APLICAÇÃO DO M.E.C. À MECÂNICA DA FRATURA ELASTODINÂMICA COM FUNÇÕES DE GREEN NUMÉRICAS

Luis Paulo da Silva Barra

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. José Claudio de Faria Telles, Ph.D.
(Presidente)

Ney Augusto Dumont, Dr.Ing.

Luiz Antonio de Souza, D.Sc.

Prof. Webe João Mansur, Ph.D.

Solange Guimarães D.Sc.

José Antonio Marques Carrer, D.Sc.

Rio de Janeiro, R.J. - Brasil
Dezembro de 1996

BARRA , LUIS PAULO DA SILVA

Aplicação do MEC à Mecânica da Fratura Elastodinâmica

com Funções de Green Numéricas

x, 116p., 29,7 cm, (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia Civil, 1996)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Método dos Elementos de Contorno 2. Mecânica da Fratura

3. Dinâmica

I. COPPE/UFRJ II. TÍTULO (série)

Ao meu pai

Resumo de Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.).

Aplicação do MEC à Mecânica da Fratura Elastodinâmica com Funções de Green Numéricas

Luis Paulo da Silva Barra

Dezembro de 1996

Orientador: José Claudio de Faria Telles

Programa: Engenharia Civil

Uma das alternativas no tratamento de problemas de Mecânica da Fratura, através do Método dos Elementos de Contorno (MEC), é a utilização de soluções fundamentais que contenham a trinca.

Tais soluções, conhecidas como funções de Green, quando implementadas no MEC eliminam a necessidade da discretização ao longo da trinca. Desta forma, sua utilização leva à estratégia de solução mais precisa, no âmbito do MEC. Atualmente, porém, estas soluções só são conhecidas analiticamente para problemas estáticos com trinca única de geometria retilínea ou em arco circular e exigem grande esforço computacional para o seu cálculo.

No presente estudo são desenvolvidas e implementadas funções de Green numéricas para problemas de Mecânica da Fratura Elastodinâmicos, descritos tanto no

domínio da frequência como no domínio transformado de Laplace. A geração das componentes da função de Green é feita através da utilização da equação integral hipersingular de contorno. A vantagem deste procedimento é sua generalidade, podendo ser aplicado a problemas de trincas múltiplas com geometria qualquer, com eficiência competitiva mesmo para os casos elastostáticos onde a função de Green analítica é conhecida.

São apresentadas respostas em termos de fatores de intensidade de tensão tanto para problemas carregados harmonicamente no tempo como para problemas transientes, incluindo domínios limitados e ilimitados. Quando possível, os resultados obtidos são comparados com soluções analíticas onde se pode observar a precisão obtida. Nos casos em que o problema só dispõe de soluções numéricas, a resposta da presente formulação é comparada com as respostas obtidas por procedimentos desenvolvidos por outros autores.

Abstract of thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fullfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D. Sc.).

Application of BEM to Elastodynamic Fracture Mechanics with Numerical Green's Function

Luis Paulo da Silva Barra

December, 1996

Thesis Supervisor: José Claudio de Faria Telles

Department: Civil Engineering

The implementation of fundamental solutions including the crack existence is one of the alternatives in treating Fracture Mechanics problems by the Boundary Element Method (BEM).

These solutions, known as Green functions, when implemented in BEM eliminate the need for discretizing crack surface. Therefore, their utilization lead to the most accurate BEM solution strategy. Nevertheless, such solutions are presently only available in analytic form for static problems with a straight or circular single crack, and its calculation demands great computational effort.

In the present work, numerical Green's functions for Elastodynamic Fracture Mechanics problems, in the frequency and Laplace Transform domains are developed. The generation of the Green's function components is carried out throught the applic-

ation of the hypersingular traction boundary integral equation. The main advantage of this aproach is its generality, which permits efficient solutions to general geometry multiple crack problems, even in elastostatics where the analytical Green's function is known.

Stress intensity factors, either for time harmonic or transient problems with a single crack defined within bounded and unbounded domains are presented. The results obtained are compared with analytical ones whenever possible, and to cases where only numerical solutions are available, results are compared with alternative numerical approaches developed by other authors.

Índice

I Introdução **1**

II Elastodinâmica Linear **8**

II.1 Notação 8

II.2 Equações da Elastodinâmica Linear 11

II.2.1 Teorema da Reciprocidade 13

II.2.2 Ondas de Pressão e Cisalhamento 14

II.2.3 Condições de Radiação e Regularidade 16

II.2.4 Problemas Planos 16

II.2.5 Ondas de Rayleigh 19

II.3 Transformadas Integrais 20

II.3.1 Transformada de Fourier 20

II.3.2 Transformada de Laplace 22

II.4 Elastodinâmica em Domínios Transformados 24

II.4.1 Elastodinâmica no Domínio da Freqüência 24

II.4.2 Elastodinâmica no Domínio Transformado de Laplace 26

III MEC Aplicado à Elastodinâmica em Domínios Transformados **28**

III.1 Equação Fundamental do MEC 29

III.2 Soluções Fundamentais 30

III.3 Cálculo de Tensões em Pontos Internos 31

III.4 Equação Integral para Pontos no Contorno 33

III.5 Equação Hipersingular do MEC 37

IV Função de Green Numérica em Domínios Transformados **39**

IV.1 Utilização da Função de Green 39

IV.2 Geração da Função de Green Numérica no Domínio da Freqüência 42

IV.3 Aplicação a Trincas Retilíneas Horizontais 45

IV.4 Cálculo de Tensões em Pontos Internos 55

IV.5 Cálculo das Aberturas do Problema Real 57

IV.6 Aplicação ao Domínio Transformado de Laplace 58

V Implementação Computacional **62**

V.1 Montagem do Sistema de Equações 62

V.2 Subdivisão Automática da Trinca 64

V.3 Cálculo dos Fatores de Intensidade de Tensão 69

VI Resultados Numéricos **72**

VI.1 Resultados no Domínio da Freqüência 73

VI.1.1 Trinca no Meio Infinito 73

VI.1.2 Chapa Retangular 80

VI.2 Respostas Transientes 82

VI.2.1 Trinca no Meio Infinito 82

VI.2.2 Problemas em Domínios Limitados 89

VII Conclusões **97**

Apêndices

A Funções de Bessel **101**

A.1 Definições 101

A.2 Argumentos puramente imaginários 104

A.3 Argumentos Complexos 107

B O Método de Durbin **108**

Referências Bibliográficas **109**

Capítulo I

Introdução

A mecânica da fratura é um ramo da ciência cujas origens datam do início deste século [1, 2] e que tem se tornado cada vez mais importante com o avanço dos desenvolvimentos tecnológicos, principalmente a partir da Segunda Guerra Mundial. Uma vez que, na prática, as trincas não podem ser evitadas, a determinação de sua importância torna-se fundamental para a garantia da segurança de uma estrutura. Por outro lado, se existem trincas que podem provocar colapsos estruturais bruscos e de grandes conseqüências, podem existir outras com as quais as estruturas podem *conviver* sem compromentimento de sua funcionalidade ou segurança.

O parâmetro mais utilizado no domínio da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) é o fator de intensidade de tensão (K) que quando comparado a um valor crítico, determinado experimentalmente, permite prever o comportamento da trinca e, em conseqüência, a vida útil do componente trincado. Inicialmente, foram tabeladas expressões para determinação deste fator, para uma grande quantidade de configurações geométricas e de carregamento, permitindo que as situações mais usuais de projeto fossem solucionadas. Entretanto, com o desenvolvimento conjunto dos

equipamentos e dos métodos computacionais, a alternativa da determinação de K através de simulação numérica, para situações específicas, tem se tornado cada vez mais atraente.

Ao longo deste século, paralelamente ao desenvolvimento da Mecânica da Fratura, ocorreu o desenvolvimento da Elastodinâmica. As primeiras representações integrais do problema elastodinâmico datam do final do século passado com o trabalho de Volterra [3] seguido dos trabalhos de Love [4] e Somigliana [5, 6], já no início do presente século. Apesar do considerável intervalo de tempo decorrido desde os primeiros resultados, é citado como fundamental para o assentamento das bases atuais deste tema o trabalho relativamente recente de Wheeler e Sternberg [7], publicado em 1968. Desde então, podem ser citadas como principais referências as, já clássicas, publicações de Achenbach [8] e Eringen e Şuhubi [9], que tratam o tema de forma mais abrangente.

Quanto ao tratamento analítico do problema elastodinâmico, para domínios bidimensionais infinitos trincados, pode-se dizer que mereceu considerável atenção de diversos pesquisadores nas últimas décadas, sendo feito a seguir um resumo das principais contribuições. No início da década de 60, foram desenvolvidas soluções para uma trinca semi-infinita submetida a incidência normal de uma onda com perfil em degrau. Baker [10] resolveu este problema para uma onda de pressão e Kostrov [11] o problema análogo para uma onda de cisalhamento antiplano. No final desta mesma década Sih e Loeber [12] estudaram através de transformadas integrais o problema de uma trinca de dimensões finitas submetida a ondas harmônicas planas de pressão e cisalhamento, para qualquer ângulo de incidência. No referido trabalho, os autores mostram que a singularidade do comportamento das tensões na ponta da

trinca para problemas estáticos ($r^{-1/2}$) vale também para o caso estudado, podendo ser definido, analogamente, um fator de intensidade de tensão dinâmico. No início da década seguinte Mal [13] apresenta a solução para o mesmo problema, limitado porém a ondas de incidência normal, para uma faixa maior de freqüências. Na mesma época, o problema transiente de uma trinca submetida a uma onda plana e longitudinal de incidência e perfil arbitrários foi resolvido por Tau e Lu [14] através da técnica de Wiener-Hopf generalizada. Neste trabalho foram obtidas soluções exatas para um intervalo de tempo igual a duas vezes o período de trânsito de uma onda de pressão ao longo da trinca. Quase simultaneamente, Sih et alli [15] publicaram resultados numéricos obtidos usando transformadas integrais em conjunto com a técnica de Cagniard. Porém a precisão destes resultados não é suficiente para detectar os picos presentes na solução anterior. Ao longo da década de 80, pode-se destacar os trabalhos de Achenbach em conjunto com vários colaboradores [16, 17, 18]. Estes trabalhos foram motivados pelo desenvolvimento de métodos de avaliação quantitativa não-destrutiva (*QNDE - Quantitative Non Destrutive Evaluation*) para detectar a presença e a localização aproximada da trinca bem como determinar seu tamanho, orientação e forma. Nestes trabalhos são resolvidos problemas de trincas localizadas nas proximidades do bordo livre do semi-plano infinito, sujeitas a ondas harmônicas planas.

Com relação aos métodos numéricos, o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC) podem ser citados como os mais utilizados para o tratamento de problemas da MFLE. Em se tratando de problemas dinâmicos, algumas importantes soluções foram obtidas, inicialmente, através do Método das Diferenças Finitas.

Principalmente em relação à elastodinâmica, o MEC se posiciona como um dos mais vantajosos no tratamento de problemas em domínios infinitos ou semi-infinitos. Isto se deve ao fato das condições de radiação serem implicitamente satisfeitas em sua formulação, não havendo necessidade da discretização do contorno exterior. Possivelmente por esta característica, foram desenvolvidos nesta área os primeiros trabalhos sobre o que, anos depois, se convencionaria chamar Método dos Elementos de Contorno. Pouco depois de Rizzo [19] publicar, em 1967, o trabalho considerado a primeira formulação direta do MEC para elastostática, Cruse e Rizzo [20] formularam o método para problemas elastodinâmicos utilizando a transformada de Laplace. Uma vez que o presente trabalho se baseia na obtenção de uma solução elastodinâmica aproximada em um meio infinito, a característica, acima referida, ganha especial importância.

A aplicação do MEC para problemas em domínios trincados se depara com duas principais dificuldades. A primeira é o comportamento singular do campo de tensões na ponta da trinca, inerente ao problema físico e portanto comum aos outros métodos numéricos. A outra, específica do MEC, é a degeneração do sistema de equações devido à presença de duas superfícies do contorno na mesma posição geométrica. Este último problema foi descrito primeiramente por Cruse [21] para o caso de carregamento estático.

Para enfrentar os problemas acima relacionados, quando se trata de formulações elastodinâmicas, no domínio do tempo ou em domínios transformados, são estendidas as estratégias já utilizadas para os problemas estáticos. Para aumentar a precisão das respostas são utilizados elementos especiais na ponta da trinca, dentre os quais o mais usual é o *quarter-point* [22, 23, 24, 25]. Com a mesma finalidade são obtidas

respostas em função de integrais invariantes em torno da ponta da trinca, neste caso levando em consideração as forças de inércia [26, 27].

No tratamento da degeneração do sistema de equações, da mesma forma, são utilizadas estratégias equivalentes às utilizadas anteriormente para a elastostática. A chamada formulação mista ou *Dual* [28, 29] também é utilizada para problemas dinâmicos [30]. Esta estratégia consiste da utilização da formulação em deslocamentos para uma face da trinca e da formulação em forças de superfície na outra. A divisão do domínio do corpo em duas regiões onde cada face da trinca pertence a uma região é outra alternativa considerada [25, 31]. Neste caso são criadas fronteiras artificiais no domínio do corpo onde são impostas condições de equilíbrio e compatibilidade. Também é utilizada, por alguns autores, uma formulação [32] cuja solução fundamental se origina da aplicação de uma descontinuidade de deslocamentos.

No caso estático, a utilização de soluções fundamentais que incorporam a trinca [33, 34, 35, 36] se encontra entre as alternativas mais precisas para solucionar os problemas da MFLE. Este enfoque permite a formulação do problema sem a necessidade da discretização da trinca. Este tipo de solução fundamental, que satisfaz parte das condições de contorno do problema a ser resolvido, não é novo. Ao longo do desenvolvimento do MEC, esta estratégia já havia sido utilizada na resolução de problemas do semi-plano [37] e do semi-espaço [38], sendo conhecidas genericamente como funções de Green [39, 40]. Atualmente, entretanto, não se dispõe desta solução analítica para o problema em questão.

Assim como no caso estático [41], como foi apresentado em recente tese desenvolvida na COPPE por Castor [42], pode-se utilizar o próprio MEC para gerar aproximadamente a função de Green desejada. O presente trabalho se constitui na

extensão deste enfoque para o tratamento de problemas de mecânica da fratura sob carregamentos dinâmicos, formulados no domínio da freqüência e no domínio da transformada de Laplace. A formulação é geral e sem restrições com respeito ao número de trincas, suas formas ou dimensão do problema (bi ou tridimensional). A precisão do cálculo da função de Green pode ser controlada independentemente da discretização do contorno do problema. Este controle é realizado através da determinação do número de pontos em um esquema de integração numérica (quadratura de Gauss). Os fatores de intensidade de tensão podem ser calculados como em outras implementações: por tensões em pontos internos, através de aberturas da trinca ou por integrais invariantes.

O restante do presente trabalho é organizado da seguinte forma:

No Capítulo II é feita uma breve revisão dos conceitos da elastodinâmica a serem utilizados nos capítulos seguintes. São mostradas as descrições do problema elastodinâmico no domínio da freqüência e no domínio da transformada de Laplace, sendo enfatizadas suas semelhanças.

No Capítulo III é desenvolvida, resumidamente, a formulação do MEC para problemas elastodinâmicos bidimensionais em domínios transformados, escrevendo as expressões para o domínio da freqüência.

No Capítulo IV, a partir das expressões mostradas no capítulo anterior, desenvolve-se a extensão do enfoque da geração da função de Green numérica para os problemas elastodinâmicos trincados. É mostrada em detalhes a aplicação da formulação para a resolução de problemas bidimensionais com trincas retilíneas e horizontais.

No Capítulo VI são mostrados os resultados numéricos obtidos a partir da presente

formulação para problemas em domínios infinitos e em domínios limitados. Quando possível, estes resultados são comparados com soluções analíticas. Caso contrário, a comparação é feita com resultados obtidos por outros autores através de diversas formulações.

No Capítulo VII são feitas as considerações finais sobre o trabalho desenvolvido e sugeridos desenvolvimentos futuros.

Capítulo II

Elastodinâmica Linear

São apresentadas a seguir as equações da elastodinâmica linear tridimensional e as simplificações usuais para problemas planos, explicitando a notação a ser utilizada. Desenvolvimentos e demonstrações com todo o formalismo matemático podem ser encontrados nas referências clássicas sobre o assunto [8] e [9]. São introduzidos, também, os conceitos de transformações integrais, especificamente as transformadas de Fourier e Laplace e suas aplicações ao problema da elastodinâmica.

II.1 Notação

Ao longo do presente texto será utilizada a notação indicial na qual os eixos Cartesianos de coordenadas são representados por x_j e os vetores unitários nas suas direções $\boldsymbol{i}_j$, onde $j = 1, 2, 3$. As componentes de um vetor qualquer $\boldsymbol{u}$ são representadas por u_i, logo:

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i}_1 + u_2\boldsymbol{i}_2 + u_3\boldsymbol{i}_3 \tag{II.1}$$

É utilizada a convenção da soma, onde um índice repetido (índice mudo) indica uma soma variando de 1 a 3; pode-se então reescrever a expressão acima como:

$$\boldsymbol{u} = u_j \boldsymbol{i}_j \tag{II.2}$$

Também são utilizados o símbolo δ_{ij}, *delta de Kronecker*, e o símbolo e_{ijk} cujas componentes são definidas, respectivamente, como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \tag{II.3}$$

$$e_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } ijk \text{ formarem uma permutação par de 123} \\ 0 & \text{se houver algum índice repetido} \\ -1 & \text{se } ijk \text{ formarem uma permutação ímpar de 123} \end{cases} \tag{II.4}$$

O produto escalar e o produto vetorial entre dois vetores podem ser escritos de acordo com as definições acima como:

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = u_j v_j \tag{II.5}$$

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = e_{ijk} u_j v_k \tag{II.6}$$

Também segundo a notação utilizada, a derivada parcial de uma função em relação a um eixo coordenado é indicada por uma vírgula. Logo, o gradiente de um campo escalar f e a divergência de um campo vetorial $\boldsymbol{u}$ podem ser representados por:

$$\text{grad}(f) = \nabla f = f_{,j}\boldsymbol{i}_j \tag{II.7}$$

$$\text{div}(\boldsymbol{u}) = \nabla.\boldsymbol{u} = u_{j,j} \tag{II.8}$$

As componentes do rotacional de um campo vetorial são dadas por:

$$\boldsymbol{q} = \text{rot}(\boldsymbol{u}) = \nabla \wedge \boldsymbol{u}$$

$$q_i = e_{ijk}\, u_{k,j} \tag{II.9}$$

Analogamente, o operador de Laplace aplicado a um campo escalar pode ser representado como:

$$\text{div}(\text{grad}(f)) = \nabla.\nabla f = \nabla^2 f = f_{,ii} \tag{II.10}$$

e aplicado a um campo vetorial:

$$\nabla^2 \boldsymbol{u} = u_{p,jj}\, \boldsymbol{i}_p \tag{II.11}$$

As derivadas parciais em relação ao tempo são representadas por um ponto sobre a variável em questão:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \dot{u}_i \tag{II.12}$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \ddot{u}_i \tag{II.13}$$

II.2 Equações da Elastodinâmica Linear

As equações que governam o movimento de um corpo constituído de material homogêneo, isotrópico e linearmente elástico são as equações de movimento, relações deformação-deslocamento e as equações constitutivas (Lei de Hooke), mostradas abaixo, nesta ordem.

$$\sigma_{ij,i} + \rho b_j = \rho \ddot{u}_j \tag{II.14}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{II.15}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \tag{II.16}$$

Nestas equações $u_i(\boldsymbol{x}, t)$ são as componentes do vetor de deslocamento para um ponto $\boldsymbol{x}$ em um tempo t; b_j são as forças de volume por unidade de massa; σ_{ij} e ε_{ij} são, respectivamente, as componentes dos tensores de tensão e de deformação. As letras gregas λ e μ representam as constantes de Lamé e ρ a densidade de massa do material. Em algumas ocasiões ao longo do texto também será oportuno escrever equações em função de outras constantes elásticas como o módulo de elasticidade, E, e o coeficiente de Poisson, ν, que se relacionam com as constantes de Lamé através das expressões:

$$\lambda = \frac{2\nu\mu}{(1-2\nu)} \quad ; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{II.17}$$

Substituindo as relações deformação-deslocamento (II.15) na Lei de Hooke (II.16) e a expressão resultante na equação (II.14), obtém-se a equação de movimento em

termos dos deslocamentos, conhecida como equação de Navier-Cauchy:

$$(\lambda + \mu)u_{i,ij} + \mu u_{j,ii} + \rho b_j = \rho \ddot{u}_j \tag{II.18}$$

As equações (II.14) a (II.18) devem ser satisfeitas em todo ponto do domínio Ω e contorno Γ do corpo em questão. As forças de massa, os deslocamentos e suas derivadas até a segunda ordem são supostos contínuos. Porém, podem ser consideradas superfícies (frentes de onda) através das quais as derivadas dos deslocamentos não satisfazem às condições de continuidade. Nesta região, devem ser satisfeitas condições especiais derivadas da continuidade dos deslocamentos e da relação momento-impulso, que podem ser escritas respectivamente como:

$$[\dot{u}_i]m_j = -c[u_{i,j}] \tag{II.19}$$

$$[\sigma_{ij}]\, m_j = -\rho c[\dot{u}_i] \tag{II.20}$$

Nas equações (II.19) e (II.20), conhecidas respectivamente por condições cinemática e dinâmica das frentes de onda, uma variável entre colchetes representa a diferença entre sua avaliação à frente e atrás da frente de onda que se propaga a uma velocidade c. Ainda nestas equações, as componentes do vetor unitário normal à superfície da frente de onda são representadas por m_j.

Além disso, devem ser prescritas condições de contorno, geralmente apresentadas como:

$$u_i(\boldsymbol{x}, t) = U_i \quad \text{se } \boldsymbol{x} \in \Gamma_u \tag{II.21}$$

$$p_i(\boldsymbol{x}, t) = \sigma_{ij} n_j = P_i \quad \text{se } \boldsymbol{x} \in \Gamma_p \tag{II.22}$$

onde p_i são as componentes das forças de superfície; n_j, o vetor unitário normal ao

contorno Γ do corpo (apontando para fora); U_i e P_i são, respectivamente, os valores dos deslocamentos e forças de superfície prescritos no contorno $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$.

Complementando a definição do problema elastodinâmico são definidas condições iniciais, que devem ser satisfeitas em $\Omega \cup \Gamma$:

$$u_i(\boldsymbol{x}, 0) = \mathring{u}_i \tag{II.23}$$

$$\dot{u}_i(\boldsymbol{x}, 0) = \mathring{v}_i \tag{II.24}$$

II.2.1 Teorema da Reciprocidade

Formula-se, na elastodinâmica, um teorema da reciprocidade análogo ao teorema de Betti-Rayleigh para os problemas estáticos. Para tanto são tomados dois estados elastodinâmicos independentes, sendo um deles caracterizado, na expressão abaixo pelo apóstrofo.

$$\begin{aligned}\int_\Gamma [\boldsymbol{p} * \boldsymbol{u}'](\boldsymbol{x}, t) d\Gamma + \rho \int_\Omega \left\{ [\boldsymbol{b} * \boldsymbol{u}'](\boldsymbol{x}, t) + \mathring{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) . \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}, t) + \mathring{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) . \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x}, t) \right\} d\Omega \; = \\ \int_\Gamma [\boldsymbol{p}' * \boldsymbol{u}](\boldsymbol{x}, t) d\Gamma + \rho \int_\Omega \left\{ [\boldsymbol{b}' * \boldsymbol{u}](\boldsymbol{x}, t) + \mathring{\boldsymbol{v}}'(\boldsymbol{x}) . \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) + \mathring{\boldsymbol{u}}'(\boldsymbol{x}) . \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) \right\} d\Omega\end{aligned} \tag{II.25}$$

Nas expressões acima, o símbolo $*$ representa a convolução entre duas funções, podendo ser definida, por exemplo, em relação a duas funções genéricas $f(\boldsymbol{x}, t)$ e $g(\boldsymbol{x}, t)$ como:

$$[f * g](\boldsymbol{x}, t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 0 \\ \displaystyle\int_0^t f(\boldsymbol{x}, t - \tau) g(\boldsymbol{x}, \tau) d\tau & \text{se} \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{II.26}$$

II.2.2 Ondas de Pressão e Cisalhamento

O teorema de Helmholtz garante que qualquer campo vetorial diferenciável por trechos, definido em uma região finita e aberta Ω, pode ser representado pelo gradiente de um campo escalar somado ao rotacional de um campo vetorial com divergência nula. O campo de deslocamentos e as forças de volume podem então ser decompostos desta forma:

$$u_i = \nabla\phi + \nabla \wedge \boldsymbol{\psi} = u_i^P + u_i^S \tag{II.27}$$

$$b_i = c_P^2 \nabla\beta + c_S^2 \nabla \wedge \boldsymbol{B} \tag{II.28}$$

onde:

$$\nabla.\boldsymbol{\psi} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla.\boldsymbol{B} = 0 \tag{II.29}$$

e também:

$$c_P^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \text{ e } c_S^2 = \frac{\mu}{\rho} \tag{II.30}$$

Substituindo as representações acima na equação de movimento em termos de deslocamentos, observa-se que esta equação é satisfeita se:

$$\nabla^2\phi + \beta = \frac{1}{c_P^2}\ddot{\phi} \tag{II.31}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{B} = \frac{1}{c_S^2}\ddot{\boldsymbol{\psi}} \tag{II.32}$$

As equações (II.31) e (II.32) são equações da onda desacopladas. A primeira destas equações descreve uma onda, de velocidade c_P, na qual os deslocamentos dos

pontos do corpo (u_i^P) são paralelos à direção de propagação da onda, sendo conhecida como onda longitudinal, onda primária, de pressão ou, ainda, onda P. A segunda descreve uma onda, de velocidade c_S, na qual as componentes do deslocamento (u_i^S) são normais à direção de propagação ($\boldsymbol{m}$), conhecida como onda transversal, de cisalhamento, secundária ou, ainda, onda S.

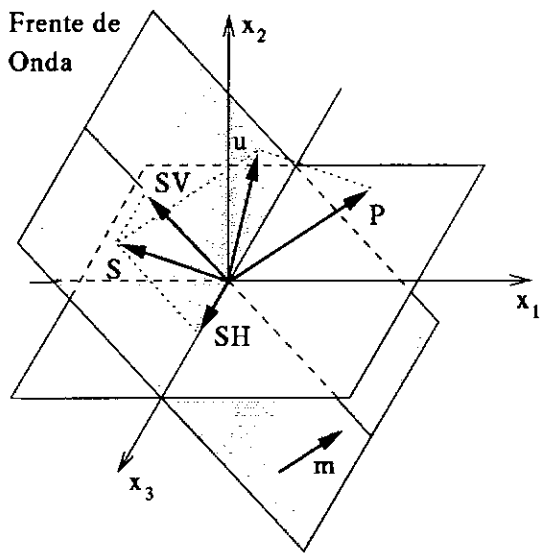


Figura II.1: Decomposição de ondas planas em ondas-P, ondas-SV e ondas-SH.

No caso de se tratar de ondas planas, isto é, cuja frente de onda tem $\boldsymbol{m}$ constante, usualmente escolhe-se o plano (x_1, x_2) contendo o vetor $\boldsymbol{m}$. Desta forma pode-se decompor a onda S em duas componentes, como mostrado na figura (II.1). Uma componente decorre do movimento das partículas no plano (x_1, x_2), verticalmente polarizado, e é chamada onda SV. Na outra, chamada onda SH, os movimentos são transversais ao plano (x_1, x_2), ou horizontalmente polarizados.

II.2.3 Condições de Radiação e Regularidade

Se o domínio do corpo elástico em questão se estende ilimitadamente, os deslocamentos devem satisfazer a algumas condições no infinito. Neste caso, o domínio, Ω, é tomado como uma esfera (ou círculo, para os problemas planos tratados a seguir) de raio $r \to \infty$, contendo o contorno interior Γ da região considerada. As condições, acima referidas, podem ser derivadas a partir da consideração de que se todas as fontes de perturbação estão no interior de Ω, não existe propagação de ondas a partir do infinito para o interior, podendo ser escritas como:

$$\lim_{r\to\infty} \boldsymbol{u}^P = \mathbf{0} \quad ; \quad \lim_{r\to\infty} \boldsymbol{u}^S = \mathbf{0} \tag{II.33}$$

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^P}{\partial r} + \frac{1}{c_P}\right) = \mathbf{0} \quad ; \quad \lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^S}{\partial r} + \frac{1}{c_S}\right) = \mathbf{0} \tag{II.34}$$

As expressões (II.33), acima, são as condições de regularidade e as seguintes,(II.34), são conhecidas como condições de radiação de Sommerfeld.

II.2.4 Problemas Planos

Como é usual, define-se como problemas bidimensionais, ou planos, os problemas nos quais as forças de volume e as componentes do tensor de tensões são independentes de uma das coordenadas, por exemplo x_3. Desta forma as derivadas em relação a x_3 se anulam e as equações de movimento se desacoplam parcialmente. Utilizando nas expressões abaixo, bem como no resto desta seção, índices gregos para indicar uma variação restrita a 1 e 2, pode-se escrever:

$$\sigma_{3\beta,\beta} + \rho b_3 = \rho \ddot{u}_3 \tag{II.35}$$

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + \rho b_\alpha = \rho \ddot{u}_\alpha \tag{II.36}$$

Quando a única componente do campo de deslocamentos do corpo pode ser descrita como $u_3(x_1, x_2, t)$ diz-se que o corpo em questão está em um estado de cisalhamento no antiplano ou que seus pontos estão sofrendo movimentos de cisalhamento polarizado horizontalmente (ondas SH).

Quando os deslocamentos u_α dos pontos do corpo não são nulos, pode-se concluir através da equação (II.36) que estes deslocamentos dependem apenas de x_1, x_2 e t. Duas situações podem, então, ocorrer. Se os deslocamentos u_3 se anulam identicamente, diz-se que o corpo está em um Estado Plano de Deformação (EPD). Neste caso, a Lei de Hooke associada às relações deformação-deslocamento permitem escrever:

$$\sigma_{\alpha\beta} = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \right) u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} + \mu(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \tag{II.37}$$

$$\sigma_{33} = \lambda u_{\gamma,\gamma} \tag{II.38}$$

Substituindo $\sigma_{\alpha\beta}$ da equação anterior na equação (II.36), chega-se a:

$$\mu u_{\alpha,\beta\beta} + \mu \left(\frac{1}{1-2\nu} \right) u_{\beta,\beta\alpha} + \rho b_\alpha = \rho \ddot{u}_\alpha \tag{II.39}$$

Outra situação acontence quando σ_{13}, σ_{23} e σ_{33} se anulam identicamente. Diz-se, então, que o corpo está em um Estado Plano de Tensão (EPT). Fazendo $\sigma_{33} = 0$ na Lei de Hooke se obtém:

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} u_{\gamma,\gamma} \tag{II.40}$$

Substituindo a equação acima na Lei de Hooke e, mais uma vez, utilizando as relações deformação-deslocamento escreve-se:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{2\mu\lambda}{(\lambda + 2\mu)} u_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta} + \mu(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \tag{II.41}$$

que pode ser reescrita em função de μ e ν, como:

$$\sigma_{\alpha\beta} = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-\nu}\right) u_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta} + \mu(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \tag{II.42}$$

Comparando a equação acima com a equação (II.37), conclui-se que diferem apenas no coeficiente constante do primeiro termo do lado direito. Pode-se, então, definir uma constante auxiliar, $\overline{\nu}$, de forma a satisfazer a relação:

$$\nu = \frac{\overline{\nu}}{1 - \overline{\nu}} \tag{II.43}$$

Substituindo ν na equação (II.42), utilizando a relação acima, recai-se na equação (II.37), com $\overline{\nu}$ no lugar de ν. Isto indica que no EPT, os deslocamentos u_α podem ser obtidos resolvendo-se as equações de movimento referentes ao EPD (II.39), com um coeficiente de Poisson fictício $\overline{\nu}$.

Como o presente trabalho se limita ao tratamento de problemas planos, daqui para frente um sub-índice qualquer (não mais indicado em letras gregas) passará a representar uma variação entre 1 e 2.

II.2.5 Ondas de Rayleigh

Em um corpo elástico é possível a existência de um outro tipo de onda além dos citados anteriormente. Estas ondas se propagam ao longo de uma superfície e pouco penetram no interior do corpo, sendo chamadas de ondas de superfície ou ondas de Rayleigh. Caracterizam-se, também, pelo decaimento exponencial das amplitudes dos deslocamentos com a distância ao bordo livre.

Considera-se a seguir o caso mais simples de uma onda plana se propagando na direção de x_1 em um semi-espaço infinito, $x_2 > 0$. Neste caso os deslocamentos podem ser representados pela parte real das expressões abaixo:

$$\begin{aligned} u_1 &= Ae^{-bx_2}e^{ik(x_1-c_Rt)} \\ u_2 &= Be^{-bx_2}e^{ik(x_1-c_Rt)} \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \tag{II.44}$$

onde A, B e b são constantes e a parte real de b é suposta positiva para que os deslocamentos decaiam com o aumento de x_2.

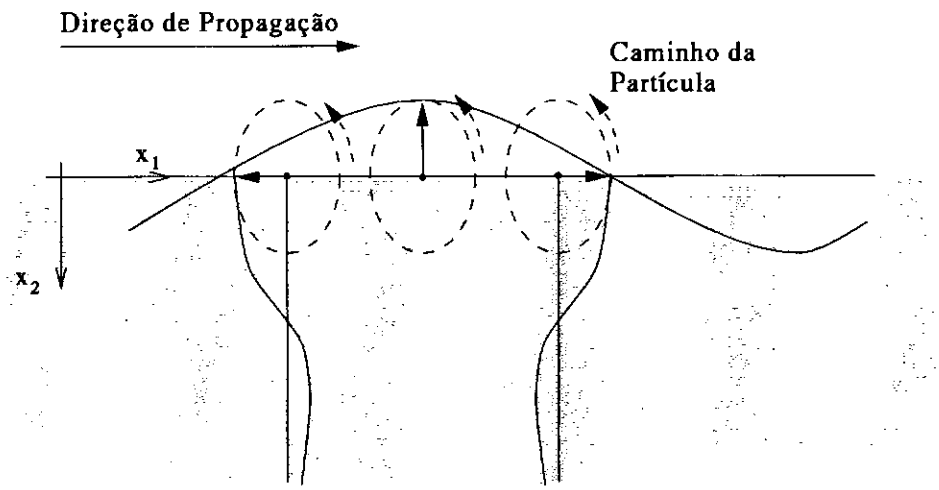


Figura II.2: Ondas de Rayleigh.

A partir das expressões (II.44), acima, pode-se mostrar que o movimento das partículas do sólido descreve uma elipse, girando em sentido contrário ao da propagação da onda como mostra a figura (II.2).

Pode-se mostrar ainda que, para representar uma onda de superfície, a velocidade de propagação da onda, c_R, deve ser menor em módulo que a velocidade da onda secundária, c_S, e satisfazer a equação abaixo.

$$\left(2-\frac{c_R^2}{c_S^2}\right)^2-4\left(1-\frac{c_R^2}{c_P^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{c_R^2}{c_S^2}\right)^{\frac{1}{2}}=0 \qquad \text{(II.45)}$$

II.3 Transformadas Integrais

As técnicas de transformadas integrais são muito úteis na resolução de equações diferenciais parciais, especialmente no caso do problema da elastodinâmica. A idéia básica é que, após a aplicação da transformada a uma equação com incógnita f, seja obtida uma equação de resolução mais simples em função de sua transformada f^T. Nos problemas de dinâmica transiente, usualmente, esta equação transformada é independente da variável temporal e, uma vez resolvida, proporciona a obtenção da solução desejada partir da avaliação da transformada inversa.

II.3.1 Transformada de Fourier

As transformadas integrais se baseiam no teorema da integral de Fourier que mostra que qualquer função $f(t)$ contínua por partes e definida para todo $t \in (-\infty, \infty)$, pode ser representada em notação complexa por:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(q)e^{i\omega q}dq\right]d\omega \qquad \text{(II.46)}$$

desde que $|f(x)|$ seja integrável de $-\infty$ até ∞.

Se f(t) tem uma descontinuidade no ponto $t = t_1$, a representação integral acima tem como resultado para este valor de t:

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{[f(t_1 + \delta) + f(t_1 - \delta)]}{2} \tag{II.47}$$

A transformada de Fourier pode ser expressa em sua forma exponencial, sugerida pelo teorema acima, como:

$$\tilde{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \tag{II.48}$$

sendo sua transformada inversa dada pela expressão:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\tilde{f}(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \tag{II.49}$$

Empregando a definição da transformada acima e avaliando uma integral por partes, pode-se obter a relação entre a transformada de Fourier de uma função e a de sua derivada. Generalizando para uma derivada de ordem n, pode-se escrever:

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n f}{dt}\right] = (-i\omega)^n \tilde{f}(\omega) \tag{II.50}$$

Admitindo que as derivadas de $f(t)$ até a ordem $(n-1)$ tendem a zero quando $t \to -\infty$ e $t \to +\infty$.

As definições da transformada e sua inversa dadas acima podem tomar outras formas trocando-se o sinal negativo do expoente e o fator $1/(2\pi)$ entre as expressões acima. Por exemplo, poderiam ser definidas, alternativamente, como:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \tag{II.51}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{II.52}$$

II.3.2 Transformada de Laplace

Para tratar mais facilmente problemas de valor inicial, freqüentemente é utilizada a transformada de Laplace, que pode ser obtida a partir da transformada de Fourier como mostrado a seguir.

Inicialmente imagina-se uma função auxiliar:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 0 \\ e^{-\alpha t} f(t) & se \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{II.53}$$

onde a função de real interesse é $f(t)$.

Aplicando-se a forma alternativa da transformada de Fourier definida pela expressão (II.51) a $F(t)$, chega-se a:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\omega) &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_0^\infty f(t) e^{-(\alpha + i\omega)t} dt \end{aligned} \tag{II.54}$$

e sua transformada inversa implica que, para $t \geq 0$:

$$F(t) = e^{-\alpha t} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{II.55}$$

Da expressão acima pode-se escrever:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{(\alpha + i\omega)t} d\omega \tag{II.56}$$

Definindo $\overline{f}(\alpha + i\omega) \equiv \tilde{F}(\omega)$, pode-se escrever as equações (II.54) e (II.56) como uma transformada e sua inversa:

$$\begin{aligned} \overline{f}(\alpha + i\omega) &= \int_0^\infty f(t) e^{-(\alpha + i\omega)t} dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f}(\alpha + i\omega) e^{(\alpha + i\omega)t} d\omega \end{aligned} \tag{II.57}$$

Fazendo-se $s = \alpha + i\omega$ e observando que $d\omega = -ids$ pode-se, finalmente, escrever a forma final da conhecida transformada integral de Laplace e sua inversa, como:

$$\overline{f}(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{II.58}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\overline{f}(s)\right] = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\omega}^{\alpha+i\omega} \overline{f}(s)e^{st}ds \tag{II.59}$$

Esta transformada possui a propriedade de que se a integral da equação (II.58) converge quando s assume um valor determinado $s_1 = \alpha_1 + i\omega_1$, então ela também converge para qualquer valor de s desde que $\alpha > \alpha_1$.

Como no caso da transformada de Fourier, em um ponto t de descontinuidade, a transformada inversa de Laplace resulta na média aritmética entre os limites da função à direita e à esquerda do ponto t.

Pode-se também obter as transformadas de Laplace das derivadas de uma função em relação à sua transformada como:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s\overline{f}(s) - f(0^+) \tag{II.60}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = s^2\overline{f}(s) - \dot{f}(0^+) - f(0^+) \tag{II.61}$$

Outra importante relação pode ser escrita, com relação à convolução de duas funções $f(\boldsymbol{x},t)$ e $g(\boldsymbol{x},t)$:

$$\mathcal{L}\left[\left[f * g\right](\boldsymbol{x},t)\right] = \mathcal{L}\left[f(\boldsymbol{x},t)\right].\mathcal{L}\left[g(\boldsymbol{x},t)\right] \tag{II.62}$$

II.4 Elastodinâmica em Domínios Transformados

Nesta seção será mostrado como as equações da elastodinâmica são modificadas através da Transformada de Fourier e Laplace. Isto é feito com a finalidade de se aplicar, de uma forma unificada, no capítulo seguinte, o Método dos Elementos de Contorno ao problema elastodinâmico em domínios transformados .

II.4.1 Elastodinâmica no Domínio da Freqüência

Considerando-se o problema elastodinâmico em que as forças de volume e as condições de contorno variam harmonicamente no tempo, com freqüência angular ω, pode-se escrever:

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t) = \tilde{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x},\omega)\, e^{i\omega t} \tag{II.63}$$

onde $\tilde{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x},\omega)$ poderá assumir valores complexos.

O campo de deslocamentos $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$, solução do problema em questão, pode ser decomposto em uma parcela permanente, $\boldsymbol{u}^p(\boldsymbol{x},t) = \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\omega)\, e^{i\omega t}$, e outra dita transiente, $\boldsymbol{u}^t(\boldsymbol{x},t)$, podendo-se escrever, então:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{u}^t(\boldsymbol{x},t) + \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\omega)\, e^{i\omega t} \tag{II.64}$$

A parcela permanente satisfaz as condições de contorno do problema sob a atuação das forças de volume. A parte transiente é a solução homogênea do problema sob condições de contorno homogêneas e satisfazendo às condições iniciais:

$$\boldsymbol{u}^t(\boldsymbol{x},0) \;=\; \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) - \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\omega) \tag{II.65}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}^t}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},0) - i\omega\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\omega) \tag{II.66}$$

Desta forma, observa-se que a parte permanente da solução independe das condições iniciais.

Supondo-se que existe algum tipo de amortecimento no problema, após um certo intervalo de tempo, pode-se desprezar a parte transiente da resposta. Assim, considerando decorrido um intervalo de tempo suficiente, pode-se reformular o problema inicialmente proposto:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\omega)\, e^{i\omega t} \tag{II.67}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{x},\omega)\, e^{i\omega t} \tag{II.68}$$

Substituindo as expressões acima, respectivamente, na equação (II.18) e nas equações constitutivas (II.16), obtêm-se as duas equações abaixo, que independem de t.

$$(\lambda+\mu)\tilde{u}_{i,ij}(\boldsymbol{x},\omega) + \mu\tilde{u}_{j,ii}(\boldsymbol{x},\omega) + \rho\omega^2\tilde{u}_j(\boldsymbol{x},\omega) + \rho\tilde{b}_j(\boldsymbol{x},\omega) = 0 \tag{II.69}$$

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{x},\omega) = \lambda\tilde{\varepsilon}_{kk}(\boldsymbol{x},\omega)\delta_{ij} + 2\mu\tilde{\varepsilon}_{ij}(\boldsymbol{x},\omega) \tag{II.70}$$

Para problemas descritos no domínio da freqüência, o teorema da Reciprocidade pode ser escrito como:

$$\int_\Gamma \tilde{\boldsymbol{p}}.\tilde{\boldsymbol{u}}'d\Gamma + \rho\int_\Omega \tilde{\boldsymbol{b}}.\tilde{\boldsymbol{u}}'d\Omega = \int_\Gamma \tilde{\boldsymbol{p}}'.\tilde{\boldsymbol{u}}d\Gamma + \rho\int_\Omega \tilde{\boldsymbol{b}}'.\tilde{\boldsymbol{u}}d\Omega \tag{II.71}$$

onde as convoluções são substituidas pelos produtos escalares dos vetores.

Uma vez que se pode dispor de soluções para este problema para uma freqüência ω qualquer, a utilização da transformada inversa de Fourier permite que seja obtida a solução de um problema transiente. Usualmente, como não se dispõe das soluções analíticas para estes problemas, o procedimento da obtenção da transformada inversa também é efetuado de maneira discreta.

II.4.2 Elastodinâmica no Domínio Transformado de Laplace

Uma vez que os deslocamentos são contínuos e suas primeiras derivadas são contínuas por partes, pode-se escrever:

$$\overline{u}_i(\boldsymbol{x}, s) = \mathcal{L}[u_i(\boldsymbol{x}, t)] \tag{II.72}$$

$$\overline{u}_{i,j}(\boldsymbol{x}, s) = \mathcal{L}[u_{i,j}(\boldsymbol{x}, t)] \tag{II.73}$$

Uma vez que o tensor de tensões e as equações constitutivas só dependem da primeira derivada dos deslocamentos, pode-se escrever as seguintes equações transformadas:

$$\overline{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\overline{u}_{i,j} + \overline{u}_{j,i}) \tag{II.74}$$

$$\overline{\sigma}_{ij} = \lambda \overline{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\overline{\varepsilon}_{ij} \tag{II.75}$$

Entretanto, a derivação e a transformada de Laplace não são mais comutativas quando uma função contém singularidades, como é possível (ao longo das frentes de onda) com as derivadas dos deslocamentos de ordem igual ou superior à segunda. Porém pode-se mostrar [43] que, uma vez que as expressões (II.19) e (II.20) são satisfeitas, a equação de movimento pode ser transformada em:

$$(\lambda+\mu)\overline{u}_{i,ij}+\mu\overline{u}_{j,ii}+\rho\overline{b}_j-\rho\left(s^2\overline{u}_j-\mathring{v}_j-\mathring{u}_j\right)=0 \tag{II.76}$$

onde $b_j(\boldsymbol{x},t)$ é admitida contínua por partes.

A solução da equação acima deve, também, satisfazer as condições de contorno transformadas:

$$\overline{u}_i(\boldsymbol{x},s) = \overline{U}_i \quad \text{se } \boldsymbol{x}\in\Gamma_u \tag{II.77}$$

$$\overline{p}_i(\boldsymbol{x},s)=\overline{\sigma}_{ij}n_j = \overline{P}_i \quad \text{se } \boldsymbol{x}\in\Gamma_p \tag{II.78}$$

Desta forma, para se obter a solução ao longo do tempo, a solução da equação (II.76) deve ser obtida e a ela deve ser aplicada a transformada inversa de Laplace.

Aplicando-se a transformada de Laplace à equação (II.25) e observando-se a equação (II.62), pode-se reescrever o Teorema da Reciprocidade, considerando-se dois estados com condições iniciais nulas, como:

$$\int_\Gamma \overline{\boldsymbol{p}}.\overline{\boldsymbol{u}}'d\Gamma+\rho\int_\Omega \overline{\boldsymbol{b}}.\overline{\boldsymbol{u}}'d\Omega=\int_\Gamma \overline{\boldsymbol{p}}'.\overline{\boldsymbol{u}}d\Gamma+\rho\int_\Omega \overline{\boldsymbol{b}}'.\overline{\boldsymbol{u}}d\Omega \tag{II.79}$$

Capítulo III

MEC Aplicado à Elastodinâmica em Domínios Transformados

Nas últimas seções do capítulo anterior pode-se observar que as equações que regem o problema elastodinâmico em domínios transformados tomam a forma das referentes ao problema estático. Pode-se observar ainda que, admitindo condições iniciais homogêneas, estas equações no domínio da freqüência e no domínio da transformada de Laplace são muito semelhantes. Isto é, operacionalmente, para se converter uma equação no domínio da freqüência à sua equivalente no domínio da transformada de Laplace, basta se proceder à substituição de $i\omega$ por s. Desta forma o desenvolvimento que se segue poderia ser descrito indistintamente para um ou outro domínio transformado. Para dar forma ao desenvolvimento das expressões que se seguem, foi adotado o domínio da freqüência. Nas expressões a seguir, com o intuito de simplificar a notação, será abolido o símbolo $\tilde{}$, utilizado no capítulo anterior sobre as variáveis transformadas.

III.1 Equação Fundamental do MEC

É considerada a equação da reciprocidade dinâmica transformada, equação (II.71), quando um dos estados dinâmicos é tomado como a solução em regime permanente para o problema de uma carga concentrada unitária com uma freqüência angular ω, aplicada em um ponto ξ do domínio ilimitado Ω^*. Em relação a cada direção i, pode-se escrever:

$$\rho b_i^* = \Delta(\xi, x)\boldsymbol{e}_i \tag{III.1}$$

onde $\boldsymbol{e}_i$ representa o vetor unitário na direção i, $\Delta(\xi, x)$ representa a função delta de Dirac e ξ e x são conhecidos, respectivamente, como pontos fonte e campo, em analogia aos problemas da teoria de Potencial.

A função delta de Dirac tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} &\Delta(\xi, x) = 0 && \text{se} \quad x \neq \xi \\ &\Delta(\xi, x) = \infty && \text{se} \quad x = \xi \\ &\int_\Omega g(x)\ \Delta(\xi, x)\ d\Omega = g(\xi) && \text{se} \quad \xi \in \Omega \end{aligned} \tag{III.2}$$

De acordo com a expressão (III.2) acima, a segunda integral do segundo membro da equação (II.71) pode ser reescrita como:

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}(x)\ \Delta(\xi, x)\ \boldsymbol{e}_i\ d\Omega = u_i(\xi) \tag{III.3}$$

Como as cargas unitárias são tomadas independentemente nas direções dos eixos coordenados, pode-se escrever os correspondentes deslocamentos e forças de superfície, como se segue:

$$u_j^* \ = \ u_{ij}^*(\xi, x)\ e_i \tag{III.4}$$

$$p_j^* = p_{ij}^*(\xi, x)\, e_i \tag{III.5}$$

onde se utiliza a representação usual do MEC, na qual o primeiro sub-índice se refere à direção da aplicação da carga unitária e o segundo, à direção onde a grandeza considerada (deslocamento ou força de superfície) é calculada, no ponto x.

Desta forma, levando em conta a expressão (III.3) a equação (II.71) pode ser reescrita, para um problema livre de forças de volume, como:

$$u_i(\xi) = \int_\Gamma u_{ij}^*(\xi, x)\, p_j(x)\, d\Gamma - \int_\Gamma p_{ij}^*(\xi, x)\, u_j(x)\, d\Gamma \tag{III.6}$$

III.2 Soluções Fundamentais

As soluções para uma carga concentrada unitária em um meio infinito, como a utilizada na seção anterior, são conhecidas na literatura referente ao MEC como soluções fundamentais. No caso do problema elastodinâmico no domínio da freqüência bidimensional, tratado no presente trabalho, esta solução é dada pelas expressões abaixo, respectivamente para os deslocamentos e forças de superfície:

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi\rho c_S^2}\left[\varphi(r)\delta_{ij} - \chi(r) r_{,i} r_{,i}\right] \tag{III.7}$$

$$p_{ij}^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi}\left\{\left[\frac{d\varphi(r)}{dr} - \frac{d\chi(r)}{dr}\right]\left(\delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{n}} + r_{,j} n_i\right) - 2\frac{\chi(r)}{r}\left(n_j r_{,i} - 2 r_{,i} r_{,j}\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\right.$$

$$\left. - 2\frac{d\chi(r)}{dr} r_{,i} r_{,j}\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{n}} + \left(\frac{c_P^2}{c_S^2} - 2\right)\left(\frac{d\varphi(r)}{dr} - \frac{d\chi(r)}{dr} - \frac{\chi(r)}{r}\right) r_{,i} n_j\right\} \tag{III.8}$$

onde $\chi(r)$ e $\varphi(r)$ são definidas como:

$$\chi(r) = \mathcal{K}_2\left(\frac{i\omega r}{c_S}\right) - \frac{c_S^2}{c_P^2}\,\mathcal{K}_2\left(\frac{i\omega r}{c_P}\right) \tag{III.9}$$

$$\varphi(r) = \mathcal{K}_0\left(\frac{i\omega r}{c_S}\right) + \left(\frac{i\omega r}{c_S}\right)^{-1}\left[\mathcal{K}_1\left(\frac{i\omega r}{c_S}\right) - \frac{c_S}{c_P}\,\mathcal{K}_1\left(\frac{i\omega r}{c_S}\right)\right] \tag{III.10}$$

Por sua vez, $\mathcal{K}_j$ são as funções modificadas de Bessel de segundo tipo e ordem j e i é a unidade imaginária.

Também nas expressões acima, é utilizada a usual convenção:

$$r = (r_i r_i)^{1/2} \tag{III.11}$$

$$r_i = x_i(x) - x_i(\xi) \tag{III.12}$$

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(x)} \tag{III.13}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{n}} = r_{,i} n_i \tag{III.14}$$

III.3 Cálculo de Tensões em Pontos Internos

O cálculo das tensões em um ponto $\xi \in \Omega$ pode ser efetuado pela substituição de $u_i(\xi)$, obtido através da equação (III.6), na expressão (II.37):

$$\sigma_{ik}(\xi) = \int_\Gamma u^*_{ijk}(\xi, x)\, p_j(x)\, d\Gamma - \int_\Gamma p^*_{ijk}(\xi, x)\, u_j(x)\, d\Gamma \tag{III.15}$$

Na expressão acima, $u^*_{ijk}(\xi, x)$ e $p^*_{ijk}(\xi, x)$ são definidos como:

$$u^*_{ijk}(\xi, x) = 2\mu\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\right)\frac{\partial u^*_{lj}}{\partial x_l(\xi)}\,\delta_{ik} + \mu\left(\frac{\partial u^*_{ij}}{\partial x_k(\xi)} + \frac{\partial u^*_{kj}}{\partial x_i(\xi)}\right) \tag{III.16}$$

$$p^*_{ijk}(\xi,x) = 2\mu\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\right)\frac{\partial p^*_{lj}}{\partial x_l(\xi)}\,\delta_{ik} + \mu\left(\frac{\partial p^*_{ij}}{\partial x_k(\xi)} + \frac{\partial p^*_{kj}}{\partial x_i(\xi)}\right) \qquad \text{(III.17)}$$

Uma vez que as derivadas se referem a deslocamentos do ponto ξ, estas devem ser efetuadas em relação a sua posição. Logo, nas expressões acima, as derivadas dos deslocamentos e forças de superfície fundamentais se escrevem como:

$$\frac{\partial u^*_{ij}(\xi,x)}{\partial x_k(\xi)} = -\frac{1}{2\pi\rho c_S^2}\left\{\frac{d\varphi}{dr}r_{,k}\delta_{ij} - \frac{\chi}{r}\left(r_{,i}\delta_{jk} + r_{,j}\delta_{ik}\right) + \left[\frac{\chi}{r} - \frac{d\chi}{dr}\right]\left(r_{,i}r_{,j}r_{,k}\right)\right\} \qquad \text{(III.18)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial p^*_{ij}(\xi,x)}{\partial x_k(\xi)} = -\frac{1}{2\pi}\Bigg\{&\left[\frac{d^2\varphi}{dr^2} - \frac{1}{r}\left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d\chi}{dr}\right) + 2\frac{\chi}{dr^2}\right]\left(\delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{n}} + r_{,j}n_i\right)r_{,k}\\ &+\frac{1}{r}\left[\frac{d\varphi}{dr} - \frac{\chi}{r}\right]\left(\delta_{ij}n_k + \delta_{jk}n_i\right)\\ &+\left[\left(\frac{c_P^2}{c_S^2} - 2\right)\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} - \frac{d^2\chi}{dr^2} - \frac{1}{r}.\frac{d\varphi}{dr}\right)\right]\left(n_j r_{,i}r_{,k}\right)\\ &-\left[\frac{2}{r}.\frac{\chi}{r} + 2\left(\frac{c_P^2}{c_S^2}\right)\frac{\chi}{r^2}\right]\left(n_j r_{,i}r_{,k}\right)\\ &+2\left[\frac{1}{r}\left(2\frac{d\chi}{dr} + \frac{\chi}{r}\right) - \frac{d^2\chi}{dr^2}\right]\left(\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{n}}r_{,i}r_{,j}r_{,k}\right)\\ &+\left[\left(\frac{c_P^2}{c_S^2} - 2\right)\frac{1}{r}\left(\frac{d\varphi}{dr} - \frac{d\chi}{dr}\right)\left(\frac{c_P^2}{c_S^2}\right)\frac{\chi}{r^2}\delta_{ik}n_j\right]\\ &+\left[\frac{2}{r}\left(2\frac{\chi}{r} - \frac{d\chi}{dr}\right)\right]\left(r_{,i}r_{,j}n_k + \frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{n}}\left(r_{,i}\delta_{jk} + r_{,j}\delta_{ik}\right)\right)\Bigg\}\end{aligned} \qquad \text{(III.19)}$$

III.4 Equação Integral para Pontos no Contorno

A equação (III.6) é uma representação contínua para deslocamentos em pontos pertencentes ao domínio Ω, em função dos deslocamentos e forças de superfície ao longo do contorno Γ do problema em questão. Porém, nos problemas a serem resolvidos, só se consegue impor independentemente em cada direção dos pontos do contorno ou o deslocamento ou a força de superfície. Portanto, para que a referida equação possa ser utilizada, deve-se primeiramente obter as incógnitas no contorno. Esta determinação é feita com a aplicação da equação integral que relaciona os deslocamentos e forças de superfície no contorno entre si e é obtida a partir da própria equação (III.6) através de um processo de limite, como será mostrado a seguir.

Imagina-se o domínio Ω do problema em questão acrescido de um setor circular infinitesimal centrado no ponto ξ, agora no contorno, como mostra a figura (III.1a).

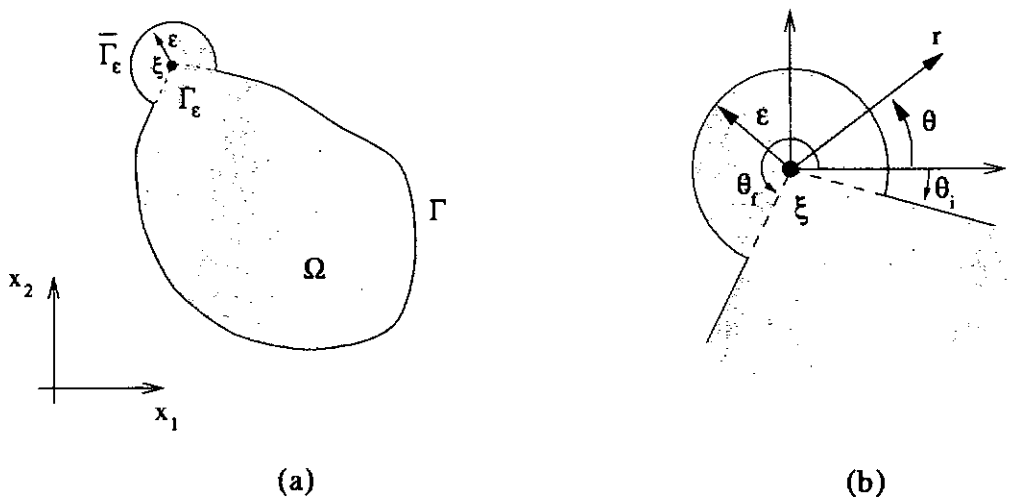


Figura III.1: Determinação da equação integral no contorno.

(a) Domínio original do corpo, Ω, aumentado de setor circular infinitesimal.

(b) Detalhe do sistema local de coordenadas para avaliação das integrais.

A equação (III.6) pode, então, ser aplicada a este ponto ξ, como mostra a expressão abaixo, onde o intervalo de integração é adequadamente alterado para se representar o novo contorno do corpo.

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma-\Gamma_\epsilon+\overline{\Gamma}_\epsilon} u^*_{ij}(\xi,x)\, p_j(x)\, d\Gamma(x) - \int_{\Gamma-\Gamma_\epsilon+\overline{\Gamma}_\epsilon} p^*_{ij}(\xi,x)\, u_j(x)\, d\Gamma(x) \qquad \text{(III.20)}$$

As componentes de u^*_{ij} e p^*_{ij} nos integrandos da expressão acima crescem indefinidamente quando r tende a 0. Através da substituição das expansões das funções modificadas de Bessel (Apêndice A) nas expressões (III.9) e (III.10) e destas em (III.7) e (III.8) pode-se observar que as partes reais destes termos apresentam as mesmas singularidades da solução fundamental estática [44], isto é:

$$Re\left[u^*_{ij}\right] \quad O(\ln(r)) \qquad \text{(III.21)}$$

$$Re\left[p^*_{ij}\right] \quad O(1/r) \qquad \text{(III.22)}$$

onde o símbolo O é usado para representar o comportamento assintótico quando $r \to 0$.

Desta forma pode-se analisar separadamente o limite de cada integral da expressão (III.20) quando $\epsilon \to 0$. Tomando inicialmente a primeira integral do lado direito:

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma_\epsilon+\overline{\Gamma}_\epsilon} u^*_{ij}(\xi,x)\, p_j(x)\, d\Gamma(x) \;=\; & \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma_\epsilon} u^*_{ij}(\xi,x)\, p_j(x)\, d\Gamma(x) \\ & + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\overline{\Gamma}_\epsilon} u^*_{ij}(\xi,x)\, p_j(x)\, d\Gamma(x) \qquad \text{(III.23)}\end{aligned}$$

A primeira integral no segundo membro da expressão acima converge absolutamente. A segunda tende para zero uma vez que tomando-se um referencial com

origem no ponto ξ, como na figura (III.1b), e escrevendo-se a integral em termos de coordenadas polares tem-se $r = \epsilon$ e $d\Gamma = \epsilon\ d\theta$. A integral da parcela singular se reduz a:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \ln(\epsilon).\epsilon d\theta = 0 \qquad \text{(III.24)}$$

A análise da segunda integral da expressão (III.20) requer um pouco mais de atenção. Analogamente à equação (III.23) pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \overline{\Gamma}_\epsilon} p^*_{ij}(\xi, x)\ u_j(x)\ d\Gamma(x) \quad &= \quad \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} p^*_{ij}(\xi, x)\ u_j(x)\ d\Gamma(x) \\ &+ \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\overline{\Gamma}_\epsilon} p^*_{ij}(\xi, x)\ u_j(x)\ d\Gamma(x) \qquad \text{(III.25)} \end{aligned}$$

Na expressão acima, a convergência do limite da primeira integral do lado direito depende da consideração de que o intervalo de integração se aproxime igualmente, em ambas as direções, do ponto ξ, caracterizando o valor principal da integral como definido por Cauchy, e representado daqui para frente como $\oint$.

Supondo o campo de deslocamentos contínuo, este pode ser expandido em série de Taylor em torno do ponto ξ. Desta forma, considerando-se o mesmo sistema de eixos adotado para a determinação do limite anterior, o limite da segunda integral do segundo membro da expressão (III.25) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\overline{\Gamma}_\epsilon} p^*_{ij}(\xi, x)\ u_j(x)\ d\Gamma(x) \quad = \\ &\qquad \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\theta_i}^{\theta_f} p^*_{ij}(r, \theta) \left(u_j(\xi) + \frac{\partial u_j(r,\theta)}{\partial r}\epsilon + \frac{\partial^2 u_j(r,\theta)}{\partial r^2}\epsilon^2 + ... \right) \epsilon d\theta \qquad \text{(III.26)} \end{aligned}$$

Tendo em vista a expressão (III.22) a única parcela não nula da expressão acima pode ser escrita juntamente com o termo do lado esquerdo da expressão (III.20)

como $C_{ij}(\xi,x)u_j(\xi)$:

$$C_{ij}(\xi) = \delta_{ij} + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma_\epsilon} p^*_{ij}(\xi,x)d\Gamma(x) \qquad \text{(III.27)}$$

onde se observa a dependência de $C_{ij}(\xi)$ em relação à forma do contorno Γ do problema no ponto ξ.

Finalmente, pode-se reescrever a expressão (III.6) para um ponto ξ pertencente ao contorno como:

$$C_{ij}(\xi)\, u_i(\xi) = \int_\Gamma u^*_{ij}(\xi,x)\, p_j(x)\, d\Gamma(x) - \cancel{\int_\Gamma} p^*_{ij}(\xi,x)\, u_j(x)\, d\Gamma(x) \qquad \text{(III.28)}$$

A expressão acima pode ser aplicada também a domínios ilimitados, como nos problemas de cavidades no meio elástico infinito. Neste caso o contorno do corpo em questão seria dado pelo contorno da cavidade somado a um contorno infinitamente distante. Esta última parcela do contorno pode ser tomada como uma circunferência de raio $\rho \to \infty$, como mostrado na figura (III.2). A equação (III.28) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} C_{ij}(\xi)\, u_i(\xi) \;=\; & \int_\Gamma u^*_{ij}(\xi,x)\, p_j(x)\, d\Gamma(x) - \cancel{\int_\Gamma} p^*_{ij}(\xi,x)\, u_j(x)\, d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma_\rho} u^*_{ij}(\xi,x)\, p_j(x)\, d\Gamma(x) - \int_{\Gamma_\rho} p^*_{ij}(\xi,x)\, u_j(x)\, d\Gamma(x) \end{aligned} \qquad \text{(III.29)}$$

Porém, a satisfação das condições de regularidade (II.33) e das condições de radiação de Sommerferld (II.34), implicam que:

$$\int_{\Gamma_\rho} u^*_{ij}(\xi,x)\, p_j(x)\, d\Gamma(x) - \int_{\Gamma_\rho} p^*_{ij}(\xi,x)\, u_j(x)\, d\Gamma(x) = 0 \qquad \text{(III.30)}$$

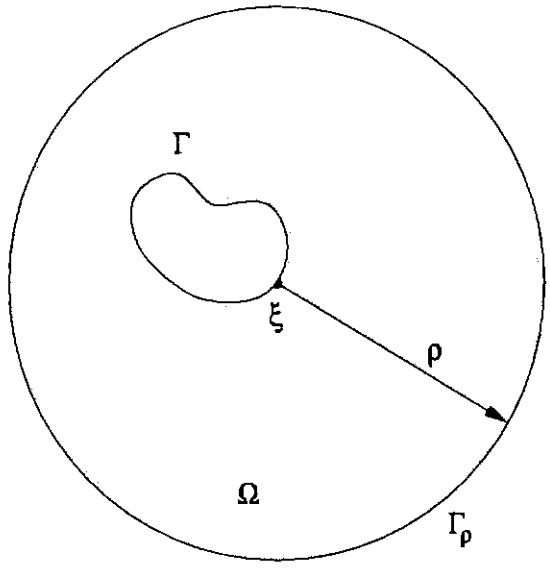


Figura III.2: Definição do contorno Γ_ρ para determinação do comportamento das integrações em problemas definidos em domínios ilimitados.

Desta forma, uma vez satisfeitas as referidas condições, os deslocamentos em um contorno interno de um problema definido em um domínio ilimitado também podem ser representados pela equação (III.28).

III.5 Equação Hipersingular do MEC

Uma vez obtida a representação do tensor de tensões em um ponto qualquer do domínio do corpo, equação (III.15), as forças de superfície atuantes em um plano qualquer passando pelo ponto podem ser encontradas na forma:

$$p_i = \sigma_{ik} m_k \tag{III.31}$$

onde o vetor unitário normal de componentes m_k caracteriza este plano.

Desta forma pode-se escrever:

$$p_i(\xi) = \int_\Gamma U^*_{ij}(\xi, x)\, p_j(x)\, d\Gamma(x) - \int_\Gamma P^*_{ij}(\xi, x)\, u_j(x)\, d\Gamma(x) \qquad \text{(III.32)}$$

onde $U^*_{ij}(\xi, x)$ e $P^*_{ij}(\xi, x)$ são dados por:

$$U^*_{ij}(\xi, x) = u^*_{ijk}(\xi, x) m_k \qquad \text{(III.33)}$$

$$P^*_{ij}(\xi, x) = p^*_{ijk}(\xi, x) m_k \qquad \text{(III.34)}$$

A utilização do limite quando $\xi \to \Gamma$ da equação (III.32) na geração de um sistema de equações para determinação das incógnitas no contorno é conhecida como formulação hipersingular do MEC. Dá-se este nome em função do aumento da ordem das singularidades das componentes da solução fundamental, equações (III.33) e (III.34), que se deve às derivações efetuadas para sua obtenção. Esta expressão é abaixo apresentada para um ponto ξ pertencente a um trecho suave do contorno Γ, pois constitue parte fundamental da estratégia para resolução do problema da geração da função de Green, objetivo deste trabalho.

$$\frac{p_i(\xi)}{2} = \oint\!\!\!\!\!\!= \int_\Gamma U^*_{ij}(\xi, x)\, p_j(x)\, d\Gamma(x) - \oint\!\!\!\!\!\!= \int_\Gamma P^*_{ij}(\xi, x)\, u_j(x)\, d\Gamma(x) \qquad \text{(III.35)}$$

onde o símbolo $\oint\!\!\!\!\!\!=$ indica a parte finita da integral, como definida por Hadamard [45].

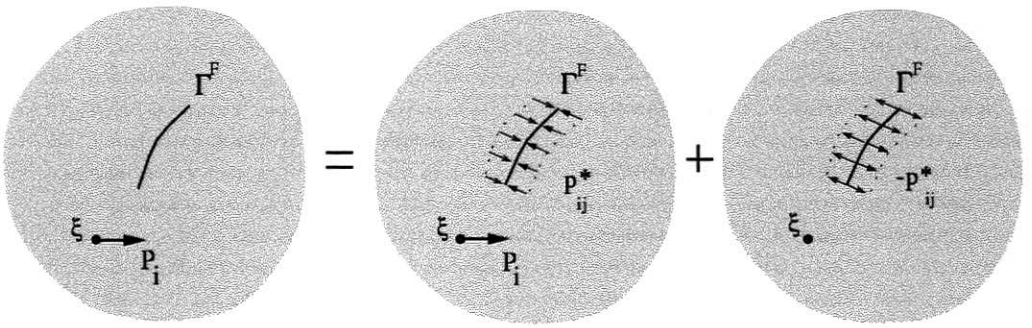
Capítulo IV

Função de Green Numérica em Domínios Transformados

O enfoque da utilização da função de Green numérica que se segue foi originalmente desenvolvido para o carregamento estático [41, 42] e aqui é uma vez mais apresentado. São acrescentadas as particularidades inerentes ao tratamento do problema elastodinâmico, inicialmente no domínio da freqüência e posteriormente no domínio da transformada de Laplace. Apesar das singularidades da solução fundamental serem as mesmas da elastostática, nestes casos elas estão incluidas em funções especiais (funções de Bessel) de variáveis complexas, o que requer tratamento adequado às suas partes real e imaginária.

IV.1 Utilização da Função de Green

É considerado o plano elástico infinito onde existe uma trinca descarregada e uma carga unitária pontual de freqüência ω é aplicada no ponto ξ. A solução deste problema pode ser obtida pela soma da solução (já conhecida) no plano sem a trinca



a) Função de Green **b) Solução Fundamental** **c) Problema Complementar**

Figura IV.1: Carga pontual unitária harmônica P_i aplicada no espaço infinito com uma trinca descarregada. (b) Problema no meio infinito não trincado; (c) Problema complementar.

com a solução de um problema complementar, figura (IV.1). Neste último, o carregamento se dá pela aplicação das forças de superfície opostas às que aparecem ao longo da posição da trinca no primeiro problema, o que garante a obtenção da trinca descarregada com a superposição. A solução do problema assim composto é a solução fundamental desejada, ou função de Green, podendo ser representada por

$$u_{ij}^{F}(\xi, x) = u_{ij}^{*}(\xi, x) + u_{ij}^{c}(\xi, x) \quad \text{(IV.1)}$$

$$p_{ij}^{F}(\xi, x) = p_{ij}^{*}(\xi, x) + p_{ij}^{c}(\xi, x) \quad \text{(IV.2)}$$

onde $u_{ij}^{*}(\xi, x)$ e $p_{ij}^{*}(\xi, x)$ são os deslocamentos e forças de superfície fundamentais na direção j no ponto campo x devidos à aplicação de uma carga pontual unitária de freqüência ω no ponto fonte ξ na direção i, no meio infinito sem a trinca. Os superescritos F e C indicam, respectivamente, as soluções dinâmicas no plano infinito trincado e a solução complementar.

A aplicação da formulação clássica do MEC, equação (III.6), a um problema livre de forças de volume, definido em um domínio Ω e contorno $\Gamma = \Gamma^E \cup \Gamma^F$, onde Γ^E é o contorno externo e Γ^F a superfície da trinca, leva a

$$\begin{aligned} C_{ij}(\xi)\, u_j(\xi) \;=\; & \int_{\Gamma^E} u^*_{ij}(\xi,x)\, p_j(x) d\Gamma(x) - \oint_{\Gamma^E} p^*_{ij}(\xi,x)\, u_j(x) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma^F} u^*_{ij}(\xi,x)\, p_j(x) d\Gamma(x) - \oint_{\Gamma^F} p^*_{ij}(\xi,x)\, u_j(x) d\Gamma(x) \quad \text{(IV.3)} \end{aligned}$$

onde as integrais com sinal negativo no segundo membro devem ser consideradas como valor principal de Cauchy de acordo com a posição do ponto fonte.

Da mesma forma que para o caso estático [21, 28, 29] esta equação integral não consegue acomodar de forma apropriada a descontinuidade de deslocamentos que ocorre de uma face da trinca em relação a outra. No entanto, se a função de Green for determinada, o problema acima é perfeitamente resolvido com sua utilização na equação (IV.3) no lugar da solução fundamental clássica. Esta possibilidade é observada ao se tratar um problema de trinca descarregada ($p_j(x) = 0$ em Γ^F). Observando também que

$$p^F_{ij}(\xi,x) = 0 \quad \text{em } \Gamma^F \qquad \text{(IV.4)}$$

pode-se escrever

$$C_{ij}(\xi)\, u_j(\xi) = \int_{\Gamma^E} u^F_{ij}(\xi,x)\, p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma^E} p^F_{ij}(\xi,x)\, u_j(x) d\Gamma(x) \qquad \text{(IV.5)}$$

onde se explicita que com a utilização da função de Green só é necessária a discretização do contorno externo, Γ^E, uma vez que as integrações ao longo da superfície da trinca se anulam. Observe-se que no caso de trinca carregada ($p_j(x) \neq 0$ em Γ^F),

a terceira integral à direita da equação (IV.3) não se anula mas só envolve funções conhecidas e pode ser calculada sem a necessidade de discretização da trinca.

IV.2 Geração da Função de Green Numérica no Domínio da Freqüência

Para determinar a solução fundamental desejada deve ser obtida a solução do problema complementar, figura (IV.1c). Isto é feito através da aplicação das equações clássica e hipersingular do MEC para um ponto fonte interno x e um ponto campo $\zeta \in \Gamma^F$, como será mostrado a seguir. Como as condições de regularidade e de radiação são satisfeitas, as integrais no contorno infinito se anulam e a aplicação da equação clássica do MEC (IV.3) ao problema complementar fornece a seguinte equação integral:

$$u^c_{ij}(\xi, x) = -\int_{\Gamma^F} u^*_{jk}(x, \zeta)\, p^*_{ik}(\xi, \zeta)\, d\Gamma(\zeta) - \int_{\Gamma^F} p^*_{jk}(x, \zeta)\, u^c_{ik}(\xi, \zeta)\, d\Gamma(\zeta) \qquad \text{(IV.6)}$$

onde já foi introduzida a condição de contorno do problema ao longo da trinca expressa pela relação

$$p^c_{ij}(\xi, \zeta) = -p^*_{ij}(\xi, \zeta) \quad \text{em } \Gamma^F \qquad \text{(IV.7)}$$

que é obtida através das equações (IV.4) e (IV.2).

As integrais ao longo do contorno fechado Γ^F ainda podem ser simplificadas se for considerado que as faces superior e inferior da trinca, respectivamente, Γ^I e Γ^S são coincidentes e têm normais opostas:

$$u^*_{ij}(\xi,\zeta^I) = u^*_{ij}(\xi,\zeta^S) \quad \text{(IV.8)}$$

$$p^*_{ij}(\xi,\zeta^I) = -p^*_{ij}(\xi,\zeta^S) \quad \text{(IV.9)}$$

Pode-se, então, integrar somente em Γ^I levando-se em consideração as expressões acima.

$$\begin{aligned} u^c_{ij}(\xi,x) = & -\int_{\Gamma^I} u^*_{jk}(x,\zeta^I)\ \left[p^*_{ik}(\xi,\zeta^S)+p^*_{ik}(\xi,\zeta^I)\right]\ d\Gamma(\zeta) \\ & +\int_{\Gamma^I} p^*_{jk}(x,\zeta^I)\ \left[u^c_{ik}(\xi,\zeta^S)-u^c_{ik}(\xi,\zeta^I)\right]\ d\Gamma(\zeta) \end{aligned} \quad \text{(IV.10)}$$

Ainda uma última simplificação pode ser feita. Uma vez que a solução fundamental para o meio infinito sem a trinca produz tensões contínuas através de Γ^F, a primeira integral na equação (IV.10) se anula. Expressando a segunda integral em termos das aberturas da trinca da função de Green procurada, $c_{ik}(\xi,\zeta) = u^c_{ik}(\xi,\zeta^S) - u^c_{ik}(\xi,\zeta^I) = u^F_{ik}(\xi,\zeta^S) - u^F_{ik}(\xi,\zeta^I)$, chega-se a:

$$u^c_{ij}(\xi,x) = \int_{\Gamma^I} p^*_{jk}(x,\zeta)\ c_{ik}(\xi,\zeta)\ d\Gamma(\zeta) \quad \text{(IV.11)}$$

A equação (IV.11) produz os deslocamentos complementares em um ponto interno $x(x \notin \Gamma^F)$, devidos a uma carga pontual unitária de freqüência ω em função das aberturas da trinca c_{ik}. As forças de superfície complementares podem ser obtidas através da equação hipersingular do MEC (III.32). Seguindo desenvolvimento análogo ao indicado acima, na passagem da equação (IV.3) à equação (IV.11) e adotando a mesma notação para os pontos fonte e campo, respectivamente x e ζ, obtém-se a seguinte equação:

$$p_{ij}^{c}(\xi, x) = \int_{\Gamma^I} P_{jk}^{*}(x, \zeta)\, c_{ik}(\xi, \zeta)\, d\Gamma(\zeta) \qquad \text{(IV.12)}$$

onde $P_{jk}^{*}(x, \zeta)$ é a solução fundamental dinâmica para a formulação hipersingular.

Observando as equações (IV.11) e (IV.12), percebe-se que para calcular os deslocamentos e forças de superfície complementares, basta que sejam obtidas as componentes da abertura da trinca devidas à aplicação da carga unitária no ponto ξ. Tendo em vista as condições de contorno naturais do problema (c) da figura (IV.1), o limite da equação (IV.12) quando $x \to \Gamma^I$ pode ser obtido, produzindo uma equação integral de contorno hipersingular para o problema complementar. Este procedimento limite é descrito nas referências [28, 29, 46] para a formulação mista com carregamento estático. Obtém-se, então, para $\overline{\zeta} \in \Gamma^I$:

$$p_{ij}^{c}(\xi, \overline{\zeta}) = \oint_{\Gamma^I} P_{jk}^{*}(\overline{\zeta}, \zeta)\, c_{ik}(\xi, \zeta)\, d\Gamma(\zeta) \qquad \text{(IV.13)}$$

Utilizando mais uma vez a relação (IV.7), a equação (IV.13) produz uma equação integral hipersingular de contorno, cuja solução fornece as componentes de abertura de trinca, que finalmente permitem a obtenção da função de Green desejada.

$$\oint_{\Gamma^I} P_{jk}^{*}(\overline{\zeta}, \zeta)\, c_{ik}(\xi, \zeta)\, d\Gamma(\zeta) = -p_{ij}^{*}(\xi, \overline{\zeta}) \qquad \text{(IV.14)}$$

Resumindo, após serem obtidas as aberturas das trincas $c_{ik}(\xi, \zeta)$ através da equação (IV.14), podem ser calculadas as parcelas complementares $u_{ij}^{c}(\xi, x)$ e $p_{ij}^{c}(\xi, x)$ através das expressões (IV.11) e (IV.12) e, por fim, as componentes das funções de Green através das equações (IV.1) e (IV.2).

IV.3 Aplicação a Trincas Retilíneas Horizontais

Considerando o caso da trinca horizontal centrada na origem do sistema de coordenadas, a solução fundamental hipersingular dinâmica, no domínio da freqüência, para o espaço infinito não trincado se reduz a:

$$
\begin{aligned}
P^*_{jk}(\overline{\zeta},\zeta) \;=\; & -\frac{\mu}{2\pi}\left\{\left[\frac{d^2\varphi}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}-\frac{3}{r}\frac{d\chi}{dr}+\frac{6}{r^2}\frac{d^2\chi}{dr^2}\right] r_{,j}\, r_{,k}\right. \\
& +\frac{2}{r}\left(\frac{d\varphi}{dr}-\frac{\chi}{r}\right)(\delta_{ij}+m_j n_k) \\
& +\left[\left(\frac{c_P^2}{c_S^2}-2\right)\left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\left(\frac{c_P^2}{c_S^2}+2\right)-\frac{2}{r}\left(\frac{c_P^2}{c_S^2}\right)\frac{d\chi}{dr}\right.\right. \\
& \left.\left.+\left(\frac{c_P^2}{c_S^2}-2\right)\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}-\frac{d^2\chi}{dr^2}\right)+4\left(1-\frac{c_P^2}{c_S^2}\right)\frac{\chi}{r^2}\right] m_j n_k\right\}
\end{aligned}
\tag{IV.15}
$$

onde r é a distância entre ζ e $\overline{\zeta}$; n_j , m_j e $r_{,j}$ são, respectivamente, a componente da normal no contorno a ser integrado, a componente da direção normal no ponto fonte onde se calcula a força de superfície na formulação hipersingular e a derivada de r , todos em relação à direção j.

Como para esta configuração de trinca $n_1 = m_1 = 0$ e $n_2 = m_2 = 1$ a determinação das aberturas de trinca longitudinal e transversal se desacoplam ($P^*_{12} = P^*_{21} = 0$), podendo se reescrever as equações (IV.14), para uma trinca de comprimento total $2a$, como:

$$\oint_{-a}^{a} P_{11}^{*}(\overline{\zeta},\zeta)\, c_{i1}(\xi,\zeta)\, d\Gamma(\zeta) \;=\; -p_{i1}^{*}(\xi,\overline{\zeta}) \qquad \text{(IV.16)}$$

$$\oint_{-a}^{a} P_{22}^{*}(\overline{\zeta},\zeta)\, c_{i2}(\xi,\zeta)\, d\Gamma(\zeta) \;=\; -p_{i2}^{*}(\xi,\overline{\zeta}) \qquad \text{(IV.17)}$$

O tratamento numérico das expressões acima se faz com a substituição das séries infinitas que definem as funções de Bessel por expressões polinomiais e logarítmicas que as interpolam por trechos (Apêndice A). Desta forma se evidencia que o comportamento da parte imaginária é regular enquanto a parte real das componentes não nulas desta solução fundamental são singulares em $r = 0$, podendo ser decompostas quando $r \to 0$, como mostrado abaixo.

$$Re\,[P_{11}^{*}] \;=\; P_{11}^{K} + P_{11}^{Log} + P_{11}^{Reg} \qquad \text{(IV.18)}$$

$$Re\,[P_{22}^{*}] \;=\; P_{22}^{K} + P_{22}^{Log} + P_{22}^{Reg} \qquad \text{(IV.19)}$$

Nas expressões acima, P_{ij}^{K} é a solução hipersingular estática, derivada da solução fundamental de Kelvin, P_{ij}^{Log} são as parcelas de comportamento logarítmico e P_{ij}^{Reg} são as parcelas de comportamento regular. As parcelas regulares são polinômios de expoentes positivos em ω e são mostradas abaixo junto com as expressões das parcelas singulares que serão objeto do desenvolvimento que se segue.

$$P_{11}^{K} = P_{22}^{K} = \frac{k_K}{r^2} \quad ; \quad k_K = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \tag{IV.20}$$

$$P_{11}^{Log} = k_{L1}\ln(r) \quad ; \quad k_{L1} = -\frac{\mu\,\omega^2}{4\pi}\left(\frac{c_P^4 + c_S^4}{c_P^4 c_S^2}\right) \tag{IV.21}$$

$$P_{22}^{Log} = k_{L2}\ln(r) \quad ; \quad k_{L2} = -\frac{\mu\,\omega^2}{4\pi}\left(\frac{3c_P^4 - 4c_P^2c_S^2 + 3c_S^4}{c_P^4 c_S^2}\right) \tag{IV.22}$$

$$P_{11}^{Reg} = -\mu\,\omega^2\,\frac{1}{8}\left(\frac{1}{c_S^2} + \frac{c_S^2}{c_P^4}\right) \tag{IV.23}$$

$$P_{22}^{Reg} = -\mu\,\omega^2\left[\frac{3}{8}\left(\frac{1}{c_S^2} + \frac{c_S^2}{c_P^4}\right) - \frac{1}{2c_P^2}\right] \tag{IV.24}$$

As expressões para P_{11}^{Log} e P_{22}^{Log} são idênticas, a menos das constantes e todo o procedimento desenvolvido a partir deste ponto para a expressão (IV.18) pode ser adotado para a expressão (IV.19) de maneira inteiramente análoga.

A equação (IV.18) pode agora ser resolvida por um método de resíduos ponderados padrão como o método da colocação pontual, produzindo, para M pontos de colocação:

$$\oint_{-a}^{a} P_{11}^{*}(\overline{\zeta}_m, \zeta)\; c_{i1}(\xi, \zeta)\; d\Gamma(\zeta) = -p_{i1}^{*}(\xi, \overline{\zeta}_m) \quad ; \quad m = 1, 2, \ldots M \tag{IV.25}$$

A precisão da solução das equações acima é um fator crucial para o sucesso de todo o procedimento. Portanto, as aberturas da trinca são calculadas nos pontos de Gauss requeridos para as integrações regulares das equações (IV.11) e (IV.12). Tal procedimento seria simples se as integrais nas equações (IV.16) e (IV.17) não fossem

no sentido de parte finita. Pode-se, inicialmente, reescrever a equação (IV.25) utilizando um termo corretor da integração numérica em relação às integrais singulares, E_{i1}, como:

$$|J| \sum_{n=1}^{N} \left(P_{11}^{*}(\overline{\zeta}_m, \zeta_n)\, c_{i1}(\xi, \zeta_n)\, W_n \right) - E_{i1} = -p_{i1}^{*}(\xi, \overline{\zeta}_m) \quad ; \quad m = 1, 2, \ldots M \quad \text{(IV.26)}$$

onde $|J| = a$ é o Jacobiano da transformação para o intervalo normal de integração $(-1, 1)$; ζ_n o ponto na trinca correspondente ao ponto de Gauss n, W_n é o peso associado a esse ponto e N o número total de pontos de integração.

Uma vez que a parte imaginária da solução fundamental é regular, E_{i1} só assume valores reais. Com o objetivo de determinar E_{i1}, a expressão (IV.18) é substituida na integral do primeiro membro da equação (IV.25), fornecendo:

$$\begin{aligned} Re\left[\oint_{-a}^{a} P_{11}^{*}(\overline{\zeta}_m, \zeta)\, c_{i1}(\xi, \zeta)\, d\Gamma(\zeta) \right] &= \oint_{-a}^{a} P_{11}^{K}(\overline{\zeta}_m, \zeta)\, c_{i1}(\xi, \zeta)\, d\Gamma(\zeta) \\ &+ \int_{-a}^{a} P_{11}^{Log}(\overline{\zeta}_m, \zeta)\, c_{i1}(\xi, \zeta)\, d\Gamma(\zeta) \\ &+ \int_{-a}^{a} P_{11}^{Reg}(\overline{\zeta}_m, \zeta)\, c_{i1}(\xi, \zeta)\, d\Gamma(\zeta) \end{aligned} \quad \text{(IV.27)}$$

A seguir são analisadas, separadamente, as integrais do segundo membro da equação (IV.27), tendo em vista a expansão de c_{ij} em série de Taylor, em relação ao ponto $\overline{\zeta}_m$, mostrada abaixo.

$$\begin{aligned} c_{i1}(\xi, \zeta) &= c_{i1}(\xi, \overline{\zeta}_m) + \frac{\partial c_{i1}(\xi, \overline{\zeta}_m)}{\partial x_1(\zeta)} \left(x_1(\zeta) - x_1(\overline{\zeta}_m) \right) \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n c_{i1}(\xi, \overline{\zeta}_m)}{\partial x_1^n(\zeta)} \left(x_1(\zeta) - x_1(\overline{\zeta}_m) \right)^n \end{aligned} \quad \text{(IV.28)}$$

A expansão acima, equação (IV.28), é introduzida na primeira integral do segundo membro da equação (IV.27). Com base na expressão (IV.20), pode-se concluir em relação a esta integral, que o erro em sua avaliação pela quadratura de Gauss, devido ao comportamento singular de P_{11}^K, se origina nos dois primeiros termos da série, isto é:

$$
\begin{aligned}
|J| \sum_{n=1}^{N} \left(P_{11}^K(\overline{\zeta}_m, \zeta_n)\, c_{i1}(\xi, \zeta_n)\, W_n \right) - \oint_{-a}^{a} P_{11}^K(\overline{\zeta}_m, \zeta)\, c_{i1}(\xi, \zeta)\, d\Gamma(\zeta) \;\; = \\
c_{i1}(\xi, \overline{\zeta}_m) \left[|J| \sum_{n=1}^{N} \left(P_{11}^K(\overline{\zeta}_m, \zeta_n)\, c_{i1}(\xi, \zeta_n)\, W_n \right) \right. \\
\left. - \oint_{-a}^{a} P_{11}^K(\overline{\zeta}_m, \zeta)\, c_{i1}(\xi, \zeta)\, d\Gamma(\zeta) \right] \\
+ \frac{\partial c_{i1}(\xi, \overline{\zeta}_m)}{\partial x_1(\zeta)} \left[|J| \sum_{n=1}^{N} \left((\zeta_n - \overline{\zeta}_m) \cdot P_{11}^K(\overline{\zeta}_m, \zeta_n)\, c_{i1}(\xi, \zeta_n)\, W_n \right) \right. \\
\left. - \oint_{-a}^{a} (\zeta_n - \overline{\zeta}_m) \cdot P_{11}^K(\overline{\zeta}_m, \zeta)\, c_{i1}(\xi, \zeta)\, d\Gamma(\zeta) \right]
\end{aligned}
\tag{IV.29}
$$

Na expressão acima, bem como nas que se seguem, é adotada a convenção $x_1(\zeta) = \zeta$ para simplificar a notação. Esta mesma expressão pode ser escrita de forma mais compacta como:

$$
\begin{aligned}
|J| \sum_{n=1}^{N} \left(P_{11}^K(\overline{\zeta}_m, \zeta_n)\, c_{i1}(\xi, \zeta_n)\, W_n \right) - \oint_{-a}^{a} P_{11}^K(\overline{\zeta}_m, \zeta)\, c_{i1}(\xi, \zeta)\, d\Gamma(\zeta) \;\; = \\
c_{i1}(\xi, \overline{\zeta}_m) \cdot e^{K1} + \frac{\partial c_{i1}(\xi, \overline{\zeta}_m)}{\partial x_1(\zeta)} \cdot e^{K2}
\end{aligned}
\tag{IV.30}
$$

onde os termos e^{K1} e e^{K2} são dados por:

$$
e^{K1} \;=\; k_K \left\{ a \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{W_n}{(\zeta_n - \overline{\zeta}_m)^2} \right) - \left[\frac{-2a}{a^2 - \overline{\zeta}_m^2} \right] \right\} \tag{IV.31}
$$

$$e^{K2} = k_K \left\{ a \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{W_n}{\zeta_n - \overline{\zeta}_m} \right) - \left[\ln \left(\frac{a - \overline{\zeta}_m}{a + \overline{\zeta}_m} \right) \right] \right\} \qquad \text{(IV.32)}$$

Se a expansão da série de Taylor de c_{i1} é, agora, introduzida na segunda integral do lado direito da equação (IV.27), pode-se concluir, analogamente, que o erro devido a singularidade logarítmica em relação a integração pela quadratura de Gauss se deve excusivamente ao primeiro termo da série, isto é:

$$|J| \sum_{n=1}^{N} \left(P_{11}^{Log}(\overline{\zeta}_m, \zeta_n)\, c_{i1}(\xi, \zeta_n)\, W_n \right) - \oint_{-a}^{a} P_{11}^{Log}(\overline{\zeta}_m, \zeta)\, c_{i1}(\xi, \zeta)\, d\Gamma(\zeta) = c_{i1}(\xi, \overline{\zeta}_m) \left[|J| \sum_{n=1}^{N} \left(P_{11}^{Log}(\overline{\zeta}_m, \zeta_n)\, c_{i1}(\xi, \zeta_n)\, W_n \right) - \oint_{-a}^{a} P_{11}^{Log}(\overline{\zeta}_m, \zeta)\, c_{i1}(\xi, \zeta)\, d\Gamma(\zeta) \right] \qquad \text{(IV.33)}$$

A equação acima também pode ser escrita de uma forma mais compacta como:

$$|J| \sum_{n=1}^{N} \left(P_{11}^{Log}(\overline{\zeta}_m, \zeta_n)\, c_{i1}(\xi, \zeta_n)\, W_n \right) - \oint_{-a}^{a} P_{11}^{Log}(\overline{\zeta}_m, \zeta)\, c_{i1}(\xi, \zeta)\, d\Gamma(\zeta) = c_{i1}(\xi, \overline{\zeta}_m) \cdot e^{Log} \qquad \text{(IV.34)}$$

Pode-se, então, obter e^{Log} como:

$$e^{Log} = k_{L1} \left\{ a \sum_{n=1}^{N} \left(W_n \ln(\zeta_n - \overline{\zeta}_m) \right) - \left[\left((\overline{\zeta}_m - a) \ln(\overline{\zeta}_m - a) + (\overline{\zeta}_m + a) \ln(\overline{\zeta}_m + a) \right) - 2a \right] \right\} \qquad \text{(IV.35)}$$

Uma vez que só se estão sendo considerados os erros referentes às integrações singulares pode-se escrever:

$$|J| \sum_{n=1}^{N} \left(P_{11}^{Reg}(\overline{\zeta}_m, \zeta_n)\, c_{i1}(\xi, \zeta_n)\, W_n \right) - \int_{-a}^{a} P_{11}^{Reg}(\overline{\zeta}_m, \zeta)\, c_{i1}(\xi, \zeta)\, d\Gamma(\zeta) = 0 \quad \text{(IV.36)}$$

Somando membro a membro a equação acima com as equações (IV.30) e (IV.34) e tendo em vista a equação (IV.18), obtém-se:

$$\begin{aligned} \oint_{-a}^{a} Re\left[P_{11}^{*}(\overline{\zeta}_m, \zeta)\right]\, c_{i1}(\xi, \zeta)\, d\Gamma(\zeta) \;=\; & |J| \sum_{n=1}^{N} \left(Re\left[P_{11}^{*}(\overline{\zeta}_m, \zeta_n)\right]\, c_{i1}(\xi, \zeta_n)\, W_n \right) \\ & - \left[c_{i1}(\xi, \overline{\zeta}_m)(e^{K1} + e^{Log}) + \frac{\partial c_{i1}(\xi, \overline{\zeta}_m)}{\partial x_1(\zeta)}\, e^{K2} \right] \end{aligned} \quad \text{(IV.37)}$$

de onde se conclui que o termo corretor das integrações singulares da equação (IV.26), E_{i1}, pode ser, finalmente, expresso como:

$$E_{i1} = c_{i1}(\xi, \overline{\zeta}_m)(e^{K1} + e^{Log}) + \frac{\partial c_{i1}(\xi, \overline{\zeta}_m)}{\partial x_1(\zeta)}\, e^{K2} \quad \text{(IV.38)}$$

Os termos dentro dos colchetes nas expressões (IV.31), (IV.32) e (IV.35) correspondem ao cálculo analítico das integrais singulares - a parte finita na expressão (IV.31), o valor principal de Cauchy em (IV.32) e a singularidade logarítmica em (IV.35). Pela simplicidade da geometria do presente problema, estes termos são calculados analiticamente no presente trabalho, mas no caso geral este cálculo poderia ser efetuado através de um procedimento numérico adequado, como, por exemplo, integração numérica de Kutt [47].

Deve-se notar que as aberturas da trinca e suas derivadas podem ser facilmente aproximadas em função de seus valores nos pontos de Gauss.

A equação (IV.26) é então usada para formar um sistema de equações para c_{i1} nos pontos de Gauss. Portanto, fazendo o número de pontos de colocação coincidir com o número de pontos usados para a integração numérica ($M = N$):

$$a\sum_{n=1}^{N}\left(P^{*}_{11}(\overline{\zeta}_m,\zeta_n)c_{i1}(\xi,\zeta_n)W_n\right) - E_{i1} = -p^{*}_{i1}(\xi,\overline{\zeta}_m) \quad ; \quad m = 1,2,\ldots N \qquad \text{(IV.39)}$$

Os pontos de colocação podem ser escolhidos de forma a coincidir com as posições dos pontos de Gauss. Neste caso, quando $n = m$, surgem indeterminações que são resolvidas imaginando-se o processo de limite quando $\overline{\zeta}_m \to \zeta_n$, obtendo-se

$$\lim_{\overline{\zeta}_m\to\zeta_n}\left\{\frac{1}{(\zeta_n-\overline{\zeta}_m)^2}\left[c_{i1}(\xi,\zeta_n) - c_{i1}(\xi,\overline{\zeta}_m) - (\zeta_n-\overline{\zeta}_m)\frac{\partial c_{i1}(\xi,\overline{\zeta}_m)}{\partial\zeta}\right]\right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c_{i1}(\xi,\overline{\zeta}_m)}{\partial\zeta^2} \qquad \text{(IV.40)}$$

$$\lim_{\overline{\zeta}_m\to\zeta_n}\left\{\left(c_{i1}(\xi,\zeta_n) - c_{i1}(\xi,\overline{\zeta}_m)\right)\ln\left(|\zeta_n-\overline{\zeta}_m|\right)\right\} = 0 \qquad \text{(IV.41)}$$

Na presente implementação os pontos de colocação foram adotados coincidentes com os pontos de Gauss. Consequentemente, os limites (IV.40) e (IV.41) são introduzidos na equação (IV.39) para formar finalmente:

$$a \sum_{n=1 n\neq m}^{N} \left(P_{11}^{*}(\overline{\zeta}_m, \zeta_n) c_{i1}(\xi, \zeta_n) W_n \right) + c_{i1}(\xi, \overline{\zeta}_m) P_{11}^{Reg}(\overline{\zeta}_m, \zeta_n)$$

$$-c_{i1}(\xi, \overline{\zeta}_m) \left\{ k_K \left[a \sum_{n=1 n\neq m}^{N} \left(\frac{W_n}{(\zeta_n - \overline{\zeta}_m)^2} \right) + \frac{2a}{a^2 - \overline{\zeta}_m^2} \right] \right.$$

$$+k_{L1} \left[a \sum_{n=1\ n\neq m}^{N} \left(W_n \ln(\zeta_n - \overline{\zeta}_m) \right) \right.$$

$$\left. \left. + 2a - \left((\overline{\zeta}_m - a) \ln(\overline{\zeta}_m - a) + (\overline{\zeta}_m + a) \ln(\overline{\zeta}_m + a) \right) \right] \right\}$$

$$-\frac{\partial c_{i1}(\xi, \overline{\zeta}_m)}{\partial x_1(\zeta)} \left\{ k_K \left[a \sum_{n=1\ n\neq m}^{N} \left(\frac{W_n}{\zeta_n - \overline{\zeta}_n} \right) - \ln \left(\frac{a - \overline{\zeta}_m}{a + \overline{\zeta}_m} \right) \right] \right\}$$

$$+\frac{a k_K W_m}{2} \frac{\partial^2 c_{i1}(\xi, \overline{\zeta}_m)}{\partial \zeta^2}$$

$$= -p_{i1}^{*}(\xi, \overline{\zeta}_m)$$

$$m = 1, 2, \ldots N$$

(IV.42)

Com a finalidade de calcular as derivadas das aberturas de trinca presentes nas equações (IV.42), uma simples interpolação polinomial de Lagrange pode ser utilizada. Uma vez que o comportamento das aberturas é proporcional a $\sqrt{\rho}$, onde ρ é a distância até a ponta da trinca, define-se

$$\overline{c}_{i1} = \frac{c_{i1}}{\sqrt{1 - \eta^2}} \tag{IV.43}$$

onde $\eta = \zeta / a$ é a coordenada natural sobre a trinca.

Interpolando $\bar{c}_{i1}$ garante-se o comportamento desejado nas proximidades das pontas das trincas

$$c_{i1}(\xi,\zeta) = \sqrt{1-\eta^2}\,\bar{c}_{i1}(\xi,\zeta)$$

$$\approx \sqrt{1-\eta^2}\sum_{n=1}^{N} D_n(\eta)\,\frac{c_{i1}(\xi,\zeta_n)}{\sqrt{1-\eta_n^2}} \qquad \text{(IV.44)}$$

onde D_n representa polinômios do grau $N-1$ uma vez que os extremos da trinca são automaticamente interpolados.

A expressão (IV.42) fornece N equações que são usadas para a determinação de c_{i1} nos pontos de Gauss, podendo ser escrita de forma matricial, juntamente com a expressão análoga para as aberturas na direção 2

$$\boldsymbol{S}_1\,\boldsymbol{c}_{i1}(\xi) = \boldsymbol{p}_{i1}(\xi) \qquad \text{(IV.45)}$$

$$\boldsymbol{S}_2\,\boldsymbol{c}_{i2}(\xi) = \boldsymbol{p}_{i2}(\xi) \qquad \text{(IV.46)}$$

Deve ser enfatizado que, como as matrizes $\boldsymbol{S}_1$ e $\boldsymbol{S}_2$ são funções apenas da geometria da trinca, elas permanecem constantes para qualquer posição do ponto fonte, não aumentando o tamanho dos sistemas a serem resolvidos com o refinamento da discretização do contorno do problema. Além disso, as funções de Green para problemas com múltiplas trincas podem ser simuladas seguindo o mesmo procedimento. A única modificação é que deve-se integrar ao longo todas as trincas, produzindo outras integrações de Gauss regulares a serem adicionadas às equações (IV.26) e (IV.39). A dimensão das matrizes $\boldsymbol{S}_1$ e $\boldsymbol{S}_2$ aumenta já que elas incluem todos os pontos de Gauss em todas as trincas, porém o termo de correção continua sendo

calculado exclusivamente ao longo da trinca que contém o ponto $\overline{\zeta}_m$. De acordo com as equações (IV.1), (IV.2), (IV.11) e (IV.12) a função de Green numérica para uma única trinca é finalmente expressa como:

$$u^F_{i1}(\xi,x) = u^*_{i1}(\xi,x) + a\sum_{n=1}^{N}[p^*_{11}(x,\zeta_n)\; c_{i1}(\xi,\zeta_n)\; W_n] \qquad \text{(IV.47)}$$

$$u^F_{i2}(\xi,x) = u^*_{i2}(\xi,x) + a\sum_{n=1}^{N}[p^*_{22}(x,\zeta_n)\; c_{i2}(\xi,\zeta_n)\; W_n] \qquad \text{(IV.48)}$$

$$p^F_{i1}(\xi,x) = p^*_{i1}(\xi,x) + a\sum_{n=1}^{N}[P^*_{11}(x,\zeta_n)\; c_{i1}(\xi,\zeta_n)\; W_n] \qquad \text{(IV.49)}$$

$$p^F_{i2}(\xi,x) = p^*_{i2}(\xi,x) + a\sum_{n=1}^{N}[P^*_{22}(x,\zeta_n)\; c_{i2}(\xi,\zeta_n)\; W_n] \qquad \text{(IV.50)}$$

sendo que para trincas múltiplas se deve somar as demais integrais numéricas sobre as outras trincas.

IV.4 Cálculo de Tensões em Pontos Internos

Uma vez obtidos os deslocamentos e forças de superfície do problema em Γ^E através da equação (IV.5) as tensões em pontos internos são calculadas usando as derivadas desta mesma equação em relação às coordenadas de $\xi \in \Omega$. Analogamente à equação (III.15), pode-se escrever:

$$\sigma_{ik}(\xi) = \int_\Gamma u^F_{ijk}(\xi,x)\; p_j(x)\; d\Gamma - \int_\Gamma p^F_{ijk}(\xi,x)\; u_j(x)\; d\Gamma \qquad \text{(IV.51)}$$

onde:

$$u^F_{ijk}(\xi,x) = 2\mu\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\right)\frac{\partial u^F_{lj}}{\partial x_l(\xi)}\,\delta_{ik} + \mu\left(\frac{\partial u^F_{ij}}{\partial x_k(\xi)} + \frac{\partial u^F_{kj}}{\partial x_i(\xi)}\right) \qquad \text{(IV.52)}$$

$$p^F_{ijk}(\xi,x) = 2\mu\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\right)\frac{\partial p^F_{lj}}{\partial x_l(\xi)}\,\delta_{ik} + \mu\left(\frac{\partial p^F_{ij}}{\partial x_k(\xi)} + \frac{\partial p^F_{kj}}{\partial x_i(\xi)}\right) \qquad \text{(IV.53)}$$

Observando as equações (IV.1) e (IV.2) e lembrando que as derivadas de $u^*_{ij}(\xi,x)$ e $p^*_{ij}(\xi,x)$ são conhecidas, só resta determinar as derivadas da solução complementar, que podem ser obtidas da seguinte forma:

$$\frac{\partial u^c_{ij}(\xi,x)}{\partial x_k(\xi)} = \int_{\Gamma^I} p^*_{jl}(x,\zeta)\,\frac{\partial c_{il}(\xi,\zeta)}{\partial x_k(\xi)}\,d\Gamma(\zeta) \qquad \text{(IV.54)}$$

$$\frac{\partial p^c_{ij}(\xi,x)}{\partial x_k(\xi)} = \int_{\Gamma^I} P^*_{jl}(x,\zeta)\,\frac{\partial c_{il}(\xi,\zeta)}{\partial x_k(\xi)}\,d\Gamma(\zeta) \qquad \text{(IV.55)}$$

As derivadas das aberturas das trincas, nas duas equações acima, podem ser calculadas através da derivação das equações (IV.16) e (IV.17)

$$\oint_{\Gamma^I} P^*_{11}(\overline{\zeta}_m,\zeta)\,\frac{\partial c_{i1}(\xi,\zeta)}{\partial x_k(\xi)}\,d\Gamma(\zeta) = -\frac{\partial p^*_{i1}(\xi,\overline{\zeta}_m)}{\partial x_k(\xi)} \qquad \text{(IV.56)}$$

$$\oint_{\Gamma^I} P^*_{22}(\overline{\zeta}_m,\zeta)\,\frac{\partial c_{i2}(\xi,\zeta)}{\partial x_k(\xi)}\,d\Gamma(\zeta) = -\frac{\partial p^*_{i2}(\xi,\overline{\zeta}_m)}{\partial x_k(\xi)} \qquad \text{(IV.57)}$$

Novamente dando origem à utilização das mesmas matrizes $\boldsymbol{S}_1$ e $\boldsymbol{S}_2$ nos sistemas de equações abaixo:

$$\boldsymbol{S}_1\,\frac{\partial \boldsymbol{c}_{i1}(\xi)}{\partial x_k(\xi)} = \frac{\partial \boldsymbol{p}_{i1}(\xi)}{\partial x_k(\xi)} \qquad \text{(IV.58)}$$

$$\boldsymbol{S}_2\,\frac{\partial \boldsymbol{c}_{i2}(\xi)}{\partial x_k(\xi)} = \frac{\partial \boldsymbol{p}_{i2}(\xi)}{\partial x_k(\xi)} \qquad \text{(IV.59)}$$

Expressões análogas às expressões finais da seção anterior são obtidas:

$$\frac{\partial u^F_{i1}(\xi,x)}{\partial x_k(\xi)} = \frac{\partial u^*_{i1}(\xi,x)}{\partial x_k(\xi)} + a\sum_{n=1}^{N}\left[p^*_{11}(x,\zeta_n)\,\frac{\partial c_{i1}(\xi,\zeta_n)}{\partial x_k(\xi)}\,W_n\right] \qquad \text{(IV.60)}$$

$$\frac{\partial u^F_{i2}(\xi,x)}{\partial x_k(\xi)} = \frac{\partial u^*_{i2}(\xi,x)}{\partial x_k(\xi)} + a\sum_{n=1}^{N}\left[p^*_{22}(x,\zeta_n)\,\frac{\partial c_{i2}(\xi,\zeta_n)}{\partial x_k(\xi)}\,W_n\right] \qquad \text{(IV.61)}$$

$$\frac{\partial p^F_{i1}(\xi,x)}{\partial x_k(\xi)} = \frac{\partial p^*_{i1}(\xi,x)}{\partial x_k(\xi)} + a\sum_{n=1}^{N}\left[P^*_{11}(x,\zeta_n)\,\frac{\partial c_{i1}(\xi,\zeta_n)}{\partial x_k(\xi)}\,W_n\right] \qquad \text{(IV.62)}$$

$$\frac{\partial p^F_{i2}(\xi,x)}{\partial x_k(\xi)} = \frac{\partial p^*_{i2}(\xi,x)}{\partial x_k(\xi)} + a\sum_{n=1}^{N}\left[P^*_{22}(x,\zeta_n)\,\frac{\partial c_{i2}(\xi,\zeta_n)}{\partial x_k(\xi)}\,W_n\right] \qquad \text{(IV.63)}$$

IV.5 Cálculo das Aberturas do Problema Real

Uma vez que a equação (IV.5) tenha sido discretizada e resolvida para um determinado problema, $u_j(x)$ e $p_j(x)$ são conhecidos ao longo de Γ^E. Considerando ainda problemas de trinca descarregada, o limite da equação hipersingular (III.32) aplicada a um corpo trincado, quando $\xi \to \Gamma^I$, leva a:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma^I} P^*_{ij}(\xi,x)\,c_j(x)\,d\Gamma(x) &= \int_{\Gamma^E} P^*_{ij}(\xi,x)\,u_j(x)\,d\Gamma(x) \\ &\quad - \int_{\Gamma^E} U^*_{ij}(\xi,x)\,p_j(x)\,d\Gamma(x) \end{aligned} \qquad \text{(IV.64)}$$

onde $c_j(x)$ é a abertura da trinca para o problema em questão. Portanto, usando o mesmo procedimento descrito para obter a função de Green :

$$\begin{aligned} a\sum_{n=1}^{N}\left(P^*_{11}(\xi_m,x_n)\,c_1(x)\,W_n\right) - E_{ij} &= \int_{\Gamma^E} P^*_{ij}(\xi_m,x)\,u_j(x)\,d\Gamma(x) \\ &\quad - \int_{\Gamma^E} U^*_{ij}(\xi_m,x)\,p_j(x)\,d\Gamma(x) \end{aligned} \qquad \text{(IV.65)}$$

e outra vez as mesmas matrizes $\boldsymbol{S}_1$ e $\boldsymbol{S}_2$ são empregadas para obter c_j nos pontos de Gauss. A única diferença agora é que os termos independentes, lado direito da equação (IV.65), são calculados através de integrais envolvendo a solução obtida no contorno externo do referido problema.

IV.6 Aplicação ao Domínio Transformado de Laplace

Ao se tratar o problema da geração da função de Green dinâmica no domínio da transformada de Laplace aparecem algumas diferenças em relação ao que foi exposto na seção anterior, porém o tratamento do problema é, em linhas gerais, o mesmo.

Os métodos mais precisos para avaliar a transformada inversa de Laplace numericamente utilizam para o parâmetro da transformada: $s = \alpha + \beta i$ [48]. Este é o caso do método de Durbin [49], utilizado no presente trabalho (cujas expressões básicas são mostradas no Apêndice B), que é um aprimoramento do método de Dubner e Abate [50]. Desta forma um novo estudo sobre as singularidades das partes real e imaginária da solução fundamental hipersingular deve ser feito. Da mesma forma que no caso anterior, as expressões das funções de Bessel são substituidas por suas aproximações polinomiais (Apêndice A) na expressão da solução fundamental hipersingular dinâmica, equação (IV.15), e se evidenciam os termos singulares e regulares. Este estudo, bem como o da solução no domínio da freqüência, foi desenvolvido por intermédio de *softwares* de manipulação simbólica, em virtude da grande quantidade de operações necessárias para se alcançar as expressões desejadas. Apesar das expressões que aproximam a solução hipersingular P_{ij}^* para o caso do domínio da

freqüência poderem ser consideradas como um caso particular (fazendo $\alpha = 0$) das expressões mostradas a seguir, estes resultados, no presente trabalho, foram obtidos independentemente.

Em resumo, com relação ao apresentado na seção IV.3, as singularidades das partes reais de P^*_{11} e P^*_{22} são mantidas, tendo apenas seus coeficientes alterados. Entretanto suas partes imaginárias passam a apresentar uma singularidade logarítmica, que é levada em consideração da mesma forma que a singularidade logarítmica da parte real. Isto é, ainda tratando o caso das trincas retilíneas e horizontais, pode-se expressar o comportamento das componentes não nulas de P^*_{ij} da seguinte forma:

$$Re\,[P^*_{11}] = \frac{k_{KR1}}{r^2} + k_{LR1}\ln(r) + k_{RR1} \tag{IV.66}$$

$$Im\,[P^*_{11}] = k_{LI1}\ln(r) + k_{RI1} \tag{IV.67}$$

$$Re\,[P^*_{22}] = \frac{k_{KR2}}{r^2} + k_{LR2}\ln(r) + k_{RR2} \tag{IV.68}$$

$$Im\,[P^*_{22}] = k_{LI2}\ln(r) + k_{RI2} \tag{IV.69}$$

Onde os termos $k_{KR1}, k_{LR1}, k_{RR1}, k_{LI1}, k_{RI1}, k_{KR2}, k_{LR2}, k_{RR2}, k_{LI2}$ e k_{RI2} dependem das constantes do material e do parâmetro da transformada. Abaixo são mostradas as expressões destes termos em função dos valores de $|s| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, de $\theta = \arctan(\beta/\alpha)$ e das constantes já definidas anteriormente.

$$k_{KR1} = \frac{\mu}{\pi}\left(1 - \frac{c_S^2}{c_P^2}\right) \tag{IV.70}$$

$$k_{LR1} = \frac{-\mu}{2\pi c_P^2}\left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}\right)\left(\frac{c_P^2}{c_S^2} + \frac{c_S^2}{c_P^2}\right) \tag{IV.71}$$

$$k_{RR1} = \frac{\mu}{2\pi c_P^2}\left[-\alpha\beta\left(\frac{c_P^2}{c_S^2} + \frac{c_S^2}{c_P^2}\right)\theta + \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}\right)\left(k_{Reg11}\frac{c_P^2}{c_S^2} + k_{Reg12}\frac{c_S^2}{c_P^2}\right)\right] \tag{IV.72}$$

$$k_{LI1} = \frac{\mu\alpha\beta}{2\pi c_P^2}\left(\frac{c_P^2}{c_S^2} + \frac{c_S^2}{c_P^2}\right) \tag{IV.73}$$

$$k_{RI1} = \frac{-\mu}{2\pi c_P^2}\left[\left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}\right)\left(\frac{c_P^2}{c_S^2} + \frac{c_S^2}{c_P^2}\right)\theta + \alpha\beta\left(k_{Reg11}\frac{c_P^2}{c_S^2} + k_{Reg12}\frac{c_S^2}{c_P^2}\right)\right] \tag{IV.74}$$

onde

$$k_{Reg11} = 0.365931515658412 + \ln(c_S) - \ln(|s|) \tag{IV.75}$$

$$k_{Reg12} = -0.134068484341587 + \ln(c_P) - \ln(|s|) \tag{IV.76}$$

$$k_{KR2} = \frac{\mu}{\pi}\left(1 - \frac{c_S^2}{c_P^2}\right) \tag{IV.77}$$

$$k_{LR2} = \frac{-\mu}{2\pi c_P^2}\left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}\right)\left[3\left(\frac{c_P^2}{c_S^2} + \frac{c_S^2}{c_P^2}\right) - 4\right] \tag{IV.78}$$

$$\begin{aligned} k_{RR2} = \frac{\mu}{2\pi c_P^2}\Bigg\{ & -\alpha\beta\left[3\left(\frac{c_P^2}{c_S^2} + \frac{c_S^2}{c_P^2}\right) - 4\right]\theta \\ & + \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}\right)\left(k_{Reg21} + k_{Reg22}\frac{c_P^2}{c_S^2} + k_{Reg23}\frac{c_S^2}{c_P^2}\right)\Bigg\} \end{aligned} \tag{IV.79}$$

$$k_{LI2} = \frac{\mu\alpha\beta}{2\pi c_P^2}\left[3\left(\frac{c_P^2}{c_S^2} + \frac{c_S^2}{c_P^2}\right) - 4\right] \tag{IV.80}$$

$$\begin{aligned} k_{RI2} = \frac{-\mu}{2\pi c_P^2}\Bigg\{ & \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}\right)\left[3\left(\frac{c_P^2}{c_S^2} + \frac{c_S^2}{c_P^2}\right) - 4\right]\theta \\ & + \alpha\beta\left(k_{Reg21} + k_{Reg22}\frac{c_P^2}{c_S^2} + k_{Reg23}\frac{c_S^2}{c_P^2}\right)\Bigg\} \end{aligned} \tag{IV.81}$$

onde

$$k_{Reg21} = 1.53627393736635 - 4\ln(c_P) + 4\ln(|s|) \tag{IV.82}$$

$$k_{Reg22} = 0.0977945469752362 + 2\ln(c_P) + \ln(c_S) - 3\ln(|s|) \tag{IV.83}$$

$$k_{Reg23} = -1.402205453024761 + 3\ln(c_S) - 3\ln(|s|) \tag{IV.84}$$

Capítulo V

Implementação Computacional

Alguns detalhes da resolução numérica do problema formulado a partir das equações integrais introduzidas nos capítulos anteriores serão apresentados a seguir. A técnica de discretização do contorno pode ser encontrada em diversas referências, tais como [51], sendo portanto suprimida no presente trabalho. São salientados, entretanto, os aspectos mais importantes da presente implementação.

V.1 Montagem do Sistema de Equações

Segundo o procedimento usual do MEC, é obtido, através da avaliação sob forma discreta da equação (III.28), um sistema de equações algébricas lineares. No presente trabalho, o mesmo procedimento é desenvolvido, partindo-se da equação (IV.5), onde as soluções fudamentais $u_{ij}^F(\xi, x)$ e $p_{ij}^F(\xi, x)$ são dadas pelas expressões (IV.47) a (IV.50), dando origem a:

$$\left(\boldsymbol{C} + \hat{\boldsymbol{H}}\right).\boldsymbol{u} = \boldsymbol{G}.\boldsymbol{p} \tag{V.1}$$

onde $\boldsymbol{G}$ e $\hat{\boldsymbol{H}}$ são matrizes formadas pelas integrações da multiplicação de u_{ij}^F e p_{ij}^F pelas funções de forma dos elementos. A matriz quase diagonal, $\boldsymbol{C}$, se refere à

As ordens das singularidades referentes às soluções fundamentais elastodinâmicas em domínios transformados são as mesmas que as presentes na formulação elastostática. Uma vez que a parte complementar calculada neste trabalho não altera tais singularidades, pode-se tirar proveito das usuais estratégias de integração ao longo dos elementos.

As integrais regulares foram efetuadas através da usual quadratura de Gauss. As integrações singulares de $u^F(\xi, x)$, de comportamento logarítmico, também foram efetuadas numericamente. Para tanto foi utilizada a transformação proposta por Telles [52, 53] em associação a quadratura de Gauss.

Nas implementações para problemas estáticos, é comum a utilização do artifício da representação de um movimento de corpo rígido para se evitar a integração singular de p^*_{ij} [51]. Através deste artifício se obtém as submatrizes da diagonal de $\boldsymbol{H}$ com os termos C_{ij} embutidos. A utilização deste artifício nos problemas tratados no presente trabalho só é possível, entretanto, de forma indireta. Ao se tratar deste tipo de integração singular, subtrai-se da solução fundamental utilizada a solução fundamental da elastostática. Uma vez que os termos singulares são os mesmos, a parcela restante pode ser integrada numericamente de maneira usual. O referido artifício é aplicado na parcela singular, sendo posteriormente acrescentada a parcela que foi integrada numericamente, gerando o resultado esperado.

V.2 Subdivisão Automática da Trinca

Ao se implementar o procedimento descrito no capítulo anterior, foi observado um comportamento oscilatório, em relação ao espaço, das soluções fundamentais hipersingulares no domínio da freqüência, bem como, no domínio transformado de

contribuição dos termos C_{ij} e, incorporada à matriz $\hat{\boldsymbol{H}}$, permite escrever:

$$\boldsymbol{H}.\boldsymbol{u} = \boldsymbol{G}.\boldsymbol{p} \tag{V.2}$$

Após a introdução das condições de contorno, a equação acima pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f} \tag{V.3}$$

onde $\boldsymbol{y}$ representa os valores nodais incógnitos e $\boldsymbol{f}$ as contribuições dos valores prescritos no contorno.

Convém ressaltar que as matrizes e vetores acima referidos têm coeficientes complexos, porém foram computacionalmente armazenados em matrizes de coeficientes reais. Decompondo as matrizes e vetores em suas partes reais e imaginárias pode-se escrever:

$$[\boldsymbol{A}_r + i\boldsymbol{A}_i] \,.\, (\boldsymbol{y}_r + i\boldsymbol{y}_i) = \boldsymbol{f}_r + i\boldsymbol{f}_i \tag{V.4}$$

Efetuando a multiplicação indicada acima e igualando as partes reais e imaginárias independentemente:

$$\boldsymbol{A}_r.\boldsymbol{y}_r - \boldsymbol{A}_i.\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{f}_r \tag{V.5}$$

$$\boldsymbol{A}_i.\boldsymbol{y}_r + \boldsymbol{A}_r.\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{f}_i \tag{V.6}$$

Ou ainda sob forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_r & -\boldsymbol{A}_i \\ \boldsymbol{A}_i & \boldsymbol{A}_r \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \boldsymbol{y}_r \\ \boldsymbol{y}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_r \\ \boldsymbol{f}_i \end{Bmatrix} \tag{V.7}$$

Na implementação do presente trabalho, foram utilizados elementos isoparamétricos lineares na discretização do contorno externo.

Laplace. Esta característica compromete significativamente a eficiência da estratégia usual de integração numérica de Gauss. Para manter a precisão deste esquema de integração os intervalos de integração são subdivididos . No presente trabalho, esta estratégia é utilizada, de forma automatizada, em relação às integrações realizadas ao longo da trinca para geração das matrizes $\boldsymbol{S}_1$ e $\boldsymbol{S}_2$.

Observa-se que na medida em que são tomados mais termos na transformada, para a obtenção da resposta em intervalo de tempo fixo, aumenta o caráter oscilatório de P^*_{jk}. Desta forma, um intervalo de integração da trinca é dividido sempre que o parâmetro Θ torna-se maior que um determinado valor. Este parâmetro é dado por:

$$\Theta = \frac{\Delta l}{\overline{\lambda}} \tag{V.8}$$

onde Δl é o comprimento do intervalo a ser integrado e $\overline{\lambda}$ é dada por:

$$\overline{\lambda} = \frac{2\pi c_S}{|s|} \tag{V.9}$$

No caso de problemas no domínio da freqüência, $|s|$ é substituido pela freqüência angular ω e $\overline{\lambda}$ se confunde com o comprimento da onda secundária.

Para ilustrar o referido comportamento, são mostradas as figuras (V.1) a (V.4), onde são representadas as componentes de $P^*_{ij}(\xi, x)$ ao longo de $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|$, para três parâmetros do método de Durbin (Apêndice B). Neste método, caso seja desejada a avaliação da transformada inversa de Laplace em um intervalo de tempo, T, deve-se avaliar a função transformada para N valores complexos, sendo o k-ésimo dado por:

$$s_k = \alpha + \frac{2\pi k}{T} i \tag{V.10}$$

onde sua parte real, α, deve ser arbitrada.

Assim como no capítulo que se segue, foi aqui adotado $\alpha = 5/T$. Nas referidas figuras são mostradas respostas para k=1; 16 e 32, foi considerado $T = 5a/c_S$ e se supõe o ponto fonte na extremidade esquerda da trinca. Para que possa ser visualizado o comportamento desta solução fundamental ao longo de toda a trinca, as abscissas são adimensionalizadas em relação à semi largura, a, da trinca e levadas até o valor 2.

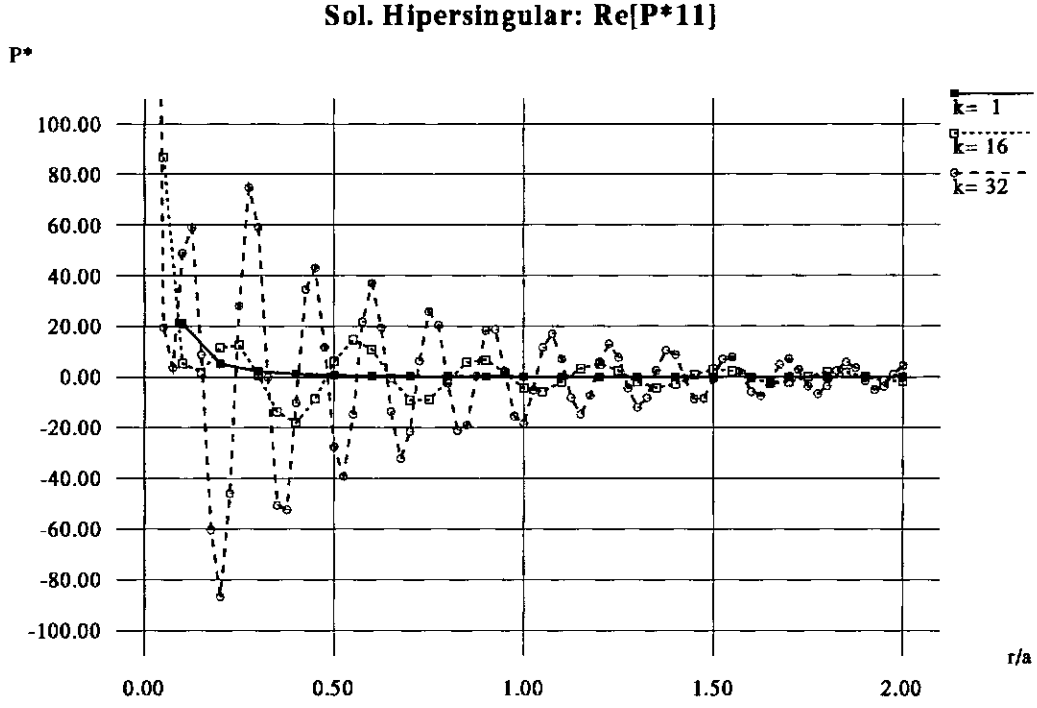


Figura V.1: $Re[P^*_{11}(\xi, x)]$ para diferentes termos da transformada de Laplace.

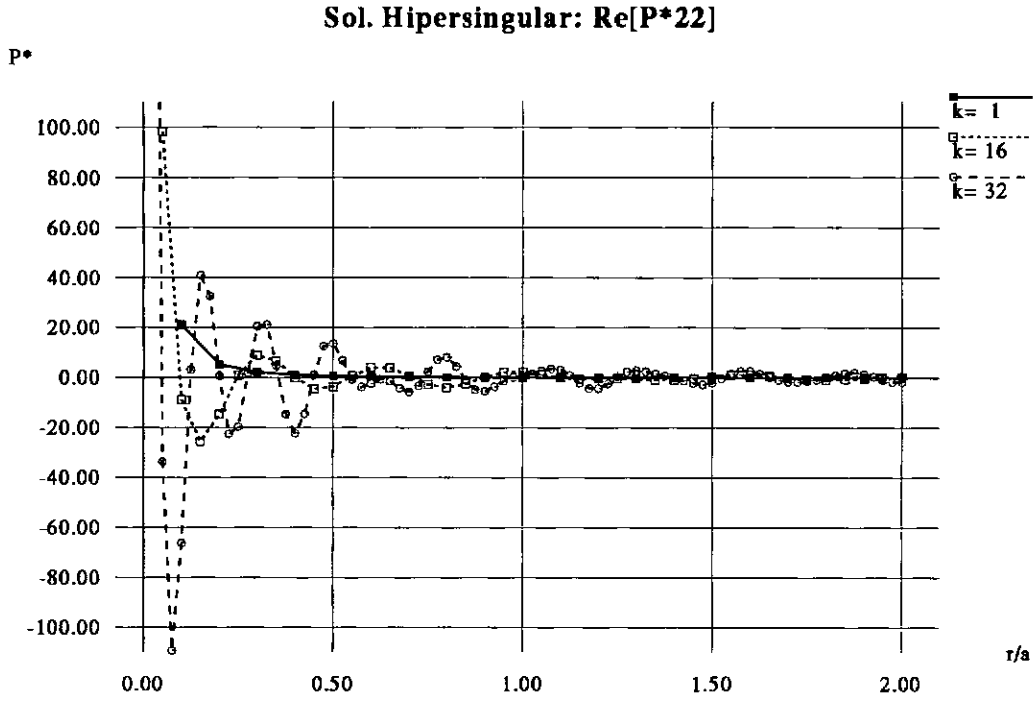


Figura V.2: $Re[P^*_{22}(\xi, x)]$ para diferentes termos da transformada de Laplace.

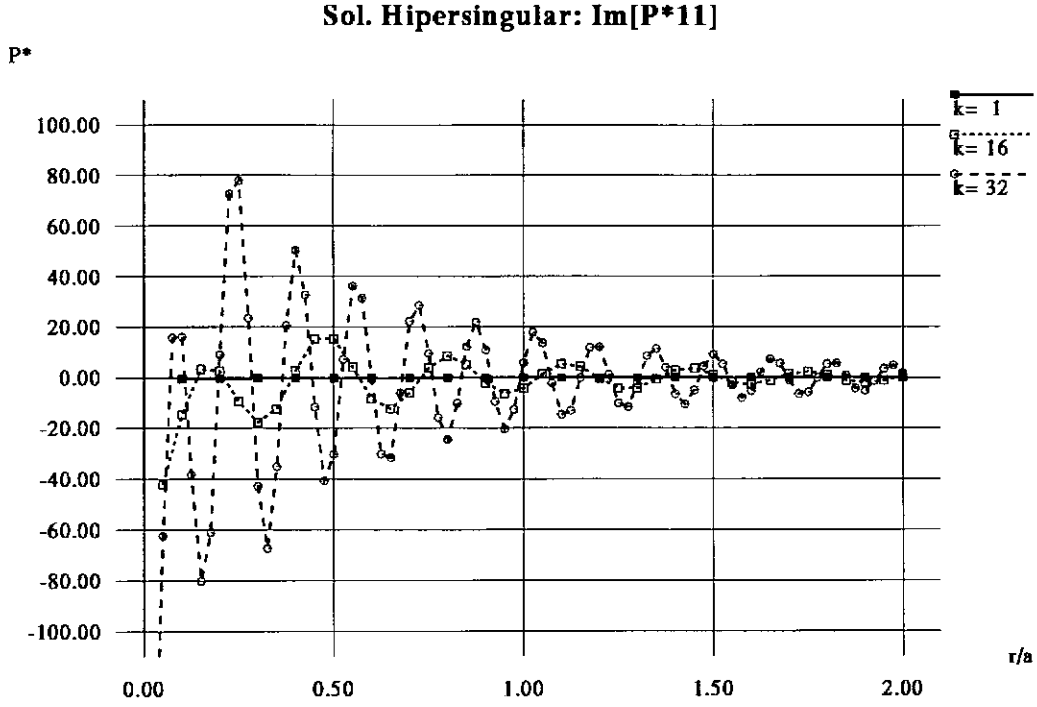


Figura V.3: $Im[P^*_{11}(\xi, x)]$ para diferentes termos da transformada de Laplace.

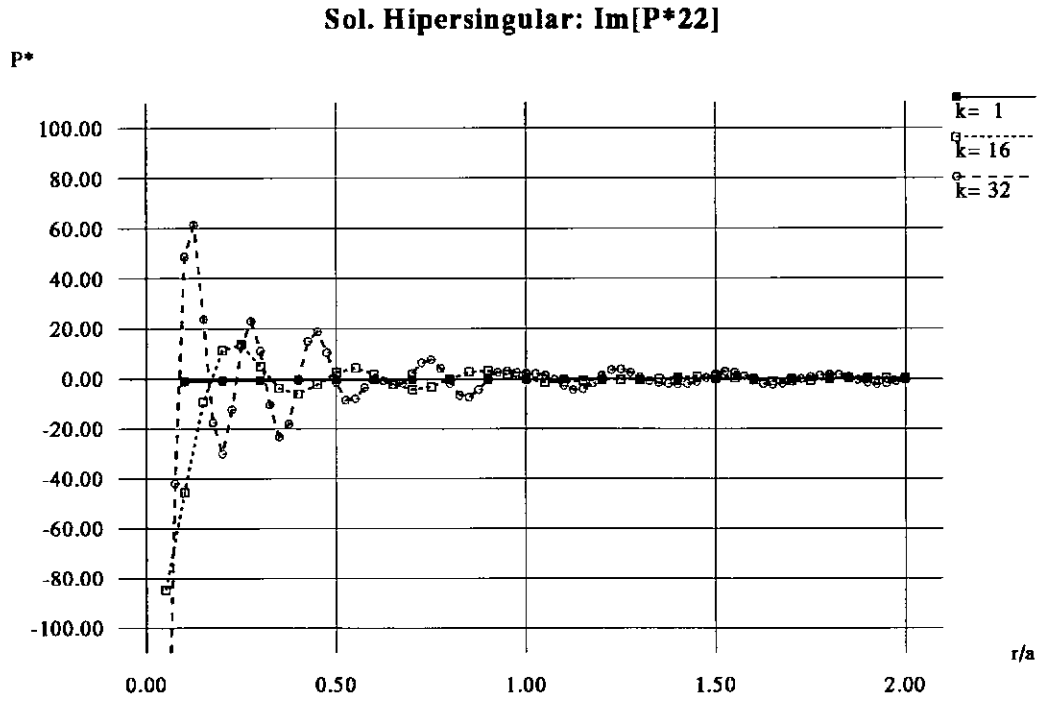


Figura V.4: $Im[P^*_{22}(\xi, x)]$ para diferentes termos da transformada de Laplace.

V.3 Cálculo dos Fatores de Intensidade de Tensão

Na presente implementação os fatores de intensidade de tensão são calculados em função das aberturas da trinca.

Os deslocamentos nas proximidades da ponta da trinca são dados por [54]:

$$u_2 = \frac{K_I}{\mu\sqrt{2\pi}}\sqrt{r}\ \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(2-2\nu-\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \tag{V.11}$$

$$u_1 = \frac{K_{II}}{\mu\sqrt{2\pi}}\sqrt{r}\ \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(2-2\nu+\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \tag{V.12}$$

onde r e θ são as coordenadas polares de um sistema com origem na ponta da trinca como mostrado na figura (V.5)

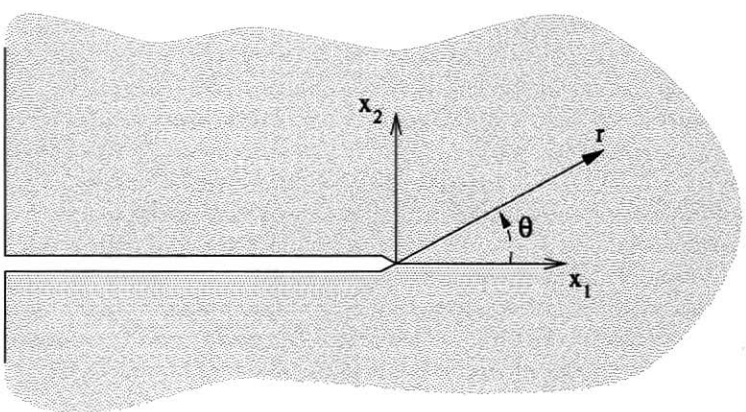


Figura V.5: Sistema de coordenadas para cálculo de K_I e K_{II}.

Se os deslocamentos são avaliados na face superior e inferior da trinca, isto é, para $\theta = \pm\pi$, pode-se obter os fatores de intensidade de tensão K_I e K_{II} como:

$$K_I = \frac{\mu\sqrt{2\pi}}{4(1-\nu)} \cdot \frac{c_2}{\sqrt{r}} \tag{V.13}$$

$$K_{II} = \frac{\mu\sqrt{2\pi}}{4(1-\nu)} \cdot \frac{c_1}{\sqrt{r}} \tag{V.14}$$

onde c_1 e c_2 são as aberturas da trinca a uma distância r da ponta da trinca considerada.

Entretanto, através de experimentação numérica, foi verificada uma melhora consistente nos resultados ao se ponderar os valores obtidos para alguns pontos próximos à ponta da trinca pela sua distância à mesma, obtendo para N pontos:

$$K_I = \frac{\mu\sqrt{2\pi}}{4(1-\nu)} \cdot \frac{\sum_{n=1}^{N} c_{2_n}\sqrt{r_n}}{\sum_{n=1}^{N} r_n} \tag{V.15}$$

$$K_{II} = \frac{\mu\sqrt{2\pi}}{4(1-\nu)} \cdot \frac{\sum_{n=1}^{N} c_{1_n}\sqrt{r_n}}{\sum_{n=1}^{N} r_n} \tag{V.16}$$

Para o cálculo de K_I e K_{II} em ambas as extremidades da trinca, chegou-se a resultados satisfatórios adotando três intervalos de integração, limitados pelas coordenadas adimensionais $\eta = \pm 0.95$, como mostrado na figura (V.6a). Em cada sudivisão da trinca são adotados doze pontos de Gauss, sendo tomados para cálculo dos fatores de intensidade de tensão os seis pontos mais próximos à ponta da trinca, figura (V.6b).

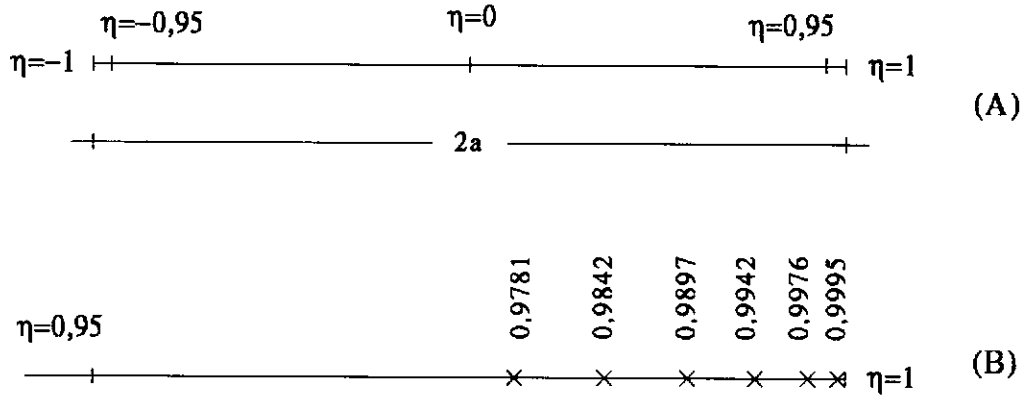


Figura V.6: Divisão da trinca para cálculo de fatores de intensidade de tensão;

a) Coordenadas adotadas;

b) Localização dos pontos através dos quais são calculados os fatores de intensidade de tensão.

Capítulo VI

Resultados Numéricos

Este capítulo apresenta a comparação dos resultados numéricos, obtidos com a utilização das técnicas descritas ao longo dos capítulos anteriores, com resultados analíticos e numéricos, obtidos por outros autores.

Primeiramente, são mostrados problemas no domínio da freqüência e, em seguida, são mostrados resultados transientes. Os resultados deste último tipo de problema foram obtidos através de transformadas inversas de Fourier e Laplace, calculadas numericamente. No primeiro caso foram utilizadas as rotinas de transformada rápida de Fourier (FFT) da referência [55]. Para o cálculo da transformada inversa de Laplace foi utilizado o método de Durbin [49].

Nos gráficos que se seguem os resultados da presente formulação são indicados por NDGF (*Numerical Dynamic Green's Function*) e algumas notações são alteradas. A freqüência de excitação é representada por W, as velocidades das ondas primária e secundária, C1 e C2, e o coeficiente de Poisson é representado por v. Os fatores de intensidade de tensão também têm sua representação modificada sendo referidos, sem os sub-índices, como K0, K1 e K2.

VI.1 Resultados no Domínio da Freqüência

Na seção que se segue são mostrados resultados para uma trinca em um meio infinito. Estes exemplos servem para mostrar a precisão do cálculo da função de Green da maneira aqui proposta, uma vez que, de fato, não são utilizados elementos de contorno. A seguir é mostrado um exemplo envolvendo um domínio finito, onde podem ser observados os resultados da função de Green proposta aplicada ao MEC.

VI.1.1 Trinca no Meio Infinito

Nesta seção são mostrados os resultados obtidos para o problema de uma onda plana e harmônica no tempo, incidindo em uma trinca situada em um meio elástico infinito, como mostrado na figura (VI.1). Os resultados, em termos de fatores de intensidade de tensão dinâmicos, são adimensionalizados em relação ao fator intensidade de tensão estático $(K0 = \sigma\sqrt{\pi a})$.

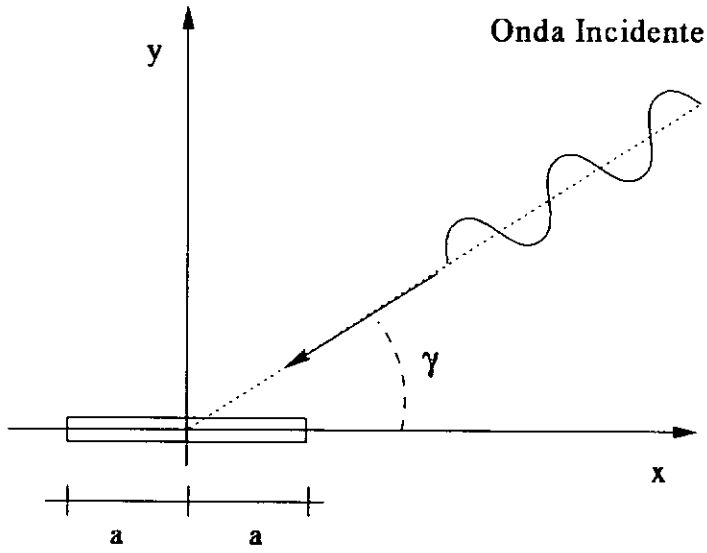


Figura VI.1: Onda plana incidindo na trinca de um meio elástico ilimitado, com um âgulo de incidência γ.

Para a resolução deste problema leva-se em conta uma superposição de efeitos análoga à descrita para a obtenção da parte complementar da função de Green na Seção IV.1. Da mesma forma que na situação anterior, a trinca é carregada com as forças de superfície que anulam as que aparecem na posição da trinca, quando o meio infinito não trincado é carregado. No presente problema o carregamento do meio infinito é uma onda plana senoidal.

A figura (VI.2) mostra a comparação dos fatores de intensidade de tensão dinâmicos, calculados pela presente formulação, através das aberturas da trinca, com os resultados obtidos por Sih e Loeber [12] em um problema de Estado Plano de Deformação (EPD), para ν assumindo valores 0,10 ; 0,20 e 0,40.

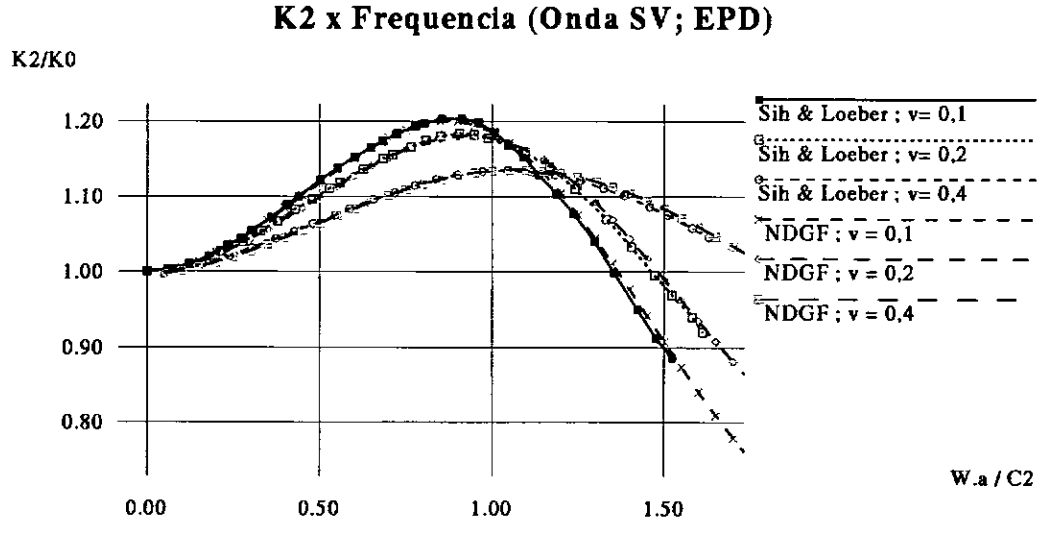


Figura VI.2: $K1$ dinâmico para trinca no meio infinito ($\gamma = 90°$).

Para problema análogo, porém em Estado Plano de Tensão (EPT), a comparação dos resultados da presente formulação com os resultados obtidos por Sih e Loeber [12], é apresentada na figura (VI.3). Nesta figura são mostrados os fatores de intensidade de tensão $K1$ e $K2$, obtidos, respectivamente, para a solicitação da trinca

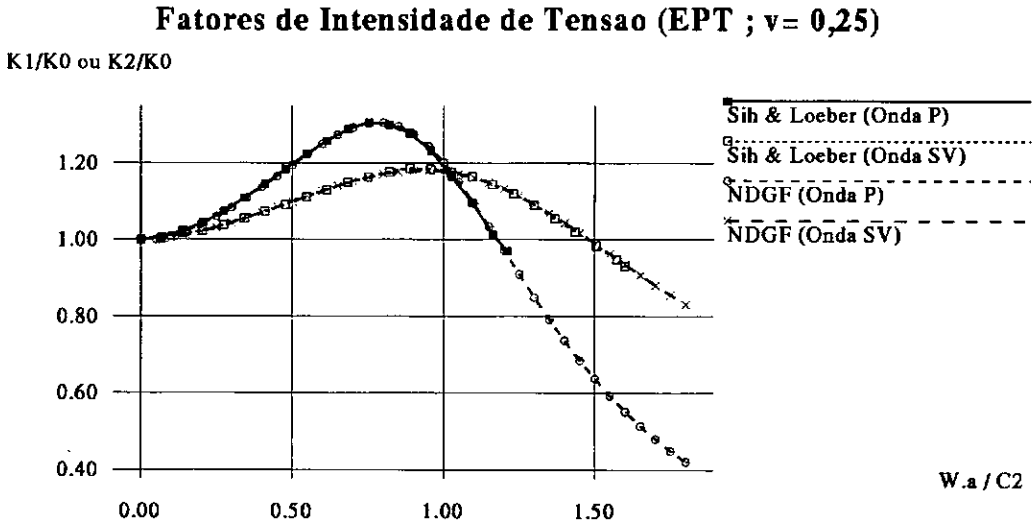


Figura VI.3: Comparação entre os fatores de intensidade de tensão para as ondas de pressão e cisalhamento ($\gamma = 90°$).

por uma onda P e por uma onda SV, em um meio infinito com $\nu = 0,25$.

Analogamente à figura (VI.2), a figura (VI.4) mostra os resultados obtidos pela presente formulação para os fatores de intensidade de tensão dinâmicos, para diversos valores da freqüência de excitação, adimensionalizados em relação à velocidade de propagação da onda P, c_P, e da semi-largura da trinca, a.

De acordo com o que foi mostrado na seção (V.3), os fatores de intensidade são calculados pelas aberturas da trinca, subdividindo-se inicialmente a trinca em três intervalos de integração, definidos pelas coordenadas adimensionais $\eta = -1,00; -0,95; 0,95; 1,00$. A partir de alguns testes de convergência adotou-se para o parâmetro controlador da subdivisão automática do intervalo, Θ, descrito na Seção V.2, o valor 1. Desta forma, apesar da grande faixa de freqüências analisadas, não foi necessária a subdivisão da trinca ao longo do processo de solução. Os resultados assim calculados são comparados com os obtidos por K. Mal [13] em um problema de Estado

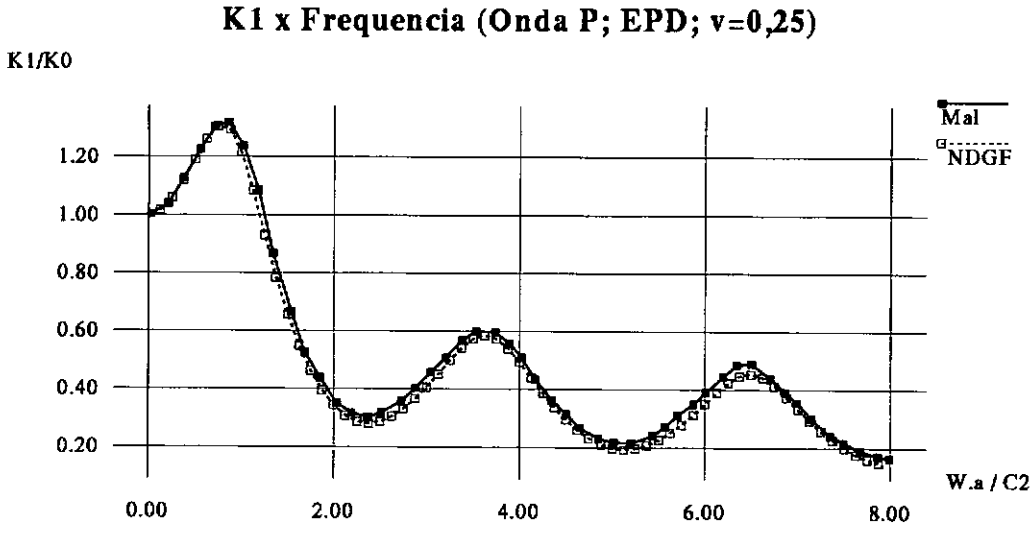


Figura VI.4: K1 dinâmico para trinca no meio infinito ($\gamma = 90°$).

Plano de Deformação (EPD). Neste problema, a onda P incide perpendicularmente à trinca, $\gamma = 90$ graus, e o meio elástico apresenta coeficiente de Poisson, ν, igual a 0,25.

Utilizando, ainda, para fins de comparação, os resultados referidos acima [13], são mostradas na figura (VI.5) as amplitudes das aberturas ao longo da trinca, para diversos valores da freqüência angular, ω, adimensionalizadas em relação à abertura no centro da trinca para o problema estático. Considerando a simetria do problema em questão, só são mostradas as aberturas do centro da trinca até a sua extremidade direita, sendo utilizada a coordenada adimensional, η, para definir a posição ao longo da trinca. Neste caso, para se explicitar a eficiência do método proposto só é utilizado um intervalo de integração ao longo de toda a trinca, isto é, as aberturas são calculadas em apenas 12 pontos, em todas as análises.

Nas figuras (VI.6) e (VI.7) é mostrada a influência da variação do ângulo de incidência da onda de pressão em relação à trinca. Nestas figuras são mostrados os

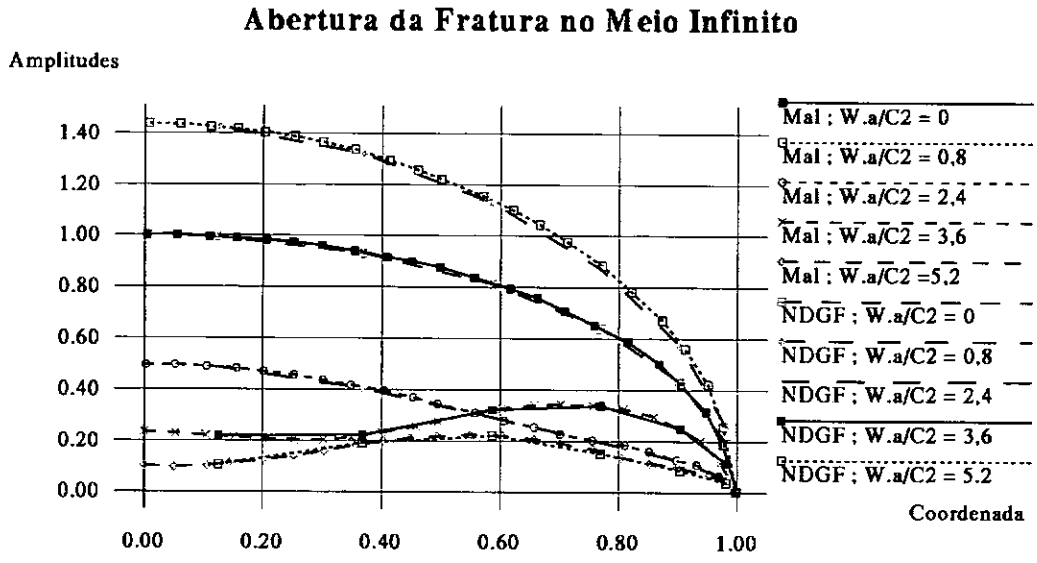


Figura VI.5: Amplitudes das aberturas da trinca no meio infinito devidas à onda de pressão para $\omega.a/c_S = 0$; 0,8; 2,4; 3,6 e 5,2 (EPD ; $\gamma = 90°$).

fatores de intensidade de tensão, calculados para a extremidade direita da trinca, quando o ângulo de incidência, γ, assume os valores 0, 30, 45, 60 e 90 graus (indicados entre parênteses nas figuras). Os resultados da presente formulação são comparados com os obtidos por Chen e Sih [56], através da utilização de um método desenvolvido por Copson [57] para resolver sistemas de equações integrais. Na referência [23] estes resultados também foram utilizados na comparação com os obtidos pelo MEC, através da técnica de domínios múltiplos com elementos do tipo *quarter point* nas extremidades da trinca, por Chirino e Dominguez.

As figuras (VI.8) e (VI.9) são análogas as (VI.6) e (VI.7) e dizem respeito à incidência de uma onda de cisalhamento.

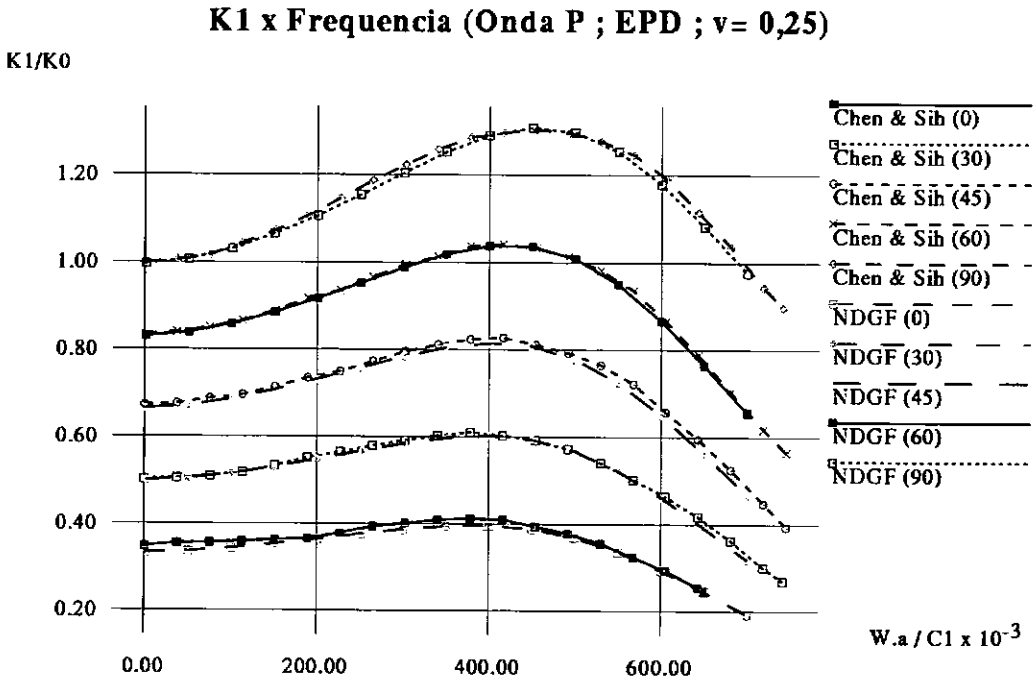


Figura VI.6: $K1$ x ω (adimensionalizados) para vários γ.

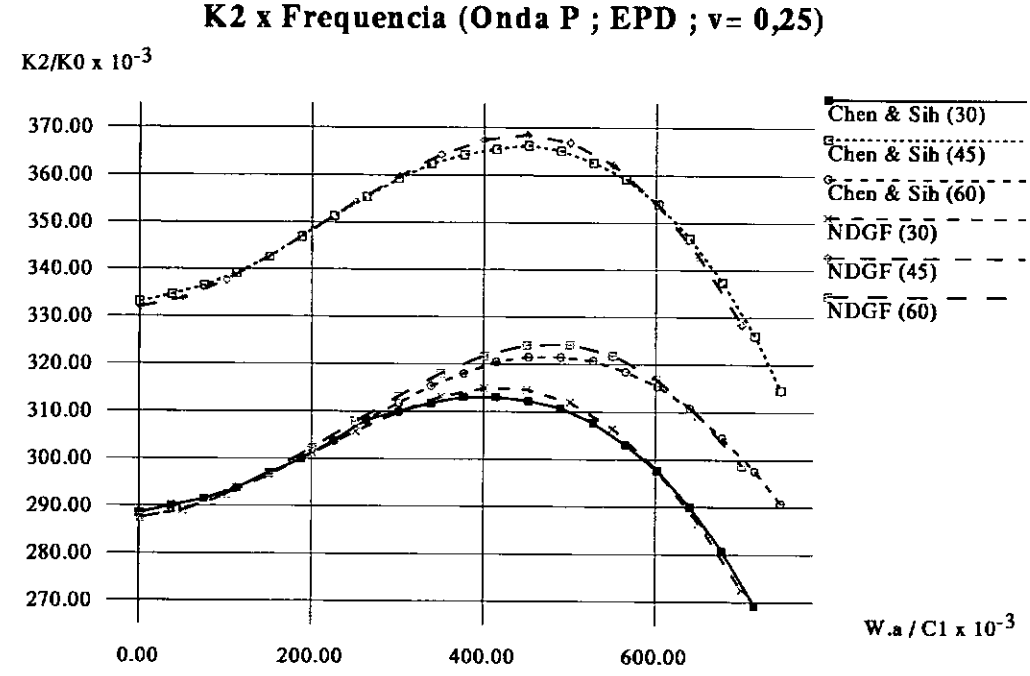


Figura VI.7: $K2$ x ω (adimensionalizados) para vários γ.

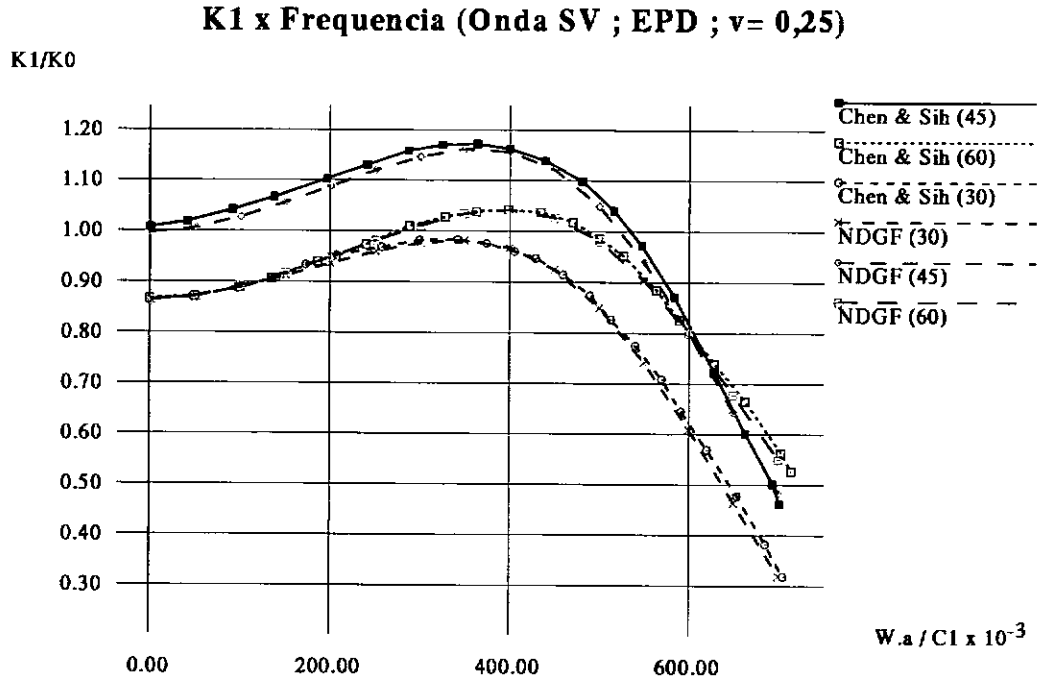


Figura VI.8: $K1$ x ω (adimensionalizados) para vários γ.

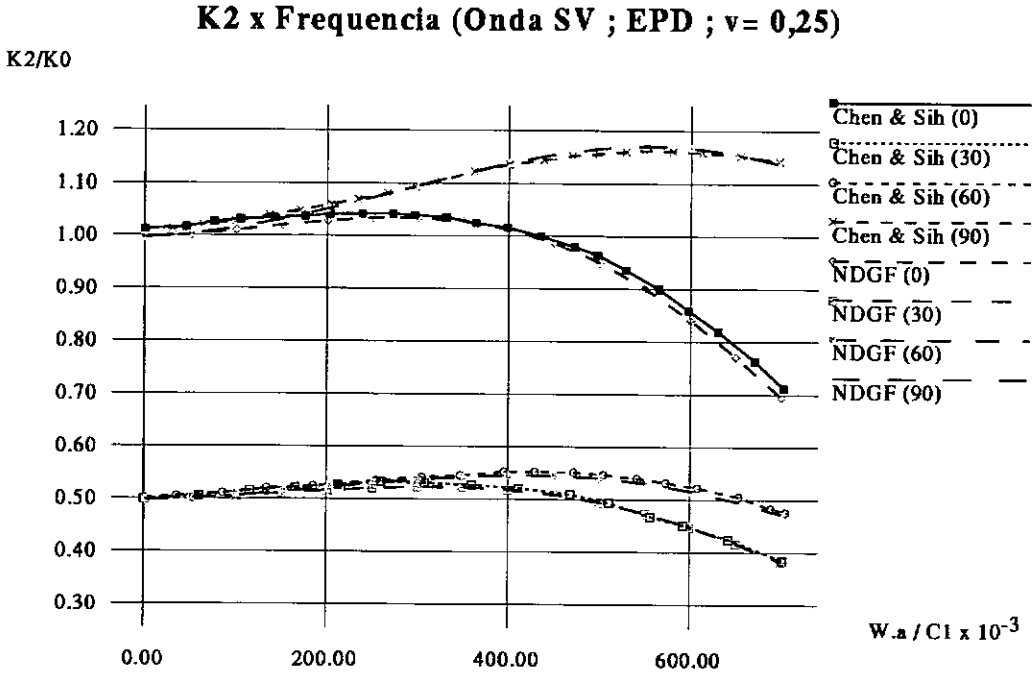


Figura VI.9: $K2$ x ω (adimensionalizados) para vários γ.

VI.1.2 Chapa Retangular

O problema de uma chapa retangular, com uma trinca centrada e paralela aos lados menores, submetida a uma força de superfície harmônica no tempo e constante ao longo dos lados menores, como mostra a figura (VI.10), foi também analisado. Neste problema, a chapa tem dimensões $2b$ x $2h$, sendo $h/b = 2$ e a trinca tem comprimento $2a$, com $a/b = 0,24$.

Na discretização foram utilizados elementos isoparamétricos lineares; 10 para os lados menores e 20 para os maiores, como mostra a figura (VI.11).

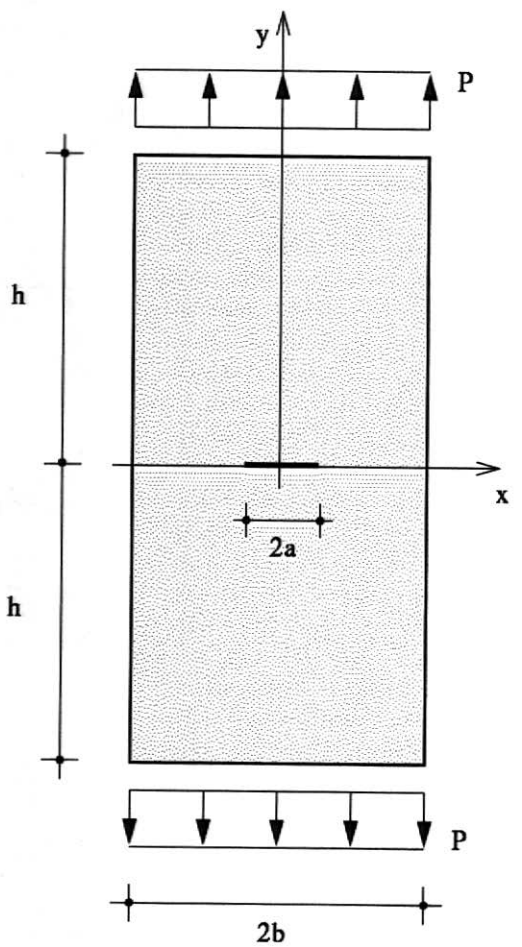


Figura VI.10: Chapa retangular: Descrição do problema.

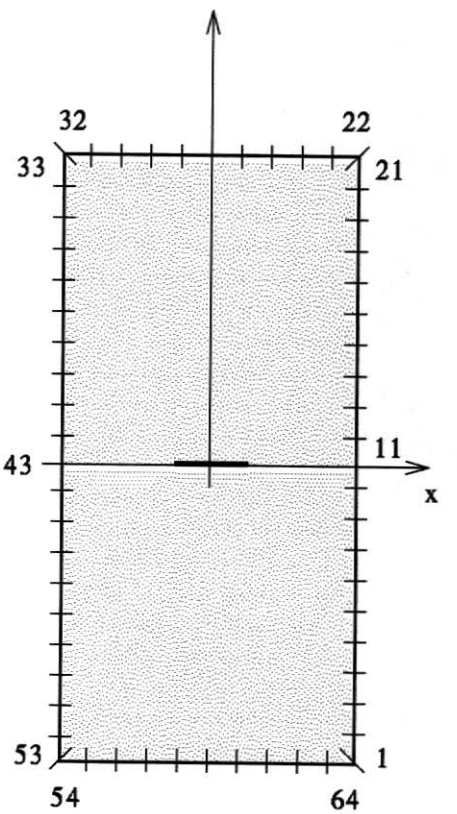


Figura VI.11: Chapa retangular: Discretização.

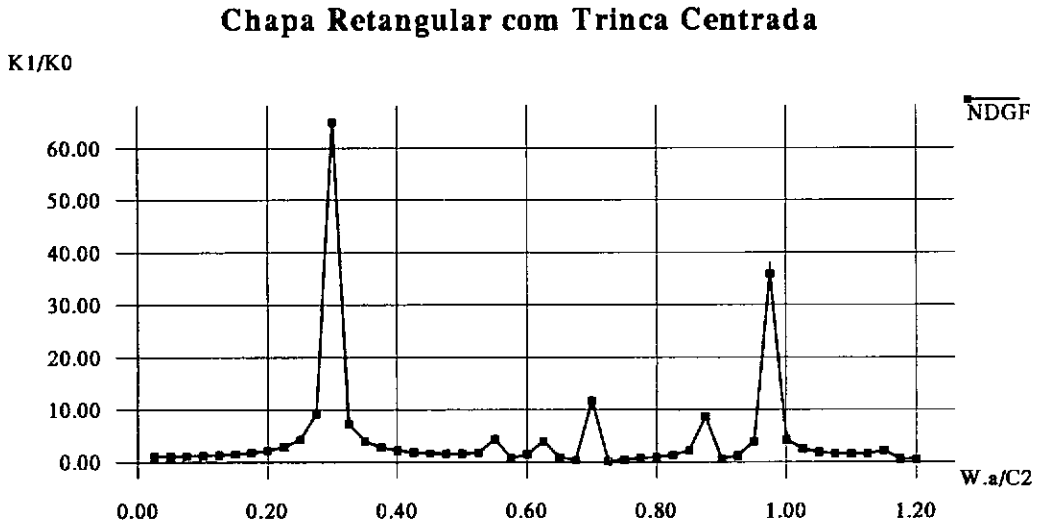


Figura VI.12: K1/K0 ao longo da freqüência de excitação.

Este problema foi resolvido, também, por Chirino e Dominguez [23] para uma chapa com largura $b = 20mm$, módulo de elasticidade transversal $\mu = 76,923GPa$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e densidade de massa $\rho = 5000kg/m^3$. Porém, pela dificuldade da correta reprodução gráfica de seus resultados, na figura (VI.12) só são mostrados os resultados obtidos pela presente formulação. Os picos observados nesta figura ocorrem quando a freqüência de excitação se aproxima de uma das freqüências naturais da chapa. Por este aspecto pode ser observada a concordância entre os resultados aqui apresentados e os encontrados na referência [23],

VI.2 Respostas Transientes

Assim como na Seção VI.1 serão apresentados, primeiramente, resultados referentes a problemas em domínios bidimensionais ilimitados. Nestes problemas poderão ser observados aspectos referentes à precisão dos resultados transientes, isto é, afetados por transformações inversas (Fourier e Laplace). Na seqüência, são apresentados problemas descritos em domínios limitados, onde se pode observar a qualidade das respostas dinâmicas do MEC utilizando a função de Green proposta.

VI.2.1 Trinca no Meio Infinito

Trinca Semi-infinita

Como primeiro exemplo, é tomado o problema de uma trinca em um meio infinito sujeita a uma carga constante subitamente aplicada. Na solução deste problema dinâmico, as extremidades da trinca formam o centro de duas ondas cilíndricas. Até o momento em que estas duas ondas comecem a interagir, a resposta do problema em questão se confunde com a resposta do problema análogo, de uma trinca semi-infinita em um meio elástico infinito. Este último problema tem solução analítica simples, obtida por Baker [10]:

$$K1 = 0,785\sqrt{\frac{c_s.t}{a}}\sqrt{\sigma_1 a} \tag{VI.1}$$

para o caso do aço , onde a razão $c_S/c_P = 0,542$, isto é, $\nu = 0,292$.

A figura (VI.13) mostra a comparação dos resultados ao longo do tempo, obtidos pela transformada inversa de Fourier, utilizando 64 freqüências (entre 0,001 e 19,63), com os resultados obtidos a partir da expressão acima. Para obter o resultado pela

transformada de Laplace, através do método de Durbin, são avaliados 64 parâmetros, com parte real, $\alpha = 5/T$, e sendo adotado, também, $T = 4,5\ a/c_S$.

Como é mostrado nos trabalhos de Thau e Lu [14] e Sih et alli [15] , quando uma onda incidente atinge a borda de uma trinca, são aí geradas novas perturbações (ondas difratadas). No caso de trincas finitas, decorrido algum tempo, estas ondas difratadas vão influenciar o comportamento do bordo oposto da trinca. A partir de $t = 2a/c_P$ ou $c_s.t/a = 1,084$ uma extremidade da trinca começa a influir no comportamento da outra, como pode-se observar na figura abaixo.

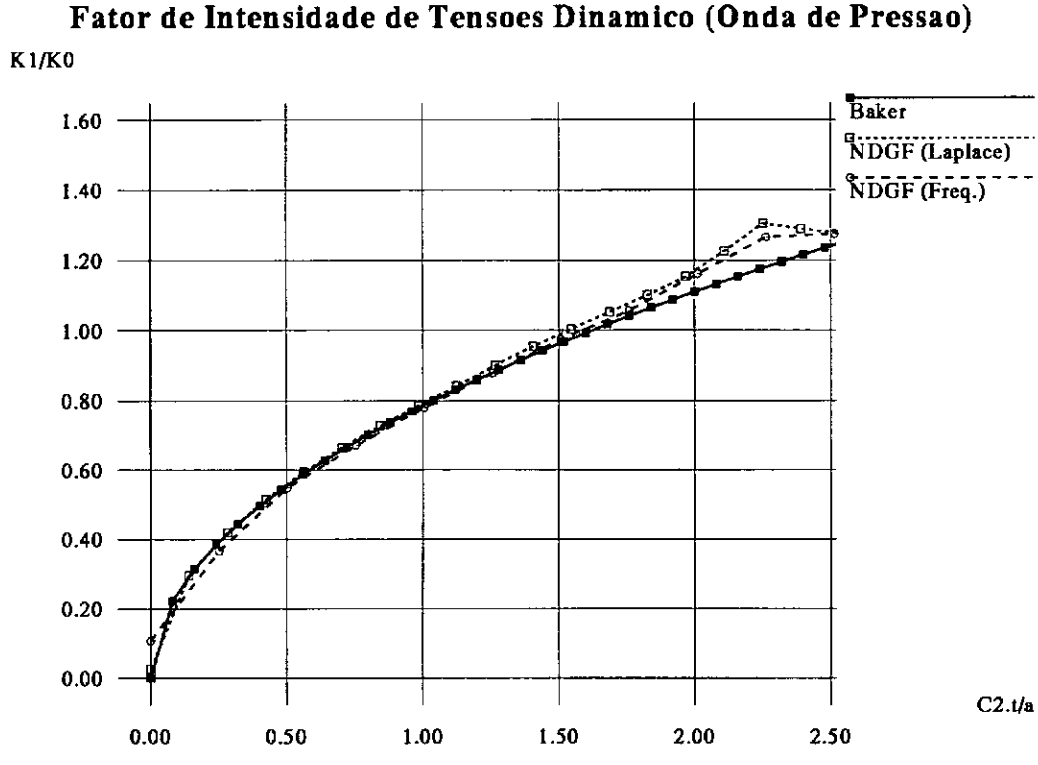


Figura VI.13: K1 Dinâmico à direita para trinca no meio infinito.

Trinca Finita

O problema de uma onda plana de pressão incidindo segundo um ângulo γ em uma trinca de dimensões finitas, em um meio elástico ilimitado foi resolvido por Thau e Lu [14], por meio da técnica de Wiener-Hopf [8] generalizada. Os resultados obtidos por tais autores são exatos do instante em que a onda P incidente chega a um bordo da trinca, até o instante em que a onda difratada retorna a este bordo. Isto é, depois de a onda gerada por uma borda da trinca percorrê-la duas vezes, retornando ao bordo onde foi gerada. Na referência [14] são apresentados resultados para os fatores de intensidade de tensão dinâmicos $K1$ e $K2$ para as duas extremidades da trinca, para diversos ângulos de incidência de uma onda em perfil Heaviside. Os resultados obtidos pelos referidos autores apresentam uma descontinuidade na derivada da curva que representa os fatores de intensidade de tensão ao longo do tempo. Segundo os mesmos autores, este comportamento se deve à chegada, no bordo da trinca analisado, da onda de Rayleigh gerada no bordo oposto.

As figuras (VI.14) a (VI.21) mostram a comparação dos resultados citados com os do presente trabalho para K1 e K2 nas duas extremidades da trinca. Assim como nas figuras (VI.6) a (VI.9), os números entre parênteses nas legendas representam o ângulo de incidência da onda, γ. São ampliados detalhes das figuras correspondentes à descontinuidade das derivadas, descrita acima, para melhor percepção da precisão das respostas obtidas.

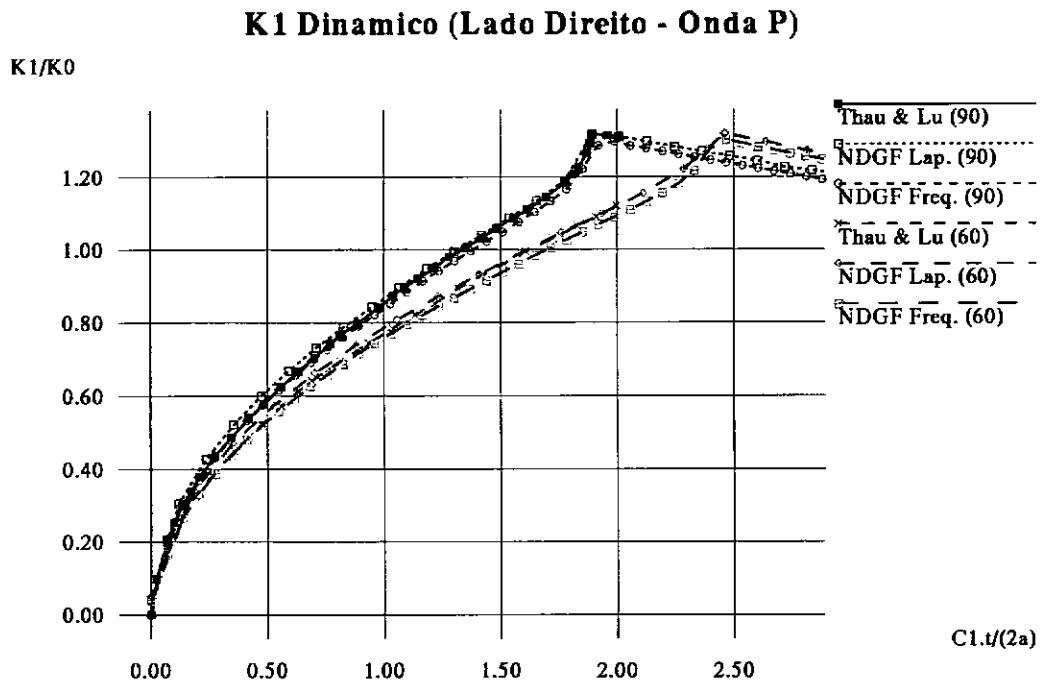


Figura VI.14: Fator de intensidade de tensão K1 ao longo do tempo, para trinca em meio infinito, na extremidade x=a.

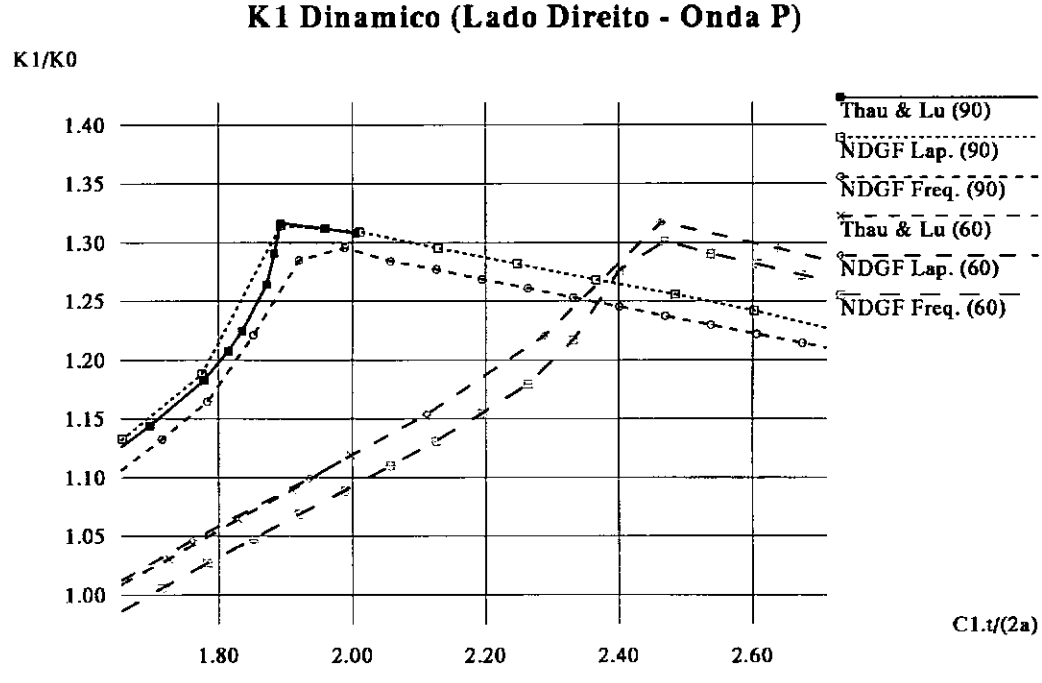


Figura VI.15: K1 Dinâmico à direita para trinca no meio infinito (detalhe).

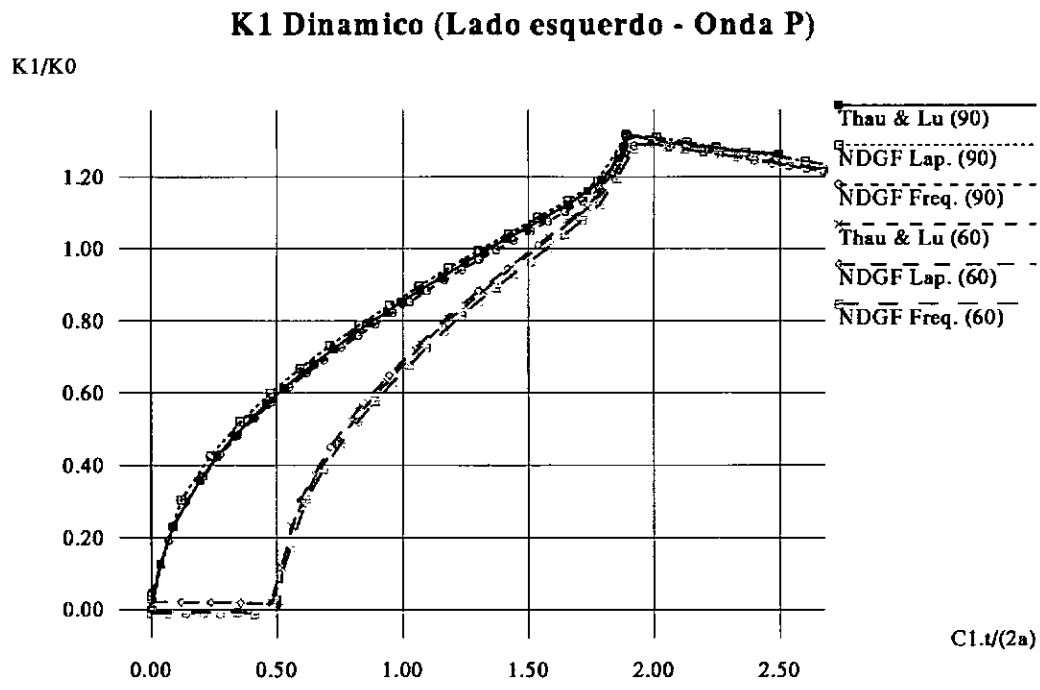


Figura VI.16: Fator de intensidade de tensão K1 ao longo do tempo, para trinca em meio infinito, na extremidade x=-a.

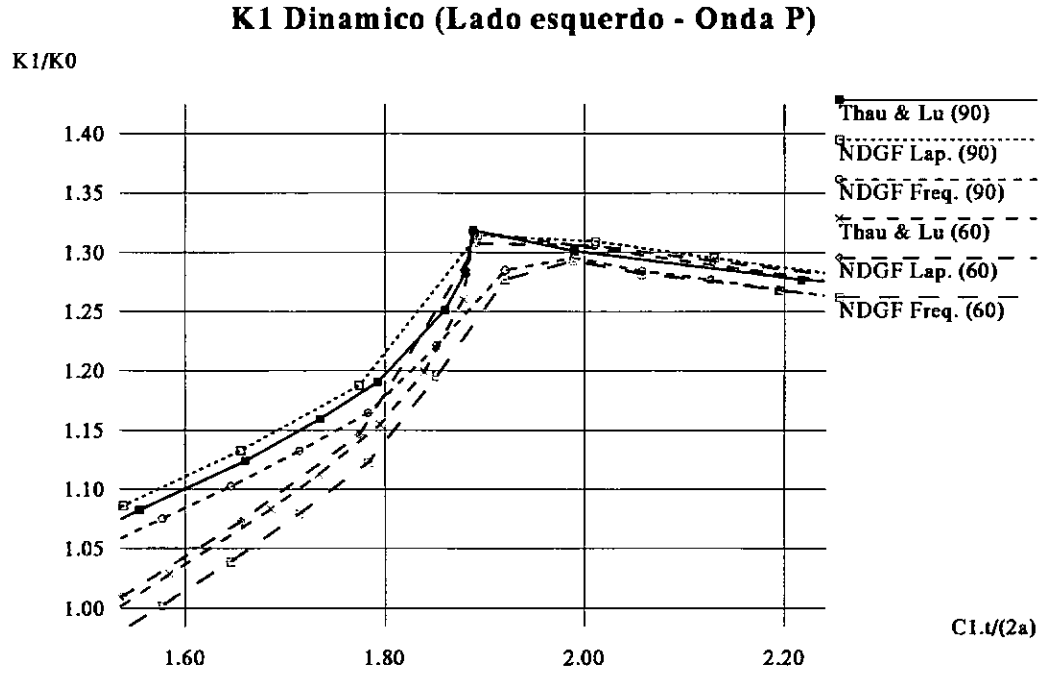


Figura VI.17: K1 Dinâmico à esquerda para trinca no meio infinito (detalhe).

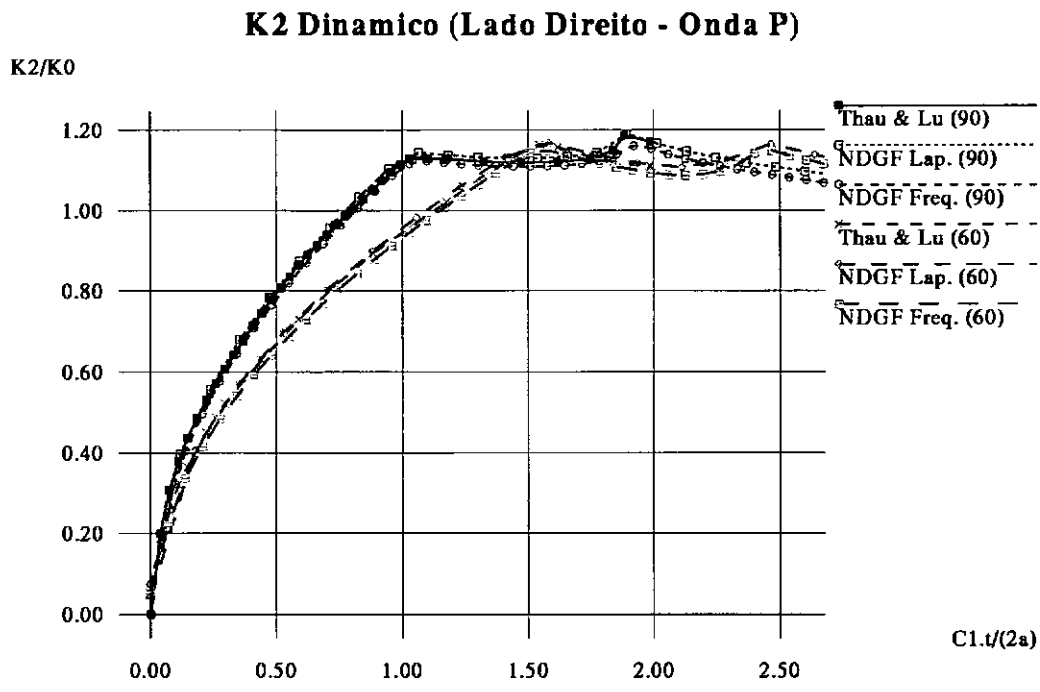


Figura VI.18: Fator de intensidade de tensão K2 ao longo do tempo, para trinca em meio infinito, na extremidade x=a.

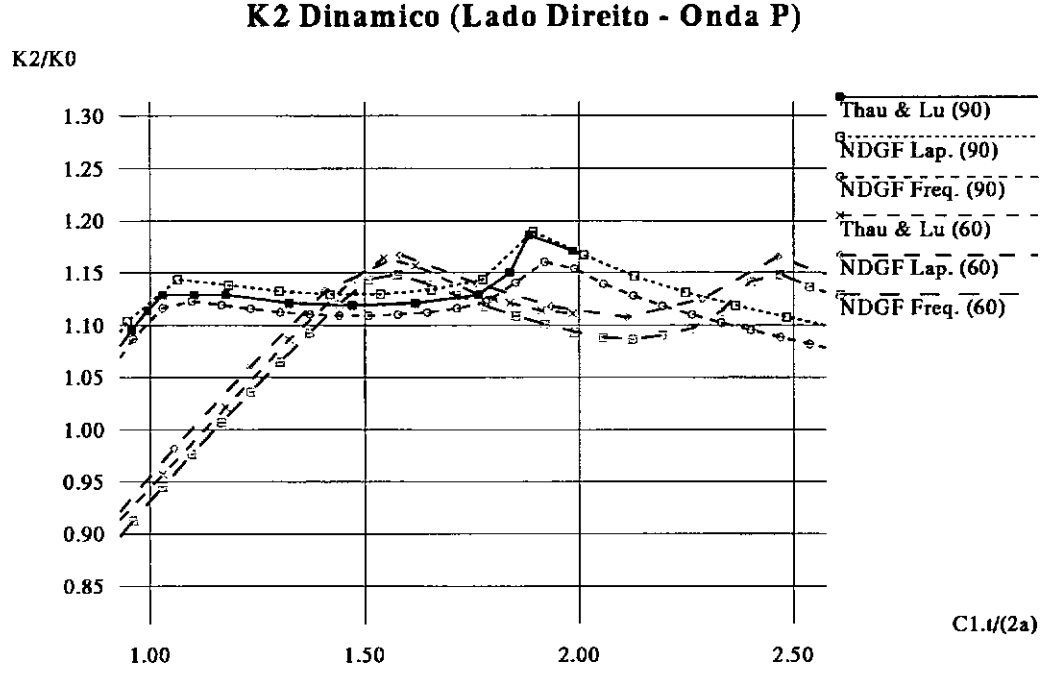


Figura VI.19: K2 Dinâmico à direita para trinca no meio infinito (detalhe).

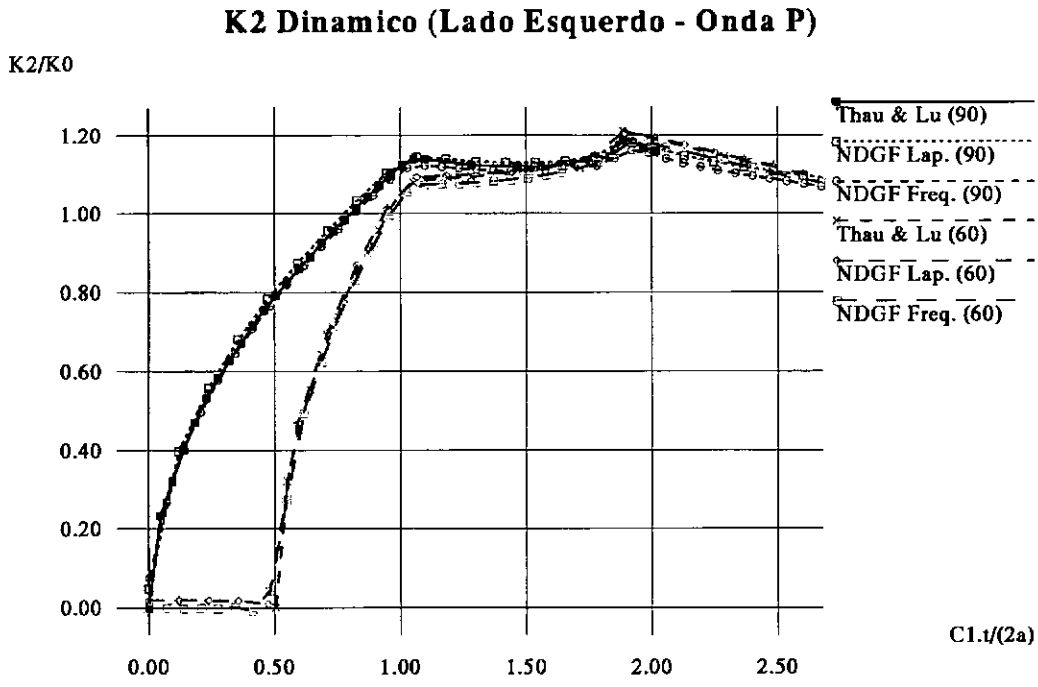


Figura VI.20: Fator de intensidade de tensão K2 ao longo do tempo, para trinca em meio infinito, na extremidade x=-a.

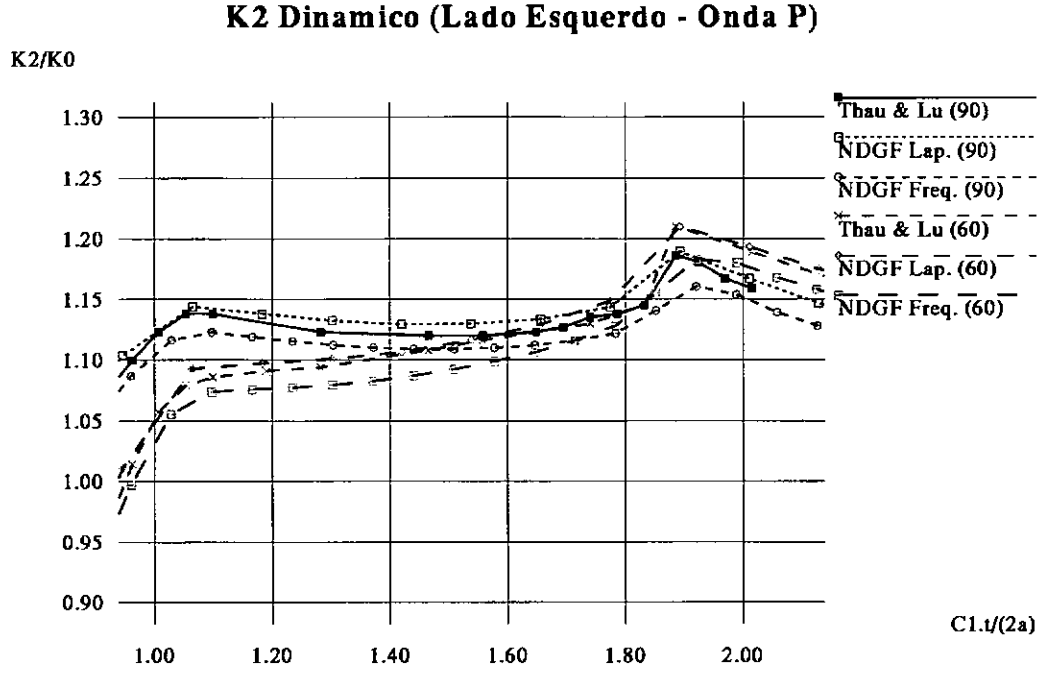


Figura VI.21: K2 Dinâmico à esquerda para trinca no meio infinito (detalhe).

VI.2.2 Problemas em Domínios Limitados

Alguns problemas, inclusive o da chapa retangular descrito na Seção VI.1.2, são resolvidos a seguir para a mesma distribuição espacial de carregamento, porém subitamente aplicado em um dado instante de tempo e mantido constante.

Simulação do Meio Infinito

Primeiramente, é utilizado um problema semelhante ao mostrado na figura (VI.10), porém com os deslocamentos horizontais impedidos nos bordos verticais e com a trinca deslocada como mostra a figura (VI.22).

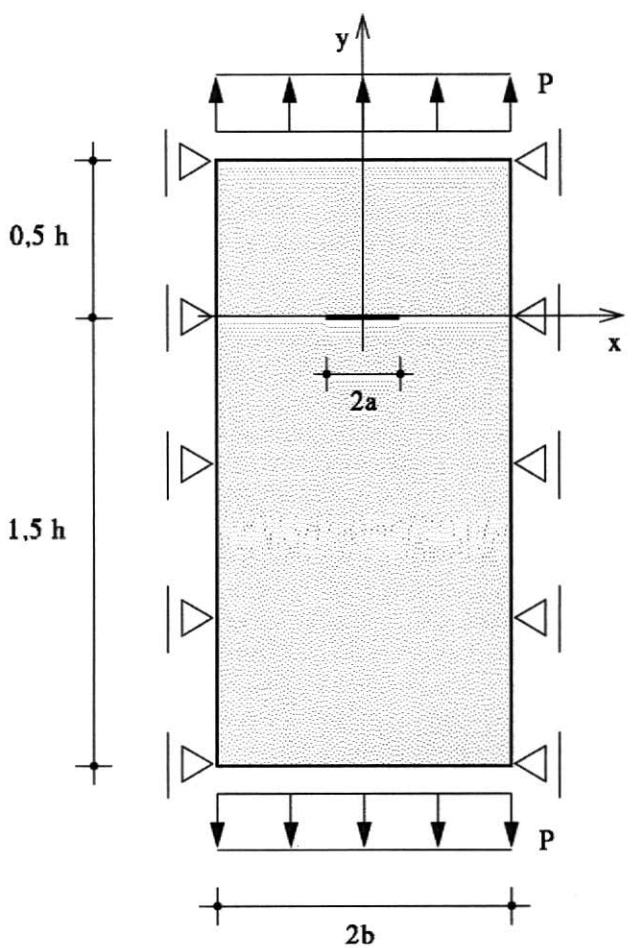


Figura VI.22: Problema teste, trinca próxima a um bordo da chapa tracionada.

Desta forma, observa-se que, nos instantes iniciais, a solução deste problema se confunde com a do obtido por uma onda de pressão, em um meio infinito, incidindo perpendicularmente a infinitas trincas colineares como mostra a figura (VI.23).

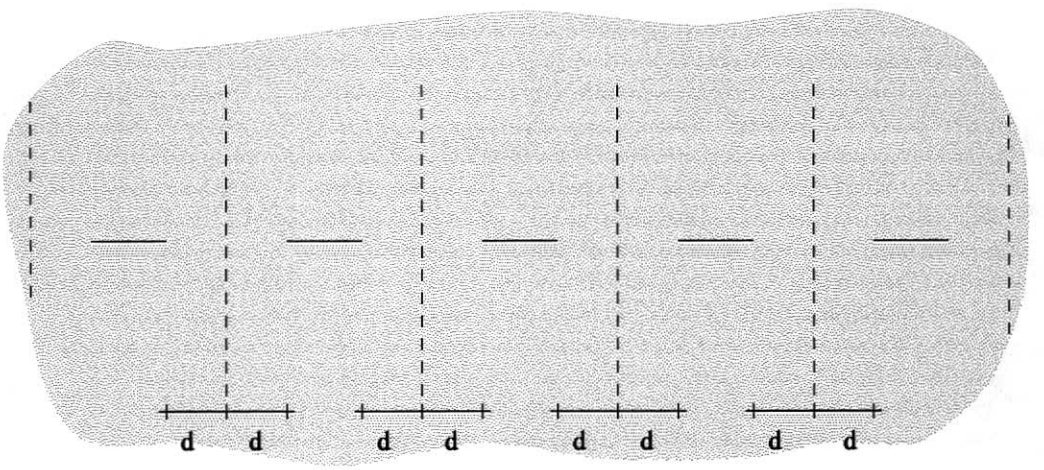


Figura VI.23: Meio infinito com infinitas trincas colineares.

Nesta figura as linhas verticais tracejadas são eixos de simetria, com deslocamentos horizontais nulos.

Nos instantes iniciais, a solução deste último problema, por sua vez, se confunde com a solução do meio infinito com uma única trinca. Isto ocorre até o instante em que uma onda originada em uma trinca atinja a sua adjacente. Considerando $t = 0$ no momento em que a onda atinge as trincas, o intervalo acima fica definido como $0 < t < 2d/c_P$. Assim, durante o intervalo de tempo $0,5h/c_P < t < (0,5h + 2d)/c_P$ (onde $d = b - a$), a resposta da chapa retangular, mostrada na figura (VI.22), é idêntica à resposta do meio infinito com uma única trinca.

A figura (VI.24) mostra o resultado obtido pela presente formulação para o problema proposto, superposto ao resultado do meio infinito, deslocado de um intervalo de tempo de $0,5h/c_P$.

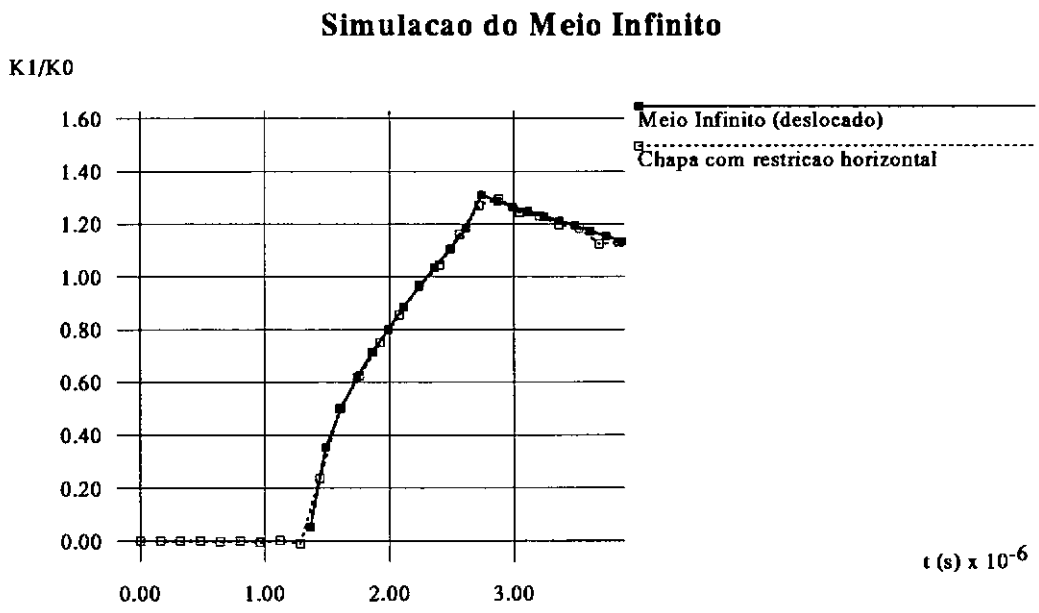


Figura VI.24: Problema teste: K1 ao longo do tempo.

O Problema de Chen

Parte-se então para a análise do problema da chapa retangular com a geometria descrita anteriormente na figura (VI.10), porém com o carregamento subitamente aplicado. Este problema, que não tem solução analítica conhecida, foi resolvido numericamente por Chen [58], em 1975, através do Método das Diferenças Finitas. A solução obtida pelo referido autor foi, desde então, tomada como referência para as soluções da mecânica da trinca dinâmica. Apesar de vários autores ainda a tomarem como padrão, recentemente, começou-se a questionar sua precisão [22, 59].

Em 1986, Murti e Valliapan [22], utilizando uma formulação no domínio do tempo do Método dos Elementos Finitos, com elementos *quarter-point*, obtiveram resulta-

dos consistentemente diferentes, em alguns aspectos, dos obtidos por Chen. Neste trabalho, Murti e Valliapan sugerem que seus resultados seriam mais precisos que os obtidos previamente por Chen, baseando suas conclusões na comparação com os resultado obtidos (aparentemente) por Baker [10] para uma trinca semi-infinita. Apesar da extensa quantidade de resultados apresentada, a conclusão a respeito da precisão obtida pelos referidos autores não parece suficientemente embasada.

Um estudo detalhado do problema foi realizado, mais recentemente, por Lin e Ballmann [59], que também utilizaram o Método das Diferenças Finitas. Em seu trabalho, os autores explicam o aparecimento de picos na resposta obtida através da análise da propagação das ondas de Rayleigh na superfície da trinca, em concordância com o que haviam mostrado anteriormente Thau e Lu [14] para o caso de domínios bidimensionais ilimitados.

Em recente trabalho, também, Fedelinski et alli [26] resolveram este problema utilizando o enfoque do MEC com a formulação mista em conjunto com a solução fundamental dependente do tempo. Os autores obtiveram resultados semelhantes aos de Lin e Ballmann para o calculo de $K1$ através da integral invariante $\hat{J}$, não conseguindo os mesmos resultados para o cálculo através das aberturas da trinca.

Na figura (VI.25) é mostrado o resultado obtido pela presente formulação superposto aos resultados de Chen [58] e de Lin e Ballmann [59]. O pico detectado pela análise de Lin e Ballmann, para $t \approx 4.10^{-6}s$, assim como outras oscilações, podem ser também identificados na resposta obtida pela presente formulação.

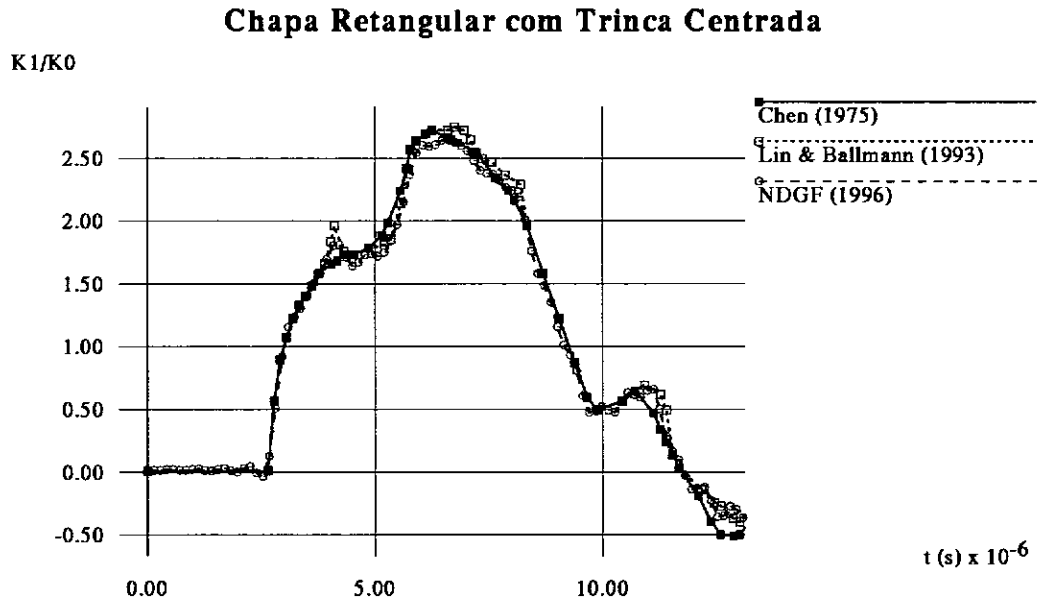


Figura VI.25: $K1$ ao longo do tempo para o problema de Chen; comparação com os resultados de Chen e de Lin e Ballmann.

No trabalho de Murti e Valliapan [22] são apresentados inúmeros resultados para este problema, variando parâmetros como o tamanho do elemento *quarter-point* em relação ao comprimento da trinca (l_c/a),o refinamento da malha, o tipo de tratamento das forças de inércia (massa consistente ou concentrada) e o intervalo de tempo para a integração. Estes resultados ora apresentam demasiadas oscilações, ora parecem ser

artificialmente amortecidos. Na figura (VI.26) os melhores resultados apresentados em [22] (massa consistente e $l_c/a = 0,75$) são comparados com as respostas da presente formulação. A diferença entre os resultados da presente formulação nesta figura, em comparação com os da anterior, se deve à consideração, nesta última, do problema formulado como Estado Plano de Tensão e na anterior como Estado Plano de Deformação. Desta forma, pode-se supor que as hipóteses básicas tomadas pelos autores acima citados foram diferentes das consideradas inicialmente por Chen.

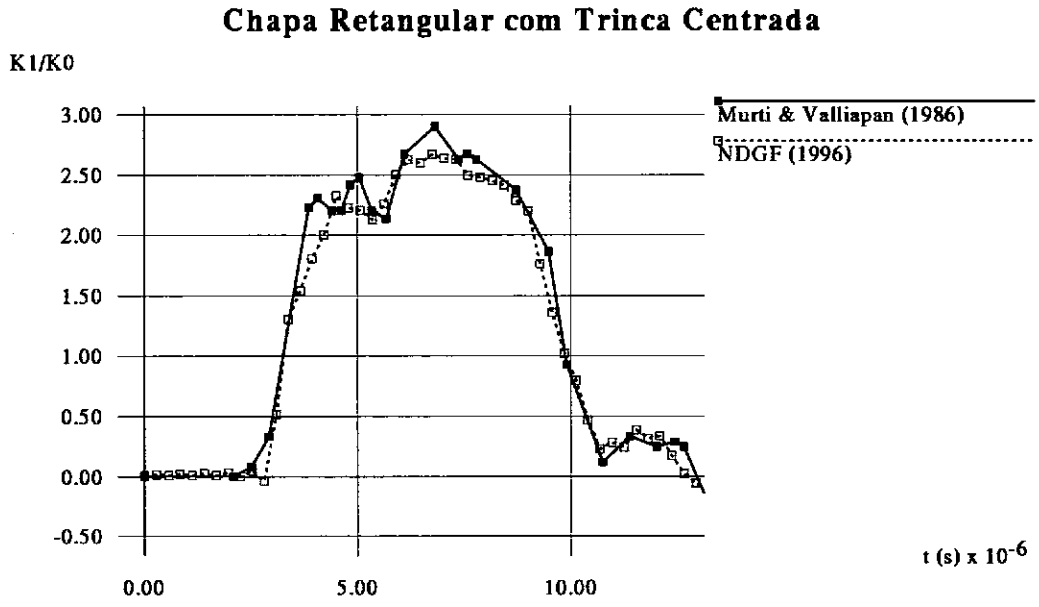


Figura VI.26: $K1$ ao longo do tempo para o problema de Chen (EPT); comparação com os resultados de Murti e Valliapan para massa consistente e $l_c/a = 0,75$.

Trinca inclinada

É analisado o problema de uma chapa retangular com uma trinca inclinada, descrito na figura (VI.27). Este problema foi resolvido por vários autores, dentre eles Murti e Valliapan [22] e Fedelinski et alli [26], usando $2b = 30mm$, $h = 2b$, $2a = 14,14mm$, $\gamma = 45$ graus e as mesmas constantes elásticas do problema da seção anterior.

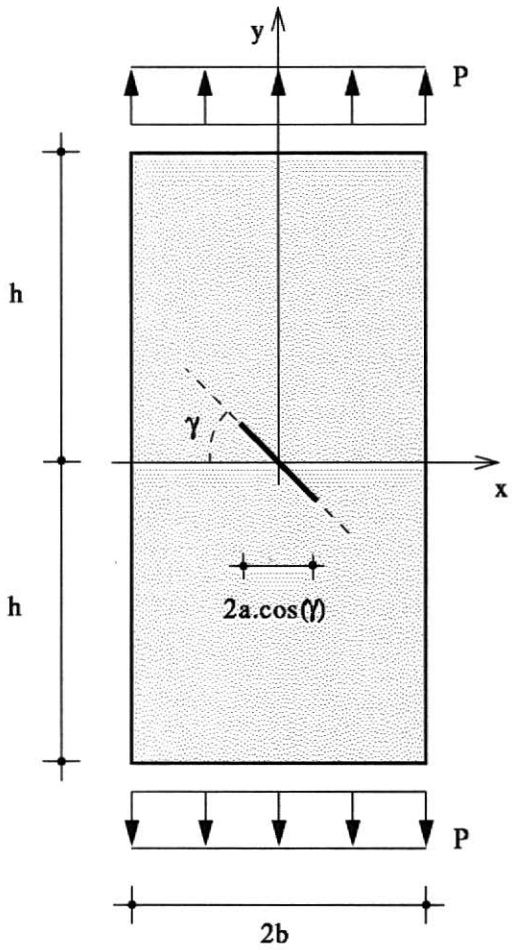


Figura VI.27: Chapa retangular com trinca inclinada.

Surgem, então, tanto aberturas como deslizamentos entre as faces da trinca, logo, tanto K_1 como K_2 são calculados. Nas figuras (VI.28) e (VI.29) são comparados os resultados obtidos pela presente formulação (com discretização análoga a da figura (VI.11) com os das referências citadas acima.

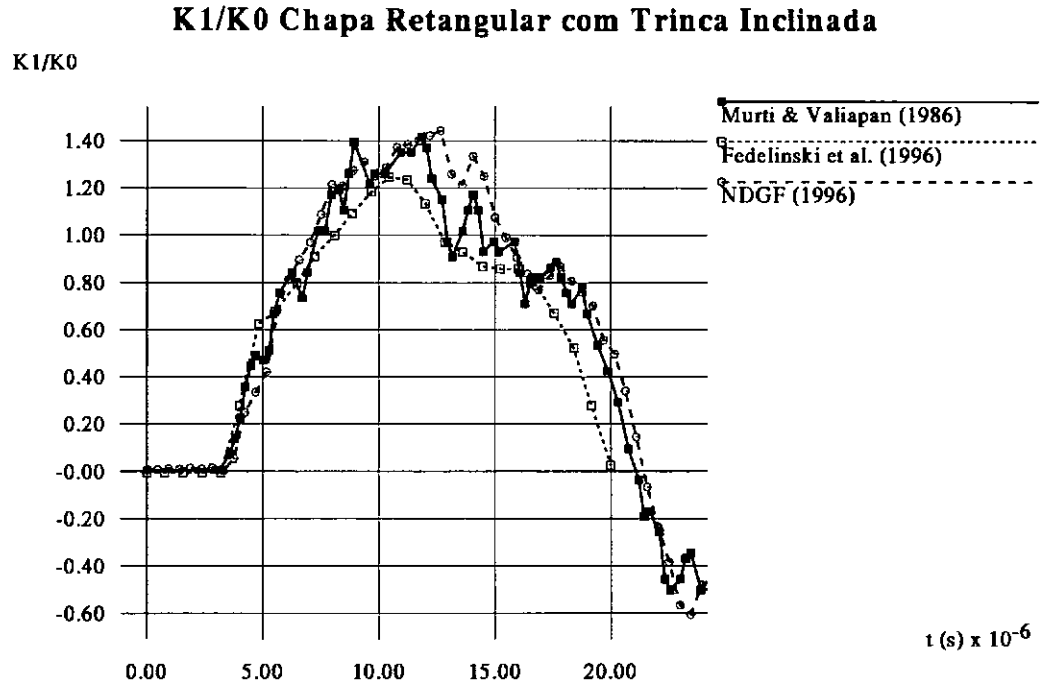


Figura VI.28: K1 ao longo do tempo - Chapa retangular com trinca inclinada.

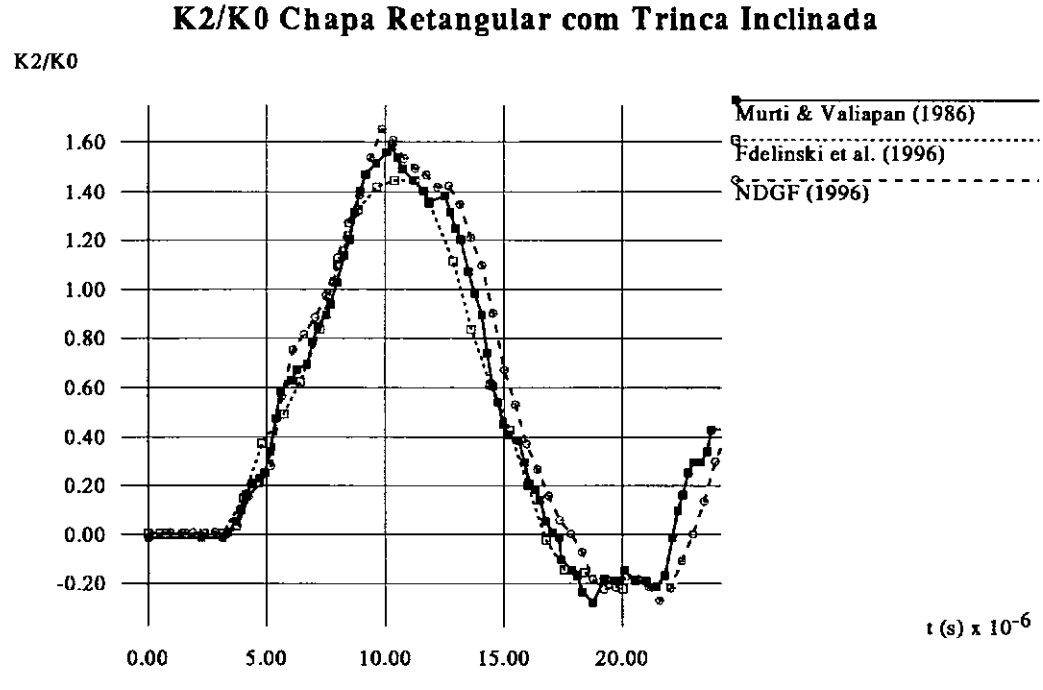


Figura VI.29: K2 ao longo do tempo - Chapa retangular com trinca inclinada.

Capítulo VII

Conclusões

A proposta do presente trabalho é a implementação da técnica da função de Green Numérica para problemas bidimensionais da Mecânica da Fratura Linear Elástica sob carregamentos dinâmicos em domínios transformados. Esta implementação foi motivada pelos excelentes resultados obtidos no tratamento de problemas análogos estáticos.

De maneira geral, a precisão alcançada nos problemas analisados pode ser considerada plenamente satisfatória, embora não tenha sido medida quantitativamente. Isto se deve ao fato de que as respostas tomadas como comparação foram obtidas através de mera reprodução gráfica, portanto, com a introdução de imprecisões. Este fato, entretanto, não compromete de forma alguma a análise qualitativa dos resultados, uma vez que a imprecisão inerente ao processo de reprodução é, em geral, suficientemente menor do que as demais imprecisões das respostas numéricas. Feita esta ressalva, pode-se examinar em maior detalhe os resultados obtidos.

Os resultados para problemas harmônicos em domínios infinitos apresentam suficiente precisão, tanto nas altas quanto nas baixas freqüências, para que as respostas

transientes possam ser obtidas com boa precisão. Para tanto foi de fundamental importância o esquema de subdivisão automática do intervalo de integração da trinca utilizado. Da mesma forma, os resultados transientes obtidos através da transformada inversa de Laplace mostraram boa precisão para estes problemas. Pode-se supor que estes sejam mais precisos que aqueles uma vez que, aparentemente, representam melhor os *picos* das respostas no tempo (descontinuidade das derivadas em relação ao tempo), para o mesmo número de avaliações da resposta no domínio transformado.

A análise de problemas em domínios limitados para carregamentos harmônicos se restringiram ao problema da chapa tracionada com trinca centrada, uma vez que foi o único resultado encontrado na literatura.

A obtenção de resultados transientes ao longo do tempo através da transformada inversa de Fourier não é possível para problemas nos quais não se considera nenhum tipo de amortecimento. No caso dos problemas ilimitados isto não constitui restrição alguma, uma vez que a dissipação de energia em direção ao infinito, de acordo com as condições de radiação, constituem o chamado amortecimento geométrico. Nos problemas definidos em domínios limitados isto não acontece. A alternativa utilizada por alguns autores é a introdução artificial de um amortecimento (normalmente viscoso). Este enfoque não foi utilizado no presente trabalho. Para este tipo de problema, as respostas ao longo do tempo foram obtidas, exclusivamente, a partir da formulação no domínio transformado de Laplace.

Para problemas transientes de mecânica da fratura em domínios limitados não se dispõe de um único resultado analítico. Para superar esta dificuldade, foi formulado um problema cuja resposta, em um intervalo de tempo limitado, se confunde com

a resposta de um problema cuja solução analítica é conhecida. Desta forma, pôde-se evidenciar a precisão da formulação, ainda que a resposta deste problema seja relativamente simples. Alternativamente, os resultados numéricos foram comparados com os obtidos por outros autores através de diversas formulações. Foi analisado o problema de Chen, tomado como *benchmark* na literatura. Apesar da discretização do contorno externo ser em elementos isoparamétricos lineares, já foram observados resultados precisos a ponto de evidenciar *picos* cuja existência só foi detectada recentemente.

A desvantagem da utilização da transformada de Laplace está no fato da avaliação das funções de Bessel, para argumentos complexos, consumir um elevado tempo de processamento. Muito embora existam técnicas numéricas de inversão da transformada de Laplace utilizando parâmetros reais, estas técnicas apresentam uma precisão bem menor do que as que utilizam argumentos complexos [48].

Quanto às perspectivas de trabalhos futuros, pode-se relacionar alguns desenvolvimentos complementares referentes à presente implementação. A introdução da simplificação usual para o tratamento de problemas simétricos e a implementação para mais de uma trinca são as mais imediatas. A resolução de problemas de trinca de bordo introduz uma dificuldade extra. As aberturas da trinca, necessárias na determinação da parte complementar da solução fundamental, se tornam singulares quando o ponto campo se aproxima da trinca. Em breve, entretanto, espera-se possibilitar a resolução deste tipo de problema, superando esta dificuldade de maneira análoga à que foi adotada na resolução de problemas estáticos. Isto é, evitando-se a proximidade do nó funcional do elemento do contorno em relação à trinca com a utilização de elementos descontínuos e, simultaneamente, adotando um maior refina-

mento nos intervalos de integração da trinca nas proximidades da singularidade.

Uma grande vantagem do tratamento de problemas dinâmicos através de domínios transformados é que estes são *naturalmente paralelizáveis*. Isto é, caso sejam utilizados N parâmetros do domínio transformado para se obter a resposta no tempo, recai-se na solução de N problemas independentes. Uma vez que hoje já se dispõe de *softwares* que possibilitam a realização de processamento distribuído até mesmo em redes de microcomputadores (cada dia mais velozes), esta característica não pode ser desprezada.

Em um horizonte mais amplo, pode-se sugerir, como possível desdobramento do presente trabalho, a implementação da geração numérica da função de Green para trincas curvas sob carregamentos dinâmicos. Este desenvolvimento é fundamental para, em um passo seguinte, possibilitar o estudo da propagação de trincas.

O desenvolvimento da formulação em questão em conjunto com a solução fundamental dinâmica dependente do tempo seria uma boa alternativa para comparação de precisão e eficiência.

Pode-se, ainda, sugerir a abordagem do problema inverso, da determinação da presença, forma, localização e tamanho aproximados de uma possível trinca, a partir do conhecimento de respostas dinâmicas para determinadas solicitações harmônicas no tempo.

Apêndice A

Funções de Bessel

A.1 Definições

São denominadas funções de Bessel as soluções da equação diferencial ordinária linear e de segunda ordem mostrada abaixo, conhecida como equação diferencial de Bessel.

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + (z^2 - \nu^2)y = 0 \quad ; \quad \nu \geq 0 \tag{A.1}$$

São conhecidas como funções de Bessel de primeira classe e ordem ν as funções $\mathcal{J}_\nu(z)$, definidas como:

$$\mathcal{J}_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m} \tag{A.2}$$

onde $\Gamma(\alpha)$ é a função Gama definida, para $\alpha > 0$, como:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt \tag{A.3}$$

e podendo ser calculada para $\alpha > 0$ através da seguinte propriedade:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{A.4}$$

Para valores não inteiros de ν, $\mathcal{J}_\nu$ e $\mathcal{J}_{-\nu}$ são linearmente independentes. Logo, a solução geral da equação (A.1) pode ser escrita como abaixo, onde A e B são constantes:

$$y(z) = A\mathcal{J}_\nu(z) + B\mathcal{J}_{-\nu}(z) \tag{A.5}$$

Quando ν assume valores inteiros, é usualmente representado por n e neste caso temos:

$$\mathcal{J}_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} \tag{A.6}$$

As soluções $\mathcal{J}_n$ e $\mathcal{J}_{-n}$ passam a ser linearmente dependentes e é obtida, então, uma outra solução $\mathcal{Y}_n(z)$ conhecida como função de Bessel de segunda classe e ordem n, definida como:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_n(z) &= \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{z}{2}\right) \mathcal{J}_n(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{(2m-n)} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} [\psi(m+1) + \psi(m+n+1)] \left(\frac{z}{2}\right)^{(2m+n)} \end{aligned} \tag{A.7}$$

onde a função ψ é dada por:

$$\psi(1) = -\gamma; \quad \psi(m+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}; \quad m = 1, 2, 3, \cdots \tag{A.8}$$

e γ é a constante de Euler definida como:

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{s\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{s} - \ln(s)\right) \\ &\approx 0,577215664901532 \end{aligned} \tag{A.9}$$

Pode-se relacionar, também, as funções de Bessel de primeira e segunda classe da seguinte forma:

$$\mathcal{Y}_n(ze^{(m\pi i)}) = e^{(-mn\pi i)} \mathcal{Y}_n(z) + 2i \operatorname{sen}(mn\pi) \frac{\cos(n\pi)}{\operatorname{sen}(n\pi)} \mathcal{J}_n(z) \tag{A.10}$$

A solução geral da equação (A.1) pode, então ser escrita com auxílio de duas constantes ($\overline{A}$ e $\overline{B}$) como:

$$y(z) = \overline{A}\mathcal{J}_n(z) + \overline{B}\mathcal{Y}_n(z) \tag{A.11}$$

Esta solução geral pode, também, ser escrita com a utilização das funções de Hankel de primeira e segunda classe e ordem n (também conhecidas como funções de Bessel de terceira classe), definidas como:

$$\mathcal{H}_n^{(1)}(z) = \mathcal{J}_n(z) + i\mathcal{Y}_n(z) \tag{A.12}$$

$$\mathcal{H}_n^{(2)}(z) = \mathcal{J}_n(z) - i\mathcal{Y}_n(z) \tag{A.13}$$

A equação diferencial abaixo é conhecida como equação diferencial modificada de Bessel de ordem n e, analogamente, suas soluções são as funções modificadas de Bessel.

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} - (z^2 + \nu^2)y = 0 \quad ; \quad \nu \geq 0 \tag{A.14}$$

A função $\mathcal{K}_n(z)$ é conhecida como função modificada de Bessel de segunda classe e ordem n e definida como:

$$\mathcal{K}_n(z) = \frac{\pi i}{2}e^{\frac{n\pi i}{2}}\mathcal{H}_n^{(1)}(iz) \tag{A.15}$$

Pode-se relacionar as funções modificadas de Bessel de ordens consecutivas através de diversas expressões, conhecidas como fórmulas de recorrência, dentre as quais temos:

$$\mathcal{K}_{n+1}(z) = \frac{2n}{z}\mathcal{K}_n(z) + \mathcal{K}_{n-1}(z) \tag{A.16}$$

Podem ser obtidas, também, várias expressões relacionando as funções modificadas de Bessel e suas derivadas, como por exemplo:

$$\mathcal{K}_n'(z) = -\frac{n}{z}\mathcal{K}_n(z) - \mathcal{K}_{n-1}(z) \tag{A.17}$$

A.2 Argumentos puramente imaginários

Quando se trata de problemas elastodinâmicos no domínio da frequência, surge a necessidade da avaliação das funções de Bessel com argumentos imaginários puros, $z = ix$, onde x é real. Utilizando as equações (A.12) e (A.15), pode-se calcular $\mathcal{K}_n(z)$ como:

$$\mathcal{K}_n(ix) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{n\pi i}{2}} \left(\mathcal{J}_n(-x) + i\mathcal{Y}_n(-x)\right) \tag{A.18}$$

Através das equações (A.6) e (A.10) obtem-se:

$$\mathcal{J}_0(-x) = \mathcal{J}_0(x) \tag{A.19}$$

$$\mathcal{J}_1(-x) = -\mathcal{J}_1(x) \tag{A.20}$$

$$\mathcal{Y}_0(-x) = \mathcal{Y}_0(x) + 2i\mathcal{J}_0(x) \tag{A.21}$$

$$\mathcal{Y}_1(-x) = -\mathcal{Y}_1(x) - 2i\mathcal{J}_1(x) \tag{A.22}$$

Substituindo as equações (A.19) a (A.22) na equação (A.18) chega-se às expressões abaixo que permitem calcular $\mathcal{K}_n(ix)$ através de avaliações de funções reais o que é computacionalmente muito mais eficiente.

$$\mathcal{K}_0(ix) = -\frac{\pi}{2}\left[\mathcal{Y}_0(x) + i\mathcal{J}_0(x)\right] \tag{A.23}$$

$$\mathcal{K}_1(ix) = -\frac{\pi}{2}\left[\mathcal{J}_1(x) - i\mathcal{Y}_1(x)\right] \tag{A.24}$$

Além disso, para argumentos reais, também com a finalidade de aumentar a eficiência do cálculo das funções de Bessel $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{Y}_0$, $\mathcal{J}_1$ e $\mathcal{Y}_1$, são utilizadas as aproximações polinomiais abaixo [60]

Para $-3 < x < 3$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0(x) \approx \; 1 \; & -2,2499997\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1,2656208\left(\frac{x}{3}\right)^4 \\ & -0,3163866\left(\frac{x}{3}\right)^6 + 0,0444479\left(\frac{x}{3}\right)^8 \\ & -0,0039444\left(\frac{x}{3}\right)^{10} + 0,0002100\left(\frac{x}{3}\right)^{12} \end{aligned} \tag{A.25}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(x) \approx \; & x\Bigg[0,5 - 0,56249985\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 0,21093573\left(\frac{x}{3}\right)^4 \\ & -0,03954289\left(\frac{x}{3}\right)^6 + 0,00443319\left(\frac{x}{3}\right)^8 \\ & -0,00031761\left(\frac{x}{3}\right)^{10} + 0,00001109\left(\frac{x}{3}\right)^{12}\Bigg] \end{aligned} \tag{A.26}$$

Para $0 < x < 3$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_0(x) \approx \; & \left(\frac{2}{\pi}\right)\ln\left(\frac{x}{2}\right)\mathcal{J}_0(x) + 0,36746691 \\ & +0,60559366\left(\frac{x}{3}\right)^2 - 0,74350384\left(\frac{x}{3}\right)^4 \\ & +0,25300117\left(\frac{x}{3}\right)^6 - 0,04261214\left(\frac{x}{3}\right)^8 \\ & +0,00427916\left(\frac{x}{3}\right)^{10} - 0,00024846\left(\frac{x}{3}\right)^{12} \end{aligned} \tag{A.27}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_1(x) \approx \; & \left(\frac{2}{\pi}\right)\ln\left(\frac{x}{2}\right)\mathcal{J}_1(x) + \left(\frac{1}{x}\right)\Bigg[- 0,6366198 \\ & +0,2212091\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 2.1682709\left(\frac{x}{3}\right)^4 \\ & -1.3164827\left(\frac{x}{3}\right)^6 + 0,3123951\left(\frac{x}{3}\right)^8 \\ & -0,0400976\left(\frac{x}{3}\right)^{10} + 0,0027873\left(\frac{x}{3}\right)^{12}\Bigg] \end{aligned} \tag{A.28}$$

Para $3 < x < \infty$:

$$\mathcal{J}_0(x) = x^{-\frac{1}{2}}.f_0.\cos\theta_0 \tag{A.29}$$

$$\mathcal{Y}_0(x) = x^{-\frac{1}{2}}.f_0.\,\mathrm{sen}\theta_0 \tag{A.30}$$

$$\mathcal{J}_1(x) = x^{-\frac{1}{2}}.f_1.\cos\theta_1 \tag{A.31}$$

$$\mathcal{Y}_1(x) = x^{-\frac{1}{2}}.f_1.\,\mathrm{sen}\theta_1 \tag{A.32}$$

onde:

$$\begin{aligned} f_0 = {} & 0,79788456 - 0,00000077\left(\frac{3}{x}\right) - 0,00552740\left(\frac{3}{x}\right)^2 \\ & -0,00009512\left(\frac{3}{x}\right)^3 + 0,00137237\left(\frac{3}{x}\right)^4 \\ & -0,00072805\left(\frac{3}{x}\right)^5 + 0,00014476\left(\frac{3}{x}\right)^6 \end{aligned} \tag{A.33}$$

$$\begin{aligned} \theta_0 = {} & x - 0,78539816 - 0,04166397\left(\frac{3}{x}\right) - 0,00003954\left(\frac{3}{x}\right)^2 \\ & +0,00262573\left(\frac{3}{x}\right)^3 - 0,00054125\left(\frac{3}{x}\right)^4 \\ & -0,00029333\left(\frac{3}{x}\right)^5 + 0,00013558\left(\frac{3}{x}\right)^6 \end{aligned} \tag{A.34}$$

$$\begin{aligned} f_1 = {} & 0,79788456 + 0,00000156\left(\frac{3}{x}\right) + 0,01659667\left(\frac{3}{x}\right)^2 \\ & +0,00017105\left(\frac{3}{x}\right)^3 - 0,00249511\left(\frac{3}{x}\right)^4 \\ & +0,00113653\left(\frac{3}{x}\right)^5 - 0,00020033\left(\frac{3}{x}\right)^6 \end{aligned} \tag{A.35}$$

$$\begin{aligned} \theta_1 = {} & x - 2,35619449 + 0,12499612\left(\frac{3}{x}\right) + 0,00009650\left(\frac{3}{x}\right)^2 \\ & -0,00637879\left(\frac{3}{x}\right)^3 + 0,00074348\left(\frac{3}{x}\right)^4 \\ & +0,00079824\left(\frac{3}{x}\right)^5 - 0,00029166\left(\frac{3}{x}\right)^6 \end{aligned} \tag{A.36}$$

A.3 Argumentos Complexos

Quando se trata de problemas elastodinâmicos no domínio da transformada de Laplace, dependendo do método que é utilizado no cálculo numérico da transformada inversa, pode surgir a necessidade de se avaliar as funções modificadas de Bessel de segunda classe para argumentos complexos ($z = \alpha + \beta i$). Neste caso, as expressões (A.25) a (A.28) ainda continuam válidas, porém, as demais aproximações polinomiais não. Então, para avaliar as funções modificadas de Bessel $\mathcal{K}_0$ e $\mathcal{K}_1$, estas são expressas em termos de $\mathcal{J}_0(z)$, $\mathcal{J}_1(z)$, $\mathcal{Y}_0(z)$, $\mathcal{Y}_1(z)$, que são avaliadas através das séries ascendentes (A.6) e (A.7). À medida em que $|z|$ cresce, estas expressões deixam de convergir passando-se a utilizar diretamente a expansão assintótica [61] mostrada abaixo.

$$\mathcal{K}_n(z) \approx \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} \left[1 + \frac{4n^2 - 1^2}{1!.8z} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!(8z)^2} + \ldots\right] \qquad \text{(A.37)}$$

No presente trabalho, depois de alguns testes para avaliar a precisão dos procedimentos, foi adotado o valor limite $|z| = 8$ para se alterar a forma de cálculo.

Apêndice B

O Método de Durbin

Este método numérico para o cálculo da transformada inversa de Laplace é um aprimoramento do método baseado na transformada de Fourier em cossenos desenvolvido por Dubner e Abate [50]. Durbin aumentou a eficiência do método anterior utilizando além da transformada em cossenos a transformada de Fourier em senos, obtendo a seguinte expressão:

$$f(t_j) \approx \left(\frac{2e^{j\alpha\Delta t}}{T}\right)\left\{-\frac{1}{2}Re\left[\overline{f}(\alpha)\right] + Re\left[\sum_{k=0}^{NSUM}\overline{f}(s_k)\left(\cos\left(kj\frac{2\pi}{N}\right) + i\ \text{sen}\left(kj\frac{2\pi}{N}\right)\right)\right]\right\} \tag{B.1}$$

onde

$$s_k = \alpha + \beta_k i \quad ; \quad \beta_k = \frac{2\pi}{T}k \tag{B.2}$$

e

$$\overline{f}(s_k) = Re\left[\overline{f}(s_k)\right] + iIm\left[\overline{f}(s_k)\right] \tag{B.3}$$

Referências Bibliográficas

[1] R.G. Inglis. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. *Proc. of the Institute of Naval Architects*, 60:219–230, 1913.

[2] A. A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosofical Transactions of the Royal Society*, A221:163–198, 1920.

[3] V. Volterra. Sur les vibrations des corps élastiques isotropes. *Acta Math.*, 18:161–332, 1894.

[4] A. E. H. Love. The propagation of wave motion in an isotropic elastic solid medium. *Proc. London Math. Soc.*, 1:231–344, 1904.

[5] C. Somigliana. Sopra alcune formole fondamentali della dinamica dei mezzi isotropi. *Atti Reale Accad. Sci. Torino Cl. SCi. Fis. Mat. Natur.*, 41:869,1071, 1905/1906.

[6] C. Somigliana. Sopra alcune formole fondamentali della dinamica dei mezzi isotropi. *Atti Reale Accad. Sci. Torino Cl. SCi. Fis. Mat. Natur.*, 42:765, 1906/1907.

[7] L.T. Wheeler and E. Sternberg. Some theorems in classical elastodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 31:51–90, 1968.

[8] J. D. Achenbach. *Wave Propagation in Elastic Solids.* North-Holland, New York, 1973.

[9] A.C. Eringen and E. Suhubi. *Elastodynamic Vol. II - Linear Theory.* Academic Press, 1975.

[10] B. R. Baker. Dynamic stresses created by a moving crack. *Journal of Applied Mechanics*, 29:449–454, 1962.

[11] B. V. Kostrov. Unsteady propagation of longitudinal shear crack. *PMM*, 30:1241–1248, 1966.

[12] G. C. Sih and J.F. Loeber. Wave propagation in an elastic solid with a line discontinuity or finite crack. *Quarterly Applied Mathematics*, 27:193–213, 1969.

[13] A. K. Mal. Interaction of elastic waves with a Griffith crack. *International Journal of Engineering Science*, 8:763–776, 1970.

[14] Stephen A. Thau and Tsin-Hwei Lu. Transient stress intensity factors foor a finite crack in an elastic solid caused by a dilatational wave. *International Journal of Solids and Structures*, 7:731–750, 1971.

[15] G. C. Sih, G. T. Embley, and R. S. Ravera. Impact response of a finite crack in plane extension. *International Journal of Solids and Structures*, 8:977–993, 1972.

[16] J. D. Achenbach and R. J. Brind. Scattering of surface waves by a sub-surface crack. *Journal of Sound and Vibration*, 76(1):43–56, 1981.

[17] J. D. Achenbach and R. J. Brind. Elastodynamic stress-intensity factors for a crack near a free surface. *Journal of Applied Mechanics*, 48:539–542, september 1981.

[18] L.M. Keer, W. Lin, and J. D. Achenbach. Ressonance effects for a crack near a free surface. *Journal of Applied Mechanics*, 51:65–70, march 1984.

[19] F. J. Rizzo. An integral equation aproach to boudary value problems of classical elastostatics. *Quarterly Applied Mathematics*, 25:83–95, 1967.

[20] T. A. Cruse and F. J. Rizzo. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem I. *Jour. Math. Anal. Appl.*, 22:244–259, 1968.

[21] T. A. Cruse. Numerical evaluation of elastic stress intensity factors by the boundary integral equation method. In *The Surface Crack: Physical Problems and Computational Solutions*, pages 153–170, 1972.

[22] V. Murti and S. Valliapan. The use of quarter-point element in dynamic crack analisys. *Engineering Fracture Mechanics*, 23:585–614, 1986.

[23] F. Chirino and J. Dominguez. Dynamic analysis of cracks using boundary element method. *Engineering Fracture Mechanics*, 34(5):1051–1061, 1989.

[24] A. S. M. Israil and G. F. Dargush. Dynamic fracture mechanics studies by time domain BEM. *Engineering Fracture Mechanics*, 39(2):315–328, 1991.

[25] J. Dominguez and R. Gallego. Time domain boundary element method for dynamic stress intensity factor computations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33, 1992.

[26] P. Fedelinski, M. H. Aliabadi, and D. P. Rooke. Single region time domain BEM for dynamic crack problem. *International Journal of Solids and Structures*, 32(24):3555–3571, 1995.

[27] J. Sladek and V. Sladek. Computation of T-stresses in elastodynamics by the boundary element method. In B.H.V. Topping, editor, *Advances inBoundary Elements*, pages 105–112, Edinburgh, Scotland, 1996. Civil-Comp Press.

[28] S. Guimarães. *Sobre o Método dos Elementos de Contorno aplicado a Mecanica da Fratura.* Tese D.Sc., COPPE/UFRJ, 1992.

[29] S. Guimarães and J.F.C. Telles. On the hyper-singular boundary element formulation for fracture mechanics applications. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 13:353–363, 1994.

[30] P. Fedelinski, M. H. Aliabadi, and D. P. Rooke. Boundary element formulations for the dynamic analysis of cracked structures. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 17:45–56, 1996.

[31] F. Chirino, R. Gallego, A. Sães and J. Dominguez. A comparative study of three boundary element approaches to transient dynamic crack problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 13:11–19, 1994.

[32] P. W. Wen, M. H. Aliabadi, and D. P. Rooke. A fictitious stress and displacement discontinuity method for dynamic crack problems. In *Boundary Element Method XVI*, pages 469–476, 1994.

[33] M.D. Snyder and T. A. Cruse. Boundary integral equation analysis of cracked anisotropic plates. *International Journal of Fracture*, 11:315–328, 1975.

[34] D.L. Clements and M. Haselgrove. A boundary integral equation method for a class of crack problems in anisotropic elasticity. *International Journal of Computer Mathematics*, 12:267–278, 1983.

[35] H. Mews. Calculation of stress intensity factors for various crack problems with the boundary element method. In C.A. Brebbia, W. Wenland, and G. Khun, editors, *Proceedings of Boundary Element IX*. Springer-Verlag, 1987.

[36] W.T. Ang. A boundary integral equation for deformations of an elastic body with an arc crack. *Quarterly Applied Mathematics*, XLV:131–139, 1987.

[37] J.C.F. Telles and C.A. Brebbia. Boundary element solution for half-plane problems. *International Journal of Solids and Structures*, 17:1149–1158, 1981.

[38] R.K. Nakaguma. *Three Dimensional Elastostatics Using the Boundary Element Method.* PhD thesis, University of Southampton, 1979.

[39] E. Melan. Der spannungzustand der durch eine einzelkraft im innern beanspruchten halbscheibe. *Z. Angew. Math. Mech.*, 12:343–346, 1932.

[40] R. D. Mindlin. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. *Physics*, 7:195–202, 1936.

[41] J. F. C. Telles, G. S. Castor, and S. Guimarães. A numerical green's function aproach for boundary elements applied to fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:3259–3274, 1995.

[42] G. S. Castor. Aplicação de funções de green a problemas de mecânica da fratura com o método dos elementos de contorno. Tese M.Sc., COPPE/UFRJ, 1993.

[43] T. A. Cruse. *The Transient Problem in Classical Elastodynamics Solved by Integral Equations.* PhD thesis, University of Washington, 1967.

[44] J. Dominguez and R. Abascal. On fundamental solutions for the boundary integral equations method in static and dynamic elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1:128–134, 1984.

[45] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations.* Dover Publications, 1952.

[46] S. Guimarães and J.C.F. Telles. On a critical apreciation of the hyper-singular boundary element formulation applied to fracture mechanics problems. In C.A. Brebbia and H. Pina, editors, *Proceedings of the Boundary Element Technology VIII.* Elsevier Applied Science, 1993.

[47] H.R. Kutt. On the numerical evaluation of finite-part integrals involving an algebraic singularity. Special Report WISK 179, National Research Institute for Mathematical Sciences, 1975.

[48] G.V. Narayanan and D.E. Beskos. Numerical operational methods for time dependent linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18:1829–1854, 1982.

[49] F. Durbin. Numerical inversion of Laplace transforms: an eficient improvement to Dubner and Abate's method. *Computer Journal*, 17:371–376, 1974.

[50] H. Dubner and J. Abate. Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the finite Fourier cosine transform. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 15:115–123, 1968.

[51] C.A. Brebbia, J. C. F. Telles, and L. C. Wrobel. *Boundary Elements Techniques: Theory and Applications in Engineering.* Springer-Verlag, 1984.

[52] J.C.F. Telles. A self-adaptive co-ordinatetransformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:959–973, 1987.

[53] J.F.C. Telles and R.F. Oliveira. Third degree polynomial transformation for boundary element integrals: Further improvements. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 13:135–141, 1994.

[54] G. R. Irwin. Fracturing of metals. In *Proceedings of ASM Symposium*, pages 147–166, 1948.

[55] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T.Vetterling. *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing.* Cambridge University Press, 1988.

[56] E. P. Chen and G. C. Sih. Scattering waves about stationary and moving cracks. In G. C. Sih, editor, *Mechanics of Fracture: Elastodynamic Crack Problems*, pages 119–212. Noordhoff, 1977.

[57] E. T. Copson. On certain dual integral equations. *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 5:19–24, 1961.

[58] Y. M. Chen. Numerical computation of dynamic stress intensity factors by a lagrangean finite-diference method (the hemp code). *Engineering Fracture Mechanics*, 7:653–660, 1975.

[59] X. Lin and J. Ballmann. Re-consideration of Chen's problem by finite difference method. *Engineering Fracture Mechanics*, 44(5):735–739, 1993.

[60] M. Abramowitz and I. R. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions.* National Bureau of Standards, 1965.

[61] G. N. Watson. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions.* Cambridge University Press, 1966.