

ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS ATRAVÉS DE TÉCNICA DE OTIMIZAÇÃO

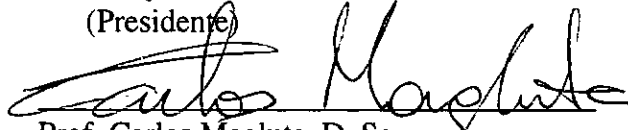
Luiz Fernando Lomba Rosa

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO
GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

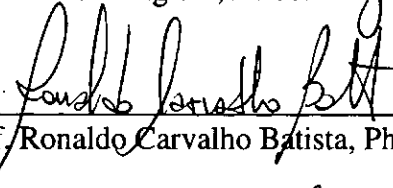
Aprovada por :



Prof. Ney Róitman, D. Sc.
(Presidente)



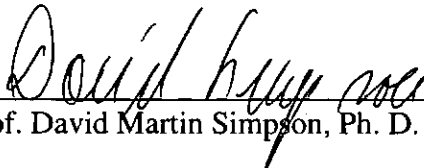
Prof. Carlos Magluta, D. Sc.



Prof. Ronaldo Carvalho Batista, Ph. D.



Prof. Paulo Roberto Gardel Kurka, Ph. D.



Prof. David Martin Simpson, Ph. D.



Prof. Artur Palmeira Ripper Neto, Ph. D.

Rio de Janeiro, RJ - BRASIL
Maio de 1996

ROSA, LUIZ FERNANDO LOMBA

Estimação de Parâmetros Modais Através de Técnica de Otimização (Rio de Janeiro) 1996

X, 117, p. 29.7 cm (COPPE / UFRJ, D.Sc., Engenharia Civil, 1996)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1 . Estimação de Parâmetros Modais 2 . Análise Modal 3 - Dinâmica

I . COPPE / UFRJ

II . Título (série)

Dedico a meus pais, Luiz e Mariza,
a meu irmão, Luiz Eduardo, e à
Isabela, minha namorada.

AGRADECIMENTOS

Ao Ney e ao Magluta, pela dedicada orientação e irrestrita disposição em ajudar-me no desenvolvimento do trabalho.

A toda minha família, pelo amor.

Ao Ricardo, à Paula e ao Flávio, pela amizade.

Ao pessoal do Laboratório de Estruturas.

Resumo da Tese apresentada à COPPE / UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS ATRAVÉS DE TÉCNICA DE OTIMIZAÇÃO

Luiz Fernando Lomba Rosa

Maio de 1996

Orientadores : Prof. Ney Roitman

Prof. Carlos Magluta

Programa : Engenharia Civil

Apresenta-se um novo método de estimação de parâmetros modais, o qual se baseia na técnica de otimização denominada "Goal Programming". A idealização do método visa obter maior eficiência na estimação modal em casos em que métodos clássicos costumam apresentar resultados com baixa acurácia.

A parte inicial do trabalho diz respeito ao desenvolvimento de um sistema de aquisição e processamento multi-canais, com o objetivo de obter simultaneamente Funções de Resposta em Frequência (FRFs) em casos de ensaios contendo uma única excitação e vários pontos de medição de resposta da estrutura.

O trabalho abrange também um resumo sobre alguns dos diversos métodos de estimação modal, tanto no domínio do tempo quanto no da frequência.

O método proposto, que se baseia em conceitos de programação linear para estimar parâmetros modais no domínio da frequência, é testado através de simulações numéricas e seu desempenho é comparado aos de dois métodos clássicos, sendo um no domínio da frequência e outro no do tempo. Estas simulações procuram reproduzir situações complexas, nas quais a estimação modal torna-se dificultada, como é o caso de estruturas com grande acoplamento modal e fortemente amortecidas.

FRFs provenientes de testes experimentais em um modelo reduzido de uma plataforma fixa de petróleo são analisadas pelo novo método e pelos dois métodos clássicos, e seus resultados são comparados.

Os resultados das simulações numéricas e dos testes experimentais comprovam a eficiência do método desenvolvido, cujo desempenho foi invariavelmente superior aos dos outros métodos.

Abstract of Thesis presented to COPPE / UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

MODAL PARAMETERS ESTIMATION USING AN OPTIMIZATION TECHNIQUE

Luiz Fernando Lomba Rosa

May, 1996

Thesis Supervisors : Prof. Ney Roitman

Prof. Carlos Magluta

Department : Civil Engineering

A new method for estimating modal parameters, which uses an optimization technique called "Goal Programming", is presented. The purpose of this method is to obtain greater efficiency in complex cases, where the classic methods present low accuracy.

The first part of this work focus on the development of a multi-channel acquisition and processing system to estimate simultaneously FRFs from tests with a single input and several output measurement points.

A summary of some modal estimation methods in the time and in the frequency domain, is also presented.

The proposed method, which uses linear programming concepts to estimate modal parameters in the frequency domain, is tested with numerical simulations and its performance is compared with another classical frequency domain method. These simulations are supposed to reproduce complex cases, where modal estimation becomes difficult, such as structures with high modal density and strongly damped.

FRFs from experimental tests on a reduced scale model of a fixed offshore platform are analysed by the new method and by two other classical methods, one in the time domain and the other in the frequency domain, and theirs results are compared.

The results of the numerical simulations and of the experimental tests show the efficiency of the developed method, whose performance was always better than that of the others.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - Introdução.....	1
CAPÍTULO II - Aquisição de Sinais e Processamento Multi-Canais.....	4
II.1 - Aquisição de Sinais.....	4
II.1.1 - Taxa de Amostragem.....	4
II.1.2 - Quantização.....	6
II.2 - Transformada de Fourier.....	8
II.2.1 - Transformada Discreta de Fourier.....	9
II.2.2 - Transformada Rápida de Fourier (FFT).....	11
II.3 - Estimadores de Função de Resposta em Frequência (FRF).....	12
II.3.1 - Estimador H1.....	13
II.3.2 - Estimador H2.....	14
II.3.3 - Estimador Hv.....	15
II.4 - Zoom.....	16
II.5 - Implementação, Simulações e Testes Experimentais.....	18
II.5.1 - Implementação.....	18
II.5.2 - Simulações e Testes Experimentais.....	20
CAPÍTULO III - Métodos de Estimação de Parâmetros Modais.....	27
III.1 - Classificação dos Métodos de Estimação de Parâmetros Modais.....	27
III.1.1 - Análise no Domínio do Tempo x Análise no Domínio da Frequência.....	28
III.1.2 - Um Grau de Liberdade (SDOF) x Vários Graus de Liberdade (MDOF).....	28
III.1.3 - Estimativas Locais x Estimativas Globais.....	29
III.1.4 - Modelo de Identificação Direta x Modelo de Identificação Modal.....	29
III.1.5 - Modos de Vibração Reais x Modos de Vibração Complexos.....	30
III.1.6 - Um Ponto de Excitação x Vários Pontos de Excitação.....	30
III.2 - Introdução Teórica.....	33
III.3 - Métodos Clássicos de Estimação de Parâmetros Modais.....	38
III.3.1 - Método do Círculo Ajustado (“Circle-Fit”).....	40
III.3.2 - Métodos de Mínimos Quadrados.....	42
III.3.2.1 - “Non-Linear Least Squares Method”.....	43
III.3.2.2 - “Linear Least Squares Method”.....	44
III.3.2.3 - “New Linear Least Squares Method”.....	45
III.3.3 - “Orthogonal Polynomial Method”.....	45
III.3.4 - “Ibrahim Time Domain Technique”.....	46
III.3.5 - “Least Squares Complex Exponential Method”.....	50

III.4 - Comentários Gerais sobre a Aplicação dos Métodos.....	50
CAPÍTULO IV - Métodos Clássicos de Estimação de Parâmetros Modais Utilizados.....	52
IV.1 - "Least Squares Complex Exponential Method".....	52
IV.1.1 - Equações Gerais.....	53
IV.1.2 - Implementação.....	61
IV.2 - "Orthogonal Polynomial Method".....	62
IV.2.1 - Formulação Geral do Modelo.....	62
IV.2.2 - Exemplo Simplificado.....	68
IV.2.3 - Considerações Numéricas.....	72
IV.2.4 - Efeitos Residuais Fora da Banda de Análise.....	73
IV.2.5 - Utilização do Método.....	74
CAPÍTULO V - Método Desenvolvido : Estimação de Parâmetros Modais Através do Algoritmo de Otimização "Goal Programming".....	75
V.1 - Introdução.....	75
V.2 - Técnica de Otimização "Goal Programming".....	75
V.3 - Formulação do Problema para o Caso de Estimação de Parâmetros Modais.....	78
V.4 - Implementação do Método Desenvolvido.....	81
V.5 - Implementação de Um Sistema Simples de Estimação Modal para Fornecer Estimativas Iniciais para o Método Desenvolvido.....	83
CAPÍTULO VI - Avaliação do Método Desenvolvido Através de Simulações Numéricas e Testes Experimentais.....	84
VI.1 - Simulações Numéricas.....	84
VI.2 - Testes Experimentais.....	94
VI.2.1 - Descrição do Modelo Ensaiado.....	94
VI.2.2 - Instrumentação e Ensaios Realizados.....	96
VI.2.3 - Análise dos Resultados.....	97
CAPÍTULO VII - Conclusões.....	109
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	112

SIMBOLOGIA

LETRAS MAIÚSCULAS :

{F} - vetor de forças

{X} - vetor de respostas (deslocamento)

[H] - matriz de Função de Resposta em Frequência (FRF)

$[S_{xx}]$ - matriz de auto-espectro de resposta

$[S_{fx}]$ - matriz de espectro cruzado resposta / excitação

$[S_{ff}]$ - matriz de auto-espectro de força

$[S_{xf}]$ - matriz de espectro cruzado excitação / resposta

N_i - número de pontos de aplicação de força

N_o - número de pontos de medição de resposta

$L\{g(t)\}$ - Transformada de Laplace da função $g(t)$

$G(s)$ - resultado da transformada de Laplace da função $g(t)$

H_{pq} - FRF relativa ao ponto de excitação q e ponto de resposta p

R_{pqr} - resíduo, do modo r , da FRF relativa ao ponto de excitação q e ponto de resposta p

N - número total de modos de vibração

B_{pq} - influência dos demais modos sobre o modo analisado

E_{pq} - erro quadrático total

$Z(g(t))$ - Transformada Z da função $g(t)$

LETRAS MINÚSCULAS

$$j = \sqrt{-1}$$

f_d - frequência de digitalização (ou taxa de amostragem)

m - massa do sistema

c - amortecimento do sistema

k - rigidez do sistema

$x(t)$ - deslocamento do sistema variando no tempo

$\dot{x}(t)$ - velocidade do sistema variando no tempo

$\ddot{x}(t)$ - aceleração do sistema variando no tempo

s - variável de Laplace

- $h_{pq}(t)$ - Resposta de Impulso (IR) relativa ao ponto de excitação q e ponto de resposta p
- c_c - amortecimento crítico do sistema
- p - grau de liberdade de medição da resposta da estrutura
- q - grau de liberdade de aplicação da força de excitação na estrutura
- r - índice relativo ao modo de vibração
- e_{pq} - erro quadrático entre FRF experimental e FRF estimada
- z - variável do domínio Z
- $g(\bar{x})$ - função objetivo na técnica de otimização "Goal Programming"
- $h(\bar{x})$ - restrição na técnica de otimização "Goal Programming"
- x^l - limite inferior para a variável x na técnica de otimização "Goal Programming"
- x^u - limite superior para a variável x na técnica de otimização "Goal Programming"
- d^- - variável de desvio por limite inferior na técnica de otimização "Goal Programming"
- d^+ - variável de desvio por limite superior na técnica de otimização "Goal Programming"

LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

- $\{\eta\}$ - matriz de erros de medida nos sinais de resposta
- $\{v\}$ - matriz de erros de medida nos sinais de excitação
- λ_r - pólo do sistema, relativo ao modo r
- $\omega_{na,r}$ - frequência natural não amortecida do sistema, relativa ao modo r
- $\omega_{a,r}$ - frequência natural amortecida do sistema, relativa ao modo r
- σ_r - fator de amortecimento relativo ao modo r
- ξ_r - taxa de amortecimento relativa ao modo r
- ϕ_{pr} - coordenada, relativa ao modo r , no ponto p
- δ_{ij} - delta de Kroenecker

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A identificação estrutural consiste, em geral, no ajuste de modelos teóricos e/ou numéricos por meio de resultados experimentais obtidos no modelo físico. Desta forma, para se identificar uma estrutura é necessário inicialmente a realização de testes experimentais, chamados também de testes modais. A precisão dos resultados destes testes depende, obviamente, das metodologia empregadas, da estimação das Funções de Resposta em Frequência (FRFs) e da estimação dos parâmetros modais (frequências naturais, taxas de amortecimento e modos de vibração).

Este trabalho se insere na linha de pesquisa associada à identificação estrutural, e sua contribuição é relativa à estimação de parâmetros modais, passando também pelo desenvolvimento de um sistema de aquisição de dados multi-canais para obtenção das FRFs.

As pesquisas realizadas nos últimos dez anos na área de estimação de parâmetros modais têm levado ao desenvolvimento de diversos algoritmos que vêm sendo utilizados de forma particular ou comercializados sob a forma de pacotes. Existe, portanto, nessa área, uma necessidade clara de se avaliar a performance dos vários algoritmos de estimação modal [1]. Pesquisas recentes na área de estimação de parâmetros modais têm se concentrado em discutir e resolver problemas associados à acurácia dos parâmetros estimados.

Com o uso industrial crescente de materiais com amortecimento elevado, materiais não homogêneos e tecnologia de amortecimento ativo, torna-se necessária a reavaliação dos algoritmos de estimação modal. Assim, uma necessidade técnica emergente é o desenvolvimento e avaliação da performance dos algoritmos de estimação capazes de identificar sistemas com alta densidade modal e fortemente amortecidos [1].

O objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de um novo método de estimação de parâmetros modais, o qual se utiliza do algoritmo de otimização denominado “Goal Programming” [2]. Basicamente, a idealização deste novo método visa obter resultados com boa acurácia em casos nos quais os diversos métodos clássicos existentes não apresentam, em geral, eficiência satisfatória, tais como os de estruturas fortemente amortecidas e com modos de vibração acoplados.

Para contornar limitações que se verificam no Laboratório de Estruturas da COPPE/UFRJ, tornou-se necessário, inicialmente, desenvolver um sistema de aquisição e processamento multi-canais. Um ensaio dinâmico de uma estrutura, visando a aplicação de técnicas de análise modal, requer que a mesma seja instrumentada com pelo menos um sensor de força (load-cell) e alguns de resposta (geralmente acelerômetros) para o registro dos sinais no tempo. Quanto maior o número de pontos de medição de resposta, mais precisa será a estimação dos modos de vibração da estrutura. Os métodos de estimação de parâmetros

modais no domínio da frequência utilizam como dados de entrada as FRFs, que são estimadas a partir da Transformada Rápida de Fourier (FFT) dos sinais, no tempo, de excitação (entrada) e resposta (saída) da estrutura. Os métodos no domínio do tempo, por sua vez, fazem uso das Respostas de Impulso (IR, de "Impulse Response", em inglês) ou das respostas de vibração livre da estrutura como dados de entrada. As Respostas de Impulso são obtidas através da transformada de Fourier inversa das Funções de Resposta em Frequência. No Laboratório de Estruturas, a transformação de sinais no tempo em espectros de frequência, através da Transformada Rápida de Fourier, bem como a estimação das Funções de Resposta em Frequência entre dois sinais, são operações que, até a conclusão deste trabalho, eram realizadas apenas por Analisadores de Espectros. Estes, por permitirem que se processem sinais de somente dois canais simultaneamente, tornam a análise de multi-pontos de resposta uma tarefa bastante árdua, por vezes até inviável, em função do tempo necessário para a aquisição de dados em frequência. Para superar este obstáculo, era necessário fazer uso de um dos dois seguintes procedimentos : gravar os sinais analógicos dos diversos sensores utilizados no ensaio, para posterior tratamento , dois a dois; repetir o mesmo ensaio várias vezes. No primeiro caso, a análise poderia ser comprometida ou mesmo inviabilizada devido à introdução, pelo gravador, de ruídos nos sinais de entrada e saída, enquanto que o segundo caso requer um tempo enorme de ensaio, muitas vezes não disponível em testes realizados no campo. Além disso, no campo geralmente é difícil se repetir uma mesma situação de teste. Por outro lado, a utilização de vários analisadores de espectros (de dois canais cada um) elevaria em muito o custo do sistema de aquisição de dados. Tornou-se, então, premente o desenvolvimento de um sistema que comportasse diversos canais simultaneamente, para realizar a aquisição dos sinais temporais, transformá-los para o domínio da frequência através da aplicação da FFT e, finalmente, obter as FRFs entre cada sinal de resposta e o (ou os) de excitação. A parte inicial deste trabalho consiste no desenvolvimento de tal sistema, o qual faz a aquisição de até 16 sinais por meio de uma placa conversora A/D (Analógico / Digital). Este sistema, que pode facilmente ser expandido para 32 canais, utilizando-se para isto duas placas conversoras A/D de 16 canais cada uma, ou mesmo com uma única de 32 canais, é apresentado no Capítulo II, juntamente com a teoria que envolve os conceitos de aquisição e processamento de sinais.

A estimação de parâmetros modais (frequências naturais, taxas de amortecimento e modos de vibração) pode ser efetuada por diversos métodos. Visando obter estimativas eficientes para os parâmetros modais e fazendo uso de abordagens diferentes, os vários métodos de identificação modal levam em consideração somente o comportamento de entrada e saída (input/output) da estrutura em questão, respectivamente um sinal de excitação e um sinal de resposta da estrutura. O primeiro método de estimação de parâmetros modais implementado e hoje largamente utilizado no Laboratório de Estruturas foi o Método do Círculo Ajustado ("Circle-Fit Method") [3], que vem a ser um método simples e apropriado para casos de estruturas fracamente amortecidas e de baixa densidade modal (isto é, com

frequências naturais bem afastadas entre si). Alguns dos mais populares métodos de estimação de parâmetros modais são aqui descritos e classificados sob diversos ângulos, sendo fornecida ampla bibliografia sobre os mesmos, ao longo do Capítulo III.

Dentre estes métodos, foram selecionados dois, um no domínio da frequência (“Orthogonal Polynomial Method”) e outro no domínio do tempo (“Least Squares Complex Exponential Method”), aos quais foi dada maior ênfase e cujas formulações encontram-se no Capítulo IV. No presente trabalho, enfatizou-se o caso de apenas um ponto de excitação da estrutura (single input), uma vez que os ensaios realizados no Laboratório de Estruturas têm sido desta forma. Os dois métodos são utilizados, posteriormente, para avaliar a qualidade dos resultados obtidos com o método de estimação modal desenvolvido.

O Capítulo V trata do desenvolvimento de um novo método, que estima parâmetros modais através do algoritmo de otimização “Goal Programming”. Esta técnica de otimização, bem como sua adaptação ao caso específico de estimação modal, é descrita detalhadamente, incluindo implementações computacionais.

Simulações numéricas e testes experimentais visando verificar a qualidade do método proposto são o assunto do Capítulo VI. Nas simulações numéricas, procuraram-se abordar casos bastante complexos com respeito à estimação de parâmetros modais. Os testes experimentais foram realizados em um modelo reduzido de uma plataforma fixa de petróleo para lâmina d’água de 300 metros [4]. As simulações e testes foram analisados pelo método desenvolvido e pelos métodos clássicos descritos no Capítulo IV, possibilitando uma comparação qualitativa.

O capítulo VII procura discutir em linhas gerais o trabalho, apresentando conclusões e propondo futuras extensões.

CAPÍTULO II

AQUISIÇÃO DE SINAIS E PROCESSAMENTO MULTI-CANAIS

Este capítulo apresenta os conceitos de aquisição de sinais e posterior processamento para obtenção das FRFs. Em seguida, o sistema desenvolvido, capaz de comportar até 16 canais simultaneamente, é descrito.

II.1 - AQUISIÇÃO DE SINAIS

A digitalização de um sinal analógico (em Volts e contínuo no tempo) consiste na sua conversão em uma série discreta de valores numéricos, alocando esta informação na memória de um computador e permitindo o fácil manuseio dos dados experimentais.

Tal operação é executada através da utilização de uma placa conversora Analógico-Digital (A/D). Neste trabalho foi utilizada uma placa A/D de fabricação nacional, marca Lynx, modelo 16/36, cujas características básicas são :

- número de canais : 16
- tempo de conversão A/D : 20 μ s
- número de bits : 16
- limites de amplitude de conversão : ± 10 V

Dois fatores são fundamentais na conversão A/D para se obter uma satisfatória representação dos sinais : taxa de amostragem e quantização. Estes dois conceitos são explicados a seguir.

II.1.1 - TAXA DE AMOSTRAGEM

A conversão A/D é realizada em intervalos fixos de tempo que definem a frequência de digitalização, também chamada de taxa de amostragem.

A primeira limitação é dada pelo tempo de conversão do hardware, ou seja, o incremento de tempo (T_d) deve ser maior ou no máximo igual ao tempo de conversão. No caso da placa 16/36, este tempo é de 20 μ s por canal, o que representa uma frequência de digitalização máxima de 50 kHz. No caso de aquisição de mais de um canal, esta frequência máxima diminui quase que linearmente com o número de canais.

Outra limitação é encontrada quando se trabalha com vários canais, caso este em que o tempo de chaveamento (t_c) entre os canais, chamado de multiplexação, introduz um aumento no tempo total. No caso da placa utilizada, este tempo é de 3 μ s.

Entretanto, estas limitações tornam-se insignificantes quando os sinais em questão são aqueles usualmente obtidos a partir de estruturas civis, já que em geral estas apresentam frequências naturais muito baixas (menores do que 200 Hz). Em casos especiais, onde aparecem sinais mais “rápidos”, o problema pode ser contornado usando-se um hardware conhecido como “Sample-Hold”, que permite congelar a amplitude dos sinais de todos os canais no instante inicial da conversão do primeiro canal.

A última restrição que pode ocorrer é quanto à velocidade do software utilizado para transferir estes dados digitais da placa para a memória do computador. As placas mais modernas, como a 16/36, já possuem um endereçamento direto dos dados convertidos para a memória do computador (DMA : Direct Memory Access), imprimindo uma grande velocidade ao processo de transferência de dados.

A frequência de digitalização, ou taxa de amostragem, é definida como sendo o inverso do incremento de tempo da aquisição ($f_d = 1 / T_d$). Desta forma, a limitação física de memória do computador implica em uma relação entre a taxa de amostragem e a duração da aquisição, uma vez que :

$$T_t = N_p T_d = N_p / f_d \quad (\text{II.1})$$

onde :

T_t = tempo total de aquisição

N_p = número de pontos digitalizados (limitado pela memória disponível)

Estas restrições criam uma limitação máxima para a taxa de amostragem. Por outro lado, a taxa não pode ser muito baixa devido ao efeito "aliasing". Isto significa que o trem de pulsos, responsável pela digitalização do sinal analógico, deve ser suficientemente pouco espaçado (ou seja, ter uma taxa de amostragem suficientemente alta) para que o sinal digital represente adequadamente o sinal analógico. Quando isto não ocorre, tem-se o efeito “aliasing”, que deforma o sinal analógico, conforme ilustrado na fig. (II.1).

Para evitar-se o “aliasing”, segundo o teorema de Nyquist, a taxa de aquisição deve ser pelo menos duas vezes maior que a maior componente em frequência contida no sinal. Como em geral os sinais apresentam componentes em frequências elevadas, a única forma de se garantir que não ocorrerá “aliasing” é através da utilização de um filtro “passa-baixa” antes da digitalização, também chamado de filtro “anti-aliasing”. Este filtro tem a característica de cortar todas as componentes de frequência acima de um valor escolhido. No entanto, ele impõe um atraso nos sinais.

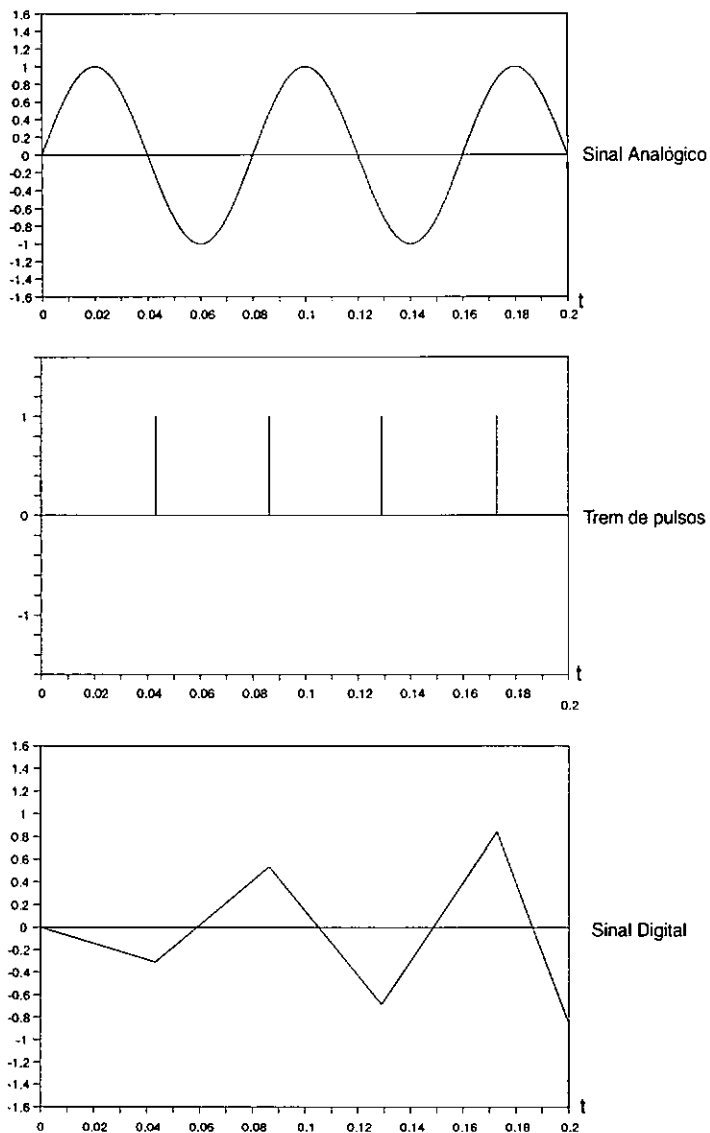


Fig. II.1 - Efeito "Aliasing"

II.1.2 - QUANTIZAÇÃO

A quantização refere-se à conversão de uma amplitude analógica específica para o valor discreto mais próximo possível no conversor analógico-digital. Os conversores normalmente comparam o valor analógico a um valor interno criado em faixas definidas, fixadas em função das amplitudes máxima e mínima e do número de bits do conversor, como

mostra, por exemplo, a figura (II.2) , para uma conversão com 3 bits.

Desta forma, a resolução do conversor A/D é definida por :

$$P = V / 2^n \quad (II.2)$$

onde :

P= resolução da medida

V= faixa de variação

n = número de bits do conversor

No caso da placa Lynx 16/36 :

$$P = 20 \text{ [V]} / 2^{16} = 0.30 \text{ mV}$$

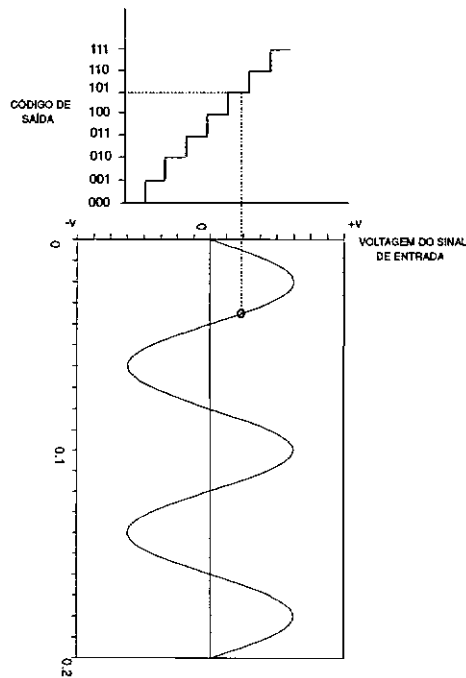


Fig. II.2 - Quantização : Conversão A/D (3 bits).

II.2 - TRANSFORMADA DE FOURIER

A essência da transformada de Fourier de um sinal no tempo é decompor ou separar o mesmo em uma soma de harmônicos de diferentes frequências, amplitudes e fases. A representação da transformada de Fourier consiste em dois diagramas : um apresenta a amplitude de cada um dos harmônicos determinados versus sua frequência e o outro apresenta a fase destes harmônicos versus frequência. A transformada de Fourier é a expressão matemática que relaciona um sinal no tempo e seu correspondente em frequência, e sua definição é :

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (\text{II.3})$$

ou
$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \quad (\omega = 2\pi f)$$

onde :

$h(t)$ é o sinal a ser decomposto em uma soma de harmônicos

$H(f)$ é o correspondente sinal em frequência (que também pode ser chamado de transformada de Fourier de $h(t)$)

$$j = \sqrt{-1}$$

A transformada de Fourier é, então, uma representação no domínio da frequência de um sinal no tempo, contendo as mesmas informações deste, ambos diferindo apenas na maneira de apresentação.

Em geral, a transformada de Fourier resulta em uma quantidade complexa :

$$H(f) = \text{Re}(f) + j \text{Im}(f) = |H(f)|e^{j\theta(f)} \quad (\text{II.4})$$

onde :

$\text{Re}(f)$ é a parte real da transformada de Fourier

$\text{Im}(f)$ é a parte imaginária da transformada de Fourier

$|H(f)|$ é a amplitude do espectro de Fourier de $h(t)$, definido por :

$$|H(f)| = \sqrt{\text{Re}^2(f) + \text{Im}^2(f)} \quad (\text{II.5})$$

$\theta(f)$ é o ângulo de fase da transformada de Fourier, definido por :

$$\theta(f) = \text{tg}^{-1}|\text{Im}(f) / \text{Re}(f)| \quad (\text{II.6})$$

Outro conceito importante é o de transformada inversa de Fourier :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f)e^{j2\pi ft} df \quad (\text{II.7})$$

A transformada inversa permite a determinação de uma função no tempo a partir de sua transformada de Fourier. Se as funções $h(t)$ e $H(f)$ são relacionadas pelas eq. (II.3) e (II.7), elas formam um par de transformada de Fourier.

II.2.1 - TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

A transformada discreta de Fourier pode ser vista como um caso particular da transformada de Fourier contínua. Desenvolver-se-á a seguir o conceito de transformada discreta de Fourier a partir de uma interpretação gráfica baseada na teoria da transformada de Fourier contínua.

Considere-se a função exemplo $h(t)$ e sua transformada de Fourier $H(f)$, como mostrado na fig. (II.3a) [5] (obs : na fig. (II.3), os gráficos do lado direito são representações no domínio da frequência e, os do lado esquerdo, no domínio do tempo). Deseja-se modificar o par da transformada de Fourier de forma que se torne viável a sua introdução em rotina de computador. Este par modificado, denominado transformada discreta de Fourier, deve representar tão próximo quanto possível a transformada contínua de Fourier.

Para obter-se a transformada de Fourier de $h(t)$ via técnicas de análise digital, é necessário que se "amostre" $h(t)$. O intervalo de amostragem é T_d . A amostragem é realizada multiplicando-se $h(t)$ pela função de amostragem representada por um trem de pulsos unitários (fig. (II.3b)), o que implica, em frequência, na convolução da transformada do trem de pulsos pela função $H(f)$ (pelo teorema da convolução no tempo, fazer um produto no tempo significa fazer uma convolução em frequência). Os resultados destas operações são mostrados na fig. (II.3c), representando a primeira modificação no par original, necessária para definir o par de transformada discreta. Neste ponto, o par modificado difere do original, na faixa de $-\frac{1}{2T_d}$ a $\frac{1}{2T_d}$, apenas pelo efeito de "aliasing" resultante da amostragem. Se o sinal no tempo $h(t)$ é amostrado a uma frequência de no mínimo duas vezes a componente de maior frequência de $h(t)$, não há perda de informação como resultado da amostragem. Se a função $h(t)$ não é limitada por banda, isto é, $H(f) \neq 0$ para algum $|f| > f_c$ (onde f_c é uma frequência de corte), a amostragem introduzirá "aliasing", como mostrado em (II.3c). Para reduzir este erro, escolhe-se um T_d menor, isto é, uma frequência de amostragem maior.

O par de transformada de Fourier da fig. (II.3c) não é apropriado para computador, pois é composto por uma infinidade de amostras de $h(t)$. Precisa-se portanto truncar o $h(t)$

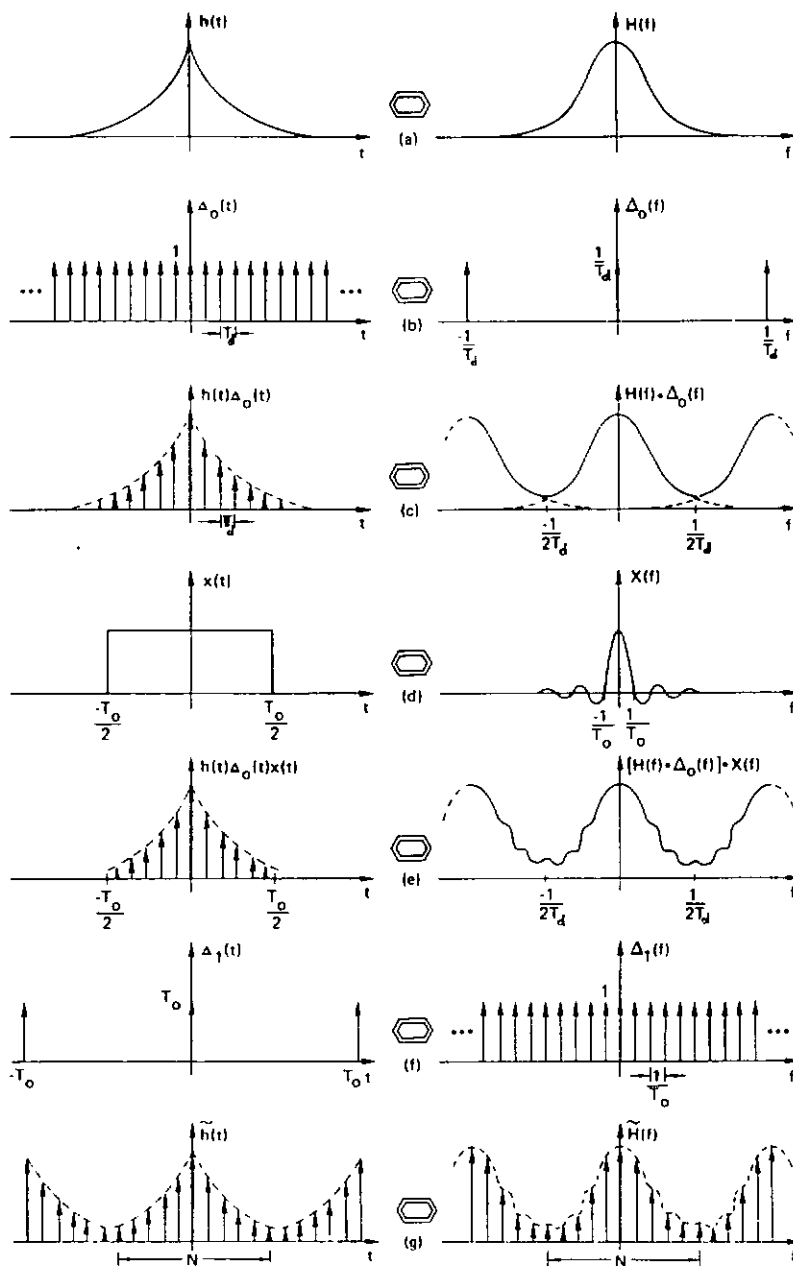


Fig. II.3 - Desenvolvimento gráfico da transformada discreta de Fourier. [5]

amostrado de modo que apenas um número finito de pontos, N , seja considerado. A função retangular, ou de truncamento, e sua transformada de Fourier são mostradas na fig. (II.3d). O produto da sequência finita de funções de impulso representando $h(t)$ pela função de

truncamento gera a função no tempo de tamanho finito vista em (II.3e). O truncamento introduz a segunda modificação no par da transformada de Fourier original. Como mostrado na fig. (II.3e), a transformada em frequência torna-se "ondulada". Aumentando-se a janela da função retangular, esta "ondulação" diminui, implicando, no entanto, em um aumento do custo computacional. Existem ainda outros tipos de janela, como a "Hanning", que apresentam ondulações laterais menores, perdendo, porém, precisão para estimar os picos.

O par de transformada modificado da fig. (II.3e) ainda não é um par aceitável de transformada discreta de Fourier, pois a transformada em frequência é uma função contínua. Para computadores, apenas valores amostrados da função em frequência podem ser considerados. É necessário modificar a transformada em frequência através de uma função de amostragem em frequência ilustrada na fig. (II.3f). O intervalo de amostragem em frequência é $1/T_0$, onde $T_0 = N.T_d$. Para se multiplicar as funções em frequência das figuras (II.3e) e (II.3f), deve-se encontrar a convolução no tempo destas mesmas figuras. O resultado, o par da fig. (II.3g), é aceitável para propósitos computacionais pois ambos os domínios, do tempo e da frequência, são representados por valores discretos.

Como mostrado na fig. (II.3g), tanto a função no tempo original quanto a sua transformada de Fourier são aproximadas por N amostras, que definem o par de transformada discreta de Fourier. Observe-se que realizar uma amostra no domínio do tempo resulta em uma função periódica de frequência, e vice-versa. Tanto o sinal no tempo como o em frequência são agora funções periódicas. As funções não periódicas, teoricamente, não deveriam ser analisadas por este processo, já que elas necessariamente seriam aproximadas por funções periódicas, cujo período é igual a T_0 . Por outro lado, para reduzir os ruídos existentes nos sinais experimentais, realizam-se diversas análises com trechos distintos do sinal no tempo (chamadas de amostras) e obtém-se a média das transformadas de Fourier das diversas amostras. Quanto maior o número de amostras, menor será o nível de ruído no resultado.

II.2.2 - TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER (FFT)

A transformada rápida de Fourier nada mais é do que um algoritmo para computar a transformada discreta de Fourier de uma forma bastante rápida. Sua utilização diminui o número de multiplicações necessárias para a obtenção da transformada de Fourier de uma função. A limitação para sua aplicação é que o número de pontos seja uma potência de 2. O gráfico ilustrado na fig. (II.4) [5], onde as abcissas são o número de pontos de amostragem e as ordenadas o número de multiplicações requeridas, deixa clara a vantagem da FFT. Duas curvas são apresentadas, uma relativa ao cálculo direto e outra à utilização de um algoritmo de FFT.

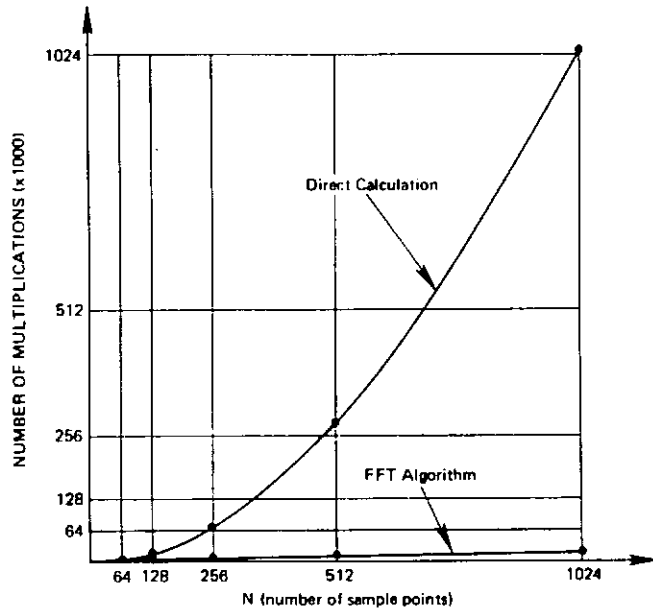


Fig. II.4 - Comparação do número de multiplicações necessárias pelo cálculo direto e pelo algoritmo de FFT [5].

II.3 - ESTIMADORES DE FUNÇÕES DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA (FRF)

A função de resposta em frequência (FRF) relaciona dois sinais, sendo um de entrada e outro de saída. Em se tratando de análise de estruturas, o sinal de entrada é uma força de excitação e o de saída é a resposta da estrutura, que pode ser um deslocamento (FRF é do tipo Receptância), uma velocidade (FRF é do tipo Mobilidade) ou uma aceleração (FRF é do tipo Inertância). A FRF é uma função complexa, sendo representada normalmente por módulo e fase, ou por suas parcelas real e imaginária, versus frequência.

A definição matemática da FRF é a razão entre o espectro da resposta e o da excitação : $H(f) = X(f) / F(f)$. No entanto, esta não é a melhor maneira de se calcular uma FRF. Foram desenvolvidos alguns modelos matemáticos para estimar as FRFs, visando reduzir a influência deterioradora de possíveis ruídos nos sinais de excitação e resposta. Os três principais modelos são H1, H2 e HV.

II.3.1 - ESTIMADOR H1

Considerando-se que não haja erros de medição nas forças de excitação, representam-se por $\{\eta\}$ os erros de medida contidos no sinal de resposta. A técnica de mínimos quadrados conhecida como H1 possibilita obter a solução $[H]$ que minimiza o valor de $\{\eta\}$ através do erro quadrático. A equação da função de resposta em frequência, neste caso, é:

$$[H]_{No \times Ni} \{F\}_{Ni \times 1} = \{X\}_{No \times 1} - \{\eta\}_{No \times 1} \quad (II.8)$$

onde : Ni é o número de pontos de excitação e No o número de pontos de resposta.

$\{X\}$ é o vetor das medidas de resposta

$\{F\}$ é o vetor das medidas de excitação

Pós-multiplicando-se ambos os lados da eq. (II.8) pelo conjugado transposto de $\{F\}$, $\{F\}^{*t}$, obtém-se :

$$[H] \{F\} \{F\}^{*t} = \{X\} \{F\}^{*t} - \{\eta\} \{F\}^{*t} \quad (II.9)$$

Admitindo-se que o ruído nos sinais de resposta não tem correlação com os sinais de excitação e que, com um número suficiente de médias, o espectro normalizado do ruído é próximo de zero, a eq. (II.9) torna-se :

$$[H]_{No \times Ni} \{F\}_{Ni \times 1} \{F\}_{1 \times Ni}^{*t} = \{X\}_{No \times 1} \{F\}_{1 \times Ni}^{*t} \quad (II.10)$$

Pela expressão acima, usando-se a definição de auto-espectro e espectro cruzado, tem-se :

$$[H] [S_{FF}] = [S_{XF}] \quad (II.11)$$

ou

$$[H] = [S_{XF}] [S_{FF}]^{-1} \quad (II.12)$$

onde :

$$[H] = \text{matriz de FRF} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1Ni} \\ H_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{No1} & \dots & \dots & H_{NoNi} \end{bmatrix}$$

$[S_{XF}] =$ matriz de espectro cruzado resposta / excitação =

$$= \{X\} \{F\}^* = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_{N_0} \end{bmatrix} \{F_1^* F_2^* \dots F_{N_i}^*\}$$

$[S_{FF}] =$ matriz do auto-espectro de excitação =

$$= \{F\} \{F\}^* = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_{N_i} \end{bmatrix} \{F_1^* F_2^* \dots F_{N_i}^*\}$$

II.3.2 - ESTIMADOR H2

Considerando-se que todos os erros de medida estão restritos agora aos sinais de excitação ($\{v\}$), a técnica de mínimos quadrados H2 leva à solução de $[H]$ que minimiza este erro :

$$[H]_{N_{ox}N_i} \{F\}_{N_{ix}1} + \{v\}_{N_{ix}1} = \{X\}_{N_{ox}1} \quad (II.13)$$

Procedendo-se similarmente ao caso de H1, ambos os lados da eq. (II.13) são pós-multiplicados pelo conjugado transposto de $\{X\}$:

$$[H]_{N_{ox}N_i} \{F\}_{N_{ix}1} \{X\}_{1xN_0}^* + \{v\}_{N_{ix}1} \{X\}_{1xN_0}^* = \{X\}_{N_{ox}1} \{X\}_{1xN_0}^* \quad (II.14)$$

Admitindo-se que o ruído nos sinais de excitação não tem correlação com os sinais de resposta e que com um número suficiente de médias o espectro normalizado do ruído é quase zero, obtém-se:

$$[H]_{N_{ox}N_i} = [S_{XX}]_{N_0N_0} [S_{FX}]_{N_iN_0}^{-1} \quad (II.15)$$

onde :

$[S_{XX}] =$ matriz de auto-espectro de resposta =

$$= \{X\} \{X\}^{*t} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_{No} \end{bmatrix} \{X_1^* X_2^* \dots X_{Ni}^*\}$$

e $[S_{FX}] =$ matriz de espectro cruzado excitação / resposta =

$$= \{F\} \{X\}^{*t} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_{No} \end{bmatrix} \{X_1^* X_2^* \dots X_{Ni}^*\}$$

Como se nota pela eq. (II.15), para que a mesma seja válida é necessário que o número de pontos de entrada (N_i) seja igual ao de saída (N_o). Esta é uma restrição muito forte para o uso de H2, uma vez que normalmente o número de pontos de excitação de um ensaio é bem menor do que o número de pontos de medição de resposta.

II.3.3 - ESTIMADOR Hv

Admite-se agora que erros de medida estão presentes tanto nos sinais de excitação como nos de resposta, representados respectivamente por $\{v\}$ e $\{\eta\}$. A técnica de mínimos quadrados Hv visa encontrar a solução $[H]$ na eq. (II.16) que minimize a soma dos comprimentos Euclidianos de $\{v\}$ e $\{\eta\}$, chamado de erro quadrado total. Está provado na literatura [6] que a solução pode ser identificada com os elementos da matriz $[S_{FFX}]$ definida na eq. (II.17). Mais uma vez os elementos desta matriz identificam-se com os auto-espectros e o espectro cruzado dos sinais de entrada e saída. A literatura pesquisada [6] é bastante direta quanto à dedução deste estimador.

$$[H] \{ \{F\} - \{v\} \} = \{X\} - \{\eta\} \quad (II.16)$$

$$[S_{FFX}] = \{ \{F\} \{X\} \}^{*t} \{ \{F\} \{X\} \} \quad (II.17)$$

$$[S_{FFX}] = \begin{bmatrix} [S_{FF}] & [S_{FX}] \\ [S_{FX}]^{*t} & [S_{XX}] \end{bmatrix} \quad (II.18)$$

A matriz $[S_{FFX}]$ é Hermitiana; sua composição em auto-valor é, portanto, definida pela eq. (II.19). A estimativa de erro total quadrado para $[H]$ é definida pela eq. (II.20).

$$[S_{FFX}] = [V] \Lambda [V]^* \quad (II.19)$$

onde:

$$\Lambda = \text{diagonal} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$$

$$[V]^* [V] = I$$

$$[H] = \left\{ \begin{array}{c} -V_{1, p+1} / V_{p+1, p+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ -V_{p, p+1} / V_{p+1, p+1} \end{array} \right\} \quad (II.20)$$

É importante notar que a solução de mínimo quadrado total não existe se $V_{p+1, p+1}$ for igual a zero. Isto, porém, somente ocorrerá caso a submatriz $[S_{FF}]$ de $[S_{FFX}]$ for singular, isto é, se as forças de excitação forem correlacionadas. Assim, basta verificar que as forças de excitação não são linearmente dependentes para garantir a existência da solução de mínimo quadrado total.

Para o caso particular de apenas uma força de excitação ("single input"), o estimador tem a seguinte expressão :

$$Hv = (S_{XF} / |S_{XF}|) (S_{XX} / S_{FF})^{1/2} \quad (II.21)$$

II.4 - ZOOM [7]

O zoom consiste em uma técnica que se utiliza quando se deseja aumentar a resolução de alguma região do espectro. Através de seu uso, consegue-se obter o espectro de uma faixa compreendida entre uma frequência inicial (F_{inic}(em Hz)) e uma frequência final (F_{fin}(em Hz)) com o mesmo número de pontos que se dispunha no cálculo convencional do espectro original, ou seja, de zero à frequência máxima (F_{max}), conforme ilustrado na fig. (II.5).

A primeira etapa da rotina de zoom é uma convolução complexa, em frequência, do sinal amostrado com uma exponencial complexa de frequência (-F_{inic}). Isto é obtido pela multiplicação, no tempo, destes sinais. O resultado desta operação é um sinal complexo, cuja parte real é igual ao sinal amostrado multiplicado por (cos(2πF_{inic})) e cuja parte imaginária é igual ao sinal amostrado multiplicado por (sen(2πF_{inic})). Esta multiplicação no tempo

(convolução em frequência) provoca um deslocamento do espectro para a esquerda, fazendo o ponto (Finic) do espectro coincidir com o eixo das ordenadas.

Em seguida, executa-se a filtragem passa baixa com frequência de corte igual a $(F_{fin} - F_{inic})$. Como o novo sinal no tempo é de natureza complexa, ambas as partes, real e imaginária, devem ser filtradas. Pode-se utilizar um dos filtros especiais para decimação existentes na literatura, uma vez que a próxima etapa do processo é uma decimação no tempo.

A última etapa consiste em uma decimação no tempo, o que significa re-amostrar o sinal com uma frequência de digitalização f_d' , divisora inteira da frequência de digitalização inicial f_d , e maior do que $(F_{inic} - F_{fin})$. Isto representa uma re-amostragem de $((f_d/f_d') \cdot N)$ pontos, onde N é o número de pontos amostrados inicialmente.

Após este procedimento, os sinais real e imaginário passam pela rotina de FFT.

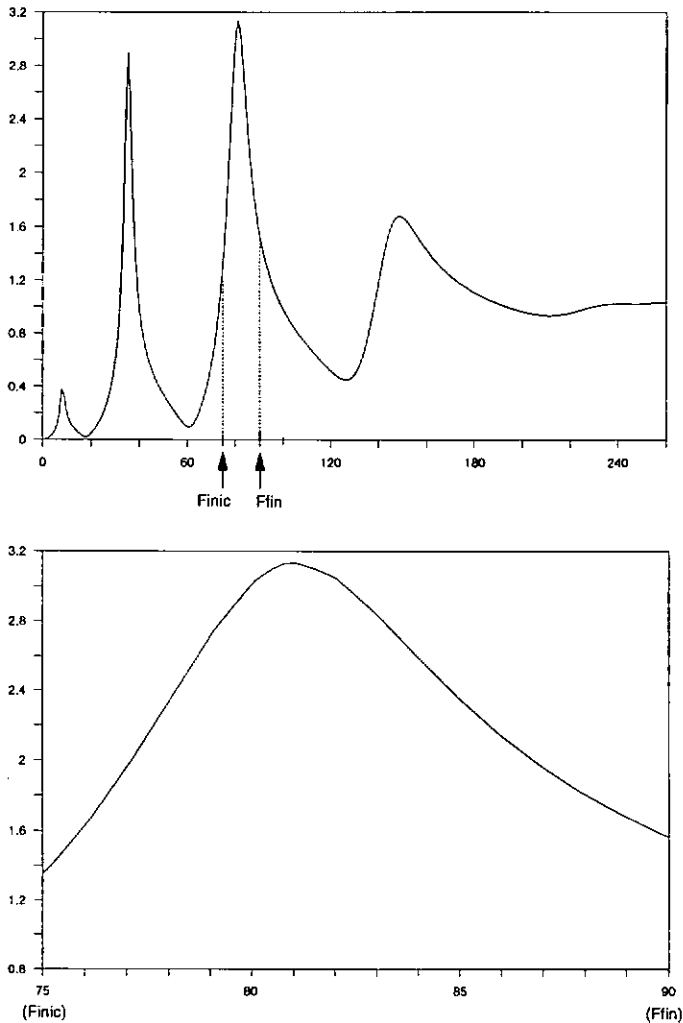


Fig. II.5 - Zoom

II.5 - IMPLEMENTAÇÃO, SIMULAÇÕES E TESTES EXPERIMENTAIS

Este item apresenta a metodologia utilizada para implementação do software desenvolvido, a descrição de simulações numéricas realizadas em uma estrutura simples e testes experimentais nesta mesma estrutura. As simulações numéricas e os testes experimentais objetivam sobretudo avaliar o sistema desenvolvido, verificando também seu nível de precisão.

II.5.1 - IMPLEMENTAÇÃO

O programa desenvolvido contém uma rotina em linguagem "C" [8], relativa à aquisição dos sinais, e o restante em "FORTRAN". Cabe ao usuário definir o número de canais (máximo de 16) a faixa de frequência desejada (que vai determinar a frequência de digitalização) e o número de amostras.

A aquisição dos sinais é realizada via DMA (Direct Memory Access), ou seja, as leituras do conversor A/D são transferidas para a memória diretamente, sem a intervenção do microprocessador do computador. Este tipo de operação torna a aquisição mais rápida do que as convencionais.

Feita a aquisição da primeira amostra, os dados relativos a todos os canais são então passados à rotina que realiza as FFTs [9], com janela do tipo Hanning, e estima as FRFs. (A janela Hanning é expressa pela eq. (II.22) e sua representação gráfica encontra-se na fig. (II.6)). Inicia-se a aquisição da segunda amostra e o processo se repete até que o número de amostras definido pelo usuário se complete. As médias aritméticas das FFTs e FRFs de cada amostra serão tomadas como as FFTs e FRFs finais. No programa, pode-se optar pelo tipo de estimador desejado : H1, H2 ou Hv.

$$x(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi t}{T_0} \right) \quad (\text{II.22})$$

O número de pontos dos espectros calculados é mantido fixo em 256, uma vez que a amostragem, sem zoom, é feita com 512 pontos. A rotina de zoom dispõe de dois tipos de filtro passa-baixa elípticos de oitava ordem [10], um associado ao zoom de duas vezes (ou seja, aumenta em duas vezes a resolução de uma faixa do espectro), outro com zoom de quatro vezes (aumenta em quatro vezes a resolução). No primeiro caso, a re-amostragem se dá de 2 em 2 pontos, sendo portanto realizada a aquisição de 1024 pontos por canal. No segundo caso, a mesma é feita de 4 em 4 pontos, com aquisição de 2048 pontos por canal.

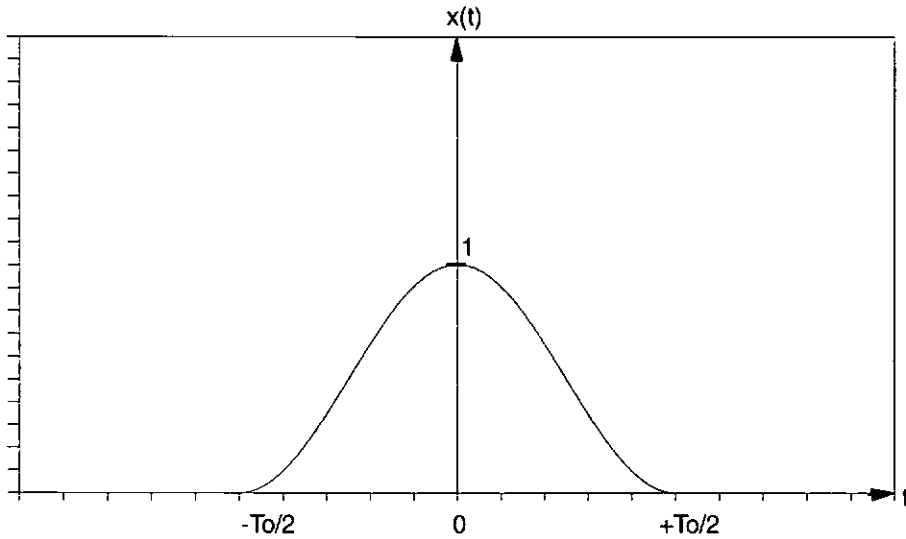


Fig. II.6 - Representação gráfica da janela "Hanning"

O primeiro canal refere-se sempre ao sinal da força de excitação, sendo os demais referentes às respostas da estrutura. Assim, tendo NCAN número de canais, obter-se-ão (NCAN-1) funções de transferência (FRFs), cada uma relacionando um dos canais de resposta ao canal da força. Para o caso de vários canais de força de excitação (multiple input), a parte de aquisição do programa permanece inalterada, enquanto as rotinas de estimação das FRFs necessitam de um desenvolvimento mais elaborado, que também está sendo implementado no Laboratório de Estruturas [11].

A figura (II.7) apresenta um fluxograma simplificado do programa.

Concluído o número de amostras (NAM), as opções de gráfico a ser mostrado na tela são :

- 1 - Módulo da FFT de um canal versus Frequência
- 2 - Ângulo de Fase da FFT de um canal versus Frequência
- 3 - Módulo da FRF entre um canal de resposta e o de força versus Frequência
- 4 - Ângulo de Fase da FRF entre um canal de resposta e o de força versus Frequência

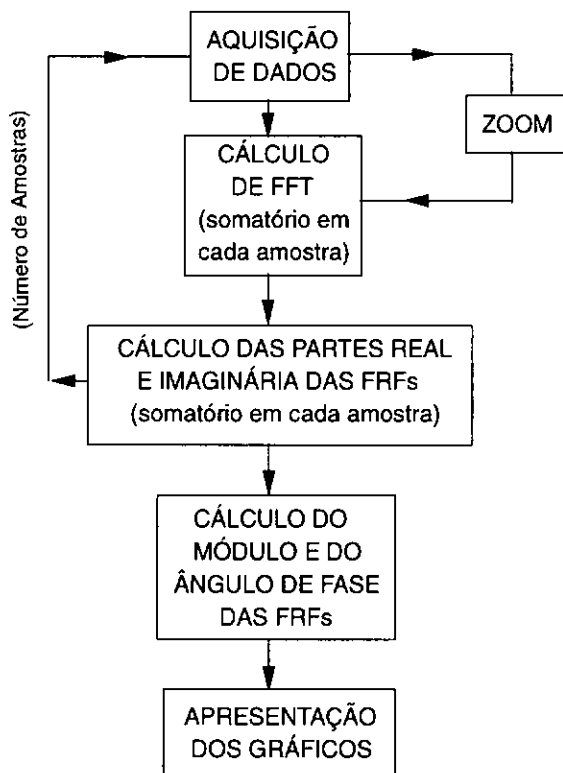


Fig. II.7 - Fluxograma do programa de aquisição e processamento de dados desenvolvido.

II.5.2 - SIMULAÇÕES E TESTES EXPERIMENTAIS

Inicialmente, para verificar a rotina de FFT do sistema implementado, foram geradas funções do tipo harmônico através de um gerador de funções, variando-se a frequência e a amplitude do sinal no tempo. Os espectros obtidos foram usados para verificação inicial da rotina implementada, com resultados satisfatórios.

Para comparação de resultados do sistema desenvolvido com resultados analíticos, realizaram-se simulações com uma viga bi-apoiada, cuja esquematização é mostrada na fig. (II.8). Utilizou-se para tal um programa [12] que realiza a integração das equações de movimento de uma viga bi-apoiada e gera a resposta da estrutura no tempo, sujeita a determinado tipo de carregamento dinâmico. O programa em questão utiliza os dados geométricos da viga e calcula a resposta no grau de liberdade desejado, integrando as equações diferenciais por meio do método de Runge-Kutta [9]. Além da resposta no tempo, ele calcula também o espectro da FRF teórica em um ponto qualquer de medição, através das eqs. (II.23), possibilitando a comparação com os resultados do sistema implementado. Assim, tanto o sinal de força quanto o de aceleração no tempo, calculados pelo programa, foram

usados como entrada do sistema, ao invés de sinais obtidos pela placa A/D. Este tipo de simulação testa apenas a parte do sistema que calcula FFTs e FRFs.

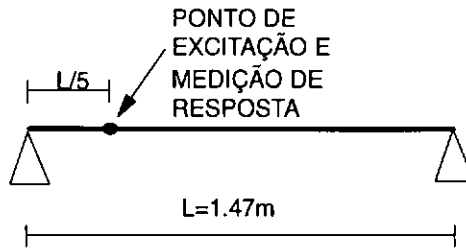


Fig. II.8 - Esquema da viga bi-apoiada utilizada na simulação.

$$\text{Re}[\text{IN}(\omega)]_{pq} = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{pr} \phi_{qr} (-(\beta_r^2)(1-\beta_r^2))}{(1-\beta_r^2)^2 + (2\xi_r \beta_r)^2} \quad (\text{II.23a})$$

$$\text{Im}[\text{IN}(\omega)]_{pq} = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{pr} \phi_{qr} (2\xi_r \beta_r^3)}{(1-\beta_r^2)^2 + (2\xi_r \beta_r)^2} \quad (\text{II.23b})$$

$$\text{Mod}[\text{IN}(\omega)]_{pq} = \sqrt{\text{Re}^2[\text{IN}(\omega)]_{pq} + \text{Im}^2[\text{IN}(\omega)]_{pq}} \quad (\text{II.23c})$$

onde : $\text{Re}[\text{IN}(\omega)]_{pq}$ é a parte real da FRF do tipo inertância (aceleração/força), referente ao ponto p de resposta e q de excitação, para uma frequência de excitação ω ;

$\text{Im}[\text{IN}(\omega)]_{pq}$ é a parte imaginária da FRF do tipo inertância (aceleração/força), referente ao ponto p de resposta e q de excitação, para uma frequência de excitação ω ;

$\text{Mod}[\text{IN}(\omega)]_{pq}$ é o módulo da inertância referente ao ponto p de resposta e q de excitação, para uma frequência de excitação ω ;

ϕ_{pr} é o valor do auto-vetor normalizado do modo r referente ao grau de liberdade do ponto de resposta (p);

ϕ_{qr} é o valor do auto-vetor normalizado do modo r referente ao grau de liberdade do ponto de excitação (q);

$\beta_r = \frac{\omega}{\omega_{na,r}}$, onde ω é a frequência de excitação e $\omega_{na,r}$ é a frequência natural não-amortecida do modo r

ξ_r é a taxa de amortecimento relativa ao modo r

Foram selecionados os cinco primeiros modos para a análise e o ponto de excitação e resposta escolhido está indicado na fig. (II.8). Utilizou-se uma excitação transiente por meio de impactos. A partir das taxas de amortecimento dos dois primeiros modos, obtidas experimentalmente, o programa calculou as taxas dos demais modos, admitindo uma proporcionalidade da matriz de amortecimento em relação às matrizes de massa e de rigidez, o que pode ser expresso por meio das eq. (II.24) :

$$\xi_r = \frac{A0}{2\omega_{na,r}} + \frac{A1\omega_{na,r}}{2} \quad (II.24)$$

onde :

$$A0 = \frac{2\omega_{na,1}\omega_{na,2}}{(\omega_{na,2}^2 - \omega_{na,1}^2)} (\xi_1\omega_{na,2} - \xi_2\omega_{na,1})$$

$$A1 = \frac{2\omega_{na,1}\omega_{na,2}}{(\omega_{na,2}^2 - \omega_{na,1}^2)} \left(\frac{\xi_2}{\omega_{na,1}} - \frac{\xi_1}{\omega_{na,2}} \right)$$

Foi realizada uma simulação com $\xi_1 = 10\%$ e $\xi_2 = 4\%$. A fig. (II.9) apresenta uma comparação entre o espectro teórico e o obtido pelo sistema, na faixa de 0 a 250 Hz, da FRF com o estimador H1, cujo resultado é exatamente igual ao de H2 e ao de Hv. Não é possível distinguir uma curva da outra em cada figura. Como era de se esperar, os três estimadores apresentaram resultados exatamente iguais, uma vez que os sinais de entrada e saída são teóricos e, portanto, isentos de ruídos (deve-se recordar que a distinção entre os três estimadores reside somente na presença de ruídos na entrada e/ou saída). Os resultados obtidos comprovam a eficácia das rotinas de FFT e FRF do sistema.

A simulação seguinte, com o objetivo de avaliar as diferenças entre os estimadores, consistiu em introduzir ruídos de diferentes níveis nos sinais de força e aceleração e estimar as FRFs através de H1 e Hv. O estimador H2 foi excluído da simulação por exigir que o número de pontos de resposta e de excitação seja igual, o que consiste em uma situação bastante difícil de ser viabilizada. Esta simulação foi feita com excitação randômica do tipo ruído branco. Foram introduzidos ruídos, de natureza randômica, de 5%,

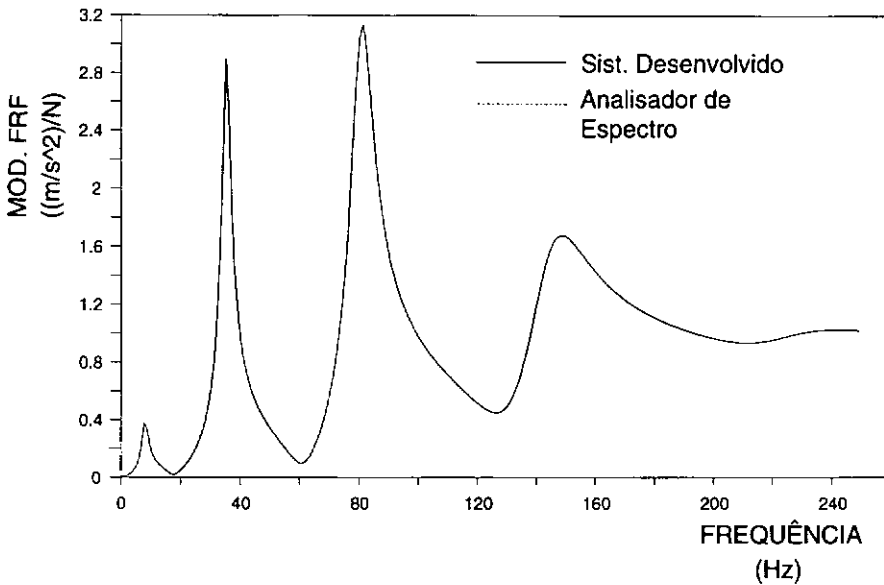


Fig. II.9 - Comparação da FRF para o caso simulado.

10% e 20% nos sinais de entrada (força) e saída (resposta). O nível de ruído foi calculado em relação ao valor RMS dos sinais no tempo, ou seja, um ruído de 10% na resposta, por exemplo, significa que o valor RMS do sinal de ruído (do tipo randômico) representa 10% do valor RMS do sinal de resposta, limpo. Para avaliar a qualidade dos estimadores em relação aos ruídos, foi calculado o erro quadrático, cuja expressão é definida na equação (II.25), entre o espectro teórico do sinal sem ruído e o espectro dos sinais com ruídos obtidos pelo sistema com cada estimador.

$$E = \sum_{f=0}^{f_r} (e(j\omega_f) \cdot e^*(j\omega_f)) \quad (\text{II.25})$$

onde : $e(j\omega) = H^{\text{EST}}(j\omega) - H^{\text{TEO}}(j\omega)$

$$e^*(j\omega) = H^{\text{EST}*}(j\omega) - H^{\text{TEO}*}(j\omega)$$

H^{EST} é a FRF estimada pelo sistema

H^{TEO} é a FRF teórica, sem ruído

$0 < f < f_r$ é a faixa onde a FRF foi estimada

* designa o conjugado complexo

Os erros quadráticos foram então normalizados em relação ao erro quadrático de maior valor. As tabelas II.1 e II.2 apresentam os resultados do erro quadrático de correlação para H1 e Hv, respectivamente, para os diversos casos de ruídos simulados.

Tabela II.1 - Erro Quadrático - Estimador H1

RUÍDO ENTRADA ⇒ RUÍDO SAÍDA ↓	0%	5%	10%	20%
0%	0.000	0.158	0.368	1.000
5%	0.026	0.132	0.316	0.947
10%	0.026	0.105	0.316	0.921
20%	0.079	0.132	0.290	0.842

Tabela II.2 - Erro Quadrático - Estimador Hv

RUÍDO ENTRADA ⇒ RUÍDO SAÍDA ↓	0%	5%	10%	20%
0%	0.000	0.079	0.210	0.684
5%	0.026	0.105	0.263	0.684
10%	0.105	0.158	0.316	0.763
20%	0.263	0.316	0.474	0.921

Uma análise das tabelas II.1 e II.2 leva à conclusão que, como era esperado, o estimador H1 mostrou-se bastante eficiente para contornar o problema da presença de ruído na resposta (saída), conforme mostrado no item II.3.1, o que pode ser notado pela constatação da quase constância dos valores ao longo das colunas da tabela II.1. A mesma tabela mostra que o aumento do ruído no sinal de excitação (entrada) faz aumentar o erro quadrático, o que indica que este estimador não é apropriado para ruídos nos sinais de excitação. Por outro lado, esperava-se que Hv apresentasse uma maior invariância de resultados com respeito aos ruídos nos sinais de excitação e resposta. Pela tabela II.2, nota-se que o erro quadrático com Hv variou mais com ruídos na excitação do que com ruídos na resposta. Simulações posteriores devem ser realizadas para que se chegue a uma conclusão mais definitiva quanto à eficiência destes dois estimadores. Deve-se ter em mente que a obtenção do estimador Hv requer um esforço computacional muito maior do que o exigido para a determinação de H1. Portanto, somente no caso de se constatar que Hv é realmente mais eficiente do que H1, é que deve-se optar pelo primeiro.

Para testes experimentais, foi utilizada a mesma viga bi-apoiada das simulações teóricas. Esta viga, de aço, tem comprimento de 1.47 m, largura de 7.62 cm e espessura de

0.79 cm . Inicialmente, obteve-se um espectro que englobasse os dois primeiros modos de vibração e em seguida um espectro mais detalhado em torno de cada um destes modos. Todas as FRFs foram estimadas através de H1 e a excitação foi do tipo ruído branco imposta através de um excitador eletro-magnético instrumentado com um load-cell na sua extremidade. Tanto a excitação quanto a medição da resposta se deram em um ponto que dista um terço do comprimento da viga contado a partir do apoio. Para comparação dos espectros obtidos pelo sistema, utilizou-se um analisador de espectros, cujos resultados foram transferidos para o microcomputador através de um programa desenvolvido no Laboratório de Estruturas [8]. A fig. (II.10) ilustra esquematicamente os sistemas de excitação e de aquisição de dados e a instrumentação utilizada.

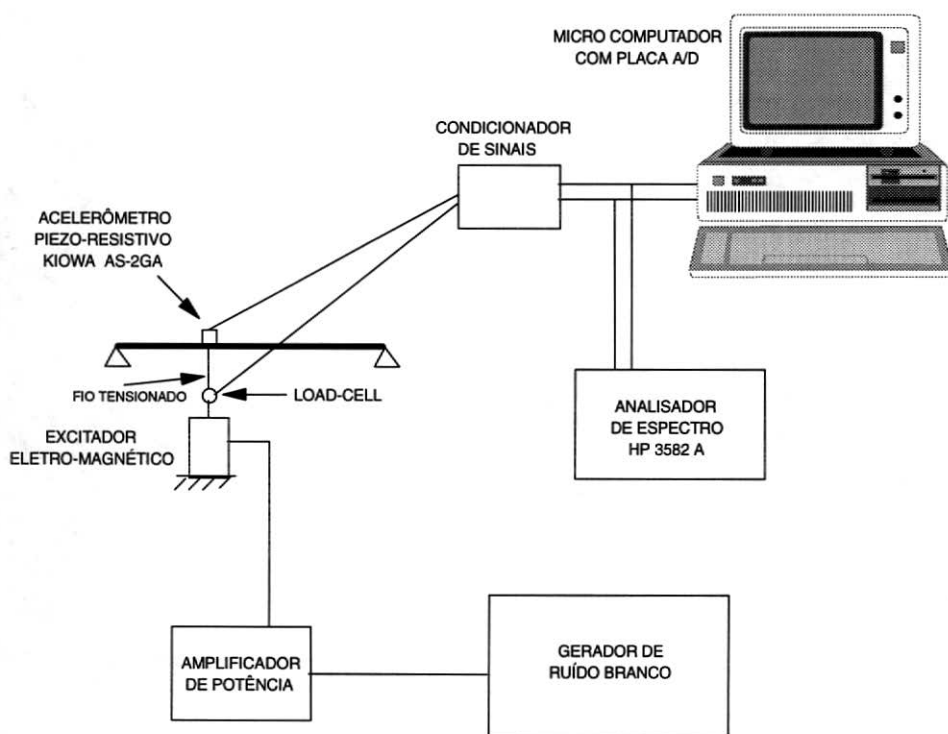


Fig. II.10 - Sistema de excitação e aquisição utilizado para testes experimentais.

A fig. (II.11) apresenta uma comparação entre os módulos da FRF, na faixa de 0 a 50 Hz, obtidos pelo sistema de aquisição e de processamento de sinais desenvolvido e pelo analisador de espectros. A fig. (II.12) apresenta o mesmo tipo de comparação, porém relativo ao ensaio abrangendo apenas o segundo modo de vibração, caso em que foi utilizada a rotina de zoom do sistema implementado. Percebe-se, pelas figuras (II.11) e (II.12), a semelhança entre as curvas obtidas pelo sistema implementado e pelo analisador de espectros. Pequenas diferenças de amplitude devem-se basicamente ao número diferente de pontos (e consequentemente de incremento de frequência) entre os dois sistemas.

Através das simulações numéricas e testes experimentais, pode-se considerar que as FRFs obtidas com o sistema de aquisição e processamento de dados desenvolvido apresentaram valores satisfatórios se comparados aos teóricos e do analisador de espectros.

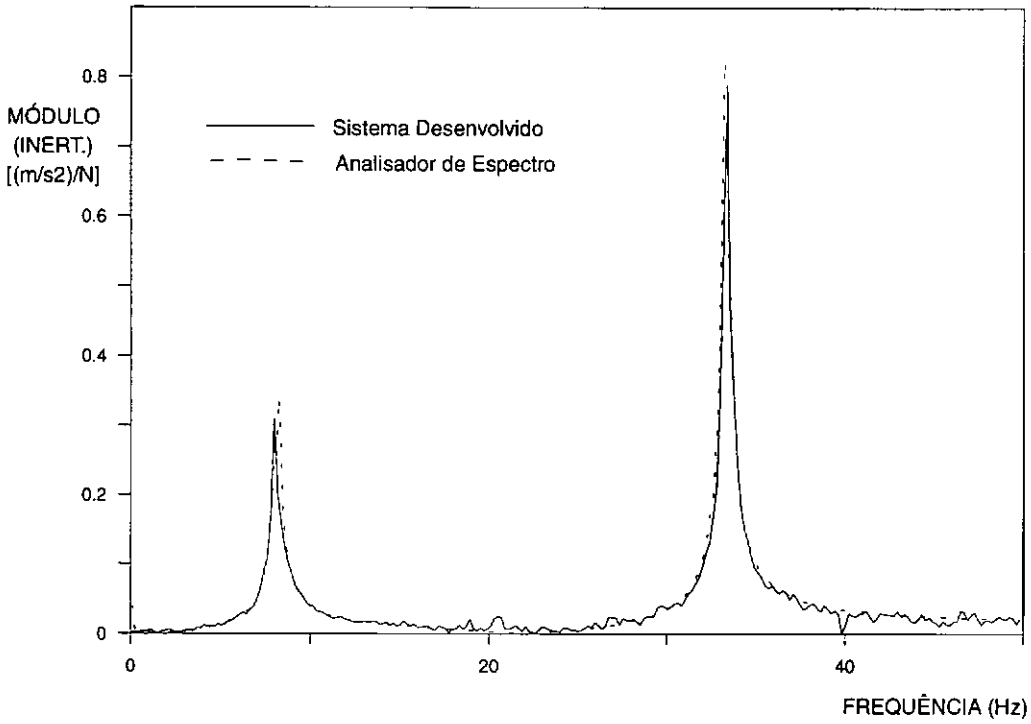


Fig. II.11 - Comparação entre os Módulos da FRF na faixa de 0 a 50 Hz, abrangendo os dois primeiros modos.

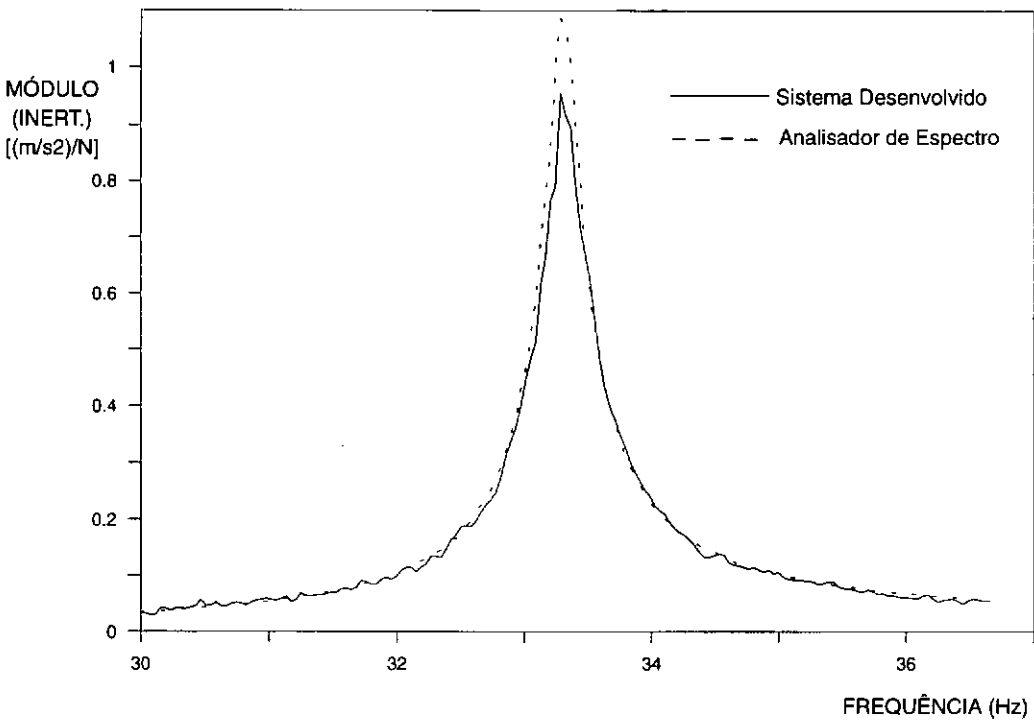


Fig. II.12 - Comparação entre os Módulos da FRF em torno do segundo modo.

CAPÍTULO III

MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS

Após a obtenção das FRFs, deve-se utilizar algum método de identificação modal para estimar os parâmetros modais da estrutura.

São inúmeros os métodos de estimação de parâmetros modais, cada qual com suas vantagens e deficiências. Não é possível apontar um método que se destaque em relação aos demais. O que se pode dizer é que as características do sistema estrutural específico a ser analisado, aliadas à experiência do usuário, vão indicar a conveniência ou não da aplicação de determinado método.

O presente capítulo procura apresentar conceitos fundamentais relativos à estimação modal. Uma vasta referência bibliográfica é citada e alguns métodos são descritos. Dois destes métodos (“The Least Squares Complex Exponential Method”, no domínio do tempo e “The Orthogonal Polynomial Method”, no domínio da frequência) serão abordados com maior profundidade no capítulo seguinte, já que serão utilizados para avaliar os resultados do novo método de estimação modal desenvolvido neste trabalho e apresentado nos Capítulos V e VI.

III.1 - CLASSIFICAÇÃO DOS MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS

A análise modal descreve o comportamento dinâmico de um sistema como uma superposição linear de um certo número de modos. O problema de estimação de parâmetros modais para estruturas consiste, então, em identificar os parâmetros desconhecidos para cada um destes modos : suas frequências naturais, taxas de amortecimento e modos de vibração. Portanto estes métodos são desenvolvidos para estruturas com comportamento linear, invariantes ao longo do tempo.

Através de medidas de excitação (entrada) e resposta (saída), são estimados os parâmetros modais, que são otimizados por meio de um determinado critério.

São diversos os ângulos pelos quais podem ser classificados os métodos de estimação de parâmetros modais, como apresentado a seguir.

III.1.1 - ANÁLISE NO DOMÍNIO DO TEMPO x ANÁLISE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Este é o principal critério para classificar os métodos de identificação modal. A maior parte dos métodos no domínio do tempo trabalha com a Resposta de Impulso ou com a função de decaimento livre, enquanto os no domínio da frequência trabalham com a Função de Resposta em Frequência. A primeira é normalmente tratada por IR (Impulse Response, em inglês) e a segunda por FRF (Frequency Response Function, em inglês), conforme já mencionado. Suas expressões serão desenvolvidas no item (III.2), bem como a relação existente entre elas. Entretanto, existe um outro grupo de algoritmos de estimação modal no domínio do tempo, baseados em relações de médias móveis e auto-regressivas, que podem trabalhar diretamente com amostras de excitação e resposta, não sendo necessária a obtenção da IR.

Quanto à obtenção da IR, são dois os procedimentos possíveis :

- calcula-se a FRF a partir dos sinais no tempo e, em seguida, calcula-se a transformada de Fourier inversa desta FRF;
- utilizando-se o processo de deconvolução.

Algumas diferenças básicas são notadas entre métodos implementados no domínio do tempo e no domínio da frequência. Os métodos no domínio do tempo são melhores condicionados do que os no domínio da frequência [13;14]. Por outro lado, somente implementações no domínio da frequência são capazes de levar em conta os efeitos dos modos fora da faixa medida, ou seja, modos abaixo e acima da região do espectro sob análise. Isto torna-se possível através da consideração de termos residuais de massa e rigidez, como será mostrado no item IV.2.4.

III.1.2 - UM GRAU DE LIBERDADE (SDOF) x VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE (MDOF)

Em geral, a resposta dinâmica de um sistema é obtida fazendo-se a superposição de alguns de seus modos. Quando a densidade modal é baixa (ou seja, as frequências naturais são bem separadas), tomando-se uma faixa de frequência na vizinhança de uma frequência natural da estrutura, pode-se considerar a resposta da estrutura função apenas deste modo de vibração, sendo as contribuições de todos os outros modos desprezíveis ou constantes. Assim, a estrutura terá sua resposta modelada como se fosse originada de um sistema de um grau de liberdade.

Os métodos de estimação de parâmetros modais que fazem uso desta simplificação são ditos de um grau de liberdade (SDOF - Single Degree of Freedom). Um destes métodos, já implementado no Laboratório de Estruturas, é o "Circle-Fit" [3]. São

métodos, em geral, bastante rápidos, requerendo pouco tempo computacional e pouca memória. Porém, não são apropriados para estruturas com frequências naturais muito próximas umas das outras e amortecimento elevado. Quanto menor o amortecimento de um modo, mais concentrada na vizinhança do pico de ressonância deste modo estará sua energia, sendo portanto menor sua influência sobre os modos adjacentes.

Já os métodos de vários graus de liberdade (MDOF - Multi Degree of Freedom) consideram a contribuição de muitos modos, dentro da região de análise, na resposta da estrutura, permitindo desta forma que estruturas com grande densidade modal sejam analisadas.

III.1.3 - ESTIMATIVAS LOCAIS x ESTIMATIVAS GLOBAIS

As estimativas locais analisam apenas uma FRF por vez. Desta forma, podem gerar resultados diferentes do mesmo parâmetro modal (frequência natural e taxa de amortecimento, que são parâmetros modais do tipo global) em cada análise, formando uma série de estimativas, que podem posteriormente ser tratadas estatisticamente.

As estimativas globais consideram várias FRFs, levando em conta o fato de que um parâmetro modal é uma invariante da estrutura, independente do local particular de excitação e/ou resposta a partir do qual se realizou a análise. Estimativas globais obtêm apenas um valor para cada parâmetro modal.

III.1.4 - MODELO DE IDENTIFICAÇÃO DIRETA x MODELO DE IDENTIFICAÇÃO MODAL

A partir das equações diferenciais de movimento de uma estrutura, sua resposta dinâmica pode ser modelada de duas formas distintas :

- Identificação Modal : descreve os sinais de resposta como uma superposição linear de soluções características para as equações diferenciais. Os parâmetros modais são estimados ajustando-se uma curva aos pontos de medida através de uma série de soluções. Neste caso, o problema de identificação modal reduz-se à estimação de alguns parâmetros desconhecidos que constam do já conhecido modelo teórico desenvolvido.

- Identificação Direta : usa as próprias equações diferenciais, ao invés de considerar um conhecimento prévio sobre a natureza de suas soluções características. Os parâmetros nestas equações diferenciais são estimados diretamente das sequências de sinais de entrada/saída. Análises posteriores destes parâmetros (decomposição de autovalores das matrizes de massa, amortecimento e rigidez estimadas) resultam nos desejados parâmetros modais, completando o processo de identificação modal.

Todos os métodos apresentados neste trabalho utilizam-se do modelo de identificação modal.

III.1.5 - MODOS DE VIBRAÇÃO REAIS x MODOS DE VIBRAÇÃO COMPLEXOS

Sistemas em que a matriz de amortecimento é considerada proporcional às matrizes de massa e rigidez ($C=\alpha M+\beta K$) são chamados de proporcionalmente amortecidos. As formas modais resultantes, neste caso, são reais. Todos os pontos de medida, nas suas frequências naturais, estão em fase ou em oposição de fase em relação aos outros pontos da estrutura. Esta consideração mostra-se eficiente apenas para estruturas com valores baixos de amortecimento.

No caso mais geral, o amortecimento é considerado não proporcional e, conseqüentemente, formas modais complexas são identificadas, apontando diferenças de fase entre os pontos de medida da estrutura, mesmo nas suas frequências naturais.

III.1.6 - UM PONTO DE EXCITAÇÃO x VÁRIOS PONTOS DE EXCITAÇÃO

Este é outro critério de classificação dos métodos. Logicamente, os métodos que admitem vários pontos de excitação também funcionam no caso de apenas um ponto de excitação. A recíproca, entretanto, não é verdadeira, havendo métodos que admitem somente excitação em um ponto da estrutura.

A excitação múltipla apresenta a vantagem de que a resposta da estrutura se caracteriza por ser melhor distribuída, além de garantir que localmente a estrutura não se danifique, já que o nível de força em cada ponto pode ser reduzido sem que isto prejudique a excitação de vários modos.

A tabela III.1 apresenta um resumo de diversos métodos de estimação, mostrando suas características de acordo com os tipos de classificação apresentados. Alguns destes métodos estão descritos sucintamente no item III.3.

Na tabela III.1, quando se diz que um método é MDOF, logicamente ele é aplicável também em torno de apenas um modo de vibração (SDOF). A recíproca, entretanto, não é verdadeira. O mesmo pode ser colocado quanto aos métodos globais, que podem também gerar estimativas locais.

Segundo Juang [15], em 80% dos casos as FRFs são computadas antes de utilizar-se um algoritmo de identificação de parâmetros modais, apesar de existirem vários algoritmos que analisam resposta no tempo de vibração livre diretamente. A razão para este fato é que

peças com prática em testes modais podem extrair uma gama considerável de informações simplesmente observando as FRFs. No mesmo trabalho, Juang apresenta os seguintes dados estatísticos, aproximados : de todos os algoritmos de estimação modal existentes, aproximadamente 40% são de vários graus de liberdade (MDOF) no domínio do tempo, enquanto que cerca de 30% são de vários graus de liberdade no domínio da frequência.

A tabela III.1 deve ser analisada à luz das características geralmente apresentadas pelas estruturas civis. Estas são normalmente de baixa densidade modal e fracamente amortecidas, tornando aplicáveis os métodos SDOF. Existem exceções, como será visto posteriormente.

Tabela III.1 - Classificação dos Métodos de Estimação de Parâmetros Modais

MÉTODOS	SDOF ou MDOF	GLOBAL ou LOCAL	SINGLE ou MULTI INPUT	DOM. DO TEMPO ou FREQ.	MODELO DIRETO ou MODAL	MODOS REAIS ou COMPLE- XOS	REFERÊN- CIA BIBLI- OGRÁFICA
Meia-Potência	SDOF	LOCAL	SI	FREQ.	MODAL	REAIS	[3;14]
Ângulo de Fase	SDOF	LOCAL	SI	FREQ.	MODAL	REAIS	[3;14]
Circle-Fit (Círculo Ajustado)	SDOF	LOCAL	SI	FREQ.	MODAL	REAIS	[3;16- 17]
Mín. Quadrados Não-Linear no Dom. Freq.	MDOF	GLOBAL	MI	FREQ.	MODAL	COMPLE- XOS	[18-25]
Least Sq. Complex Exp.	MDOF	GLOBAL	SI	TEMPO	MODAL	COMPLE- XOS	[26-28]
Polyreference	MDOF	GLOBAL	MI	TEMPO	MODAL	COMPL.	[28-36]
Ibrahim	MDOF	GLOBAL	MI	TEMPO	MODAL	COMPL.	[37-43]
Identificação Direta Tempo	MDOF	GLOBAL	MI	TEMPO	DIRETA	COMPLE- XOS	[44-48]
Identificação Direta Freq.	MDOF	GLOBAL	MI	FREQ.	DIRETA	COMPLE- XOS	[49-53]
ISSPA (Id. de Parâmetros de Sistemas Estruturais)	MDOF	GLOBAL	MI	FREQ.	DIRETA	COMPLE- XOS	[54]
ERA	MDOF	GLOBAL	MI	TEMPO	DIRETA	COMPLE- XOS	[15];[55] [56]
SFD (Dom. da Fr. Simultâneo)	MDOF	GLOBAL	SI	FREQ.	MODAL	COMPLE- XOS	[57-58]
Orthogonal Polynomial	MDOF	GLOBAL	MI	FREQ.	MODAL	COMPLE- XOS	[59-66]
Mín. Quadrados Linear no Dom. Freq.	MDOF	GLOBAL	MI	FREQ.	MODAL	COMPLE- XOS	[25]
Estimação de Par. Modais através do Goal Progr.	MDOF	GOLBAL	MI	FREQ.	MODAL	COMPL.	[67]

III.2 - INTRODUÇÃO TEÓRICA

Este item apresenta o desenvolvimento teórico das expressões da FRF e da IR a partir da equação diferencial do movimento. Estas expressões serão utilizadas nos diferentes métodos apresentados posteriormente.

Para um sistema de um grau de liberdade, a equação do movimento é :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad (\text{III.1})$$

onde : m = massa do sistema

c = amortecimento do sistema

k = rigidez do sistema

$x(t)$ = deslocamento do sistema variando no tempo

$\dot{x}(t)$ = velocidade do sistema variando no tempo

$\ddot{x}(t)$ = aceleração do sistema variando no tempo

$f(t)$ = força de excitação aplicada à estrutura

Aplicando-se a transformada de Laplace à eq. (III.1), obtém-se :

$$\begin{aligned} L\{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx\} &= m(s^2 X(s) - s x(0) - \dot{x}(0)) + c(s X(s) - x(0)) + k X(s) = \\ &= (ms^2 + cs + k)X(s) - ms x(0) - m\dot{x}(0) - c x(0) \end{aligned}$$

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

Igualando-se as duas expressões acima, obtém-se :

$$[ms^2 + cs + k]X(s) = F(s) + (ms + c)x(0) + m\dot{x}(0) \quad (\text{III.2})$$

onde $x(0)$ e $\dot{x}(0)$ são, respectivamente, o deslocamento e a velocidade iniciais ($t=0$).

Se as condições iniciais forem zero, a eq. (III.2) torna-se :

$$[ms^2 + cs + k]X(s) = F(s) \quad (\text{III.3})$$

A representação da eq. (III.1) no domínio de Laplace (eq. (III.3)) tem a vantagem de converter uma equação diferencial em uma equação algébrica.

Fazendo-se $B(s) = ms^2 + cs + k$, a eq. (III.3) torna-se :

$$B(s)X(s) = F(s) \quad (\text{III.4})$$

onde $F(s)$ = transformada da força $f(t)$ no domínio de Laplace
 $X(s)$ = transformada da resposta do sistema $x(t)$ no domínio de Laplace

Conhecidos $X(s)$ e $F(s)$, $B(s)$ pode ser calculado. Definindo-se $H(s)=1/B(s)$:

$$H(s)=X(s)/F(s) \quad (III.5)$$

A quantidade $H(s)$ é conhecida como função de transferência do sistema.
Retornando-se à eq. (III.3), a função de transferência pode ser escrita como :

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1/m}{s^2 + \left(\frac{c}{m}\right)s + \left(\frac{k}{m}\right)} \quad (III.6)$$

O termo do denominador é chamado de equação característica do sistema, cujas raízes, que representam os pólos do sistema, são :

$$\lambda_{1,2} = -\left(\frac{c}{2m}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)} \quad (III.7)$$

Para dar continuidade ao desenvolvimento, introduz-se agora o conceito de amortecimento crítico e taxa de amortecimento

Define-se amortecimento crítico (c_c) como um amortecimento que faz com que a estrutura, deslocada de sua posição de equilíbrio, retorne a ela sem que haja oscilação. Seu valor pode ser obtido matematicamente igualando-se o radical da equação característica a zero, como mostrado a seguir.

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right) = 0$$

$$\frac{c_c}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_{na}$$

$$c_c = 2m\omega_{na}$$

onde c_c é o amortecimento crítico
 ω_{na} é a frequência natural não-amortecida (em rad/seg))

A razão entre o amortecimento do sistema e o amortecimento crítico é chamada de taxa de amortecimento (ξ_1).

$$\xi_1 = \frac{c}{c_c}$$

As raízes da equação característica (III.7), também chamadas de pólos, podem então ser escritas como :

$$\lambda_{1,2} = (-\xi_1 \pm \sqrt{(\xi_1)^2 - 1}) \omega_{na} \quad (\text{III.8})$$

Em função de suas taxas de amortecimento, os sistemas podem ser classificados como :

- a) - sistema supercrítico : $\xi_1 > 1$
- b) - sistema crítico : $\xi_1 = 1$
- c) - sistema subcrítico : $\xi_1 < 1$

Para a maioria das estruturas reais, a taxa de amortecimento é menor do que 10%, ficando o problema, então, restrito aos casos de amortecimento subcrítico. Nestes casos, as raízes da equação característica são sempre complexas e conjugadas, podendo ser escritas como :

$$\lambda_{1,2} = (-\xi_1 \pm \sqrt{1 - (\xi_1)^2}) \omega_{na} \quad (\text{III.9a})$$

ou, numa forma alternativa :

$$\lambda_{1,2} = \sigma_1 \pm j\omega_a \quad (\text{III.9b})$$

onde $\sigma_1 = -\omega_{na}\xi_1 = \text{fator de amortecimento (em rad / seg)}$

$$\omega_a = \omega_{na} \sqrt{1 - (\xi_1)^2} = \text{freq. natural amortecida}$$

Como neste caso λ_2 é sempre o conjugado complexo de λ_1 , a notação de λ_2 passará a ser λ_1^* .

A função de transferência $H(s)$ (eq. (III.6)) pode ser escrita como um produto de raízes em forma fatorada, como :

$$H(s) = \frac{1/m}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_1^*)} \quad (\text{III.10})$$

onde : $\lambda =$ pólo do sistema $\begin{cases} \lambda_1 = \sigma_1 + j\omega_a \\ \lambda_1^* = \sigma_1 - j\omega_a \end{cases}$

Para discutir o conceito de resíduos, faz-se a expansão em frações parciais da equação da função de transferência (eq. (III.10)) :

$$H(s) = \frac{1/m}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_1^*)} = \frac{R_1}{(s - \lambda_1)} + \frac{R_1^*}{(s - \lambda_1^*)} \quad (\text{III.11})$$

Os resíduos da função de transferência são definidos como sendo as constantes R_1 e R_1^* . Podem-se calcular R_1 e R_1^* multiplicando-se ambos os lados da eq. (III.11) por $(s - \lambda_1)$ e tomando seu valor no limite onde $s = \lambda_1$. Desta forma, obtêm-se :

$$R_1 = \frac{1/m}{j(2\omega_a)}$$

$$R_1^* = -\frac{1/m}{j(2\omega_a)}$$

Em geral, para um sistema de vários graus de liberdade, os resíduos podem assumir valores complexos. Porém, como mostrado, para um sistema de um grau de liberdade eles têm a sua parte real nula.

A função de resposta em frequência (FRF) é avaliada ao longo do eixo da frequência ($j\omega$). Então, a eq. (III.11) com $s=j\omega$, torna-se :

$$H(s)_{s=j\omega} = H(j\omega) = \frac{R_1}{(j\omega - \lambda_1)} + \frac{R_1^*}{(j\omega - \lambda_1^*)} =$$

$$= \frac{R_1}{(j\omega - (\sigma_1 + j\omega_a))} + \frac{R_1^*}{(j\omega - (\sigma_1 - j\omega_a))} =$$

$$= \frac{R_1}{j(\omega - \omega_a) - \sigma_1} + \frac{R_1^*}{j(\omega + \omega_a) - \sigma_1} \quad (\text{III.12})$$

O valor da FRF no ponto da frequência natural amortecida (ω_a) do sistema é :

$$H(j\omega_a) = -\frac{R_1}{\sigma_1} + \frac{R_1^*}{j(2\omega_a) - \sigma_1} \quad (\text{III.13})$$

O segundo termo do lado direito da eq. (III.13) se aproxima de zero à medida que ω_a aumenta. Assim, a eq. (III.13) pode ser aproximada, desprezando-se a contribuição do termo conjugado (segundo termo) :

$$H(j\omega_a) = -\frac{R_1}{\sigma_1}$$

Desta forma, na vizinhança da frequência natural, muitos sistemas de um grau de liberdade são representados por :

$$H(j\omega) = \frac{R_1}{j\omega - \lambda_1} \quad (III.14)$$

A função de resposta de impulso, ou resposta de impulso (IR) de um sistema de um grau de liberdade pode ser determinada a partir da eq. (III.11), considerando-se que as condições iniciais são zero e que $F(s)=1$ para um impulso do sistema. Então :

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{X(s)}{1} = \frac{R_1}{(s - \lambda_1)} + \frac{R_1^*}{(s - \lambda_1^*)} \quad (III.15)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace inversa à eq. (III.15) :

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = R_1 e^{\lambda_1 t} + R_1^* e^{\lambda_1^* t} = \text{Resposta de Impulso} \quad (III.16)$$

Para um sistema linear, invariante com o tempo, de vários (N) graus de liberdade, as expressões da Função de Resposta em Frequência (FRF) e da resposta de impulso (IR) são obtidas através das superposições lineares das expressões dos N graus de liberdade. Sendo assim, podem-se extrapolar as eq. (III.15) e (III.16), e as expressões da FRF e da IR, para um sistema de N graus de liberdade, são expressas respectivamente pelas eq. (III.17) e (III.18) :

$$H_{pq}(j\omega) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{R_{pqr}}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{R_{pqr}^*}{(j\omega - \lambda_r^*)} \right) \quad (III.17)$$

$$h_{pq}(t) = \sum_{r=1}^N \left(R_{pqr} e^{\lambda_r t} + R_{pqr}^* e^{\lambda_r^* t} \right) \quad (III.18)$$

onde : p é o ponto de medição da resposta
 q é o ponto de aplicação da força
 r é o número do modo (total : N modos)
 R_{pqr} é o resíduo do modo r

Cabe destacar que a expressão do resíduo R_{pqr} é :

$$R_{pqr} = -\frac{\phi_{pr} \phi_{qr}}{2m_r \omega_{a,r}} j$$

onde : ϕ_{pr} e ϕ_{qr} são as coordenadas do modo r nos pontos p e q , respectivamente
 m_r é a massa modal associada ao modo r
 $\omega_{a,r}$ é a frequência natural amortecida do modo r

III.3 - MÉTODOS CLÁSSICOS DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS

Dentre os métodos de estimação de parâmetros modais, serão aqui apresentados somente alguns métodos do tipo modelo modal.

Nas estimativas que fazem uso do modelo modal, estabelece-se o modelo paramétrico em termos dos parâmetros modais, sendo os dados de entrada FRFs (no caso de métodos no domínio da frequência) ou IRs (no caso de métodos no domínio do tempo) . Para estas funções, a relação entre os parâmetros modais e as medidas é dada, respectivamente, pelas eq. (III.17) e (III.18), obtidas a partir da transformada de Laplace da equação do movimento, como apresentado no item III.2. Repetindo estas equações e resumindo as principais relações expressas no item anterior, para facilitar a compreensão do texto :

$$H_{pq}(j\omega) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{R_{pqr}}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{R_{pqr}^*}{(j\omega - \lambda_r^*)} \right)$$

$$h_{pq}(t) = \sum_{r=1}^N \left(R_{pqr} e^{\lambda_r t} + R_{pqr}^* e^{\lambda_r^* t} \right)$$

onde : $H_{pq}(j\omega)$ é a função de resposta em frequência entre o grau de liberdade de saída p e o grau de liberdade de entrada q

$h_{pq}(t)$ é a resposta no domínio do tempo, no grau de liberdade p , devido a um impulso unitário imposto no grau de liberdade q

N é o número de modos de vibração que contribuem para a resposta dinâmica da estrutura dentro da faixa do espectro considerada

R_{pqr} é o valor do resíduo referente ao modo r

λ_r é o valor do pólo do modo r

(*) é a designação do conjugado complexo

O valor do pólo pode ser expresso como :

$$\lambda_r = \sigma_r + j\omega_{ar} = -\xi_r \omega_{nar} + j\omega_{nar} \sqrt{1 - (\xi_r)^2} \quad (\text{III.19})$$

onde : ω_{ar} é a frequência natural amortecida do modo r
 σ_r é o fator de amortecimento do modo r
 ω_{nar} é a frequência natural não-amortecida do modo r
 ξ_r é a taxa de amortecimento do modo r

O resíduo é o produto de três termos :

$$R_{pqr} = a_r \phi_{pr} \phi_{qr} \quad (\text{III.20})$$

onde : ϕ_{pr} é a coordenada do modo r no ponto p
 ϕ_{qr} é a coordenada do modo r no ponto q
 a_r é uma constante complexa de escala

A constante de escala é expressa por :

$$a_r = \frac{1}{j(2m_r \omega_{ar})} \quad (\text{III.21})$$

onde : m_r é a massa modal do modo r

A seguir, são descritos alguns métodos de estimação de parâmetros modais.

III.3.1 - MÉTODO DO CÍRCULO AJUSTADO (“CIRCLE-FIT”) [3;16-17]

Este método, no domínio da frequência, foi desenvolvido originalmente para sistemas fracamente amortecidos, sob a hipótese simplificadora de um grau de liberdade (SDOF). Possibilita identificar frequências naturais, taxas de amortecimento e modos de vibração através de estimativa local, com excitação simples (ou seja, apenas um ponto de excitação da estrutura).

A idéia do método é ajustar um círculo no plano complexo, chamado círculo de Nyquist, aos pontos experimentais de uma FRF em torno de um único modo selecionado, e admitir que a contribuição dos demais modos sobre este é constante.

Este método, ao invés de trabalhar com a FRF do tipo receptância (deslocamento / força), usa a FRF do tipo mobilidade (velocidade/força). Designar-se-á, então, a FRF mobilidade por H' , para diferenciá-la da FRF receptância (H). A relação entre elas é [3;16] :

$$H' = (j\omega) H$$

Considerando-se apenas um modo para análise e que a contribuição dos outros modos seja constante, pode-se escrever, na faixa de frequência situada na vizinhança imediata deste modo, a expressão da receptância :

$$H_{pq}(j\omega) = \frac{R_{pqr}}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{R_{pqr}^*}{(j\omega - \lambda_r^*)} + B_{pq} \quad (\text{III.22a})$$

A expressão da mobilidade será :

$$H'_{pq}(j\omega) = j\omega \left(\frac{R_{pqr}}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{R_{pqr}^*}{(j\omega - \lambda_r^*)} + B_{pq} \right) = \frac{R'_{pqr}}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{R'^*_{pqr}}{(j\omega - \lambda_r^*)} + B'_{pq} \quad (\text{III.22b})$$

onde B_{pq} e B'_{pq} são constantes complexas que representam a contribuição dos demais modos sobre o modo analisado

Logicamente, quanto mais afastadas estiverem as frequências naturais adjacentes da frequência natural do modo em questão, menores serão suas influências sobre este modo e, conseqüentemente, a eq. (III.22b) representará com mais precisão a expressão correta, formada pelo somatório da contribuição de vários modos.

Omitindo-se os índices p, q e r, e separando-se o resíduo R'_{pqr} nas suas parcelas real e imaginária, e utilizando-se a eq. (III.19) ($\lambda_r = \sigma_r + j\omega_{ar}$), além de desprezar-se o termo conjugado complexo (ver eq. (III.13) e (III.14)), a eq. (III.22b) torna-se :

$$H'(j\omega) = \frac{R'_{re} + jR'_{im}}{j(\omega - \omega_a) - \sigma} + B'_{pq} \quad (III.23)$$

onde : R'_{re} é a parte real do resíduo
 R'_{im} é a parte imaginária do resíduo

Demonstra-se [3] que os pares de pontos - parte real versus parte imaginária da FRF - representada pela eq. (III.23) formam um círculo (círculo de Nyquist), do qual podem ser obtidos os parâmetros modais que constam desta equação.

A frequência natural é determinada pela maior taxa de variação angular entre dois pontos experimentais consecutivos (com o mesmo incremento de frequência) no plano complexo. Tendo sido determinada a frequência natural (ω_a), a taxa de amortecimento é calculada pela eq. (III.24), cuja dedução encontra-se descrita na referência [3]. Nesta equação, ω_1 é um ponto experimental de frequência menor do que a frequência natural e ω_2 um ponto experimental de frequência maior do que a mesma. A fig. (III.1) indica os ângulos centrais ϕ_1 e ϕ_2 , entre ω_a e ω_1 e entre ω_a e ω_2 , respectivamente. Para cada dois pontos experimentais, um acima e outro abaixo da frequência natural, calcula-se uma estimativa da taxa de amortecimento, após o que, fazendo-se uma média aritmética de todas as estimativas, tem-se a taxa média de amortecimento.

$$\xi = \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{\omega_a (\text{tg}(\phi_1 / 2) + \text{tg}(\phi_2 / 2))} \quad (III.24)$$

O próximo passo é a determinação do resíduo complexo a partir do diâmetro do círculo de Nyquist (d) e do ângulo de fase (α), como indicado nas expressões (III.25) e (III.26) (ver fig. (III.1)).

$$d = -\frac{\sqrt{(R'_{re})^2 + (R'_{im})^2}}{2\sigma} = \frac{\sqrt{(R'_{re})^2 + (R'_{im})^2}}{2\xi\omega_{n,a}} \quad (III.25)$$

$$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{R'_{im}}{R'_{re}}\right) \quad (III.26)$$

O modo de vibração também pode ser estimado, numa etapa posterior do método. Para isto, porém, é necessário, como em qualquer outro método, medir experimentalmente uma outra FRF obtida no "drive point", ou seja, com o ponto de resposta sendo coincidente com o ponto de excitação. Por fim, pode-se determinar a contribuição dos demais modos, como indicado na fig. (III.1).

O método do círculo ajustado é rápido e obtém estimativas locais da frequência natural, taxa de amortecimento e modo de vibração. Sua aplicação, entretanto, como já citado,

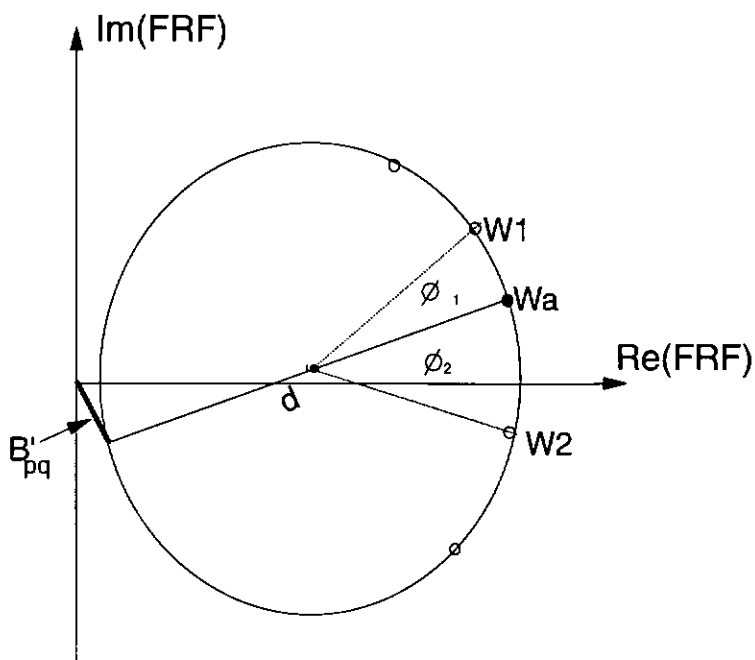


Fig. III.1 - Círculo de Nyquist.

não é aconselhável em casos de estruturas com grande amortecimento e modos muito acoplados. Nestes casos, observa-se que os pontos experimentais representados no plano complexo não mais formarão um círculo, impedindo a aplicação do método com eficiência.

III.3.2 - MÉTODOS DE MÍNIMOS QUADRADOS

Os métodos que estimam parâmetros modais com base em uma minimização de erro, no domínio da frequência, são classificados como MDOF, podendo realizar a estimação de forma local ou global.

Diversos métodos se baseiam em uma filosofia geral de ajuste de curva considerando muitos graus de liberdade. Vários destes métodos procuram estimar os parâmetros modais minimizando uma função-erro, definida como sendo a diferença entre os valores experimentais (medidos) da FRF e os valores teóricos da mesma.

Definindo-se $H_{pq}^{TEO}(j\omega)$ como o valor teórico da FRF (eq. (III.17)) e $H_{pq}^{EXP}(j\omega)$ como seu valor experimental (medido), o erro quadrático pode ser escrito da seguinte forma :

$$E_{pq} = \sum_{f=f_i}^{f_r} (e_{pq}(j\omega_f) \cdot e_{pq}^*(j\omega_f)) \quad (III.27)$$

onde : $e_{pq}(j\omega) = H_{pq}^{EXP}(j\omega) - H_{pq}^{TEO}(j\omega)$

$$e_{pq}^*(j\omega) = H_{pq}^{EXP*}(j\omega) - H_{pq}^{TEO*}(j\omega)$$

$f_j < f < f_f$ é a faixa onde a FRF experimental é determinada

O processo de ajuste de curva deve determinar os valores dos coeficientes desconhecidos $(\lambda_1, R_{pq1}, \lambda_1^*, R_{pq1}^*, \dots, \lambda_N, R_{pqN}, \lambda_N^*, R_{pqN}^*)$ da eq. (III.17) de forma que o erro quadrático seja minimizado. Para isto, deriva-se a expressão (III.27) em relação a cada parâmetro desconhecido e iguala-se a zero, obtendo-se como resultado um sistema de equações com tantas equações quanto incógnitas.

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda_1} = 0 ; \frac{\partial E}{\partial R_{pq1}} = 0 ; \dots ; \frac{\partial E}{\partial R_{pqN}^*} = 0 \quad (III.28)$$

O sistema de equações obtido é não-linear em vários dos coeficientes $(\lambda_1, \dots, \lambda_N^*)$, não podendo ser solucionado diretamente. Neste ponto, os diversos algoritmos existentes apresentam seus procedimentos individuais, utilizando considerações simplificadoras para reduzir o problema computacional a proporções razoáveis.

Nos itens a seguir, algumas destas soluções são apresentadas.

O método desenvolvido neste trabalho, que será apresentado no Capítulo V, realiza a minimização do erro quadrático de uma forma iterativa, através do algoritmo de otimização “Goal Programming” [2].

III.3.2.1 - “NON-LINEAR LEAST SQUARES METHOD” [18-25]

Abordando-se o problema de ajuste sob uma forma global, faz-se um somatório do erro quadrático (eq. (III.27)) em todos os pontos de excitação e resposta, obtendo-se um erro quadrático total :

$$E^{TOTAL} = \sum_{p=1}^{N_0} \sum_{q=1}^{N_i} E_{pq} \quad (III.29)$$

onde : N_0 é o número total de pontos de resposta

N_i é o número total de pontos de excitação

Para que se obtenha uma solução iterativa, realiza-se uma expansão em séries de primeira ordem do modelo modal em torno de uma estimativa inicial.

Chamando $\bar{P} = P_1 \dots P_m \dots P_M = \lambda_1, R_{111}, \dots, R_{N_i N_o N}$:

$$H_{pq}^{TEO}(j\omega) = H_{pq}^{TEO}(j\omega)_{\bar{P}} + \sum_{m=1}^M \left(\frac{\partial H_{pq}^{TEO}(j\omega)}{\partial P_m} \right)_{\bar{P}} \Delta P_m \quad (III.30)$$

Substituindo-se (III.30) em (III.28), obtém-se um sistema de equações linear em ΔP . A partir de um valor inicial \bar{P}_0 para \bar{P} , uma solução iterativa refinada é obtida através de $\bar{P}_n = \bar{P}_{n-1} + \Delta P$.

Os valores iniciais para este processo iterativo podem ser gerados por métodos menos sofisticados de estimação de parâmetros modais, como por exemplo por exemplo o “Circle-Fit”.

III.3.2.2 - “LINEAR LEAST SQUARES METHOD” [25]

Para tornar o sistema de equações a ser solucionado uma função quadrática dos coeficientes desconhecidos, define-se uma nova função-erro.

Inicialmente, escreve-se a eq. (III.17) em forma de frações racionais :

$$H_{pq}^{TEO}(j\omega) = \frac{\sum_{r=1}^N b_r(j\omega)^{2N-r}}{\sum_{r=0}^N a_r(j\omega)^{2N-r}} = \frac{N_{pq}(j\omega)}{D(j\omega)}, \text{ com } a_0 = 1 \quad (III.31)$$

A vantagem de exprimir a FRF sob a forma de frações racionais é que ela é bem mais simples, e mais fácil de ser derivada, do que a eq. (III.17).

Rescrevendo-se o erro definido na eq.(III.27), tem-se :

$$e_{pq}(j\omega) = H_{pq}^{EXP}(j\omega) - \frac{N_{pq}(j\omega)}{D(j\omega)} \quad (III.32)$$

O novo erro é definido multiplicando-se o erro da eq. (III.32) por $D(j\omega)$ [16]. Desta forma, obtém-se :

$$e2_{pq}(j\omega) = e_{pq}(j\omega) \cdot D(j\omega) = H_{pq}^{EXP}(j\omega) \cdot D(j\omega) - N_{pq}(j\omega) \quad (III.33)$$

O erro quadrático total é :

$$E2_{pq} = \sum_{f=f_1}^{f_2} (e2_{pq}(j\omega_f) \cdot e2_{pq}^*(j\omega_f)) \quad (III.34)$$

Como no caso do “Non-linear Least Squares” (item (III.2.2.1)), pode-se realizar um ajuste global, sendo feito, neste caso, um somatório do erro quadrático em todos os pontos de excitação e resposta.

Derivando-se a expressão do erro quadrático total em relação a cada incógnita (a_0, b_1, \dots), obtém-se um sistema linear de equações. Solucionando-se este sistema, obtém-se estas incógnitas, a partir das quais são calculados os parâmetros modais.

Este método tem a vantagem, em relação ao “Non-linear Least Squares”, de não requerer valores iniciais, uma vez que não é um método iterativo. Isto faz com que seja um método bastante rápido de estimação de parâmetros modais. Entretanto, a modificação da função-erro original torna as estimativas menos precisas. Para corrigir esta imprecisão, foi criado um novo método, descrito no item seguinte.

III.3.2.3 - “NEW LINEAR LEAST SQUARES METHOD” [25]

Uma função-erro modificada é definida, como mostra a eq. (III.35), de modo que tenha valor próximo ao da função-erro real e, ao mesmo tempo, o sistema de equações a ser solucionado seja uma função linear dos coeficientes desconhecidos.

$$e3_{pq}(j\omega) = \frac{H_{pq}^{EXP}(j\omega).D(j\omega) - N_{pq}(j\omega)}{D_0(j\omega)} \quad (III.35)$$

Na eq. (III.35), $D_0(j\omega)$ é uma constante que representa o valor inicial de $D(j\omega)$, calculado através das frequências naturais e taxas de amortecimento estimadas por métodos mais simples. O erro quadrático, neste caso, é:

$$E3_{pq} = \sum_{f=0}^F (e3_{pq}(j\omega_f) \cdot e3_{pq}^*(j\omega_f)) \quad (III.36)$$

e pode ser minimizado resolvendo-se um sistema linear de equações.

III.3.3 - “ORTHOGONAL POLYNOMIAL METHOD” [58-65]

O Orthogonal Polynomial Method será descrito minuciosamente no item (IV.2). É um método no domínio da frequência, global, de vários graus de liberdade e que pode ser aplicado tanto para um quanto para vários pontos de excitação.

A partir da equação da FRF escrita em forma de frações racionais (como na eq. (III.31)), são definidos polinômios de ordem crescente que, sendo feitos ortogonais, simplificam consideravelmente o sistema de equações a ser resolvido. Trata-se de um método cuja elaboração matemática sofisticada procura facilitar o problema computacional.

III.3.4 - "IBRAHIM TIME DOMAIN TECHNIQUE" [37-43]

Foi apresentado em 1977 [37] e caracteriza-se por ser um método global no domínio do tempo, de muitos graus de liberdade, com apenas um ponto de excitação.

O método pode utilizar IR ou decaimento livre como dados de entrada. As vantagens e desvantagens de cada uma destas duas funções já foi discutida.

A resposta de vibração livre da estrutura em um ponto p de medição, devido a uma força aplicada no ponto q, no instante de tempo t_i , é :

$$x_{pq}(t_i) = \sum_{r=1}^N (\phi_{pr} e^{\lambda_r t_i} + \phi_{pr}^* e^{\lambda_r^* t_i}) \quad (III.37)$$

onde : ϕ_{pr} é a coordenada do modo r no ponto p
 λ_r é o pólo do modo r do sistema

Após um intervalo de tempo Δt_1 , ou seja, no instante $t_i + \Delta t_1$, a resposta no mesmo ponto p é :

$$x_{pq}(t_i + \Delta t_1) = \sum_{r=1}^N (\phi_{pr} e^{\lambda_r t_i} e^{\lambda_r \Delta t_1} + \phi_{pr}^* e^{\lambda_r^* t_i} e^{\lambda_r^* \Delta t_1}) \quad (III.38)$$

As eq. (III.37) e (III.38) podem ser escritas de outra forma :

$$x_{pq}(t_i) = \sum_{r=1}^{2N} (\phi_{pr} e^{\lambda_r t_i}) \quad (III.39)$$

$$x_{pq}(t_i + \Delta t_1) = \sum_{r=1}^{2N} (\phi_{pr} e^{\lambda_r t_i} e^{\lambda_r \Delta t_1}) \quad (III.40)$$

onde r não representa mais o número do modo, e sim um contador que tem a seguinte característica : para $r=1,3,5,\dots,2N-1$, $\phi_{p(r+1)} = \phi_{pr}^*$ e $\lambda_{p(r+1)} = \lambda_{pr}^*$

É importante distinguir o intervalo fundamental $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ e o intervalo auxiliar Δt_1 , cujo valor geralmente é $3\Delta t$.

A expressão (III.39), correspondendo a todos os diferentes pontos de medição de resposta e de tempo, pode ser colocada em forma de matriz :

$$[\mathbf{X}]_{\text{No} \times \text{Nt}} = [\Phi]_{\text{No} \times 2\text{N}} [\Lambda]_{2\text{N} \times \text{Nt}} \quad (\text{III.41})$$

onde :

$$[\mathbf{X}]_{\text{No} \times \text{Nt}} = \begin{bmatrix} X_{1q}(t_0) & X_{1q}(t_1) & \dots & \dots & X_{1q}(t_{\text{Nt}-1}) & X_{1q}(t_{\text{Nt}}) \\ X_{2q}(t_0) & X_{2q}(t_1) & \dots & \dots & X_{2q}(t_{\text{Nt}-1}) & X_{1q}(t_{\text{Nt}}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ X_{(\text{No}-1)q}(t_0) & X_{(\text{No}-1)q}(t_1) & \dots & \dots & X_{(\text{No}-1)q}(t_{\text{Nt}-1}) & X_{(\text{No}-1)q}(t_{\text{Nt}}) \\ X_{(\text{No})q}(t_0) & X_{(\text{No})q}(t_1) & \dots & \dots & X_{(\text{No})q}(t_{\text{Nt}-1}) & X_{(\text{No})q}(t_{\text{Nt}}) \end{bmatrix}$$

$$[\Phi]_{\text{No} \times 2\text{N}} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{11}^* & \phi_{12} & \dots & \phi_{1(\text{N})} & \phi_{1(\text{N})}^* \\ \phi_{21} & \phi_{21}^* & \phi_{22} & \dots & \phi_{2(\text{N})} & \phi_{2(\text{N})}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi_{(\text{No}-1)1} & \phi_{(\text{No}-1)1}^* & \phi_{(\text{No}-1)2} & \dots & \phi_{(\text{No}-1)\text{N}} & \phi_{(\text{No}-1)\text{N}}^* \\ \phi_{(\text{No})1} & \phi_{(\text{No})1}^* & \phi_{(\text{No})2} & \dots & \phi_{(\text{No})\text{N}} & \phi_{(\text{No})\text{N}}^* \end{bmatrix}$$

$$[\Lambda]_{2\text{N} \times \text{Nt}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t_0} & e^{\lambda_1 t_1} & \dots & \dots & e^{\lambda_1 t_{(\text{Nt}-1)}} & e^{\lambda_1 t_{\text{Nt}}} \\ e^{\lambda_1^* t_0} & e^{\lambda_1^* t_1} & \dots & \dots & e^{\lambda_1^* t_{(\text{Nt}-1)}} & e^{\lambda_1^* t_{\text{Nt}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ e^{\lambda_{\text{N}} t_0} & e^{\lambda_{\text{N}} t_1} & \dots & \dots & e^{\lambda_{\text{N}} t_{(\text{Nt}-1)}} & e^{\lambda_{\text{N}} t_{\text{Nt}}} \\ e^{\lambda_{\text{N}}^* t_0} & e^{\lambda_{\text{N}}^* t_1} & \dots & \dots & e^{\lambda_{\text{N}}^* t_{(\text{Nt}-1)}} & e^{\lambda_{\text{N}}^* t_{\text{Nt}}} \end{bmatrix}$$

onde : No é o número total de pontos de medida

Nt é o número de pontos de medida no tempo

N é o número de modos considerado

$$t_k = t(t_0 + k \Delta t)$$

Procedendo-se analogamente com a eq. (III.40) :

$$[\hat{\mathbf{X}}]_{\text{No} \times \text{Nt}} = [\hat{\Phi}]_{\text{No} \times 2\text{N}} [\Lambda]_{2\text{N} \times \text{Nt}} \quad (\text{III.42})$$

onde :

$$[\hat{X}]_{No \times Nt} = \begin{bmatrix} x_{1q}(t_0 + \Delta t1) & x_{1q}(t_1 + \Delta t1) & \dots & \dots & x_{1q}(t_{Nt-1} + \Delta t1) & x_{1q}(t_{Nt} + \Delta t1) \\ x_{2q}(t_0 + \Delta t1) & x_{2q}(t_1 + \Delta t1) & \dots & \dots & x_{2q}(t_{Nt-1} + \Delta t1) & x_{1q}(t_{Nt} + \Delta t1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{(No-1)q}(t_0 + \Delta t1) & x_{(No-1)q}(t_1 + \Delta t1) & \dots & \dots & x_{(No-1)q}(t_{Nt-1} + \Delta t1) & x_{(No-1)q}(t_{Nt} + \Delta t1) \\ x_{(No)q}(t_0 + \Delta t1) & x_{(No)q}(t_1 + \Delta t1) & \dots & \dots & x_{(No)q}(t_{Nt-1} + \Delta t1) & x_{(No)q}(t_{Nt} + \Delta t1) \end{bmatrix}$$

$$[\hat{\Phi}]_{No \times 2N} = \begin{bmatrix} \phi_{11}e^{\lambda_1 \Delta t1} & \phi_{11}^*e^{\lambda_1^* \Delta t1} & \phi_{12}e^{\lambda_2 \Delta t1} & \dots & \phi_{1(N)}e^{\lambda_N \Delta t1} & \phi_{1(N)}^*e^{\lambda_N^* \Delta t1} \\ \phi_{21}e^{\lambda_1 \Delta t1} & \phi_{21}^*e^{\lambda_1^* \Delta t1} & \phi_{22}e^{\lambda_2 \Delta t1} & \dots & \phi_{2(N)}e^{\lambda_N \Delta t1} & \phi_{2(N)}^*e^{\lambda_N^* \Delta t1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi_{(No-1)1}e^{\lambda_1 \Delta t1} & \phi_{(No-1)1}^*e^{\lambda_1^* \Delta t1} & \phi_{(No-1)2}e^{\lambda_2 \Delta t1} & \dots & \phi_{(No-1)N}e^{\lambda_N \Delta t1} & \phi_{(No-1)N}^*e^{\lambda_N^* \Delta t1} \\ \phi_{(No)1}e^{\lambda_1 \Delta t1} & \phi_{(No)1}^*e^{\lambda_1^* \Delta t1} & \phi_{(No)2} & \dots & \phi_{(No)N}e^{\lambda_N \Delta t1} & \phi_{(No)N}^*e^{\lambda_N^* \Delta t1} \end{bmatrix}$$

$$[\Lambda]_{2N \times Nt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t_0} & e^{\lambda_1 t_1} & \dots & \dots & e^{\lambda_1 t_{(Nt-1)}} & e^{\lambda_1 t_{Nt}} \\ e^{\lambda_1^* t_0} & e^{\lambda_1^* t_1} & \dots & \dots & e^{\lambda_1^* t_{(Nt-1)}} & e^{\lambda_1^* t_{Nt}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ e^{\lambda_N t_0} & e^{\lambda_N t_1} & \dots & \dots & e^{\lambda_N t_{(Nt-1)}} & e^{\lambda_N t_{Nt}} \\ e^{\lambda_N^* t_0} & e^{\lambda_N^* t_1} & \dots & \dots & e^{\lambda_N^* t_{(Nt-1)}} & e^{\lambda_N^* t_{Nt}} \end{bmatrix}$$

Eliminando-se a matriz $[A]$ entre as expressões (III.41) e (III.41), obtém-se :

$$[A][X] = [\hat{X}] \quad (III.43)$$

onde : $[A] = [\hat{\Phi}][\Phi]^{-1} \quad (III.44)$

A eq. (III.44) pode ser escrita como :

$$[A][\Phi] = [\hat{\Phi}] \quad (III.45)$$

Como as matrizes $[X]$ e $[\hat{X}]$ foram obtidas experimentalmente, a matriz $[A]$ pode ser calculada resolvendo-se o sistema de equações (III.43). Para tal, utilizando-se o método dos mínimos quadrados, duas soluções são possíveis para $[A]$:

$$[A] = [\hat{X}X^t][XX^t]^{-1} \quad (III.46)$$

ou

$$[A] = [\hat{X}\hat{X}^t][X\hat{X}^t]^{-1}$$

Uma combinação destas duas soluções, chamada de duplo mínimos quadrados, contém menores erros na identificação das taxas de amortecimento, conforme pode ser demonstrado. Esta solução é :

$$[A] = \frac{1}{2} \left([\hat{X}X^t][XX^t]^{-1} + [\hat{X}\hat{X}^t][X\hat{X}^t]^{-1} \right) \quad (\text{III.47})$$

Após o cálculo de $[A]$, recai-se em um problema de auto-valor, como mostra-se a seguir.

Comparando-se as matrizes $[\Phi]$ e $[\hat{\Phi}]$, definidas nas eq. (III.41) e (III.42), verifica-se a seguinte relação entre suas colunas :

$$\{\hat{\phi}_r\} = e^{\lambda_r \Delta t} \{\phi_r\} \quad (\text{III.48})$$

Tomando-se uma coluna da eq. (III.45) e aplicando-se a relação expressa em (III.48), obtém-se :

$$[A]\{\phi_r\} = e^{\lambda_r \Delta t} \{\phi_r\} \quad (\text{III.49})$$

Apesar de a matriz $[A]$ ser real, o problema de auto-valor expresso pela eq. (III.49) conduz a auto-vetores e auto-valores complexos, onde os primeiros são os modos de vibração da estrutura e os segundos contêm as informações para o cálculo das frequências naturais e das taxas de amortecimento. Como os auto-valores do problema expresso pela eq. (III.49) são complexos e conjugados, o número de pontos de medição de resposta (N_o) deve ser igual a duas vezes o número de modos (N) a serem identificados. Esta relação é definida devido à dimensão da matriz $[A]$ ser de ordem ($N_o \times N_o$) e o número de auto-vetores identificados no problema ser igual a ($2N$).

Os auto-valores da matriz $[A]$ são os valores particulares de $e^{\lambda_r \Delta t}$, onde λ'_r é um pólo do sistema, cuja expressão (ver item (III.2)) é :

$$\lambda'_r = -\omega_{na,r} \xi_r + j\omega_{a,r} \quad (\text{III.50})$$

o que leva à seguinte equação para um dado auto-valor :

$$e^{\lambda'_r \Delta t} = e^{-\omega_{na,r} \xi_r \Delta t + j\omega_{a,r} \Delta t} \quad (\text{III.51})$$

Assim, seja $\psi_r = a_r + jb_r$ um auto-valor obtido da solução do problema expresso pela eq. (III.49). Uma outra maneira de se representar este auto-valor, lembrando que ele é um número complexo, é :

$$\psi_r = \sqrt{a_r^2 + b_r^2} e^{j \arctg(b_r/a_r)} \quad (\text{III.52})$$

Aplicando-se o logaritmo neperiano às eq. (III.51) e (III.52), e igualando-se as duas expressões, tem-se :

$$-\omega_{na,r}\xi_r\Delta t1 + j\omega_{a,r}\Delta t1 = \frac{1}{2}\ln(a_r^2 + b_r^2) + j\arctg\left(\frac{a_r}{b_r}\right) \quad (III.53)$$

de onde se chega a :

$$\omega_{na,r}\xi_r = -\frac{\ln(a_r^2 + b_r^2)}{2\Delta t1} \quad (III.54)$$

$$\omega_{a,r} = \frac{\arctg(b_r / a_r)}{\Delta t1}$$

III.3.5 - “LEAST SQUARES COMPLEX EXPONENTIAL” [26-28]

É um método bastante popular, no domínio do tempo, global, de muitos graus de liberdade e que pode ser empregado em casos de excitação múltipla, caso em que passa a ser denominado de “Polyreference”. Sua descrição detalhada será feita no item (IV.1)

Segundo a literatura técnica [68], o método apresenta bons resultados para estruturas com alta densidade modal. Sua principal deficiência aparece em casos de estruturas com taxas de amortecimento elevadas (acima de 5%).

III.4 - COMENTÁRIOS GERAIS SOBRE A APLICAÇÃO DOS MÉTODOS

Em se tratando de estruturas civis, que, em sua maioria, se caracterizam por apresentar modos separados e amortecimento baixo, torna-se viável, em geral, a utilização de métodos de um grau de liberdade (SDOF) para a estimação modal. A exceção verifica-se em estruturas do tipo cascas, onde a elevada densidade modal requer o uso de métodos de muitos graus de liberdade (MDOF).

Estimativas globais das frequências naturais e taxas de amortecimento tendem a reduzir erros, como os devidos à presença de ruídos nas FRFs. Os métodos locais, entretanto, requerem um número menor de equipamentos, como sensores.

Quanto ao número de pontos de excitação, os casos de “multi-input” excitam com maior intensidade os modos de frequências naturais mais altas. Porém, sua aplicação em estruturas civis mostra-se bastante difícil, sobretudo em ensaios realizados no campo, ficando sua utilização praticamente restrita a ensaios em laboratório.

Se por um lado o processamento de sinais no tempo do tipo decaimento demanda um esforço menor, sua utilização direta não permite a determinação dos modos de vibração normalizados. Trabalhando-se com IRs ou FRFs (que possibilitam a estimação dos modos normalizados), o custo computacional será maior, o que geralmente é compensado pelo fato de haver redução de erros no processamento dos sinais, graças às médias de diferentes amostras que são realizadas durante o cálculo destas funções.

Em casos em que a estrutura apresenta não linearidade acentuada, os métodos de estimação modal no domínio da frequência ficam comprometidos, já que uma das premissas básicas para o cálculo da FRF é a linearidade da estrutura, bem como a repetibilidade dos ensaios. Assim, estes casos deverão ser analisados por métodos no domínio do tempo, utilizando a função de decaimento livre.

A grande maioria das estruturas civis apresenta amortecimento que pode ser considerado proporcional às matrizes de massa e rigidez. Conseqüentemente, os métodos que estimam apenas modos reais não prejudicam a análise.

Em casos nos quais os modos de vibração são bem separados e os amortecimentos não são altos, pode-se afirmar que não haverá grandes diferenças entre os resultados dos diversos métodos, desde os mais simples até os mais sofisticados.

CAPÍTULO IV

MÉTODOS CLÁSSICOS DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS UTILIZADOS

Dentre os diversos métodos pesquisados, dois foram escolhidos para maior aprofundamento, um no domínio do tempo (“Least Squares Complex Exponential Method”) e um no domínio da Frequência (“Orthogonal Polynomial Method”). A escolha foi baseada em ampla consulta a artigos e teses sobre o assunto, de que se concluiu que ambos os métodos apresentam boa acurácia, mesmo em casos complexos. Como a idéia original era implementar estes dois métodos, este capítulo contém uma descrição detalhada sobre eles. Posteriormente, conseguiram-se rotinas, já implementadas, de cada um deles. Com isso, decidiu-se por concentrar esforços no desenvolvimento do novo método e as rotinas prontas foram utilizadas com algumas mudanças como será mostrado nos itens IV.1.2 e IV.2.5. De qualquer forma, a compreensão do procedimento de cada um dos dois métodos é importante, levando ao entendimento sobre suas vantagens e limitações. No Capítulo VI, ambos são usados nas simulações numéricas e experimentais, possibilitando uma comparação com os resultados obtidos através do método desenvolvido, baseado no “Goal Programming”.

Segundo a literatura técnica [14], métodos no domínio do tempo fornecem resultados mais precisos em casos de faixa ampla do espectro, contendo vários modos. Entretanto, estes métodos não são apropriados quando se deparam com sistemas com amortecimento alto (acima de 5%). Já os métodos no domínio da frequência estimam os parâmetros modais com mais precisão em casos de faixa estreita do espectro, sendo também mais eficientes, em relação aos métodos no domínio do tempo, quando a estrutura apresenta amortecimento alto.

Os métodos são aqui descritos para o caso de apenas um ponto de excitação da estrutura (single input).

IV.1 - “LEAST SQUARES COMPLEX EXPONENTIAL METHOD” [26-28]

O método de estimação de parâmetros modais denominado “Least Squares Complex Exponential” é classificado como um método global, no domínio do tempo, de vários graus de

liberdade e de modelo modal, sendo um dos mais populares hoje em dia. Neste trabalho, o método será desenvolvido para apenas um ponto de excitação. Sua extensão para o caso de vários pontos de excitação é conhecida como “Polyreference”.

Iniciar-se-á com a equação da função de resposta de impulso e, passo a passo, desenvolver-se-á por completo a técnica.

IV.1.1 - EQUAÇÕES GERAIS

Esta técnica estima frequências naturais, amortecimentos modais e resíduos a partir de dados de vibração livre ou de Resposta de Impulso (IR). O uso do sinal de vibração livre não permite a obtenção dos modos de vibração normalizados, uma vez que não se tem medição da força aplicada à estrutura, impedindo um ajuste deste tipo de parâmetro modal. Utilizando-se a IR, este ajuste pode ser realizado.

A Resposta de Impulso pode ser expressa como uma função oscilatória cuja amplitude decai devido ao amortecimento do sistema, e sua expressão, deduzida no Capítulo III, é :

$$h_{pq}(t) = \sum_{r=1}^N (R_{pqr} e^{\lambda_r t} + R_{pqr}^* e^{\lambda_r^* t}) \quad (IV.1)$$

Outra forma de se expressar a eq. (IV.1) é a seguinte :

$$h_{pq}(t) = \sum_{r=1}^{2N} R_{pqr} e^{\lambda_r t} \quad (IV.1b)$$

onde r não mais representa o número do modo de vibração e sim um índice contador com a seguinte característica : para $r=1,3,5,\dots,2N-1$; $R_{pq(r+1)} = R_{pqr}^*$ e $\lambda_{r+1} = \lambda_r^*$

Como foram usados dados amostrados, $h(t)$ não é uma função contínua, e sim discreta, o que modifica a eq. (IV.1b) :

$$h_{pq}(t_k) = \sum_{r=1}^{2N} R_{pqr} e^{\lambda_r t_k} \quad (\text{IV.2})$$

onde :

$$t_k = k \Delta t$$

Δt = incremento de tempo

k = valor inteiro

$$e^{\lambda_r t_k} = e^{\lambda_r k \Delta t} = z_r^k, \text{ onde : } z_r = e^{\lambda_r \Delta t}$$

Por substituição, a eq. (IV.2) transforma-se em :

$$h_{pq}(t_k) = \sum_{r=1}^{2N} R_{pqr} z_r^k \quad (\text{IV.3})$$

Considere-se agora a equação diferencial do movimento, para um sistema de um grau de liberdade, cuja forma é :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (\text{IV.4})$$

A transformada de Laplace desta equação, para condições iniciais iguais a zero, é :

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = F(s) \quad (\text{IV.5})$$

onde X(s) e F(s) são, respectivamente, as transformadas de Laplace de x(t) e f(t).

A expressão $(ms^2 + cs + k)$ é a equação característica, cujas raízes são os pólos λ .

Analogamente, para um sistema de N graus de liberdade, a equação característica será da seguinte forma :

$$b_{2N}s^{2N} + b_{2N-1}s^{2N-1} + \dots + b_1s + b_0 = 0 \quad (\text{IV.6})$$

Uma vez que os dados para estimação modal são amostrados em valores discretos de tempo, foi desenvolvida uma transformação similar à transformada de Laplace para sistemas

discretos no tempo : a transformada Z , onde $z_i = e^{s_i \Delta t}$, que define o domínio Z [15;28]. Pode ser demonstrado que, no domínio Z , existe um polinômio que tem exatamente as mesmas raízes que a equação característica no domínio de Laplace (eq.(IV.6)). Este polinômio é da forma :

$$a_{2N}z^{2N} + a_{2N-1}z^{2N-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0 \quad (\text{IV.7})$$

Então, uma equação similar à eq. (IV.5) pode ser escrita no domínio Z , da seguinte forma :

$$(a_{2N}z^{2N} + a_{2N-1}z^{2N-1} + \dots + a_1z + a_0)X(z) / F(z) = 1 \quad (\text{IV.8})$$

Dividindo-se ambos os lados da equação (IV.8) por z^{2N} , obtém-se :

$$(a_{2N} + a_{2N-1}z^{-1} + \dots + a_1z^{-2N+1} + a_0z^{-2N})X(z) / F(z) = \frac{1}{z^{2N}} \quad (\text{IV.9})$$

Aplicando-se agora o teorema básico da transformada Z , [$Z(f(t - k\Delta t)) = z^{-k}F(z)$], à eq. (IV.9), obtém-se :

$$a_{2N}h(t) + a_{2N-1}h(t - \Delta t) + \dots + a_0h(t - 2N\Delta t) = \delta(t - 2N\Delta t) \quad (\text{IV.10})$$

Restringindo $t \geq 2N\Delta t$, a eq. (IV.10) torna-se :

$$a_{2N}h(t) + a_{2N-1}h(t - \Delta t) + \dots + a_0h(t - 2N\Delta t) = 0 \quad (\text{IV.11})$$

Outra forma de representar a eq. (IV.11) é :

$$\sum_{s=0}^{2N} a_s h(t - (2N - s)\Delta t) = 0 \quad (\text{IV.12})$$

A eq. (IV.11) (ou (IV.12)) é a equação fundamental em que se baseia o método “Least Squares Complex Exponential”. Sua aplicação a diversos trechos dos dados de decaimento livre ou da função de impulso medidos e aos vários pontos de resposta define o método.

Chamando-se $h(t)$ de h_{n+0} e $h(t - k\Delta t)$ de h_{n+k} , rescreve-se a eq. (IV.12) :

$$\sum_{s=0}^{2N} a_s h_{n+2N-s} = 0 \quad (\text{IV.13})$$

Uma vez que a_{2N} é o coeficiente de maior ordem (ver eq. (IV.8)), prova-se [15] que pode-se considerá-lo como sendo 1, sem perda de generalidade. Assim :

$$\sum_{s=0}^{2N-1} a_s h_{n+2N-s} = -h_n \quad (\text{IV.14})$$

Adotando-se a representação de uma $h(t)$ particular por h_{pq} (p = ponto de resposta e q =ponto de excitação) :

$$\sum_{s=0}^{2N-1} a_s h_{pq,n+2N-s} = -h_{pq,n} \quad (\text{IV.15})$$

Para cada resposta p , escrevê-se um grupo de equações variando n de $(X-1)$ a 0, onde X é um número grande arbitrário, que define o número total de trechos da função no tempo que serão considerados. Lembrando que o método está sendo desenvolvido para apenas um ponto de entrada ("single-input"), tem-se $q=1$. Todas estas equações podem ser representadas como :

$$[B]_{1 \times 2N} [T_1, T_2, \dots, T_p, \dots, T_{No}]_{2N \times (NoX)} = [G_1, G_2, \dots, G_{No}]_{1 \times (NoX)} \quad (\text{IV.16})$$

onde : No = número de pontos de resposta

$$[B] = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{2N-1}]_{1 \times 2N}$$

$$[T_p] = \begin{bmatrix} h_{p1,(X+2N-1)} & h_{p1,(X+2N-2)} & \dots & \dots & h_{p1,(2N+1)} & h_{p1,2N} \\ h_{p1,(X+2N-2)} & h_{p1,(X+2N-3)} & \dots & \dots & h_{p1,2N} & h_{p1,(2N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{p1,(X+1)} & h_{p1,X} & \dots & \dots & h_{pq,3} & h_{pq,2} \\ h_{p1,X} & h_{p1,(X-1)} & \dots & \dots & h_{pq,2} & h_{pq,1} \end{bmatrix}_{2N \times X}$$

$$[G_p] = [h_{p1,(X-1)} \quad h_{p1,(X-2)} \quad \dots \quad h_{p1,1} \quad h_{p1,0}]_{1 \times X}$$

Deve-se notar que a primeira linha da submatriz T_p é a porção inicial da função de Resposta de Impulso (ou decaimento livre). A segunda linha é a mesma função, deslocada de um intervalo de tempo Δt , e assim por diante, como mostra a fig. (IV.1).

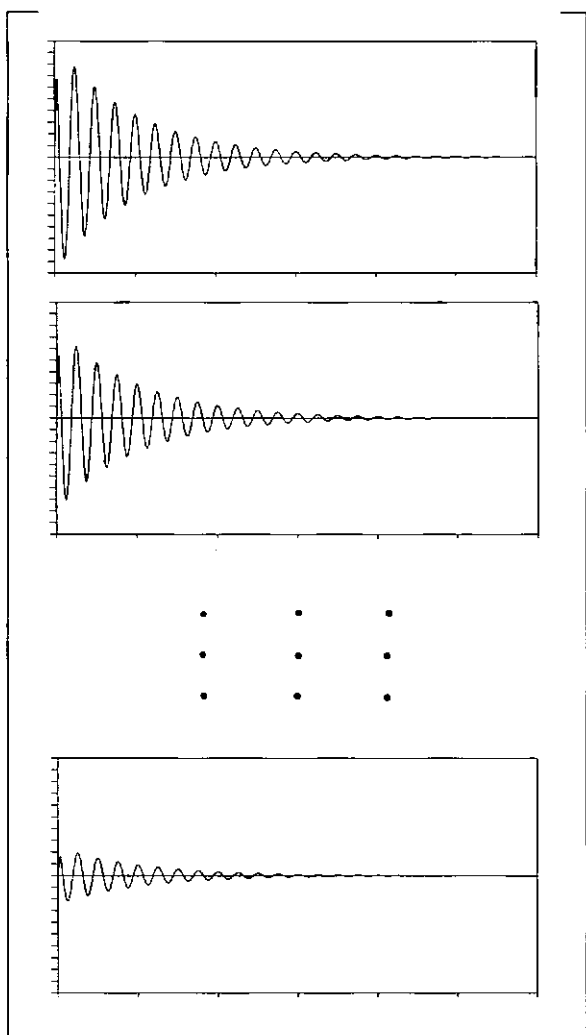


Fig. IV.1 - Representação Simbólica da Matriz T_p .

Com as definições abaixo, pode-se simplificar a notação da eq. (IV.16) :

$$[B] = [a_0, a_1, \dots, a_{2N-1}]_{1 \times 2N}$$

$$[T] = [T_1, T_2, \dots, T_{No}]_{2N \times (No \times X)}$$

$$[G] = [G_1, G_2, \dots, G_{No}]_{1 \times (No \times X)}$$

Desta forma, a eq. (IV.16) torna-se :

$$[B][T] = [G] \tag{IV.17}$$

Na eq. (IV.17), há $2N$ incógnitas e o número de equações é $((No) \times (X))$. Escolhendo X (que, como já citado, define o número de trechos no tempo considerados) igual a $(2N/No)$, haverá exatamente o mesmo número de equações e incógnitas. Consequentemente, existirá uma única solução para os coeficientes das matrizes $[B]$, uma vez que as matrizes são consistentes. Porém, é aconselhável tomar X maior do que $(2N/No)$, tornando a eq. (IV.17) um sistema super-determinado. O sistema seria então solucionado pelo método dos mínimos quadrados, apresentando a vantagem de reduzir os erros randômicos contidos nos dados.

No entanto, a escolha de um X muito grande traz algumas desvantagens. Primeiramente, sob o ponto de vista computacional não é vantajoso ter um valor de X muito grande. Em segundo, os valores na história do tempo diminuem para valores grandes de X , já que os dados são uma função de decaimento (tanto a função de Resposta de Impulso quanto o decaimento livre). Como resultado, a relação ruído/sinal aumenta. Finalmente, o erro de truncamento, devido à FFT inversa, aumenta no final do bloco de dados.

A solução de mínimos quadrados da eq. (IV.17) pode ser obtida a partir da equação normal :

$$[B][T][T]^t = [G][T]^t \tag{IV.18}$$

$$[B] \left(\sum_{p=1}^{No} [T_p][T_p]^t \right) = - \sum_{p=1}^{No} [G_p][T_p]^t$$

Os coeficientes incógnitos podem ser obtidos a partir da eq. (IV.18) através de uma técnica de solução simultânea de equações como a eliminação de Gauss.

De posse dos valores dos coeficientes de $[B]$, calculam-se as raízes da equação abaixo, que representa a eq. (IV.7) com o coeficiente a_{2N} igual a um.

$$z^{2N} + a_{2N-1}z^{2N-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0 \quad (IV.19)$$

A partir das raízes, são calculados os pólos do sistema. Para o cálculo das raízes, que ocorrem em pares conjugados, utiliza-se um método numérico, como por exemplo o Método de Muller [9]. Com os pólos, obtêm-se as frequências naturais e os amortecimentos modais, como mostrado a seguir.

$$z_r = e^{\lambda_r \Delta t} = e^{(\sigma_r + j\omega_{a,r})\Delta t} \quad (IV.20a)$$

onde z_r é uma raiz (pólo) da eq. (IV.19)

Tomando-se o logaritmo de ambos os lados da eq. (IV.20a), tem-se :

$$\ln(z_r) = \sigma_r \Delta t + j(\omega_{a,r} \Delta t) \quad (IV.20b)$$

Aplicando-se a relação abaixo, lembrando que z_r é um número complexo :

$$z_r = z_{r,real} + jz_{r,imag} = |z_r| e^{j \arctg\left(\frac{z_{r,imag}}{z_{r,real}}\right)} \quad (IV.21a)$$

$$\text{onde : } |z_r| = \sqrt{z_{r,real}^2 + z_{r,imag}^2}$$

Tomando-se o logaritmo neperiano de ambos os lados da eq. (IV.21a), tem-se :

$$\ln(z_r) = \frac{1}{2} \ln(z_{r,real}^2 + z_{r,imag}^2) + j \arctg\left(\frac{z_{r,imag}}{z_{r,real}}\right) \quad (IV.21b)$$

Igualando-se (IV.20) a (IV.21), tem-se :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{a,r} = \omega_{na,r} \sqrt{1 - (\xi_r)^2} = \frac{\arctg\left(\frac{z_{r,imag}}{z_{r,real}}\right)}{\Delta t} \\ \sigma_r = -\omega_{na,r} \xi_r = \frac{\ln(z_{r,real}^2 + z_{r,imag}^2)}{\Delta t} \end{array} \right.$$

A última etapa do método é o cálculo dos resíduos. Rescrevendo-se a eq. (IV.3) :

$$h_{pq}(t_k) = \sum_{r=1}^{2N} R_{pqr} z_r^k = \begin{bmatrix} R_{pq1} & R_{pq2} & \dots & R_{pq(2N)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{2N} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} R_{pqr} \end{bmatrix}_{(1 \times 2N)} \{z_r\}_{(2N \times 1)}^k \quad (IV.22)$$

Como tem-se apenas um ponto de excitação, novamente escreve-se 1 no lugar de q. Aplicando-se a eq. (IV.22) aos vários pontos de tempo (ou seja, variando-se k), obtêm-se:

$$\begin{array}{l} h_{p1,0} = h_{p1}(t_0) = \begin{bmatrix} R_{p1r} \end{bmatrix} \{z_r\}^0 \\ h_{p1,1} = h_{p1}(t_1) = \begin{bmatrix} R_{p1r} \end{bmatrix} \{z_r\}^1 \\ \vdots \\ h_{p1,c} = h_{p1}(t_c) = \begin{bmatrix} R_{p1r} \end{bmatrix} \{z_r\}^c \end{array} \quad (IV.23)$$

onde c = inteiro positivo arbitrário

Pode-se tomar para valor de c o número total de pontos medidos no tempo. O sistema de eq. (IV.23) pode ser representado em forma matricial como :

$$\begin{Bmatrix} h_{p1,0} \\ h_{p1,1} \\ \vdots \\ h_{p1,c} \end{Bmatrix}_{((c+1) \times 1)} = \begin{Bmatrix} \begin{bmatrix} z_r \end{bmatrix}^0 \\ \begin{bmatrix} z_r \end{bmatrix}^1 \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} z_r \end{bmatrix}^c \end{Bmatrix}_{((c+1) \times (2N))} \{R_{p1r}\}_{((2N) \times 1)} \quad (IV.24)$$

Na eq. (IV.24), o vetor de resíduos $\{R_{pir}\}$ é a incógnita. Resolve-se, então, esta equação por uma técnica de solução simultânea de equação lineares, gerando estimativas dos resíduos por mínimos quadrados.

IV.1.2 - IMPLEMENTAÇÃO

O livro “Digital Spectral Analysis With Applications”, de Marple [69], apresenta o programa em FORTRAN que realiza a estimação de parâmetros através do “Least Squares Complex Exponential”, também chamado de Método de Prony. Porém, o programa permite a utilização de apenas uma IR, ou seja, sua estimação é do tipo local. Para utilizá-lo no caso de diversas IRs, foi feito um artifício: cada IR foi analisada separadamente e os parâmetros globais (frequências naturais e taxas de amortecimento) foram tomados como a média dos resultados obtidos para cada IR. Em seguida, o programa era utilizado novamente, para cada IR, para a obtenção dos resíduos. Na verdade, o procedimento adotado não é exatamente global, pois este calcula frequências naturais e taxas de amortecimento como mostrado no item anterior. Entretanto, a média dos valores de um parâmetro global, valores estes provenientes da análise separada de cada uma das diversas funções (IRs) envolvidas, muito se aproxima de seu valor quando calculado de forma realmente global. Outra pequena modificação no programa foi quanto à saída dos resultados dos parâmetros modais, de forma que o arquivo de impressão apresentasse diretamente as frequências naturais, taxas de amortecimento e resíduos estimados a partir de IRs resultantes da FFT inversa de FRFs do tipo inércia.

IV.2 - "ORTHOGONAL POLYNOMIAL METHOD" [59-66]

O "Orthogonal Polynomial Method" foi idealizado por Richardson e Formenti, em 1982 [59]. Posteriormente, diversas modificações foram propostas para o método. É um método global, no domínio da frequência, de vários graus de liberdade, podendo ter um ou mais pontos de excitação. Uma limitação do método é que, para que apresente eficiência nas estimativas dos parâmetros modais, deve-se trabalhar com faixas estreitas do espectro de frequência, com poucos modos.

IV.2.1 - FORMULAÇÃO GERAL DO MODELO

A equação que exprime a função de resposta em frequência em termos dos parâmetros modais é a seguinte (ver Capítulo III) :

$$H_{pq}(j\omega) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{R_{pqr}}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{R_{pqr}^*}{(j\omega - \lambda_r^*)} \right) \quad (\text{IV.25})$$

A eq. (IV.25) pode ser escrita em forma de frações racionais :

$$H_{pq}(j\omega) = \frac{\sum_{r=1}^{2N} b'_{r(pq)} (j\omega)^{2N-r}}{\sum_{r=0}^{2N} a'_r (j\omega)^{2N-r}} \quad ; \quad \text{com } a'_0 = 1 \quad (\text{IV.26})$$

Na eq. (IV.26), o numerador é dependente dos pontos de excitação e resposta, enquanto o denominador não o é. Isto porque as constantes b'_r são funções dos parâmetros locais (resíduos) e globais (pólos, que contêm as informações de frequências naturais e taxas de amortecimento), enquanto as constantes a'_r dependem apenas dos parâmetros globais (pólos). Assim, realizando-se uma análise global, pode-se escrever a expressão de uma linha da matriz de FRF, correspondente a todos os pontos de resposta e ao ponto q de excitação :

$$\left((j\omega)^{2N} + a_1'(j\omega)^{2N-1} + \dots + a_{2N-1}'(j\omega) + a_{2N}' \right) \lfloor H(j\omega) \rfloor_q = \lfloor B_1'(j\omega)^{2N-1} + B_2'(j\omega)^{2N-2} + \dots + B_{2N}' \rfloor \lfloor I \rfloor \quad (\text{IV.27})$$

onde :

$\lfloor H(j\omega) \rfloor_q$ é um vetor-linha de dimensão N_0 (número de pontos de resposta), contendo as FRF's entre todos os pontos de resposta e a excitação no ponto q .

$\lfloor B_r' \rfloor$ é um vetor-linha de dimensão N_0 contendo os coeficientes polinomiais do numerador da eq. (IV.26) para os diferentes pontos de resposta.

De posse das FRF's medidas do vetor-linha $\lfloor H(j\omega) \rfloor_q$, as incógnitas da eq. (IV.27) são os escalares a_r' e os vetores-linha $\lfloor B_r' \rfloor$. A eq. (IV.27) pode ser representada através de uma formulação matricial convencional, descrevendo as relações lineares entre as incógnitas :

$$\lfloor X' \rfloor \lfloor A' \rfloor = \lfloor Y' \rfloor \quad (\text{IV.28})$$

onde :

$$\lfloor X' \rfloor = \lfloor a_1' \quad \dots \quad a_{2N}' \quad B_1' \quad \dots \quad B_{2N}' \rfloor$$

$$\lfloor A' \rfloor = \begin{bmatrix} (j\omega)^{2N-1} \lfloor H(j\omega) \rfloor_q \\ \vdots \\ \lfloor H(j\omega) \rfloor_q \\ -(j\omega)^{2N-1} \lfloor I \rfloor \\ \vdots \\ -\lfloor I \rfloor \end{bmatrix}$$

$$\lfloor Y' \rfloor = -(j\omega)^{2N} \lfloor H(j\omega) \rfloor_q$$

Para encontrar os coeficientes a_r' e $\lfloor B_r' \rfloor$, o sistema de equações (IV.28), em todos os pontos de frequência medidos $j\omega_k$, $k=1,2,\dots, N_f$, deve ser solucionado. Considerando-se que o número de pontos de frequência N_f é maior do que o número de incógnitas, este sistema de equações é super-determinado e, em geral, inconsistente devido à presença de erros de

medida. Uma estimativa de mínimos quadrados pode ser feita usando uma técnica padrão, já que a eq. (IV.28) é expressão de um sistema linear de equações nas incógnitas.

Estimados a_r' e $[B_r']$, os parâmetros modais da estrutura são obtidos através de uma expansão em frações parciais, como expresso na eq. (IV.26). Para isto, é necessário calcular numericamente as raízes desta mesma equação. Entretanto, a eq. (IV.28) é muito mal condicionada e geralmente impossível, ou muito difícil, de ser resolvida. Para melhorar seu condicionamento, a eq. (IV.28) é reformulada em termos de polinômios ortogonais, como mostrado a seguir.

Sejam $\phi_r(j\omega)$ e $\theta_r(j\omega)$ representações de polinômios de ordem r :

$$\phi_r(j\omega) = d_r(j\omega)^r + d_{r-1}(j\omega)^{r-1} + \dots + d_0 \quad (IV.29)$$

$$\theta_r(j\omega) = c_r(j\omega)^r + c_{r-1}(j\omega)^{r-1} + \dots + c_0$$

onde : d_i e c_i são constantes

Define-se então um novo sistema de equações, cujas incógnitas, a_r e $[B_r]$, são diferentes das incógnitas da eq. (IV.28), a_r' e $[B_r']$. A posterior comparação da eq. (IV.28) com a eq. (IV.30) estabelece uma relação entre estes dois grupos de incógnitas, conforme será mostrado com mais clareza no item IV.2.2. Esta modificação no sistema de equações visa facilitar a determinação das constantes a_r' e $[B_r']$, uma vez que a resolução da eq. (IV.28), como já dito, é bastante difícil. O problema, como se perceberá mais adiante, será bastante simplificado e, calculados a_r e $[B_r]$, determinam-se as incógnitas iniciais a_r' e $[B_r']$.

O novo sistema de equações torna-se :

$$[X][A] = [Y] \quad (IV.30)$$

onde :

$$[X] = [a_1 \quad \dots \quad a_{2N} \quad B_1 \quad \dots \quad B_{2N}]$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \theta_{2N-1} [H(j\omega)]_q \\ \vdots \\ \theta_0 [H(j\omega)]_q \\ -\phi_{2N-1} [I] \\ \vdots \\ -\phi_0 [I] \end{bmatrix}$$

$$[Y] = -\theta_{2N} [H(j\omega)]_q$$

Calculados os novos coeficientes, a_r e $[B_r]$, os parâmetros do modelo original, a_r' e $[B_r']$, podem ser determinados. Para obter a_r e $[B_r]$, o grupo de equações, formado pela aplicação da eq. (IV.30) em todos os pontos de frequência medidos $j\omega_k$, $k=1,2,\dots,N_f$, deve ser solucionado. Considerando-se que o número de pontos de frequência medidos N_f é maior do que o número de coeficientes desconhecidos, este grupo de equações é super-determinado e geralmente, devido a erros de medida, inconsistente. Uma estimativa de mínimos quadrados para a_r e $[B_r]$, em relação a um domínio, definido pelos pontos medidos $j\omega_k$, e em relação a uma função peso não-negativa $g(j\omega)$, pode ser calculada para o grupo correspondente de equações normais [70], como mostrar-se-á abaixo. Como os coeficientes desconhecidos são reais, o sistema de equações pelo qual eles devem ser solucionados também é real [71].

Fazendo-se a transposta de ambos os lados da eq. (IV.30) e, em seguida, pré-multiplicando-os pela matriz conjugada de $[A]$, obtém-se :

$$[A]^* [A] [X]^t = [A]^* [Y]^t \quad (IV.31)$$

A eq. (IV.31) pode ser particionada como :

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{D_1\} \\ \{D_2\} \end{bmatrix} \quad (IV.32)$$

onde :

$$\{a\} = [a_1 \dots a_{2N}]^t \text{ e } \{b\} = [B_1 \dots B_{2N}]^t$$

e para $P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}, D_1, D_2$ o somatório sendo feito em todos os dados de frequência disponíveis $s_k = j\omega_k ; k=1\dots Nf$.

$$[P_{11}] = \text{Re} \begin{bmatrix} \sum g \theta_{2N-1}^* [H(j\omega)]_q^* [H(j\omega)]_q^t \theta_{2N-1} & \dots & \sum g \theta_{2N-1}^* [H(j\omega)]_q^* [H(j\omega)]_q^t \theta_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum g \theta_0^* [H(j\omega)]_q^* [H(j\omega)]_q^t \theta_{2N-1} & \dots & \sum g \theta_0^* [H(j\omega)]_q^* [H(j\omega)]_q^t \theta_0 \end{bmatrix}$$

$$[P_{22}] = \text{Re} \begin{bmatrix} \sum g \phi_{2N-1}^* \phi_{2N-1} & \dots & \sum g \phi_{2N-1}^* \phi_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum g \phi_0^* \phi_{2N-1} & \dots & \sum g \phi_0^* \phi_0 \end{bmatrix}$$

$$[P_{12}] = -\text{Re} \begin{bmatrix} \sum g \theta_{2N-1}^* [H(j\omega)]_q^* \phi_{2N-1} & \dots & \sum g \theta_{2N-1}^* [H(j\omega)]_q^* \phi_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum g \theta_0^* [H(j\omega)]_q^* \phi_{2N-1} & \dots & \sum g \theta_0^* [H(j\omega)]_q^* \phi_0 \end{bmatrix}$$

$$[P_{21}] = -\text{Re} \begin{bmatrix} \sum g \phi_{2N-1}^* [H(j\omega)]_q^t \theta_{2N-1} & \dots & \sum g \phi_{2N-1}^* [H(j\omega)]_q^t \theta_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum g \phi_0^* [H(j\omega)]_q^t \theta_{2N-1} & \dots & \sum g \phi_0^* [H(j\omega)]_q^t \theta_0 \end{bmatrix}$$

$$\{D_1\} = -\text{Re} \begin{bmatrix} \sum g \theta_{2N-1}^* [H(j\omega)]_q^* [H(j\omega)]_q^t \theta_{2N} \\ \vdots \\ \sum g \theta_0^* [H(j\omega)]_q^* [H(j\omega)]_q^t \theta_{2N} \end{bmatrix}$$

$$\{D_2\} = \text{Re} \begin{bmatrix} \sum g \phi_{2N-1}^* [H(j\omega)]_q^t \theta_{2N} \\ \vdots \\ \sum g \phi_0^* [H(j\omega)]_q^t \theta_{2N} \end{bmatrix}$$

Obviamente, $[P_{12}] = [P_{21}]'$

Para simplificar sensivelmente os cálculos e aumentar a estabilidade numérica do método, sejam ϕ_r e θ_r definidos tais que :

$$\sum_{k=1}^{Nf} q_i(j\omega_k) \theta_i(j\omega_k) \theta_j(j\omega_k) = \delta_{ij}$$

e (IV.33)

$$\sum_{k=1}^{Nf} q_p(j\omega_k) \phi_i(j\omega_k) \phi_j(j\omega_k) = \delta_{ij}$$

Então, em outros termos, ϕ_r e θ_r são dois grupos de polinômios, que são ortogonais, respectivamente, às funções peso $q_i(j\omega)$ e $q_p(j\omega)$. Estas funções peso possibilitam a ponderação dos pontos em frequência. Por exemplo, pode-se dar um peso maior aos pontos nas adjacências das frequências naturais no espectro.

Quando :

$$\begin{aligned} q_i(j\omega) \text{ é definido como } q_i(j\omega_k) &= g(j\omega_k) [H(j\omega_k)]^* [H(j\omega_k)]' \text{ e} \\ q_p(j\omega) \text{ é definido como } q_p(j\omega_k) &= g(j\omega_k) \end{aligned} \quad (IV.34)$$

então :

$$P_{11} = I$$

$$P_{22} = I$$

$$D_1 = 0$$

Um modo eficiente para gerar estes polinômios foi proposto por Forsythe [72].

Assim, a eq. (IV.32) transforma-se em :

$$\begin{bmatrix} I & P_{12} \\ P_{12}' & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \{D_2\} \end{bmatrix} \quad (IV.35)$$

ou

$$([\mathbf{I}] - [\mathbf{P}_{12}][\mathbf{P}_{12}]^t)\{\mathbf{a}\} = -[\mathbf{P}_{12}]\{\mathbf{D}_2\} \quad (\text{IV.36a})$$

$$\{\mathbf{b}\} = \{\mathbf{D}_2\} - [\mathbf{P}_{12}]^t\{\mathbf{a}\} \quad (\text{IV.36b})$$

Resolvendo-se a eq. (IV.36a), obtêm-se os coeficientes a_r da equação característica. Os vetores $[\mathbf{B}_r]$ podem então ser calculados de uma maneira direta a partir da eq. (IV.36b).

IV.2.2 - EXEMPLO SIMPLIFICADO

Visando facilitar a compreensão do método descrito acima, será apresentado agora um exemplo bastante simples, com as seguintes características :

- um ponto de excitação(entrada)
- dois pontos de resposta (saída)
- apenas um modo considerado ($N=1$)

A eq. (IV.25), neste caso, apresenta a seguinte forma, separando-se os resíduos em partes real e imaginária ($R_{pqr, re}$ e $R_{pqr, im}$; respectivamente) e usando-se a expressão do pólo($\lambda_p = \sigma_r + j\omega_{ar}$) :

$$H_{11}(j\omega) = \frac{(R_{111, re} + jR_{111, im})}{(j\omega - (\sigma_1 + j\omega_{a1}))} + \frac{(R_{111, re} - jR_{111, im})}{(j\omega - (\sigma_1 - j\omega_{a1}))} \quad (\text{IV.37a})$$

$$H_{21}(j\omega) = \frac{(R_{211, re} + jR_{211, im})}{(j\omega - (\sigma_1 + j\omega_{a1}))} + \frac{(R_{211, re} - jR_{211, im})}{(j\omega - (\sigma_1 - j\omega_{a1}))} \quad (\text{IV.37b})$$

Em termos de frações racionais (eq. (IV.26)), têm-se :

$$H_{11}(j\omega) = \frac{b_{1(11)}[j\omega] + b_{2(11)}}{[j\omega]^2 + a_1[j\omega] + a_2} \quad (\text{IV.38a})$$

$$H_{21}(j\omega) = \frac{b'_{1(21)}[j\omega] + b'_{2(21)}}{[j\omega]^2 + a'_1[j\omega] + a'_2} \quad (\text{IV.38b})$$

Escrevendo as eq. (IV.38a e IV.38b) sob forma matricial :

$$[[j\omega]^2 + a'_1[j\omega] + a'_2][H_{11} \ H_{21}] = [b'_{1(11)}[j\omega] + b'_{2(11)} \quad b'_{1(21)}[j\omega] + b'_{2(21)}] \quad (\text{IV.39a})$$

Com $B_1 = [b'_{1(11)} \quad b'_{1(21)}]$ e $B_2 = [b'_{2(11)} \quad b'_{2(21)}]$, tem-se :

$$[[j\omega]^2 + a'_1[j\omega] + a'_2][H_{11} \ H_{21}] = [B'_1[j\omega] + B'_2] \quad (\text{IV.39b})$$

Separando-se os coeficientes incógnitos em um vetor, como na eq. (IV.28), tem-se :

$$[X'] [A'] = [Y'] \quad (\text{IV.40})$$

onde:

$$[X'] = [a'_1 \quad a'_2 \quad B'_1 \quad B'_2] = [a'_1 \quad a'_2 \quad b'_{1(11)} \quad b'_{1(21)} \quad b'_{2(11)} \quad b'_{2(21)}]_{1 \times 6}$$

$$[A'] = \begin{bmatrix} [j\omega][H_{11} \ H_{21}] \\ [H_{11} \ H_{21}] \\ -[j\omega][I]_{2 \times 2} \\ -[I]_{2 \times 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [j\omega]H_{11} & [j\omega]H_{21} \\ H_{11} & H_{21} \\ -[j\omega] & 0 \\ 0 & -[j\omega] \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{6 \times 2}$$

$$[Y'] = [-[j\omega]^2 H_{11} \quad -[j\omega]^2 H_{21}]_{1 \times 2}$$

O próximo passo é a definição dos polinômios ortogonais (eq. (IV.29)) :

$$\begin{aligned}
\phi_0 &= d_0 \\
\phi_1 &= d_1[j\omega] + d_0 \\
\theta_0 &= c_0 \\
\theta_1 &= c_1[j\omega] + c_0 \\
\theta_2 &= c_2[j\omega]^2 + c_1[j\omega] + c_0
\end{aligned}
\tag{IV.41}$$

Através do método proposto por Forsythe [72], determinam-se as constantes d_0, d_1, c_0, c_1 e c_2 .

O novo sistema de equações (eq. (IV.30)) torna-se :

$$[X][A] = [Y] \tag{IV.42}$$

onde :

$$[X] = [a_1 \quad a_2 \quad B_1 \quad B_2] = [a_1 \quad a_2 \quad b_{1(11)} \quad b_{1(21)} \quad b_{2(11)} \quad b_{2(21)}]_{1 \times 6}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \theta_1 [h_{11} \quad h_{21}] \\ \theta_0 [h_{11} \quad h_{21}] \\ -\phi_1 [I]_{2 \times 2} \\ -\phi_0 [I]_{2 \times 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 H_{11} & \theta_1 H_{21} \\ \theta_0 H_{11} & \theta_0 H_{21} \\ -\phi_1 & 0 \\ 0 & -\phi_1 \\ -\phi_0 & 0 \\ 0 & -\phi_0 \end{bmatrix}$$

$$[Y] = -\theta_2 [H_{11} \quad H_{21}] = [-\theta_2 H_{11} \quad -\theta_2 H_{21}]_{1 \times 2}$$

Seguindo o procedimento do método, encontram-se os coeficientes a_1, a_2, B_1 e B_2 como mostrado em (IV.36a e IV.36b). Obtidos estes coeficientes, os coeficientes a'_1, a'_2, B'_1 e B'_2 são calculados desenvolvendo-se a eq. (IV.42) e igualando-a à eq. (IV.38). Assim :

$$H_{11} = \frac{\phi_1 b_{1(11)} + \phi_0 b_{2(11)}}{a_1 \theta_1 + a_2 \theta_0 + \theta_2} \tag{IV.43a}$$

$$H_{21} = \frac{\phi_1 b_{1(21)} + \phi_0 b_{2(21)}}{a_1 \theta_1 + a_2 \theta_0 + \theta_2} \tag{IV.43b}$$

Aplicando-se os valores de ϕ_r e θ_r definidos em (IV.41), obtém-se :

$$H_{11} = \frac{[b_{1(11)}d_1][j\omega] + [b_{1(11)}d_0 + b_{2(11)}d_0]}{c_2[j\omega]^2 + [c_1 + a_1c_1][j\omega] + [2c_0 + a_2c_0]} \quad (IV.44a)$$

$$H_{21} = \frac{[b_{1(21)}d_1][j\omega] + [b_{1(21)}d_0 + b_{2(21)}d_0]}{c_2[j\omega]^2 + [c_1 + a_1c_1][j\omega] + [2c_0 + a_2c_0]} \quad (IV.44b)$$

Igualando-se (IV.38) a (IV.44), tem-se :

$$\begin{aligned} a_1' &= c_1(1 + a_1) \\ a_2' &= c_0(2 + a_2) \\ b_{1(11)}' &= b_{1(11)}d_1 \\ b_{1(21)}' &= b_{1(21)}d_1 \\ b_{2(11)}' &= d_0(b_{1(11)} + b_{2(11)}) \\ b_{2(21)}' &= d_0(b_{1(21)} + b_{2(21)}) \end{aligned} \quad (IV.45)$$

De posse dos valores de a_1' , a_2' , B_1' e B_2' , o último passo é o cálculo dos parâmetros modais. Para isto, inicialmente desenvolvem-se as eq. (IV.37a e IV.37b) :

$$H_{11} = \frac{[2R_{111, re}][j\omega] + [-2R_{111, re}\sigma_1 - 2R_{111, im}\omega_{a1}]}{[j\omega]^2 + [-2\sigma_1][j\omega] + [(\sigma_1)^2 + (\omega_{a1})^2]} \quad (IV.46a)$$

$$H_{21} = \frac{[2R_{211, re}][j\omega] + [-2R_{211, re}\sigma_1 - 2R_{211, im}\omega_{a1}]}{[j\omega]^2 + [-2\sigma_1][j\omega] + [(\sigma_1)^2 + (\omega_{a1})^2]} \quad (IV.46b)$$

Da igualdade entre as eq. (IV.46) e (IV.38), os valores dos parâmetros modais podem ser explicitados :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = -\left(\frac{a_1}{2}\right) \\ \omega_{a1} = \sqrt{a_2 - (a_1/2)^2} \\ r_{111, \text{re}} = \frac{b_{1(11)}}{2} \\ r_{111, \text{im}} = \frac{a_1 b_{1(11)} - 2b_{2(11)}}{4\sqrt{a_2 - (a_1/2)^2}} \\ r_{211, \text{re}} = \frac{b_{1(21)}}{2} \\ r_{211, \text{im}} = \frac{a_1 b_{1(21)} - 2b_{2(21)}}{4\sqrt{a_2 - (a_1/2)^2}} \end{array} \right.$$

Como no caso abordado foi considerado somente um grau de liberdade ($N=1$), foi possível explicitar os parâmetros modais diretamente, em função das constantes a_r e b_r . Em casos onde se consideram mais de um modo no somatório da eq. (IV.25), isto não é possível.

Seja o caso em que se considerem dois modos contribuindo para a resposta da estrutura, ou seja, $N=2$. A eq. (IV.26) tomará, então, para uma FRF genérica, a seguinte forma :

$$H_{pq}(j\omega) = \frac{b_{1(pq)}(j\omega)^3 + b_{2(pq)}(j\omega)^2 + b_{3(pq)}(j\omega) + b_{4(pq)}}{(j\omega)^4 + a_1(j\omega)^3 + a_2(j\omega)^2 + a_3(j\omega) + a_4} \quad (\text{IV.47})$$

Lembrando-se que as constantes a_r e b_r já são conhecidas, deve-se agora, por meio de algum método numérico de obtenção de raízes complexas, extrair as quatro raízes do polinômio do denominador (polinômio em $(j\omega)$), que são os pólos do sistema. Estas raízes, logicamente, ocorrem em pares conjugados. De posse dos valores dos pólos, expande-se a eq. (IV.47) em frações parciais para a estimação dos resíduos.

IV.2.3 - CONSIDERAÇÕES NUMÉRICAS

Os diversos passos na implementação deste método são : a geração dos polinômios ortogonais, a construção das matrizes do sistema das eq. (IV.35) e (IV.36), a solução deste sistema de equações e, finalmente, o cálculo dos parâmetros modais.

Como não são impostas restrições na distribuição em frequência dos dados de FRF neste processo, podem ser usados dados com incremento de frequência constante, variável ou logarítmico.

Os polinômios ortogonais ϕ_k e θ_k precisam ser calculados apenas uma vez, independentemente do número de pontos de resposta. Logicamente, quanto menor for a faixa de frequência considerada na análise, maior será a estabilidade da geração de polinômios.

O desacoplamento da eq. (IV.36) torna reduzido o tempo de cálculo, já que somente um grupo de equações, de ordem $(2N)$, deve ser solucionado, independentemente do número de respostas utilizado.

O método em discussão apresenta vantagens quanto ao condicionamento e à estabilidade quando comparado com a aproximação de polinômios racionais clássica, a qual resulta da solução das eq. (IV.28) ao invés das eq. (IV.30). A descrição da decomposição em termos de polinômios ortogonais para a eq. (IV.35) é bem condicionada. Além disso, a geração da matriz do sistema desta equação é bem mais precisa, não apenas pelo uso explícito das propriedades $P_{11} = I$, $P_{22} = I$, mas também devido à estabilidade maior das somas usadas no cálculo de P_{12} .

Ao resolver-se a eq. (IV.36a), um grupo de coeficientes $\{a\}$ é obtido, o que expressa a decomposição do lado esquerdo da eq. (IV.27) em polinômios ortogonais. Para obter os coeficientes originais $\{a'\}$ da equação característica, um processo de re-cálculo de coeficiente pode ser usado ([71], capítulo 5). Encontrando-se as raízes deste polinômio, os parâmetros do sistema global podem ser calculados.

Os parâmetros locais (formas modais) podem ser calculados a partir de uma expansão de frações parciais da eq. (IV.27).

IV.2.4 - EFEITOS RESIDUAIS FORA DA BANDA DE ANÁLISE

As estimativas de parâmetros modais no domínio da frequência têm a grande vantagem de poder considerar a influência de modos localizados fora da faixa do espectro obtido. Isto é feito levando-se em conta a contribuição de um certo número de modos localizados fora da faixa de frequência em termos de massa residual (m_{pq}) e rigidez residual (k_{pq}). Com isto, a eq. (IV.25) pode ser rescrita como :

$$H_{pq}(j\omega) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{R_{pqr}}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{R_{pqr}^*}{(j\omega - \lambda_r^*)} \right) + \frac{1}{k_{pq}} - \frac{1}{\omega^2 m_{pq}} \quad (IV.48)$$

O termo de rigidez residual descreve a contribuição dos modos com frequência natural acima da faixa investigada e o termo de massa residual descreve a contribuição dos modos abaixo desta faixa. Ao se converter a expressão de fração parcial da eq. (IV.48) em uma forma de fração racional, complica-se matematicamente o problema, sobretudo devido ao termo de massa residual. Porém, no caso em que os dados medidos forem de aceleração, todos os termos da eq. (IV.48) são multiplicados por $(-\omega^2)$, convertendo o termo de massa residual em uma constante e o termo de rigidez residual em um polinômio de segunda ordem. A fração racional correspondente será, então :

$$H_{pq}(j\omega) = \frac{\sum_{r=1}^{2N+3} b_{r(pq)} (j\omega)^{(2N+3)-r}}{\sum_{r=0}^{2N} a_r (j\omega)^{2N-r}} \quad (IV.49)$$

No caso de a contribuição dos modos fora da banda dos valores medidos de FRF não ser desprezível e as respostas serem acelerações, melhores resultados são obtidos quando a eq. (IV.49) é usada como ponto de partida, ao invés da eq. (IV.26)

IV.2.5 - UTILIZAÇÃO DO MÉTODO

O programa STAR - Structural Measurement System [73] dispõe de diversos métodos que estimam os parâmetros modais. Entre eles, há o “Orthogonal Polynomial Method”, que foi utilizado nas comparações que constam deste trabalho.

CAPÍTULO V

MÉTODO DESENVOLVIDO : ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS ATRAVÉS DO ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO “GOAL PROGRAMMING”

V.1 - INTRODUÇÃO

A técnica de otimização denominada “Goal Programming” [2] vem sendo aplicada com sucesso na solução de diferentes problemas. No Programa de Engenharia Civil da COPPE, ela já foi utilizada, por exemplo, no projeto de plataformas semi-submersíveis [74], no projeto de pontes estaiadas [75] e no projeto de sistemas de absorção passiva de vibrações [76]. Surgiu então a idéia de tentar utilizá-la para estimar parâmetros modais, uma vez que grande parte dos métodos de estimação modal no domínio da frequência é baseada em minimização de uma função erro.

Esta técnica, idealizada por Ignizio [1], foi implementada inicialmente na COPPE por Vasconcelos [74]. Ela se baseia em conceito de programação linear denominado Método Simplex [77]. Visando obter uma solução viável, são otimizados alguns aspectos do problema, em busca dos objetivos fixados e sujeita às restrições impostas.

A estimação modal através do “Goal Programming” foi idealizada tendo como objetivo obter resultados mais precisos em casos nos quais os métodos clássicos existentes não apresentam eficiência satisfatória. A dúvida quanto à utilização do “Goal Programming” na estimação modal era em relação à convergência do processo iterativo de otimização e à importância dos dados iniciais que dão partida ao processo. Como será mostrado posteriormente, o “Goal Programming” mostrou-se eficiente para a identificação modal, não havendo maiores problemas para a sua convergência. A influência do ponto de partida será abordada no Cap. VI.

V.2 - TÉCNICA DE OTIMIZAÇÃO “GOAL PROGRAMMING”

A técnica de programação linear “Goal Programming” permite a busca de múltiplos objetivos condicionados a restrições rígidas ou flexíveis, conforme a necessidade do problema. Devido à flexibilidade da formulação, podem-se considerar os compromissos entre

os objetivos de maneira a satisfazer aproximadamente dois ou mais critérios de projetos simultaneamente, sendo, no entanto, cada um medido através de sua respectiva importância.

Para realizar a busca da solução ideal, podem ser utilizadas diferentes rotinas associadas ao algoritmo “Goal Programming”. Neste trabalho, a rotina utilizada é denominada “Pattern Search” [1], que tem como principal característica o fato de não necessitar o cálculo dos gradientes da função a ser otimizada.

A formulação convencional da programação não linear é baseada na minimização de uma função determinada pelos desvios dos objetivos, a partir das variáveis de projeto, chamadas aqui de \bar{x}

$$f(\bar{x}); \quad \bar{x} \in R^N \quad (V.1)$$

sujeita a um conjunto de restrições de desigualdade e igualdade (g e h, respectivamente),

$$g_j(\bar{x}) \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (V.2)$$

$$h_k(\bar{x}) = 0; \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (V.3)$$

e a restrições laterais (limites superiores (índice u) e inferiores (índice l)) para as variáveis \bar{x}

$$x_i^l \leq x_i \leq x_i^u; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (V.4)$$

Nas formulações convencionais de programação não linear, a função objetivo tem que ser escrita de forma explícita. No entanto, na técnica de otimização “Goal Programming” isto não é necessário, sendo, então, as restrições e objetivos considerados de maneira semelhante e escritos na seguinte forma:

$$G \geq b; \quad \sum a_{ij}x_j + d_i^- = b_i \quad (V.5)$$

$$G \leq b; \quad \sum a_{ij}x_j - d_i^+ = b_i \quad (V.6)$$

onde :

d_i^-, d_i^+ são, respectivamente, as variáveis de desvios por limites inferiores e superiores, associadas a cada um dos valores dos b_i procurados;

a_{ij} são os coeficientes de sensibilidade do projeto.

Na formulação do “Goal Programming”, associa-se ainda a cada função objetivo uma prioridade P_k , permitindo ao usuário dispor de uma flexibilidade na busca das metas a serem alcançadas. Tem-se, então, que para “T” metas ou buscas, a função objetivo é dada por:

$$\text{minimize } F[d(\bar{x})] = \sum_{i=1}^T P_k (d_i^- + d_i^+); \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (V.7)$$

onde as variáveis de projeto (\bar{x}_j) são indiretamente incluídas na eq. (V.7), uma vez que os desvios são calculados através da diferença entre os valores prescritos de busca (b_i) e os obtidos no problema.

De uma maneira mais conceitual, pode-se particionar a técnica “Goal Programming” em alguns passos fundamentais :

A) - Primeiro Passo : Identificação das Variáveis de Decisão

As variáveis de decisão são aquelas utilizadas para controlar o modelo e são chamadas, por esta razão, de variáveis de controle. A proposta da otimização é determinar os valores ótimos destas variáveis de modo a atender às restrições e aos objetivos pré-determinados.

A relação entre variáveis constitui a base para os passos subsequentes no desenvolvimento da formulação do modelo de otimização.

B) - Segundo Passo : Formulação dos Objetivos do Problema

Tanto as restrições como os objetivos são tratados da mesma maneira pela técnica, sendo aqui denominados de “goals”. Os objetivos podem ser determinados a partir das aspirações do usuário, enquanto as restrições são relacionadas a qualquer tipo de limitação (restrições físicas, por exemplo).

O “Goal Programming” opera atribuindo prioridade às restrições e objetivos, e parte da premissa de que todos são possíveis de ser atendidos, seguindo, no entanto, a ordem de suas prioridades. Chamando-se cada uma das restrições de G_n , o índice n representa a prioridade associada. Quanto menor for n , maior a importância deste “goal” na análise. Desta forma, as

restrições devem apresentar valores de n menores do que os objetivos, uma vez que, para um objetivo ter sentido dentro de um problema, é necessário que todas as restrições tenham sido satisfeitas.

C) - Terceiro Passo : Formulação da Função Alvo (Função Objetivo)

A função alvo (ou função objetivo) é a definição matemática do problema. Como já citado, ela não precisa ser escrita de maneira explícita. O usuário deve formular seu problema específico através de uma sub-rotina em FORTRAN, sendo esta acoplada ao programa “Goal Programming”, que se encarregará de levar adiante a análise.

Um princípio básico desta técnica é a interação entre o sistema e o usuário. Deve-se ter em mente que o processo de otimização pode não levar a uma única solução, dependendo fundamentalmente da experiência do usuário em problemas semelhantes. Alguns aspectos que dependem desta experiência são a ordem de prioridades, a definição do ponto de partida do processo e o incremento inicial de cada variável.

V.3 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA PARA O CASO DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS

São vários os métodos, no domínio da frequência, que procuram estimar os parâmetros modais por meio da minimização de uma função erro, conforme mostrado no Capítulo III. Em geral, são métodos de muitos graus de liberdade (MDOF) e globais, que utilizam, como função erro a ser minimizada, o erro quadrático. Relembrando a expressão do erro quadrático (eq.(III.27)) :

$$E_{pq} = \sum_{f=f_1}^{f_r} (e_{pq}(j\omega_f) \cdot e_{pq}^*(j\omega_f)) \quad (V.8)$$

onde : p : grau de liberdade onde é medida a resposta

q : grau de liberdade onde é imposta a excitação

$$e_{pq}(j\omega) = H_{pq}^{EXP}(j\omega) - H_{pq}^{TEO}(j\omega)$$

$$e_{pq}^*(j\omega) = H_{pq}^{EXP*}(j\omega) - H_{pq}^{TEO*}(j\omega)$$

$f_j < f < f_f$ é a faixa onde a FRF experimental é determinada

H_{pq}^{EXP} : valor experimental da FRF

H_{pq}^{TEO} : valor teórico da FRF

Repetindo-se a eq. (IV.48), que expressa matematicamente a FRF teórica (incluindo a contribuição dos modos fora da faixa de análise) :

$$H_{pq}(j\omega) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{R_{pqr}}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{R_{pqr}^*}{(j\omega - \lambda_r^*)} \right) + \frac{1}{k_{pq}} - \frac{1}{\omega^2 m_{pq}} \quad (V.9)$$

Considerando-se o problema de minimização sob um ponto de vista global, faz-se um somatório do erro quadrático (eq. (V.8)) incluindo todas as FRFs disponíveis, definindo-se então um erro quadrático total :

$$E^{TOTAL} = \sum_{p=1}^{N_o} \sum_{q=1}^{N_i} E_{pq} \quad (V.10)$$

onde :
 N_o é o número total de pontos de resposta
 N_i é o número total de pontos de excitação

Desta maneira, os passos fundamentais do “Goal Programming” aplicado à estimação modal são :

A) - Identificação das Variáveis de Decisão

As variáveis de decisão são os parâmetros modais : frequências naturais, taxas de amortecimento e resíduos (com estes, calculam-se as formas modais). Os termos residuais de massa e rigidez, que, como mostrado no item (IV.2.4), representam a influência de modos fora da faixa do espectro analisada, também são variáveis de decisão. Para um sistema onde são analisados N modos, com respostas medidas em N_o graus de liberdade e excitação imposta em N_i graus de liberdade, as variáveis de decisão são :

- Variáveis Globais :
 - Frequências Naturais : N
 - Taxas de Amortecimento : N

- Variáveis Locais :
 - Resíduos : $N(N_0 N_i)$
 - Termos Residuais : $2(N_0 N_i)$

Total : $2N + (N + 2)(N_0 N_i)$

B) - Restrições e Objetivos

As restrições do problema são :

- Limites inferiores e superiores para as frequências naturais : não é difícil definir estes limites, o que pode ser feito através de uma análise visual das FRFs envolvidas. Outra possibilidade é tomar valores obtidos por métodos de estimação modal mais simples, associando a eles uma incerteza (por exemplo, 5% de seus valores).

- Limites inferiores e superiores das taxas de amortecimento : como no caso das frequências naturais, podem ser utilizados valores de taxas de amortecimento obtidos por métodos menos sofisticados, associando a eles uma incerteza. Em casos em que não se dispõe de outros métodos e não se tem idéia alguma quanto à magnitude das taxas de amortecimento, pode-se tomar um valor próximo a zero como limite inferior e um valor próximo a um (100%) como limite superior. Vale lembrar que a experiência do usuário é fator importante na definição destes limites.

- Resíduos e termos residuais : não foram impostas restrições para os resíduos e os termos residuais na implementação.

O objetivo do problema é minimizar a função alvo, ou seja, a função erro quadrático.

C) - Função Alvo

A função alvo é a função erro quadrático, que expressa o erro quadrático total entre a(s) FRF(s) experimental(is) e a(s) estimada(s), a cada iteração, pelo “Goal Programming”.

O conceito da estimação modal através do “Goal Programming” é o mesmo do “Non-Linear Least Squares”, descrito no item III.3.2.1. Existem, entretanto, diferenças nos procedimentos utilizados pelos dois métodos no que diz respeito à maneira de proceder a minimização da função erro quadrático. O “Goal Programming” permite a imposição de restrições que possibilitam ao usuário um maior controle sobre o processo. A rotina “Pattern Search” utilizada no algoritmo faz uso somente da primeira aproximação da série de Taylor, não necessitando do gradiente, obtendo um bom desempenho na estimação dos parâmetros modais, como será mostrado ao longo do Capítulo VI.

V.4 - IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DESENVOLVIDO

As rotinas feitas para serem acopladas ao “Goal Programming”, na linguagem FORTRAN, são : rotina de leitura de dados, de cálculo do valor do erro quadrático, de impressão dos valores atualizados das variáveis de decisão na tela e de impressão final dos resultados em um arquivo.

A) - Leitura de Dados

O padrão do arquivo de entrada de dados foi elaborado de uma forma lógica, visando facilitar seu entendimento e utilização.

O usuário define o número de FRFs que serão analisadas, o número de modos existentes na faixa de frequência das FRFs, o número máximo de iterações do programa e o número máximo de reduções dos incrementos iniciais das variáveis de decisão. O programa termina quando um destes dois últimos valores é atingido. Outro critério de encerramento do programa, que pode ou não ser utilizado, é o de tolerância : se, para cada variável de decisão, a diferença entre seus valores calculados em duas iterações consecutivas for menor que a tolerância determinada, o programa é encerrado.

Cabe também ao usuário definir as faixas de frequência das FRFs que serão consideradas na análise, chamadas de faixas globais. Assim, ele tem a possibilidade de excluir do processo de otimização alguns trechos que ele julga não apropriados (por exemplo, trechos com excesso de ruído). A experiência na utilização do programa faz com que se aconselhe a utilizar apenas as faixas em torno dos picos de ressonância para a análise, uma vez que a influência de ruídos nos trechos distantes destes picos é bem maior. O método apresenta como vantagem a possibilidade da utilização de FRFs experimentais em que o incremento de frequência não é constante.

Em seguida, o usuário define os seguintes valores :

- valor inicial, incremento inicial e limites inferior e superior de cada frequência natural;
- valor inicial, incremento inicial e limites inferior e superior de cada taxa de amortecimento.

Neste ponto, cabe uma explicação. Além de definir as faixas globais, que serão aquelas levadas em conta na análise, o usuário pode definir, para cada modo de cada FRF, um trecho (chamado trecho local) ao qual pode ser atribuído um peso maior (ou menor) no processo de minimização do erro quadrático total. Logicamente, cada um destes trechos locais deve se encontrar dentro de alguma faixa global. Os pontos que estiverem dentro das faixas globais, porém fora de todos os trechos locais, terão peso um. Como exemplo da utilidade destes trechos locais, se em uma FRF o terceiro modo não apresenta pico (ou seja, o acelerômetro relativo a esta FRF se encontrava localizado em um nó da forma modal relativa ao terceiro modo), define-se um trecho local em torno da terceira frequência natural desta FRF com peso pequeno. Já nas outras FRFs, onde o pico do terceiro modo se faz presente, são

definidos trechos locais em torno deste modo com peso maior. Agindo assim, obter-se-ão resultados mais precisos para os parâmetros modais desta análise.

Continua-se agora a descrição do arquivo de entrada de dados. O usuário entra com o nome do arquivo da primeira FRF experimental e, para cada modo, ele estabelece : limites inferior e superior do trecho local, peso do trecho local, valor inicial do resíduo, valor do incremento inicial do resíduo, valor inicial dos termos residuais (de massa e de rigidez) e incremento inicial dos termos residuais. Repete-se o mesmo procedimento até a última FRF.

Os arquivos que contêm as FRFs experimentais devem estar no padrão Universal File Format (UFF), compatível com o programa STAR - Structural Measurement Systems (SMS) [73].

B) - Cálculo do Valor do Erro Quadrático

A rotina de cálculo da função erro quadrático também calcula alguns parâmetros estatísticos, como o fator de correlação, que exprimem, de forma aproximada, a qualidade do ajuste realizado. Através das informações desta rotina, o “Goal Programming” vai incrementando ou decrementando as variáveis de decisão para atingir o objetivo de minimizar a função erro quadrático, sempre limitado pelas restrições estabelecidas.

C) - Impressão dos Resultados

A cada iteração, são apresentados na tela os valores dos parâmetros modais (variáveis de decisão), o erro quadrático de cada FRF, o erro quadrático total e o fator de correlação entre as FRFs experimentais e estimadas. O usuário pode, então, avaliar como está se desenvolvendo o processo de otimização e, caso não o julgue eficiente, parar o programa e realizar mudanças (por exemplo, nos incrementos das variáveis).

Ao fim do programa, é gerado um arquivo com todas as informações do processo e os resultados finais dos parâmetros modais. Foi feito um programa que faz a leitura deste arquivo de saída e apresenta um gráfico onde é mostrada a FRF experimental e a FRF estimada a partir dos parâmetros modais obtidos pelo “Goal Programming”, o que possibilita uma avaliação visual da qualidade da estimação. Um arquivo temporário também é gerado e, através dele, pode-se acompanhar passo a passo todo o processo de otimização.

Quanto aos valores iniciais e incrementos iniciais das variáveis de decisão, pode-se dizer que, em geral, sua importância cresce à medida que a dificuldade da estimação é maior, como se abordará no Capítulo VI.

Em se tratando de um método iterativo, obviamente a estimação modal através do “Goal Programming” normalmente é um processo demorado, sobretudo em casos onde se analisam várias FRFs com vários modos. A experiência do usuário, entretanto, pode tornar o processo mais rápido.

V.5 - IMPLEMENTAÇÃO DE UM SISTEMA SIMPLES DE ESTIMAÇÃO MODAL PARA FORNECER ESTIMATIVAS INICIAIS AO MÉTODO DESENVOLVIDO

Devido à necessidade de estimativas iniciais para dar partida ao processo iterativo de otimização através do “Goal Programming”, foi desenvolvido um programa simples que estima parâmetros modais pelo método da meia potência [3; 14]. O programa apresenta o gráfico do módulo da FRF desejada e o usuário deve caminhar com o cursor até cada pico de ressonância, onde, pressionando uma tecla, obterá valores para os parâmetros modais relativos a este pico. O resíduo foi calculado aplicando-se a expressão da FRF no ponto do pico da curva, desprezando-se o termo conjugado (cujas participações na resposta em torno da ressonância em geral é pequena) e considerando-se apenas um grau de liberdade. Este método é passível de grande imprecisão, sobretudo em casos de modos acoplados. Todavia, pode perfeitamente ser utilizado para gerar valores iniciais para o “Goal Programming”.

CAPÍTULO VI

AVALIAÇÃO DO MÉTODO DESENVOLVIDO ATRAVÉS DE SIMULAÇÕES NUMÉRICAS E TESTES EXPERIMENTAIS

Foram realizadas algumas simulações numéricas e testes experimentais para avaliar o comportamento do método desenvolvido nas mais diversas situações. Seus resultados foram confrontados com os de outros métodos clássicos, um no domínio da frequência (“Orthogonal Polynomial”) [73] e outro no domínio do tempo (“Least Squares Complex Exponential”) [69], ambos detalhadamente descritos no Capítulo IV.

VI.1 - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

O primeiro procedimento para testar a eficiência do método de estimação de parâmetros modais via “Goal Programming” foi a realização de algumas simulações com FRFs geradas teoricamente.

A simulação inicial teve por objetivo verificar o comportamento do método em casos bastante complexos, nos quais a estimação dos parâmetros modais torna-se uma tarefa árdua. Basicamente, estas situações são : estruturas com modos acoplados, estruturas fortemente amortecidas e sinais experimentais contaminados com alto índice de ruído. Foram então analisados cinco casos, baseados em proposições de Formenti [80], abrangendo combinações das situações citadas acima. Os casos são :

- A - Estrutura fracamente amortecida, com modos ligeiramente acoplados.
- B - Estruturas fortemente amortecidas, com modos ligeiramente acoplados.
- C - Estruturas fracamente amortecidas, com modos altamente acoplados.
- D - Estruturas com amortecimento relativamente alto e com modos altamente acoplados.
- E - Estruturas com frequências naturais coincidentes.

Foram geradas teoricamente FRFs do tipo Inertância, sempre com três modos de vibração, correspondentes aos cinco casos selecionados para análise. Os valores dos parâmetros modais de cada caso, conforme a classificação acima, estão listados na tabela (VI.1).

Em geral, as respostas medidas em um teste experimental são do tipo aceleração, através de transdutores denominados acelerômetros, e, conseqüentemente, as FRFs obtidas são do tipo Inertância, que expressam a razão entre uma aceleração e uma força de excitação. A formulação da maioria dos métodos de estimação de parâmetros modais, todavia, é

TABELA VI.1 - Valores dos parâmetros modais dos casos analisados.

	ω_1 (Hz)	ω_2 (Hz)	ω_3 (Hz)	ξ_1 (%)	ξ_2 (%)	ξ_3 (%)	Res ₁	Res ₂	Res ₃
A	10.	12.	40.	1.	0.8	1.	(-8.e-4)j	(-6.e-4)j	(-3.e-4)j
B	10.	12.	40.	8.	7.	10.	(-8.e-4)j	(-6.e-4)j	(-3.e-4)j
C	20.	20.2	20.5	0.7	0.5	0.8	(-4.e-4)j	(-1.e-3)j	(-1.e-3)j
D	20.	20.4	21.	2.	5.	3.	(-4.e-4)j	(-1.e-3)j	(-1.e-3)j
E	10.	10.	21.	2.	4.	4.	(-8.e-4)j	(-6.e-4)j	(-1.e-3)j

desenvolvida a partir da expressão da FRF do tipo Receptância, que representa a relação entre um deslocamento e uma força de excitação. Para obter uma Receptância a partir de uma Inertância, divide-se esta última por $(-\omega^2)$. Este procedimento, porém, pode causar um problema para a estimação modal : os picos relativos aos modos de maiores ordens passam a apresentar amplitudes bastante reduzidas, o que, em alguns casos, pode afetar a acurácia dos parâmetros modais estimados. Um procedimento alternativo, visando evitar este problema, seria o de utilizar diretamente, para a estimação modal, as FRFs do tipo Inertância e dividir os resíduos estimados por $(-\omega_n^2)$, sendo ω_n a frequência natural associada ao respectivo modo de vibração. Deve-se ter em mente que este procedimento consiste em uma aproximação, porém apresenta, em relação ao primeiro, a vantagem de não reduzir sensivelmente as amplitudes dos modos de maiores ordens.

Os dois métodos clássicos utilizados neste trabalho para comparação com o método proposto (“Orthogonal Polynomial” [73] e “Least Squares Complex Exponential” [69]) são desenvolvidos para FRFs do tipo Receptância. Assim, inicialmente, os dois procedimentos descritos no parágrafo anterior foram testados, para os casos A, B, C, D e E.

Para quantificar o desempenho na identificação dos parâmetros modais, foi calculado o erro relativo médio (média dos três modos) entre os parâmetros modais obtidos pelos métodos e os teóricos (a expressão do erro relativo médio é apresentada na eq. (VI.1)). Isto foi feito para cada parâmetro modal (frequência natural, taxa de amortecimento e resíduo).

$$\text{ERRO REL. MÉDIO} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\text{par. modal estimado } i - \text{par. modal teórico } i}{\text{par. modal teórico } i} \right| \times 100 \text{ (\%)} \quad (\text{VI.1})$$

As tabelas VI.2 e VI.3 apresentam os valores do erro relativo médio para os casos A, B, C, D e E, respectivamente em relação aos resultados do OP e do LSCE, obtidos através dos dois procedimentos mencionados, que são aqui designados por :

- procedimento (a) : dividir a Inertância por $(-\omega^2)$ para obter a Receptância e, em seguida, entrar com os dados nos algoritmos (tabelas VI.2a (OP) e VI.3a (LSCE));

- procedimento (b) : utilizar diretamente os dados de Inertância nos algoritmos e dividir os resíduos estimados por $(-\omega_n^2)$ (tabelas VI.2b (OP) e VI.3b (LSCE)).

TABELAS VI.2 - Erros relativos médios (%) entre os parâmetros modais estimados pelo OP e os reais (teóricos) através dos procedimentos (a) (Tabela VI.2a) e (b) (Tabela VI.2b).

TABELA VI.2a

	ω_N	ξ_N	Res
A	0.00	0.00	0.00
B	0.35	0.00	0.00
C	0.00	0.00	0.00
D	0.11	12.41	31.75
E	0.12	2.25	3.17

TABELA VI.2b

	ω_N	ξ_N	Res
A	0.00	0.00	0.00
B	0.35	0.00	0.78
C	0.00	0.00	0.30
D	0.07	10.07	27.65
E	0.12	1.50	2.29

TABELAS VI.3 - Erros relativos médios (%) entre os parâmetros modais estimados pelo LSCE e os reais (teóricos) através dos procedimentos (a) (Tabela VI.3a) e (b) (Tabela VI.3b).

TABELA VI.3a

	ω_N	ξ_N	Res
A	0.00	0.00	0.00
B	0.00	0.09	0.04
C	*	*	*
D	*	*	*
E	0.00	0.33	0.88

TABELA VI.3b

	ω_N	ξ_N	Res
A	0.00	0.04	0.92
B	0.12	0.69	1.47
C	*	*	*
D	*	*	*
E	0.07	0.17	0.43

* - O método não conseguiu identificar os três modos existentes.

Os resultados das tabelas mostram que os dois procedimentos resultaram em parâmetros modais de acurácias bastante semelhantes, tanto com o OP quanto com o LSCE. A partir desta conclusão, resolveu-se adotar o procedimento (b) para os casos apresentados a seguir.

Cabe destacar que o GP pode utilizar, como dados de entrada, qualquer tipo de FRF, bastando modificar de forma adequada a rotina de cálculo do erro quadrático. Nos casos simulados numericamente, a rotina foi adequada para Inertância.

Em seguida, foram somados, às FRFs teóricas, sinais aleatórios para simular dados experimentais contendo ruído. Foram utilizados três níveis de ruído : 2%, 5% e 10%, onde a percentagem expressa a razão entre o valor RMS do espectro do sinal aleatório e o valor RMS da FRF teórica. Os espectros resultantes foram analisados através do OP, do LSCE e do GP. As tabelas VI.4, VI.5 e VI.6 apresentam, respectivamente, os erros relativos médios entre os parâmetros modais reais e os estimados com o OP, com o LSCE e com o GP, para os diversos casos e diferentes níveis de ruído. Notar que as colunas relativas ao nível de ruído de 0% das tabelas VI.4 e VI.5 são a repetição das tabelas VI.2b e VI.3b, respectivamente, uma vez que o procedimento (b) foi utilizado para as estimações através do OP e do LSCE.

TABELA VI.4 - Erros relativos médios (%) entre os parâmetros modais estimados pelo OP e os reais (teóricos).

NÍVEL DE RUÍDO	0 %			2 %			5 %			10 %		
	CASO	ω_N	ξ_N	Res	ω_N	ξ_N	Res	ω_N	ξ_N	Res	ω_N	ξ_N
A	0.00	0.00	0.00	0.00	0.33	0.39	0.00	0.67	0.90	0.03	1.33	1.92
B	0.35	0.00	0.78	0.33	0.19	0.44	0.27	1.76	2.61	0.34	7.37	12.94
C	0.00	0.00	0.30	0.00	5.97	11.42	0.03	7.27	12.47	0.07	20.14	26.52
D	0.07	10.07	27.65	0.91	37.94	42.91	1.01	64.61	78.87	*	*	*
E	0.12	1.50	2.29	0.21	35.25	46.58	0.20	33.00	44.25	0.23	33.08	37.07

* - o Método OP não conseguiu identificar os três modos

TABELA VI.5 - Erros relativos médios (%) entre os parâmetros modais estimados pelo LSCE e os reais (teóricos).

NÍVEL DE RUÍDO	0 %			2 %			5 %			10 %		
	CASO	ω_N	ξ_N	Res	ω_N	ξ_N	Res	ω_N	ξ_N	Res	ω_N	ξ_N
A	0.00	0.04	0.92	0.00	0.00	0.57	0.00	0.83	0.56	0.00	1.67	1.22
B	0.12	0.69	1.47	0.13	0.43	0.85	0.08	2.01	5.32	0.74	2.50	4.54
C	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
D	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
E	0.07	0.17	0.43	*	*	*	*	*	*	*	*	*

* - o Método LSCE não conseguiu identificar os três modos

TABELA VI.6 - Erros relativos médios (%) entre os parâmetros modais estimados pelo GP e os reais (teóricos).

NÍVEL DE RUÍDO	0 %			2 %			5 %			10 %		
	CASO	ω_N	ξ_N	Res	ω_N	ξ_N	Res	ω_N	ξ_N	Res	ω_N	ξ_N
A	0.00	0.00	0.00	0.00	1.08	0.06	0.00	0.41	0.39	0.00	1.57	0.88
B	0.00	0.00	0.00	0.00	0.33	0.13	0.03	0.83	0.42	1.05	1.69	1.08
C	0.00	0.00	0.08	0.00	1.14	1.67	0.00	2.56	3.05	0.00	3.37	5.32
D	0.07	1.32	4.55	0.23	4.48	14.37	0.36	8.73	21.17	0.17	4.33	11.03
E	0.00	0.09	0.49	0.03	6.17	14.68	0.07	5.33	13.64	0.35	19.67	32.33

Analisando-se, caso a caso, as tabelas VI.4 a VI.6, pode-se observar que :

- CASOS A e B : de forma geral, os três métodos foram eficientes em todos os diferentes níveis de ruído, tendo sido a performance do GP ligeiramente superior às outras;

- CASO C : o LSCE não conseguiu identificar os três modos, mesmo na situação sem ruído. Quanto aos outros dois métodos, percebe-se que, na simulação sem ruído, ambos obtiveram excelente acurácia. Nas situações em que foram introduzidos ruídos, o GP apresentou desempenho superior ao do OP.

- CASO D : também neste caso, o método LSCE não foi capaz de identificar os três modos existentes. Os resultados do GP apresentaram maior acurácia do que os do OP, sendo que este último não conseguiu identificar os três modos na situação contendo ruído de 10%. Notar que o OP obteve resultados com acurácia satisfatória somente para frequências naturais. De maneira geral , o caso D foi o que apresentou o maior grau de dificuldade para a estimação modal.

- CASO E : o LSCE obteve desempenho bastante eficiente na simulação sem ruído, não tendo sido capaz, porém, de identificar todos os modos nas situações contendo ruídos. Novamente, o GP estimou parâmetros com maior acurácia do que o OP, diferença esta mais acentuada nas simulações contendo ruídos.

Verificou-se que o método LSCE não obteve êxito na estimação nos casos C e D, nos quais a densidade modal é bastante elevada. Em relação ao caso B, cujas taxas de amortecimento excedem 5%, o LSCE obteve estimativas com boa acurácia. Estas constatações de certa forma não corresponderam à expectativa, uma vez que a literatura pesquisada cita que este método apresenta desempenhos piores em casos de estruturas fortemente amortecidas.

Os resultados apresentados acima dão substância à conclusão que o algoritmo implementado para a estimação de parâmetros modais através da técnica de otimização denominada "Goal Programming" tem grande eficácia, tendo seu desempenho sido superior

aos do “Orthogonal Polynomial” e do “Least Squares Complex Exponential” em todas as situações analisadas.

Em todos os casos de ruídos simulados, considerou-se apenas um trecho de sinal aleatório. Um estudo mais profundo, com um tratamento estatístico mais detalhado, deveria ser realizado para que não houvesse dúvidas quanto aos resultados obtidos. Entretanto, a diferença expressiva entre os valores de erro relativo médio obtidos a partir dos parâmetros modais estimados com o GP em relação àqueles obtidos a partir dos parâmetros modais estimados com o OP e o LSCE levam o autor à conclusão que os testes simulados são suficientes para comprovar a maior eficiência do primeiro em relação aos outros dois.

Uma análise visual dos desempenhos dos métodos pode ser realizada através de figuras que comparam as FRFs teóricas e as FRFs estimadas pelos métodos. A figura VI.1 apresenta a comparação entre a FRF teórica e a FRF estimada pelo OP para o caso C contaminado com ruído de 10 %. A fig. VI.2 mostra a mesma comparação, porém com a FRF estimada pelo GP. Como comentado anteriormente, o LSCE não identificou os três modos nesta situação. Pode-se observar claramente que o GP obteve um melhor ajuste.

A figura VI.3 apresenta a comparação entre a FRF teórica e a FRF estimada pelo OP para o caso D sem ruído, enquanto a fig. VI.4 mostra a comparação, também para o caso D sem ruído, entre a FRF teórica e a FRF estimada pelo GP. Também neste caso o LSCE não identificou os três modos existentes. Visualmente, nota-se que o GP obteve maior eficiência.

É interessante notar na figura VI.4 que, apesar de os erros relativos médios de amortecimento e resíduo do GP terem sido respectivamente de 1.32% e 4.55% (ver tabela VI.6) para este caso, a curva estimada e a teórica são praticamente coincidentes, o que indica que este tipo de erro é bastante rigoroso.

Neste ponto, cabe discutir um fator de grande relevância no método de estimação modal através do “Goal Programming” : o ponto de partida (estimativas iniciais para os parâmetros modais e respectivos incrementos iniciais). Em todos os casos simulados, os resultados do OP foram tomados como estimativa inicial para o algoritmo iterativo. Em relação aos casos A e B, os menos complexos, a convergência foi bastante rápida (em um microcomputador com processador 486, o tempo de convergência foi da ordem de 50 segundos), enquanto que para os demais casos, sobretudo o D e o E, o mesmo não ocorreu (tempo de convergência de 5 a 10 minutos).

É intuitivo pensar que o ponto de partida pode exercer grande influência na precisão dos resultados no GP. Visando estudar esta influência, alguns testes foram realizados e as conclusões obtidas são as seguintes :

- Em casos simples, nos quais, na vizinhança de cada pico de ressonância, a contribuição dos demais modos é relativamente pequena, as estimativas iniciais e os incrementos iniciais, além de não exercerem influência nos resultados finais, influem muito pouco no tempo de convergência (número de iterações) do processo.

- Quando há um grande acoplamento modal, o ponto de partida geralmente é determinante para a obtenção de resultados finais precisos. Aconselha-se, nestes casos, que os

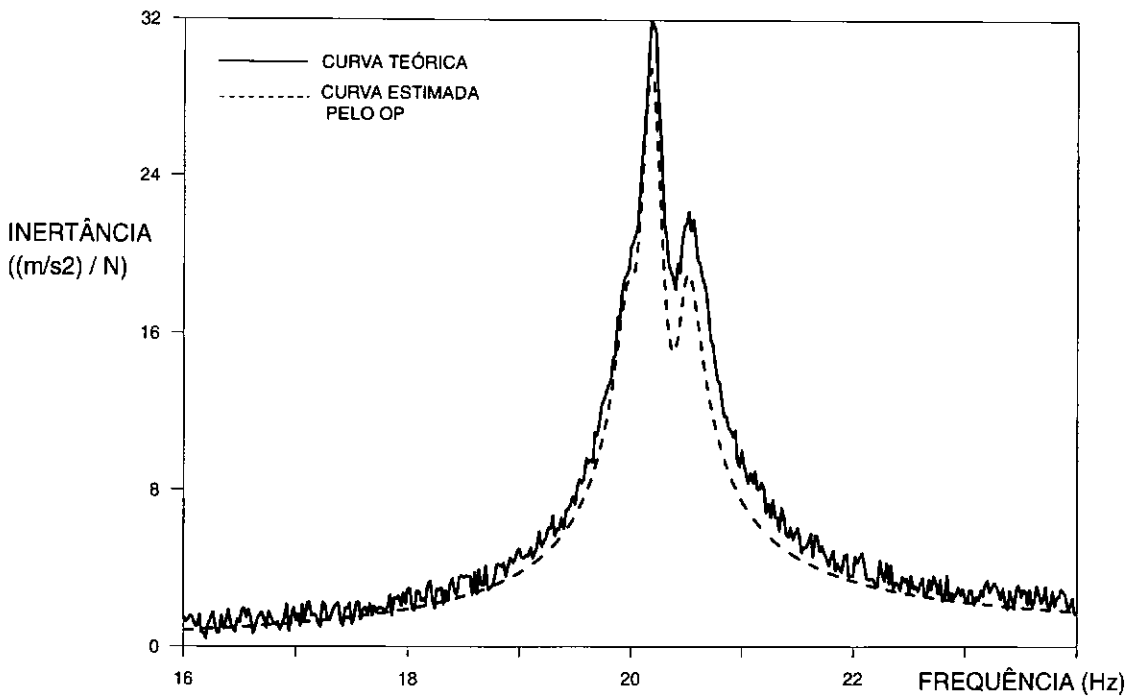


Fig. VI.1 - Comparação entre a FRF teórica e a FRF estimada pelo OP, para o caso C com 10 % de ruído.

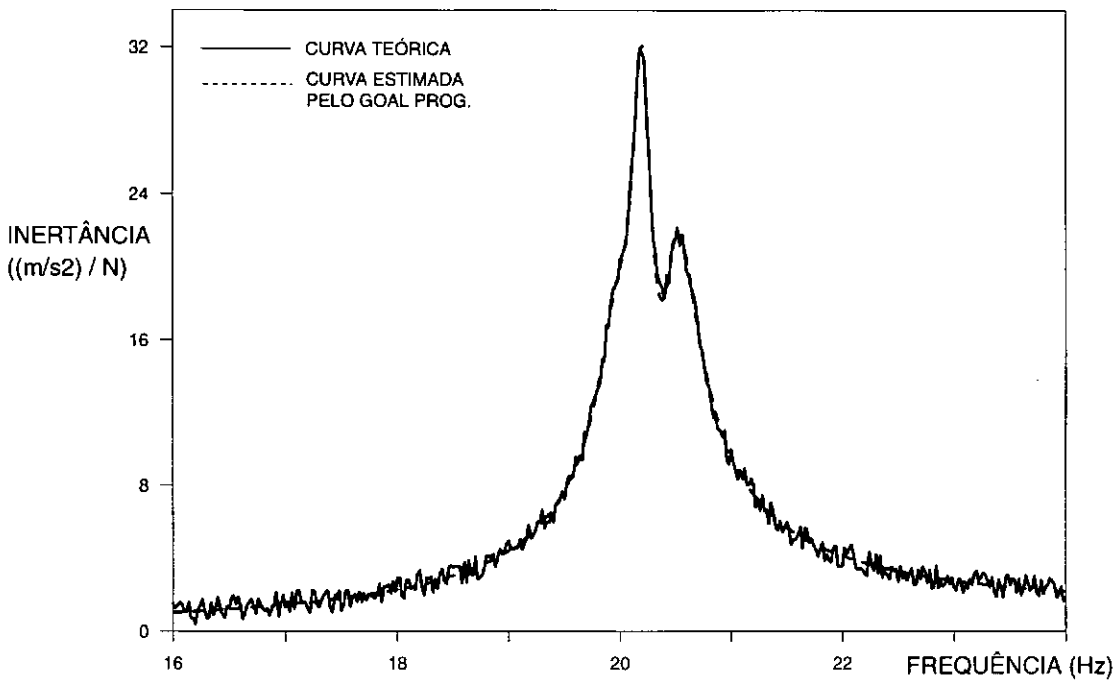


Fig. VI.2 - Comparação entre a FRF teórica e a FRF estimada pelo GP, para o caso C com 10 % de ruído.

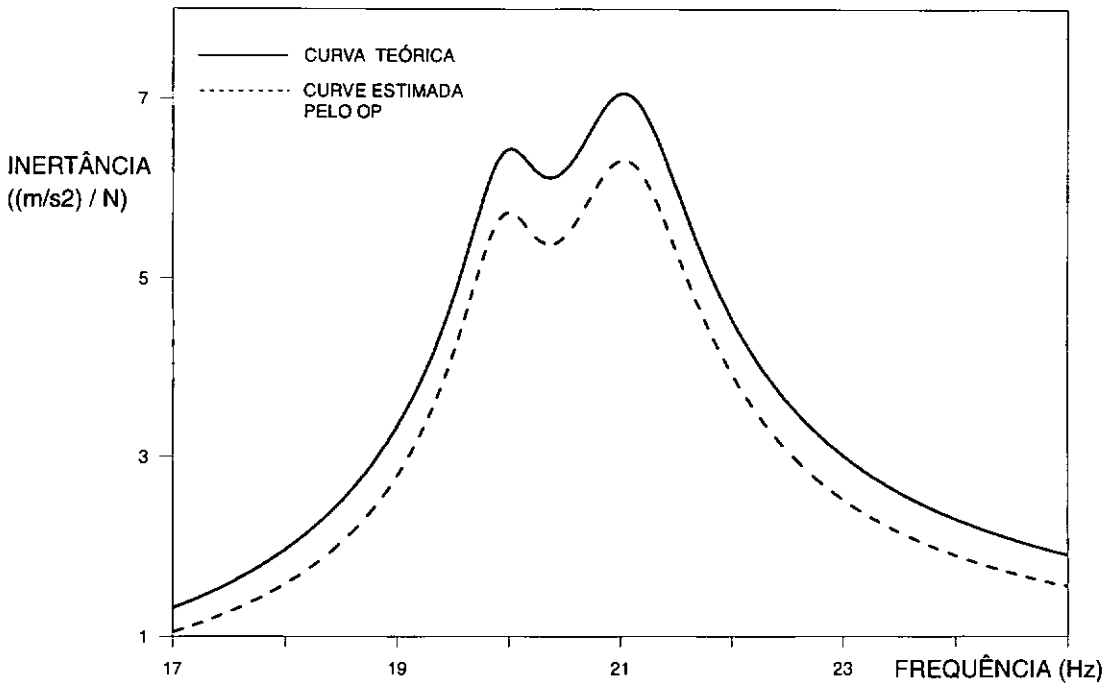


Fig. VI.3 - Comparação entre a FRF teórica e a FRF estimada pelo OP, para o caso D sem ruído.

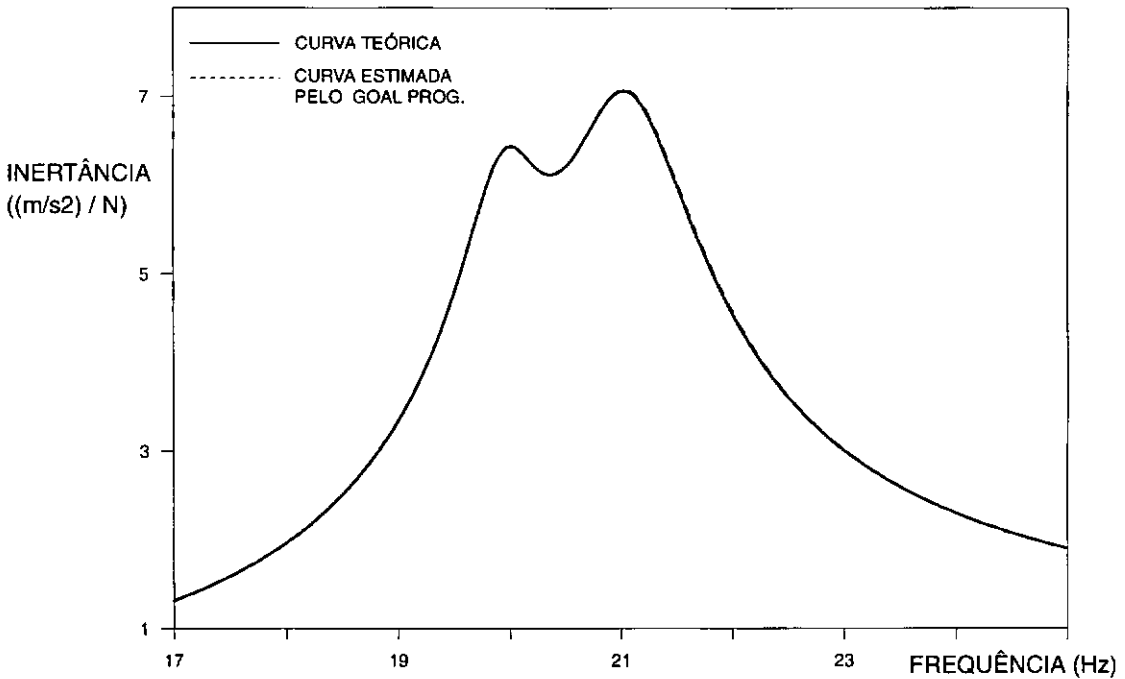


Fig. VI.4 - Comparação entre a FRF teórica e a FRF estimada pelo GP, para o caso D sem ruído.

incrementos iniciais tenham valores bastante altos em relação às respectivas estimativas iniciais. Agindo-se desta forma, evita-se que o processo de otimização fique “preso” a um mínimo local e assim, mesmo que as estimativas iniciais sejam bastante imprecisas, o algoritmo vai obter êxito na estimação modal.

Um exemplo que pode ser citado é o do caso D com ruído de 2%. Os valores da taxa de amortecimento e do resíduo do segundo modo estimados pelo OP foram bastante imprecisos (taxa de amort. de 0.10% (teórico=5%) e módulo do resíduo de $6.55e-7$ [s/kg] (teórico= $-1.e-3$ [s/kg])). Utilizando-se estes valores como estimativas inicial para o GP com incrementos iniciais pequenos, o método não obteve resultados satisfatórios. O GP apenas apresenta eficiência na estimação destes parâmetros quando seus incrementos iniciais foram bastante elevados (0.8% para a taxa de amortecimento e $1.e-4$ [s/kg] para o resíduo). Os resultados finais do GP, com estes incrementos, foram : 4.62% para a taxa de amortecimento (erro percentual de 7.6%) e $8.04e-4$ [s/kg] para o módulo do resíduo (erro percentual de 19.6%).

O processo de estimação de parâmetros modais através do “Goal Programming”, em casos nos quais a estimação mostra-se um problema complexo, vai depender da experiência e sensibilidade do usuário e, em diversas situações, o programa deve ser utilizado por mais de uma vez, efetuando-se modificações no ponto de partida e nos incrementos e verificando-se se os resultados finais convergem sempre para o mesmo ponto. Com isso, evita-se o risco de a solução ficar “presa” a um mínimo local. Conclui-se, então, que o ponto de partida não consiste em problema para a estimação através do GP.

A seguir, foi realizado um teste simples para a verificação da importância de ser considerada, na estimação modal, a influência dos modos fora da faixa do espectro que será analisada. Para esta análise, gerou-se uma FRF com dois modos de vibração e analisou-se a faixa de espectro somente em torno do segundo pico. A tabela VI.4 apresenta os valores dos parâmetros modais dos dois modos.

TABELA VI.4 - Parâmetros Modais Gerados

MODO	ω_n (Hz)	ξ_n (%)	Resíduo [s/kg]
1	10.00	3.00	-5.E-4 j
2	13.00	2.50	-3.E-4 j

Os resultados do “Goal Programming” para os parâmetros modais do segundo modo, considerando-se e não a influência do primeiro modo sobre o segundo (através do termo residual de massa) são apresentados na tabela VI.5

TABELA VI.5 - Parâmetros Modais Estimados p/ o 2º Modo

	ω_2 (Hz)	ξ_2 (%)	Resíduo [s/kg]
Sem contribuição	12.97	2.78	-3.29E-4 j
Com contribuição	13.00	2.50	-2.95E-4 j

Os resultados da tabela VI.5 indicam que é importante que os métodos de estimação possam levar em conta a contribuição dos modos fora da faixa de análise, principalmente nos casos de haver frequências naturais próximas aos limites do espectro analisado. De modo geral, os métodos no domínio da frequência apresentam esta possibilidade, o mesmo não ocorrendo com os métodos no domínio do tempo.

VI.2 - TESTES EXPERIMENTAIS

VI.2.1 - DESCRIÇÃO DO MODELO ENSAIADO

Para a realização de testes experimentais, utilizou-se um modelo reduzido hidroelástico [4], projetado e construído de acordo com a Teoria da Semelhança [81], de uma das plataformas fixas projetadas para o campo de Albacora. O projeto do protótipo desta plataforma, desenvolvido pela Petrobrás, foi feito para atuar em lâmina d'água de 300 metros. É uma estrutura metálica tubular, travejada no sentido vertical com módulos em forma de "X", e contendo nove travejamentos horizontais (andares) ao longo da altura da torre.

O modelo foi confeccionado no Laboratório de Estruturas do Programa de Engenharia Civil da COPPE, com tubos de plástico (poliestireno e ABS), adotando-se uma escala geométrica de 1/85. Este modelo está sendo utilizado, em tese de doutorado realizada no Laboratório de Estruturas, para estudo de identificação de danos em estruturas a partir da variação de seus parâmetros modais [4], sendo portanto fundamental que os parâmetros estimados tenham boa acurácia. As características gerais do modelo estão apresentadas na tabela (VI.6). A fig. (VI.5) mostra a vista frontal e uma seção transversal típica do modelo, com suas principais dimensões, enquanto a fig. (VI.6) apresenta a vista lateral do mesmo.

TABELA VI.6 - Características Gerais do Modelo.

CARACTERÍSTICAS DO MODELO
Peso do Convés : 146.5 N
Peso da Jaqueta : 501.0 N
Peso dos Condutores : 11.0 N
Altura da Jaqueta : 369.00 cm
Dimensões da Base : 104.20 cm x 104.20 cm
Dimensões do Topo : 29.40 cm x 29.40 cm

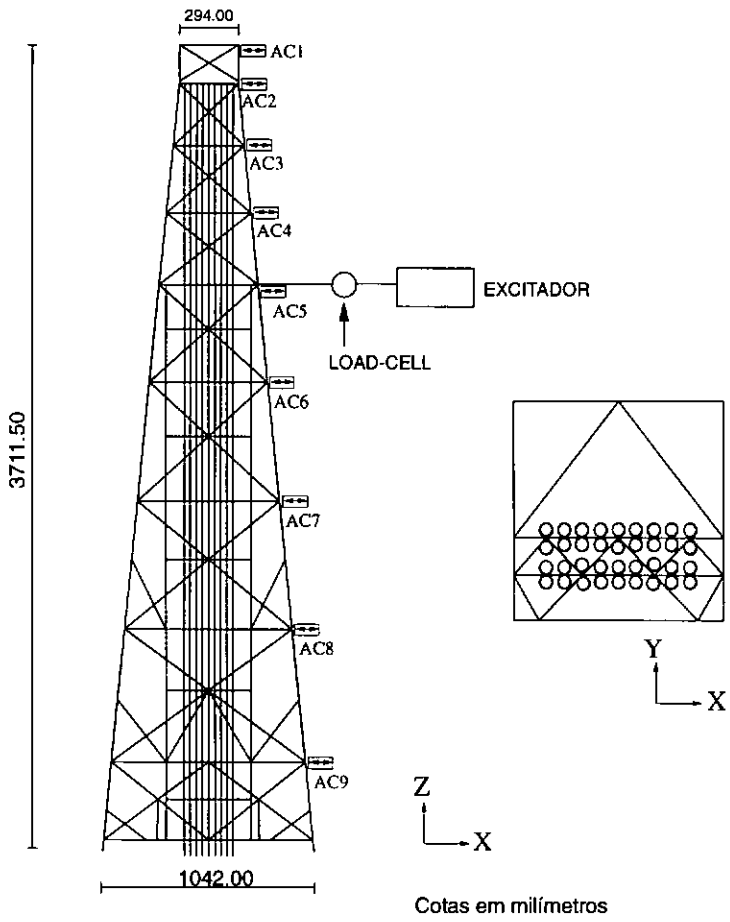


Fig. VI.5 - Vista Frontal do Modelo, com Localização dos Sensores e Seção Transversal Típica.

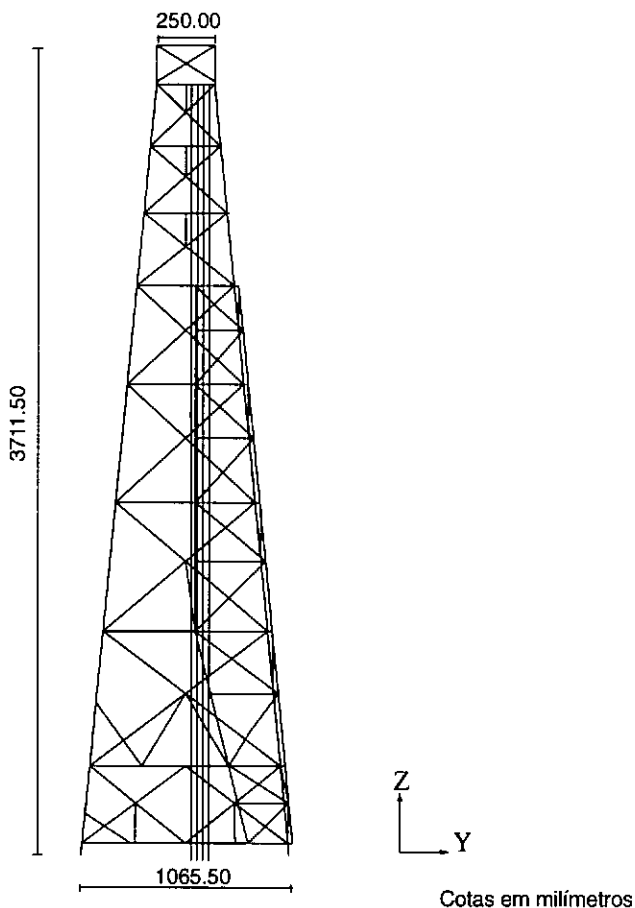


Fig. VI.6 - Vista Lateral do Modelo.

VI.2.2 - INSTRUMENTAÇÃO E ENSAIOS REALIZADOS

O ensaio realizado, cujas respostas foram utilizadas para a estimação modal através do “Goal Programming” e dos dois métodos clássicos estudados no Cap. IV, constou da instrumentação do modelo com nove acelerômetros piezo-elétricos, para medição da resposta da estrutura, e um load-cell piezo-resistivo, para medição da força de excitação. A estrutura foi excitada com um sinal randômico do tipo ruído branco, por meio de um excitador eletro-magnético colocado na altura do sexto travejamento horizontal. O load-cell foi colocado na extremidade do excitador e os acelerômetros foram instalados um em cada andar da estrutura, como mostrado na fig. (VI.5). Note-se, na mesma figura, que o acelerômetro 5 está localizado no ponto de excitação da estrutura (driving point).

O esquema de excitação e de aquisição de dados, apresentado na fig. (VI.7), constou de um gerador de ruído branco, um amplificador de potência, um conjunto de condicionadores de sinais e um micro-computador com placa A/D. Nos ensaios, a frequência

de digitalização foi de 50 Hz e o número de trechos de sinal no tempo utilizados para obtenção das FRFs foi de aproximadamente 20.

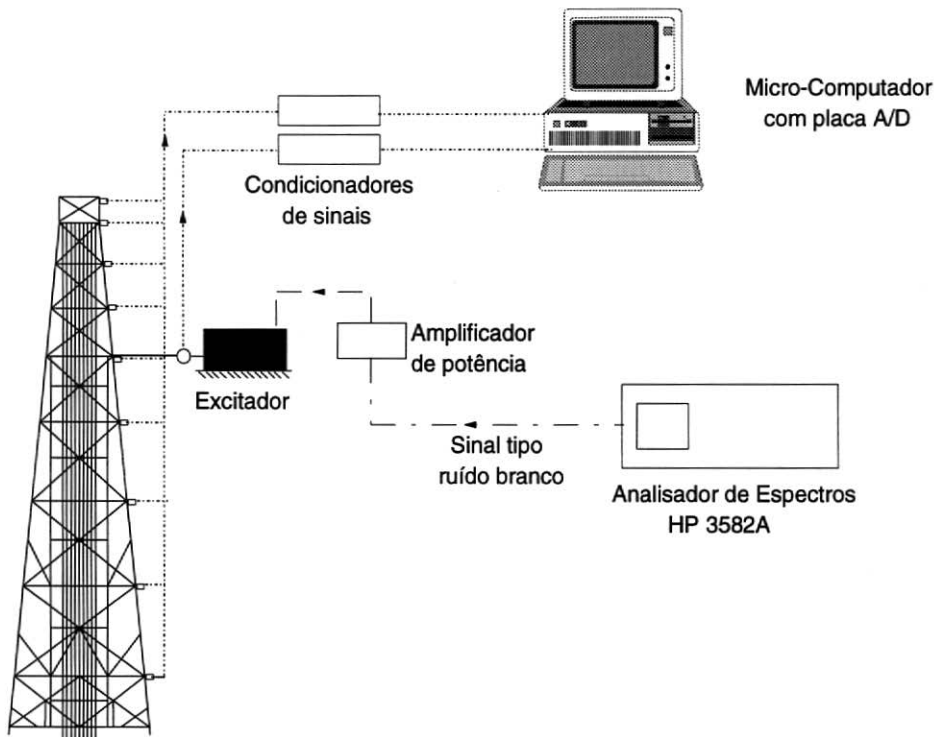


Fig. VI.7 - Sistema de Excitação e Aquisição de Dados.

VI.2.3 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

Tomou-se, para análise, a faixa de frequência de 0 a 24 Hz, dentro da qual são identificados seis modos de vibração : três modos de flexão (primeiro, terceiro e quinto modos do espectro) e três de torção (segundo, quarto e sexto modos do espectro). As FRFs obtidas foram do tipo inércia, já que as respostas medidas foram acelerações. Os parâmetros modais foram estimados pelo “Goal Programming” e pelos dois métodos estudados no Cap. IV : o “Orthogonal Polynomial”(OP) [73] e o “Least Squares Complex Exponential”(LSCE) [69]. Assim como nas simulações numéricas, optou-se por adotar, nos testes experimentais, o procedimento (b) (ou seja, utilizar diretamente as FRFs do tipo Inércia e dividir os resíduos estimados por $(-\omega_n^2)$) para os métodos OP e LSCE. Quanto ao GP , a rotina utilizada levou em consideração a expressão da Inércia, da mesma maneira que nas simulações numéricas.

Tornou-se então possível uma comparação entre os resultados do método desenvolvido com os de dois métodos clássicos, sendo um no domínio da frequência e outro no domínio do tempo. O LSCE utiliza como dados Resposta de Impulso (IR), que, como mostrado no Cap. III, é a transformada inversa de Fourier da FRF. A fig. (VI.8) apresenta a IR relativa ao acelerômetro 1. Percebe-se que na parte final da IR aparece um ruído decorrente do processo de transformada inversa de Fourier da FRF obtida. Este trecho deve ser excluído da análise para evitar que prejudique a estimação.

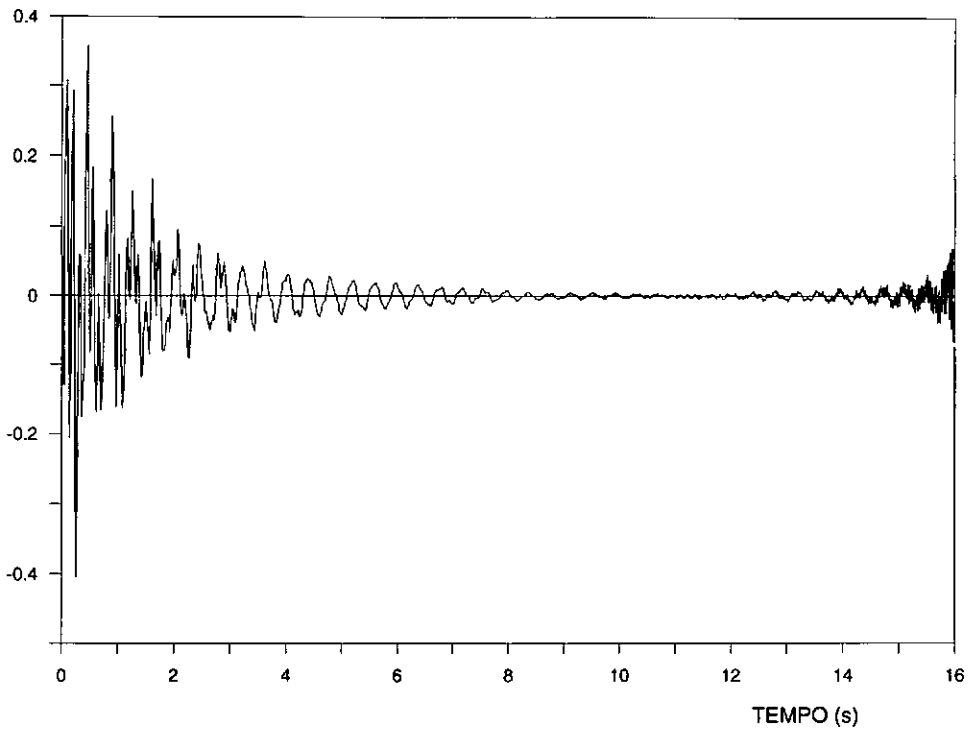


Fig. VI.8 - IR relativa ao acelerômetro 1.

Os parâmetros foram identificados de uma forma global, ou seja, todas as nove FRFs (relativas a nove acelerômetros e um ponto de excitação) foram analisadas simultaneamente por cada um dos métodos, e o estimador utilizado foi H1. Cabe citar que o LSCE foi adaptado para possibilitar uma identificação global, como descrito no Capítulo IV.

A tabela (VI.7) mostra os resultados de frequências naturais obtidos através dos três métodos.

TABELA VI.7 - Resultados de frequências naturais obtidos pelos três métodos (em Hz)

MODO	OP	LSCE	GOAL PROG.
1 (1° FLEXÃO)	2.56	2.56	2.57
2 (1° TORÇÃO)	6.96	6.96	6.96
3 (2° FLEXÃO)	8.51	8.51	8.51
4 (2° TORÇÃO)	11.21	11.22	11.22
5 (3° FLEXÃO)	14.69	14.66	14.67
6 (3° TORÇÃO)	18.62	18.57	18.57

Como percebe-se na tabela (VI.7), os resultados de frequências naturais foram bastante semelhantes, para todos os modos, comparando-se os três métodos. A variação máxima relativa entre os métodos foi de 0.4 %, considerada insignificante.

Os resultados para a taxa de amortecimento são mostrados na tabela (VI.8.)

TABELA VI.8 - Resultados de taxas de amortecimento obtidos pelos três métodos (em %)

MODO	OP	LSCE	GOAL PROG.
1	2.39	2.78	2.68
2	1.21	1.26	1.11
3	1.73	1.78	1.59
4	1.41	1.39	1.26
5	2.32	2.47	2.42
6	3.14	3.38	3.70

No que diz respeito aos resultados das taxas de amortecimento, houve uma maior variação, entre os métodos. A variação máxima relativa entre eles foi da ordem de 17.8 %. Mesmo assim, a concordância entre os resultados dos diferentes métodos pode ser considerada bastante satisfatória.

A partir dos valores dos resíduos, das frequências naturais e das taxas de amortecimento estimados por cada método, e sabendo-se que o acelerômetro 5 localiza-se no drive point, foram calculados os modos de vibração normalizados em relação à massa modal (eqs. (III.20) e (III.21)).

Nas figs. (VI.9), apresenta-se uma comparação entre as formas modais dos três primeiros modos de flexão obtidos por cada um dos métodos de estimação. Como pode-se observar nestas figuras, houve uma semelhança satisfatória entre os resultados dos diferentes métodos.

O fator de escala modal (MSF- Modal Scale Factor) é uma das maneiras de comparação quantitativa de dois modos de vibração. Traçando-se um gráfico onde os pontos têm por abcissas as coordenadas de um modo de vibração obtido através de determinado método de estimação e por ordenadas as coordenadas do mesmo modo de vibração obtido por outro método, o fator de escala modal representa a inclinação (coeficiente angular) da reta melhor ajustada a este conjunto de pontos. A equação (VI.2) define o MSF.

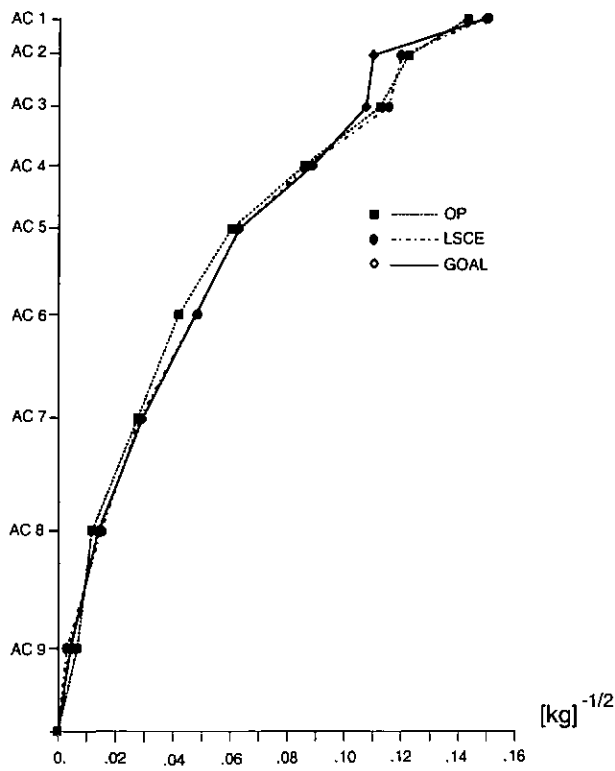


Fig. VI.9a - Comparação entre as formas modais do primeiro modo de flexão obtidas pelos três métodos.

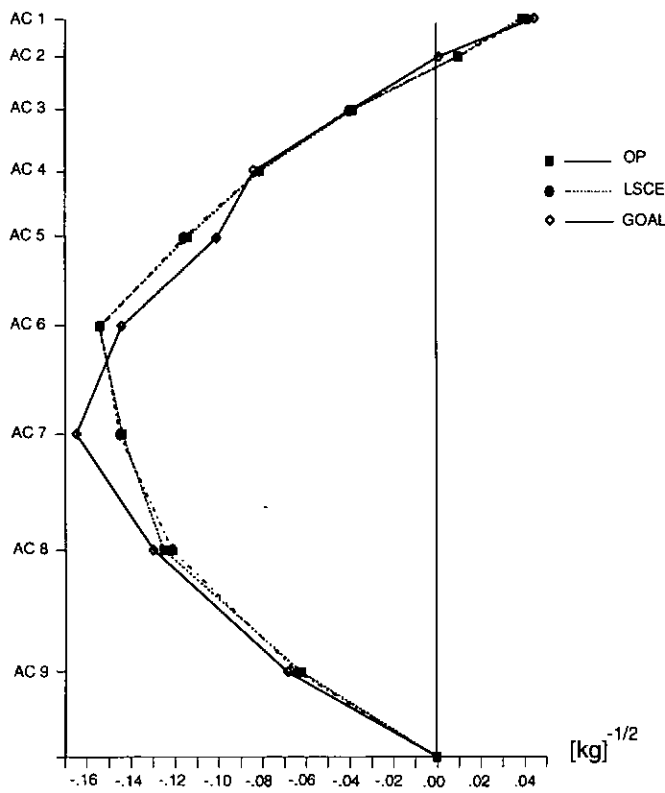


Fig. VI.9b - Comparação entre as formas modais do segundo modo de flexão obtidas pelos três métodos.

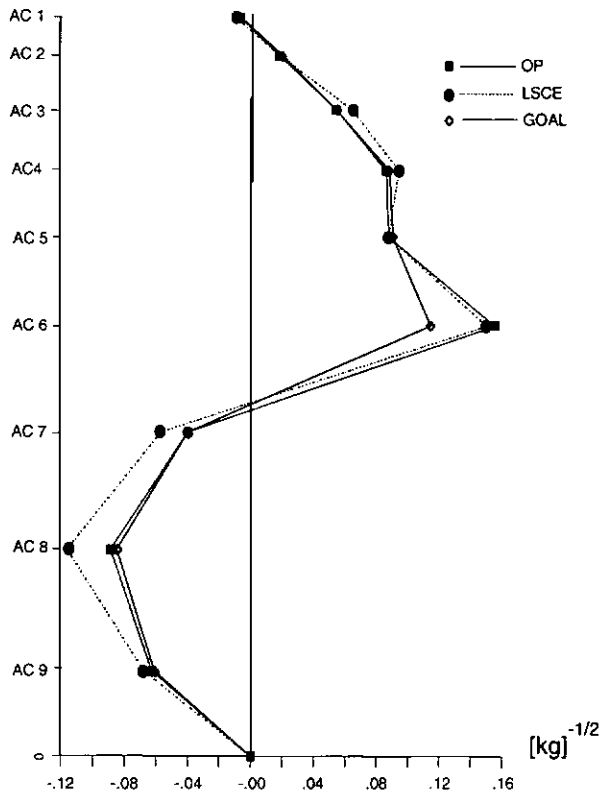


Fig. VI.9c - Comparação entre as formas modais do terceiro modo de flexão obtidas pelos três métodos.

$$MSF(\phi_{1_r}, \phi_{2_r}) = \frac{\sum_{i=1}^{N_p} (\phi_{1_r})_i (\phi_{2_r})_i}{\sum_{i=1}^{N_p} (\phi_{1_r})_i (\phi_{1_r})_i} \quad (VI.2)$$

onde : ϕ_{1_r} é a i-ésima componente do r-ésimo vetor modal (modo r) obtido por um determinado método de estimação modal

ϕ_{2_r} é a i-ésima componente do r-ésimo vetor modal (modo r) obtido por um outro método de estimação modal

No é o número total de pontos de medição de resposta

Calcularam-se os fatores de escala modal, para cada modo de vibração, relacionando dois a dois os métodos utilizados. A tabela VI.9 apresenta estes valores.

TABELA VI.9 - Valores do Fator de Escala Modal (MSF)

	VALORES DO FATOR DE ESCALA MODAL (MSF)					
	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6
	0.93	0.99	0.97	0.97	1.10	0.94
GP-LSCE	0.95	1.00	0.97	1.02	0.87	0.98
OP-LSCE	1.01	1.00	1.00	1.05	0.80	1.04

Os valores mostrados na tabela (VI.9) são bastante próximos de 1, o que indica uma boa correlação entre as formas modais dos três métodos. O valor que mais se distanciou da unidade foi o relativo ao quinto modo da comparação OP-LSCE.

De maneira semelhante ao que foi feito nas simulações numéricas, são apresentadas algumas figuras que comparam os módulos de FRFs experimentais com os módulos de FRFs geradas a partir dos parâmetros modais estimados por cada método. As figs. (VI.10) apresentam esta comparação para a FRF obtida com o acelerômetro 4, sendo a fig. (VI.10a) relativa aos resultados do OP, a fig. (VI.10b) relativa aos resultados do LSCE e a fig. (VI.10c) relativa aos resultados do GP.

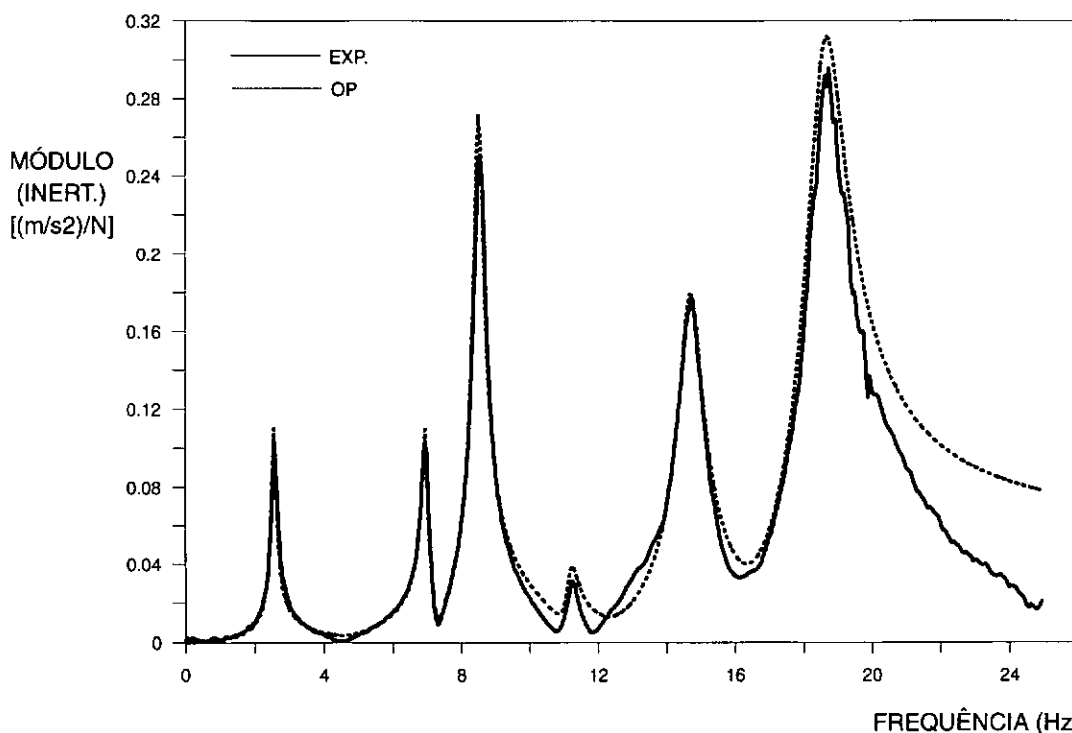


Fig. VI.10a - Comparação do módulo da FRF relativa ao acel. 4 : valores experimentais e valores obtidos a partir dos resultados estimados com o OP.

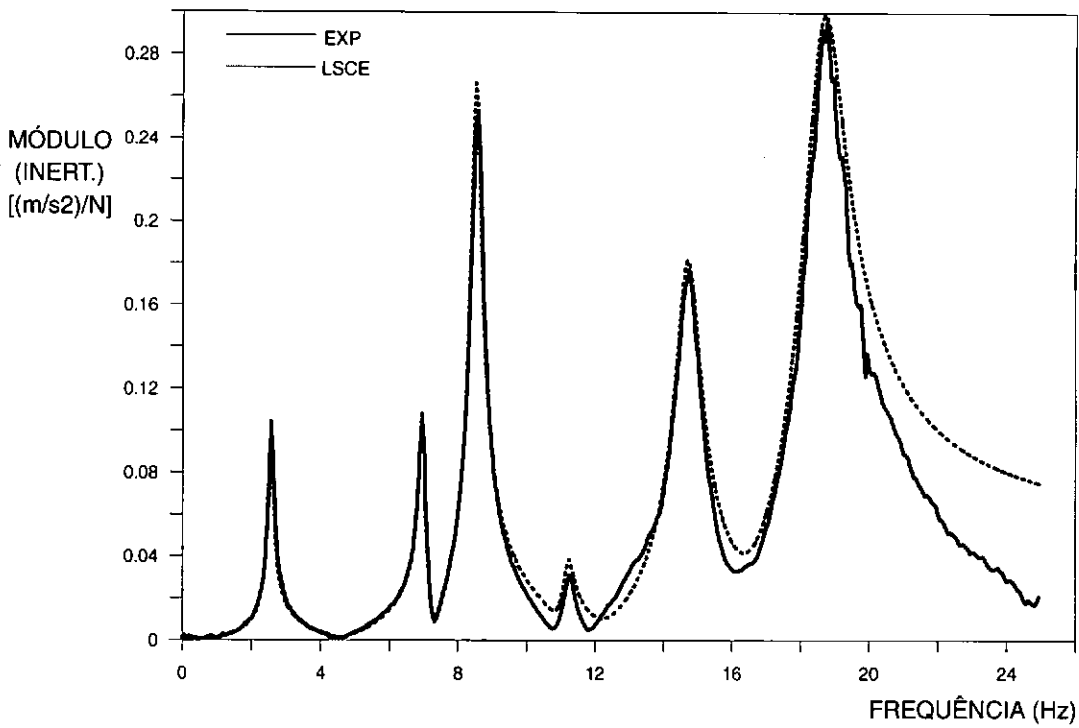


Fig. VI.10b - Comparação do módulo da FRF relativa ao acel. 4 : valores experimentais e valores obtidos a partir dos resultados estimados com o LSCE.

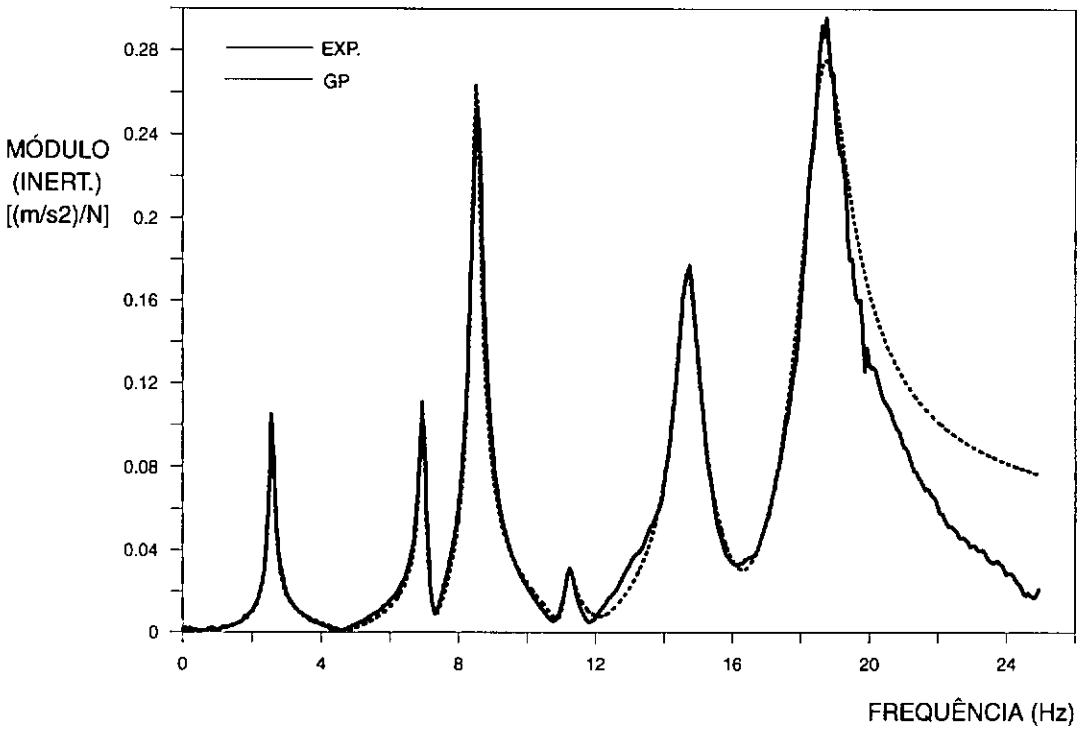


Fig. VI.10c - Comparação do módulo da FRF relativa ao acel. 4 : valores experimentais e valores obtidos a partir dos resultados estimados com o GP.

Analisando-se as figuras (VI.10), nota-se que os três métodos apresentaram estimativas semelhantes. Dois fatos merecem destaques : o GP foi o método que obteve mais precisão em torno do quarto modo de vibração (segundo modo de torção), que é exatamente aquele de menor amplitude no espectro; as FRFs estimadas pelos três métodos apresentaram um nível considerável de erro na região final do espectro (acima de 20 Hz). Este segundo fato indica que o modo superior, no caso o sétimo modo de vibração, que não aparece no espectro e não foi levado em conta na análise, exerce influência nesta região acima de 20 Hz. Foi então feita uma análise local, com o GP, na FRF relativa ao acelerômetro 4. Inicialmente, utilizou-se o termo residual de rigidez para representar a influência do modo superior. A nova comparação aparece na Fig. (VI.11).

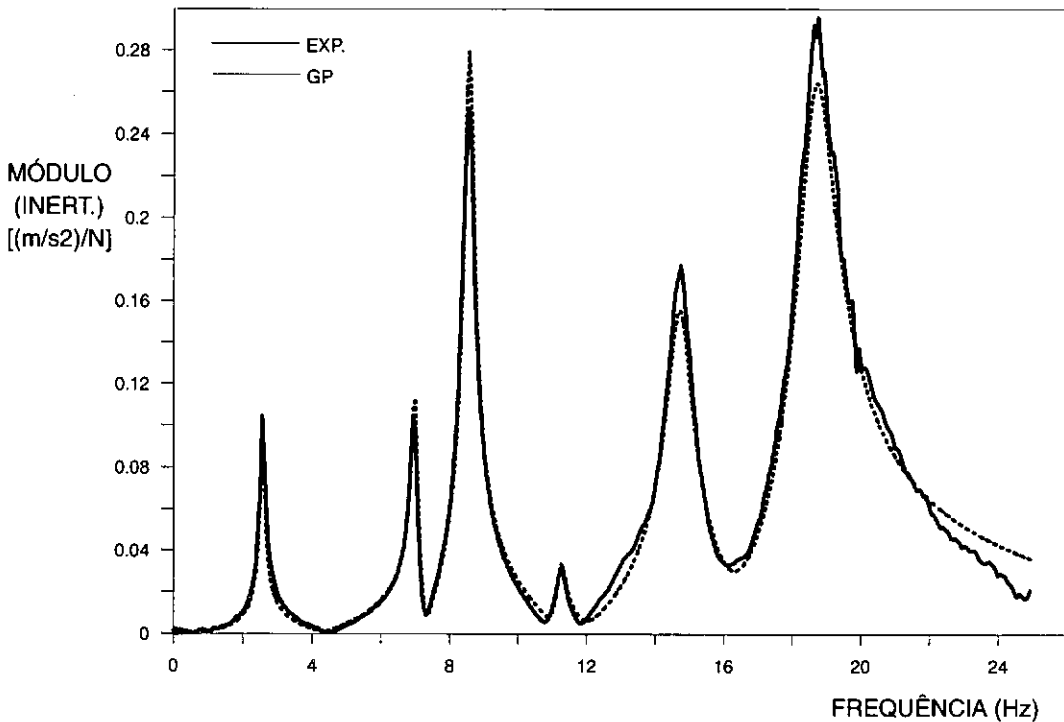


Fig. VI.11 - Comparação do módulo da FRF relativa ao acel. 4 : valores experimentais e valores obtidos a partir dos resultados estimados com o GP, considerando-se a influência dos modos superiores através do termo residual de rigidez.

Esta nova estimativa identificou parâmetros modais bastante próximos dos obtidos com a estimativa que não levava em conta o termo residual de rigidez. Comparando-se as figs. (VI.10c) com (VI.11), constata-se que a discrepância entre as FRFs experimental e estimada na Fig. (VI.10c) realmente se deu em razão de haver uma influência de modos superiores que não fora considerada.

Em seguida, foi feita mais uma análise local com a FRF do acelerômetro 4 através do GP. Ao invés de utilizar-se o termo residual de rigidez, considerou-se a existência de mais

um modo (o sétimo). A comparação desta nova estimacão com a curva experimental é mostrada na fig. (VI.12).

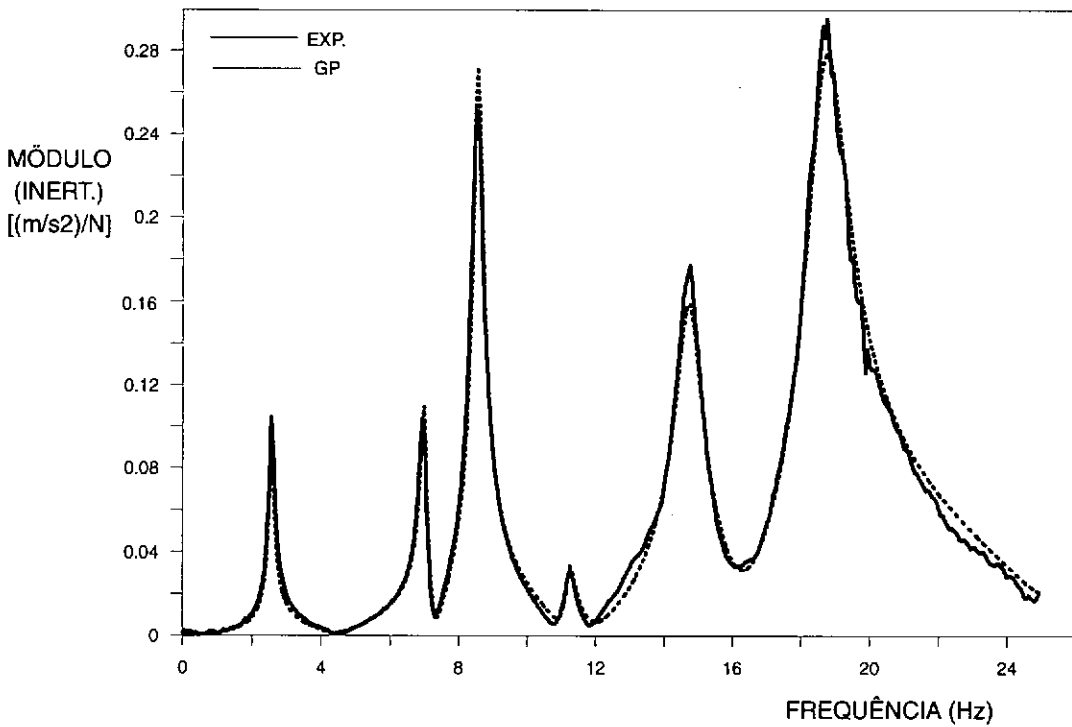


Fig. VI.12 - Comparaco do módulo da FRF relativa ao acel. 4 : valores experimentais e valores obtidos a partir dos resultados estimados com o GP, considerando-se sete modos na análise.

A estimacão com sete modos mostrou-se ainda mais precisa, na região final do espectro, do que aquela que considerava o termo residual de rigidez e, novamente, os parâmetros modais dos seis primeiros modos praticamente não se modificaram. Como conclusão, pode-se dizer que, para a FRF relativa ao acelerômetro 4, o termo residual de rigidez melhorou a qualidade da estimacão no trecho final do espectro, porém a utilizao de mais um modo na análise (total de sete, ao passo que apenas seis picos aparecem no espectro) a melhorou ainda mais.

As figs. (VI.13) são análogas às (VI.10), porém relativas à FRF obtida com o acelerômetro 8. As figuras (VI.13) mostram que, para a FRF relativa ao acelerômetro 8, a estimacão com o LSCE obteve, para os dois últimos modos do espectro, precisão sensivelmente menor do que a dos outros dois métodos. Ao contrário do ocorrido com a FRF do acelerômetro 4, a região final da FRF do acelerômetro 8 não indicou influência significativa de modos superiores. A razão para esta diferença entre as FRFs dos dois acelerômetros pode ser explicada através de uma análise do sétimo modo de vibrao (quarto modo de torção), que tem uma amplitude bem maior no ponto onde se localiza o acelerômetro 4 do que no relativo ao acelerômetro 8.

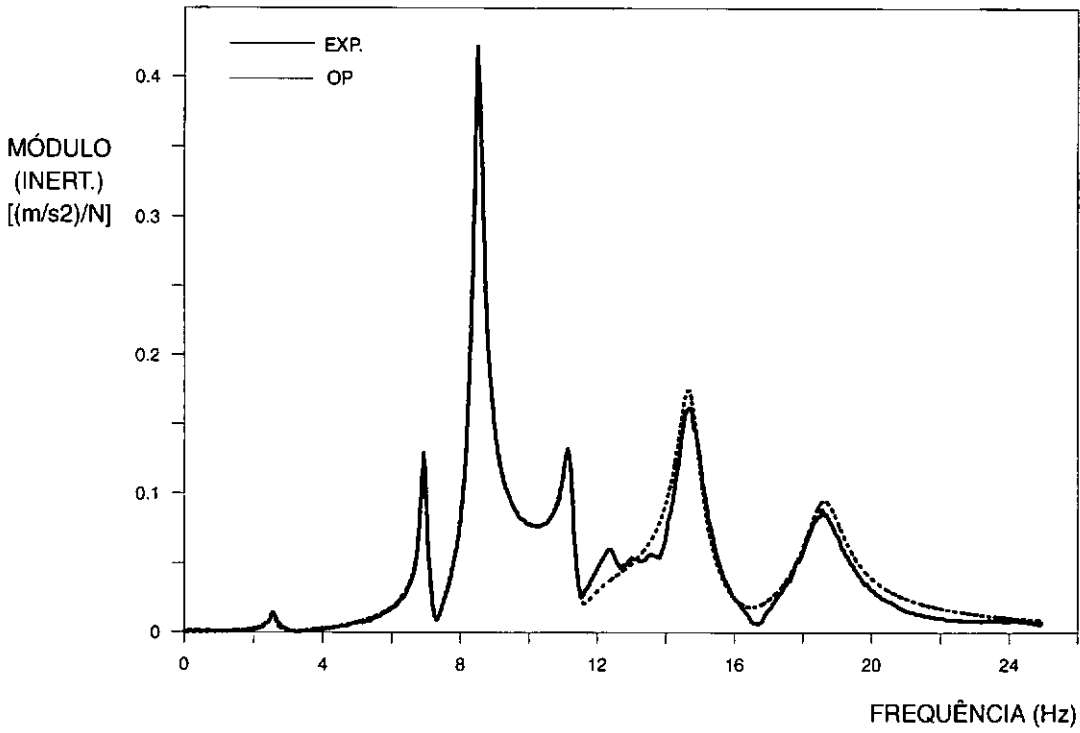


Fig. VI.13a - Comparação do módulo da FRF relativa ao acel. 8 : valores experimentais e valores obtidos a partir dos resultados estimados com o OP.

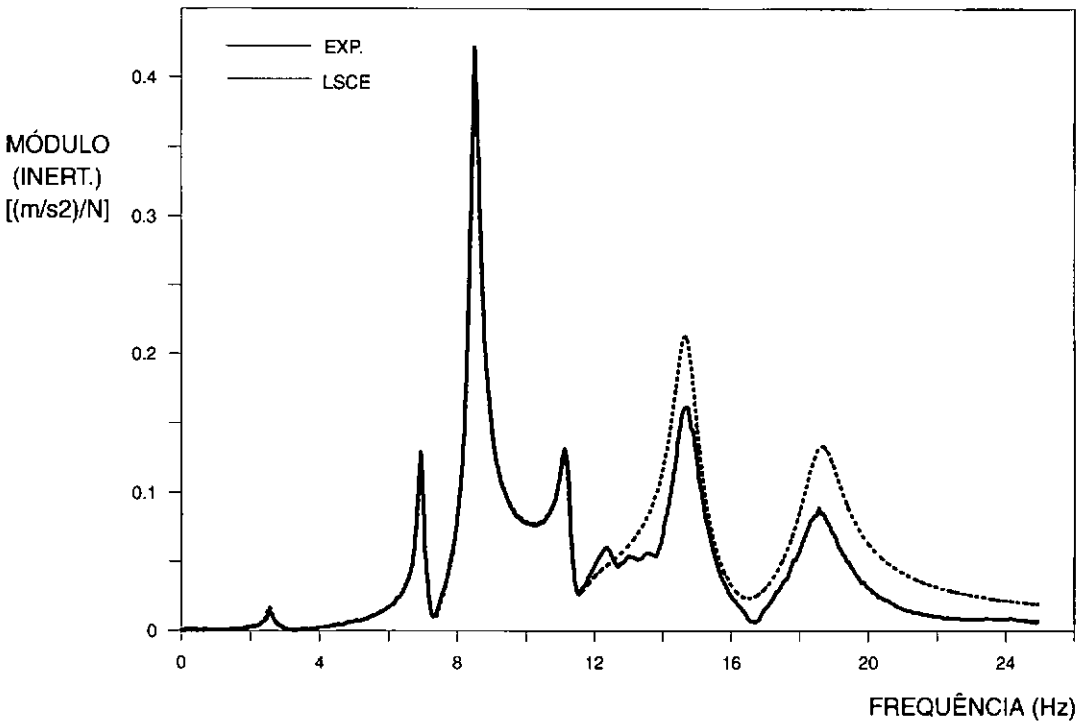


Fig. VI.13b - Comparação do módulo da FRF relativa ao acel. 8 : valores experimentais e valores obtidos a partir dos resultados estimados com o LSCE.

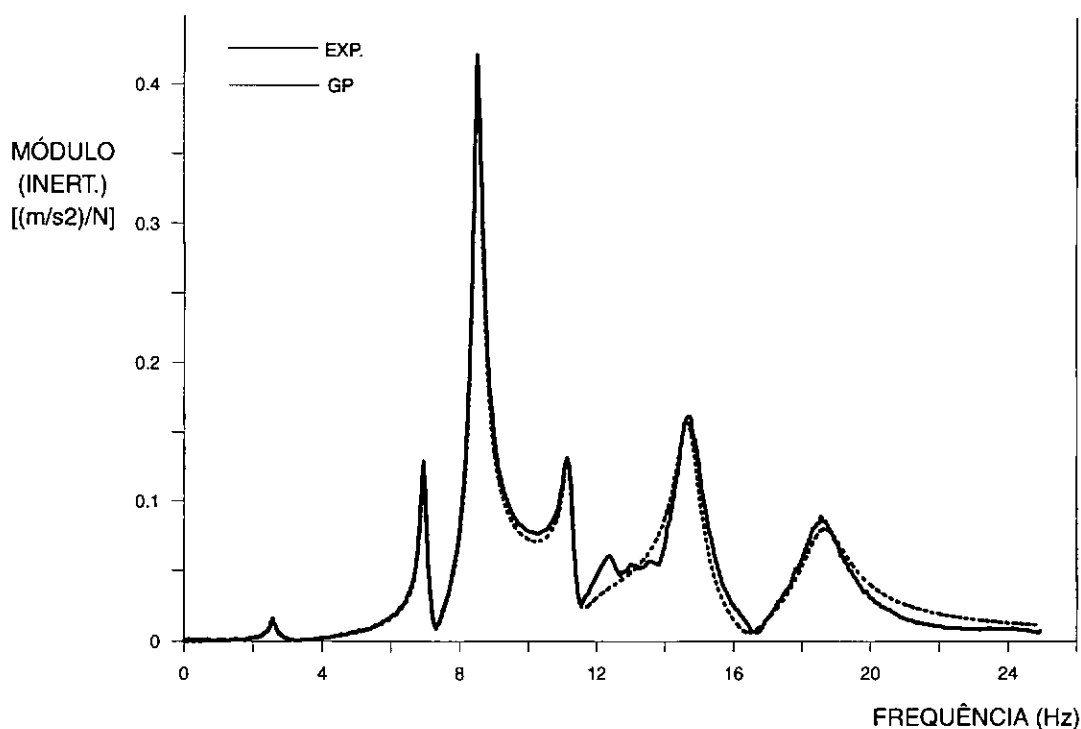


Fig. VI.13c - Comparação do módulo da FRF relativa ao acel. 8 : valores experimentais e valores obtidos a partir dos resultados estimados com o GP.

Um problema geralmente presente na estimação de parâmetros modais é a quantificação da eficiência de seus resultados. Alguns parâmetros estatísticos foram testados para correlacionar a curva experimental com a curva estimada, como o fator de correlação, porém nenhum deles mostrou-se adequadamente representativo da qualidade da estimação. A comparação visual pode ser bastante indicativa do ajuste realizado, no entanto trata-se de uma análise altamente subjetiva.

O valor do erro quadrático, que é minimizado para estimar os parâmetros modais, não tem um significado qualitativo concreto se analisado isoladamente, sendo dependente, entre outros fatores, do número de pontos analisados e do peso de cada ponto. Para contornar esta dificuldade, uma vez que se estão comparando diferentes métodos, optou-se por uma maneira relativa de avaliar as estimações realizadas. Foram calculados os erros quadráticos, para cada FRF, entre as curvas estimadas por cada método e as curvas experimentais. A tabela VI.10 apresenta as relações (Erro quadrático do OP / Erro Quadrático do GP) e (Erro quadrático do LSCE / Erro Quadrático do GP), respectivamente, para cada FRF e para o conjunto de todas as FRFs (total). Com este tipo de relação, avalia-se a eficiência dos resultados obtidos pelo método proposto comparativamente aos resultados dos dois métodos clássicos utilizados.

A tabela VI.10 comprova que o “Goal Programming” estimou os parâmetros modais com maior precisão do que os outros métodos, já que os valores apresentados nesta

tabela são de modo geral maiores do que 1. Com isso, seu erro quadrático total mostrou-se significativamente menor do que o dos outros. Analisando-se cada FRF separadamente, o único caso em que o erro quadrático do GP foi superior ao de outro método é o da FRF medida pelo acelerômetro 5 e, mesmo neste caso, a relação calculada é quase unitária. A tabela mostra também que, para a FRF obtida com o acelerômetro 2, as estimações realizadas pelo OP e pelo LSCE apresentaram uma precisão altamente inferior à realizada por meio do GP.

TABELA VI.10 - Razão entre Erros Quadráticos.

FRF	$\frac{\text{Erro Quadr. OP}}{\text{Erro Quadr. GP}}$	$\frac{\text{Erro Quadr. LSCE}}{\text{Erro Quadr. GP}}$
ACEL. 1	1.05	3.75
ACEL. 2	17.40	13.13
ACEL. 3	2.56	1.49
ACEL. 4	1.59	1.18
ACEL. 5	0.93	1.07
ACEL. 6	4.71	5.65
ACEL. 7	2.24	2.35
ACEL. 8	1.81	4.15
ACEL. 9	1.41	1.40
TOTAL	3.74	3.80

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES

A utilização do algoritmo de otimização “Goal Programming” para a estimação modal foi idealizada objetivando casos bastante singulares, que via de regra se constituem em um problema de alto grau de dificuldade para a maioria dos métodos existentes. A proximidade entre frequências naturais e a ocorrência de taxas de amortecimento elevadas (maiores do que 5%) são fatores que tornam muito grande a influência de outros modos de vibração na região do pico de ressonância de um determinado modo. Outra situação que em geral cria dificuldades para a estimação modal é a da presença de níveis de ruído elevados nas FRFs medidas. A princípio, casos como os acima citados são exceções. Em se tratando de estruturas civis, são ainda menos frequentes, pois estas normalmente apresentam baixos amortecimentos e frequências naturais bem espaçadas entre si. Entretanto, em estruturas do tipo cascas e placas, um grande acoplamento modal pode ser verificado. O uso cada vez mais frequente de sistemas de absorção com taxas de amortecimento elevadas torna ainda mais significativa a importância de métodos que se mostram eficientes nos casos de frequências naturais múltiplas ou fortemente acopladas. Quando vários sistemas de absorção são usados, estando eles calibrados em frequências naturais coincidentes ou próximas entre si, a FRF da estrutura apresentará uma densidade modal extremamente elevada em uma faixa estreita do espectro. Segundo Allemang [1], “o maior uso de materiais altamente amortecidos, materiais não homogêneos e metodologia de amortecimento ativo requer a reavaliação dos algoritmos de estimação de parâmetros modais. Uma necessidade técnica óbvia é o desenvolvimento e avaliação de algoritmos de estimação de parâmetros modais capazes de identificar sistemas com alta densidade modal e alto amortecimento.”

A partir das motivações citadas, e baseado em experiências anteriores bem sucedidas em relação ao uso do “Goal Programming” [74; 75; 76] na COPPE, vislumbrou-se a possibilidade de utilizá-lo para a estimação modal. A função erro quadrático foi definida como a função erro a ser minimizada pelo algoritmo, e restrições quanto às frequências naturais e taxas de amortecimento foram impostas. Outros pontos que merecem citação quanto à implementação do novo método são a opção de levar em conta na estimação a influência de modos fora da banda de análise e também a possibilidade do uso de um incremento de frequência não constante.

Realizaram-se então simulações numéricas procurando-se abranger os casos complexos referidos, que foram analisados por três métodos : o “Least Squares Complex Exponential” (no domínio do tempo, apresentado no Capítulo IV), o “Orthogonal Polynomial” (no domínio da frequência, também apresentado no Capítulo IV) e o método proposto. Nos casos mais simples, A e B, onde se verifica um ligeiro acoplamento modal, os três métodos

apresentaram eficiência. Porém, a inclusão de ruídos às FRFs fez com que as estimações através do “Goal Programming” se mostrassem mais precisas. No caso C, em que o acoplamento é maior, o GP novamente obteve desempenho superior ao do OP, diferença essa que aumentou à medida em que o nível de ruído cresceu, enquanto o LSCE não foi capaz de identificar os três modos nem mesmo na situação sem ruído. Quanto ao caso D, além de frequências naturais próximas, as taxas de amortecimento eram relativamente altas. O desempenho do GP neste caso pode ser considerado bom, mesmo com elevados níveis de ruído, o mesmo não podendo ser dito quanto ao OP, que saiu-se relativamente bem apenas na situação sem ruído, e quanto ao LSCE, que mais uma vez não conseguiu identificar os três modos de vibração existentes em nenhuma situação. Finalmente, no caso E, que apresenta duas frequências naturais coincidentes, os resultados do GP também foram de qualidade superior aos do OP, ao passo que o LSCE foi capaz de identificar os três modos somente no caso sem ruído. Estas simulações comprovam que o método proposto apresentou o que dele se esperava : boa performance em situações onde a estimação modal é uma tarefa árdua.

Os testes experimentais realizados em um modelo reduzido de uma plataforma fixa de petróleo tiveram suas respostas analisadas pelos três métodos citados no parágrafo anterior. Com um total de nove pontos de medição de resposta e excitação em um único ponto, as FRFs foram analisadas de forma global, e os métodos estimaram parâmetros modais semelhantes entre si, com boa precisão. A análise dos erros quadráticos de cada método demonstrou que o GP obteve maior eficiência na estimação modal.

Um aspecto importante para a estimação de parâmetros modais através do GP é o ponto de partida do processo : estimativas iniciais e incrementos iniciais para as variáveis de decisão, que são os próprios parâmetros modais. Como em todo processo iterativo, pressupõe-se que devem ser tomados diferentes pontos de partida para se verificar se todos levam aos mesmos resultados finais. Porém, os diversos testes realizados mostram que, em casos nos quais as frequências naturais aparecem bem espaçadas no espectro, a influência do ponto de partida tanto nos resultados finais quanto na velocidade de convergência é insignificante. Se o caso é mais complexo (por exemplo, casos do tipo D e E das simulações realizadas neste trabalho), o ponto de partida pode ser determinante para o sucesso da estimação e efetivamente pode ser necessário o uso de diferentes pontos de partida para que os resultados finais sejam considerados confiáveis. Nestes casos, mesmo que as estimativas iniciais tenham valores bastante afastados dos valores relativos à solução final, a utilização de incrementos iniciais altos vai possibilitar ao método a obtenção de resultados com boa acurácia. Isto porque evitar-se-á que o processo iterativo se mantenha “preso” a um mínimo local da função erro. Feitas estas colocações, surgem duas importantes conclusões :

- o procedimento correto a ser adotado pelo usuário do GP deve ser o de utilizar incrementos iniciais bastante altos em relação às respectivas estimativas iniciais;

- a experiência do autor, adquirida por meio de diversos tipos de testes realizados, dá substância à conclusão que o ponto de partida do processo não é um problema de maiores proporções para o desempenho do GP.

Avaliar a qualidade da estimação realizada não é uma tarefa simples. Em se gerando FRFs através dos parâmetros estimados e comparando-as visualmente às FRFs experimentais, pode-se chegar a uma conclusão subjetiva quanto à qualidade da estimação. Na tentativa de realizar uma avaliação quantitativa sobre a relação entre FRFs estimadas e experimentais, alguns parâmetros estatísticos foram tentados, porém nenhum deles demonstrou-se adequadamente representativo do ajuste. O erro quadrático por si só não permite uma quantificação da eficiência da estimação.

No que tange ao sistema de aquisição e processamento de dados implementado, sua importância reside no fato de permitir que se obtenham diversas FRFs simultaneamente, acelerando de forma significativa os testes modais.

Concretizada a estimação modal, a última etapa do processo de identificação estrutural é o ajuste do modelo numérico, que consiste na correção das matrizes numéricas de massa e rigidez através dos resultados experimentais. Vê-se com otimismo a idéia da utilização do “Goal Programming” para efetuar tal ajuste. Outra possibilidade vislumbrada é a de realizar o ajuste do modelo numérico de forma direta, sem passar pela estimação modal. Neste último caso, o “Goal Programming” poderia ser utilizado para minimizar o erro entre as FRFs obtidas numericamente e experimentalmente ajustando-se os parâmetros geométricos ou físicos da estrutura modelada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS :

- [1] - Allemang, R. J.; "Modal Analysis - Where Do We Go From Here ?", Proc. 11th Int. Sem. on Modal Analysis, 1993.
- [2] - Ignizio, J. P.; "Goal Programming and Extensions", Lexington Books, 1976.
- [3] - Rosa, L. F. L.; "Desenvolvimento de um Sistema Computacional para a Determinação dos Parâmetros Modais de Estruturas Através do Método do Círculo Ajustado", Tese M. Sc., COPPE - UFRJ, 1991.
- [4] - Viero, P. F., "Estudo de Procedimentos para Detecção de Danos em Estruturas Offshore", Tese de Doutorado, COPPE / UFRJ, a ser defendida.
- [5] - Brigham, E. O.; "The Fast Fourier Transform and Its Applications", Prentice-Hall International Editions, 1988.
- [6] - Golub, G.; Van Loan, C.; "An Analysis of the Total Least Squares Problem", Proc. 15th Int. Sem. on Modal Analysis, 1990
- [7] - Bossan, M. C.; "Filtragem e Estimativa de Espectros De Amplitude e de Resposta de Frequência Através de Processador Digital de Sinais", Projeto final, Dept. Eng. Eletrônica, COPPE - UFRJ, 1991.
- [8] - Tujal, P.; "Rotina em C para Aquisição de Dados de Placa Lynx", COPPE - UFRJ, 1993.
- [9] - Press, W. H.; Flannery, B. P; Teukolsky, S. A.; Vetterling, W. T.; "Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing", Cambridge University Press, 1986.
- [10] - Crochiere, R. E.; Rabiner, L. R.; "Multirate Digital Signal Processing", Prentice-Hall Inc., 1983.
- [11] - Andrade, R. F. M.; "Estimação de Prâmetros Modais para Excitação Múltipla", Tese D. Sc., COPPE - UFRJ, a ser defendida.
- [12] - Andrade, R. F. M.; "Trabalho para Teste do Programa para Análise e Processamento de Sinais", COPPE - UFRJ.
- [13] - Lembregts, F, "Frequency Domain Identification Techniques for Experimental Multiple Input Modal Analysis, Tese D. Sc., Katholieke Universiteit Leuven, 1988.
- [14] - Leuridan, J.; Auweraer, H. van der; Mergeay, M.; "Review of Parameter Estimation Techniques", Proc. of the 15th Intrenational Seminar on Modal Analysis , Leuven, 1990.
- [15] - Juang, J.-N.; "Applied System Identification", Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1994.

- [16] - Ewins, D. J.; "Modal Testing : Theory and Practice", Research Studies Press Ltd., 1984.
- [17] - Rosa, L. F. L.; Roitman, N; Magluta, C.; "Estimação de Parâmetros Modais Através do Método do Círculo Ajustado", Oitavo SIBRAT, 1994
- [18] - Youngman, M. D.; "The Design and Application of a Microprocessor Based Modal Analysis System", Ph. D. Dissertation, Simon Eng. Labs, Univ. of Manchester, 1987.
- [19] - Goyder, H. G. D.; "Methods and Application of Structural Modeling from Measured Structural Frequency Response Data", Journal of Sound and Vibration, Vol. 29, Nr. 3.
- [20] - Gimenez, J.; Carrascosa, L.; "On the Use of Constraint Equations in the Global Fitting Algorithms of Transfer Function", Proc. 2nd IMAC, Orlando, 1984.
- [21] - Brown, D. L.; Allemang, R. J.; Zimmerman, R.; Mergeay, M.; "Parameter Estimation Techniques for Modal Analysis", Soc. of Automotive Engineers, paper No. 790221, 1979.
- [22] - Gimenez, J.; Carrascosa, L.; "Global Fitting. An efficient Method of Experimental Modal Analysis of Mechanical Structures", Proc. 1st IMAC, Orlando, 1982.
- [23] - Busturia, J. M.; Gimenez, J. G.; "Multiexcitation Multiresponse Non-Linear Least Squares Algorithm", Proc. of 10th Int. Sem. on Modal Analysis, Leuven, 1985.
- [24] - VanLoon, P.; "Modal Parameter of Mechanical Structures", Ph. D. Thesis, University of Cincinnati, 1974.
- [25] - Kim, K.-J.; Sim, C.-G.; "A New Curve Fitting Algorithm for Modal Parameter Estimation", Proc. 5th IMAC, Orlando, 1987.
- [26] - Mergeay, M.; "Least Squares Complex Exponential Method and Global System Parameter Estimation Used by Modal Analysis", Proc. 8th Int. Sem. on Modal Analysis", Leuven, 1983.
- [27] - Leuridan, J. M.; Brown, D. L.; Allemang, R. J.; "Time Domain Parameter Identification Methods for Linear Modal Analysis : a unifying approach", ASME-paper 85-DET-90, 1985.
- [28] - Deblawe, F.; Brown, D. L.; Allemang, R. J.; "The Polyreference Time Domain Technique", Proc. 5th IMAC, Orlando, 1987.
- [29] - Vold, H.; Kundrat, J.; Rocklin, T.; Russel, R.; "A Multi Input Modal Parameter Estimation Algorithm for Mini Computers", SAE-paper 820194, SAE Transactions Vol. 91/1, 1982.

- [30] - Vold, H.; Rocklin, T.; "The Numerical Implementation of a Multi-Input Modal Estimation Method for Mini-Computers", Proc. 1st IMAC, Orlando, 1982.
- [31] - Deblawe, F. J.; "Practical Applications of the Polyreference Time Domain Technique", M. Sc. Thesis, Dept. of Mechanical and Industrial Engineering, University of Cincinnati, 1986.
- [32] - Deblawe, F. J.; Allemang, R. J.; Brown, D. L.; "Some Practical Considerations for the Polyreference Time Domain Technique", Proc. 11th Int. Sem. on Modal Analysis, Leuven, 1986.
- [33] - Crowley, J. R.; Rocklin, G. T.; Hunt, D. L.; Vold, H.; "The Practical Use of the Polyreference Modal Parameter Estimation", Proc. 2nd IMAC, Orlando, 1984.
- [34] - Crowley, S. M.; Brown, D. L.; Allemang, R. J.; "The Extraction of Valid Residue Terms using the Polyreference Technique", Proc. 3rd IMAC, Orlando, 1985.
- [35] - Vold, H.; Crowley, J.; "A Modal Confidence Factor for the Polyreference Method", Proc. 3rd IMAC, Orlando, 1985.
- [36] - Hunt, D. L.; Brillhart, R.; "Practical Application of the Modal Confidence Method", Proc. 4th IMAC, Los Angeles, 1986.
- [37] - Ibrahim, S. R.; Mikulcik, E. C.; "A Method for the Direct Identification of Vibration Parameters from the Free Response", The Shock and Vibration Bulletin, 47/4, 1977.
- [38] - Pappa, R. S.; Ibrahim, S. R.; "A Parametric Study of the Ibrahim Time Domain Modal Identification Algorithm", The Shock and Vibration Bulletin, 51/3, 1981.
- [39] - Ibrahim, S. R.; "Modal Confidence Factor in Vibration Testing", AIAA Journal of Spacecraft and Rockets 15, 1978.
- [40] - Ibrahim, S. R.; "Double Least Squares Approach for Use in Structural Modal Identification.
- [41] - Ibrahim, S. R.; "An Upper Hessenberg Sparse Matrix Algorithm for Modal Identification on Minicomputers", Proc. 10th Int. Sem. on Modal Analysis, Leuven, 1985.
- [42] - Ibrahim, S. R.; Pappa, R. S.; "Large Modal Survey Testing Using the Ibrahim Time Domain Technique", AIAA Journal of Spacecraft and Rockets 19, 1982.
- [43] - Pappa, R. S.; "ITD Analysis of Free-Decay Response from the Galileo Modal Test", AIAA-paper No. 84-1070, 1984.
- [44] - Leuridan, J.; Ibrahim, S. R.; "A Time Domain Linear Model Estimation Technique for Global Modal Parameter Identification", Proc. 2nd IMAC, 1984.

- [45] - Leuridan, J.; "Some Direct Parameter Model Identification Methods Applicable for Multiple Input Modal Analysis", Ph. D. dissertation, Dept. of Mechanical and Industrial Engineering", University of Cincinnati, 1984.
- [46] - Allemang, R. J.; "Experimental Modal Analysis", Modal Testing and Modal Refinement, ASME-AMD 59, 1983.
- [47] - Leuridan, J. M.; "Direct System Parameter Identification of Mechanical Structures with Application to Modal Analysis", M. Sc. Thesis, Dept. of Mechanical and Industrial Engineering", University of Cincinnati, 1981.
- [48] - Leuridan, J. M.; Vold, H.; "A Time Domain Linear Model Estimation Technique for Multiple Input Modal Analysis", Modal Testing and Modal Refinement Symposium, ASME Winner Annual Meeting, 1983.
- [49] - Leuridan, J. M.; Kundrat, J.; "Advanced Matrix Methods for Experimental Modal Analysis - A Multi-Matrix Method for Direct Parameter Extraction", Proc. 1st IMAC, Orlando, 1982.
- [50] - Coppolino, B.; "A Simultaneous Frequency Domain Technique for Estimation of Modal Parameters from Measured Data", SAE-paper 811046, Aerospace Congress and Exposition, Anaheim-USA, 1981.
- [51] - Leuridan, J.; Brown, D. L.; Allemang, R. J.; "Direct System Parameter Identification of Mechanical Structures with Application to Modal Analysis", AIAA paper No. 82-0767 Proc. 23rs Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Part 2, 1982.
- [52] - Lembrechts, F.; Snoeys, R.; "Application and Evaluation of the Multiple Input Modal Parameter Estimation", Journal of Modal Analysis, Leuven, 1986.
- [53] - Zhang, L.; Kanda, H.; Brown, D. L.; Allemang, R. J.; "A Polyreference Frequency Domain Method for Modal Parameter Identification", ASME paper Nr. 85-DET-106, 1985.
- [54] - Link, M.; Volland, A.; "Identification of Structural System Parameters From Dynamic Response Data", Zeitschrift für Flugwissenschaften und Weltraumforschung, 1978.
- [55] - Juang, J.-N.; Pappa, R. S.; "An Eigensystem Realization Algorithm (ERA) for Modal Parameter Identification and Model Reduction", NASA/JPL Workshop on Identification and Control of Flexible Space Structures, San Diego, 1984.
- [56] - Juang, J.-N.; Pappa, R. S.; "An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Model Reduction", AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics 8/5, 1985.
- [57] - Link, M.; "Entwicklung eines Verfahrens für Durchführung von Dynamischen Tests an Satellitenstrukturen", Dornier-System GmbH, Friedrichshafen, Bericht EMSB-26/75, 1975.

- [58] - Ibrahim, S. R.; "Modal Identification Techniques. Assessment and Comparison", Proc. 5rd IMAC, Orlando, 1987.
- [59] - Richardson, M. H.; Formenti, D. L.; "Parameter Estimation from Frequency Response Measurements using Rational Fraction Polynomials", Proc. 1st IMAC, Orlando, 1982.
- [60] - Auweraer, H. Van der; Snoeys, R.; Leuridan, J. M.; "A Global Frequency Domain Modal Parameter Estimation Technique for Mini-computers", Proc. 10th Int. Sem. on Modal Analysis, Leuven, 1985.
- [61] - Auweraer, H. Van der; "Development and Evaluation of Advanced Measurement Methods for Experimental Modal Analysis", Ph. D. Dissertation, Mech. Eng. Dept., Leuven, 1987.
- [62] - Richardson, M. H.; Formenti, D. L.; "Global Curve Fitting of Frequency Response Measurements using the Rational Fraction Polynomial Method", Proc. 3rd IMAC, Orlando, 1985.
- [63] - Richardson, M. H.; "Global Frequency and Damping Estimates from Frequency Response Measurements", Proc. 4th IMAC, Los Angeles, 1986.
- [64] - Jones, R.; Kobayashi; "Global Parameter Estimation using Rational Fraction Polynomials" Proc. 4th IMAC, Los Angeles, 1986.
- [65] - Auweraer, H. Van der; Leuridan, J.; "Multiple Input Orthogonal Polynomial Parameter Estimation"; Proc. 11th Int. Seminar on Modal Analysis, Leuven, 1986.
- [66] - Shih, C. Y.; Tsuei, Y. G.; Allemang, R. J.; Brown, D. L.; "Extension of a Parameter Estimation Method to Multiple Reference Frequency Response Measurements", Proc. 11th Int. Sem. on Modal Analysis, Leuven, 1986.
- [67] - Rosa, L. F. L.; Roitman, N.; Magluta, C.; "Modal Parameter Estimation Using An Optimization Technique", a ser submetido ao International Journal of Experimental and Analytical Modal Analysis.
- [68] - Brillhart, R. D.; Hunt, D. L.; Crowley, S. M.; "Comparison of Modal Parameters Estimation Methods for Highly Damped Structures", Proc. 6th IMAC, 1988.]
- [69] - Jr., S. L. Marple, "Digital Spectral Analysis", Prentice - Hall Inc., 1987.
- [70] - Lawson, C. L.; Hanson, R. J.; "Solving Least Squares Problems", "Prentice-Hall Englewood Cliffs NJ, 1974.
- [71] - Kelly, L. G.; "Curve Fitting and Data Smoothing", Handbook of Numerical Methods and Applications, Addison-Wesley, Reading MA, 1967.
- [72] - Forsythe, G. E.; "Generation and Use of Orthogonals Polynomials for Data-Fitting", Journal Soc. Indust. Appl. Math., Vol. 5 No.2, 1957.

- [73] - The Star System, Structural Measurement System, GenRad Structural Tests Products, November 1994.
- [74] - Vasconcelos, J. M. A.; Batista, R. C.; Cyrino, J. C.; "Design of Semisubmersible Columns Using Multiple Criteria Methods and Expert Systems", PRADS'92 - Practical Design of Ships and Mobile Units, Vol. 2, pp 981-994, Elsevier Applied Science, U.K., May 1992.
- [75] - Neves, F. A., "Programação Multi-Objetivos Aplicada à Otimização de Projeto de Pontes Estaiadas", Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, a ser defendida.
- [76] - Magluta, C., "Sistemas Dinâmicos Passivos para Absorção de Vibração Estruturais", Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, 1993.
- [77] - Pike, R. W., "Optimization for Engineering System", Van Nostrand Reinbold Company, 1986.
- [78] - Ignizio, J.P., "Linear Programming in Single and Multiple Objective System", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1982.
- [79] - Sandgren, E., "Structural Design Optimization for Latitude by Nonlinear Goal Programming", Computers & Structures, Vol. 33, No. 6, pp. 1395-1402, 1989.
- [80] - Formenti, D. L., A Study of Parameter Estimation Errors : "A Curve-Fitting Challenge", Structural Measurement Systems, 1982.
- [81] - Carneiro, F.L., "Análise Dimensional e Teoria da Semelhança e dos Modelos Físicos", Editora UFRJ, 1993.