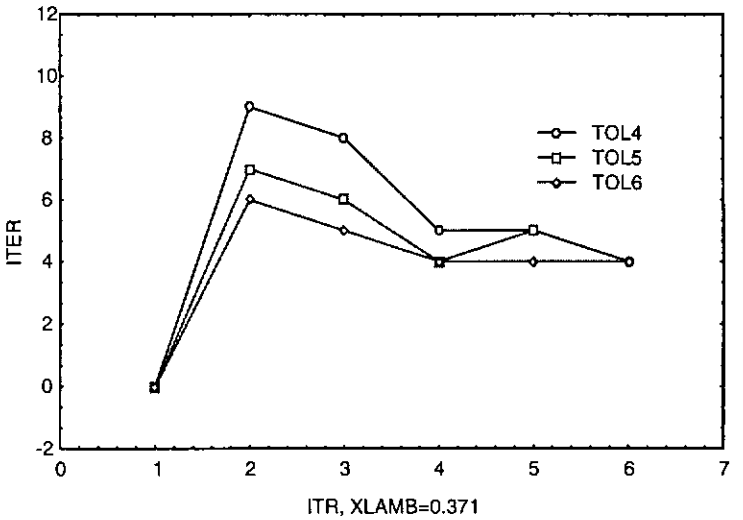


Figura VII.48: Variação do Número de Iterações para λ =0.371.

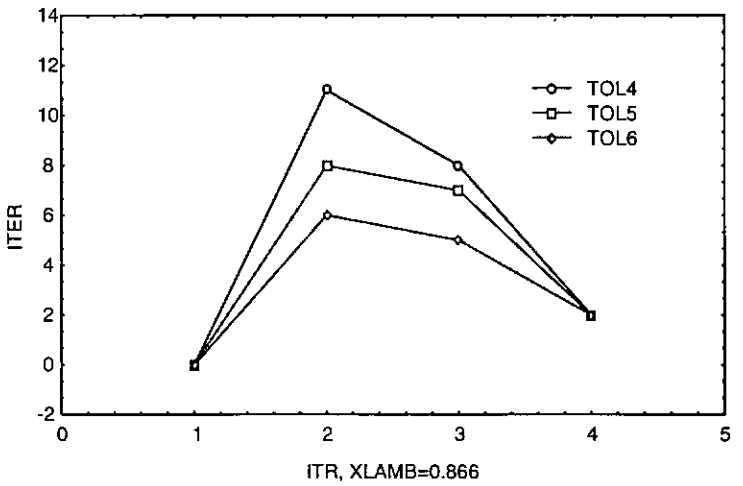


Figura VII.49: Variação do Número de Iterações para λ =0.866.

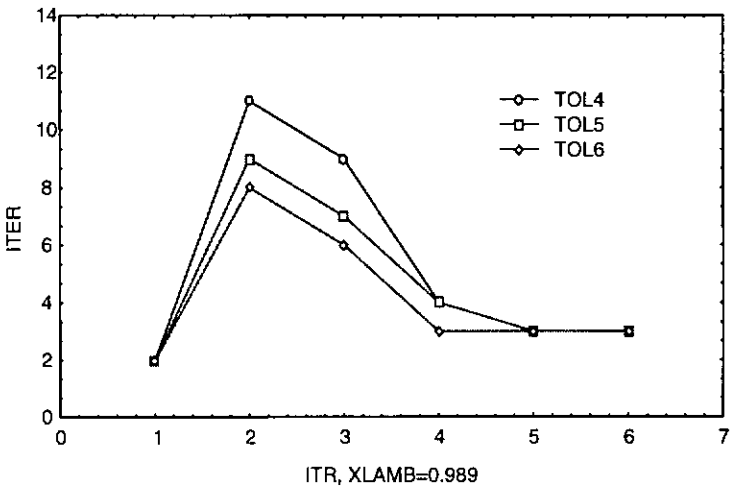


Figura VII.48: Variação do Número de Iterações para λ=0.989.

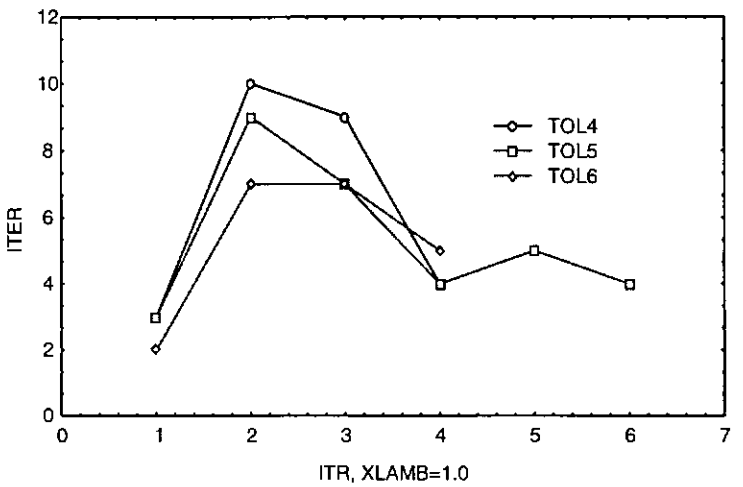


Figura VII.49: Variação do Número de Iterações para λ=1.0.

Após a simulação bidimensional, o mesmo problema foi estudado em sua forma tridimensional. O módulo utilizado a partir da figura (VII.40) é mostrado na figura (VII.52). A análise foi efetuada para duas relações das constantes a e d: $d/a = 0.5$ e $d/a = 0.1$.

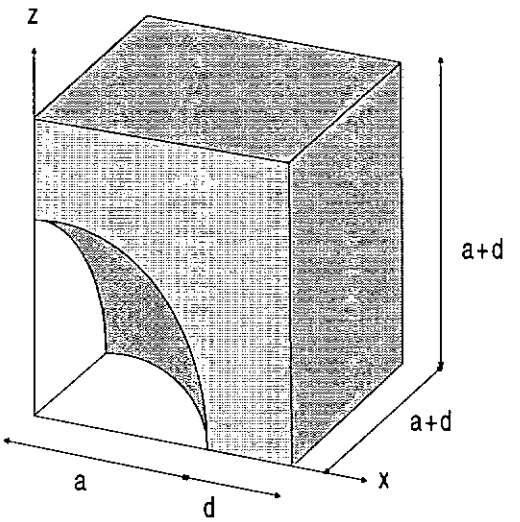


Figura VII.52: Fração do Poliestireno utilizada na Análise Tridimensional.

Os deslocamentos prescritos e iguais a zero estão nas faces $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, nas direções x, y e z. Nas faces $x = a + d$, $y = a + d$ e $z = a + d$ os deslocamentos prescritos são iguais a Δ. As características do material e o critério de escoamento foram mantidos.

Para a relação $d/a = 0.1$ foi efetuada a discretização indicada nas figuras (VII.53) e (VII.54). Devido a esta relação, foram consideradas apenas duas camadas internas de células pois, com o pequeno valor de d, a integração do domínio desestabiliza-se com facilidade. A malha utilizada possui 288 elementos lineares retos contínuos e de transição no contorno e 216 células de geometria linear e aproximação constante para as tensões iniciais no domínio.

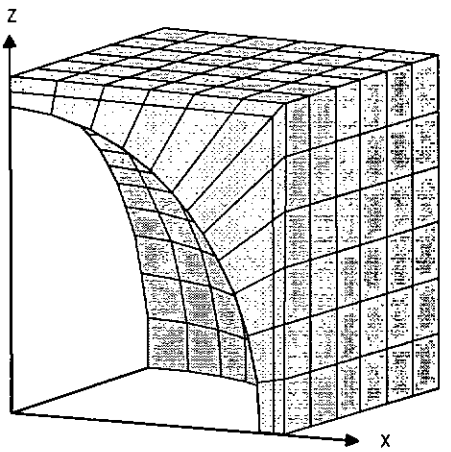


Figura VII.53: Discretização Tridimensional do contorno para d/a =0.1.

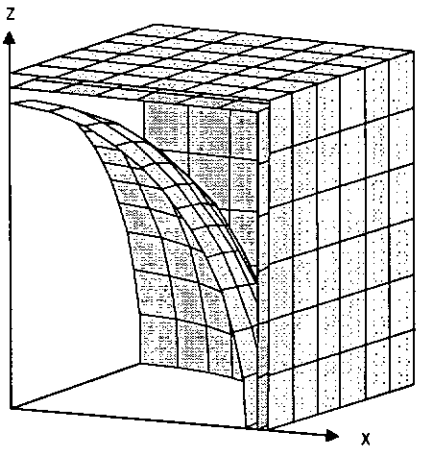


Figura VII.54: Discretização Tridimensional do Domínio para d/a =0.1.

A figura (VII.55) mostra o resultado obtido com o Método dos Elementos de Contorno (MEC3D) comparado ao Método dos Elementos Finitos (MEF3D), (Owen, Salonen, 1975). A figura (VII.56) mostra os resultados do Método dos Elementos de Contorno para variações no incremento de carga de 25% (MEC25), 70% (MEC70) e 100% (MEC100).

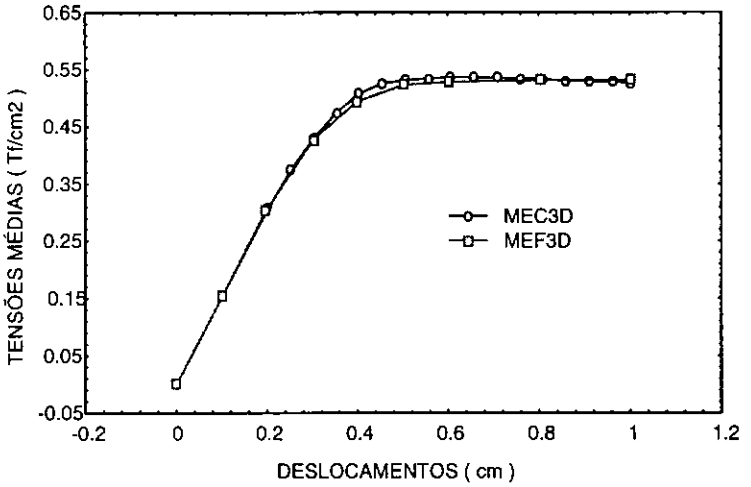


Figura VII.55:Comparação de Resultados entre o MEC e o MEF para d/a =0.1.

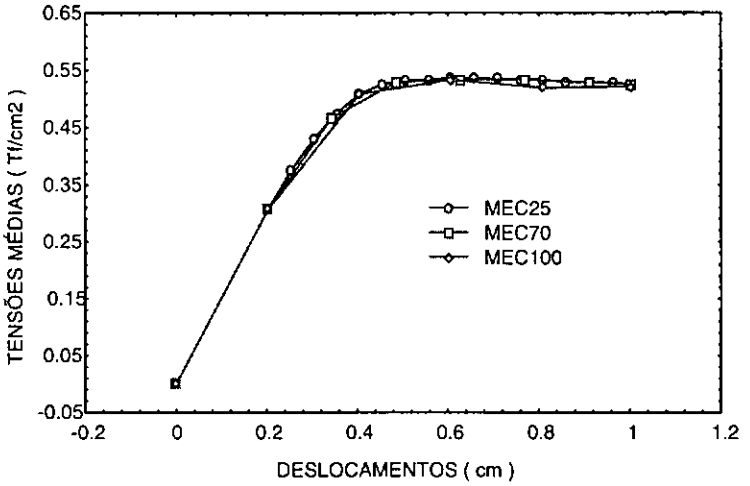


Figura VII.56: Variação de Incrementos de Carga para d/a =0.1.

A avaliação do desempenho de GMRESm e GMRESmc foi idêntica às aplicações anteriores, cumprindo os quatro testes da aplicação VII.2 (i, ii, iii, iv), não incluindo a montagem da matriz S^p, por tratar-se de um sistema de equações de maior ordem, com 1296 incógnitas.

Os erros não lineares limite adotados foram $\Theta_b = 2\%$ e $\Theta_a = 0.1\%$ e as tolerâncias limite:

TOL4 : 1×10^{-6} (GMRESm).
TOL5 : $TOL_a = 1 \times 10^{-6}$ a $TOL_b = 1 \times 10^{-4}$ (GMRESmc).
TOL6 : $TOL_a = 1 \times 10^{-6}$ a $TOL_b = 1 \times 10^{-3}$ (GMRESmc).

A figura (VII.57) mostra os resultados obtidos.

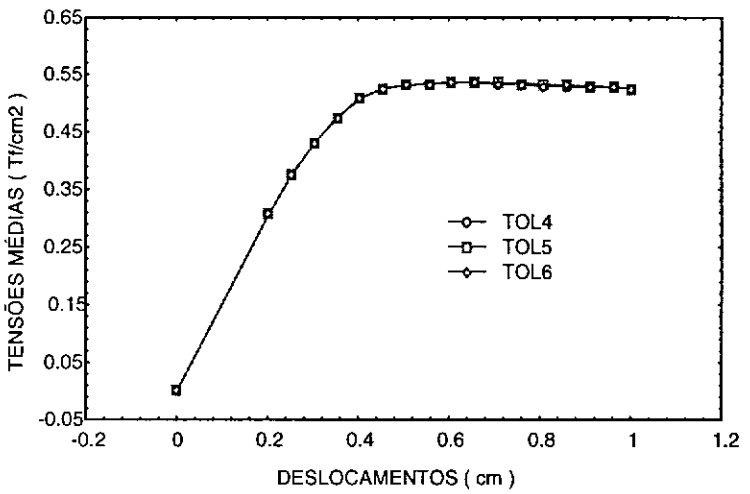


Figura VII.57: Resultados obtidos com os Algoritmos GMRESm e GMRESmc para d/a =0.1.

Os tempos de processamento são apresentados na tabela (VII.14) para o método de Newton-Raphson, normalizados em relação a subrotina INVER.

Tabela VII.14:POLIESTIRENO: d/a=0.1, S^p (1296×1296).	
ALGORITMO	TEMPO (normalizado)
INVER	1
DLSLRG (IMSL)	1.46
GMRESm (TOL4)	0.23
GMRESmc (TOL5)	0.20
GMRESmc (TOL6)	0.18

Os valores obtidos para os tempos de processamento são ilustrados através dos gráficos abaixo, figuras (VII.58) a (VII.61) que mostram a variação do número de iterações ITER para o GMRESm e GMRESmc. Estes gráficos representam a variação

do número de iterações ITR do processo elastoplástico para alguns valores dos fatores de carga λ.

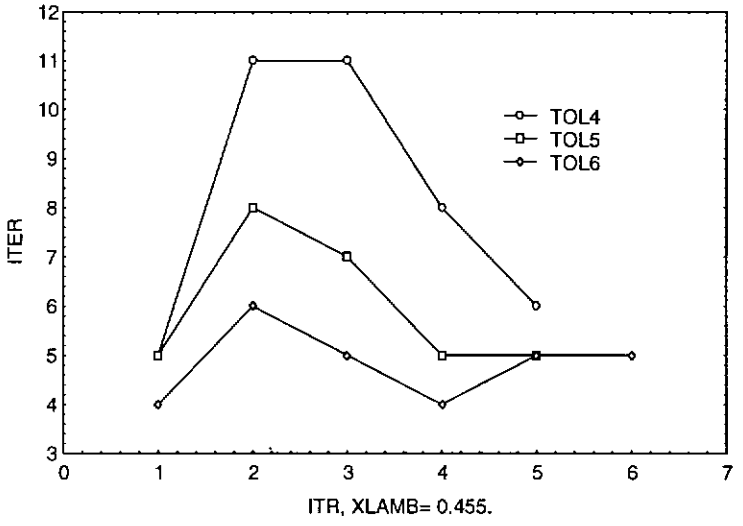


Figura VII.58: Variação do Número de Iterações para λ=0.455.

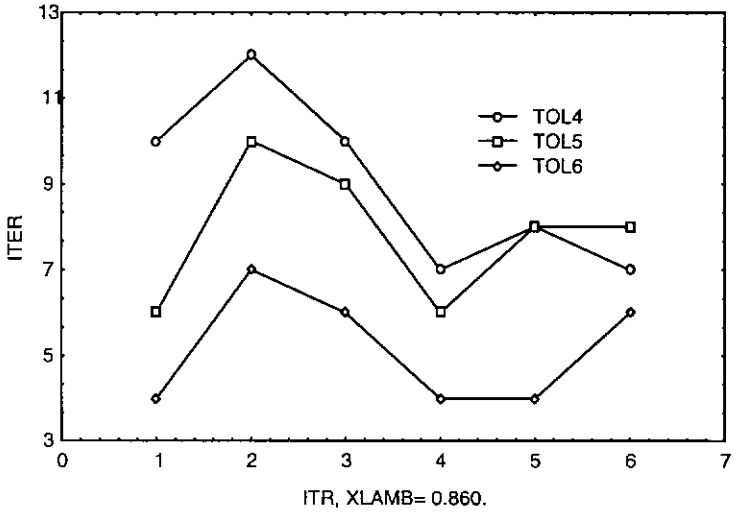


Figura VII.59: Variação do Número de Iterações para λ=0.860.

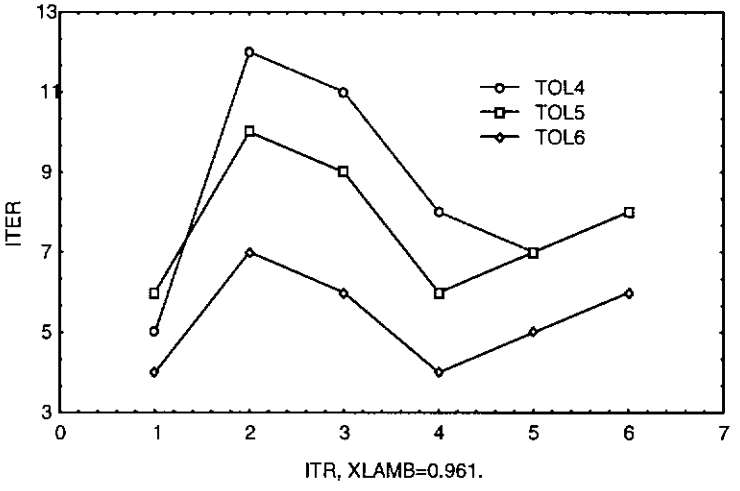


Figura VII.60: Variação do Número de Iterações para λ=0.961.

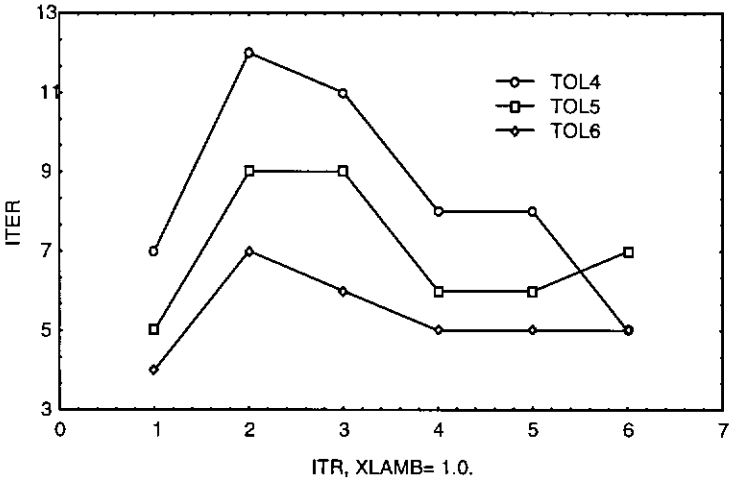


Figura VII.61: Variação do Número de Iterações para λ=1.0.

Para a relação $d/a = 0.5$, utilizando-se um incremento de carga igual a 70%, os resultados obtidos estão na figura (VII.62), considerando as seguintes discretizações:

MEC1 : 48 elementos lineares retos contínuos e de transição no contorno (Mansur, Telles, 1993) e 24 células de geometria linear e aproximação constante das tensões iniciais no domínio.

MEC2: 168 elementos lineares retos contínuos e de transição no contorno e 144 células de geometria linear e aproximação constante das tensões iniciais no domínio.

MEC3 : 240 elementos lineares retos contínuos e de transição no contorno e 225 células de geometria linear e aproximação constante das tensões iniciais no domínio.

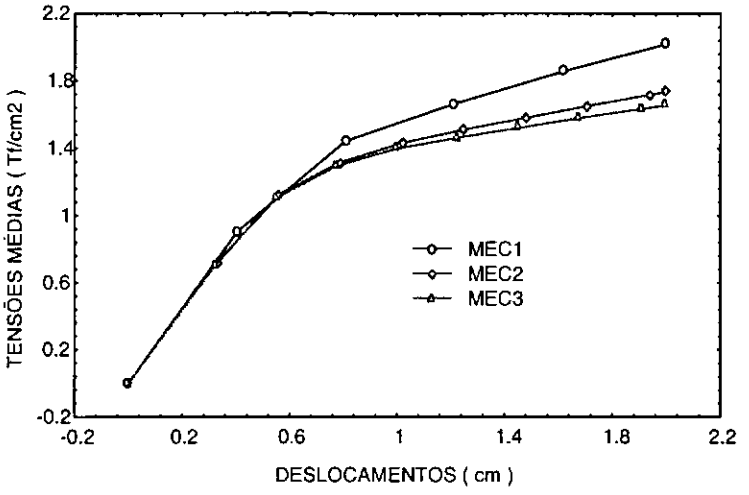


Figura VII.62: Resultados obtidos com as discretizações MEC1, MEC2, MEC3 para d/a =0.5.

As figuras (VII.63) e (VII.64) mostram a malha **MEC2** como representação da forma das malhas utilizadas nesta etapa da aplicação. Esta combina um número de 16 elementos por face do cubo com três camadas de células ao longo do raio da esfera.

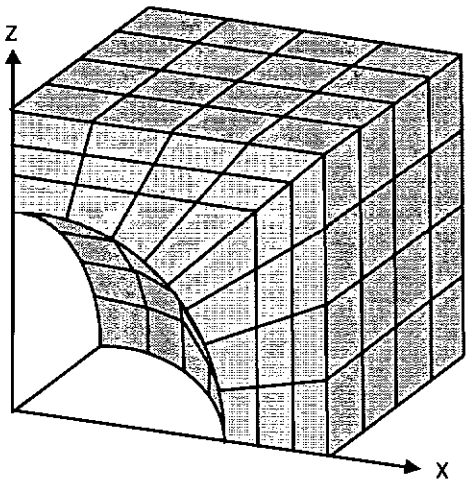


Figura VII.63: Discretização do Contorno para MEC2.

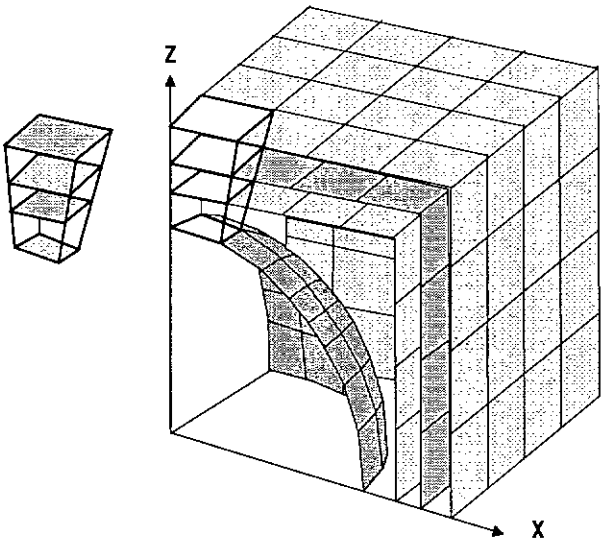


Figura VII.64: Discretização do Domínio para MEC2.

A figura (VII.65) apresenta os resultados obtidos com as técnicas de Newton-Raphson (MECNR) e Newton-Raphson modificada (MECNRM) para a malha **MEC2**.

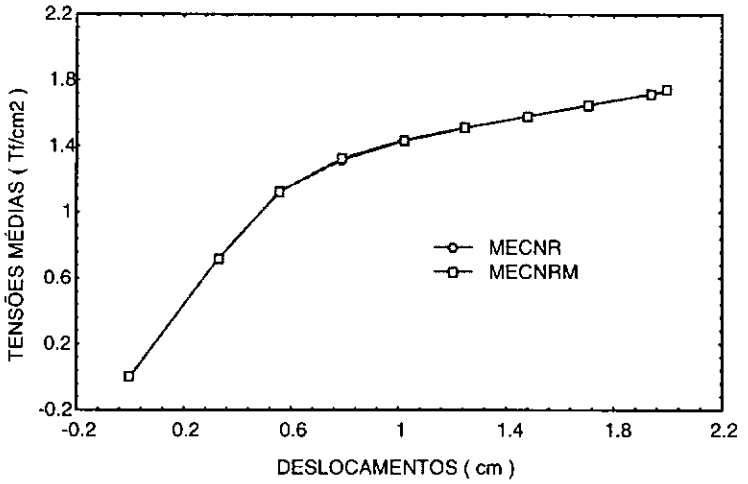


Figura VII.65: Resultados obtidos com os Métodos de Newton-Raphson e Newton-Raphson Modificado.

A avaliação do desempenho do GMRES, da mesma forma que os casos anteriores, cumpriu os testes descritos na aplicação do item VII.2 (i, ii, iii, iv), apenas não sendo necessária a inclusão da formação da matriz S^p, por tratar-se de um sistema de equações de maior ordem. Este sistema pertence à discretização **MEC2** e possui 864 incógnitas.

Os erros não lineares limite adotados foram $\Theta_b = 2\%$ e $\Theta_a = 0.1\%$ e as tolerâncias limite:

TOL4 : 1×10^{-6} (GMRESm).

TOL5 : $TOL_a = 1 \times 10^{-6}$ a $TOL_b = 1 \times 10^{-4}$ (GMRESmc).

TOL6 : $TOL_a = 1 \times 10^{-6}$ a $TOL_b = 1 \times 10^{-3}$ (GMRESmc).

A figura (VII.66) mostra os resultados do problema para o controle do erro algébrico com as constantes indicadas acima.

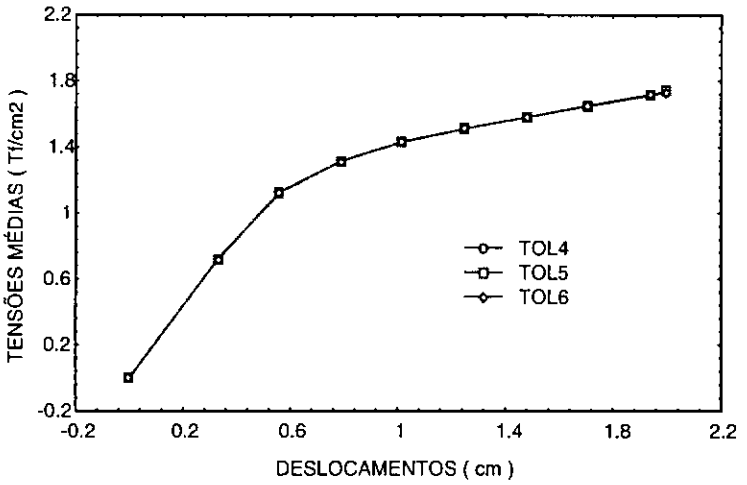


Figura VII.66: Resultados obtidos com os Algoritmos GMRESm e GMRESmc para d/a =0.5.

Os tempos de processamento do problema elastoplástico para o método de Newton-Raphson estão na tabela (VII.15), normalizados em relação ao algoritmo INVER.

Tabela VII.15::POLIESTIRENO: $d/a = 0.5$, S^p (864 × 864).	
ALGORITMO	TEMPO (normalizado)
INVER	1
DLSLRG (IMSL)	0.46
GMRESm (TOL4)	0.13
GMRESmc (TOL5)	0.11
GMRESmc (TOL6)	0.09

Os valores para o tempo de processamento, obtidos com o GMRESm e GMRESmc, ficam completamente ilustrados através dos gráficos das figuras (VII.67) a (VII.71), que mostram a variação do número de iterações dos algoritmos do GMRES (ITER) para cada iteração do processo elastoplástico (ITR), considerados 5 fatores de carga.

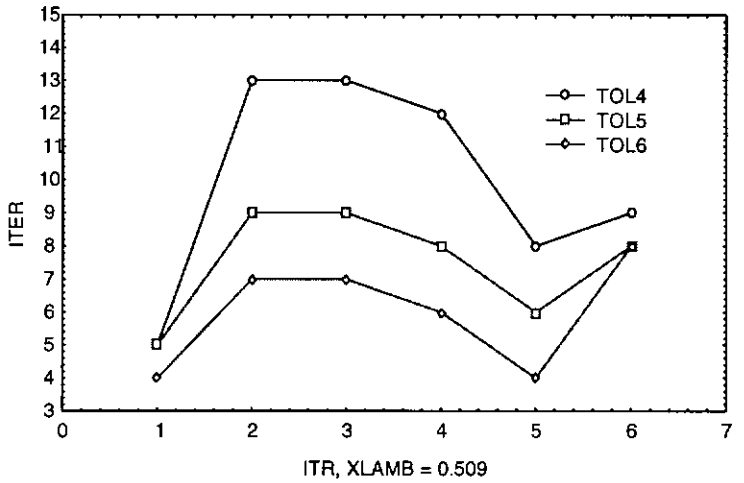


Figura VII.67: Variação do Número de Iterações para λ=0.509.

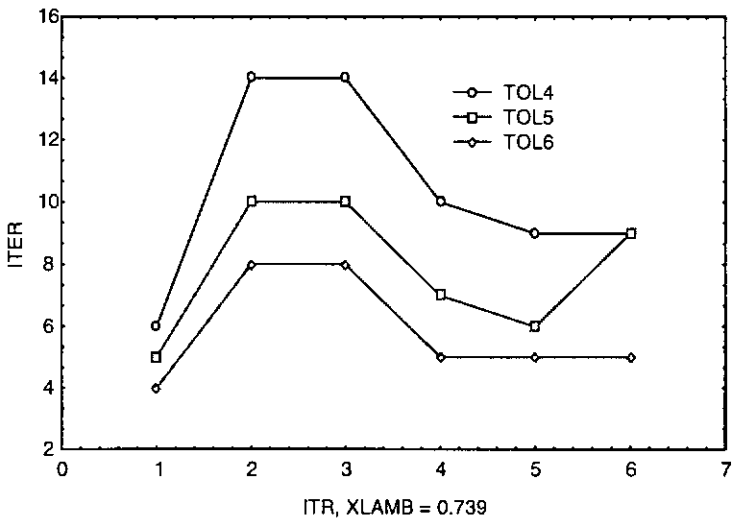


Figura VII.68: Variação do Número de Iterações para λ=0.739.

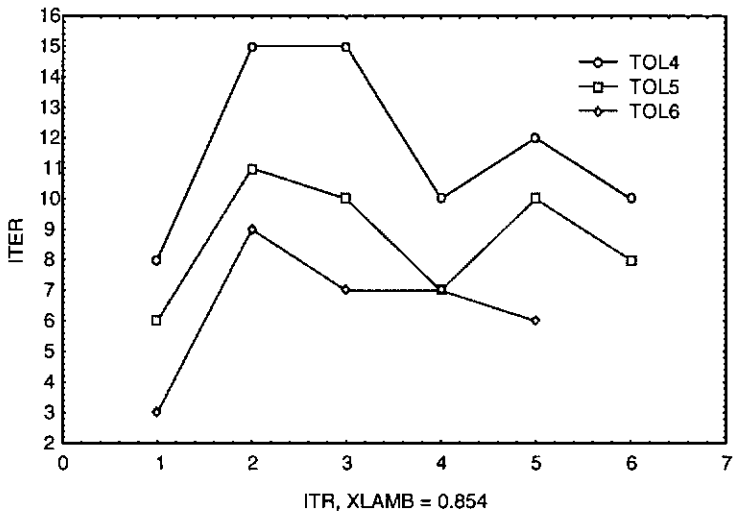


Figura VII.69: Variação do Número de Iterações para λ=0.854.

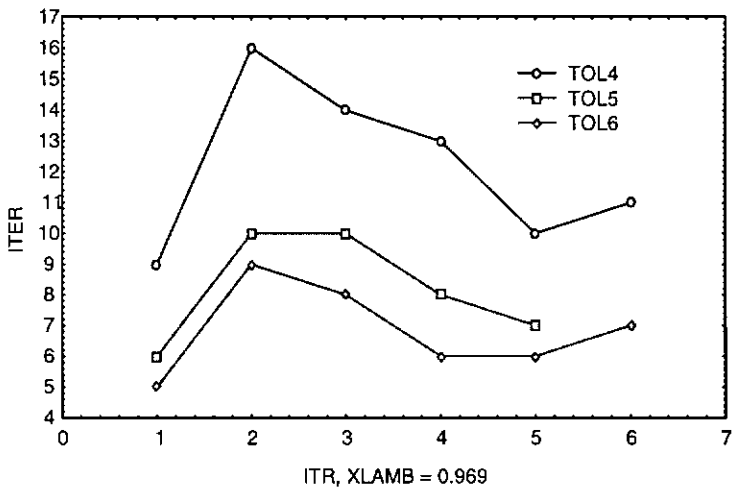


Figura VII.70: Variação do Número de Iterações para λ=0.969.

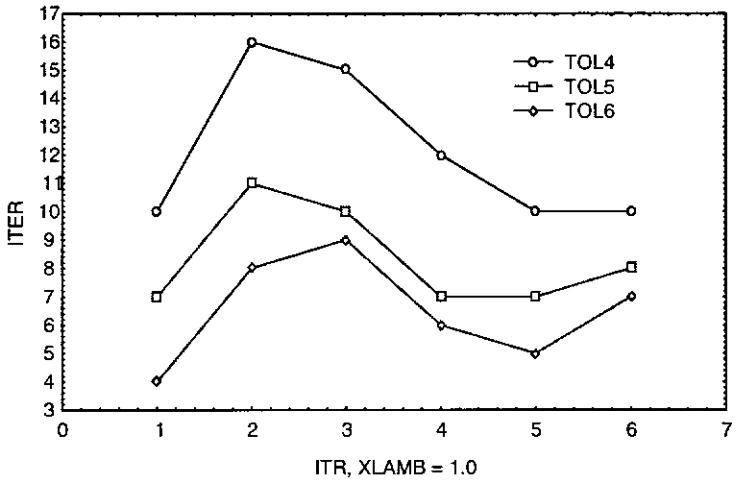


Figura VII.71:Variação do Número de Iterações para λ=1.0.

Capítulo VIII:

Conclusão

O objetivo principal deste trabalho foi a análise elastoplástica tridimensional através do Método dos Elementos de Contorno utilizando técnicas implícitas. Para o caso bidimensional, a formulação teórica completa deste problema foi feita anteriormente e amplamente avaliada (Telles, 1979, 1983, Telles, Carrer, 1988, 1990, Carrer, 1991, 1994).

Dedicou-se, então, atenção ao caso elastoplástico tridimensional e à apresentação de aplicações que pudessem ilustrá-lo demonstrando, também, a utilização do MEC para estes problemas. A formulação escolhida foi a das Tensões Iniciais pela sua generalidade. Pelo mesmo motivo foram escolhidas as técnicas implícitas, embora a eficiência das técnicas explícitas já tenha sido demonstrada (Telles, 1980a, 1980b, 1983, Carrer, 1987).

Para que a programação completa pudesse ser efetuada foram criados os esquemas de integração de domínio apresentados no capítulo V. As integrais foram executadas numericamente em todos os casos. Em relação às integrais quase singulares, a implementação da transformação de coordenadas de terceiro grau (Telles, 1987), trouxe otimização ao esquema numérico. Para as integrais de valor principal, a solução adotada, embora simples, também demonstrou a precisão esperada. Uma vez aplicadas as técnicas implícitas, principalmente a de Newton-Raphson, foi necessária a adoção de um sistema eficiente de solução das equações geradas pela análise elastoplástica. Sob este aspecto, a utilização do algoritmo GMRESm (Saad, Schultz, 1986) mostrou excelente desempenho.

Considerando a análise elastoplástica tridimensional, os resultados obtidos em todas as aplicações confirmaram a precisão do Método dos Elementos de Contorno. A comparação com a solução analítica no caso do Prisma Tracionado, apresentada no capítulo VII, item VII.2, empregado para validar o programa, mostrou o maior erro percentual como sendo 0.23 %. No caso da Placa Perfurada, item VII.3 do mesmo capítulo, os resultados foram comparados ao Método dos Elementos Finitos, tendo sido, também, muito bons. O problema do Poliestireno sob tensão, aplicação VII.4, foi, inicialmente, estudado através de uma simulação de seu caso bidimensional e comparado aos resultados obtidos para o mesmo problema com o Método dos Elementos de Contorno em análise de estado plano de deformação (Telles, 1983.). Os resultados apresentados na figura (VII.45) mostraram-se excelentes. Após, foram avaliadas duas relações entre as constantes d e a: 0.1 e 0.5. Para a relação $d/a = 0.1$, a figura (VII.55) compara os valores obtidos com o Método dos Elementos de Contorno aos obtidos com o Método dos Elementos Finitos (Owen, Salonen, 1975), com ótimos resultados. Para a mesma relação valendo 0.5, foram utilizadas várias

discretizações e os valores obtidos são apresentados na figura (VII.62). A discretização MEC2 foi escolhida para avaliação do GMRES por possuir uma matriz S^p de ordem não testada nos demais casos. Em todas as aplicações a técnica de Newton-Raphson acarretou um número de iterações muito menores para o processo elastoplástico em relação a técnica de Newton-Raphson modificada, por representar a matriz S^p, contida na equação (IV.24), com maior precisão.

Quanto à utilização dos algoritmos GMRESm (Saad, Schultz, 1986) e GMRESmc (algoritmo com controle de erro algébrico), ambos demonstraram ótimo desempenho em relação aos algoritmos de solução direta empregados para comparação, em todos os casos. O método, de solução iterativa, pode ser amplamente testado, através de sistemas de equações lineares de várias ordens. Em um único caso aconteceu o reinicio das iterações (restart), considerando a adoção de 10% do número de incógnitas do problema para dimensão da base de Krylov em cada ciclo do GMRESm e GMRESmc (aplicação do item VII.2). Nos demais casos não houve reinicio do método e as iterações máximas utilizadas não chegaram aos 10% previstos, tendo sido alcançada a solução muito antes deste valor. O número máximo de iterações executado entre **todos os ciclos** das aplicações dos itens VII.3 e VII.4 do capítulo VII, envolvendo os algoritmos GMRESm e GMRESmc foram: **Placa perfurada**: 24 iterações para uma previsão máxima de 216 por ciclo; **Poliestireno, simulação 2D**: 12 iterações para um máximo de 58 por ciclo; **Poliestireno, relação d/a=0.5**: 16 iterações para um máximo de 87 por ciclo; **Poliestireno, relação d/a=0.1**: 12 iterações para um máximo de 130 por ciclo. Com estes e os demais dados apresentados no capítulo VII, pode-se verificar a melhora de desempenho do GMRES a medida que a ordem dos sistemas de equações cresce. Os tempos de execução mostrados nas tabelas deste mesmo capítulo, foram normalizados com os seguintes valores de tempo de execução da subrotina INVER:

APLICAÇÃO	TEMPO: INVER (segundos)
Prisma Tracionado	51s (com S^p)
Placa Perfurada	3116 s
Poliestireno: simulação 2D	224 s
Poliestireno: d/a=0.5	849 s
Poliestireno: d/a=0.1	1526 s

Com os valores acima podem ser obtidos os tempos de execução de todos os casos apresentados no capítulo VII. As tabelas sobre a variação do número de iterações dos algoritmos do GMRES apresentadas nas aplicações ilustram as variações de tempo obtidas. Vale ressaltar que a diminuição do número de iterações ocorreu para todos os incrementos de carga dos problemas avaliados com controle de erro algébrico. Desta forma, fica demonstrada a eficiência dos algoritmos do GMRESm e GMRESmc em relação aos algoritmos de solução direta empregados para comparação, assim como a atuação do controle de erro algébrico. Ainda, foi demonstrada, também, viabilidade do controle do erro algébrico através de problemas cujas respostas eram conhecidas. A utilização deste tipo de controle para situações novas irá auxiliar na obtenção de um **comportamento inicial** do problema que estiver sendo estudado.

Durante o desenvolvimento deste trabalho, algumas situações foram evidenciadas, merecendo ser destacadas:

i. O porte do programa gerado exige que o mesmo seja reprojetado para execução através de computadores de processamento paralelo. Embora a utilização de um microcomputador Pentium-166 MHz, com 128 Mb de memória RAM haja suprido todas as aplicações feitas, o tempo total gasto na solução dos problemas será muito menor com a aplicação do paralelismo.

ii. A geração de dados necessita de programas para obter a discretização dos problemas a serem estudados considerando a integral de domínio envolvida na solução elastoplástica. Embora as células de geometria linear e aproximação constante para as tensões iniciais hajam mostrado a eficiência desejada, é necessária a utilização de um número maior destas em aplicações com as características da placa perfurada e do poliestireno. Este número maior não representa dificuldade de execução do programa, mas sim, um grande consumo de tempo na preparação dos dados. A implementação de uma célula com melhor aproximação das tensões iniciais auxiliaria na redução da geração de dados, mas não solucionaria o problema. Portanto a utilização de um gerador de malhas é fundamental no caso.

Isto considerado, as sugestões para continuidade deste trabalho estão, para melhoria imediata do mesmo, na elaboração de um gerador de malhas e no paralelismo do programa. Posteriormente, a implementação de células com outros tipos de aproximação para as tensões iniciais e a inclusão do critério de escoamento de Lade (Chen, Saleeb, 1982, de Angelis, 1994) para a análise de solos ampliariam o estudo aqui apresentado. Ainda, seria importante uma avaliação das matrizes dos sistemas de equações lineares solucionados através do GMRES, para verificar o efeito do precondicionamento das mesmas sobre o comportamento do algoritmo.

Referências Bibliográficas:

Anderson, E., Bai, Z., Bischof, C. et al, "*LAPACK- Use r' s Guide*", 2nd ed., Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1995.

Angelis Neto, G., "*Análise Elastoplástica de Túneis em solo através do Método dos Elementos Finitos*", Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 1994.

Barra, L. P. S., Coutinho, A. L. G. A., Mansur, W. J. and Telles, J. C. F., " *Iterative Solution of BEM Equations by GMRES Algorithm*", Computers and Structures, vol. 44, 1249-1253, 1992.

Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., " *Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering*", 1st ed., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.

Carrer, J. A. M., " *Análise da Torção Elastoplástica de Sólidos de Revolução pelo Método dos Elementos de Contorno*", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1987.

Carrer, J. A. M., " *Técnicas Implícitas para Análise Elastoplástica Estática e Dinâmica com o Método dos Elementos de Contorno*", Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1991.

Chaudouet, A., "Three - Dimensional Transient Thermo - Elastic Analysis by the BIE Method ", *Int. J. for Num. Methods in Eng.*, vol. 24, pp.25-45, 1987.

Chen, Wai-Fah, Saleeb, Atef F., "*Constitutive Equations for Engineering Materials*", vol. 1, 1st ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1982.

Coutinho, A. L. G. A., "*Um Algoritmo para o Controle do Erro Algébrico em Refinamento Adaptativo*", COBEM, 1993.

Dongarra, J. J., Duff, I. S., Sorensen, D. C. and van der Vorst, H. A., " *Solving Linear Systems on Vector and Shared Memory Computers*", 1st ed., Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1991.

Hartmann, F.," Elastostatics ", In: Pentech Press, 1st ed., *Progress in Boundary Element Methods*, vol. 1,Chapter 4, Plymouth, 1981.

Higham, N. J., "*Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*", 1st ed., Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1996.

"*IMSL - Math/Library - Use r' s Manual*", IMSL, Inc., 1991.

Kelley, C. T., "*Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*", 1st ed.,Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1995.

Lawson, C. L. and Hanson, R. J., " *Solving Least Squares Problems*", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

Lu, Shan, Ye, Tian-Qi, et al, "Analytical Removal of Singularity and Direct Evaluation of Singular Integrals in 3D Elastoplastic Finite Deformation Analysis by BEM ", *Acta Mechanica Solida Sinica - English Edition*, vol. 6, n^0 4, co-Published by Hust and Pergamon Press, 1993.

Mansur, W. J., Araújo, F. C. and Malaghini, J. E. B., " Solution of BEM Systems of Equations via Iterative Techniques", *Int. J. for Num. Methods in Eng.*, vol 33, pp 1823-1841, 1992.

Mansur, W. J., Telles, J., C., F.,"*Modelagem Numérica Tridimensional das Cavidades de Serra da Mesa*", 3^0 Relatório, Convênio 9686, COPPTEC / Furnas Centrais Elétricas S/A, 1993.

Mendelson, A., " *Plasticity: Theory and Application*", 1st ed., McMillan Company, New York, 1968.

Nayak, G. C., Zienkiewicz, O. C., "Elasto - Plastic Analysis. A Generalization for Varius Constitutive Relations Including Strain Softening ", *Int. J. for Num. Methods in Eng.*, vol. 5, 113-135, 1972.

Neitzel, B. M. T., "Análise Elastoplástica através do Método dos Elementos de Contorno utilizando Técnicas Implícitas", Seminário de Qualificação, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1995.

Owen, D. R. J. and Hinton, E., " *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*", Pineridge Press Limited, Swansea, U. K., 1980.

Owen, D. R. J., Salonen, E. M., "Three-Dimensional Elastoplastic Finite Element Analysis", *Int. J. for Num. Methods in Eng.*, vol. 9, pp 209-218, 1975.

Saad, Y. and Schultz, M. H., " GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymetric Linear Systems", *SIAM J. SCI. STAL. Comput.*, vol 7, pp 856-869, 1986.

Shakib, F., Hughes, T. J. J. and Johan, Z., " A Multi-Element Group Preconditioned GMRES Algorithm for Nonsymetric Systems Arising in Finite Element Analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , vol. 75, pp 415-456, 1989.

Silva, J. J. R., "*MEC3DE - Um programa para análise Elástica Tridimensional com o Método dos Elementos de Contorno*", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.

Swedlow, J. L., Cruse, T. A., "Formulation of Boundary Integral Equations for three Dimensional Elasto - Plastic Flow ", *Int. J. Solids Structures*, vol.7, pp 1673-1683, 1971.

Telles, J., C., F., Brebbia, C., A., "On the Application of the Boundary Element Method to Plasticity", Appl. Math. Modelling, vol3, pp 466-470, 1979

Telles, J., C., F., Brebbia, C., A., "The Boundary Element Method in Plasticity",Proc. 2nd Int. Seminar on Recent Advances in Boundary Element Methods, University of Southampton, Southampton, pp 295-317, 1980.

Telles, J., C., F., Brebbia, C., A., "Elastoplastic boundary Element Analysis", *Proc. Europe-U.S. Workshop on Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics,* Rhur-University Bochum, Germany, pp 403-434, 1980.

Telles,J., C., F., Brebbia, C., A., "Elastic/Viscoplastic Problems Using Boundary Elements",*Int. J. Mech. Sci.*, pp 605-618,1981.

Telles, J. C. F., " *The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems*", 1st ed., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.

Telles, J. C. F., " *On Inelelastic Analysis Algorithms for Boundary Elements*", Advanced Topics in Boundary Element Analysis", Ed. Cruse, T. A., Pifko, A. B. and Armen, H., ASME, AMD - vol. 72, pp 35 - 44, 1985.

Telles, J. C. F., "A Self Adaptative co-ordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals", *Int. J. for Num. Methods in Eng.*, vol. 24, 959-973, 1987.

Telles, J. C. F. and Carrer, J. A. M., " Static and Transient Dynamic Nonlinear Stress Analysis by the Boundary Element Method with Implcit Techniques", *Eng. Analysis with Boundary Elements*, vol. 14, 65-74, 1994.