ANÁLISE DO COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR FÍSICO E GEOMÉTRICO DE CASCAS ENRIJECIDAS

Adilson Carvalho Benjamin

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovado por:

NELSON FRANCISCO FAVILLA EBECKEN, D.Sc.
(Presidente)

EDISON CASTRO PRATES DE LIMA, D.Sc.

RONALDO CARVALHO BATISTA, Ph.D.

WEBE JOÃO MANSUR, Ph.D.

RAUL ROSAS E SILVA, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 1991

BENJAMIN, ADILSON CARVALHO
Análise do comportamento não-linear físico e geométrico de cascas enrijecidas [Rio de Janeiro] 1991.
XIV , 478p., 29.7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia Civil, 1991)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE

1. Cascas Enrijecidas 2. Análise Não-Linear
I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

A Heloysa, minha esposa, que com seu amor e carinho trouxe colorido para minha vida.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Nelson Francisco Favilla Ebecken pela orientação desta Tese e pela confiança que sempre depositou no meu trabalho.

Aos amigos e colegas de trabalho Márcio Martins Mourelle e Ana Lúcia Fernandes Lima Torres pelo incentivo e pela convivência fraterna.

Aos engenheiros Heitor Augusto de Araújo Filho, Lino Francisco Rodrigues Moreira, Hélio Nehrer de Souza e Antônio José de Figueiredo, que no exercício das Chefias do SEDEM e da DIPREX no Centro de Pesquisas da PETROBRÁS, me autorizaram a usar parte do horário de trabalho para desenvolver esta Tese.

A Mônica Caruso Stoque pela dedicação e eficiência com que realizou a datilografia do texto da Tese.

A Valéria Regina Nogueira de Azevedo e Lúcia Helena Morais de Jesus que, sob a coordenação de Mônica, trabalharam na datilografia do texto da Tese.

A Eneida de Almeida Mendonça que datilografou com competência e rapidez as equações e os símbolos matemáticos da Tese.

A Betânia de Oliveira Leite e aos outros funcionários da biblioteca do CENPES pela atenção com que sempre me atenderam.

A minha esposa que, além de ter suportado com valentia todos estes anos quase sem férias e sem lazer, fez o levantamento das referências bibliográficas e inúmeras revisões do texto da Tese.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR FÍSICO E GEOMÉTRICO DE CASCAS ENRIJECIDAS

Adilson Carvalho Banjamin

Março 1991

Orientador: Nelson Francisco Favilla Ebecken
Programa: Engenharia Civil

Neste trabalho realiza-se o desenvolvimento de um modelo numérico para análise do comportamento não-linear físico e geométrico de cascas enrijecidas.

Duas formulações de elementos finitos elasto-plásticos não-lineares geométricos são apresentadas. O elemento de pórtico tridimensional de eixo reto, com dois nós, destina-se a discretização dos enrijecedores. O elemento triangular plano de casca, com três nós, destina-se a discretização da casca.

Estudam-se também três superfícies de escoamento para cascas finas e quatro algoritmos para realização de iterações em problemas elasto-plásticos.

Resultados de diversas análises são apresentados. Discutem-se vantagens e limitações das hipóteses adotadas e a eficiência do modelo implementado.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

ANALYSIS OF THE MATERIAL AND GEOMETRIC NONLINEAR BEHAVIOUR OF STIFFENED SHELLS

Adilson Carvalho Benjamin

Março 1991

Thesis Supervisor: Nelson Francisco Favilla Ebecken

Department: Civil Engineering

In this work, the finite element method is applied to the geometric and material nonlinear analysis of stiffened shells.

Two finite element formulations are developed. The tridimensional beam element, with two nodes,is applied in the discretisation of the stiffeners. The triangular plane element, with three nodes, is applied in the discretization of the shell.

Three yield surfaces for thin shells and four iteration methods for elastic plastic problems are studied.

Results from several analyses are presented. Advantages and limitations of the adopted hypothesis are discussed, as well as the efficiency of the implemented model.

ÍNDICE

I. INTRODUÇÃO 1

II. COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS LAMINARES 12

II.1) Estruturas reais e estruturas ideais 13

II.2) Exemplos de comportamento não-linear 17

III. TEORIA DA PLASTICIDADE 39

III.1) Materiais ideais 39

III.2) Estado de tensão 41

III.3) Estado de deformação 50

III.4) Relações constitutivas no domínio elástico 54

III.5) Critério de escoamento 58

III.6) Critério de carregamento e descarregamento 62

III.7) Relações tensão-deformação no domínio plástico 63

IV. MECÂNICA DOS SÓLIDOS 68

IV.1) Descrição do movimento 68

IV.2) Deformação do corpo 70

IV.3) Estado de tensão 77

IV.4) Equilíbrio do corpo 79

IV.5) Hipótese de pequenas deformações 80

V. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NÃO-LINEARES ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS 86

V.1) Equações incrementais 87

V.2) Estratégias para realização de análises não-lineares 96

VI. ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO DE TENSÕES NO DOMÍNIO PLÁSTICO 116

VI.1) Relações tensão-deformação no domínio plástico 117

VI.2) Métodos básicos para integração de tensões 120

VI.3) Determinação do ponto de contacto com a superfície de escoamento 122

VI.4) Algoritmo de Euler explícito com correção de tensões 126

VI.5) Algoritmo de Euler semi-implícito com controle de erro 129

VII. SUPERFÍCIES DE ESCOAMENTO PARA CASCAS FINAS 135

VII.1) Condição de escoamento inicial 137

VII.2) Superfícies de escoamento de Ilyushin ... 139

VII.3) Superfície de escoamento de Ivanov 148

VII.4) Superfície de escoamento Mistas 151

VIII. ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE DE CASCAS ENRIJECIDAS 155

VIII.1) Elementos finitos para análise de cascas 155

VIII.2) Modelação de cascas enrijecidas através de elementos finitos 161

VIII.3) Características dos elementos finitos implementados 166

IX. ELEMENTO DE PÓRTICO ENRIJECEDOR NÃO-LINEAR GEOMÉTRICO 175

IX.1) Equações de equilíbrio 176

IX.2) Sistemas de referência 177

IX.3) Campo de deslocamentos 193

IX.4) Equações constitutivas e campo de tensões 196

IX.5) Matrizes de rigidez e vetor de forças internas 199

X. ELEMENTO DE PÓRTICO ENRIJECEDOR ELASTO-PLÁSTICO 211

X.1) Equações de equilíbrio 212

X.2) Matriz de rigidez elasto-plástica 213

X.3) Critério de escoamento e determinação dos parâmetros α e β 228

X.4) Vetor de forças internas 232

X.5) Transformação da matriz de rigidez e do vetor de forças internas do sistema de referência local excêntrico para o global 233

XI. ELEMENTO DE PÓRTICO ENRIJECEDOR ELASTO-PLÁSTICO NÃO-LINEAR GEOMÉTRICO 235

XI.1) Equações de equilíbrio 237

XI.2) Matrizes de rigidez e vetor de forças internas 238

XI.3) Transformação das matrizes do elemento do sistema de referência local excêntrico para o global 239

XII. ELEMENTO TRIANGULAR DE CASCA NÃO-LINEAR GEOMÉTRICO 241

XII.1) Equações de equilíbrio 242

XII.2) Sistemas de referência 242

XII.3) Campo de deslocamentos 250

XII.4) Equações constitutivas 254

XII.5) Relações deformação-deslocamento 261

XII.6) Matriz de rigidez elástica e vetor de forças internas 287

XII.7) Tensões generalizadas 298

XII.8) Matriz de rigidez geométrica 300

XII.9) Transformação das matrizes do elemento do sistema de referência local móvel para o global 319

XIII - ELEMENTO TRIANGULAR DE CASCA ELASTO-PLÁSTICO 320

XIII.1) Equações de equilíbrio 321

XIII.2) Equações constitutivas no domínio elástico 321

XIII.3) Relações deformação-deslocamento 323

XIII.4) Matriz de rigidez-elástica 325

XIII.5) Tensões generalizadas e vetor de forças internas no domínio elástico 326

XIII.6) Critério de escoamento e tensões generalizadas no domínio plástico 328

XIII.7) Equações constitutivas no domínio plástico 338

XIII.8) Matriz de rigidez elasto-plástica 340

XIII.9) Vetor de forças internas no domínio plástico 345

XIII.10) Transformação das matrizes do elemento do sistema de referência local fixo para o global 349

XIV - ELEMENTO TRIANGULAR DE CASCA ELASTO-PLÁTICO NÃO-LINEAR GEOMÉTRICO 350

XIV.1) Equações de Equilíbrio 352

XIV.2) Matriz de rigidez material, tensões generalizadas e vetor de forças internas no domínio elástico 352

XIV.3) Tensões generalizadas, matriz de rigidez material e vetor de forças internas no domínio plástico 355

XIV.4) Matriz de rigidez geométrica 357

XIV.5) Transformação das matrizes do elemento do sistema de referência local móvel para o global 358

XV - RESULTADOS NUMÉRICOS 360

XV.1) Análises lineares 361

XV.2) Análises não-lineares geométricas 365

XV.3) Análises não-lineares físicas 379

XV.4) Análises não-lineares físicas e geométricas 399

XVI - CONCLUSÃO 436

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 439

A - COORDENADAS TRIANGULARES 465

A.1) Definição da posição de um ponto através de coordenadas triangulares 465

A.2) Derivação de funções 468

A.3) Integração de funções 473

B - CARACTERÍSTICAS DO PROGRAMA CALCAE1 477

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O objetivo principal desta tese foi desenvolver e implementar procedimentos computacionais, baseados no MEF*, para análise do comportamento não-linear físico e geométrico de cascas metálicas enrijecidas.

Devido a grande versatilidade do MEF, o programa CALCAE, que resultou do trabalho de pesquisa, pode analisar estruturas laminares em geral, como por exemplo: placas, enrijecidas ou não, de qualquer forma (quadradas, retangulares, circulares, etc.) e cascas, enrijecidas ou não, de qualquer forma (cilíndricas, esféricas, cônicas, etc.).

O CALCAE tem um campo vasto de aplicação na análise de peças estruturais de plataformas marítimas ("offshore") e de equipamentos submersos. Em plataformas flutuantes (semi-submersíveis e de pernas atirantadas) o CALCAE pode ser utilizado para analisar painéis planos enrijecidos e cascas enrijecidas. Em plataformas fixas ele pode ser utilizado para analisar juntas tubulares. Em instalações submarinas situadas em grandes profundidades o CALCAE pode ser

*MEF - Método dos Elementos Finitos

utilizado para analisar vasos de pressão.

O comportamento não-linear, principalmente a flambagem, é há muito tempo considerado no projeto de estruturas metálicas. Em colunas de plataformas flutuantes, constituídas em geral por cascas cilíndricas enrijecidas, esta consideração é fundamental devido às características geométricas das colunas e a importância que elas têm para a estabilidade da plataforma.

Nas Normas de projeto, a carga última de cascas cilíndricas, enrijecidas ou não , é determinada através de fórmulas empíricas desenvolvidas a partir de ensaios experimentais. Como existe uma grande dispersão nos resultados experimentais, as cargas últimas obtidas utilizando-se duas Normas diferentes podem ser, em alguns casos, muito diferentes [1]. As duas cargas assim determinadas podem ser: ambas conservadoras, uma conservadora e a outra não conservadora, e ambas não conservadoras. Por conservadora entenda-se aquela carga que representa um limite inferior para o conjunto de resultados experimentais disponíveis.

Esta comparação sugere que na realização de projetos de plataformas flutuantes, principalmente aquelas que fogem do padrão convencional - a utilização única e exclusiva das fórmulas simplificadas de uma determinada Norma pode implicar em redução das margens de segurança da estrutura. Quanto mais inovador e otimizado é o projeto maior a

necessidade de realização de estudos do comportamento de colapso das peças estruturais importantes, como por exemplo as colunas da plataforma. Estes estudos podem ser realizados através de ensaios experimentais ou através de modelos numérico-computacionais.

Como utilizam modelos físicos, os ensaios experimentais devem fornecer informações precisas sobre o comportamento de peças estruturais reais. Isto é verdade porém algumas ressalvas precisam ser feitas. Raramente os modelos físicos são iguais às peças estruturais reais. Por razões econômicas e práticas os espécimes ensaiados podem ter dimensões menores que a peça real mesmo quando não se tratar de um modelo reduzido. Isto introduz uma aproximação nos resultados obtidos. Os espécimes de laboratório têm em geral um grau de imperfeição menor que as peças reais, o que no caso de estruturas sensíveis a imperfeições iniciais (imperfeições geométricas e tensões residuais) afasta os resultados experimentais da realidade. A fabricação proposital de espécimes imperfeitos é possível, porém o grau de imperfeição não é controlável pois é difícil especificar um processo de fabricação que introduza nos espécimes uma porcentagem pré-determinada de imperfeição. As condições de apoio e a forma de aplicação da carga, caso não estejam corretamente especificadas e claramente registradas, podem prejudicar também a precisão e a interpretação dos resultados.

A grande dispersão dos resultados de ensaios experimentais de cascas cilindricas é causada pelos fatores expostos acima, com destaque especial para as imperfeições iniciais [1].

Os modelos matemáticos têm tido historicamente dificuldades em reproduzir os resultados de ensaios experimentais, principalmente de cascas cilíndricas. Com a evolução do conhecimento sobre o comportamento de colapso de cascas em geral, e de cascas cilíndricas em particular, foi constatado que a causa desta limitação dos modelos matemáticos é a não consideração das imperfeições iniciais existentes nos espécimes ensaiados e a não consideração das verdadeiras condições de apoio existentes no ensaio [2]. Hoje em dia com a utilização de modelos numérico-computacionais já é possível reproduzir os resultados de ensaios experimentais, desde que nestes últimos tenham sido registrados com precisão as imperfeições iniciais do espécime, as condições de apoio e a forma de aplicação da carga. Isto coloca os modelos numéricos, em termos de precisão, em pé de igualdade com os modelos físicos, com a vantagem de serem mais baratos e terem grande flexibilidade para modificar características como: imperfeições iniciais, condições de apoio e tipos de carregamento.

No entanto em termos ideais, um estudo completo sobre colapso estrutural deve ser feito utilizando-se tanto ensaios experimentais quanto análises numéricas. Os dois enfoques não são excludentes e sim complementares.

Com a evolução da filosofia de projeto de estruturas de plataformas no sentido de substituir o enfoque determinístico pelo enfoque probabilístico a utilização de programas como o CALCAE, que determinam o colapso estrutural, tende a crescer consideravelmente nos próximos anos. Isto deverá ocorrer porque as Normas estão adotando critérios de dimensionamento baseados em estados limite de utilização e de ruína [3,4] e a otimização estrutural está sendo feita através de análises de confiabilidade [5,6,7,8], que determinam para cada configuração estrutural a probalidade de colapso.

Um programa de elementos finitos como o CALCAE é uma ferramenta poderosa de análise que pode ser utilizada tanto no projeto como na verificação de estruturas de plataformas. A verificação da estrutura de uma plataforma é feita quando, devido a um remanejamento ou a uma mudança de função, há necessidade de submete-la a cargas não previstas no projeto original. Quando a plataforma é acidentalmente danificada também torna-se necessário realizar uma análise não-linear para determinação da sua resistência residual [9]. Os danos acidentais são muito comuns e podem ocorrer tanto na fase de instalação quanto na fase de operação [10,11,12,13]. Durante a fase de operação este tipo de dano é, em geral, causado por colisões com embarcações de apoio ou por quedas de equipamentos [14].

O estudo do comportamento não-linear de cascas vem sendo feito há muito tempo e engloba uma bibliografia

bastante diversificada. Diversificados também são os enfoques seguidos nestas pesquisas, que utilizam modelos físicos e matemáticos de todos os tipos.

Os modelos matemáticos discretos, utilizados nos chamados métodos numéricos, tem-se desenvolvido aceleradamente desde o surgimento dos computadores eletrônicos na década de 50. Dentre os métodos numéricos o MEF [15,16] é o mais difundido. No modelo matemático discreto utilizado no MEF a estrutura, um corpo contínuo, é representada por um conjunto de elementos estruturais, unidos entre si através de uma quantidade finita de pontos, os nós.

No que diz respeito ao MEF, o assunto cascas é um tema antigo de pesquisa, que continua em aberto até hoje. O tema é tão polêmico e complexo que formulações novas para o elemento de casca elástico linear geométrico, que é o tipo mais simples de elemento de casca, continuam sendo apresentadas e sendo bem vindas até hoje em revistas e congressos especializados [17]. Devido à complexidade do comportamento de uma casca não há uma formulação básica (linear), dentre as muitas disponíveis na literatura, que não tenha defeitos. Estes defeitos, em geral, só ocorrem na análise de um determinado tipo de casca ou, se ocorrem sempre, podem ser contornados pela especificação adequada dos parâmetros de análise. Por causa desta peculiaridade os elementos de casca tiveram uma evolução diferente da de outros elementos finitos. As primeiras formulações não-

lineares de outros elementos surgiram na década de 60, logo que as dificuldades com a formulação básica (linear) foram superadas. As formulações não-lineares de elementos de casca, ao contrário, têm evoluído paralelamente às formulações básicas (lineares), que até hoje ainda não estão totalmente fechadas.

Acompanhando a evolução geral do MEF as primeiras formulações não-lineares de elementos de casca surgiram no final da década de 60 [18]. Desde então este tipo de formulação vem sendo desenvolvido com relativo sucesso, apesar das dificuldades nas formulações básicas e das dificuldades específicas de formulações não-lineares.

A maioria das formulações não-lineares de elementos de casca existentes na literatura considera apenas uma não-linearidade, a NLG* ou a NLF**. As formulações não-lineares geométricas diferem basicamente em três aspectos: nos termos não-lineares incluídos no funcional de energia, no referencial adotado e nos termos não-lineares conservados no tensor de deformação. As formulações não-lineares físicas diferem basicamente em dois aspectos: no critério de escoamento e no algorítmo para integração de tensões.

*NLG - não-linearidade geométrica

**NLF - não-linearidade física

O desenvolvimento de uma formulação não-linear de um elemento finito qualquer que considere simultaneamente a NLG é a NLF é feito, em geral, em três etapas. Nas duas primeiras são desenvolvidas as formulações não-linear geométrica e não-linear física; e na terceira etapa é feita uma junção destas duas formulações para obter a formulação final. A especificação das características das formulações intermediárias, que consideram a NLG e a NLF separadamente, precisa ser feita de forma a evitar que na formulação final ocorra uma potencialização de defeitos e uma anulação de qualidades. Para que a formulação da terceira etapa funcione bem é necessário que as formulações das duas etapas anteriores sejam complementares. Ou seja, elas têm que ser desenvolvidas a partir da mesma formulação básica (linear) e as características não-lineares devem ser especificadas de acordo com uma filosofia única de desenvolvimento (ver Capítulo VIII).

Para cumprir o objetivo enunciado no primeiro parágrafo deste capítulo foi necessário desenvolver duas formulações de elementos finitos não-lineares geométricos e físicos: uma de casca e outra de pórtico. A formulação de pórtico foi necessária porque na modelagem de cascas enrijecidas proposta nesta tese os enrijecedores são discretizados por elementos de pórtico.

Adotou-se para formulação básica de casca o elemento triangular plano de três nós, que interpola os deslocamentos no plano do elemento com funções lineares e

os deslocamentos perpendiculares ao plano do elemento com funções cúbicas. Para formulação básica de pórtico adotou-se o elemento de eixo reto de dois nós, que interpola os deslocamentos axiais e de torção com funções lineares e os deslocamentos de flexão com funções cúbicas.

Um resumo dos conhecimentos utilizados e gerados neste trabalho de pesquisa encontra-se nos próximos capítulos.

No Capítulo II são apresentadas as características principais das estruturas laminares reais e o seu comportamento não-linear é descrito através de exemplos típicos.

No Capítulo III é apresentado um resumo das equações da Teoria de Plasticidade para materiais elasto-plásticos perfeitos.

No Capítulo IV é apresentado um resumo das equações da Mecânica dos Sólidos diretamente relacionadas ao comportamento não-linear geométrico das estruturas.

No Capítulo V são deduzidas as equações do MEF para problemas não-lineares e são discutidas algumas estratégias utilizadas para resolvê-las. Neste capítulo é proposto um algoritmo novo para realização de iterações em problemas elasto-plásticos.

No Capítulo VI é feita uma comparação entre dois algorítmos de integração de tensões no domínio plástico.

No Capítulo VII são apresentadas três superfícies de escoamento para cascas finas. Neste capítulo é proposta também uma quarta superfície, que engloba estas três e pode gerar outras superfícies, através da variação adequada de três parâmetros.

No Capítulo VIII é feita uma revisão da literatura sobre elementos finitos para análise de cascas enrijecidas. É feita também uma avaliação das formulações básicas de elementos de casca e de pórtico utilizadas para desenvolver as formulações não-lineares dos capítulos IX à XIV.

Nos Capítulos IX, X, e XI são apresentadas respectivamente as formulações não-linear geométrica, elasto-plástica e elasto-plástica não-linear geométrica do elemento de pórtico enrijecedor.

Nos Capítulos XII, XIII e XIV são apresentadas respectivamente as formulações não-linear geométrica, elasto-plástica e elasto-plástica não-linear geométrica do elemento triangular plano de casca.

No Capítulo XV são apresentados os resultados das análises de várias estruturas laminares e realizadas comparações com as soluções para estes problemas publicadas por outros pesquisadores.

O Capítulo XVI contem comentários sobre as vantagens e desvantagens da modelação de cascas enrijecidas proposta no presente trabalho e sugestões para pesquisas futuras.

No Apêndice A é feito um resumo dos conceitos e equações relacionados à utilização de coordenadas triangulares para definição de funções de interpolação de elementos finitos triangulares.

No Apêndice B é feita uma descrição das principais características da versão 1 do programa CALCAE.

CAPÍTULO II

COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS LAMINARES

Estruturas laminares são estruturas formadas por peças em que uma das dimensões é muito menor que as outras duas.

Neste capítulo apresentam-se as diferenças principais entre as estruturas laminares reais e as estruturas laminares ideais que servem de base para o desenvolvimento de modelos matemáticos para análises não-lineares. É apresentada também uma descrição do comportamento não-linear de estruturas laminares, através do estudo de seis exemplos típicos.

Os dois tipos básicos de não-linearidade estrutural são a não-linearidade física e a não-linearidade geométrica.

A NLF (não-linearidade física) ocorre quando a relação tensão-deformação em um ponto qualquer da estrutura é não-linear. Esta não-linearidade está associada ao material de que a estrutura é feita. Os metais, por exemplo, na temperatura ambiente têm um comportamento elasto-plástico (ver item (III.1)).

A NLG (não-linearidade geométrica) surge a partir do instante em que o primeiro incremento de carga é aplicado. Porém ela é relevante apenas nos casos em que a estrutura está submetida a deslocamentos relativamente grandes (ver

item (IV.5)), ou ainda, nos casos em que, mesmo com deslocamentos relativamente pequenos, a disposição das cargas na estrutura é tal que, combinada com os deslocamentos, leva à instabilidade ou ao surgimento de esforços adicionais. Esta não-linearidade está diretamente associada às dimensões da estrutura, às suas condições de apoio e ao carregamento a que está submetida. A NLG não varia com a tensão de escoamento do material, porém varia com o tipo de material (aço, madeira, etc.).

Em geral nas estruturas laminares reais a NLF e a NLG aparecem simultaneamente. Porém existem casos extremos de estruturas, ou muito rígidas ou muito esbeltas, em que apenas uma das não-linearidades é relevante.

O termo flambagem está sendo usado neste capítulo, não apenas com o significado de mudança brusca de configuração mas também, com o sentido de decréscimo acelerado de rigidez em uma peça comprimida.

II.1) ESTRUTURAS REAIS E ESTRUTURAS IDEAIS

Como o comportamento das estruturas reais é muito complexo, os modelos matemáticos utilizados para representá-las são, em geral, desenvolvidos considerando-se apenas as características importantes para o problema em estudo. As teorias clássicas para estudo da estabilidade de estruturas laminares [19], por exemplo, foram desenvolvidas considerando: material elástico, geometria

inicial perfeita e aplicação centrada da carga. Além disso, elas consideram que até atingir a carga crítica a estrutura está submetida apenas a esforços de compressão. Apesar destas hipóteses simplificadoras as teorias clássicas deveriam representar bem o comportamento de estruturas muito esbeltas, em que apenas a NLG é importante. No entanto, as cargas de flambagem determinadas em ensaios experimentais de cascas cilíndricas de paredes finas podem ser até 30% menores que as cargas críticas determinadas pelas teorias clássicas [20].

A principal causa desta discrepância é a presença de imperfeições geométricas nos espécimes ensaiados. As imperfeições geométricas são defeitos, nem sempre perceptíveis a olho nú, introduzidos na estrutura, antes da realização do ensaio, pelo processo de fabricação, ou mesmo por manipulação inadequada. A sensibilidade a imperfeições geométricas é diferente em cada tipo de estrutura laminar. As placas são menos sensíveis a estas imperfeições que as cascas cilíndricas. As cascas cilíndricas por sua vez tornam-se mais sensíveis a imperfeições geométricas a medida em que a relação D/t (diâmetro/espessura da parede) cresce [20].

Além das imperfeições geométricas o processo de fabricação pode introduzir, em estruturas laminares metálicas, tensões auto-equilibradas chamadas de tensões residuais. Em geral, as tensões residuais surgem quando diferentes partes da estrutura sofrem resfriamento

desigual, após terem sido aquecidas em uma etapa anterior do processo de fabricação [21,22].

A distribuição que as tensões residuais assumem é função do tipo de estrutura e do processo de fabricação. Numa placa retangular enrijecida por placas retangulares estreitas soldadas (Figura (II.1)) a distribuição das tensões residuais longitudinais é representada aproximadamente pelo diagrama da figura (II.2) [21]. A faixa estreita acima da junção do enrijecedor com a placa é submetida a tensões de tração de valor igual à tensão de escoamento do material (σ_y). A faixa larga entre dois enrijecedores é submetida a tensões de compressão de valor bem menor que a tensão de escoamento. Os enrijecedores também são afetados por tensões residuais provenientes tanto da soldagem para fixá-los à placa quanto do seu próprio processo de fabricação [23].

Numa placa enrijecida longitudinalmente a presença das tensões residuais introduz modificaçõs importantes no comportamento das faixas comprimidas e tracionadas [24]. Quando a placa é submetida a uma carga uniforme de tração as faixas estreitas acima dos enrijecedores entram em escoamento imediatamente, por causa das tensões residuais de tração. Quando a placa é submetida a uma carga uniforme de compressão as faixas situadas entre os enrijecedores atingem a carga de flambagem prematuramente por causa das tensões residuais de compressão.

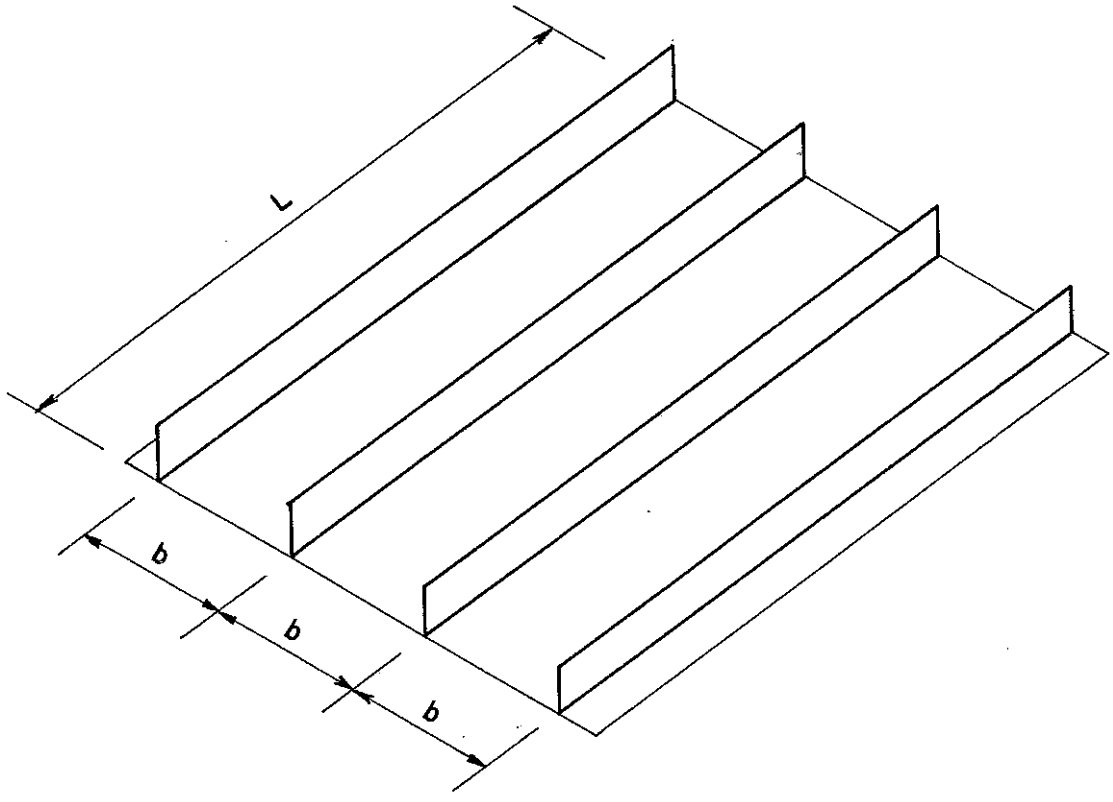


Figura II.1 - Placa enrijecida.

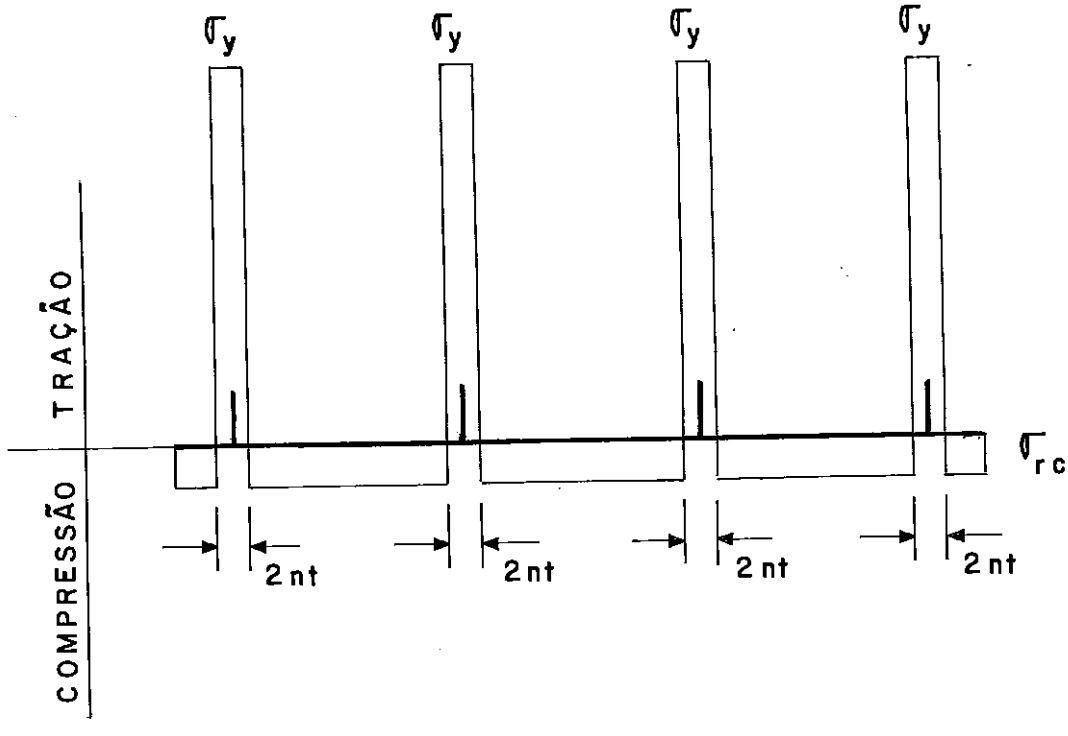


Figura II.2 - Distribuição da tensões residuais em placas enrijecidas.

A presença de tensões residuais, em geral, provoca redução da carga última da placa enrijecida [21,23,25]. De acordo com vários estudos baseados em resultados experimentais [26,27,28] a influência que as tensões residuais exercem sobre a resistência das placas enrijecidas está diretamente relacionada ao grau de imperfeição geométrica existente. Em geral esta influência é menor nas placas em que o grau de imperfeição geométrica é maior [1, 23].

II.2) EXEMPLOS DE COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR

II.2.1) Placa Retangular Flexível Fletida

As duas extremidades da placa da figura (II.3) são engastadas e uma carga "q" uniformemente distribuída é aplicada perpendicularmente à face mais larga. (Figura (II.4a)).

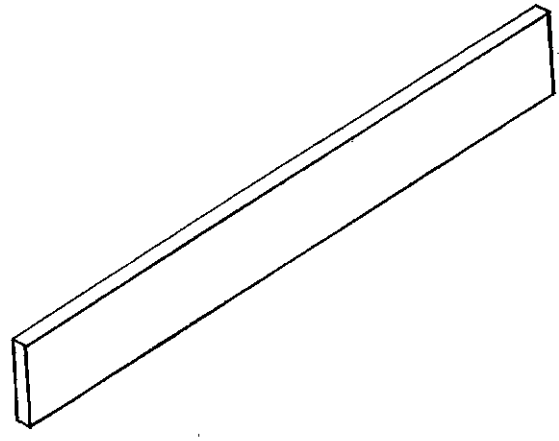


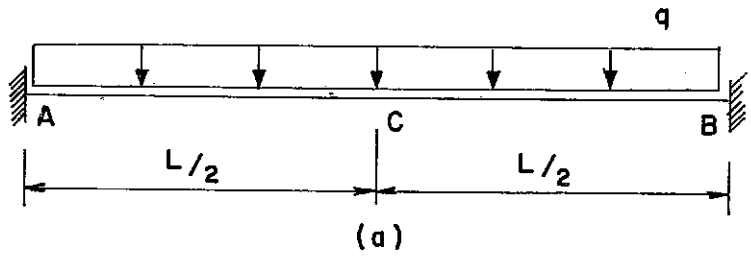
Figura II.3 - Placa retangular estreita

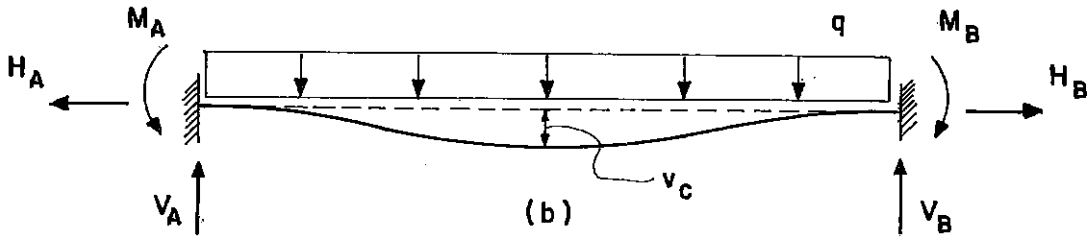
Imediatamente após a aplicação dos primeiros incrementos de carga constata-se que, além das reações verticais e das reações momento, surgem reações horizontais nos apoios. Estas reações são efeitos não-lineares geométricos, que aparecem porque o deslocamento horizontal nos apoios está restringido (Figura (II.4b)). A presença destas forças de tração provoca um aumento da rigidez a flexão da placa e a sua influência cresce a medida em que aumentam os deslocamentos verticais.

Isto pode ser constatado fazendo-se uma curva que relaciona a carga "q" com o deslocamento vertical no meio do vão "v_c" (Figura (II.4c)). No trecho inicial (trecho 0-1), a rigidez da placa é praticamente constante porém a partir do ponto 1 cresce não-linearmente com o deslocamento "v_c" . Como a carga está sendo aplicada no plano de menor rigidez a flexão da placa, o enrijecimento não-linear geométrico pode ocorrer sem que as tensões saiam do domínio elástico.

II.2.2) Placa Retangular Rígida Fletida

A placa do exemplo anterior muda totalmente seu comportamento quando, mantendo-se engastadas as suas extremidades, aplica-se incrementalmente uma carga "q" uniformemente distribuída, perpendicularmente à face mais estreita (Figura (II.5a)).





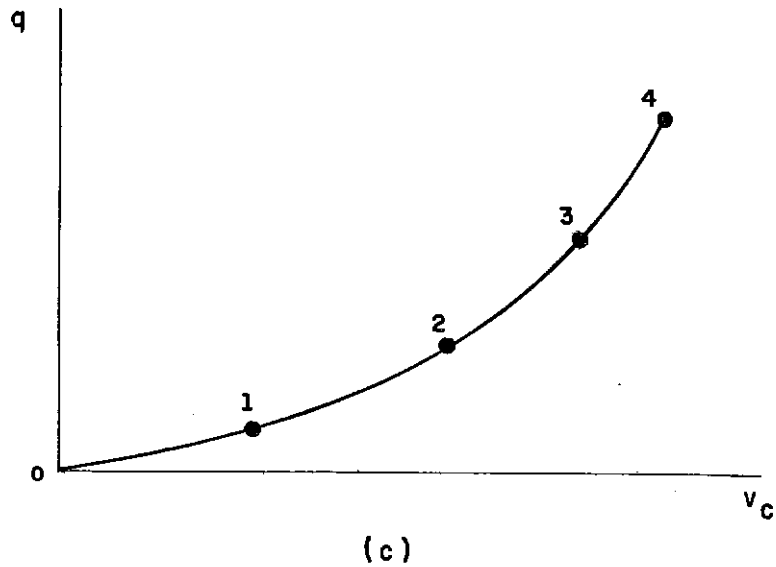


Figura II.4 - Comportamento não-linear geométrico de uma placa flexível fletida.

Durante a aplicação dos primeiros incrementos de carga a resposta da estrutura é linear, o diagrama de momentos fletores tem uma forma parabólica e os momentos nos apoios têm valor igual a duas vezes o momento no meio do vão (Figura (II.5b)). Com o aumento gradativo da carga ocorre escoamento e plastificação primeiro nos apoios e em seguida no meio do vão [29]. A plastificação das seções dos apoios, além de reduzir a rigidez da placa (trecho 1-2 da Figura (II.5f)), provoca uma modificação no fluxo de esforços. As seções dos apoios, ao atingirem a plastificação, deixam de absorver esforços, o que faz com que os novos incrementos de carga sejam absorvidos exclusivamente pelas seções em que o momento fletor ainda é menor que o momento de plastificação M_p .

A carga máxima é alcançada quando ocorre plastificação no meio do vão. Neste instante os momentos fletores nos apoios e no meio do vão são iguais (Figura (II.5c)). Mantendo-se a carga passa a ocorrer deslocamento sob carga constante (trecho 2-4 da Figura (II.5f)), até que as deformações excessivas provoquem a ruptura da placa.

Aplicando-se incrementos negativos de carga, o descarregamento se dá elasticamente (trecho 3-5 da Figura (II.5f)). Ao final do processo, quando a carga externa se anula, permanecem deslocamentos e esforços de flexão residuais. Os deslocamentos residuais fazem com que a placa continue fletida (Figura (II.5e)). Os momentos fletores residuais se distribuem uniformemente ao longo da placa (Figura (II.5d)). Eles surgiram porque a estrutura é

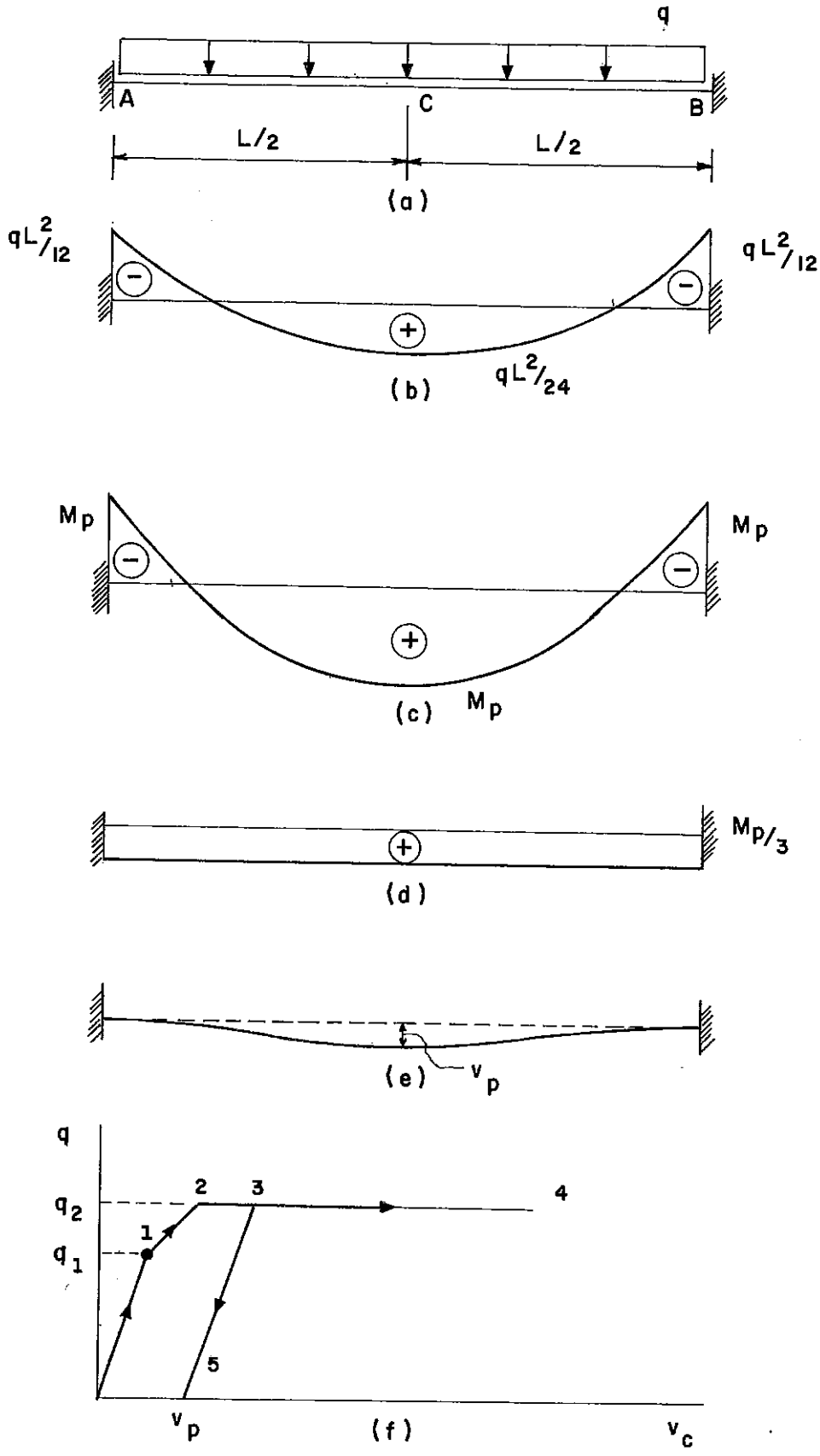


Figura II.5 - Comportamento elasto-plástico de uma placa rígida fletida.

hiperestática. Em uma estrutura isostática após o descarregamento haveria apenas a deformação residual.

Neste exemplo, como a carga foi aplicada no plano de maior rigidez a flexão da placa, os deslocamentos são pequenos ($v_c < L/300$) e os efeitos não-lineares geométricos podem ser desconsiderados.

II.2.3) Placa Retangular Comprimida

A placa retangular da figura (II.6) é simplesmente apoiada nos quatro bordos e está submetida a uma carga de compressão aplicada sem excentricidades. As suas dimensões são tais que ela permanece no domínio elástico pelo menos até que a carga atinja o valor crítico.

De acordo com a teoria clássica de estabilidade de placas [19,30] até atingir a carga crítica a placa permanece plana, sofrendo apenas encurtamento. No instante em que a carga crítica é atingida a configuração plana torna-se instável e qualquer perturbação leva a placa para uma nova configuração de equilíbrio. Nesta configuração, a placa tem uma forma ondulada que pode ser representada por uma superfície definida por uma semi onda senoidal na direção paralela aos lados carregados e por várias semi ondas senoidais na direção paralela aos lados carregados (Figura (II.6)).

Traçando-se uma curva da carga N_x (força por unidade de comprimento) em relação ao deslocamento relativo das duas extremidades carregadas constata-se que o comportamento da placa é linear no caminho de equilíbrio pré-crítico (trecho 0-1 da Figura (II-7)) e não-linear no caminho de equilíbrio pós-crítico (trecho 1-2 da Figura (II-7)). Na passagem da configuração pré-crítica para a configuração pós-crítica a placa sofre uma redução de rigidez considerável porém ainda mantém a sua capacidade de absorver carga.

O comportamento descrito acima corresponde a uma placa ideal que obedece às hipóteses das teorias clássicas já citadas no item (II.1). Nas placas reais não há como evitar imperfeições geométricas e pequenas excentricidades da carga, que fazem com que a configuração de equilibrio seja fletida desde o início do processo de carregamento. Por isso quando, na placa real,a carga se aproxima do valor da carga crítica da placa ideal não há uma mudança brusca de configuração e sim um crescimento maior dos deslocamentos, devido à uma redução gradual da rigidez da placa (Figura (II-7)).

A distribuição de tensões de compressão na seção transversal também se modifica quando, na placa real, a carga se aproxima do valor da carga crítica. Quando isto ocorre os efeitos da não-linearidade geométrica fazem com que faixas longitudinais centrais cedam mais que as faixas laterais próximas aos dois lados descarregados. Consequentemente a distribuição de tensões longitudinais de

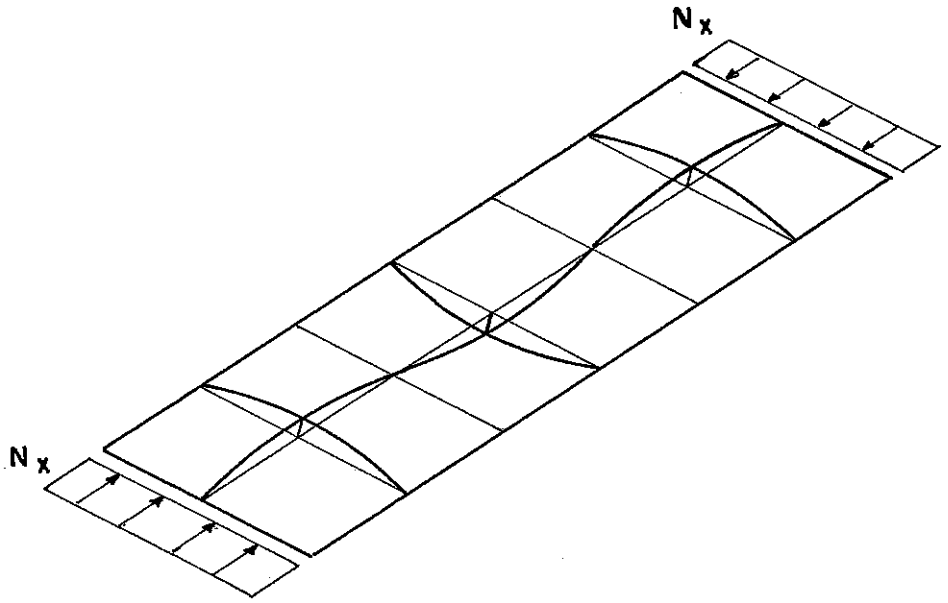


Figura II.6 - Configuração deformada de uma placa retangular comprimida.

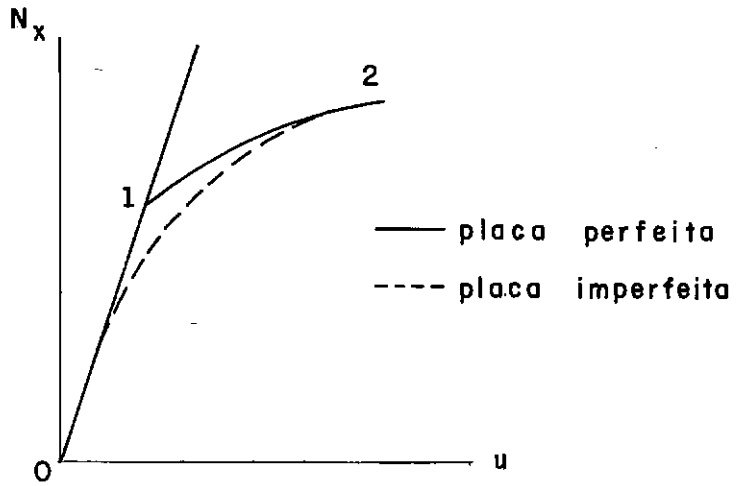


Figura II.7 - Relação carga-deslocamento para placa retangular comprimida.

compressão na placa, que era uniforme no início do processo de carregamento (níveis 1-1 e 2-2 da Figura (II.8)), torna-se não uniforme [30]. A tensão menor ocorre no ponto central da região central e a tensão maior nos bordos descarregados (níveis 3-3 e 4-4 da Figura (II-8)). A carga última é alcançada quando a tensão de escoamento é atingida nas faixas laterais (nível 4-4 da Figura (II-8)).

Na figura (II-7) as curvas correspondentes às placas perfeita e imperfeita são praticamente coincidentes, com exceção do trecho intermediário próximo ao ponto de bifurcação. Portanto, a configuração final e a carga ultima das duas placas são praticamente iguais. Na realidade isto ocorre apenas quando as imperfeições geométricas são muito pequenas. Nas situações em que estas imperfeições atingem

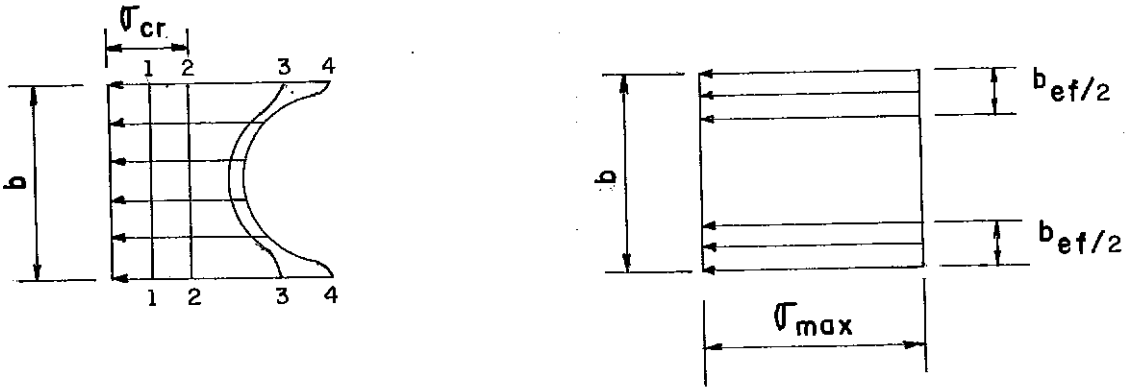


Figura II.8 - Distribuição de tensões de compressão na placa comprimida.

valores acima dos tolerados pelas Normas de projeto as configurações iniciais e finais são muito diferentes nas duas placas, o que faz com que a carga última da placa imperfeita seja bem menor que a da placa perfeita [1].

Para levar em consideração a não-uniformidade das tensões de compressão correspondentes à carga última, utiliza-se no projeto de placas o conceito de largura efetiva [31]. Este conceito supõe, para maior simplicidade, que a tensão máxima atua em duas faixas laterais de largura $b_{ef}/2$, enquanto que a faixa central fica livre de tensões (Figura (II-8)).

II.2.4) Painel Plano Enrijecido Comprimido

Um painel plano enrijecido é uma placa retangular enrijecida longitudinalmente, como por exemplo a placa da figura (II.1) As condições de contorno deste painel são: bordos livres nos lados paralelos aos enrijecedores e bordos simplesmente apoiados nos lados perpendiculares aos enrijecedores.

Quando comprimido na direção paralela aos enrijecedores o painel pode entrar em colapso de quatro maneiras: por flambagem global do painel, por flambagem local da placa, por flambagem lateral ou torção dos enrijecedores e por plastificação da seção transversal do painel.

Os quatro modos de colapso enumerados acima não representam comportamentos estanques e sim componentes que se combinam nas mais diversas proporções para formar o modo de colapso resultante do painel. O quarto modo aparece em geral como um efeito secundário dentro de um processo desencadeado pelos outros três. O terceiro modo é catastrófico pois leva o painel rapidamente ao estado de ruína [1], sendo por isso evitado pelas Normas de projeto através da fixação de limites mínimos para as dimensões dos enrijecedores.

A sequência de colapso mais segura, e também mais econômica, é aquela que se inicia pela flambagem elástica local da placa, passa pela plastificação de várias regiões da placa e, só depois disso é que, envolve os enrijecedores através de uma flambagem global do painel. Para que isso ocorra, os enrijecedores devem ser suficientemente rígidos para que os deslocamentos perpendiculares à placa, na junção dos enrijecedores com a placa, sejam muito pequenos até que a placa tenha atingido a sua capacidade de carga máxima. Neste caso as faixas da placa situadas entre os enrijecedores se comportam como a placa retangular apresentada no subitem (II.2.2).

Devido à rigidez global elevada do painel enrijecido, os seus deslocamentos até que ocorra a flambagem global são muito pequenos, mesmo nas faixas da placa situadas entre os enrijecedores. Até pouco antes de iniciar-se a plastificação da placa, o painel tem uma forma ondulada (Figura (II.9)) que, assim como no caso da placa retangular

do item (II.2.2), pode ser representada através de funções trigonométricas [24].

A flambagem global do painel pode ser de dois tipos [1]: induzida pela placa e induzida pelos enrijecedores. Na flambagem induzida pela placa a configuração deformada do painel é convexa (Figura (II.10)) e na flambagem induzida pelos enrijecedores é côncava (Figura (II.11)) em relação à face que contém os enrijecedores.

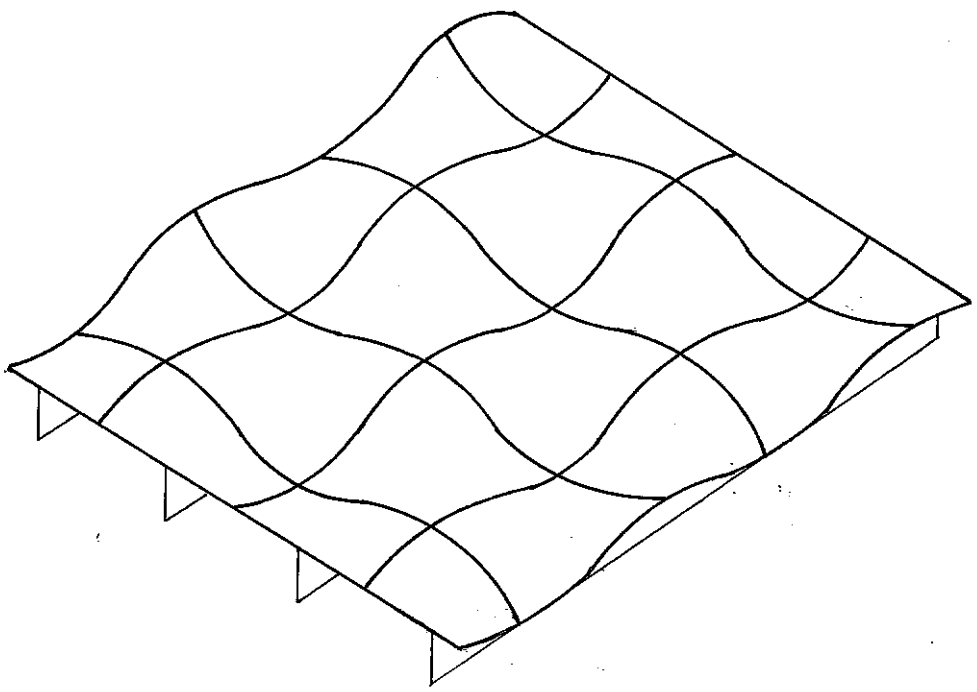


Figura II.9 - Configuração deformada do painel no domínio elástico.

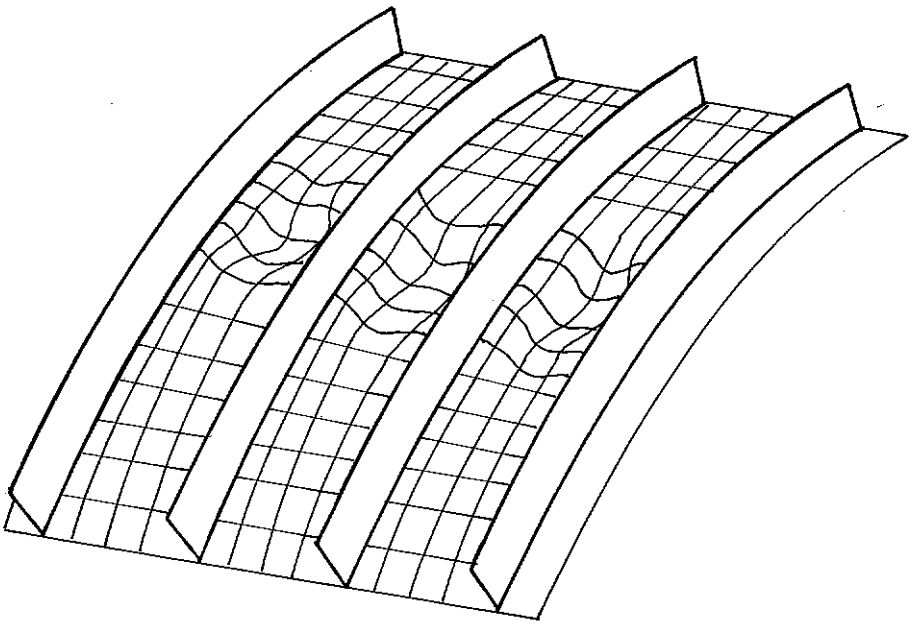


Figura II.10 - Configuração deformada correspondente a flambagem induzida pela placa.

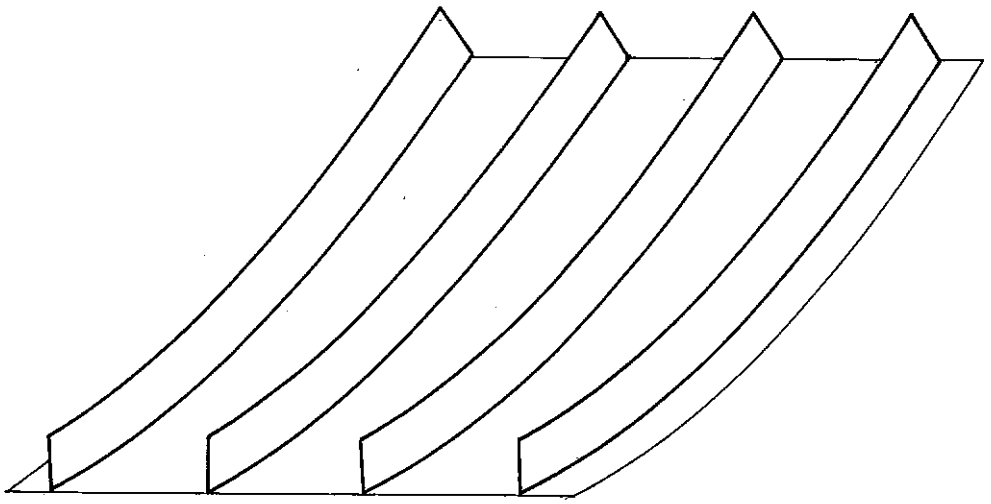


Figura II.11 - Configuração deformada correspondente a flambagem induzida pelos enrijecedores.

II.2.5) Casca Cilíndrica Comprimida

O cilindro circular da figura (II.12) tem extremidades simplesmente apoiadas e encontra-se submetido a uma carga de compressão longitudinal, aplicada sem excentricidades.

De acordo com a teoria clássica de estabilidade de cascas cilíndricas [30], até atingir a carga crítica o cilindro mantém a mesma forma inicial, sofrendo apenas expansão lateral uniforme e encurtamento. No instante em que a carga crítica é atingida a forma cilíndrica inicial torna-se instável e qualquer perturbação leva o cilindro para uma nova configuração de equilíbrio. Nesta configuração, o cilindro tem uma forma ondulada que pode ser representada por uma superfície definida por "m" semi ondas senoidais na direção longitudinal e "n" semi ondas senoidais na direção circunferencial [20].

Traçando-se uma curva da carga N_x (força por unidade de comprimento) em relação ao deslocamento relativo das duas extremidades do cilindro constata-se que o seu comportamento é linear no caminho de equilíbrio pré-crítico (trecho 0-1 da Figura (II.13)) e não linear no caminho de equilíbrio pós-crítico (trecho 1-2 da Figura (II.13)). Ao passar da configuração pré-crítica para a configuração pós-crítica o cilindro não apenas perde a sua capacidade de absorver mais carga como também entra num processo de descarregamento. Este tipo de comportamento é característico de configurações de equilíbrio instáveis. Portanto, nos cilindros ao contrário do que acontece nas

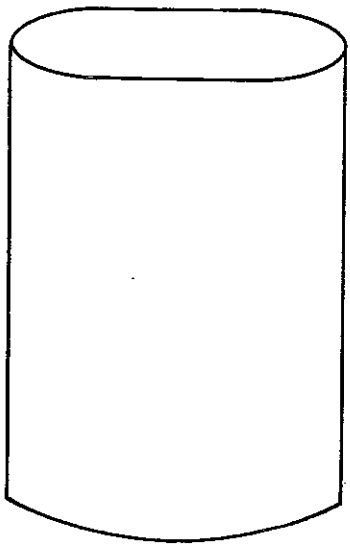


Figura II.12 - Cilindro circular.

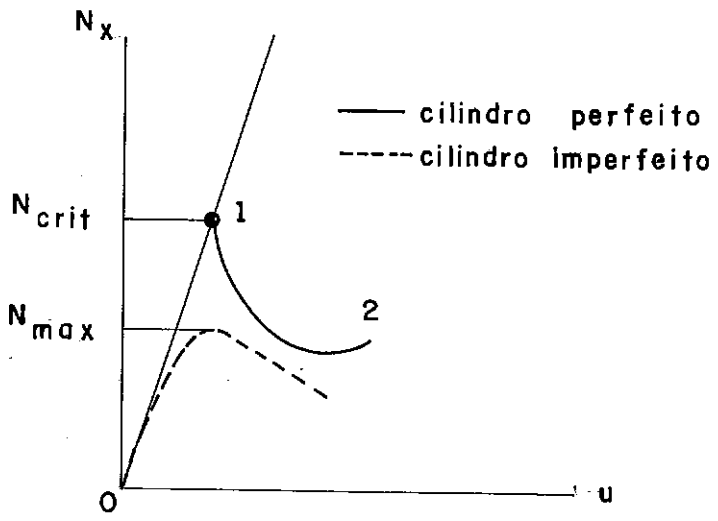


Figura II.13 - Relação carga-deslocamento para cilindro circular comprimido.

placas o caminho de equilíbrio pós-crítico é instável.

É a instabilidade do caminho de equilíbrio pós-crítico que faz com que o comportamento dos cilindros circulares esbeltos seja muito sensível a imperfeições iniciais. Por causa desta sensibilidade as curvas carga-deslocamento do cilindro perfeito e do cilindro imperfeito são muito diferentes (Figura (II.13)) e a carga máxima suportada pelo cilindro imperfeito é bem menor que a carga crítica do cilindro perfeito.

Além das imperfeições iniciais (imperfeições geométricas, excentricidade da carga e tensões residuais) as teorias clássicas deixam de considerar mais duas características encontradas nos cilindros submetidos a ensaios de compressão. A primeira delas é a expansão lateral não uniforme que ocorre logo após a aplicação da carga. A segunda é a perda de rigidez provocada pela plastificação que, em geral, ocorre antes que a carga máxima seja atingida.

A expansão lateral não uniforme surge da combinação do efeito de Poisson com a restrição ao deslocamento na direção radial, que existe nas extremidades do cilindro [2,32]. A expansão é não uniforme porque, apesar de ser axialmente simétrica, varia na direção longitudinal. Na figura (II.14) este efeito é ilustrado através das configurações deformadas de dois cilindros [1]: um curto e outro médio. No cilindro médio, que é o tipo de cilindro mais comum, a

expansão lateral não uniforme caracteriza-se pela formação, nas proximidades de cada extremidade, de uma saliência axialmente simétrica. Como consequência desta não uniformidade da expansão lateral surgem nas regiões próximas às extremidades do cilindro tensões longitudinais de flexão, não consideradas pelas teorias clássicas.

Em cilindros de comprimento médio com paredes médias ou espessas ($D/t < 200$) a configuração deformada inicial, ilustrada na figura (II.14b), é para efeitos práticos axialmente simétrica. A medida em que a carga vai sendo aplicada a amplitude dos deslocamentos radiais cresce e a quantidade de ondas longitudinais nas paredes do cilindro aumenta também (Figura (II.15)). O colapso é atingido pela plastificação que ocorre na "crista" da saliência mais próxima de cada uma das extremidades do cilindro [1, 33]. A manutenção da simetria axial da configuração até o instante do colapso, constatada em ensaios experimentais [32], é atribuída à pouca sensibilidade dos cilindros de paredes médias ou espessas a imperfeições iniciais.

Em cilindros de comprimento médio com paredes finas ($D/t > 200$), como a sensibilidade a imperfeições iniciais é alta , há uma grande dispersão nos resultados experimentais, que são diferentes não só dos resultados teóricos como também entre si [1]. Em modelos teóricos, analíticos ou numéricos, para análise de cilindros com paredes finas é usual considerar-se que as imperfeições geométricas são axialmente simétricas

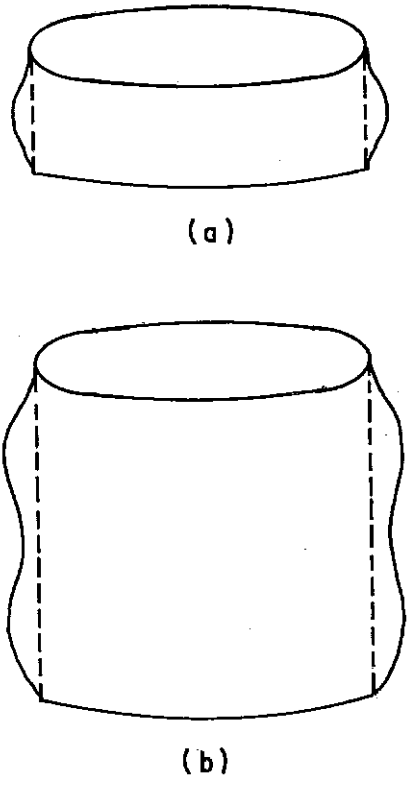


Figura II.14 - Expansão lateral não uniforme de um cilindro curto e de um cilindro médio comprimidos.

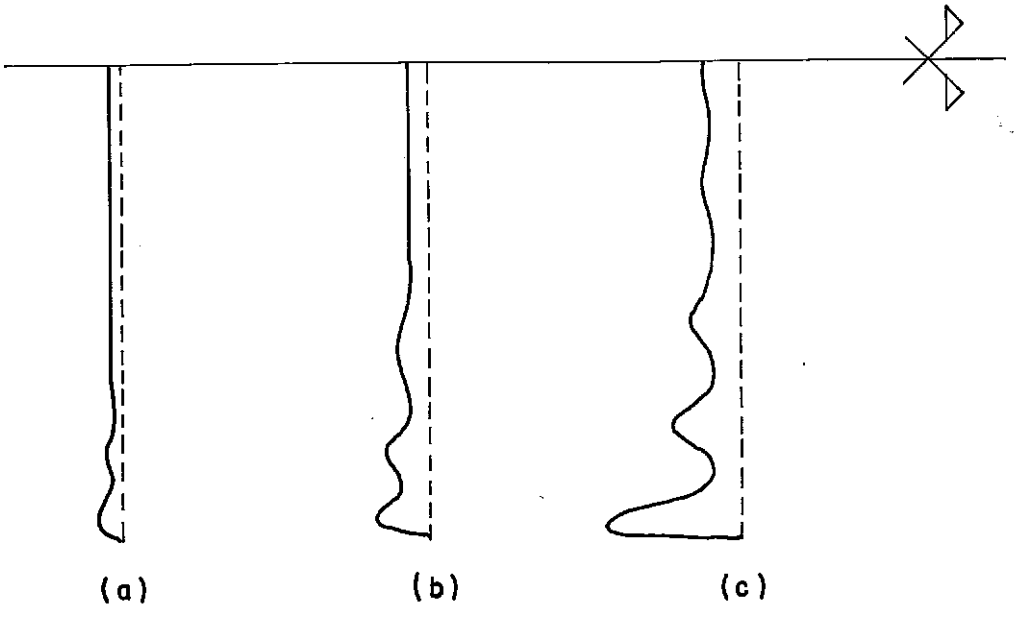


Figura II.15 - Configuração deformada da parede de um cilindro comprimido em três níveis de carga diferentes.

[33]. Desta forma a configuração deformada inicial continua sendo axialmente simétrica, semelhante a que se encontra representada na figura (II.14b). A medida em que a carga vai sendo aplicada, a quantidade de ondas longitudinais aumenta e surgem tensões circunferenciais de compressão, nas "depressões" destas ondas. Estas tensões provocam o aparecimento de ondas periódicas ao longo da circunferência do cilindro. Nas seções em que surgem as ondas circunferenciais, as tensões longitudinais de compressão passam a distribuir-se periodicamente ao longo da circunferência e crescem rapidamente até ocorrer plastificação em vários pontos, levando ao colapso.

II.2.6) Casca Cilíndrica Enrijecida Comprimida

O comportamento não-linear de um cilíndro circunferencialmente enrijecido por anéis soldados ao longo do seu comprimento (Figura (II.16)) é muito variado e pode se tornar mais complexo, ou menos complexo, conforme sejam as relações entre os vários parâmetros que definem a sua geometria. A relação D/t, assim como no cilíndro não enrijecido, define a rigidez da parede. O espaçamento dos anéis "e" e a área da sua seção transversal "A_e" influem nos deslocamentos radiais da parede do cilindro e consequentemente no comportamento dos subcilindros (trechos do cilindro compreendidos entre anéis enrijecedores).

Quando comprimido longitudinalmente o cilindro circunferencialmente enrijecido pode entrar em colapso de

quatro maneiras [1]: por flambagem local da casca entre os anéis, por flambagem local da casca englobando vários anéis, por plastificação da seção transversal do cilindro e por colapso de um ou mais anéis.

Em situações reais é comum que o colapso seja alcançado através de uma combinação dos três primeiros modos descritos acima. O terceiro modo aparece em geral como um efeito secundário dentro de um processo desencadeado pelos outros três. O quarto modo não é frequente em cilindros circunferencialmente enrijecidos [1]. Ele engloba o colapso por plastificação da seção transversal do anel tracionado e o colapso por flambagem lateral ou torção do anel.

O primeiro modo de colapso ocorre, em geral, em cilindros enrijecidos pelos chamados anéis "pesados" cuja rigidez é grande, quando comparada com a rigidez da parede do cilindro. Neste caso, os deslocamentos radiais do cilindro nos pontos em que há anéis são muito pequenos (Figura(II.17a)) e cada subcilindro se comporta de forma semelhante a uma casca cilíndrica independente.

O segundo modo ocorre, em geral, em cilindros enrijecidos pelos chamados anéis "leves", cuja rigidez é pequena quando comparada com a rigidez da parede do cilindro. Neste caso, os deslocamentos radiais do cilindro enrijecido seguem um padrão próximo ao dos cilindros não enrijecidos (Figura(II.17c)), o que torna possível uma flambagem local envolvendo vários subcilindros adjacentes.

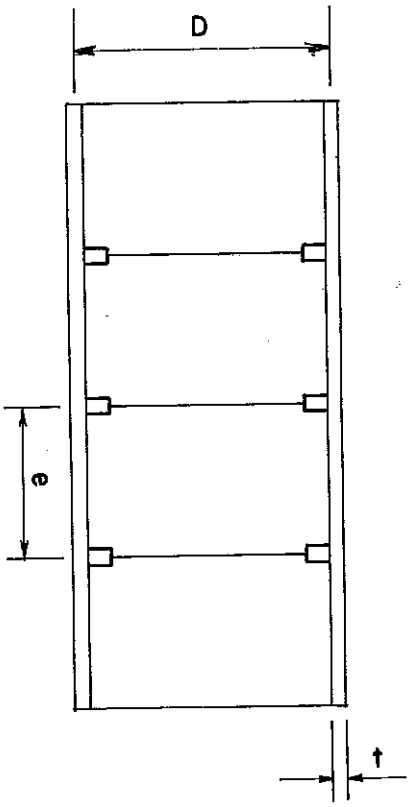


Figura II.16 - Cilindro circular enrijecido.

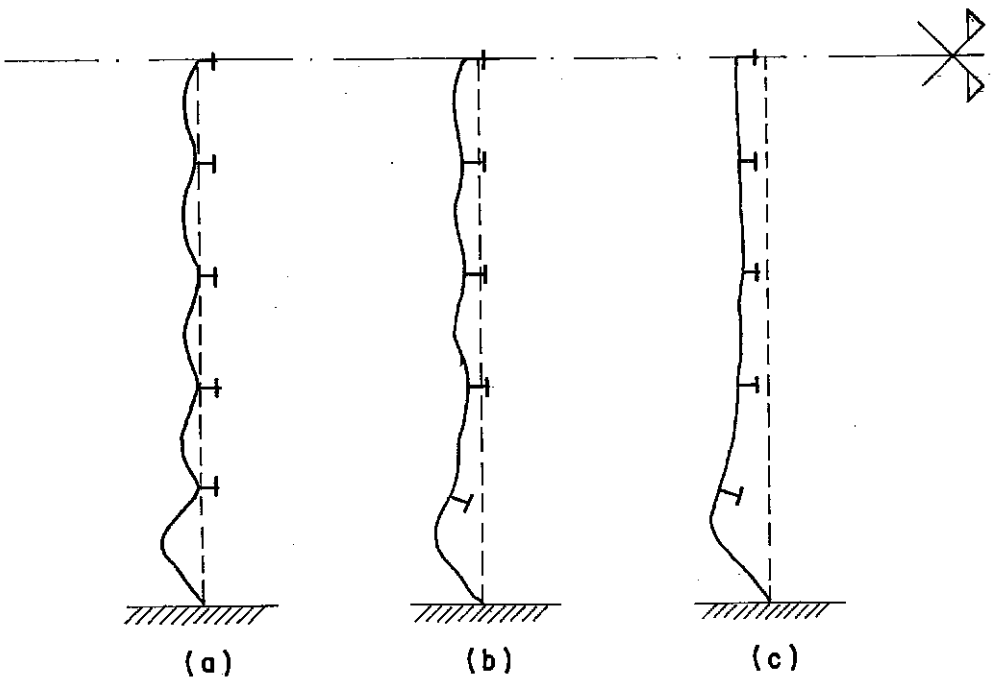


Figura II.17 - Perfil da configuração deformada de três tipos de cilindros enrijecidos.

Em situações intermediárias em que os anéis não são nem "pesados" nem "leves" (Figura (II.17b)) a definição do modo de colapso fica na dependência de outros fatores como, por exemplo, o espaçamento dos anéis.

Assim como no caso dos cilindros não enrijecidos os cilindros enrijecidos circunferencialmente podem ter a sua capacidade de carga reduzida pelas imperfeições iniciais [21, 34]. As imperfeições geométricas e as tensões residuais são provocadas primeiro pelo processo de fabricação das cascas cilíndricas e dos anéis enrijecedores [24] e depois pela soldagem dos anéis e das cascas para formar o cilindro enrijecido [1,35,36].

CAPÍTULO III

TEORIA DA PLASTICIDADE

Neste capítulo é apresentado um resumo das equações da Teoria da Plasticidade para materiais elasto-plásticos perfeitos. Como de costume a Lei de Hooke generalizada é usada para representar as equações constitutivas no domínio elástico. As equações constitutivas no domínio plástico são deduzidas a partir do critério de escoamento de von Mises e da equação de Prandtl-Reuss.

As equações aqui apresentadas são válidas para estruturas que obedeçam a hipótese de pequenas deformações [37, 38], porém por uma questão de simplicidade considerou-se que a hipótese de pequenos deslocamentos (ver item IV.5) também esta sendo obedecida.

III.1) MATERIAIS IDEAIS

A relação entre tensão e deformação em um corpo sólido é feita através de equações chamadas de equações constitutivas.

As diversas equações constitutivas existentes nos dias de hoje são feitas para materiais ideais, que guardam dos materiais reais apenas aquelas características consideradas relevantes para o problema em estudo.

O material ideal mais simples é o elástico, em que as tensões variam linearmente com as deformações e as deformações são totalmente reversíveis.

Para representação do comportamento plástico existem quatro tipos básicos de materiais ideais: rígido plástico perfeito, elasto-plástico perfeito, rígido com endurecimento e elástico com endurecimento. Na Figura III.1 encontram-se indicadas as relações tensão-deformação correspondentes aos quatro tipos para o caso de estado uniaxial de tensão. O termo rígido significa que as deformações elásticas são desprezadas. O termo perfeito significa que o endurecimento não é considerado.

Neste trabalho o material será considerado como elasto-plástico perfeito.

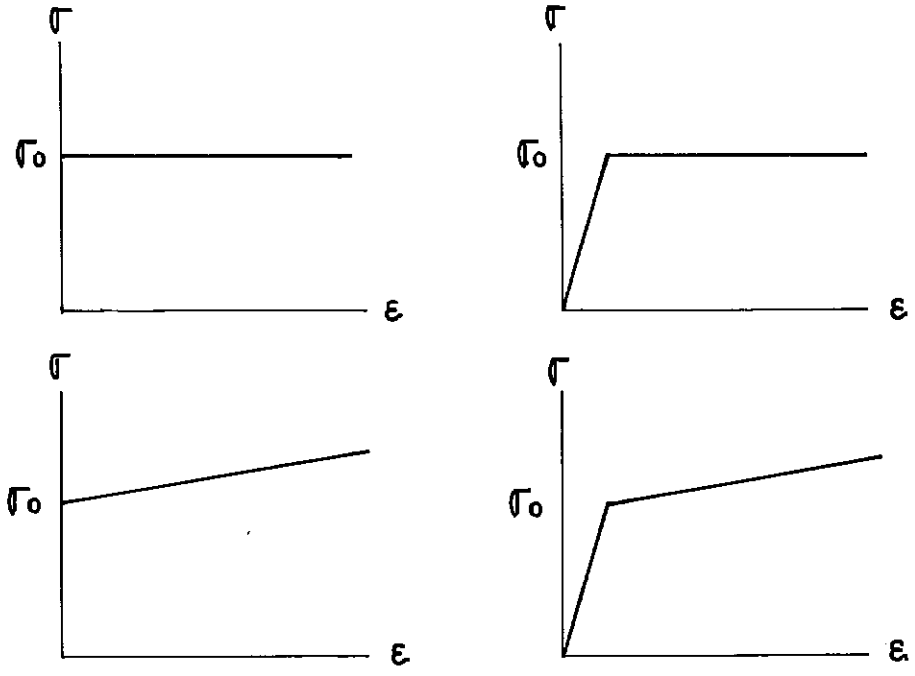


Figura III.1 - Curvas tensão-deformação para materiais ideais.

III.2) ESTADO DE TENSÃO

A definição de tensão em um ponto é feita através de um limite matemático análogo ao utilizado no cálculo diferencial para definir derivada. Em um corpo que está se deformando, uma pequena área ΔA, situada numa superfície fechada arbitrária A, está sujeita a ação de uma força $\Delta \underset{\sim}{P}$ (Figura III.2). Esta força resulta da interação entre os materiais interno e externo à superfície e é uma função da área e da orientação da superfície. Um vetor unitário $\underset{\sim}{\nu}$ normal a ΔA, dirigido de dentro para fora de A, fixa o lado externo de ΔA como sendo o lado positivo. Fazendo-se ΔA tender para zero, o quociente $\frac{\Delta \underset{\sim}{P}}{\Delta A}$ tenderá para o limite $\frac{d\underset{\sim}{P}}{dA}$ e os momentos agindo na superfície se anularão no limite [37]. O vetor limite

$$\underset{\sim}{t} = \frac{d\underset{\sim}{P}}{dA} \qquad \text{(III.1)}$$

é chamado de vetor de tensão. Representa a força por unidade de área exercida pelo material situado no lado positivo da superfície sobre o material situado no lado negativo.

O estado de tensão em um ponto qualquer de um corpo contínuo é completamente determinado por um tensor de 2ª ordem simétrico, chamado de tensor de tensão de Cauchy. Este tensor é representado por uma matriz 3x3,

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{22} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{(III.2)}$$

em que cada linha corresponde a um vetor de tensão que atua em um plano, cuja direção normal é paralela a um dos eixos do sistema de coordenadas cartesianas adotado. As componentes σ_{ii} e σ_{ij} $(i \neq j)$ são, respectivamente, normais e tangenciais ao plano em que estão agindo (Figura III.3).

Conhecendo-se $\underset{\sim}{\sigma}$, o vetor de tensão que atua num plano arbitrário é calculado através das seguintes equações:

$$\underset{\sim}{t} = \underset{\sim}{\sigma}^T \underset{\sim}{n} \qquad \text{(III.3a)}$$

ou

$$t_i = \sigma_{ji} n_j \qquad \text{(III.3b)}$$

Sendo

$\underset{\sim}{n}$ - Vetor unitário normal ao plano

A escolha do sistema de coordenadas em um ponto é totalmente arbitrária. Dentre as opções possíveis existe uma para a qual as componentes σ_{ij} $(i \neq j)$ se anulam, ou seja a matriz da equação (III.2) transforma-se numa matriz diagonal. As três direções deste sistema de referência são

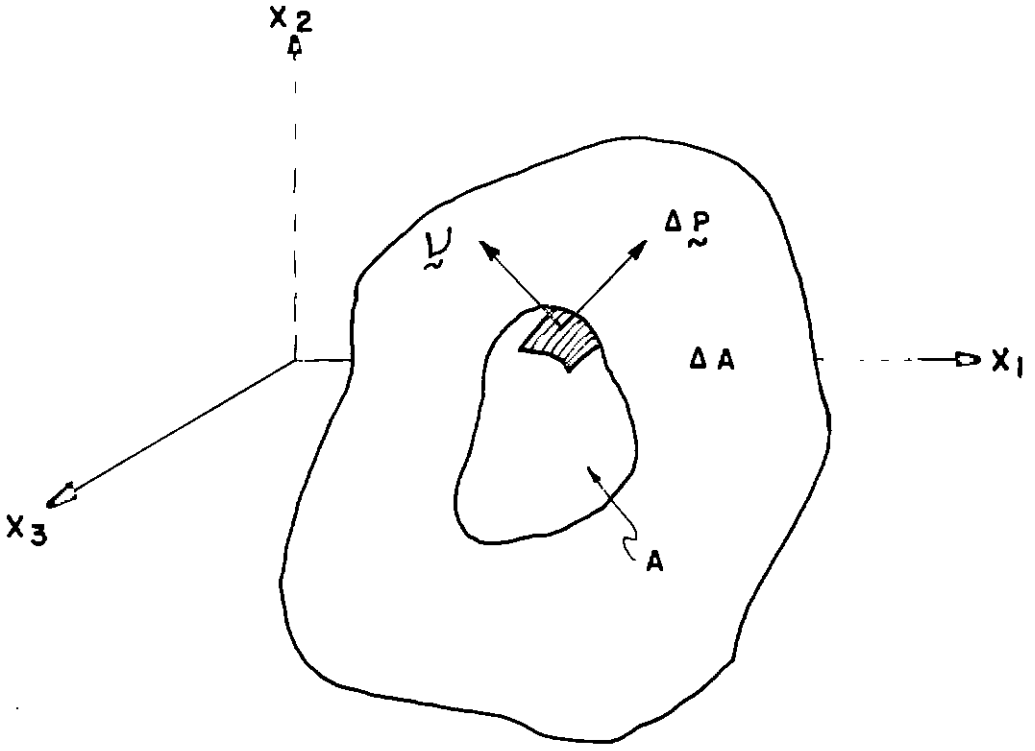


Figura III.2 - Vetor de tensão.

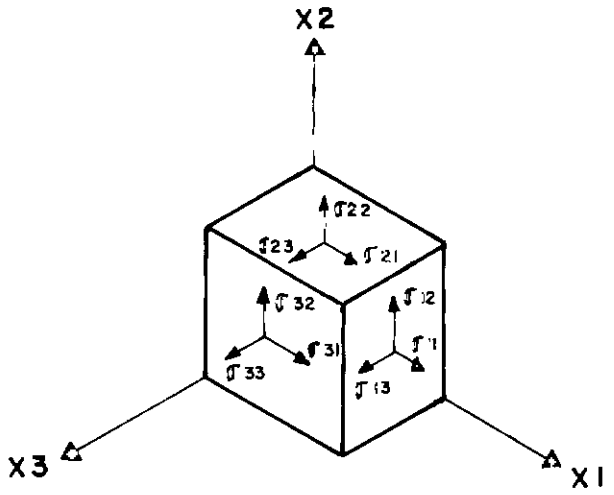


Figura III.3 - Componentes do tensor de tensão.

denominadas direções principais e as componentes σ_{ii} a elas associadas são as tensões principais σ_1, σ_2 e σ_3.

Para se determinar cada uma das direções principais do tensor de tensão e a tensão a ela associada deve-se resolver o seguinte problema de autovalor [37]:

$$(\underset{\sim}{\sigma}^T - \sigma \underset{\sim}{I})\ \underset{\sim}{n} = \underset{\sim}{0} \qquad \text{(III.4a)}$$

ou

$$(\sigma_{ji} - \sigma\ \delta_{ji})\ n_j = 0 \qquad \text{(III.4b)}$$

Onde

σ - autovalor ou tensão principal

$\underset{\sim}{n}$ - autovetor ou vetor unitário que define uma direção principal

$\underset{\sim}{I}$ - matriz identidade 3 x 3

$\underset{\sim}{0}$ - vetor nulo 3 x 1

δ_{ji} - delta de Kronecker

($\delta_{ji} = 1$ para $j = i$ e $\delta_{ji} = 0$ para $j \neq i$)

Os autovalores (tensões principais) determinados através das equações (III.4) são sempre números reais. Quanto ao tipo de solução existem três possibilidades. Na primeira, os três autovalores são diferentes entre si e a determinação das três direções principais é única. Na segunda possibilidade, dois autovalores são iguais entre si e o terceiro é diferente, o que faz com que a direção associada ao terceiro autovalor seja única, enquanto as outras possam ser duas quaisquer, desde que perpendiculares

à terceira e entre si. Neste caso, o estado de tensão é dito cilíndrico, pois não há tensões tangenciais em qualquer plano paralelo à direção associada ao terceiro autovalor (eixo do cilindro).

Finalmente, quando todos os autovalores são iguais entre si, o estado de tensão é dito esférico. Não há tensões tangenciais em qualquer plano que passe pelo ponto, e quaisquer três direções mutuamente perpendiculares são direções principais. Um estado esférico de tensão é também chamado de hidrostático, em analogia ao estado de tensão encontrado nos fluidos em repouso.

Os valores que as componentes σ_{ij} assumem na matriz da equação (III.2) dependem do sistema de coordenadas cartesianas adotado. Quando se quer caracterizar o estado de tensão em um ponto através de parâmetros que não variem em função do sistema de coordenadas, utilizam-se os invariantes do tensor de tensão. Estes parâmetros surgem durante o processo de resolução das equações (III.4) e são definidos da seguinte forma:

$$J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \qquad \text{(III.5a)}$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} \qquad \text{(III.5b)}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \qquad \text{(III.5c)}$$

Nas equações (III.5) acima o determinante de uma matriz esta representado por duas barras verticais.

A definição dos invariantes torna-se mais simples quando é feita em função das tensões principais:

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \qquad \text{(III.6a)}$$

$$J_2 = \sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2\,\sigma_3 + \sigma_3\,\sigma_1 \qquad \text{(III.6b)}$$

$$J_3 = \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3 \qquad \text{(III.6c)}$$

O tensor de tensão pode ser decomposto em dois outros tensores, segundo a seguinte equação:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \sigma_m \underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{\sigma}' \qquad \text{(III.7a)}$$

ou

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3}\,\sigma_{\alpha\alpha}\,\delta_{ij} + \sigma'_{ij} \qquad \text{(III.7b)}$$

onde

σ_m - tensão normal média

$\underset{\sim}{I}$ - matriz identidade 3 x 3

$\underset{\sim}{\sigma}'$ - matriz do tensor desviador de tensão ("stress deviation tensor")

O tensor $\sigma_m \underset{\sim}{I}$ representa um estado de tensão hidrostático (esférico) que, em materiais isotrópicos, provoca apenas variação de volume sem mudança de forma [38]. A tensão σ_m é definida em função do primeiro invariante J_1:

$$\sigma_m = \frac{1}{3} J_1 \qquad \text{(III.8a)}$$

ou

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{\alpha\alpha} \qquad \text{(III.8b)}$$

O tensor desviador de tensão representa um estado de tensão cisalhante que provoca apenas mudança de forma [39]. A matriz deste tensor tem o seguinte aspecto:

$$\underset{\sim}{\sigma}' = \begin{bmatrix} (\sigma_{11} - \sigma_m) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22} - \sigma_m) & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & (\sigma_{33} - \sigma_m) \end{bmatrix} \qquad \text{(III.9)}$$

As direções principais do tensor desviador de tensão são as mesmas do tensor de tensão [38], e as tensões principais e os invariantes são dados por:

$$\sigma_1' = \sigma_1 - \sigma_m \qquad \text{(III.10a)}$$

$$\sigma_2' = \sigma_2 - \sigma_m \qquad \text{(III.10b)}$$

$$\sigma_3' = \sigma_3 - \sigma_m \qquad \text{(III.10c)}$$

$$J_1' = \sigma_{11}' + \sigma_{22}' + \sigma_{33}' = \sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0 \qquad \text{(III.11a)}$$

$$J_2' = \sigma_{ij}' \, \sigma_{ij}'$$

$$J_2' = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \qquad \text{(III.11b)}$$

$$J_3' = \frac{1}{3} \sigma_{ij}' \, \sigma_{jk}' \, \sigma_{ki}' \qquad \text{(III.11c)}$$

Cada estado de tensão corresponde a um ponto no espaço de tensão definido pelas nove componentes $\sigma_{ij}(i,j = 1,2,3)$. A evolução do estado de tensão em um ponto ao longo de um processo de carregamento é representada por uma trajetória neste espaço.

Para facilitar a visualização é usual trocar-se o espaço de tensão definido pelas componentes σ_{ij} pelo espaço de tensão definido pelas tensões principais σ_i $(i = 1,2,3)$, que tem a vantagem de ser tridimensional (Figura III.4) em vez de eneadimensional.

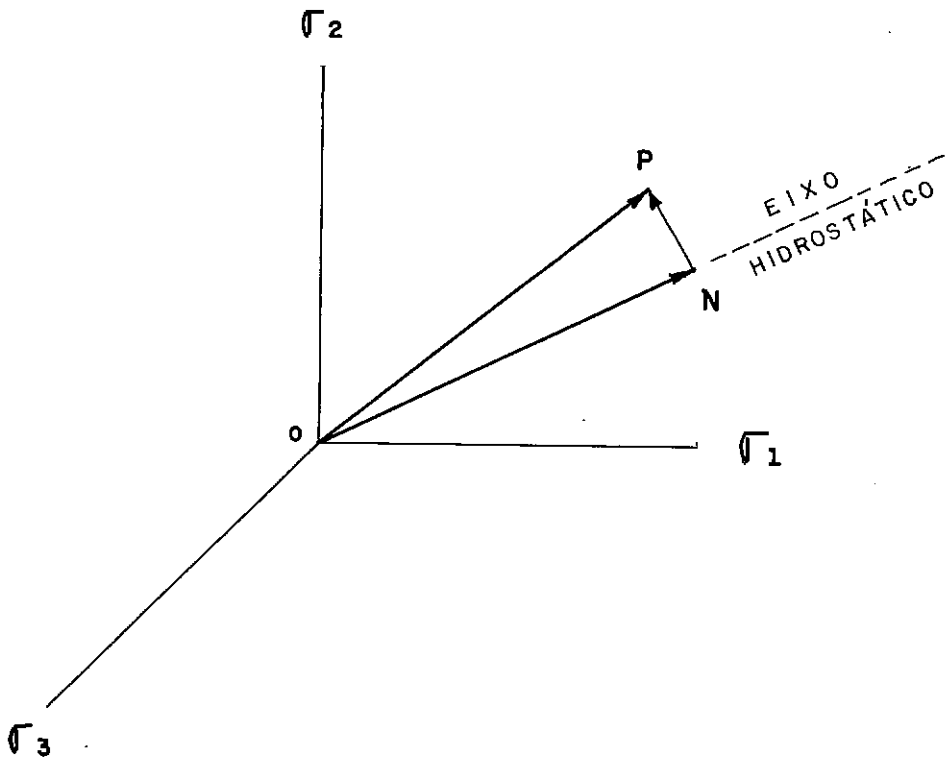


Figura III.4 - Representação geométrica do estado de tensão em um ponto

Sendo O a origem do sistema de eixos cartesianos do espaço de tensões principais, um ponto P qualquer neste espaço define o vetor

$$\underset{\sim}{OP} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \qquad \text{(III.12)}$$

Estados de tensão hidrostáticos, que têm as tensões principais iguais entre si, situam-se no espaço de tensões principais sobre o eixo hidrostático, uma reta que tem a mesma inclinação em relação aos eixos σ_1, σ_2 e σ_3. O vetor unitário correspondente a esta reta é

$$\underset{\sim}{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \qquad \text{(III.13)}$$

A norma do vetor $\underset{\sim}{ON}$, determinada pela projeção do vetor $\underset{\sim}{OP}$ sobre o eixo hidrostático, é

$$\| \underset{\sim}{ON} \| = \underset{\sim}{OP} \cdot \underset{\sim}{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \qquad \text{(III.14)}$$

Substituindo a equação (III.6a) em (III.14) e usando (III.8a) tem-se:

$$\| \underset{\sim}{ON} \| = \sqrt{3}\ \sigma_m \qquad \text{(III.15)}$$

O vetor $\underset{\sim}{ON}$ é dado por:

$$\underset{\sim}{ON} = \| \underset{\sim}{ON} \| \underset{\sim}{n}$$

$$\underset{\sim}{ON} = (\sigma_m, \sigma_m, \sigma_m) \qquad \text{(III.16)}$$

O vetor $\underset{\sim}{NP}$ é dado por:

$$\underset{\sim}{NP} = \underset{\sim}{OP} - \underset{\sim}{ON}$$

$$\underset{\sim}{NP} = (\sigma_1 - \sigma_m,\ \sigma_2 - \sigma_m,\ \sigma_3 - \sigma_m) \qquad \text{(III.17)}$$

Substituindo as equações (III.10) em (III.17) tem-se

$$\underset{\sim}{NP} = (\sigma_1',\ \sigma_2',\ \sigma_3') \qquad \text{(III.18)}$$

A norma do vetor $\underset{\sim}{NP}$

$$\| \underset{\sim}{NP} \| = \sqrt{2\ J_2'} \qquad \text{(III.19)}$$

é a distância entre os pontos P e N

Examinando-se as equações (III.16) e (III.18) constata-se que os vetores $\underset{\sim}{ON}$ e $\underset{\sim}{NP}$ são as representações no espaço de tensões principais, respectivamente, das componentes hidrostática e desviadora do estado de tensão representado pelo ponto P.

III.3) ESTADO DE DEFORMAÇÃO

A deformação de um elemento de volume infinitesimal situado em um corpo contínuo é caracterizada por um tensor

de deformação. No caso de pequenos deslocamentos este tensor é idêntico a parcela linear do tensor de Green-Lagrange:

$$\underset{\sim}{e} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{(III.20)}$$

Para este tensor são válidas todas as propriedades e definições estabelecida no item III.2 para o tensor de tensão. As direções principais do tensor de deformação, em materiais isotrópicos, são as mesmas do tensor de tensão [38].

Os invariantes do tensor de deformação são dados por:

$$I_1 = e_{11} + e_{22} + e_{23} \qquad \text{(III.21a)}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} e_{22} & e_{23} \\ e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{11} & e_{13} \\ e_{31} & e_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix} \qquad \text{(III.21b)}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} \qquad \text{(III.21c)}$$

Quando definidos em relação as deformações principais e_1 , e_2 e e_3 , são dados por:

$$I_1 = e_1 + e_2 + e_3 \qquad \text{(III.22a)}$$

$$I_2 = e_1\, e_2 + e_2\, e_3 + e_3\, e_1 \qquad \text{(III.22b)}$$

$$I_3 = e_1\, e_2\, e_3 \qquad \text{(III.22c)}$$

A dilatação ϵ é definida como a variação de volume por unidade de volume de um paralelepipedo infinitesimal [37] ou seja,

$$\epsilon = \frac{dV - dV_0}{dV} \qquad \text{(III.23)}$$

Sendo,

dV_0 - volume antes da deformação

dV - volume após a deformação

Nos casos em que a hipótese de pequenas deformações é válida, a dilatação é igual ao primeiro invariante de deformação [37,38]:

$$\epsilon = I_1 \qquad \text{(III.24a)}$$

ou

$$\epsilon = e_{\alpha\alpha} \qquad \text{(III.24b)}$$

O tensor de deformação, assim como o tensor de tensão, pode ser decomposto em dois outros tensores,

$$\underset{\sim}{e} = \frac{1}{3}\,\epsilon\,\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{e}' \qquad \text{(III.25a)}$$

ou

$$e_{ij} = \frac{1}{3}\,e_{\alpha\alpha}\,\delta_{ij} + e'_{ij} \qquad \text{(III.25b)}$$

O tensor $\frac{1}{3}\,\epsilon\,\underset{\sim}{I}$ representa uma variação de volume e o tensor $\underset{\sim}{e}'$, chamado de tensor desviador de deformação ("strain deviation tensor"), caracteriza uma mudança de forma [40].

O tensor desviador de deformação é definido de maneira análoga ao desviador de tensão:

$$\underset{\sim}{e}' = \begin{bmatrix} (e_{11} - \frac{1}{3}\epsilon) & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & (e_{22} - \frac{1}{3}\epsilon) & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & (e_{33} - \frac{1}{3}\epsilon) \end{bmatrix} \qquad \text{(III.26)}$$

As direções principais do tensor desviador de deformação são as mesmas do tensor de deformação, e as deformações principais e os invariantes são dados por:

$$e_1' = e_1 - \frac{1}{3}\epsilon \qquad \text{(III.27a)}$$

$$e_2' = e_2 - \frac{1}{3}\epsilon \qquad \text{(III.27b)}$$

$$e_3' = e_3 - \frac{1}{3}\epsilon \qquad \text{(III.27c)}$$

$$I_1' = e_{11}' + e_{22}' + e_{33}' = e_1' + e_2' + e_3' = 0 \qquad \text{(III.28a)}$$

$$I_2' = e_{ij}'\, e_{ij}' \qquad \text{(III.28b)}$$

$$I_3' = \frac{1}{3}\, e_{ij}'\, e_{jk}'\, e_{ki}' \qquad \text{(III.28c)}$$

III.4) RELAÇÕES CONSTITUTIVAS NO DOMÍNIO ELÁSTICO

A relação tensão-deformação para um material elástico e isotrópico é dada pelas seguintes equações:

$$\sigma_{ij} = C_{ijk\ell}\, e_{k\ell} \qquad \text{(III.29a)}$$

Onde

$C_{ijk\ell}$ - Componentes do tensor de constantes elásticas

Escrevendo-se as equações (III.29a) de uma forma menos compacta tem-se [37]:

$$\sigma_{ij} = \lambda\, e_{\alpha\alpha}\, \delta_{ij} + 2\, G\, e_{ij} \qquad \text{(III.29b)}$$

ou

$$\sigma_{11} = \lambda\, (e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\, G\, e_{11} \qquad \text{(III.30a)}$$

$$\sigma_{22} = \lambda\, (e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\, G\, e_{22} \qquad \text{(III.30b)}$$

$$\sigma_{33} = \lambda\, (e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\, G\, e_{33} \qquad \text{(III.30c)}$$

$$\sigma_{12} = 2\, G\, e_{12} \qquad \text{(III.30d)}$$

$$\sigma_{13} = 2\, G\, e_{13} \qquad \text{(III.30e)}$$

$$\sigma_{23} = 2\, G\, e_{23} \qquad \text{(III.30f)}$$

Onde,

$$\lambda = \frac{2\,\nu}{(1 - 2\,\nu)} \quad \frac{E}{2\,(1 + \nu)}$$

$$G = \frac{E}{2\ (1 + \nu)} \qquad \text{(III.32)}$$

Nas equações acima λ e G são as constantes de Lamé. As constantes E, G e ν são, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal, o módulo de elasticidade transversal e o coeficiente de Poisson.

Com o objetivo de caracterizar separadamente o comportamento do material quando submetido aos estados de tensão hidrostático e cisalhante, escrevem-se as equações (III.29b) da seguinte forma:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = 3\ K\ e_{\alpha\alpha} \qquad \text{(III.33a)}$$

$$\sigma'_{ij} = 2\ G\ e'_{ij} \qquad \text{(III.33b)}$$

Onde,

$$K = \frac{E}{3\ (1 - 2\ \nu)} \qquad \text{(III.34)}$$

K - módulo de dilatação volumétrica

As equações (III.33) são obtidas substituindo-se as equações (III.7b) e (III.25b) em (III.29b) , utilizando-se as equações (III.11a) e (III.28a) e realizando-se algumas operações algébricas.

A equação a seguir, que relaciona a dilatação ϵ com a tensão normal média σ_m, é obtida a partir da equação (III.33a), utilizando-se as equações (III.8b), (III.24b) e (III.34).

$$\epsilon = \frac{3\ (1 - 2\ \nu)}{E}\ \sigma_m \qquad \text{(III.35)}$$

Esta equação mostra que a dilatação, ou seja, a variação de volume, é proporcional a tensão normal média. Mostra também que a existência ou não de dilatação é determinada pelo valor do coeficiente de Poisson.

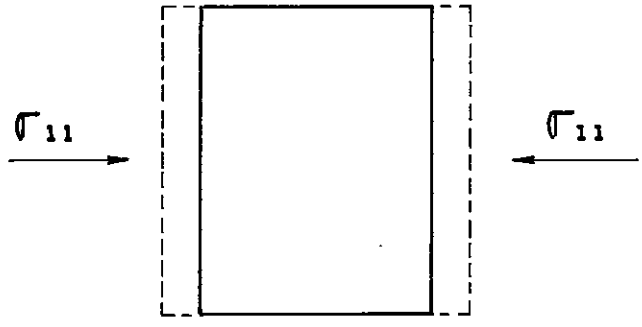
O coeficiente de Poisson caracteriza a maior ou menor compressibilidade de um material. Teoricamente, o valor desta constante pode variar entre 0,0 e 0,5 correspondendo, respectivamente, a materiais altamente compressíveis e a materiais incompressíveis [37] (Figura III.5).

A partir das equações (III.29) obtem-se as equações que fornecem as componentes do tensor de deformação em função das componentes do tensor de tensão:

$$e_{ij} = \frac{1}{2G}\ \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\ \sigma_{\alpha\alpha}\ \delta_{ij} \qquad \text{(III.36)}$$

Material altamente compressível

$\vartheta = 0.0$ $\qquad \mathcal{E} = \frac{3}{E} \sigma_m$



Material incompressível

$\vartheta = 0.5$ $\qquad \mathcal{E} = 0$

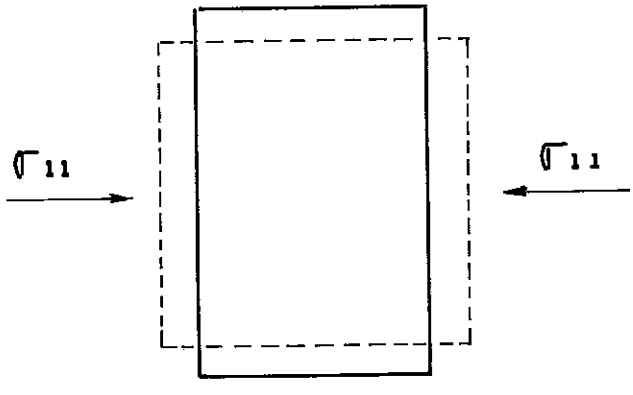


Figura III.5 - Material altamente compressível e material incompressível.

$$e_{11} = \frac{1}{2G}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

$$e_{22} = \frac{1}{2G}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

$$e_{33} = \frac{1}{2G}\sigma_{33} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \qquad \text{(III.37)}$$

$$e_{12} = \frac{1}{2G}\sigma_{12}$$

$$e_{13} = \frac{1}{2G}\sigma_{13}$$

$$e_{23} = \frac{1}{2G}\sigma_{23}$$

Substituindo a equação (III.7b) em (III.36) e realizando algumas operações algébricas, obtem-se a seguinte equação:

$$e_{ij} = \frac{1}{2G}\sigma'_{ij} + \frac{(1 - 2\nu)}{3E}\sigma_{\alpha\alpha}\delta_{ij} \qquad \text{(III.38)}$$

III.5) CRITÉRIO DE ESCOAMENTO

Em um estado uniaxial de tensão o escoamento se inicia a partir do instante em que a tensão atinge um valor igual a tensão de escoamento, que é uma característica do material (Figura III.1).

Numa situação geral, em que o estado de tensão no ponto pode ser bi ou tridimensional, a passagem do domínio elástico para o plástico só pode ser detectada através de um critério que inclua todas as componentes do tensor de tensão. No atual estágio de desenvolvimento da Teoria da Plasticidade isto é feito através de uma função escalar chamada de função de escoamento ("yield function").

A função de escoamento deve relacionar as componentes do tensor de tensão às constantes que caracterizam o comportamento plástico do material. Além disso, deve ser indiferente a mudanças no referencial utilizado para representar as componentes do tensor de tensão [37]. Estas duas condições convergem no sentido de utilizarem-se na função de escoamento, os invariantes do tensor de tensão, e não as suas componentes.

Em se tratando de metais pode-se supor que a parcela hidrostática do tensor de tensão (Equação (III.7a)) não influi no escoamento. Desta forma, os invariantes do tensor de tensão J_1, J_2 e J_3 , podem ser substituidos na função de escoamento pelos invariantes do tensor desviador de tensão J_2' e J_3' ($J_1' = 0$). Esta hipótese tem comprovação nas experiências realizadas por Bridgman [41], Crossland [42] e muitos outros pesquisadores.

Dentre os critérios utilizados para representar o comportamento plástico de metais o critério de escoamento de von Mises é a opção mais indicada, pois alia a

simplicidade à precisão. Este critério é definido pela função de escoamento

$$f(\sigma_{ij}) = J_2' - k^2 = 0 \qquad \text{(III.39)}$$

onde, para material plástico perfeito, k é uma constante.

Substituindo a equação (III.11b) em (III.39) tem-se, a função de escoamento de von Mises em termos de tensões principais:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6\,k^2 \qquad \text{(III.40)}$$

A relação entre a constante k e a tensão de escoamento é obtida aplicando-se a equação (III.40) ao caso de um teste uniaxial de tração onde $\sigma_1=\sigma_0$ e $\sigma_2=\sigma_3=0$.

$$k = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \qquad \text{(III.41)}$$

De acordo com o critério de von Mises (equação (III.39)), um ponto encontra-se no domínio elástico quando

$$J_2' < k^2 \qquad \text{(III.42)}$$

e atinge o domínio plástico quando

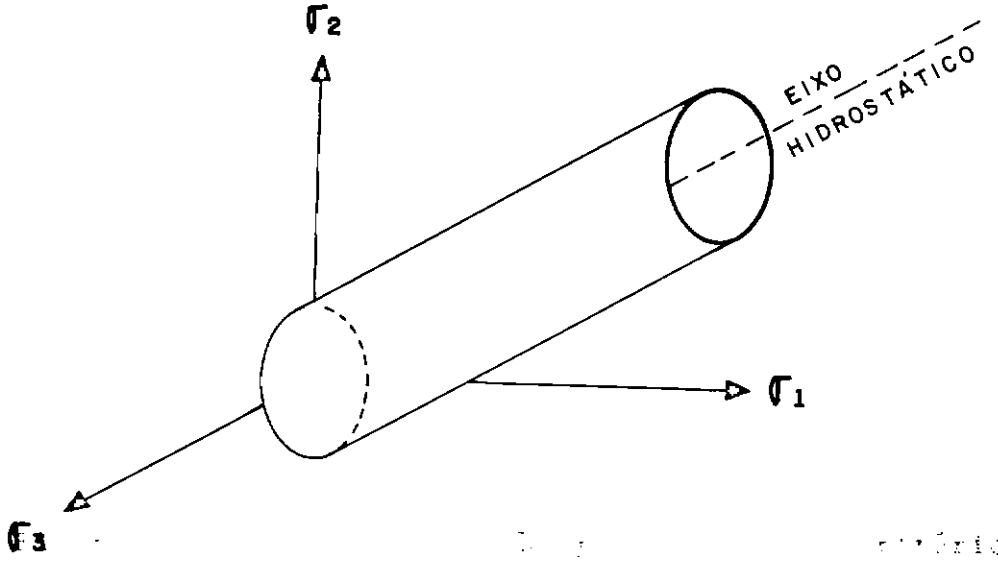
$$J_2' = k^2 \qquad \text{(III.43)}$$

Para materiais plásticos perfeitos a situação $J_2'>k^2$ não ocorre jamais.

No espaço de tensões principais o critério de von Mises tem a forma de um cilindro de seção transversal circular (Figura III.6), cujo eixo coincide com o eixo hidrostático.

Partindo-se da equação (III.19) e utilizando a equação (III.43) determina-se o raio do cilindro do critério de von Mises

$$R = \sqrt{2}\, k \qquad \text{(III.44)}$$



III.6) CRITÉRIO DE CARREGAMENTO E DESCARREGAMENTO

Quando um ponto se encontra no domínio plástico uma variação infinitesimal $d\sigma_{ij}$ no estado de tensão pode gerar um descarregamento, voltando ao domínio elástico em que:

$$f(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) < 0 \qquad \text{(III.45)}$$

ou pode representar um carregamento, em que o estado de tensão se desloca sobre a superfície de escoamento, permanecendo no domínio plástico:

$$f(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) = 0 \qquad \text{(III.46)}$$

A relação entre as funções de escoamento correspondentes aos estados inicial e final de tensão é dada por [43]:

$$f(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) = f(\sigma_{ij}) + df \qquad \text{(III.47a)}$$

Onde

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \qquad \text{(III.47b)}$$

Usando as equações (III.39), (III.45), (III.46) e (III.47a), determina-se que:

$$df < 0 \qquad \text{(III.48a)}$$

quando ocorre descarregamento, e

$$df = 0 \qquad \text{(III.48b)}$$

quando ocorre carregamento.

Substituindo a equação (III.47b) em (III.48a) e (III.48b) tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \begin{cases} < 0 & \text{no descarregamento} \qquad \text{(III.49a)} \\ = 0 & \text{no carregamento} \qquad \text{(III.49b)} \end{cases}$$

III.7) RELAÇÕES TENSÃO-DEFORMAÇÃO NO DOMÍNIO PLÁSTICO

O processo de deformação de um corpo elasto-plástico após o escoamento plástico ter se iniciado, tem as seguintes características [40]:

- parte da energia de deformação é transformada em calor e, consequentemente, parte da deformação é irreversível.

- as tensões da configuração final dependem da trajetória de deformação ("strain path")

As características citadas acima fazem com que as relações tensão-deformação no domínio plástico sejam equações diferenciais, e não relações finitas entre tensões e deformações.

É usual supor que o incremento infinitesimal de deformação de_{ij} é constituido da soma de duas parcelas, uma elástica $(de_{ij})_e$ e outra plástica $(de_{ij})_p$

$$de_{ij} = (de_{ij})_e + (de_{ij})_p \qquad \text{(III.50)}$$

O incremento de deformação elástica é obtido aplicando-se a equação (III.38)

$$(de_{ij})_e = \frac{1}{2G} d\sigma'_{ij} + \frac{(1 - 2\nu)}{3E} d\sigma_{\alpha\alpha}\, \delta_{ij} \qquad \text{(III.51)}$$

Fazendo uma analogia com a Teoria da Elasticidade, em que as componentes do tensor de deformação podem ser obtidas a partir do gradiente de uma função potencial (energia complementar de deformação) [43], supõe-se que o incremento de deformação plástica pode ser determinado pela equação,

$$(de_{ij})_p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \text{(III.52)}$$

onde $d\lambda$ é um fator de proporcionalidade e g é uma função escalar das componentes do tensor de tensão, chamada de função potencial plástica.

Do ponto de vista geométrico, a função $g(\sigma_{ij})=0$ representa uma superfície no espaço de tensão eneadimensional definido pelas componentes $\sigma_{ij}(i,j=1,2,3)$. Como atua na mesma direção do gradiente $\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$, o vetor de escoamento plástico $(de_{ij})_p$ é normal a esta superfície.

A equação (III.52) é chamada de regra de escoamento ("flow rule") porque fornece o acréscimo na deformação plástica durante o escoamento plástico. Diz-se que uma regra de escoamento é associada quando a função adotada para potencial plástico é a própria função de escoamento, ou seja,

$$(de_{ij})_p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \text{(III.53)}$$

O gradiente da função de escoamento de von Mises (Equação III.39) é dado por

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial J_2'}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma'_{ij} \qquad \text{(III.54)}$$

Substituindo a equação (III.54) em (III.53) obtem-se a equação de Prandtl-Reuss [43], que é a regra de escoamento associada ao critério de von Mises.

$$(de_{ij})_p = d\lambda \ \sigma'_{ij} \qquad \text{(III.55)}$$

A variação de volume provocada pela deformação plástica é determinada aplicando-se a equação (III.24b).

$$(\epsilon)_p = (de_{\alpha\alpha})_p \qquad \text{(III.56)}$$

O lado direito da equação (III.56) pode ser determinado através das equações (III.55).

$$(de_{\alpha\alpha})_p = d\lambda \ \sigma'_{\alpha\alpha} \qquad \text{(III.57)}$$

Através da equação (III.11a) sabe-se que

$$\sigma'_{\alpha\alpha} = J'_1 = 0 \qquad \text{(III.58)}$$

Substituindo sucessivamente as equações (III.57) e (III.58) em (III.56) tem-se

$$(\epsilon)_p = 0 \qquad \text{(III.59)}$$

A equação (III.59) estabelece que o escoamento plástico não provoca variação de volume, ou seja, a deformação plástica se dá como se o material fosse imcompressível. Esta constatação é coerente com a hipótese feita anteriormente de que estados de tensão esféricos (hidrostáticos) não provocam plastificação.

A relação tensão deformação no domínio plástico é obtida substituindo-se as equações (III.51) e (III.53) em (III.50).

$$de_{ij} = \frac{1}{2G} d\sigma'_{ij} + \frac{(1 - 2\nu)}{3E} d\sigma_{\alpha\alpha}\, \delta_{ij} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \text{(III.60)}$$

As equações (III.60) podem ser escritas em sua forma inversa aplicando-se diretamente a lei de Hooke (equação (III.29a)):

$$d\sigma_{ij} = C_{ijk\ell}\, (de_{k\ell})_e \qquad \text{(III.61)}$$

Isolando $(de_{k\ell})_e$ na equação (III.50), substituindo em (III.61) e usando (III.53), tem-se

$$d\sigma_{ij} = C_{ijk\ell}\left(de_{k\ell} - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{k\ell}}\right) \qquad \text{(III.62)}$$

Substituindo a equação (III.62) em (III.49b) determina-se o valor da constante $d\lambda$ [43].

$$d\lambda = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijk\ell}\, de_{k\ell}}{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} C_{rstu} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}}} \qquad \text{(III.63)}$$

Substituindo a equação (III.63) em (III.62) obtém-se:

$$d\sigma_{ij} = (C_{ijk\ell})_{ep}\, de_{k\ell} \qquad \text{(III.64a)}$$

Onde

$$(C_{ijk\ell})_{ep} = C_{ijk\ell} - \frac{C_{ijmn} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} C_{pqk\ell}}{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} C_{rstu} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}}} \qquad \text{(III.64b)}$$

CAPÍTULO IV

MECÂNICA DOS SÓLIDOS

Neste capítulo são apresentados os conceitos e equações da Mecânica dos Sólidos diretamente relacionados ao comportamento não-linear geométrico das estruturas.

A não-linearidade geométrica aparece na Mecânica dos Sólidos nas equações de equilíbrio, que são escritas utilizando-se a configuração deformada do corpo e nas relações deformação-deslocamento, que incluem termos não-lineares.

IV.1) DESCRIÇÃO DO MOVIMENTO

Ao sofrer a ação de um agente externo qualquer, um corpo sólido muda de configuração, sofrendo alterações na forma e no volume.

A configuração de um corpo é descrita por um sistema de coordenadas que tem os seus pontos geométricos identificados com a posição que as partículas do corpo ocupam no espaço.

Como em cada configuração a posição das partículas é diferente, é necessário que se estabeleça uma forma única de determiná-las. Isto é feito escolhendo-se uma

configuração de referência, a qual todas as outras são relacionadas.

O vetor $\underset{\sim}{x}$, que determina a posição da partícula na configuração de referência, e o tempo τ são tomados como variáveis independentes. Conhecendo-se τ e $\underset{\sim}{x}$, determina-se o vetor $\underset{\sim}{y}$, que fornece a posição da partícula na nova configuração [38].

A descrição do movimento de um corpo feita desta maneira é chamada de descrição referencial. É comum escolher-se como referência a configuração inicial, correspondente a $\tau = 0$ (descrição lagrangeana), porém outras configurações podem ser escolhidas também. Nas deduções feitas a seguir sempre que não houver ressalva estará sendo utilizada a descrição lagrangeana.

A sequência de mudanças de configuração é representada pelas equações de deformação:

$$y_i = f_i (x_1 , x_2 , x_3 , \tau) \quad (i = 1, 2, 3) \qquad (IV.1)$$

ou

$$y_i = x_i + u_i \qquad (IV.2)$$

Sendo,

y_i - componentes cartesianas de $\underset{\sim}{y}$

f_i - funções contínuas de $\underset{\sim}{x}$ e τ

x_i - componentes cartesianas de $\underset{\sim}{x}$

u_i - funções contínuas de $\underset{\sim}{x}$ e τ e componentes cartesianas de $\underset{\sim}{u}$, vetor de deslocamentos da partícula

Os vetores $\underset{\sim}{y}$ e $\underset{\sim}{x}$, nas equações (IV.1) e (IV.2) estão referidos ao mesmo sistema de eixos cartesianos.

IV.2) DEFORMAÇÃO DO CORPO

O estudo da deformação na vizinhança de uma partícula é feito verificando-se o que ocorre com um elemento infinitesimal do corpo. Este elemento é constituído pelo segmento de reta que une as posições de duas partículas genéricas P e Q, situadas infinitamente próximas uma da outra. Inicialmente P e Q ocupam as posições $\underset{\sim}{x}$ e $\underset{\sim}{x} + d\underset{\sim}{x}$, deslocando-se para as posições $\underset{\sim}{y}$ e $\underset{\sim}{y} + d\underset{\sim}{y}$ durante a a deformação.

O gradiente de deformação $\underset{\sim}{F}$ é definido como o tensor que atua no vetor infinitesimal $d\underset{\sim}{x}$, relacionando-o com o vetor $d\underset{\sim}{y}$ da seguinte forma [38]:

$$d\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{F}\ d\underset{\sim}{x} \qquad \text{(IV.3a)}$$

ou

$$dy_i = F_{ik}\ dx_k \qquad \text{(IV.3b)}$$

Onde,

$$F_{ik} = \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \qquad \text{(IV.4a)}$$

ou

$$F_{ik} = \delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \qquad \text{(IV.4b)}$$

Sendo,

δ_{ik} - delta de Kronecker

$\delta_{ik} = 1$ para $i = k$; $\delta_{ik} = 0$ para $i \neq k$

Os tensores de deformação $\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{U}$ e $\underset{\sim}{\varepsilon}$ são tensores simétricos definidos a partir do gradiente de deformação:

$$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{F}^T \underset{\sim}{F} \qquad \text{(IV.5)}$$

$$\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{C}^{1/2} \qquad \text{(IV.6)}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\underset{\sim}{C} - \underset{\sim}{I}) \qquad \text{(IV.7a)}$$

ou

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right) \qquad \text{(IV.7b)}$$

Sendo,

$\underset{\sim}{I}$ - matriz identidade 3 x 3

δ_{ij} - delta de Kronecker

$\underset{\sim}{\varepsilon}$ - tensor de deformação de Green-Lagrange

As componentes do tensor $\underset{\sim}{\varepsilon}$ são usualmente expressas em termos de deslocamentos. Isto é obtido facilmente substituindo-se as componentes y_k nas equações (IV.7b) pelas equações (IV.2).

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + n_{ij} \qquad \text{(IV.8)}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad \text{(IV.9a)}$$

$$n_{ij} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\,\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \qquad \text{(IV.9b)}$$

Sendo,

e_{ij} - parcela linear de ε_{ij}

n_{ij} - parcela não-linear de ε_{ij}

Nos métodos incrementais o tensor $\underset{\sim}{\varepsilon}$ é utilizado na sua forma incremental [44].

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta e_{ij} + \Delta n_{ij} \qquad \text{(IV.10)}$$

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i}\right) \qquad \text{(IV.11a)}$$

$$\Delta n_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i}\frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_j} \qquad \text{(IV.11b)}$$

As equações (IV.11) são obtidas substituindo-se as equações (IV.9) em (IV.8) e utilizando-se uma decomposição incremental para os deslocamentos u_i .

$$u_i = {}^{N+1}u_i = {}^{N}u_i + \Delta u_i \qquad \text{(IV.12)}$$

Sendo,

${}^{N+1}u_i$ - Componentes do vetor de deslocamentos para a configuração N + 1

${}^{N}u_i$ - Componentes do vetor de deslocamentos para a configuração N

Δu_i - Componentes do vetor de deslocamentos incrementais.

A deformação do corpo causa uma variação no comprimento de um elemento infinitesimal. Esta variação é medida através do alongamento unitário [45].

$$E_{PQ} = \frac{\Delta \ell}{d\ell} \qquad \text{(IV.13)}$$

Onde,

$\Delta\ell$ - mudança ocorrida na distância entre P e Q; igual ao comprimento final menos o inicial.

$d\ell$ - distância inicial entre P e Q.

Se a posição inicial do elemento é paralela a um dos eixos de referência x_i, tem-se

$$E_i = (1 + 2\,\varepsilon_{ii})^{1/2} - 1 \qquad \text{(IV.14a)}$$

ou

$$\varepsilon_{ii} = E_i + \frac{1}{2}(E_i)^2 \qquad \text{(IV.14b)}$$

Os elementos que se situam, antes da deformação, paralelamente aos eixos de referência x_i formam entre si ângulos retos. Após a deformação, estes ângulos são alterados, passando a valer $\frac{\pi}{2} - \phi_{ij}$. O ângulo ϕ_{ij} é a distorção sofrida pelo retângulo infinitesimal de lados dx_i e dx_j (Figura IV.1)

As distorções se relacionam com as outras medidas de deformação através das seguintes equações [46].

$$\operatorname{sen}\phi_{ij} = \frac{2\,\varepsilon_{ij}}{(1 + E_i)\,(1 + E_j)} \qquad \text{(IV.15a)}$$

ou

$$2\,\varepsilon_{ij} = (1 + E_i)\,(1 + E_j)\,\text{sen}\;\phi_{ij} \qquad \text{(IV.15b)}$$

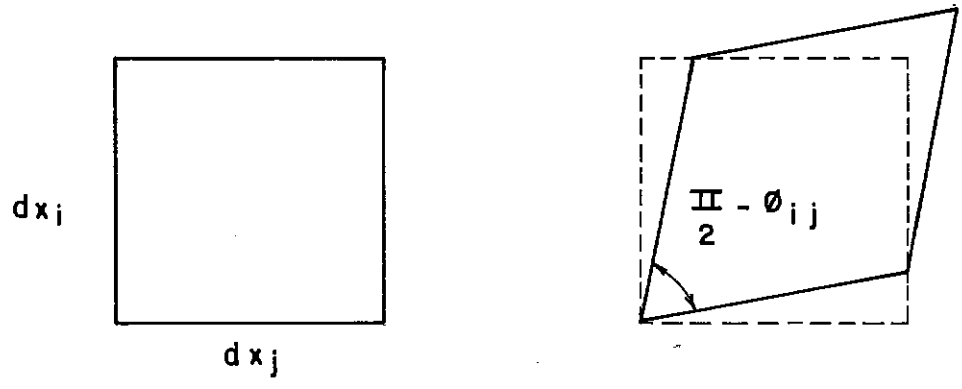


Figura IV.1

A variação da área do retângulo infinitesimal de lados dx_i e dx_j é dada por [45]:

$$\frac{dA}{dA_0} = \left[(1 + 2\,\varepsilon_{ii})\;(1 + 2\,\varepsilon_{jj}) - (2\,\varepsilon_{ij})^2\right]^{1/2} \qquad \text{(IV.16)}$$

Onde,

dA - área após a deformação

dA_0 - área antes da deformação

As alterações no volume e na densidade de um paralelepípedo infinitesimal, de lados inicialmente paralelos aos eixos x_i , são determinadas através das seguintes equações [45]:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{dV}{dV_0} = J \qquad \text{(IV.17a)}$$

$$\frac{dV}{dV_o} = (1 + \hat{E}_1)\ (1 + \hat{E}_2)\ (1 + \hat{E}_3) \qquad \text{(IV.17b)}$$

Onde,

ρ - densidade após a deformação

ρ_0 - densidade antes da deformação

dV - volume após a deformação

dV_o - volume antes da deformação

J - determinante do gradiente de deformação F

$\hat{E}_i$ - alongamentos nas direções principais de deformação

O movimento e deformação de um elemento de volume infinitesimal, que ocupa inicialmente a posição $\underset{\sim}{x}$, pode ser considerado como resultante de três transformações: uma deformação, uma rotação de corpo rígido e uma translação até $\underset{\sim}{y}$. Esta interpretação do movimento é chamada de teorema da decomposição polar e é representada pela seguinte equação [38]:

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{R}\ \underset{\sim}{U} \qquad \text{(IV.18)}$$

Onde,

$\underset{\sim}{R}$ - tensor ortogonal, isto é, $\underset{\sim}{R}^T\ \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{I}$, que produz uma rotação de corpo rígido

$\underset{\sim}{U}$ - tensor simétrico positivo definido (ver equação IV.6), que produz alongamento e distorção. É chamado de tensor de deformação direito ("right stretch tensor").

IV.3) ESTADO DE TENSÃO

O estado de tensão em um ponto é completamente determinado pelo tensor de tensão de Cauchy $\underset{\sim}{\sigma}$ (ver item III.2).

O tensor $\underset{\sim}{\sigma}$ está definido em relação à configuração presente do corpo. Isto resulta do conceito físico natural e da necessidade de satisfazer as equações do movimento na configuração presente ou deformada. Porém, para montar as equações constitutivas é necessário que os tensores de tensão e de deformação estejam definidos em relação a mesma configuração. Por isso, quando a configuração de referência não é a presente, em vez do tensor de Cauchy utiliza-se o 2º tensor de tensão de Piola-Kirchhoff, que é definido em relação a configuração de referência.

Este tensor é obtido a partir de uma força fictícia, $d\underset{\sim}{P}' = (\underset{\sim}{t}')\ dA'$, que se relaciona com a força real, $d\underset{\sim}{P} = (\underset{\sim}{t})\ dA$, da mesma forma que $d\underset{\sim}{x}$ se relaciona com $d\underset{\sim}{y}$ (ver equação (IV.3a)).

$$d\underset{\sim}{P}' = \underset{\sim}{F}^{-1}\ d\underset{\sim}{P} \qquad \text{(IV.19a)}$$

$$(\underset{\sim}{t}')\ dA' = \underset{\sim}{F}^{-1}\ (\underset{\sim}{t})\ dA \qquad \text{(IV.19b)}$$

O vetor de tensão fictício $\underset{\sim}{t}'$ é calculado através de uma equação análoga a equação (III.3a)

$$\underset{\sim}{t}' = \underset{\sim}{S}^{T}\ \underset{\sim}{\nu}' \qquad \text{(IV.20)}$$

Onde,

S - 2º tensor de tensão de Piola-Kirchhoff

$\underset{\sim}{\nu}'$ - vetor unitário normal a superfície dA' , situada na configuração de referência

Substituindo-se (III.3a) e (IV.20) em (IV.19b) tem-se:

$$(\underset{\sim}{S}^{T}\ \underset{\sim}{\nu}')\ dA' = \underset{\sim}{F}^{-1}\ (\underset{\sim}{\sigma}^{T}\ \underset{\sim}{\nu})\ dA \qquad \text{(IV.21)}$$

Após algumas operações algébricas [38] é obtida a seguinte expressão para S:

$$\underset{\sim}{S} = \frac{\rho_0}{\rho}\ \underset{\sim}{F}^{-1}\ \underset{\sim}{\sigma}\ (\underset{\sim}{F}^{-1})^{T} \qquad \text{(IV.22a)}$$

ou

$$\underset{\sim}{\sigma} = \frac{\rho}{\rho_0}\ \underset{\sim}{F}\ \underset{\sim}{S}\ \underset{\sim}{F}^{T} \qquad \text{(IV.22b)}$$

A equação (IV.22a) mostra que, assim como $\underset{\sim}{\sigma}$, o tensor $\underset{\sim}{S}$ também é simétrico.

IV.4) EQUILÍBRIO DO CORPO

As condições de equilíbrio de um corpo podem ser expressas através das leis do movimento de Cauchy, ou alternativamente através do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Este princípio é representado na Mecânica dos Sólidos pela equação [38]:

$$\int_{\mathbb{B}_0} S_{ij}\ \delta\ \varepsilon^0_{ij}\ dV = \int_{\partial\mathbb{B}_0^2} t_k^0\ \delta\ u_k^0\ dA + \int_{\mathbb{B}_0} b_k^0\ \delta\ u_k^0\ dV \qquad \text{(IV.23)}$$

Com as seguintes condições subsidiárias:

$$\partial\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\ \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\ \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \qquad \text{(IV.24)}$$

e

$$\delta u_k = 0 \qquad \text{em} \qquad \partial\mathbb{B}_0^1 \qquad \text{(IV.25)}$$

Na equação (IV.23), como o equilíbrio não é feito em cada ponto do corpo, o conjunto de soluções admissíveis é ampliado. Podem ser aceitas soluções que violem o equilíbrio em alguns pontos, desde que o equilíbrio global do corpo seja mantido.

IV.5 - HIPÓTESE DE PEQUENAS DEFORMAÇÕES

Na maioria das estruturas encontradas na prática, mesmo em presença de deslocamentos e rotações relativamente grandes, os alongamentos E_i e distorções ϕ_{ij} são pequenos em relação a unidade [45].

Nestas situações, o comportamento estrutural pode ser representado pela teoria das pequenas deformações. Esta teoria resulta da aplicação da hipótese de pequenas deformações à teoria geral, apresentada anteriormente.

Na literatura, a utilização das hipóteses de pequenos deslocamentos e de pequenas deformações às vezes deixa margem a dúvidas. No Capítulo II, é importante notar, o problema estrutural linear foi definido em relação a deslocamentos e não em relação a deformações.

A hipótese de pequenos deslocamentos exige que as translações e as rotações dos pontos da estrutura sejam pequenas quando comparadas, respectivamente, com as dimensões da estrutura e com a unidade [45].

A hipótese de pequenas deformações supõe que os alongamentos E_i e distorções ϕ_{ij} são pequenos em relação a unidade. Portanto, refere-se exclusivamente a deformação de um volume infinitesimal do corpo.

A primeira hipótese é a mais restritiva pois envolve a deformação da estrutura como um todo. A primeira implica na segunda, porém a recíproca não é verdadeira.

Adotando-se a hipótese de pequenas deformações, as equações (IV.14b), (IV.15b), (IV.16b), (IV.17a) e (IV.17b) são simplificadas para:

$$\varepsilon_{ii} \cong E_i \qquad \text{(IV.26)}$$

$$2\,\varepsilon_{ij} \cong \phi_{ij} \qquad \text{(IV.27)}$$

$$\frac{dA}{dA_0} \cong 1 \qquad \text{(IV.28)}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} \cong 1 \qquad \text{(IV.29a)}$$

$$\frac{dV}{dV_0} \cong 1 \qquad \text{(IV.29b)}$$

Assim, as componentes do tensor $\tilde{\varepsilon}$ adquirem um significado geométrico que não possuíam anteriormente. Agora os ε_{ii} são alongamentos e os ε_{ij} são proporcionais às distorções.

As equações (IV.28) e (IV.29b) mostram que um paralelepípedo infinitesimal, de lados inicialmente paralelos aos eixos x_i, não sofre variação nem no volume nem nas áreas das faces. Como consequência da deformação o paralelepípedo retangular transforma-se em oblíquo com ângulos $\frac{\pi}{2} - \phi_{12}$, $\frac{\pi}{2} - \phi_{23}$ e $\frac{\pi}{2} - \phi_{13}$. Porém, como o corpo está submetido a grandes rotações (em relação

aos ϕ_{ij}), as equações de equilíbrio e as tensões podem ser determinadas considerando-se que o paralelepípedo permaneceu retangular, sofrendo apenas uma rotação e corpo rígido [45].

De acordo com esta suposição, a matriz identidade $\underset{\sim}{I}$ substitui a matriz do tensor $\underset{\sim}{U}$ na equação (IV.18) e o gradiente de deformação passa a produzir apenas rotação de corpo rígido.

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{R} \qquad \text{(IV.30)}$$

Substituindo-se (IV.30) em (IV.22a) obtém-se a nova forma da relação entre os tensores S e $\underset{\sim}{\sigma}$:

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{R}^{T}\ \underset{\sim}{\sigma}\ \underset{\sim}{R} \qquad \text{(IV.31)}$$

A equação (IV.31) é análoga as equações utilizadas para mudanças de referencial de tensores de segunda ordem. Devem existir portanto dois sistemas de eixos x'_i e x_i para os quais a matriz do tensor $\underset{\sim}{\sigma}$, referida a x'_i, seja igual a matriz do tensor $\underset{\sim}{S}$, referida a x_i .

As matrizes dos tensores $\underset{\sim}{S}$ e $\underset{\sim}{\sigma}$ na equações (IV.31) estão referidas ao sistema de eixos x_i . A transformação de um sistema para outro é feita através da equação.

$$\underset{\sim}{K'} = \underset{\sim}{Q}\ \underset{\sim}{K}\ \underset{\sim}{Q}^{T} \qquad \text{(IV.32)}$$

Onde,

$\underset{\sim}{K}'$ - Matriz referida a x'

$\underset{\sim}{K}$ - Matriz referida a x

$\underset{\sim}{Q}$ - Matriz ortogonal ($\underset{\sim}{Q}^T \underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{I}$) que transforma x_i em x_i' ($\underset{\sim}{x}' = \underset{\sim}{Q}\ \underset{\sim}{x}$)

A matriz de $\underset{\sim}{\sigma}$ referida ao sistema de eixos x_i', tal que $\underset{\sim}{x}' = \underset{\sim}{R}^T \underset{\sim}{x}$, é:

$$\underset{\sim}{\sigma}' = \underset{\sim}{R}^T \underset{\sim}{\sigma}\ \underset{\sim}{R} \qquad \text{(IV.33)}$$

Resolvendo-se a equação (IV.33) para $\underset{\sim}{\sigma}$ tem-se:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{R}\ \underset{\sim}{\sigma}'\ \underset{\sim}{R}^T \qquad \text{(IV.34)}$$

Substituindo-se (IV.34) em (IV.31) obtém-se o resultado esperado:

$$\underset{\approx}{S} = \underset{\sim}{\sigma}' \qquad \text{(IV.35)}$$

A matriz de rotação $\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{R}^T$, obtida anteriormente, define um sistema de eixos móvel, que acompanha a rotação do corpo. Isto pode ser comprovado através do estudo do movimento de um quadrado que sofre uma rotação no plano (Figura IV.2).

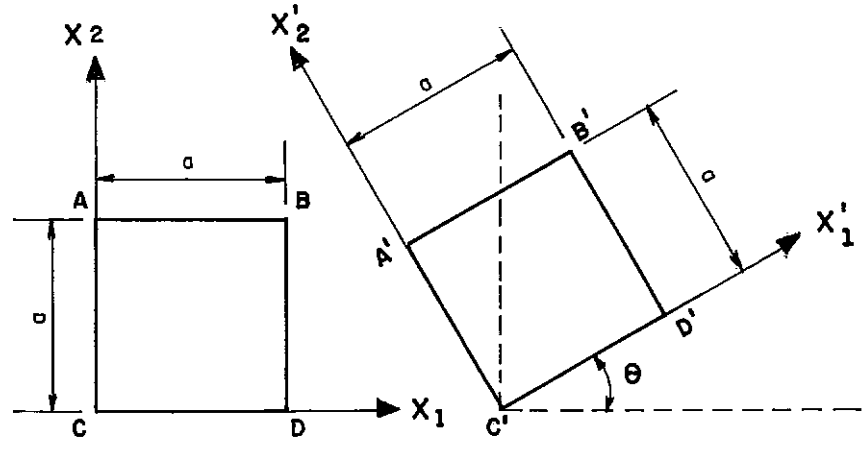


Figura IV.2

Neste caso, as equações (IV.1) assumem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos\theta\, x_1 - \operatorname{sen}\theta\, x_2 \\ y_2 &= \operatorname{sen}\theta\, x_1 + \cos\theta\, x_2 \\ y_3 &= x_3 \end{aligned} \qquad \text{(IV.36)}$$

Utilizando-se as equações (IV.3b), obtém-se o gradiente de deformação:

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.37)}$$

A transformação do sistema de eixos x_i para o sistema x'_i (Figura IV.2) é dada por:

$$\underset{\sim}{x}' = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{x} \qquad \text{(IV.38a)}$$

$$\underset{\sim}{Q} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.38b)}$$

Comparando-se as matrizes das equações (IV.37) e (IV.38b) comprova-se a afirmação anterior de que:

$$\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{F}^{T} \qquad \text{(IV.39)}$$

CAPÍTULO V

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NÃO-LINEARES ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Neste capítulo, são deduzidas as equações do MEF* para problemas não-lineares e são apresentadas algumas estratégias utilizadas para resolvê-las.

Na resolução do problema estrutural não-linear adotou-se como hipótese básica a suposição de que o carregamento da estrutura é feito por partes [44], correspondendo às várias etapas de carga uma sucessão de configurações de equilíbrio,

Ω^0, Ω^1, ..., Ω^N, Ω^{N+1}, ..., Ω^f

onde Ω^0 e Ω^f são os estado inicial e final de deformação, respectivamente, e Ω^N é uma configuração intermediária qualquer. Conhecidas as configurações até a etapa N devem-se ter equações que permitam determinar a configuração N + 1. Isto é viável desde que a configuração N + 1 seja suficientemente próxima da configuração N, permitindo que as equações do problema sejam linearizadas em relação às incógnitas incrementais. Dessa maneira, um problema não-linear é transformado numa série de problemas lineares.

---

* MEF - Métodos dos Elementos Finitos

As equações incrementais do MEF são deduzidas a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais. O movimento da estrutura é descrito tomando-se como referência a configuração da etapa N (ver item (IV.1)). Este tipo de descrição é chamado na literatura [47] de formulação lagrangeana atualizada.

Supõe-se que, mesmo em presença das não-linearidades física e geométrica, as deformações são sempre pequenas quando comparadas com a unidade (ver item (IV.5)).

V.1) EQUAÇÕES INCREMENTAIS

As condições de equilíbrio de um corpo na etapa N + 1, utilizando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais e um referencial lagrangeano atualizado, estão definidas pelas equações (ver item (IV.4)):

$$\int^{N+1} S_{ij}\ \delta\ {}^{N+1}\varepsilon_{ij}\ dV = \delta\ {}^{N+1}W \qquad \text{(V.1a)}$$

Onde,

$$\delta\ {}^{N+1}W = \int^{N+1} t_\ell\ \delta\ u_\ell\ dA + \int^{N+1} b_\ell\ \delta\ u_\ell\ dV \qquad \text{(V.1b)}$$

${}^{N+1}S_{ij}$ - componentes cartesianas do 2º tensor de tensão de Piola-Kirchhoff, na configuração da etapa N + 1.

$\delta\ {}^{N+1}\varepsilon_{ij}$ - variação virtual das componentes cartesianas do tensor de deformação na configuração da etapa N + 1.

$\delta\ {}^{N+1}W$ - trabalho virtual das forças externas na etapa N + 1.

${}^{N+1}t_{\ell}$ - componentes cartesianas das forças de superfície na etapa N + 1.

${}^{N+1}b_{\ell}$ - componentes cartesianas das forças de massa na etapa N + 1.

$\delta\ u_{\ell}$ - variação virtual dos componentes cartesianas do vetor de deslocamentos totais.

Realizando-se uma decomposição incremental das variáveis da equação (V.1a) e usando a equação (IV.10), tem-se:

$$ {}^{N+1}S_{ij} = {}^{N}S_{ij} + \Delta\ S_{ij} \qquad \text{(V.2a)} $$

$$ {}^{N+1}\varepsilon_{ij} = \Delta\ \varepsilon_{ij} \qquad \text{(V.2b)} $$

$$ \Delta\ \varepsilon_{ij} = \Delta\ e_{ij} + \Delta\ n_{ij} \qquad \text{(V.2c)} $$

$$ \delta\ {}^{N+1}\varepsilon_{ij} = \delta\ \Delta\ \varepsilon_{ij} \qquad \text{(V.2d)} $$

$$ \delta\ \Delta\varepsilon_{ij} = \delta\ \Delta\ e_{ij} + \delta\ \Delta\ n_{ij} \qquad \text{(V.2e)} $$

A equação (V.2b) é explicada pelo fato de que a configuração de referência é a configuração da etapa N.

Substituindo as equações (V.2a), (V.2d) e (V.2e) em (V.1a) tem-se:

$$\int [\ \Delta S_{ij}\ \delta\ \Delta e_{ij} + \Delta S_{ij}\ \delta\ \Delta n_{ij} + {}^{N}S_{ij}\ \delta\ \Delta e_{ij} + + {}^{N}S_{ij}\ \delta\ \Delta n_{ij}]\ dV = \delta\ {}^{N+1}W \qquad (V.3)$$

O primeiro passo para linearizar a equação (V.3) é adotar uma equação constitutiva incremental em que os incrementos de tensão dependam apenas das componentes da matriz constitutiva e da parcela linear do tensor de deformação incremental (ver equações (III.29a) e (III.64a)).

$$\Delta S_{ij} = C_{ijk\ell}\ e_{k\ell} \qquad (V.4)$$

Além disso é necessário desprezar-se o segundo termo do lado esquerdo da equação (V.3), que é não-linear em relação aos deslocamentos incrementais. Fazendo esta simplificação e substituindo a equação (V.4) em (V.3), obtém-se:

$$\int [C_{ijk\ell}\ e_{k\ell}\ \delta\ \Delta e_{ij} + {}^{N}S_{ij}\ \delta\ \Delta e_{ij} + + {}^{N}S_{ij}\ \delta\ \Delta n_{ij}]\ dV = \delta\ {}^{N+1}W \qquad (V.5)$$

Os termos da equação (V.5) podem ser reagrupados de forma que apenas aqueles que contêm incógnitas fiquem do lado esquerdo da equação.

$$\int [C_{ijk\ell}\, e_{k\ell}\, \delta\, \Delta e_{ij} + {}^{N}S_{ij}\, \delta\, \Delta n_{ij}]\, dV =$$

$$= \delta\, {}^{N+1}W - \int {}^{N}S_{ij}\, \delta\, \Delta e_{ij}\, dV \qquad (V.6)$$

A equação (V.6) é a equação linearizada que permite que a configuração da etapa de carga N + 1 seja calculada. Os têrmos do lado direito são constantes dentro de cada iteração e os têrmos do lado esquerdo são funções lineares dos delocamentos incrementais que são as incógnitas do problema. Quando discretizada através do MEF, esta equação transforma-se num sistema de equações algébricas lineares muito semelhante aos utilizados para resolver problemas lineares.

Utilizando-se o MEF para discretizar a equação (V.6) tem-se:

$$(\delta\, \Delta \underset{\sim}{u}^{k})^{T}\, (\underset{\sim}{K}_{M}\, \Delta \underset{\sim}{u}^{k} - \underset{\sim}{K}_{G}\, \Delta \underset{\sim}{u}^{k}) =$$

$$= (\delta\, \Delta \underset{\sim}{u}^{k})^{T}\, \underset{\sim}{P} - (\delta\, \Delta \underset{\sim}{u}^{k})^{T}\, \underset{\sim}{k}_{F} \qquad (V.7)$$

Onde,

$$(\delta\ \Delta\underset{\sim}{u}^{k})^{T}\ \underset{\sim}{K}_{M}\ \Delta\underset{\sim}{u}^{k} = \int C_{ijk\ell}\ \Delta e_{k\ell}\ \delta\ \Delta e_{ij}\ dV \qquad (V.8a)$$

$$(\delta\ \Delta\underset{\sim}{u}^{k})^{T}\ \underset{\sim}{K}_{G}\ \Delta\underset{\sim}{u}^{k} = \int N_{S_{ij}}\ \delta\Delta n_{ij}\ dV \qquad (V.8b)$$

$$(\delta\ \Delta\underset{\sim}{u}^{k})^{T}\ \underset{\sim}{P} = \int^{N+1} t_{\ell}\ \delta\ u_{\ell}\ dA + \int^{N+1} b_{\ell}\ \delta\ u_{\ell}\ dV \qquad (V.8c)$$

$$(\delta\ \Delta\underset{\sim}{u}^{k})^{T}\ \underset{\sim}{k}_{F} = \int N_{S_{ij}}\ \delta\Delta e_{ij}\ dV \qquad (V.8d)$$

Simplificando a equação (V.7) tem-se

$$(\underset{\sim}{K}_{M} + \underset{\sim}{K}_{G})\ \Delta\underset{\sim}{u}^{k} = \underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{k}_{F} \qquad (V.9)$$

Onde,

$\underset{\sim}{K}_{M}$ - matriz de rigidez material (elástica ou elasto-plástica) correspondente a iteração k da etapa de carga N + 1.

$\underset{\sim}{K}_{G}$ - matriz de rigidez geométrica correspondente a iteração k da etapa de carga N + 1.

$\Delta\underset{\sim}{u}^{k}$ - vetor de deslocamentos incrementais calculado na iteração k da etapa de carga N + 1.

$\underset{\sim}{P}$ - vetor de cargas aplicado na etapa de carga N + 1.

$^{k}\underset{\sim}{F}$ - vetor de forças internas atualizado na iteração k da etapa de carga N + 1.

A equação (V.9) representa um processo incremental em que para cada incremento (etapa de carga) são realizadas várias iterações. O vetor $\underset{\sim}{P}$ é incrementado ao passar de uma etapa de carga para a outra, porém é mantido constante durante a realização das iterações. A cada iteração é calculado um vetor $\Delta\underset{\sim}{u}^{k}$ que é usado para atualizar o vetor $^{k}\underset{\sim}{F}$. As matrizes $\underset{\sim}{K}_{M}$ e $\underset{\sim}{K}_{G}$ podem ser atualizadas ou não, conforme será visto no item V.2. As iterações são interrompidas quando, de acordo com um critério adequado, o vetor de desequilíbrio $\Delta\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P} - {}^{k}\underset{\sim}{F}$ torna-se suficientemente pequeno.

A realização de iterações é necessária porque, devido às simplificações feitas para linearizar a equação (V.3) e também por causa do acúmulo de pequenos erros numéricos (erros de arredondamento), o vetor $^{k}\underset{\sim}{F}$ raramente consegue anular o vetor $\underset{\sim}{P}$ logo na primeira iteração (k = 1).

A equação (V.9) é válida tanto para a estrutura como um todo quanto para cada um dos elementos. Quando aplicada à estrutura as matrizes $\underset{\sim}{K}_{M}$ e $\underset{\sim}{K}_{G}$ e o vetor $^{k}\underset{\sim}{F}$ são montados a partir das matrizes e vetores correspondentes dos elementos [48]. As matrizes de rigidez e o vetor de forças de cada elemento são calculados através das seguintes equações:

$$\underset{\sim}{K}_M = \int \underset{\sim}{B}_L^T \; \underset{\sim}{C} \; \underset{\sim}{B}_L \; dV \qquad \text{(V.10a)}$$

$$\underset{\sim}{K}_G = \int \underset{\sim}{B}_{NL}^T \; \underset{\sim}{S}_M \; \underset{\sim}{B}_{NL} \; dV \qquad \text{(V.10b)}$$

$$\underset{\sim}{k}_F = {}^{k-1}\underset{\sim}{F} + \Delta\underset{\sim}{F} \qquad \text{(V.10c)}$$

$$\Delta\underset{\sim}{F} = \int \underset{\sim}{B}_L^T \; \underset{\sim}{S}_V \; dV \qquad \text{(V.10d)}$$

O vetor ${}^{k-1}\underset{\sim}{F}$ é o vetor de forças do elemento correspondente a iteração k - 1 da etapa de carga N + 1. As matrizes $\underset{\sim}{B}_L$ e $\underset{\sim}{B}_{NL}$ são montadas a partir das derivadas das funções de interpolação (ver itens (XII.5.3) e (XII.8)). A matriz $\underset{\sim}{S}_M$ contém as componentes do tensor de tensão rearranjadas de uma maneira adequada (ver item (XII.8)). O vetor $\Delta\underset{\sim}{S}_V$ contém as componentes do tensor incremental de tensão (ver item (XII.4)). Finalmente, a matriz $\underset{\sim}{C}$ é a matriz constitutiva, que pode representar um comportamento elástico ou elasto-plástico do material (ver itens (XII.4) e (XIII.7)).

Numa formulação em que a não-linearidade geométrica é considerada, a definição do referencial em relação ao qual as matrizes e vetores do elemento serão definidos (Equações (V.10)) é feita ao escolher-se a configuração de referência para descrição do movimento da estrutura. Na formulação aqui apresentada adotou-se a configuração da etapa N (formulação lagrangeana atualizada) como referência, o que implica na escolha de um sistema de referência local móvel

para definição das matrizes e vetores do elemento. Nos Capítulos IX, XI, XII e XIV utilizou-se um referencial móvel rígido. Ele se desloca a medida em que o elemento sofre deformação, porém os seus eixos se mantêm sempre retos e mutuamente perpendiculares.

Na utilização de um referencial móvel rígido está embutida a hipótese de que a atualização da posição do elemento no espaço pode ser feita considerando-se apenas movimentos de corpo rígido. Supõe-se que na configuração deformada o elemento mudou de posição no espaço porém manteve a mesma métrica da configuração indeformada (inicial). Esta hipótese é uma extensão da hipótese de pequenas deformações (ver item (IV.5)) e está de acordo com o comportamento observado em estruturas metálicas.

A escolha de um referencial lagrangeano atualizado é vantajosa porque as expressões que determinam as matrizes e vetores do elemento em relação ao referencial local móvel são matematicamente mais simples que as expressões correspondentes para um referencial local fixo (formulação lagrangeana total).

Esta maior simplicidade se deve a dois fatores: a proximidade entre as configurações desconhecida e de referência, e a manutenção da métrica inicial do elemento. Na formulação lagrangeana atualizada, como a configuração de referência é a imediatamente anterior à configuração N + 1, apenas os deslocamentos incrementais são incluídos nas expressões matemáticas do tensor de deformação. Os

deslocamentos até a etapa N são considerados ao realizar-se a passagem do sistema local móvel para o local fixo. Como a métrica do elemento não se altera as integrais de volume e de área são realizadas no referencial móvel, porém considerando a área e o volume originais. O mesmo acontece com as derivadas, que são definidas em relação às coordenadas do sistema móvel, porém são determinadas sem maiores complicações, pois a distância entre dois pontos quaisquer do elemento não se altera ao longo do processo incremental.

A formulação lagrangeana atualizada se caracteriza também por trabalhar com um tensor de tensão que é, para efeitos práticos, igual ao tensor de Cauchy. Isto pode ser constatado examinando-se as parcelas do lado direito da equação (V.2a). O tensor ${}^{N}\underset{\sim}{S}$ representa tensões de Cauchy porque o 2º Tensor de Piola-Kirchhoff da etapa N, referido à configuração da etapa N, é o próprio tensor de Cauchy da etapa N [47]. O tensor incremental de tensão $\Delta\underset{\sim}{S}$ é aproximadamente igual ao tensor incremental de Cauchy porque as configurações N e N + 1 são muito próximas.

A equação constitutiva incremental (equação (V.4)) estabelecida ao realizar-se a linearização da equação (V.3), é linear do ponto de vista geométrico. Ela relaciona os incrementos de tensão apenas aos incrementos de deformação lineares, desprezando a contribuição dos incrementos de deformação não-lineares. Esta simplificação não é característica da formulação lagrangeana atualizada

pois é encontrada também em formulações lagrangeanas totais [47].

A utilização da equação (V.4), além de viabilizar a linearização da equação (V.3), tem dois efeitos sobre a formulação do problema. O primeiro e mais óbvio é a perda de precisão por não considerar a contribuição não-linear geométrica para as tensões incrementais. Porém, como são realizadas iterações, a precisão das tensões ao final de cada incremento é garantida. O segundo efeito é a simplificação do procedimento para determinação de tensões. As tensões incrementais são determinadas da mesma maneira que numa análise linear geométrica, tanto com materiais elásticos quanto com materiais elasto-plásticos.

Quando é utilizada uma relação constitutiva elasto-plástica a determinação da matriz constitutiva $\underset{\sim}{C}$ e o vetor de tensão $\Delta\underset{\sim}{S}_V$ é realizada aplicando-se as equações apresentadas nos capítulos III e VI. Isto pode ser feito porque a formulação lagrangeana atualizada descrita nos parágrafos anteriores foi desenvolvida dentro dos limites da hipótese de pequenas deformações [47].

V.2) ESTRATÉGIAS PARA REALIZAÇÃO DE ANÁLISES NÃO-LINEARES

As várias estratégias existentes diferem basicamente em três aspectos: no esquema de aplicação da carga, nos algoritmos para realização de iterações e nos métodos para resolução do sistema de equações incrementais.

Numa análise incremental, em geral, o vetor de cargas é definido através da seguinte equação:

$$\underset{\sim}{P} = f\ \underset{\sim}{P}_o \qquad (V.11)$$

Onde,

f - fator de carga

$\underset{\sim}{P}_o$ - vetor básico de carga

O fator de carga f é uma função escalar que varia de incremento para incremento. O vetor $\underset{\sim}{P}_o$ é constante ao longo de toda a análise. No esquema clássico de aplicação de carga a função f é um dado do problema, devendo estar definida antes de iniciar-se a análise. Em esquemas automáticos [49, 50] o fator de carga é calculado para cada incremento, de acordo com o comportamento que a estrutura apresentar nos incrementos anteriores.

Em análises realizadas com formulações baseadas na equação (V.6), ou em equação similar, a escolha da função (fator) de carga deve ser feita de modo que a hipótese básica usada para linearizar a equação (V.3) seja respeitada. Esta hipótese exige que as configurações N e N + 1 estejam separadas por deslocamentos muito pequenos. Portanto, a carga externa deve ser aplicada em incrementos pequenos, de forma que os deslocamentos incrementais obedeçam a hipótese de pequenos deslocamentos.

Antes de especificar uma função de carga é comum realizar-se uma análise linear para verificar a grandeza dos deslocamentos e das rotações. Com base nestes resultados, escolhe-se então a função. No caso de estruturas com comportamento não-linear complexo podem ser necessárias várias tentativas até que a função carga adequada seja encontrada, mesmo que esteja sendo utilizado um esquema automático de aplicação de carga [51].

A função carga pode ser definida de uma forma mais eficiente quando o programa de elementos finitos dispõe de um procedimento de Salva/Recupera ("Save/Restore"). Este procedimento pode ser implementado de forma a permitir que uma análise seja realizada em várias etapas. No final de cada etapa são gravados todos os resultados e as variáveis necessárias para o prosseguimento da análise. Na etapa seguinte estes resultados são recuperados e, caso haja interesse, todos os parâmetros de controle da análise, inclusive a função carga, são redefinidos. Nas análises apresentadas no Capítulo XV utilizou-se um esquema clássico de aplicação da carga, com a função f sendo redefinida no início de cada etapa do procedimento de Salva/Recupera.

Os algoritmos para realização de iterações estão, em geral, muito associados ao tipo de problema a ser resolvido. Nos sub-itens (V.2.1), (V.2.2) e (V.2.3) são apresentadas algumas opções para, respectivamente, problemas com não-linearidade geométrica apenas, com não-

linearidade física apenas e com as duas não-linearidades juntas.

Uma questão comum a qualquer algoritmo iterativo é a definição do critério de convergência. No sub-item (V.2.4) são apresentados os três critérios mais utilizados em análises estruturais.

A resolução do sistema de equações incrementais (Equação (V.9)) é a única etapa do algoritmo incremental-iterativo para a qual existem métodos "exatos". Esta resolução é feita, sem maiores dificuldades, através de um dos muitos métodos existentes na literatura [48, 52]. As diferentes opções são feitas, em geral, em função das características da matriz de rigidez (banda simétrica, perfil simétrico, não simétrica) e do computador no qual as análises serão realizadas.

V.2.1) Iterações em Análises Não-Lineares Geométricas

Em análises não-lineares geométricas a equação (V.9) assume a seguinte forma:

$$(\underset{\sim}{K}_E + \underset{\sim}{K}_G) \; \Delta\underset{\sim}{u}^{k} = \underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{F}^{k} \qquad \text{(V.12)}$$

Como o material é elástico, a matriz de rigidez material na equação (V.12) passa a ser chamada matriz de rigidez elástica $\underset{\sim}{K}_E$.

Neste tipo de problema existem duas opções clássicas para realização de iterações. A primeira é o MNR (Método de Newton-Raphson), em que a matriz de rigidez $\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{K}_E + \underset{\sim}{K}_G$ é atualizada a cada iteração. A segunda opção é o MNM (Método de Newton-Raphson Modificado) em que a matriz de rigidez $\underset{\sim}{K}$ é atualizada na primeira iteração de cada incremento.

O MNR, em geral, converge em poucas iterações (5 iterações em média), porém pode se tornar computacionalmente ineficiente em problemas com grande quantidade de equações. Nestes casos o gasto para decompor a matriz de rigidez é muito grande, o que faz com que a sua atualização a cada iteração se torne proibitiva.

O MNM tem uma convergência mais lenta que o MNR, porém pode se tornar vantajoso em problemas com grande quantidade de equações, pelos motivos expostos acima.

V.2.2) Iterações em Análises Elasto-Plásticas

Em análises elasto-plásticas a equação (V.9) assume a seguinte forma:

$$\underset{\sim}{K}_M \; \Delta\underset{\sim}{u}^k = \underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{F}^k \qquad \text{(V.13)}$$

Como o problema é linear geométrico na equação (V.13) não existe matriz de rigidez geométrica e não são consideradas mudanças na geometria da estrutura.

A matriz $\underset{\sim}{K}_M$ da estrutura é montada a partir das matrizes $\underset{\sim}{K}_M$ dos elementos [48], que são determinadas através da equação (V.10a), transcrita a seguir:

$$\underset{\sim}{K}_M = \int \underset{\sim}{B}_L^T \, (\underset{\sim}{C})_{ep} \, \underset{\sim}{B}_L \, dV \qquad (V.14)$$

A matriz $\underset{\sim}{B}_L$ relaciona o vetor de deformação incrementais infinitesimais ao vetor de deslocamentos incrementais nodais do elemento [53].

$$(\underset{\sim}{de})_{tot} = \underset{\sim}{B}_L \, \Delta \underset{\sim}{u}^k \qquad (V.15)$$

Em pontos do elemento que já atingiram o domínio plástico, a matriz constitutiva elasto-plástica $(\underset{\sim}{C})_{ep}$ relaciona o vetor de tensões incrementais infinitesimais ao vetor de deformações incrementais infinitesimais [53]:

$$d\underset{\sim}{\sigma} = (\underset{\sim}{C})_{ep} \, (\underset{\sim}{de})_{tot} \qquad (V.16)$$

Após a determinação do vetor $d\underset{\sim}{\sigma}$, a atualização das tensões é feita da seguinte forma:

$$^{k+1}\underset{\sim}{\sigma} = {}^{k}\underset{\sim}{\sigma} + d\underset{\sim}{\sigma} \qquad (V.17)$$

A resolução de um problema elasto-plástico através de uma formulação que obedeça rigorosamente às equações (V.14), (V.15), (V.16) e (V.17) é praticamente impossível, devido ao caráter diferencial (contínuo) da equação (V.16). Esta equação descreve uma relação não-linear entre os incrementos infinitesimais de tensão e deformação. Como a matriz $(\underset{\sim}{C})_{ep}$ é função das componentes do tensor de tensão, qualquer incremento neste tensor provoca uma alteração nos elementos da matriz $(\underset{\sim}{C})_{ep}$ (ver equação (III.64b)).

Além da interpretação matemática, existe também uma interpretação geométrica da equação (V.16). Supondo que está ocorrendo carregamento (ver item III.6)) e o estado de tensão representado por $^{k}\underset{\sim}{\sigma}$ já se encontra sobre a superfície de escoamento ($f(^{k}\underset{\sim}{\sigma}) = 0$), para que o estado de tensão $^{k+1}\underset{\sim}{\sigma}$ continue sobre a superfície de escoamento ($f(^{k+1}\underset{\sim}{\sigma}) = 0$), o vetor $d\underset{\sim}{\sigma}$ precisa ser tangente à superfície em todos os pontos entre $^{k}\underset{\sim}{\sigma}$ e $^{k+1}\underset{\sim}{\sigma}$ (ver equação (III.49b)). Como a tangente à superfície muda de direção continuamente (Figura (V.1)), $(\underset{\sim}{C})_{ep}$ também varia continuamente, o que faz com que seja necessário realizar uma integração matemática da equação (V.16), para determinar-se corretamente o estado de tensão $^{k+1}\underset{\sim}{\sigma}$ quando o vetor de deformações incrementais não é infinitesimal.

Uma implementação simples e direta das equações (V.14) a (V.17) seguiria o algoritmo descrito no quadro (V.1). Apesar de parecer aceitável, esta implementação não é viável do ponto de vista prático porque, para que a equação

(V.16) seja válida, o vetor $(\underset{\sim}{de})_{tot}$ e o vetor $\Delta \underset{\sim}{u}^{k}$ precisam ser infinitamente pequenos.

Para contornar esta dificuldade foram criados algoritmos de integração de tensões no domínio plástico [54], que em geral utilizam formas modificadas das equações (V.16) e (V.17) para realizar a determinação de $^{k+1}\underset{\sim}{\sigma}$ em um processo incremental. Maiores detalhes sobre estes algoritmos serão apresentados no Capítulo VI, onde será realizada uma comparação entre dois deles.

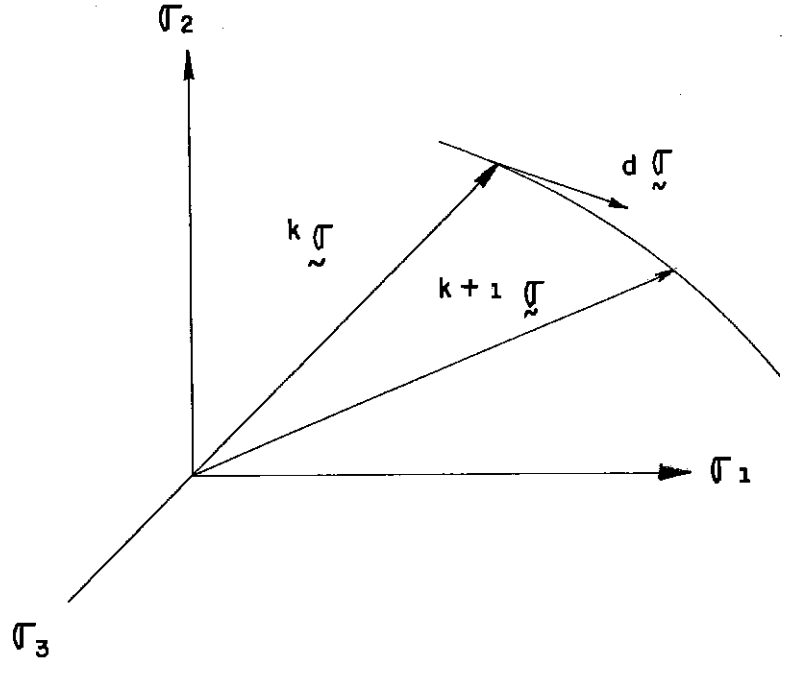


Figura V.1 - Representação geométrica dos estados de tensão $^{k}\underset{\sim}{\sigma}$ e $^{k+1}\underset{\sim}{\sigma}$

QUADRO V.1

1) Estrutura

1.1) Resolve o sistema de equações incrementais

$$\underset{\sim}{K}_M \; \underset{\sim}{\Delta u}^k = \underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{F}^k$$

2) Elemento

2.1) Recebe o vetor de deslocamentos incrementais $\underset{\sim}{\Delta u}^k$

2.2) Determina o vetor de deformações incrementais

$$\left(\underset{\sim}{de} \right)_{tot} = \underset{\sim}{B}_L \; \underset{\sim}{\Delta u}^k$$

2.3) Faz uma primeira estimativa do vetor de tensões da iteração k + 1

$$\underset{\sim}{\sigma}^k \longrightarrow \left(\underset{\sim}{C} \right)_{ep}$$

$$d\underset{\sim}{\sigma} = \left(\underset{\sim}{C} \right)_{ep} \left(\underset{\sim}{de} \right)_{tot}$$

$$\underset{\sim}{\tau}^{k+1} = \underset{\sim}{\sigma}^k + d\underset{\sim}{\sigma}$$

2.4) Faz uma segunda estimativa do vetor de tensões da iteração k + 1

$$\underset{\sim}{\tau}^{k+1} \longrightarrow \left(\underset{\sim}{C} \right)_{ep}$$

$$d\underset{\sim}{\sigma} = \left(\underset{\sim}{C} \right)_{ep} \left(\underset{\sim}{de} \right)_{tot}$$

$$\underset{\sim}{\sigma}^{k+1} = \underset{\sim}{\sigma}^k + d\underset{\sim}{\sigma}$$

2.5) Calcula a matriz de rigidez e atualiza o vetor de forças internas

$$\underset{\sim}{K}_M = \int \underset{\sim}{B}_L^T \left(\underset{\sim}{C} \right)_{ep} \underset{\sim}{B}_L \; dV$$

$$\underset{\sim}{\Delta F} = \int \underset{\sim}{B}_L^T \; d\underset{\sim}{\sigma} \; dV$$

$$\underset{\sim}{F}^{k+1} = \underset{\sim}{F}^k + \underset{\sim}{\Delta F}$$

3) Estrutura

3.1) Resolve o sistema de equações incrementais

$$\underset{\sim}{K}_M \; \underset{\sim}{\Delta u}^{k+1} = \underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{F}^{k+1}$$

Os algoritmos de integração de tensões viabilizaram a realização de análises elasto-plásticas, porém introduziram uma inconsistência na formulação do problema. Em cada ponto do elemento, a matriz constitutiva $(\underset{\sim}{C})_{ep}$ utilizada para calcular a matriz de rigidez $\underset{\sim}{K}_M$ não é a mesma que é utilizada para determinar o vetor de tensões incrementais $d\underset{\sim}{\sigma}$. E não poderia ser de outra forma, pois durante o processo incremental de integração de tensões são usadas várias matrizes $(\underset{\sim}{C})_{ep}$. Apesar de ser praticamente ignorada pela literatura, com excessão do artigo de Simo e Taylor [55], esta inconsistência de formulação é a causa da falta de convergência e de outros problemas numéricos em análises elasto-plásticas relatados na literatura.

O MNR (Método de Newton-Raphson), por exemplo, pode não funcionar bem em análises elasto-plásticas, por causa da variação descontínua da matriz de rigidez da estrutura ao longo das iterações, que compromete a convergência do método [47, 56]. Em cada iteração, a matriz $\underset{\sim}{K}_M$ do elemento é calculada usando, em cada ponto do elemento, a matriz $(\underset{\sim}{C})_{ep}$ correspondente ao último estado de tensões saído do algoritmo de integração de tensões. Como são permitidos incrementos finitos de tensões, as matrizes constitutivas correspondentes aos estados de tensão $^{k}\underset{\sim}{\sigma}$ (iteração k) e $^{k+1}\underset{\sim}{\sigma}$(iteração k + 1) podem ser, dependendo do problema, bem diferentes. Quando o estado de tensão $^{k}\underset{\sim}{\sigma}$ é elástico e o estado de tensão $^{k+1}\underset{\sim}{\sigma}$ torna-se plástico, a diferença entre as matrizes constitutivas das iterações k e k+1 é muito grande, principalmente quando

não existe endurecimento (material elasto-plástico perfeito).

A convergência do MNR é afetada também pela irreversibilidade das deformações plásticas. Durante um processo iterativo, antes que o equilíbrio seja atingido na configuração N + 1, podem ocorrer oscilações na distribuição de tensões da estrutura, com alguns pontos sofrendo carregamento, enquanto outros sofrem descarregamento [57]. Numa análise elasto-plástica isto é problemático porque durante estas oscilações numéricas, o caminho de ida é plástico (carregamento) porém o caminho de volta é elástico (descarregamento). Por causa dos descarregamentos numéricos pode ser criado um ciclo vicioso de carga e descarga que deteriora a solução e leva a divergência. Uma solução para esta dificuldade foi proposta por Nyssen [58], com base na hipótese da reversibilidade incremental, porém o seu bom funcionamento só pode ser garantido no contexto de uma relação tensão-deformação uniaxial [57].

A utilização do MNM (Método de Newton-Raphson Modificado) para realização de iterações evita a variação descontínua da matriz de rigidez porém permanece a possibilidade de ocorrerem descarregamentos numéricos.

O MTI (Método da Tensão Inicial), proposto por Zienkiewicz e outros[59], evita tanto as descontinuidades na variação da matriz de rigidez quanto os descarregamentos numéricos porém, quando a plastificação atinge partes

preponderantes da estrutura, a sua convergência torna-se extremamente lenta. Este método consite em utilizar-se a matriz de rigidez elástica para realizar as iterações em todos os incrementos da análise. A grande vantagem do MTI, além da sua estabilidade numérica, é o pequeno gasto computacional com a decomposição da matriz de rigidez, que é decomposta apenas uma vez no início da análise. No entanto, esta vantagem computacional vai sendo reduzida ao longo da análise, a medida em que a quantidade de iterações em cada incremento vai aumentando com o crescimento das áreas da estrutura atingidas pela plastificação. Em alguns casos de plastificação generalizada, a quantidade de iterações nos últimos incrementos da análise pode chegar a mais de uma centena.

O MTI é numericamente estável porque utiliza nas iterações a rigidez inicial (elástica) da estrutura e não a rigidez real (elasto-plástica). Como a rigidez "numérica" da estrutura é grande e não diminui, como acontece com a rigidez real, a deformação vai se dando lentamente, ao longo do processo iterativo, até que as forças internas, equivalentes às tensões elasto-plásticas, equilibrem as cargas externas.

Durante a fase de implementação do elemento de casca elasto-plástico, apresentado no Capítulo XIII, foram realizadas diversas análises com exemplos-teste, em que foram utilizados o MNR, o MNM e MTI. Em algumas destas análises apenas o MTI foi bem sucedido pelos motivos já expostos nos parágrafos anteriores. Em razão disto foi

realizada uma pesquisa na literatura em busca de outras opções. Como nenhuma das opções encontradas [56,58] foi considerada satisfatória, foi formulado o MTM (Método da Tensão Inicial Modificado) através da introdução de uma modificação na proposta feita por Nyssen [58]. A proposta de Nyssen consiste em realizar a primeira iteração sempre com a matriz de rigidez elástica, utilizando a matriz de rigidez atualizada a partir da segunda iteração. O MTM consiste em realizar "n_I" iterações iniciais com a matriz elástica, passando a utilizar a matriz atualizada a partir da iteração "$n_I + 1$". A quantidade de iterações "n_I" varia de incremento para incremento sendo determinada através da seguinte equação:

$$n_I = \frac{1}{2} n_{ANT} \qquad \text{(V.18a)}$$

Sendo,

$$n_I \geq 5 \qquad \text{(V.18b)}$$

n_I - quantidade de iterações iniciais em que é utilizada a matriz de rigidez elástica da estrutura.

n_{ANT} - quantidade de iterações em que o ciclo iterativo do incremento anterior atingiu a convergência.

O MTM foi formulado com o objetivo de reunir, em um único método, a estabilidade numérica do MTI e a velocidade de convergência do MNR. O MTM é numericamente estável porque nas "n_I" iterações iniciais, quando o vetor de

desequilíbrio $\Delta\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{F}$ está produzindo a parcela maior da deformação da estrutura, a rigidez "numérica" da estrutura é grande, o que faz com que a deformação se dê lentamente, evitando o surgimento dos ciclos viciosos de carga e descarga numéricos. Após as "n_I" iterações iniciais a convergência é acelerada pela matriz de rigidez atualizada, porque neste instante, como o vetor $\Delta\underset{\sim}{P}$ transformou-se num vetor de forças residuais, precisa-se de uma matriz que distribua as forças residuais da maneira mais real possível pela estrutura.

V.2.3) Iterações em Análises Elasto-Plásticas Não-Lineares Geométricas

Em análises elasto-plásticas não-lineares geométricas as equações (V.9), transcritas a seguir, não sofrem nenhuma modificação.

$$(\underset{\sim}{K}_M + \underset{\sim}{K}_G) \; \Delta\underset{\sim}{u}^k = \underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{F}^k \qquad (V.19)$$

Dos quatro métodos apresentados nos sub-itens (V.2.1) e (V.2.2) apenas o MNR (Método de Newton-Raphson) e o MNM (Método de Newton-Raphson Modificado) podem ser aplicados sem adaptação prévia em análises elasto-plásticas não lineares geométricas mesmo assim estão ambos sujeitos a sofrerem instabilidade numérica provocada pela elasto - plasticidade. O MTI (Método da Tensão Inicial) apesar de funcionar bem com a elasto-plasticidade, não

converge por falta da matriz geométrica e pela não consideração na matriz de rigidez elástica dos efeitos da mudança de geometria. O MTM (Método da Tensão Inicial Modificado) possui nas suas "n_I " iterações iniciais os mesmos defeitos do MTI, com a agravante de que na iteração "$n_I + 1$" ocorre uma mudança brusca na rigidez "numérica" da estrutura com a inclusão da matriz geométrica e dos efeitos da mudança de geometria.

O MTM pode funcionar bem desde que seja realizada uma pequena modificação nas rotinas de elemento. A modificação consiste em fazer com que, nas "n_I " iterações iniciais, a matriz de rigidez $\underset{\sim}{K}_M$ do elemento, referida ao sistema local móvel, seja sempre a matriz elástica, sendo considerados efeitos plásticos apenas a partir da iteração "$n_I + 1$". A matriz de rigidez geométrica e os efeitos da mudança de geometria devem ser considerados em todas as iterações.

O MNM também passa a funcionar bem com uma modificação semelhante a realizada no MTM. A modificação consiste em fazer com que, na primeira iteração, a matriz de rigidez $\underset{\sim}{K}_M$ do elemento, referida ao sistema local móvel, seja sempre a matriz elástica. A matriz de rigidez geométrica e os efeitos da mudança de geometria devem ser considerados na primeira iteração também. A matriz de rigidez da estrutura continua sendo atualizada e decomposta apenas na primeira iteração. Todas as outras iterações devem ser realizadas com a matriz de rigidez da estrutura mantida constante.

V.2.4) Critérios de Convergência

O critério de convergência mais direto é o critério de força que verifica, em cada iteração, se o vetor de desequilíbrio $\Delta\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{F}$ está ou não suficientemente pequeno.

A convergência pode também ser testada de uma maneira indireta verificando-se, em cada iteração, se o vetor de deslocamentos incrementais $\Delta\underset{\sim}{u}^k$ está ou não suficientemente pequeno. Um critério deste tipo é chamado de critério de deslocamento.

Em geral, o critério de força funciona melhor na análise de estruturas que sofrem enrijecimento, e o critério de deslocamento na análise de estruturas que perdem rigidez.

Os critérios de força e deslocamento utilizados nas análises apresentadas no Capítulo XV foram definidos da seguinte forma:

$$\frac{\| \Delta\underset{\sim}{P}^k \|}{\| \Delta\underset{\sim}{P}^1 \|} \leq \psi_F \qquad (V.20)$$

$$\frac{\| \Delta\underset{\sim}{u}^k \|}{\| \Delta\underset{\sim}{u}^1 \|} \leq \psi_D \qquad (V.21)$$

Onde,

$\Delta \underset{\sim}{P}^{k}$ - vetor de desequilíbrio da iteração k.

$\Delta \underset{\sim}{P}^{1}$ - vetor de desequilíbrio da iteração 1.

$\Delta \underset{\sim}{u}^{k}$ - vetor de deslocamentos incrementais da iteração k.

$\Delta \underset{\sim}{u}^{1}$ - vetor de deslocamentos incrementais da iteração 1.

ψ_F - tolerância do critério de força .

ψ_D - tolerância do critério de deslocamento.

$\| \underset{\sim}{a} \|$ - norma euclidèana do vetor $\underset{\sim}{a}$.

$$\| \underset{\sim}{a} \| = \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i)^2 \right]^{1/2} \qquad (V.22)$$

Uma outra versão da equação (V.21), transcrita a seguir, é muito utilizada.

$$\frac{\| \Delta \underset{\sim}{u}^{k} \|}{\| {}^{N+1}\underset{\sim}{u}^{k} \|} \leq \psi_D \qquad (V.23a)$$

Onde,

$${}^{N+1}\underset{\sim}{u}^{k} = {}^{N+1}\underset{\sim}{u}^{0} + \Sigma \Delta \underset{\sim}{u}^{k} \qquad (V.23b)$$

${}^{N+1}\underset{\sim}{u}^{k}$ - vetor de deslocamentos totais na iteração k da etapa N + 1.

${}^{N+1}\underset{\sim}{u}^{0}$ - vetor de deslocamentos totais no início da etapa N + 1.

O critério de deslocamento na versão da equação (V.23a) tem o inconveniente de ir se tornando mais tolerante a medida em que a análise avança, pois a norma euclideana de $^{N+1}\underset{\sim}{u}^{k}$ é maior nos incrementos finais da análise do que nas primeiras etapas de carga.

Quando os vetores $\Delta\underset{\sim}{P}$ e $\Delta\underset{\sim}{u}^{k}$ misturam, respectivamente, forças e momentos, e translações e rotações as equações (V.20) e (V.21) tornam-se dimensionalmente inconsistentes. A influência que estas inconsistências exercem na eficiência do teste de convergência é, em geral, pouco significativa. Porém, em algum caso particular, o critério pode interromper as iterações sem que tenha havido realmente convergência, ou vice-versa. Uma solução parcial para este problema consiste em fornecer como dado do problema um parâmetro chamado de translação característica, que é usado para uniformizar dimensionalmente os vetores $\Delta\underset{\sim}{P}$ e $\Delta\underset{\sim}{u}^{k}$, antes da determinação das normas euclideanas. Fazendo com que este parâmetro multiplique as rotações e divida os momentos, todos os elementos dos vetores $\Delta\underset{\sim}{u}^{k}$ e $\Delta\underset{\sim}{P}$ passam a ter, respectivamente, dimensões de comprimento e de força.

A translação característica deve ser vista como mais um recurso numérico, que pode ou não funcionar bem. A melhor solução para evitar inconsistências dimensionais é a utilização de um critério de energia [60]. O critério de energia utilizado nas análises apresentadas no Capítulo

XV foi definido da seguinte forma:

$$\frac{\Delta E^k}{\Delta E^1} \leq \psi \qquad \text{(V.24a)}$$

Onde,

$$\Delta E^k = (\Delta \underset{\sim}{u}^k)^T \Delta \underset{\sim}{P}^k \qquad \text{(V.24b)}$$

$$\Delta E^1 = (\Delta \underset{\sim}{u}^1)^T \Delta \underset{\sim}{P}^1 \qquad \text{(V.24c)}$$

ΔE^k - trabalho realizado pelo vetor $\Delta \underset{\sim}{P}$ na iteração k.

ΔE^1 - trabalho realizado pelo vetor $\Delta \underset{\sim}{P}$ na iteração 1.

ψ_E - tolerância do critério de energia.

O critério de energia, apesar de não conter inconsistências dimensionais, pode se mostrar muito tolerante em situações extremas, em que um dos vetores, $\Delta \underset{\sim}{P}$ ou $\Delta \underset{\sim}{u}^k$, diminui rapidamente enquanto o outro cai lentamente. Portanto, este critério de convergência também não funciona bem em todos os casos.

Como não existem regras que apontem, a priori, qual o critério de convergência mais adequado para uma dada análise, a implementação computacional dos critérios descritos acima, deve ser feita de forma a permitir que eles possam ser usados simultaneamente, aos pares ou isoladamente.

As tolerâncias ψ_F, ψ_D e ψ_E são números reais, positivos e menores ou iguais a unidade. A escolha de uma tolerância igual à unidade corresponde, nas equações (V.20), (V.21) e (V.24a), a forçar a convergência na primeira iteração. Para escolha dos valores das tolerâncias não existem regras absolutas. Admite-se no entanto que uma boa aproximação inicial pode ser obtida fazendo-se:

$$\psi_F = 0.1 \qquad \text{(V.25a)}$$

$$\psi_D = 0.001 \qquad \text{(V.25b)}$$

$$\psi_E = 0.0001 \qquad \text{(V.25c)}$$

CAPÍTULO VI

ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO DE TENSÕES NO DOMÍNIO PLÁSTICO

Neste capítulo é feita uma comparação entre dois algoritmos de integração de tensões, ambos baseados no método de Euler. O primeiro é um algoritmo incremental em que a quantidade de sub-incrementos é determinada através de uma equação empírica [53]. O segundo algoritmo é incremental também, porém determina a quantidade de sub-incrementos através de um critério de minimização de erro [61].

Os algoritmos de integração de tensões no domínio plástico são métodos de integração numérica, utilizados para determinar em pontos específicos do elemento, o estado de tensão da iteração k+1, conhecidos o estado de tensão da iteração k e o incremento total de deformação ocorrida de uma iteração para outra. Estes algoritmos são há muito tempo [54] utilizados no Método dos Elementos Finitos, com o objetivo de evitar restrições severas no tamanbo das deformações incrementais e dos deslocamentos incrementais (ver item (V.2.2)).

As equações aqui apresentadas são válidas para estruturas que obedeçam à hipótese de pequenas deformações, porém por uma questão de simplicidade considerou-se que a hipótese de pequenos deslocamentos (ver item (IV.5)) também está sendo obedecida.

Neste capítulo as variáveis incrementais precedidas pelo símbolo "d" estarão representando incrementos infinitesimais enquanto que as variáveis precedidas pelo símbolo "Δ" estarão representando incrementos finitos.

VI.1) RELAÇÕES TENSÃO-DEFORMAÇÃO NO DOMÍNIO PLÁSTICO

O critério de escoamento para um material elasto-plástico perfeito é definido pela seguinte equação [53].

$$f\ (\ \sigma_{ij}\ ) = \bar{\sigma} - \sigma_y = 0 \qquad \text{(VI.1)}$$

Onde,

f - função escalar dos componentes do tensor de tensão

$\bar{\sigma}$ - tensão efetiva

σ_y - tensão de escoamento do material

O vetor de deformações incrementais infinitesimais do elemento pode ser desmembrado em duas parcelas:

$$(\ d\underset{\sim}{e}\ )_{tot} = (\ d\underset{\sim}{e}\ )_e + (\ d\underset{\sim}{e}\ )_p \qquad \text{(VI.2)}$$

Onde,

$(\ d\underset{\sim}{e})_e$ - parcela elástica do vetor de deformações incrementais infinitesimais

$(\underset{\sim}{de})_p$ - parcela plástica do vetor de deformações incrementais infinitesimais

Adotando uma regra de escoamento associada (ver item (III.7)) o vetor $(\underset{\sim}{de})_p$ é dado por:

$$(\underset{\sim}{de})_p = d\lambda \ \underset{\sim}{a} \qquad \text{(VI.3a)}$$

Onde

$$\underset{\sim}{a} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \qquad \text{(VI.3b)}$$

$\underset{\sim}{a}$ - vetor de escoamento.

Após a realização da iteração k o vetor $(\underset{\sim}{de})_{tot}$ é determinado da seguinte forma:

$$(\underset{\sim}{de})_{tot} = \underset{\sim}{B}_L \ \Delta \underset{\sim}{u}^k \qquad \text{(VI.4)}$$

Onde,

$\underset{\sim}{B}_L$ - matriz constituída pelas derivadas das funções de interpolação

$\Delta \underset{\sim}{u}^k$ - vetor de deslocamentos incrementais do elemento determinado na iteração k.

Isolando-se o vetor $(\underset{\sim}{de})_e$ na equação (VI.2) tem-se:

$$(\underset{\sim}{de})_e = (\underset{\sim}{de})_{tot} - (\underset{\sim}{de})_p \qquad \text{(VI.5)}$$

O vetor de tensões incrementais infinitesimais é determinado através da seguinte equação:

$$d\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{C} (\underset{\sim}{de})_e \qquad \text{(VI.6)}$$

Onde,

$\underset{\sim}{C}$ - matriz constitutiva elástica.

Substituindo a equação (VI.5) em (VI.6) tem-se:

$$d\underset{\sim}{\sigma} = (d\underset{\sim}{\sigma})_{est} - d\lambda \ \underset{\sim}{C} \ \underset{\sim}{a} \qquad \text{(VI.7a)}$$

Onde,

$$(d\underset{\sim}{\sigma})_{est} = \underset{\sim}{C} (\underset{\sim}{de})_{tot} \qquad \text{(VI.7b)}$$

$(d\underset{\sim}{\sigma})_{est}$ - estimativa elástica do vetor de tensões incrementais infinitesimais

A variável $d\lambda$ é determinada substituindo-se a equação (VI.7a) na forma vetorial da equação (III.49b)

$$d\lambda = \frac{\underset{\sim}{a}^T (d\underset{\sim}{\sigma})_{est}}{a^T \ \underset{\sim}{C} \ \underset{\sim}{a}} \qquad \text{(VI.8)}$$

Substituindo a equação (VI.7b) e (VI.8) em (VI.7a) obtém-se:

$$d\underset{\sim}{\sigma} = \left(\underset{\sim}{C} \right)_{ep} \left(d\underset{\sim}{e} \right)_{tot} \qquad \text{(VI.9a)}$$

Onde,

$$\left(\underset{\sim}{C} \right)_{ep} = \underset{\sim}{C} - \frac{\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{a}^{T}\,\underset{\sim}{C}}{\underset{\sim}{a}^{T}\,\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{a}} \qquad \text{(VI.9b)}$$

$\left(\underset{\sim}{C} \right)_{ep}$ - matriz constitutiva elastoplástica

As tensões da iteração k+1, em um ponto qualquer do elemento, são dadas por:

$$^{k+1}\underset{\sim}{\sigma} = {}^{k}\underset{\sim}{\sigma} + d\underset{\sim}{\sigma} \qquad \text{(VI.10)}$$

Onde,

$^{k+1}\underset{\sim}{\sigma}$ - vetor de tensões da iteração k+1

$^{k}\underset{\sim}{\sigma}$ - vetor de tensões da iteração k

VI.2) MÉTODOS BÁSICOS PARA INTEGRAÇÃO DE TENSÕES

Os métodos básicos para integração de tensões são variações do conhecido método de Euler para resolução numérica de equações diferencias [62 , 63].

Para a equação diferencial,

$$\frac{dy}{dx} = g(x,y) \qquad \text{(VI.11a)}$$

com condições iniciais,

$$y = y_0 \quad \text{em} \quad x = x_0 \tag{VI.11b}$$

o método de Euler fornece o seguinte valor (aproximado) para y em $x_1 = x_0 + \Delta x$,

$$y(x_1) = y_0 + \Delta y \tag{VI.12a}$$

onde,

$$\Delta y \cong dy = y'(x_0)\,\Delta x \tag{VI.12b}$$

O valor da derivada $y'(x_0)$ é dado pela própria equação (VI.11a):

$$y'(x_0) = g(x_0, y_0) \tag{VI.13}$$

Substituindo a equação (VI.13) em (VI.12b) tem-se:

$$\Delta y = g(x_0, y_0)\,\Delta x \tag{VI.14}$$

Determinado o valor de Δy retorna-se à equação (VI.12a) e determina-se $y(x_1)$.

Na literatura a respeito de algoritmos para integração de tensões, freqüentemente, são mencionadas as versões explícita e implícita do método de Euler [57, 58 ,64]. A versão explícita, ou incremental, é a que se encontra descrita nas equações (VI.10) e (VI.9a), em que a matriz

$(\underset{\sim}{C})_{ep}$, utilizada para determinar $d\underset{\sim}{\sigma}$, é avaliada com as tensões ${}^{k}\underset{\sim}{\sigma}$. A versão implícita, ou iterativa, é a que foi descrita no quadro V.1, em que a matriz $(\underset{\sim}{C})_{ep}$, utilizada para determinar $d\underset{\sim}{\sigma}$, é avaliada com uma estimativa das tensões ${}^{k+1}\underset{\sim}{\sigma}$. No quadro V.1 foram realizadas apenas duas iterações, porém poderiam ter sido realizadas várias iterações que seriam interrompidas apenas depois que um critério de convergência tivesse sido satisfeito.

Para incrementos finitos de deformação tanto a versão explícita quanto a versão implícita do método básico de Euler não fornecem bons resultados [65 , 66 , 67]. Porém, quando utilizadas dentro de um algoritmo incremental, a precisão de ambas torna-se bastante satisfatória. Estes algoritmos dividem o incremento de deformação em vários sub-incrementos e aplicam em cada um dos sub-incrementos o método básico de Euler.

VI.3) DETERMINAÇÃO DO PONTO DE CONTACTO COM A SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO

Na iteração k nos pontos do elemento que se encontram no domínio elástico, tem-se:

$$f\left({}^{k}\sigma \right) = f_a < 0 \qquad \text{(VI.15a)}$$

sendo

$$f_a = \bar{\sigma}_a - \sigma_y \qquad \text{(VI.15b)}$$

Após a realização da iteração k o vetor de deformações incrementais $(\Delta \underset{\sim}{e})_{tot}$, em um ponto qualquer do elemento, é determinado através da equação (VI.4). Conhecendo-se $(\Delta \underset{\sim}{e})_{tot}$ determina-se uma estimativa elástica — $(\Delta \underset{\sim}{\sigma})_{est}$ — para o vetor de tensões incrementais através da equação (VI.7b). Com o vetor $(\Delta \underset{\sim}{\sigma})_{est}$ determina-se uma estimativa para o vetor de tensões da iteração k+1 através da seguinte equação:

$$^{k+1}\underset{\sim}{\tau} = {}^{k}\underset{\sim}{\sigma} + (\Delta \underset{\sim}{\sigma})_{est} \qquad \text{(VI.16)}$$

Para um ponto que se encontrava no domínio elástico na iteração k existem duas opções na iteração k+1: continuar no domínio elástico ou entrar no domínio plástico. Quando o ponto continua no domínio elástico as tensões $^{k+1}\underset{\sim}{\tau}$ da equação (VI.16) representam as tensões definitivas, ou seja,

$$^{k+1}\underset{\sim}{\sigma} = {}^{k+1}\underset{\sim}{\tau} \qquad \text{(VI.17)}$$

Quando o ponto entra no domínio plástico tem-se

$$f ({}^{k+1}\underset{\sim}{\tau}) = f_b > 0 \qquad \text{(VI.18a)}$$

sendo

$$f_b = \bar{\sigma}_b - \sigma_y \qquad \text{(VI.18b)}$$

A equação (VI.18a) indica que o estado de tensão representado por $^{k+1}\underset{\sim}{\tau}$ violou o critério de escoamento, sendo necessário por isso uma reavaliação do vetor de tensões in-

crementais. Precisa-se no entanto determinar a parcela do vetor $(\Delta \underset{\sim}{\sigma})_{est}$ que leva o estado de tensão a se deslocar, no espaço de tensões, do ponto "a" (iteração k) até o ponto "c" de contacto com a superfície de escoamento.

Como o ponto "c" encontra-se sobre a superfície de escoamento deve-se ter:

$$f (\underset{\sim}{\sigma}_c) = 0 \qquad \text{(VI.19a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{\sigma}_c = {}^{k}\underset{\sim}{\sigma} + \alpha (\Delta \underset{\sim}{\sigma})_{est} \qquad \text{(VI.19b)}$$

$$0 < \alpha < 1$$

Uma estimativa para o valor do escalar α pode ser obtida através da seguinte equação [61]:

$$\alpha = \frac{f_a}{f_a - f_b} \qquad \text{(VI.20a)}$$

ou

$$\alpha = \frac{\bar{\sigma}_a - \sigma_y}{\bar{\sigma}_a - \bar{\sigma}_b} \qquad \text{(VI.20b)}$$

Na literatura também é usual [53 , 68] escrever a equação (VI.19b) da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{\sigma}_c = {}^{k}\underset{\sim}{\sigma} + (1 - r) (\Delta \underset{\sim}{\sigma})_{est} \qquad \text{(VI.21a)}$$

Onde,

$$r = \frac{f_b}{f_b - f_a} \qquad \text{(VI.21b)}$$

ou

$$r = \frac{\bar{\sigma}_b - \sigma_y}{\bar{\sigma}_b - \bar{\sigma}_a} \qquad \text{(VI.21c)}$$

Nas equações (VI.20a) e (VI.21b) α e r foram, respectivamente, determinados através de interpolações lineares. Quando f não é uma função linear das tensões, um valor mais preciso pode ser obtido para α, através de procedimentos iterativos.

A utilização do método de Newton-Raphson para determinar o valor de α foi proposta por Sloan [61]. Neste procedimento o vetor de tensões $\underset{\sim}{\sigma}_c$ e α são calculados da seguinte forma:

$$^{j}\underset{\sim}{\sigma} = {}^{j-1}\underset{\sim}{\sigma} + \alpha_j \left(\Delta\underset{\sim}{\sigma} \right)_{est} \qquad \text{(VI.22a)}$$

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f\left(^{j}\underset{\sim}{\sigma}\right)}{^{j}\underset{\sim}{a}^{T} \left(\Delta\underset{\sim}{\sigma} \right)_{est}} \qquad \text{(VI.22b)}$$

O vetor $^{j}\underset{\sim}{a}$ da equação (VI.22b) é determinado através da equação (VI.3b) no ponto correspondente a $^{j}\underset{\sim}{\sigma}$. Na primeira iteração (j=1), tem-se:

$$^{1}\underset{\sim}{\sigma} = {}^{0}\underset{\sim}{\sigma} + \alpha_1 \left(\Delta\underset{\sim}{\sigma} \right)_{est} \qquad \text{(VI.23a)}$$

Onde,

$$^{0}\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma}_a \qquad \text{(VI.23b)}$$

$$\alpha_1 = \frac{f_a}{f_a - f_b} \qquad \text{(VI.23c)}$$

Para encerramento do ciclo iterativo descrito pelas equações (VI.22a) e (VI.22b), Sloan [61] propõe o seguinte critério:

$$\frac{\| {}^{j+1}\underset{\sim}{\sigma} - {}^{j}\underset{\sim}{\sigma} \|}{\| {}^{j}\underset{\sim}{\sigma} \|} \leq \text{tol} \qquad \text{(VI.24)}$$

Onde,

$\| \underset{\sim}{v} \|$ - norma euclideana do vetor $\underset{\sim}{v}$

tol - número real, positivo e menor que a unidade

VI.4) ALGORITMO DE EULER EXPLÍCITO COM CORREÇÃO DE TENSÕES

A passagem do domínio elástico para o domínio plástico, em um ponto qualquer do elemento, é feita em duas etapas. A primeira etapa é elástica e termina quando o estado de tensão no ponto alcança a superfície de escoamento. A segunda etapa é elasto-plástica e consiste em forçar o estado de tensão no ponto a percorrer a superfície de escoamento, até que o incremento de tensão correspondente à parcela elástica do incremento de deformação tenha sido relaxado .

Como foi visto no item (VI.3) uma parcela do vetor $(\Delta\underset{\sim}{\sigma})_{est}$ é usada para que o estado de tensão no ponto se desloque até a superfície de escoamento. A parcela excedente é dada por:

$$(\Delta\underset{\sim}{\sigma})_{exc} = \underset{\sim}{C} \; \Delta\underset{\sim}{\varepsilon} \qquad \text{(VI.25a)}$$

Onde,

$$\Delta\underset{\sim}{\varepsilon} = (1 - \alpha) \; (\Delta\underset{\sim}{e})_{tot} \qquad \text{(VI.25b)}$$

$\Delta\underset{\sim}{\varepsilon}$ - vetor de deformação incremental excedente

Substituindo a equação (VI.7a) em (VI.10) e fazendo algumas adaptações tem-se:

$$^{k+1}\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma}_c + (\Delta\underset{\sim}{\sigma})_{exc} - d\lambda \; \underset{\sim}{C} \; \underset{\sim}{a} \qquad \text{(VI.26)}$$

A equação (VI.26) representa uma aplicação direta do método básico de Euler na sua versão explícita. Porém, como o incremento de deformação $\Delta\underset{\sim}{\varepsilon}$ não é necessariamente infinitesimal, o estado de tensão determinado usando esta equação pode estar muito distante da superfície de escoamento. Para contornar esta dificuldade a equação (VI.26) passou a ser utilizada [54] dentro de um processo incremental. O vetor de deformação incremental $\Delta\underset{\sim}{\varepsilon}$ é dividido em "m" sub-incrementos iguais e o vetor de tensões vai sendo atualizado através da seguinte equação:

$$^{j}\underset{\sim}{\sigma} = {}^{j-1}\underset{\sim}{\sigma} + \Delta\underset{\sim}{\sigma} - d\lambda \; \underset{\sim}{C} \; {}^{j-1}\underset{\sim}{a} \qquad \text{(VI.27a)}$$

Onde,

$$\Delta\underset{\sim}{\sigma} = \Delta t \; \underset{\sim}{C} \; \Delta\underset{\sim}{\varepsilon} \qquad \text{(VI.27b)}$$

$$\Delta t = \frac{1}{m} \qquad \text{(VI.27c)}$$

$$d\lambda = \frac{{}^{j-1}\underset{\sim}{a}^{T} \; \Delta\underset{\sim}{\sigma}}{{}^{j-1}\underset{\sim}{a}^{T} \; \underset{\sim}{C} \; {}^{j-1}\underset{\sim}{a}} \qquad \text{(VI.27d)}$$

O vetor ${}^{j-1}\underset{\sim}{a}$ das equações (VI.27a) e (VI.27d) é determinado através da equação (VI.36) no ponto correspondente a ${}^{j-1}\underset{\sim}{\sigma}$. No primeiro sub-incremento (j=1) ${}^{0}\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma}_{c}$. No último sub-incremento (j=m) ${}^{m}\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma}_{f}$.

De acordo com Owen e Hinton [53] a quantidade de sub-incrementos pode ser determinada através da seguinte equação empírica:

$$m = \frac{(\bar{\sigma}_{b} - \sigma_{y})}{\sigma_{y}} \; 8 + 1 \qquad \text{(VI.28)}$$

Como "m" é um número inteiro as casas decimais obtidas nos cálculos da equação (VI.28) são desprezadas.

O estado de tensão determinado pelo processo incremental da equação (VI.27a), em geral, encontra-se ligeiramente fora da superfície de escoamento, isto é:

$$f (\underset{\sim}{\sigma}_{f}) = \bar{\sigma}_{f} - \sigma_{y} > 0 \qquad \text{(VI.29)}$$

Isto ocorre porque o algoritmo foi formulado com o ob-

jetivo de evitar que o estado de tensão se distancie muito da superfície de escoamento, e não para garantir que esteja sempre sobre esta superfície.

De acordo com Owen e Hinton [53] o estado de tensão é levado de volta à superfície de escoamento reduzindo-se proporcionalmente todos os elementos do vetor de tensões $\underset{\sim}{\sigma}_f$, de acordo com a seguinte equação:

$$^{k+1}\underset{\sim}{\sigma} = \frac{\sigma_y}{\bar{\sigma}_f}\ \underset{\sim}{\sigma}_f \qquad \text{(VI.30)}$$

VI.5) ALGORITMO DE EULER SEMI-IMPLÍCITO COM CONTROLE DE ERRO

O AEE (algoritmo de Euler semi-implícito com controle de erro) foi proposto por Sloan [61] com o objetivo de corrigir algumas deficiências do AET (algoritmo de Euler explícito com correção de tensões).

No AEE o vetor de deformação incremental $\Delta\underset{\sim}{\varepsilon}$ (Equação VI.25b) é dividido em sub-incrementos cujo tamanho é determinado em função da estimativa do erro cometido no próprio sub-incremento. Não é necessária portanto a determinação *a priori* de uma quantidade "m" de sub-incrementos.

No início do sub-incremento j determina-se uma estimativa para o vetor de tensões através da seguinte equação:

$$^{j}\underset{\sim}{\tau} = {}^{j-1}\underset{\sim}{\sigma} + \Delta\underset{\sim}{\sigma}_1 \qquad \text{(VI.31a)}$$

Onde,

$$\Delta\underset{\sim}{\sigma}_1 = \Delta\underset{\sim}{\sigma}^j - d\lambda_1 \underset{\sim}{C}\ \underset{\sim}{a}_1 \qquad \text{(VI.31b)}$$

$$\Delta\underset{\sim}{\sigma}^j = \Delta t_j\ C\ \Delta\underset{\sim}{\varepsilon} \qquad \text{(VI.31c)}$$

$$d\lambda_1 = \frac{\underset{\sim}{a}_1^T\ \Delta\underset{\sim}{\sigma}^j}{\underset{\sim}{a}_1^T\ \underset{\sim}{C}\ \underset{\sim}{a}_1} \qquad \text{(VI.31d)}$$

$\Delta\underset{\sim}{\sigma}_1$ - vetor de tensões incrementais do sub-incremento j determinado pelo método de Euler explícito

Δt_j - intervalo de tempo que define o tamanho do sub-incremento

O vetor $\underset{\sim}{a}_1$ das equações (VI.31b) e (VI.31d) é determinado através da equação (VI.3b) no ponto correspondente a $^{j-1}\underset{\sim}{\sigma}$. O intervalo de tempo Δt_j é um número maior que zero e menor ou igual à unidade. Neste caso, a palavra "tempo" é apenas uma medida incremental pois as equações constitutivas do material não variam com o tempo.

Com o vetor $^j\underset{\sim}{T}$, que corresponde ao estado de tensão do sub-incremento j determinado pelo método de Euler explícito, determina-se um novo vetor de tensões incrementais.

$$\Delta\underset{\sim}{\sigma}_2 = \Delta\underset{\sim}{\sigma}^j - d\lambda_2\ \underset{\sim}{C}\ \underset{\sim}{a}_2 \qquad \text{(VI.32a)}$$

Onde,

$$d\lambda_2 = \frac{\underset{\sim}{a}_2^T\ \Delta\underset{\sim}{\sigma}^j}{\underset{\sim}{a}_2^T\ \underset{\sim}{C}\ \underset{\sim}{a}_2} \qquad \text{(VI.32b)}$$

$\Delta\underset{\sim}{\sigma}_2$ - vetor de tensões incrementais do sub-incremento j determinado pelo método de Euler implícito

O vetor $\underset{\sim}{a}_2$ das equações (VI.32a) e (VI.32b) é determinado através da equação (VI.3b) no ponto correspondente a $^{j}\underset{\sim}{\tau}$.

O vetor $^{j}\underset{\sim}{\sigma}$ correspondente ao estado de tensão do sub-incremento j é determinado pela seguinte equação:

$$^{j}\underset{\sim}{\sigma} = {}^{j-1}\underset{\sim}{\sigma} + \frac{1}{2}\left(\Delta\underset{\sim}{\sigma}_1 + \Delta\underset{\sim}{\sigma}_2 \right) \qquad \text{(VI.33)}$$

A equação (VI.33) representa uma aplicação conjunta das versões explícita e implícita do método básico de Euler, por isso está sendo chamada de versão semi-implícita.

No início do primeiro sub-incremento (j=1) $^{0}\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma}_C$ e $\Delta t_1 = 1.0$. No final de cada sub-incremento o erro cometido é estimado através da seguinte equação:

$$E_j = \frac{\| \Delta\underset{\sim}{\tau}_j \|}{\| {}^{j}\sigma \|} \qquad \text{(VI.34a)}$$

$$E_j \geq 10^{-14} \qquad \text{(VI.34b)}$$

Onde,

$$\Delta\underset{\sim}{\tau}_j = \frac{1}{2}\left(-\Delta\underset{\sim}{\sigma}_1 + \Delta\underset{\sim}{\sigma}_2 \right) \qquad \text{(VI.34c)}$$

Um sub-incremento só é aceito quando:

$$E_j \leq tol \qquad (VI.35)$$

Onde,

tol - número real, positivo e menor que a unidade

Quando a condição expressa pela inequação (VI.35) não é satisfeita, calcula-se um novo intervalo de tempo Δt_j da seguinte forma:

$$\Delta t_j = q \left(\Delta t_j \right)_{ant} \qquad (VI.36a)$$

Onde,

$$q = 0.8 \left[\frac{tol}{E_j} \right]^{1/2} \qquad (VI.36b)$$

$$q \geq 0.1 \qquad (VI.36c)$$

$\left(\Delta t_j \right)_{ant}$ - intervalo de tempo da tentativa anterior no sub-incremento j

Quando a condição expressa pela inequação (VI.35) é satisfeita, passa-se para o próximo sub-incremento, voltando-se à equação (VI.31a). Antes do início do novo sub-incremento as variáveis são atualizadas da seguinte forma:

$$^{j-1}\underset{\sim}{\sigma} = \left(^{j}\underset{\sim}{\sigma} \right)_{ant} \qquad (VI.37a)$$

$$^{j}t = ^{j-1}t + \left(\Delta t_j \right)_{ant} \qquad (VI.37b)$$

$$\Delta t_j = p \left(\Delta t_j \right)_{ant} \qquad \text{(VI.37c)}$$

$$p = 0.8 \left[\frac{tol}{E_j} \right]^{1/2} \qquad \text{(VI.37d)}$$

$$p \leq 2.0 \qquad \text{(VI.37e)}$$

Onde,

${}^{j}t$ - tempo acumulado até o início do sub-incremento j

${}^{j-1}t$ - tempo acumulado até o início do sub-incremento j-1

$\left({}^{j}\underset{\sim}{\sigma} \right)_{ant}$ - vetor de tensões no final do sub-incremento anterior correspondente ao intervalo de tempo aceito $\left(\Delta t_j \right)_{ant}$

O processo incremental é interrompido quando ${}^{j}t=1$. No final do penúltimo incremento é comum acontecer que ${}^{j}t+\Delta t_j$ seja maior que a unidade. Para evitar que isso aconteça, deve-se impor à estimativa de Δt_j feita pela equação (VI.37c) a seguinte condição:

$$\Delta t_j \leq 1 - {}^{j}t \qquad \text{(VI.38)}$$

No final do último sub-incremento ${}^{j}\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma}_f$. Como o controle de erro garante que os estados de tensão dos sub-incrementos estão sempre sobre a superfície tem-se:

$$f \left(\underset{\sim}{\sigma}_f \right) = \bar{\sigma}_f - \sigma_y = 0 \qquad \text{(VI.39)}$$

Portanto, não há necessidade de realizar-se nenhuma correção no vetor de tensões saído do processo incremental. O vetor de tensões da iteração k+1 é dado por:

$$^{k+1}\underset{\sim}{\sigma} = \sigma_f \qquad \text{(VI.40)}$$

O AEE foi utilizado para realizar a integração de tensões nos elementos dos Capítulos XIII e XIV. Esta escolha foi feita após a realização de vários testes comparativos do AET e do AEE, implementados nos programas TPLAS1 e TPLAS2 respectivamente. Estes programas realizam a integração de tensões no domínio plástico, em um único ponto do material, submetido a um estado de tensão triaxial.

Como já era esperado, a precisão dos resultados obtidos foi maior com o AEE do que com o AET. Há no entanto dois casos em que o desempenho do AET é pior. Nos casos em que o vetor de tensão $(\Delta\underset{\sim}{\sigma})_{est}$ (ver item (VI.3)) é proporcional ao vetor de tensão do ponto "c" e $\bar{\sigma}_b$ é muito maior que σ_y o AEE utiliza apenas um sub-incremento enquanto o AET utiliza muitos. O inverso ocorre nos casos em que o vetor de tensão $(\Delta\underset{\sim}{\sigma})_{est}$ situa-se no espaço de tensões numa direção bem diferente da do vetor no ponto "c", e $\bar{\sigma}_b$ não é muito maior que σ_y. Isto ocorre porque a equação empírica (VI.28) é função apenas do valor de $\bar{\sigma}_b$ não levando em consideração a não-linearidade do caminho a ser percorrido no espaço de tensões para chegar ao ponto final "f" saindo do ponto "c".

CAPÍTULO VII

SUPERFÍCIES DE ESCOAMENTO PARA CASCAS FINAS

Neste capítulo são apresentadas quatro superfícies de escoamento definidas em função dos invariantes das tensões generalizadas de casca. Este tipo de superfície é, em geral, denominado de superfície de escoamento para cascas finas.

As superfícies de escoamento para cascas finas são a representação geométrica de critérios de escoamento simplificados, utilizados em elementos finitos de casca com o objetivo de aumentar a sua eficiência computacional.

Ao desenvolver-se uma formulação elasto-plástica de elemento finito de casca, tem-se, no que diz respeito a critérios de escoamento, duas opções: critérios definidos em função dos invariantes do tensor de tensão ou critérios definidos em função dos invariantes das tensões generalizadas.

A primeira opção é chamada de enfoque tridimensional ("volume approach") porque a verificação do critério de escoamento é feita em pontos discretos situados em todo o elemento. A segunda opção é chamada de enfoque bidimensional ("area approach") porque a verificação do critério de escoamento é feita em pontos discretos situados sobre a superfície média do elemento.

O enfoque tridimensional é a opção natural dos elemen-

tos de casca isoparamétricos [69 , 70] em que, devido à complexidade matemática da formulação, a determinação das matrizes de elemento é feita através de integração numérica, no domínio definido pelo volume do elemento. No entanto, realizando-se uma integração explícita na direção da espessura é possível utilizar-se o enfoque bidimensional. Neste caso porém surge uma dificuldade devido ao fato de que para os critérios de escoamento para cascas finas, utilizados pelo enfoque bidimensional, quanto mais fina é a casca melhor é o resultado obtido, enquanto com os elementos isoparamátricos ocorre justamente o oposto (ver Capítulo VIII).

O enfoque bidimensional é a opção natural dos elementos de casca formados pela superposição de elementos simples de membrana e de flexão [71 , 72 , 73], em que a determinação das matrizes de elemento é feita através de integração explícita na direção da espessura e integração numérica no domínio definido pela superfície média do elemento. Como, em geral, estes elementos são desenvolvidos supondo-se que a espessura da casca é relativamente pequena, a opção por um critério de escoamento para cascas finas, é consistente com as hipóteses básicas destes elementos.

O enfoque tridimensional é mais preciso que o enfoque bidimensional, porque utiliza critérios de escoamento exatos, dentro do contexto da Teoria da Plasticidade [74], e faz a verificação do critério de escoamento em vários pontos da seção transversal. No entanto, o enfoque bidimensional fornece resultados aproximados com a precisão requerida em problemas de engenharia e aumenta bastante a eficiência com

putacional dos elementos de casca.

Neste capítulo a expressão "casca fina" está sendo empregada com o significado de que a espessura da casca é pequena quando comparada com as suas outras dimensões.

VII.1) CONDIÇÃO DE ESCOAMENTO INICIAL

Em uma seção transversal de uma casca submetida a esforços de membrana e de flexão, as tensões nas fibras extremas são dadas por [75]:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{t} \pm \frac{6M_x}{t^2}$$

$$\sigma_y = \frac{N_y}{t} \pm \frac{6M_y}{t^2} \qquad \text{(VII.1)}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{N_{xy}}{t} \pm \frac{6M_{xy}}{t^2}$$

onde,

σ_x, σ_y, σ_{xy} - componentes do tensor de tensão correspondentes a um estado plano de tensões

N_x, N_y, N_{xy} - tensões generalizadas de membrana (força por unidade de comprimento)

M_x, M_y, M_{xy} - tensões generalizadas de flexão (momento por unidade de comprimento)

t - espessura do elemento

Considerando-se o critério de escoamento de von Mises e um material elasto-plástico perfeito, a condição de escoamento inicial nas fibras extremas da seção transversal é dada por:

$$Q_t + \frac{9}{4} Q_m + 3 \left| Q_{tm} \right| - 1 = 0 \qquad \text{(VII.2)}$$

Onde,

$$Q_t = \frac{\overline{N}}{N_o^2} \qquad \text{(VII.3a)}$$

$$Q_m = \frac{\overline{M}}{M_o^2} \qquad \text{(VII.3b)}$$

$$Q_{tm} = \frac{\overline{MN}}{M_o N_o} \qquad \text{(VII.3c)}$$

Onde,

$\overline{N}$, $\overline{M}$, $\overline{MN}$ - invariantes das tensões generalizadas

N_o - força de plastificação por unidade de comprimento

M_o - momento de plastificação por unidade de comprimento

$| Q_{tm} |$ - valor absoluto da variável Q_{tm}

A equação (VII.2) é obtida substituindo-se sucessivamente as equações (III.11b), (III.7b) e (VII.1) em (III.39) e realizando-se algumas operações algébricas.

As constantes N_o e M_o são dadas por:

$$N_o = t\ \sigma_o \qquad \text{(VII.4a)}$$

$$M_o = \frac{t^2\ \sigma_o}{4} \qquad \text{(VII.4b)}$$

Onde,

σ_o - tensão de escoamento do material

As variáveis $\overline{N}$, $\overline{M}$ e $\overline{MN}$ são dadas por:

$$\overline{N} = N_x^2 + N_y^2 - N_x\ N_y + 3\ N_{xy}^2 \qquad \text{(VII.5a)}$$

$$\overline{M} = M_x^2 + M_y^2 - M_x\ M_y + 3\ M_{xy}^2 \qquad \text{(VII.5b)}$$

$$\overline{MN} = M_x\ N_x + M_y\ N_y - \frac{1}{2}\ M_x\ N_y - \frac{1}{2}\ M_y\ N_x + 3\ M_{xy}\ N_{xy} \qquad \text{(VII.5c)}$$

VII.2) SUPERFÍCIES DE ESCOAMENTO DE ILYUSHIN

A equação (VII.2) é exata dentro dos limites do critê-

rio de escoamento de von Mises. Porém ela indica apenas o início do escoamento na seção transversal da casca e não a sua plastificação total. Como as tensões de flexão variam linearmente ao longo da espessura da casca (ver equação (VI.1)), entre o início do escoamento e a plastificação total existe uma situação intermediária, em que a seção encontra-se parcialmente plastificada, com algumas fibras em escoamento e outras ainda no regime elástico.

No seu trabalho pioneiro Ilyushin [76] propôs, a partir do critério de escoamento de von Mises, várias equações que indicam a plastificação total da seção. Estas equações, ao contrário da equação (VII.2), não são "exatas". Elas representam na realidade aproximações para uma equação mais complexa, em que Q_t, Q_m e Q_{tm} são funções de dois parâmetros λ e μ [77]. Esta equação pode ser representada genericamente da seguinte forma:

$$F_o \ (Q_t \ , \ Q_m, \ Q_{tm}) \ = \ 0 \qquad \text{(VII.6)}$$

As duas superfícies de Ilyushin mais conhecidas [71 , 72 , 73 , 78] estão contidas na seguinte equação:

$$F_3 = Q_t + Q_m + \frac{c}{\sqrt{3}} \ | \ Q_{tm} \ | - 1 = 0 \qquad \text{(VII.7)}$$

Quando c = 0 tem-se a superfície chamada daqui por diante de superfície de Ilyushin simplificada

$$F_1 = Q_t + Q_m - 1 = 0 \qquad \text{(VII.8)}$$

Quando c = 1, tem-se a superfície chamada daqui por diante de superfície de Ilyushin completa

$$F_2 = Q_t + Q_m + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| Q_{tm} \right| - 1 = 0 \qquad \text{(VII.9)}$$

De acordo com um estudo realizado por Robinson [77] a superfície de Ilyushin completa é a melhor aproximação linear, em termos de Q_t, Q_m e Q_{tm}, para a equação (VII.6) e a superfície de Ilyushin simplificada é, em geral, uma aproximação conservadora, porém pode em alguns casos fornecer resultados contra a segurança.

Com o objetivo de levar em consideração a situação intermediária entre o início do escoamento e a plastificação total da seção, Crisfield [79] propôs a seguinte redefinição para as variáveis Q_m e Q_{tm}:

$$Q_m = \frac{\bar{M}}{M_c^2} \qquad \text{(VII.10a)}$$

$$Q_{tm} = \frac{\overline{MN}}{M_c N_o} \qquad \text{(VII.10b)}$$

Onde,

$$M_c = \alpha \, M_o \qquad \text{(VII.11a)}$$

$$\alpha = 1 - \frac{1}{3} \, EXP \left(- \frac{4}{3} \frac{Et}{\sigma_o} \bar{k}_p \right) \qquad \text{(VII.11b)}$$

E - módulo de elasticidade longitudinal

$\bar{k}_p$ - curvatura plástica

O valor de M_c é definido pela variável α que é função da curvatura plástica. Enquanto a seção encontra-se no domínio elástico $\bar{k}_p = 0$, $\alpha = 2/3$ e M_c é igual ao momento correspondente ao escoamento da primeira fibra na seção ($M_c = t^2 \sigma_o/6$). Quando a seção torna-se parcialmente plastificada, $\bar{k}_p$ e α aumentam acompanhando a plastificação. Em situações de flexão predominante, $\bar{k}_p$ pode tornar-se muito grande ($\bar{k}_p \to \infty$) fazendo com que α se aproxime do valor unitário e M_c se aproxime de M_o.

As superfícies de Ilyushin com o aperfeiçoamento proposto por Crisfield serão chamadas daqui por diante de superfícies de Ilyushin/Crisfield. Portanto, as equações (VII.7), (VII.8) e (VII.9), conforme a definição dada para as variáveis Q_m e Q_{tm}, podem representar tanto as duas superfícies de Ilyushin quanto as duas superfícies de Ilyushin/Crisfield.

Substituindo as equações (VII,3a), (VII.10a) e (VII.10b) em (VII.7) e realizando algumas operações algébricas obtem-se:

$$\bar{\sigma}_I = \sigma_o \qquad \text{(VII.12a)}$$

Onde,

$$\bar{\sigma}_I = \left[\frac{\bar{N}}{t^2} + \frac{16\bar{M}}{\alpha^2 t^4} + \frac{4\ \delta c\ \overline{MN}}{\alpha\ \sqrt{3}\ t^3} \right]^{1/2} \qquad \text{(VII.12b)}$$

$$\delta = \frac{\overline{MN}}{|\overline{MN}|} \qquad \text{(VII.12c)}$$

Onde,

δ - sinal do invariante $\overline{MN}$

$\bar{\sigma}_I$ - tensão efetiva correspondente às superfícies de escoamento de Ilyushin/Crisfield

Usando o conceito de tensão efetiva [53], define-se o critério de escoamento, correspondente às duas superfícies de Ilyushin/Crisfield da seguinte forma:

$$f_I = \bar{\sigma}_I - \sigma_o = 0 \qquad \text{(VII.13)}$$

Na fase de implementação do elemento triangular de casca elasto-plástico apresentado no Capítulo XIII o critério de escoamento da equação (VII.13) foi implementado, para realização de testes, no programa TPLAS3. Este programa realiza a integração de tensões generalizadas de casca no domínio plástico, em quatro pontos discretos, em condições idênticas às dos quatro pontos de integração do elemento triangular de casca (ver item (XIII.6.2)). A integração de tensões é feita através do algoritmo de Euler semi-implícito com controle de erro (ver item (VI.5)).

Durante os testes realizados com o TPLAS3 constatou-se que, em geral, para o mesmo incremento de deformação (ver itens (VI.4) e (VI.5)) em um ponto plastificado, os invariantes $\overline{N}$ e $\overline{M}$ correspondentes à superfície simplificada eram

maiores que os correspondentes à superfície completa de Ilyushin/Crisfield. Porém isto não significa que a superfície simplificada forneça sempre resultados contra a segurança, pois a comparação não foi feita com a superfície "exata" (Equação (VIII.6)) e sim com a superfície completa de Ilyushin/Crisfield, que é uma aproximação linear da superfície "exata". É mais plausível que a constatação de Robinson em relação às duas superfícies de Ilyushin, relatada em parágrafo anterior, continue válida para as duas superfícies de Ilyushin/Crisfield.

O processo automático para determinação dos intervalos de tempo do algoritmo de integração de tensões (ver item (VI.5)) funcionou muito bem com a superfície simplificada de Ilyushin/Crisfield, porém com a superfície completa surgiram dificuldades. Estas dificuldades foram constatadas em pontos com estados de tensão mistos (membrana e flexão), já situados no domínio plástico que, a cada novo incremento de deformação, eram forçados pelo critério de escoamento a se deslocar sobre a superfície de escoamento. Nestes pontos, após vários incrementos de deformação, a quantidade de sub-incrementos realizada atingia um valor próximo de duas centenas, muito superior às quantidades de sub-incrementos realizadas nos incrementos de deformação anteriores (em média 12 sub-incrementos).

A razão para esta má performance do algoritmo de integração, constatou-se na época, é a variação descontínua dos elementos dos vetores de escoamento (Equação (VI.3b)).

Os vetores de escoamento correspondentes às duas superfícies de Ilyushin/Crisfield são dados por:

$$\underset{\sim}{a}_N = \frac{\partial \bar{\sigma}_I}{\partial \underset{\sim}{N}} \qquad \text{(VII.14a)}$$

$$\underset{\sim}{a}_M = \frac{\partial \bar{\sigma}_I}{\partial \underset{\sim}{M}} \qquad \text{(VII.14b)}$$

Onde,

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_I}{\partial \underset{\sim}{N}} = \frac{1}{2\bar{\sigma}_I} \left[CN \left[\frac{\partial \bar{N}}{\partial \underset{\sim}{N}} \right] + CNM \left[\frac{\partial \bar{M}}{\partial \underset{\sim}{M}} \right] \right] \qquad \text{(VII.15a)}$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_I}{\partial \underset{\sim}{M}} = \frac{1}{2\bar{\sigma}_I} \left[CNM \left[\frac{\partial \bar{N}}{\partial \underset{\sim}{N}} \right] + CM \left[\frac{\partial \bar{M}}{\partial \underset{\sim}{M}} \right] \right] \qquad \text{(VII.15b)}$$

$$\underset{\sim}{N}^T = [\, N_x \quad N_y \quad N_{xy} \,] \qquad \text{(VII.15c)}$$

$$\underset{\sim}{M}^T = [\, M_x \quad M_y \quad M_{xy} \,] \qquad \text{(VII.15d)}$$

Sendo,

$$CN = \frac{1}{t^2} \qquad \text{(VII.16a)}$$

$$CNM = \frac{2\,\delta\,c}{\alpha\,\sqrt{3}\,t^4} \qquad \text{(VII.16b)}$$

$$CM = \frac{16}{\alpha^2\,t^4} \qquad \text{(VII.16c)}$$

Onde,

$\underset{\sim}{a}_N$ - vetor de escoamento correspondente às tensões generalizadas de membrana

$\underset{\sim}{a}_M$ - vetor de escoamento correspondente às tensões generalizadas de flexão

A variação descontínua dos vetores $\underset{\sim}{a}_N$ e $\underset{\sim}{a}_M$ é provocada pela variável "δ" [71], que é o sinal do invariante $\overline{MN}$. Esta variável pode assumir apenas dois valores.

$\delta = -1$ quando $\overline{MN}$ é negativo

ou

$\delta = 1$ quando $\overline{MN}$ é positivo

Como o sinal da variável CNM é definido pela variável "δ", a cada mudança de sinal de $\overline{MN}$ a variável CNM sofre uma mudança brusca de sinal, o que faz com que os elementos dos vetores $\underset{\sim}{a}_N$ e $\underset{\sim}{a}_M$ variem descontinuamente ao longo do processo automático de determinação dos intervalos de tempo do algoritmo de integração de tensões.

A superfície de Ilyushin completa e a superfície de Ilyushin/Crisfield completa apresentam, conforme constata-se pelas suas derivadas parciais, "quinas", ou "bicos" em algumas regiões do espaço de tensões definido pelas tensões generalizadas de membrana e de flexão (N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y e M_{xy}). Isto significa que estas superfícies não funcionam bem com algoritmos de integração que garantem a permanên-

cia do estado de tensão sobre a superfície de escoamento, porque estes algoritmos exigem, em geral, que as derivadas parciais da função de escoamento sejam contínuas.

Uma maneira de suavizar a variação dos elementos dos vetores $\underset{\sim}{a}_N$ e $\underset{\sim}{a}_M$ é estabelecer que a variável "δ", a partir de um valor suficientemente pequeno de $\overline{MN}$, passa a variar linearmente com $\overline{MN}$. Isto pode ser feito da seguinte forma:

$$\delta = \begin{cases} \dfrac{\overline{MN}}{|\overline{MN}|} & \text{para} \quad |\overline{MN}| \geq VL \qquad \text{(VII.17a)} \\ \\ \dfrac{4\,\overline{MN}}{\sigma_o^2\ \alpha\ \sqrt{3}\ t^3} & \text{para} \quad |\overline{MN}| < VL \qquad \text{(VII.17b)} \end{cases}$$

Onde,

$$VL = \frac{(\sigma_o^2\ \alpha\ \sqrt{3}\ \ t^3)}{4}\ tol \qquad \text{(VII.17c)}$$

tol - número real, positivo e menor que a unidade

As equações (VII.17) foram introduzidas no programa TPLAS3 e houve uma melhoria no desempenho da superfície de Ilyushin/Crisfield. A quantidade máxima de sub-incrementos, nos exemplos-teste, caiu para meia centena. Ainda assim, esta performance não pode ser considerada totalmente satisfatória, mesmo levando-se em conta que este grau de dificuldade na integração de tensões só ocorre em casos extremos, semelhantes aos que foram escolhidos para exemplos-teste.

O desempenho da superfície de Ilyushin/Crisfield simplificada foi satisfatório porque para ela a constante "c" é nula, o que faz com que a variável CNM também seja nula e os vetores $\underset{\sim}{a}_N$ e $\underset{\sim}{a}_M$ variem de forma contínua. Esta superfície, apesar de ser menos precisa que a superfície completa, deve ser vista como uma alternativa válida dentre as superfícies de escoamento para cascas finas, pois as suas derivadas parciais em relação às tensões generalizadas de membrana e flexão (N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y e M_{xy}) são contínuas. O mesmo pode ser dito da superfície de Ilyushin simplificada, como o demonstra um artigo publicado há algum tempo [78], no qual é apresentada uma formulação de elemento de casca que utiliza a superfície de Ilyushin simplificada sem nenhuma ressalva.

VII.3) SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO DE IVANOV

No mesmo artigo em que apresentou um estudo sobre a precisão das superfícies de escoamento lineares em termos de Q_t, Q_m e Q_{tm}, Robinson [77] apresentou um estudo semelhante para duas superfícies não-lineares propostas por Ivanov.

A primeira superfície de Ivanov, que é a mais simples das duas, é representada pela seguinte equação:

$$F_4 = Q_t + \frac{1}{2} Q_m + \left[\frac{1}{4} Q_m^2 + Q_{tm}^2 \right]^{1/2} - 1 = 0 \qquad \text{(VII.18)}$$

De acordo com Robinson as duas superfícies de Ivanov são aproximações melhores para a equação (VII.6) do que a

superfície de Ilyushin completa, sendo a diferença de precisão entre elas muito pequena. Mesmo assim a segunda superfície de Ivanov, que é a mais complexa, é mais precisa que a primeira. Como ao passar da primeira para a segunda superfície, o ganho de precisão é pequeno e o acréscimo de complexidade é grande, a primeira superfície de Ivanov é mais indicada para utilização em formulações de elementos de casca. Esta superfície será daqui por diante denominada simplesmente de superfície de Ivanov.

Na equação (VII.18) a variável Q_t é definida pela equação (VII.3a). As variáveis Q_m e Q_{tm}, de acordo com a superfície original de Ivanov, são definidas pelas equações (VII.3b) e (VII.3c). Para incorporar o aperfeiçoamento proposto por Crisfield [79] define-se as variáveis Q_m e Q_{tm} através das equações (VII.10a) e (VII.10b); e passa-se a denominar a superfície obtida de superfície de Ivanov/Crisfield.

Substituindo as equações (VII.3a), (VII.10a) e (VII.10b) em (VII.18) e realizando algumas operações algébricas obtem-se:

$$\bar{\sigma}_v = \sigma_o \qquad \text{(VII.19a)}$$

Onde,

$$\bar{\sigma}_v = \left[\frac{\bar{N}}{t^2} + \frac{8\bar{M}}{\alpha^2\, t^4} + \left[\frac{64\bar{M}^2}{\alpha^4\, t^8} + \frac{16\overline{MN}^2}{\alpha^2\, t^6} \right]^{1/2} \right]^{1/2} \qquad \text{(VII.19b)}$$

$\bar{\sigma}_v$ - tensão efetiva correspondente à superfície de escoamento de Ivanov/Crisfield

Usando o conceito de tensão efetiva [53], define-se o critério de escoamento, correspondente à superfície de Ivanov/Crisfield da seguinte forma:

$$f_v = \bar{\sigma}_v - \sigma_o = 0 \qquad \text{(VII.20)}$$

Na fase de implementação do elemento triangular de casca elasto-plástico apresentado no Capítulo XIII o critério de escoamento da equação (VII.20) foi implementado, para realização de testes, no programa TPLAS4. Este programa é semelhante ao TPLAS3 citado no item (VII.2), sendo diferente apenas no que diz respeito ao critério de escoamento.

O processo automático para determinação dos intervalos de tempo do algoritmo de integração de tensões (ver item (VII.5)) funcionou bem com a superfície de Ivanov/Crisfield. Isto ocorreu porque, ao contrário do que acontece com a superfície completa de Ilyushin/Crisfield, os vetores de escoamento $\underset{\sim}{a}_N$ e $\underset{\sim}{a}_M$ variam continuamente.

Os vetores de escoamento correspondentes à superfície de Ivanov/Crisfield são dados por:

$$\underset{\sim}{a}_N = \frac{\partial \bar{\sigma}_v}{\partial \underset{\sim}{N}} \qquad \text{(VII.21a)}$$

$$\underset{\sim}{a}_M = \frac{\partial \bar{\sigma}_v}{\partial \underset{\sim}{M}} \qquad \text{(VII.21b)}$$

Onde,

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_v}{\partial \underset{\sim}{N}} = \frac{1}{2\bar{\sigma}_v} \left[CN \left[\frac{\partial \bar{N}}{\partial \underset{\sim}{N}} \right] + CNM \left[\frac{\partial \bar{M}}{\partial \underset{\sim}{M}} \right] \right] \qquad \text{(VII.22a)}$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}v}{\partial \underset{\sim}{M}} = \frac{1}{2\bar{\sigma}_v} \left[CNM \left[\frac{\partial \bar{N}}{\partial \underset{\sim}{N}} \right] + CM \left[\frac{\partial \bar{M}}{\partial \underset{\sim}{M}} \right] \right] \qquad \text{(VII.22b)}$$

Sendo,

$$CN = \frac{1}{t^2} \qquad \text{(VII.23a)}$$

$$CNM = \frac{2\bar{M}}{t^2 \left(4\bar{M}^2 + \alpha^2 t^2 \overline{MN}^2 \right)^{1/2}} \qquad \text{(VII.23b)}$$

$$CM = \frac{8}{\alpha^2 t^4} + \frac{16\bar{M}}{\alpha^2 t^4 \left(4\bar{M}^2 + \alpha^2 t^2 \overline{MN}^2 \right)^{1/2}} \qquad \text{(VII.23c)}$$

A equação (VII.23b) mostra que, ao contrário do que acontece na superfície de Ilyushin/Crisfield completa, a variável CNM é uma função linear de $\overline{MN}$, o que evita mudanças bruscas de sinal, garantindo conseqüentemente a variação contínua dos vetores $\underset{\sim}{a}_N$ e $\underset{\sim}{a}_M$.

VII.4) SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO MISTA

Após a realização dos testes das duas superfícies de Ilyushin/Crisfield e da superfície de Ivanov/Crisfield, de-

cidiu-se incluir estas três opções de critério de escoamento na formulação do elemento de casca apresentado no Capítulo XIII. Para fazer isto de uma maneira simples, criou-se a superfície mista que se transforma em cada uma das três superfícies citadas conforme os valores atribuídos a três parâmetros.

Multiplicando-se a equação (VII.7) pelo parâmetro "a" e a equação (VII.18) pelo parâmetro "b" obtém-se:

$$a\,Q_t + a\,Q_m + \frac{a\,c}{\sqrt{3}} \left| Q_{tm} \right| - a = 0 \qquad \text{(VII.24a)}$$

$$b\,Q_t + \frac{b}{2} Q_m + b \left[\frac{1}{4} Q_m^2 + Q_{tm}^2 \right]^{1/2} - b = 0 \qquad \text{(VII.24b)}$$

Onde,

$$a + b = 1 \qquad \text{(VII.25)}$$

Somando-se as equações (VII.24a) e (VII.24b) e utilizando (VII.25) obtém-se

$$F_5 = Q_t + \frac{(2 - b)}{2} Q_m + \frac{a\,c}{\sqrt{3}} \left| Q_m \right| +$$

$$+ b \left[\frac{1}{4} Q_m^2 + Q_{tm}^2 \right]^{1/2} - 1 = 0 \qquad \text{(VII.26)}$$

A correspondência entre os parâmetros "a", "b" e "c" e as três superfícies é a seguinte:

- superfície de Ilyushin/Crisfield simplificada

  $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$

- superfície de Ilyushin/Crisfield completa

  $a = 1$, $b = 0$ e $c = 1$

- superfície de Ivanov/Crisfield

  $a = 0$, $b = 1$ e $c = 0$

Como os parâmetros "a", "b" e "c" podem ser considerados como números reais, outras superfícies podem ser obtidas desde que a equação (VII.25) seja respeitada e que o parâmetro "c" obedeça os seguintes limites:

$$0 \leq c \leq 1 \qquad \text{(VII.27)}$$

Substituindo as equações (VII.3a), (VII.10a) e (VII.10b) em (VII.26) e realizando algumas operações algébricas obtém-se:

$$\bar{\sigma}_M = \sigma_o \qquad \text{(VII.28a)}$$

Onde,

$$\bar{\sigma}_M = \left[\frac{N}{t^2} + \frac{8\,(2-b)\,\bar{M}}{\alpha^2\, t^4} + \frac{4\,a\,\delta\,c\,\overline{MN}}{\alpha\,\sqrt{3}\,t^3} + \right.$$

$$\left. + b \left[\frac{64\bar{M}^2}{\alpha^4\, t^8} + \frac{16\overline{MN}^2}{\alpha^2\, t^6} \right]^{1/2} \right]^{1/2} \qquad \text{(VII.28b)}$$

O critério de escoamento correspondente à superfície

mista é definido através da seguinte equação:

$$f_M = \bar{\sigma}_M - \sigma_o = 0 \qquad \text{(VII.29)}$$

Os vetores de escoamento correspondentes à superfície mista são determinados através das equações (XIII.23).

As superfícies de escoamento apresentadas neste capítulo representam materiais elasto-plásticos perfeitos, mas podem sem maiores dificuldades serem modificadas para incluir endurecimento [80].

CAPÍTULO VIII

ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE DE CASCAS ENRIJECIDAS

Neste capítulo é feita uma revisão da literatura disponível sobre elementos finitos para análise de cascas enrijecidas.

As principais vantagens e desvantagens destes elementos são discutidas e são comentadas as características básicas dos elementos de casca e de pórtico apresentados no presente trabalho.

VIII.1) ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE DE CASCAS

Os elementos finitos para análise de cascas de geometria arbitrária podem ser reunidos em três grupos. No primeiro grupo encontram-se os elementos planos, resultantes da superposição dos comportamentos de membrana e de placa [81,82]. No segundo grupo encontram-se os elementos curvos baseados em teorias de cascas [83,84]. No terceiro grupo encontram-se os elementos isoparamétricos "degenerados", obtidos através da imposição de hipóteses de casca no campo de deslocamentos e nas tensões de um elemento isoparamétrico sólido [85,86,87,88].

As vantagens e desvantagens associadas a cada um destes três tipos de elementos são tão variadas que fazem

com que seja praticamente impossível apontar qual dos três é melhor em termos absolutos.

Os elementos do segundo grupo, como são curvos e se baseiam diretamente em teorias de cascas, deveriam ter um desempenho melhor que os elementos dos outros dois grupos. Porém, devido a dificuldades em garantir a continuidade dos deslocamentos entre elementos e representar corretamente os deslocamentos de corpo rígido, as formulações de elementos curvos são muito complexas e utilizam grande quantidade de GDL*, sendo alguns destes GDL destituídos de significado físico. Isto faz com que estes elementos sejam ineficientes do ponto de vista computacional e pouco indicados para resolução de problemas práticos.

Os elementos planos para análise de cascas de geometria arbitrária precisam ser, por motivos geométricos óbvios, triangulares. A maior desvantagem deste tipo de elemento é a necessidade de utilização de malhas refinadas para representar, com um grau aceitável de precisão, superfícies curvas. No entanto, por mais refinada que seja a malha, a superfície curva estará sempre sendo representada por uma superfície facetada, que tem "quinas" que a superfície curva não tem. Esta aproximação geométrica pode reduzir a precisão dos resultados na análise de estruturas sensíveis a imperfeições. Outra desvantagem dos elementos planos é a ausência de rigidez no sexto grau de

*GDL - graus de liberdade.

liberdade dos nós coplanares. Esta singularidade não chega a comprometer o desempenho destes elementos pois existe apenas em nós coplanares, que não ocorrem na discretização de superfícies curvas, e pode ser eliminada através da utilização de coeficientes de rigidez fictícios ou através da supressão do sexto grau de liberdade de todos os nós da casca (ver item (XII.6.3)).

No entanto, os elementos triangulares planos se destacam mais pelas suas vantagens do que pela suas desvantagens. Dentre estas vantagens podem ser citadas as seguintes: formulação simples, convergência para a teoria de cascas de grande curvatura ("deep shell theory"), definição da geometria do elemento com poucos dados e representação precisa de carregamentos e condições de contorno complexas (devido a utilização de malhas refinadas).

Por causa da simplicidade de formulação e da facilidade de utilização os elementos triangulares planos são muito utilizados em análises não-lineares, tanto em aplicações acadêmicas quanto na resolução de problemas práticos. As publicações a este respeito são bem numerosas. Backlund e Wennerstrom [89] desenvolveram um elemento elasto-plástico de 12 GDL, utilizando o critério de escoamento de von Mises e o conceito de camadas paralelas de tensões ("parallel stress layers"). O elemento não-linear geométrico "TRUMP" de 18 GDL foi desenvolvido por Argyris e outros [90] a partir do conceito de agrupamento de características físicas ("physical lumping ideas").

Horrigmoe e Bergan [91] propuseram um elemento não-linear geométrico de 15 GDL, que utiliza uma formulação lagrangeana atualizada e uma interpolação híbrida, em que as variáveis interpoladas são deslocamentos e tensões. Um elemento elasto-plástico não-linear geométrico de 18 GDL foi desenvolvido por Chen [92], utilizando a teoria de grandes deslocamentos de placas de von Karman e o critério de escoamento de von Mises. Bathe e Ho [93] desenvolveram um elemento não-linear geométrico de 18 GDL utilizando uma formulação lagrangeana atualizada que despreza a contribuição de flexão para a matriz geométrica do elemento. Na referência [72] Bathe e outros apresentaram este mesmo elemento na sua versão elasto-plástica, em que a não-linearidade física é considerada através da superfície de escoamento de Ilyushin. Um elemento não-linear geométrico de 24 GDL que utiliza uma formulação lagrangeana total e "loof nodes" foi proposto por Meek e Tan [94]. Na referência [73] Chueiri apresentou duas versões não-lineares de um elemento triangular de 18 GDL. A versão não-linear geométrica é baseada na teoria de grandes deslocamentos de placas de von Karman e a versão elasto-plástica utiliza a superfície de escoamento de Ilyushin. Hsiao [95] modificou a formulação do elemento apresentado na referência [93] com o objetivo de eliminar os deslocamentos de corpo rígido dos vetores de deslocamentos utilizados para determinar as tensões do elemento, eliminando assim a restrição à magnitude dos incrementos de carga. Na referência [96] Schoop apresenta um elemento não-linear geométrico de 18 GDL que utiliza uma formulação lagrangeana total e descreve a configuração deformada do

elemento usando vetores de posição, com o objetivo de eliminar a restrição a magnitude dos incrementos de carga.

Os elementos isoparamétricos de cascas representam bem o comportamento de cascas espessas, porém o mesmo não acontece com cascas finas. Por causa do hiperenrijecimento de cortante e de membrana ("shear locking" e "membrane locking") a qualidade dos resultados fornecidos por este tipo de elemento se reduz a medida em que a casca torna-se mais fina. Esta deficiência tem sido combatida através da utilização de integração numérica reduzida ou seletiva e através da interpolação independente dos deslocamentos e das deformações de cortante e de membrana. Outras desvantagens dos elementos isoparamétricos de casca são: definição da geometria do elemento com muitos dados e geração de matrizes de rigidez da estrutura com largura de banda grande (devido a quantidade elevada de nós dos elementos).

Estas desvantagens no entanto não invalidam a utilização dos elementos isoparamétricos de casca em análises lineares [97,98] e não-lineares [69,70,99,100,101,102]. Uma das grandes vantagens deste tipo de elemento é que, por serem curvos, eles representam bem superfícies curvas. Assim como os elementos isoparamétricos bi e tridimensionais para análise do contínuo, os elementos isoparamétricos de casca têm a sua formulação assentada em bases matemáticas sólidas, o que lhes confere um grau elevado de generalidade e facilidade para evoluir de forma consistente. Estas formulações são,

em geral, de fácil implementação e se ajustam bem a uma programação modular, o que facilita manutenções e modificações.

Além dos três grupos de elementos de casca descritos anteriormente existe um quarto grupo, formado por elementos surgidos principalmente na década de 80, que merece ser mencionado. Estes elementos se caracterizam por terem suas formulações baseadas nos chamados "truques" ou "crimes variacionais", pois não se enquadram "a priori" nos limites dos métodos variacionais clássicos [103]. Estes elementos têm as mesmas vantagens dos elementos triangulares planos, podendo ser curvos ou planos, sem a desvantagem da falta de rigidez no sexto grau de liberdade. Como desvantagens podem-se citar: a ocorrência ocasional de hiperenrijecimento ("locking"), a utilização de incógnitas sem significado físico (as chamadas "vertex rotations") e a ausência de uma base matemática sólida. Neste grupo encontram-se dois elementos não-lineares surgidos recentemente. O elemento triangular plano de 18 GDL proposto por Nygard [104] considera a não-linearidade geométrica através de uma formulação lagrangeana total e a não-linearidade física através do critério de escoamento de von Mises. Jaamey e outros [105] desenvolveram um elemento curvo quadrilátero, não-linear geométrico elasto-plástico, de 24 GDL que utiliza uma formulação lagrangeana atualizada e o critério de escoamento de von Mises.

VIII.2) MODELAÇÃO DE CASCAS ENRIJECIDAS ATRAVÉS DE ELEMENTOS FINITOS.

Para efeito de modelação através de elementos finitos uma casca enrijecida é considerada como uma estrutura constituída por duas partes distintas: a casca propriamente dita e os enrijecedores. Esta distinção é feita porque estas duas partes respondem de forma diferente às solicitações externas. A casca tem o comportamento característico das estruturas laminares em que as solicitações externas provocam tensões de membrana e de flexão e o esforço cortante é baixo. Os enrijecedores, como têm uma dimensão muito maior que as outras duas, se comportam de forma semelhante às barras de um pórtico, em que existem tensões axiais, de flexão e de torção, e o esforço cortante é alto.

A modelação da casca é feita por elementos de casca de um dos tipos descritos no item (VIII.1). Já os enrijecedores podem ser modelados tanto por elementos de casca quanto por elementos de pórtico.

A modelação de enrijecedores através de elementos de casca é, em geral, muito cara do ponto de vista computacional. A quantidade de elementos necessária para fazer esta modelação é tão grande que conforme o problema pode até inviabilizar a realização da análise. Além disso, a continuidade dos deslocamentos na junção do enrijecedor com a casca é quebrada quando as funções de interpolação do

elemento de casca são polinômios de graus diferentes para os deslocamentos de membrana e de flexão.

A modelação de enrijecedores através de elementos de pórtico é mais eficiente do ponto de vista computacional do que a modelação feita com elementos de casca. Não apenas a quantidade de elementos exigida é menor como também o custo computacional do elemento de pórtico é menor que o do elemento de casca. No entanto este tipo de modelação representa apenas o comportamento global do enrijecedor, ou seja, os deslocamentos dos vários pontos da seção transversal estão todos condicionados à hipótese das seções planas. Para levar em conta efeitos localizados, característicos de estruturas laminares, a modelação com elementos de casca torna-se imprescindível. Para ser usado na discretização de enrijecedores um elemento de pórtico deve satisfazer dois requisitos estabelecidos pelo elemento de casca que será usado na discretização da casca. O elemento de pórtico deve ter as mesmas incógnitas nodais do elemento de casca e ter para funções de interpolação dos deslocamentos axiais e de flexão polinômios de mesmo grau dos polinômios correspondentes no elemento de casca. Além disso é necessário dispor de um recurso específico para levar em conta a excentricidade do eixo do enrijecedor em relação à superfície média da casca.

Esta necessidade existe porque os nós do elemento de pórtico precisam ser definidos sobre o eixo que passa pelo centro de gravidade da seção transversal do enrijecedor que é, em geral, excêntrico em relação à superfície média da

casca. Para representar corretamente o comportamento da casca enrijecida os nós do enrijecedor devem estar vinculados aos nós da casca, de forma que a hipótese das seções planas seja obedecida. Em programas de elementos finitos esta vinculação pode ser feita de duas maneiras: uma implícita e outra explícita.

A vinculação implícita é feita ao nível do elemento através de uma mudança de referencial. A posição do elemento de pórtico é definida através de dois nós já existentes na casca e na leitura dos dados do elemento especifica-se que estes nós são excêntricos e fornece-se o valor da excentricidade. Com estes dados a rotina de elemento cria um sistema de referência local excêntrico (ver item (IX.2.2)), em relação ao qual são definidas as matrizes e vetores do elemento.

Na vinculação explícita a posição do elemento de pórtico é definida através de dois nós situados sobre o eixo do enrijecedor e a vinculação com os nós da casca é feita através da especificação de restrições generalizadas ("generalized constraints").

A vinculação implícita tem a vantagem de reduzir a quantidade de nós da malha de elementos finitos e poder ser utilizada sem restrições, inclusive em análises não-lineares geométricas. A sua desvantagem principal é que, como os nós dos elementos de pórtico não são declarados explicitamente, nem sempre é possível especificar deslocamentos prescritos para estes nós.

A vantagem da vinculação explícita é a facilidade para especificação de quaisquer condições de contorno. As suas desvantagens em relação à vinculação implícita são: malhas de elementos finitos com maior quantidade de nós e exigência de implementação especial para aplicação em análises não-lineares geométricas.

A implementação especial para análises não-lineares geométricas é necessária porque as restrições generalizadas operam sobre os vetores e matrizes da estrutura [106]. Para que haja uma representação correta da ligação da casca com o enrijecedor, a restrição generalizada precisa ser definida em um sistema de referência móvel específico de cada nó. Este tipo de sistema de referência, no entanto, deve ser evitado pois aumenta muito o gasto computacional da montagem da matriz de rigidez e do vetor de forças internas da estrutura.

A literatura sobre análise de estruturas laminares enrijecidas através do MEF* é bastante significativa. Crisfield [107] desenvolveu um elemento de pórtico enrijecedor elasto-plástico não-linear geométrico utilizando a superfície de escoamento de Ilyushin e uma formulação lagrangeana total. Este elemento foi utilizado, em conjunto com um elemento retangular plano de casca

*MEF - Método dos Elementos Finitos

elasto-plástico não-linear geométrico [71,79] para analisar uma viga de seção "I" e dois painéis planos enrijecidos. Soreide e outros [108] propuseram dois enfoques para a análise elasto-plástica não-linear geométrica de placas enrijecidas. Em ambos os enfoques o elemento de casca é plano, o enrijecedor é representado por um elemento específico e a não-linearidade física é considerada através do critério de escoamento de von Mises. A não-linearidade geométrica é considerada no primeiro enfoque através de uma formulação lagrangeana total e no segundo através de uma formulação lagrangeana atualizada. Onoufriou e Harding [109] realizaram um estudo de resistência residual de cilindros enrijecidos danificados, discretizando a casca com um elemento isoparamétrico de casca de 48 GDL e os enrijecedores com um elemento isoparamétrico de pórtico de 18 GDL. Mais recentemente Abayakoon [110] aplicou o Método da Faixa Finita ("Finite Strip Method") na análise elasto-plástica não-linear geométrica de vigas de seção "I" e de um painel plano enrijecido.

Além destas publicações que apresentam elementos finitos especialmente desenvolvidos para análise de estruturas laminares enrijecidas, existem outras que apresentam análises deste tipo de estrutura realizadas utilizando elementos finitos de programas de finalidades múltiplas ("general purpose programs"). Bathe e Wiener [111] utilizaram um elemento isoparamétrico de casca elasto-plástico do programa ADINA para realizar análises de uma viga de seção "I" submetida a flexão e torção. Skrikerud e outros [12] realizaram uma análise, utilizando

o programa ABAQUS, para determinação da força estática equivalente à força de impacto que um navio tanque aplicou numa torre articulada durante uma colisão acidental. Para discretização da área atingida foi utilizado um elemento de casca de 8 nós na parede da torre e um elemento de pórtico de 3 nós no anel enrijecedor, sendo as não-linearidades física e geométrica consideradas nos dois elementos.

O comportamento não-linear de estruturas laminares tem sido estudado também através de outros métodos numéricos, além do MEF, como o Método das Diferenças Finitas [112,113,114,115,116,117] e o Método de Rayleig-Ritz [118,119,120,121,122].

VIII.3) CARACTERÍSTICAS DOS ELEMENTOS FINITOS IMPLEMENTADOS

No presente trabalho está sendo proposta uma modelação de cascas enrijecidas que utiliza um elemento triangular plano para discretizar a casca e um elemento de pórtico de eixo reto para discretizar os enrijecidores. As versões não-lineares de cada um destes elementos (ver Capítulos IX a XIV) foram desenvolvidas a partir de uma formulação básica (linear) e de características não-lineares escolhidas de acordo com uma filosofia de desenvolvimento que pode ser resumida da seguinte forma:

- simplicidade dos dados para especificação dos elementos;
- capacidade de representar geometrias arbitrárias;
- facilidade de formulação;

- custo computacional baixo por elemento;
- precisão de resultados suficiente para resolução de problemas de engenharia;
- compatibilidade de hipóteses.

VIII.3.1) Elementos de Casca

Adotou-se para formulação básica de casca o elemento triangular plano de três nós que interpola os deslocamentos no plano do elemento com funções lineares e os deslocamentos perpendiculares ao plano do elemento com funções cúbicas. Este elemento resulta da superposição do elemento linear de membrana CST ("Constant Strain Triangle") e do elemento cúbico de placa HBT9 ("Holand Bell T9") proposto por Holand e Bell [123], e será chamado daqui por diante de LCTS ("Linear Cubic Triangular Shell").

O CST tem três nós e duas incógnitas (deslocamentos "u" e "v") por nó, perfazendo um total de 6 GDL. O CST é o exemplo preferido dos livros textos sobre o MEF [15,16] por causa da simplicidade da sua formulação, que utiliza expressões matriciais simples para determinação de tensões e deformações, e permite a integração explícita da matriz de rigidez do elemento [124]. Por este mesmo motivo, e também por combinar bem com elementos triangulares de placa de 9 GDL, o CST é o elemento triangular de membrana mais utilizado na formulação de elementos de casca planos. As funções de interpolação lineares, que fazem com que o CST seja tão simples, fazem também com que ao nível do elemento

as tensões sejam constantes. Isto implica na utilização de malhas refinadas para representar estados de tensão que variem rapidamente. No entanto, quando o CST é usado para representar o comportamento de membrana em um elemento plano de casca ele contribue para a simplicidade da formulação sem acrescentar nenhuma limitação nova ao elemento de casca. Isto ocorre porque para um elemento de casca plano a exigência de utilização de malhas refinadas já existe, como uma hipótese de modelação decorrente da necessidade de aproximar superfícies curvas através de superfícies facetadas.

O HBT9 tem três nós e três incógnitas (translação "w" e rotações "rx" e "ry") por nó, perfazendo um total de 9 GDL. O HBT9 é uma das versões mais bem sucedidas do elemento triangular de placa com 9 GDL. A razão do seu bom desempenho está na escolha para função de interpolação de um polimônio cúbico em que as variáveis são as coordenadas triangulares e não as coordenadas cartesianas [124]. As virtudes deste elemento foram demonstradas por Bergan [125], teoricamente através da aplicação do teorema da ortogonalidade da energia ("energy ortogonality theorem") e numericamente através da comparação com os resultados de análises realizadas com outros elementos de placa. O HBT9, assim como outros elementos de placa bem sucedidos, é um elemento não conforme pois garante a continuidade dos deslocamentos "w" entre elementos, porém não consegue garantir o mesmo em relação à derivada primeira de "w" [124]. Ainda que mais complexa que a formulação do CST, a formulação do HBT9 é suficientemente simples para permitir

que a matriz de rigidez e o vetor de forças do elemento sejam integrados explicitamente.

O elemento LCTS, resultante da superposição do CST e do HBT9, tem três nós e seis incógnitas (translações "u", "v" e "w" e rotações "rx", "ry" e "rz") por nó, perfazendo um total de 18 GDL. No sistema de referência local, a matriz de rigidez do elemento tem coeficientes nulos nas linhas e colunas correspondentes à rotação "rz" de cada nó (sexto grau de liberdade). Isto faz com que surja uma singularidade na matriz de rigidez da estrutura na direção do sexto grau de liberdade dos nós coplanares. Esta singularidade é eliminada através do procedimento descrito no item (XII.6.3).

Além das qualidades próprias dos elementos planos de casca, já citadas no item (VIII.1), o LCTS tem qualidades específicas, como por exemplo a geração de matrizes de rigidez da estrutura com banda estreita devido ao fato de ter três nós apenas. Outra qualidade do LCTS encontra-se nos seis GDL por nó, todos com significado físico (translações e rotações), que tornam o elemento atrativo para engenheiros e possibilitam o seu uso em conjunto com elementos de outros tipos (treliça, pórtico, sólido, etc.) na resolução de probelmas práticos. Do ponto de vista computacional o LCTS é bastante eficiente pois, apesar de exigir malhas refinadas, o custo computacional para geração da matriz de rigidez e dos vetores de forças e tensões do elemento é baixo.

As características não-lineares dos elementos NLG*, NLF** e NFG***, apresentados nos capítulos XII, XIII e XV respectivamente, foram escolhidas de forma a preservar as qualidades da formulação básica (linear).

No elemento LCTS/NLG a não-linearidade geométrica é considerada através da formulação lagrangeana atualizada descrita no item (V.1). Isto permite que a matriz de rigidez material e o vetor de forças do elemento sejam integrados explicitamente. A matriz de rigidez geométrica do elemento, que é função das tensões generalizadas de membrana e de flexão, é determinada através de integração explícita ao longo da espessura e de integração numérica na superfície média do elemento.

No elemento LCTS/NLF a não-linearidade física é considerada através da superfície de escoamento mista para cascas finas proposta no capítulo VII. Como o critério de escoamento é definido em função das tensões generalizadas de membrana e de flexão, a matriz de rigidez material e o vetor de forças do elemento são determinados através de integração explícita ao longo da espessura e de integração numérica na superfície média do elemento.

*NLG - não-linear geométrico

**NLF - não-linear físico

***NFG - não-linear físico e geométrico

O elemento LCTS/NFG resulta da junção das formulações dos elementos LCTS/NLG e LCTS/NLF. Este elemento tem a matriz de rigidez material, a matriz de rigidez geométrica e o vetor de forças determinados através de integração explícita ao longo da espessura e de integração numérica na superfície média do elemento.

VIII.3.2) Elementos de Pórtico Enrijecedor

Adotou-se para formulação básica de pórtico o elemento de eixo reto com dois nós, que interpola os deslocamentos axiais e de torção com funções lineares e os deslocamentos de flexão com funções cúbicas. Este elemento será chamado daqui por diante de CLCB ("Conventional Linear Cubic Beam").

O CLCB tem seis incógnitas (translações "u", "v" e "w" e rotações "rx", "ry" e "rz") por nó, perfazendo um total de 12 GDL. Por causa da simplicidade da sua formulação e da precisão dos resultados que fornece, o CLCB é o elemento de pórtico mais utilizado tanto em análises lineares quanto em análises não-lineares.

No elemento CLCB/NLG, apresentado no Capítulo IX, a não-linearidade geométrica é considerada através da formulação lagrangeana atualizada descrita no item (V.1). Isto permite que a matriz de rigidez material, a matriz de rigidez geométrica e o vetor de forças do elemento sejam integrados explicitamente. O elemento CLCB/NLG foi

apresentado anteriormente por Benjamin na referência [126], onde foi realizada uma comparação entre este elemento e um elemento isoparamétrico de pórtico de quatro nós e 24 GDL, que é reconhecidamente um elemento de alta precisão. Nestes testes, a precisão dos resultados dos dois elementos foi igual porém a eficiência computacional do CLCB/NLG foi maior.

No elemento CLCB/NLF, apresentado no Capítulo X, a não-linearidade física é considerada através de relações incrementais entre as forças e os deslocamentos nodais do elemento determinadas a partir de conceitos da Teoria Plástica de Vigas e da Análise Matricial de Estruturas. Isto permite que a matriz de rigidez material e o vetor de forças do elemento sejam determinados explicitamente, sem que haja necessidade de realizar-se integração, explícita ou numérica. O elemento CLCB/NLF é uma formulação original desenvolvida por Benjamin que demonstrou na referência [127], através de comparações com resultados teóricos e experimentais, que os resultados fornecidos pelo CLCB/NLF têm um bom grau de precisão. Estas comparações encontram-se também na referência [128].

O elemento CLCB/NFG, apresentado no Capítulo XI, resulta da junção das formulações dos elementos CLCB/NLG e CLCB/NLF. Este elemento tem a matriz de rigidez material e o vetor de forças determinados explicitamente e a matriz de rigidez geométrica integrada explicitamente. Na referência [129] Benjamin e Ebecken demonstraram, através de comparações com resultados numéricos e experimentais, que

os resultados fornecidos pelo CLCB/NFG também têm um bom grau de precisão.

Para que os elementos CLCB não-lineares pudessem ser utilizados na modelação de enrijecedores as suas formulações foram modificadas para permitir a especificação de uma vinculação implícita entre os seus nós e os nós dos elementos de casca (ver itens (VIII.2) e (IX.2.2)).

É importante ressaltar no entanto que a vinculação dos nós do elemento de pórtico aos nós do elemento de casca, realizada implícita ou explicitamente, pode introduzir uma incompatibilidade no campo de deslocamentos axiais do elemento de pórtico [130,131,132]. A incompatibilidade surge quando os deslocamentos axiais no elemento de pórtico, os deslocamentos no plano do elemento de casca e as rotações do elemento de casca são interpolados por polinômios de graus diferentes.

Isto ocorre porque para atender à hipótese das seções planas o deslocamento axial de um nó do elemento de pórtico é igualado ao deslocamento axial do nó correspondente no elemento de casca mais a rotação do nó do elemento de casca multiplicada pela excentricidade. No caso dos elementos propostos no presente trabalho, os deslocamentos no plano do elemento de casca e os deslocamentos axiais do elemento de pórtico são interpolados através de polinômios lineares sendo portanto compatíveis. Existe no entanto uma incompatibilidade entre os deslocamentos axiais do elemento de pórtico, interpolados linearmente, e as rotações do

elemento de casca, interpoladas por polinômio do segundo grau, resultantes da derivação do polinômio cúbico que interpola os deslocamentos de flexão.

Esta incompatibilidade não chega a prejudicar a precisão dos resultados porque, como foi demonstrado por Gupta e Ma [130], o êrro a ela associado se reduz a medida em que a malha de elementos finitos é refinada, não sendo necessária uma quantidade muito grande de elementos para que o êrro se torne insignificante.

CAPÍTULO IX

ELEMENTO DE PÓRTICO ENRIJECEDOR NÃO-LINEAR GEOMÉTRICO

As formulações de elementos de pórtico considerando não-linearidade geométrica têm seguido até hoje basicamente dois enfoques. No primeiro enfoque, também chamado de método da viga-coluna [133], as relações força-deslocamento em cada elemento são obtidas a partir da equação diferencial da viga-coluna. O segundo enfoque reúne todas as formulações que se baseiam em métodos de energia [134]. Estas formulações diferem entre si principalmente na maneira de determinar a configuração deformada e no grau de não-linearidade considerado no tensor de deformação.

A formulação apresentada neste capítulo foi desenvolvida anteriormente como parte de uma Tese de Mestrado [126]. Ela concilia rigor matemático e precisão de resultados, com facilidade de implementação e eficiência computacional. O rigor matemático e a qualidade dos resultados são garantidos através da utilização de uma teoria incremental-iterativa, de caráter geral, baseada no Princípio dos Trabalhos Virtuais (ver Capítulo V). A facilidade de implementação e a eficiência computacional são alcançadas através da adoção de hipóteses simplificadoras adequadas que, sem comprometerem os resultados, permitem a integração explícita das matrizes dos elementos.

As hipóteses básicas adotadas são as seguintes:

i) As deformações são pequenas em comparação com a unidade.

ii) As seções normais ao eixo do elemento, inicialmente planas, permanecem planas durante a deformação.

iii) As translações e as rotações são grandes em comparação, respectivamente, com as dimensões da estrutura e com a unidade.

iv) A configuração do elemento pode ser atualizada considerando-se apenas rotações de corpo rígido, ou seja, mantendo-se o eixo reto e a seção transversal e o comprimento inalterados.

v) As cargas são aplicadas incrementalmente de forma que os deslocamentos incrementais (translações e rotações incrementais) satisfaçam a hipótese de pequenos deslocamentos.

IX.1) EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

As equações incrementais utilizadas pelo algoritmo incremental-iterativo correspondem as equações (V.12) transcritas a seguir:

$$(\underset{\sim}{K}_E + \underset{\sim}{K}_G) \; \Delta \underset{\sim}{u}^k = \underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{F} \qquad \text{(IX.1)}$$

IX.2) SISTEMAS DE REFERÊNCIA

Além do sistema de referência global, utilizam-se mais três sistemas de referência: o local fixo, o local móvel e o local excêntrico.

No sistema fixo a direção 1 coincide com o eixo do elemento e as direções 2 e 3 correspondem a cada uma das direções principais de inércia. Os eixos são mantidos na configuração indeformada do elemento, correspondente a etapa 0.

IX.2.1) Sistema de Referência Local Móvel

O sistema móvel se desloca a medida em que o elemento sofre deformação. Os eixos se mantêm sempre retos e mutuamente perpendiculares. Na etapa 0 os sistemas de referência local fixo e local móvel são coincidentes.

O referencial móvel está sempre situado na configuração correspondente a etapa N, pois a configuração da etapa N + 1, para ser determinada, depende dos deslocamentos incrementais que são as incógnitas do problema. A utilização deste referencial é equivalente a escolha da configuração da etapa N para referência. A determinação da posição dos eixos do sistema de referência móvel é feita através de ângulos de Euler [126,135].

O sistema de eixos x_i , correspondente a configuração indeformada, transforma-se no sistema de eixos y_i , correspondente a configuração deformada, através de três rotações sucessivas (Figura IX.1).

Primeiro, uma rotação α em torno do eixo x_2 dá origem aos eixos x_1^α e x_3^α .

$$\begin{bmatrix} x_1^\alpha \\ x_2 \\ x_3^\alpha \end{bmatrix} = \underset{\sim}{R}^\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(IX.2a)}$$

$$\underset{\sim}{R}^\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad \text{(IX.2b)}$$

Em seguida, os eixos x_1^α e x_2 sofrem um giro de β em torno do eixo x_3^α , transformando-se em y_1 e x_2^β .

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ x_2^\beta \\ x_3^\alpha \end{bmatrix} = \underset{\sim}{R}^\beta \begin{bmatrix} x_1^\alpha \\ x_2 \\ x_3^\alpha \end{bmatrix} \qquad \text{(IX.3a)}$$

$$\underset{\sim}{R}^\beta = \begin{bmatrix} \cos\beta & \operatorname{sen}\beta & 0 \\ -\operatorname{sen}\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(IX.3b)}$$

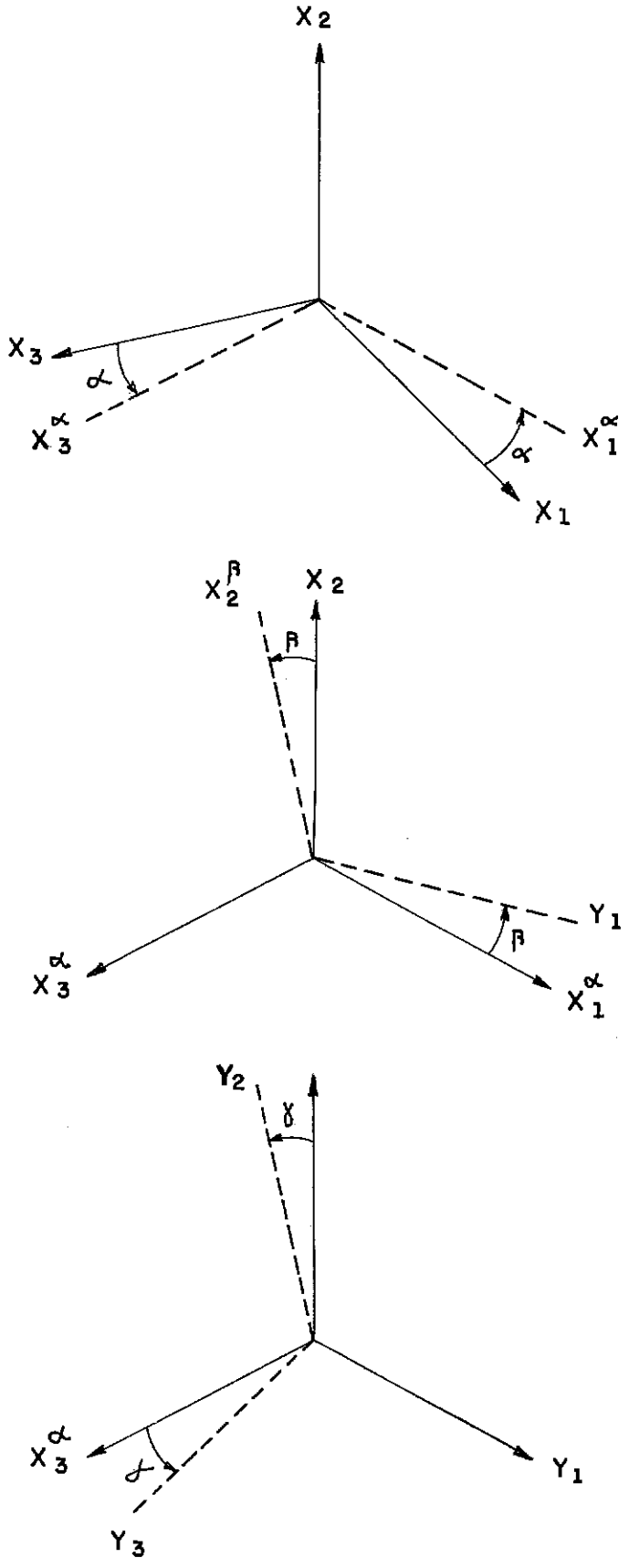


Figura IX.1 - Transformação do sistema de coordenadas local fixo para o local móvel.

Finalmente, após uma rotação γ em torno de y_1 , x_2^{β} e x_3^{α} transformam-se em y_2 e y_3 .

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = R^{\gamma} \begin{bmatrix} y_1 \\ x_2^{\beta} \\ x_3^{\alpha} \end{bmatrix} \qquad \text{(IX.4a)}$$

$$\underset{\sim}{R}^{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \operatorname{sen}\gamma \\ 0 & -\operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \qquad \text{(IX.4b)}$$

As matrizes $\underset{\sim}{R}^{\alpha}$ e $\underset{\sim}{R}^{\beta}$ representam a rotação causada pelas translações relativas dos nós. A matriz $\underset{\sim}{R}^{\gamma}$ representa a rotação causada pela torção.

Substituindo-se sucessivamente as equações (IX.3a) e (IX.2a) em (IX.4a) tem-se:

$$\underset{\sim}{y} = \overset{x}{\underset{\sim}{R}} \; \underset{\sim}{x} \qquad \text{(IX.5a)}$$

Onde,

$$\overset{x}{\underset{\sim}{R}} = \underset{\sim}{R}^{\gamma} \; \underset{\sim}{R}^{\beta} \; \underset{\sim}{R}^{\alpha} \qquad \text{(IX.5b)}$$

A matriz $\underset{\sim}{R}$ que transforma os vetores de deslocamentos nodais, o vetor de forças internas e as matrizes de rigidez é montada a partir da matriz $\underset{\sim}{R}^{x}$.

$$\underset{(12x12)}{\underset{\sim}{R}} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{R}^x & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{R}^x & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{R}^x & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{R}^x \end{bmatrix} \qquad \text{(IX.5c)}$$

Onde,

$\underset{\sim}{0}$ - matriz nula de dimensão 3 x 3

IX.2.2) Sistema de Referência Local Excêntrico

O centro de gravidade da seção transversal dos enrijecedores, na maioria dos casos, é excêntrico em relação a superfície média da casca.

O sistema de referência excêntrico é usado para representar esta excentricidade. Este sistema de referência permite que o eixo do elemento seja definido através dos nós "1" e "2", situados na superfície média da casca, e das excentricidades em relação aos eixos do sistema de referência local móvel (Figura IX.2).

Os graus de liberdade dos nós "1" e "2" e os graus de liberdade dos nós "i" e "j" são chamados de mestres ("masters d.o.f.") e escravos ("slaves d.o.f."), respectivamente.

A posição dos eixos do sistema de referência local excêntrico é obtida aplicando-se uma translação de corpo

rígido nos eixos do sistema de referência móvel [106]. As componentes desta translação referidas ao sistema local móvel são as excentricidades "p", "q" e "m" (Figura IX.2).

Conhecendo-se os deslocamentos incrementais no sistema de referência local móvel determinam-se os deslocamentos no sistema de referência excêntrico aplicando-se a hipótese das seções planas, conforme encontra-se indicado nas figuras IX.3, IX.4, IX.5, IX.6 e IX.7.

Os deslocamentos dos nós "i" e "j" são dados por:

$$\begin{aligned} u_i &= u_1 + n\,\beta_1 - q\,\gamma_1 \\ v_i &= v_1 - n\,\alpha_1 + p\,\gamma_1 \\ w_i &= w_1 + q\,\alpha_1 + p\,\beta_1 \end{aligned} \qquad \text{(IX.6a)}$$

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_1 \\ \beta_i &= \beta_1 \\ \gamma_i &= \gamma_1 \end{aligned} \qquad \text{(IX.6b)}$$

$$\begin{aligned} u_j &= u_2 - n\,\beta_2 - q\,\gamma_2 \\ v_j &= v_2 - n\,\alpha_2 + p\,\gamma_2 \\ w_j &= w_2 + q\,\alpha_2 - p\,\beta_2 \end{aligned} \qquad \text{(IX.6c)}$$

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \alpha_2 \\ \beta_j &= \beta_2 \\ \gamma_j &= \gamma_2 \end{aligned} \qquad \text{(IX.6d)}$$

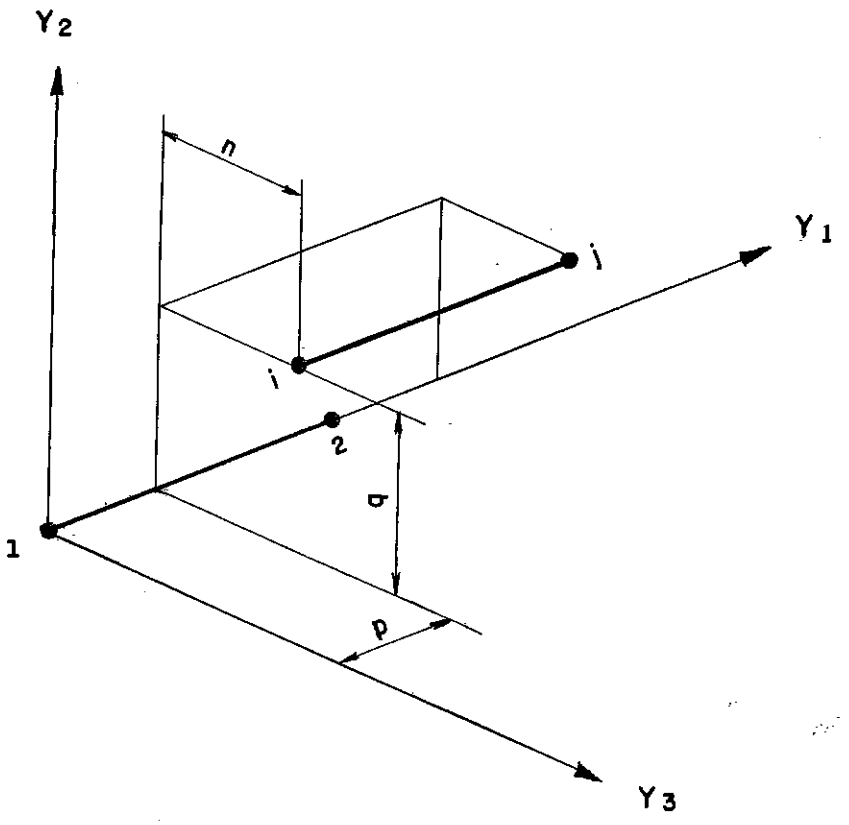
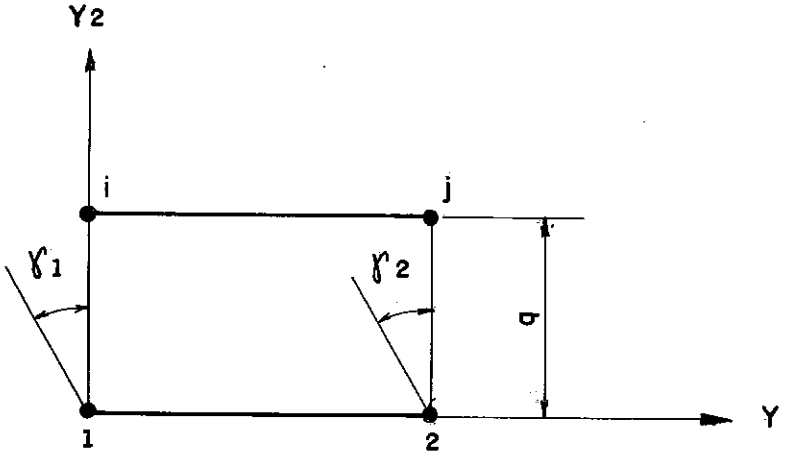


Figura IX.2 - Sistema de referência excêntrico.

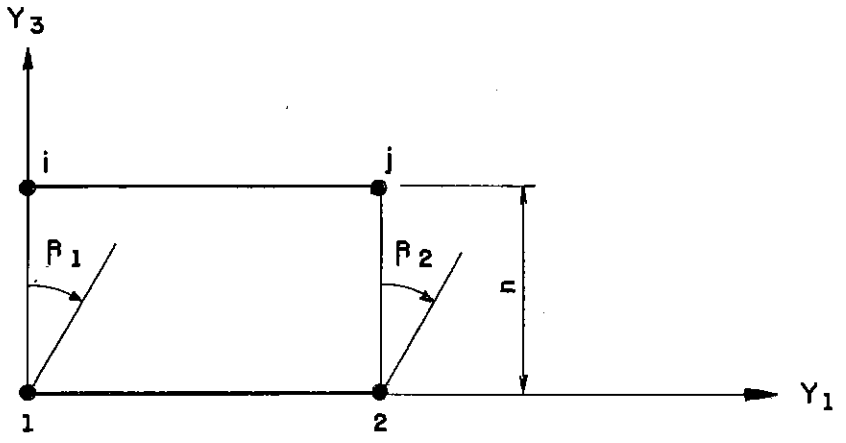


$$u_i = u_1 - q\,\gamma_1 \qquad u_j = u_2 - q\,\gamma_2$$

$$v_i = v_1 \qquad v_j = v_2$$

$$\gamma_i = \gamma_1 \qquad \gamma_j = \gamma_2$$

Figura IX.3 - Acoplamento translação-rotação no plano y_1 y_2 para $p = n = 0$ e $q \neq 0$

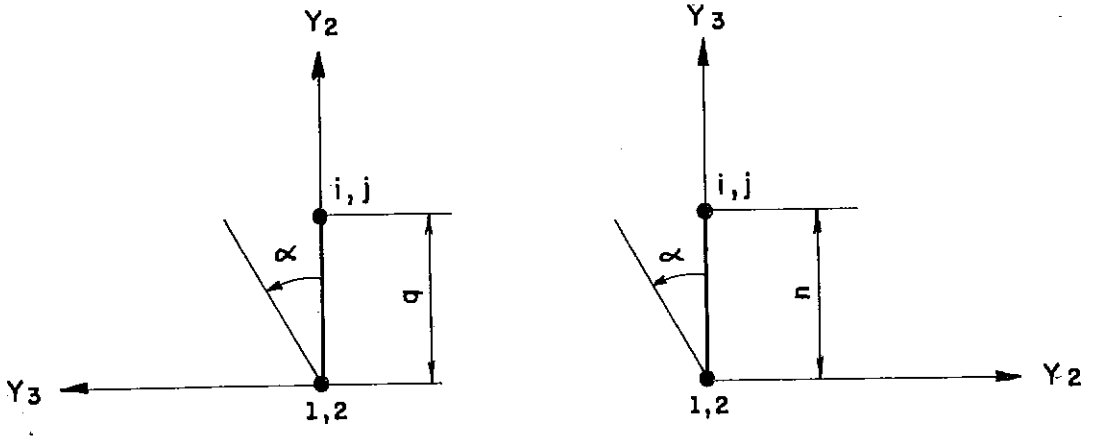


$u_i = u_1 + n\,\beta_1$ $\qquad$ $u_j = u_2 + n\,\beta_2$

$w_i = w_1$ $\qquad$ $w_j = w_2$

$\beta_i = \beta_1$ $\qquad$ $\beta_j = \beta_2$

Figura IX.4 - Acoplamento translação x rotação no plano Y_1 Y_3 para p = q = 0 e n ≠ 0.



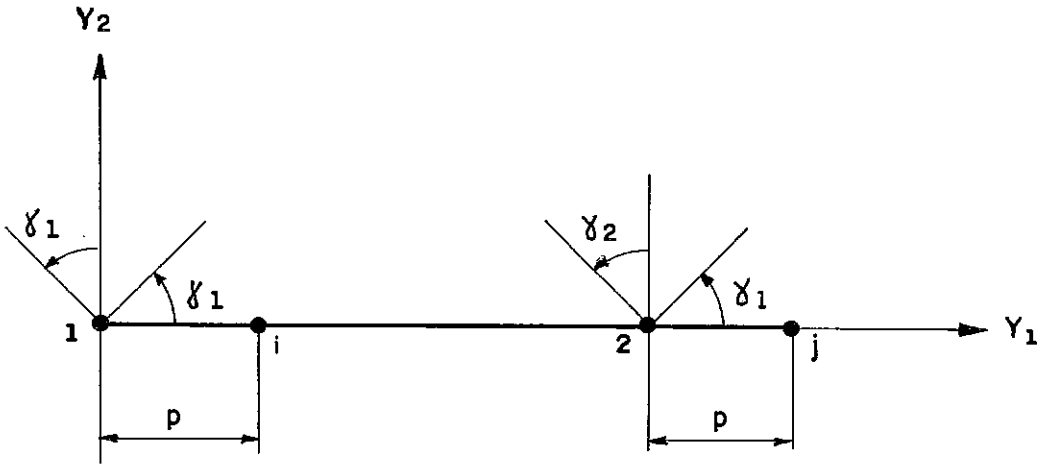
$w_i = q\ \alpha_1$ $\qquad$ $v_j = -\,n\ \alpha_1$

$\alpha_i = \alpha_1$ $\qquad$ $\alpha_i = \alpha_1$

$w_j = q\ \alpha_2$ $\qquad$ $v_j = -\,n\ \alpha_2$

$\alpha_j = \alpha_2$ $\qquad$ $\alpha_j = \alpha_2$

Figura IX.5 - Acoplamento translação x rotação no plano y_2 y_3 para p = n = 0 e q ≠ 0 e para p = q = 0 e n ≠ 0.

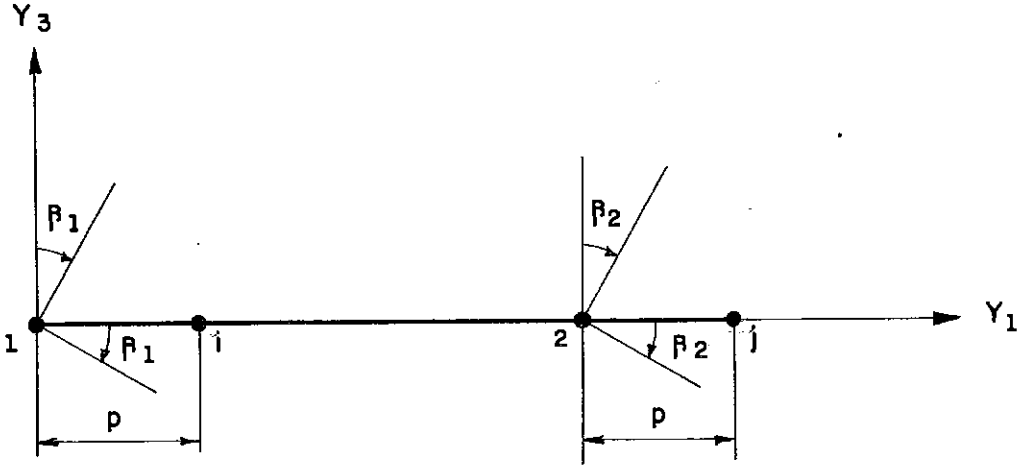


$$u_i = u_1 \qquad u_j = u_2$$

$$v_i = v_1 + p\,\vartheta_1 \qquad v_j = v_2 + p\,\vartheta_2$$

$$\vartheta_i = \vartheta_1 \qquad \vartheta_j = \vartheta_2$$

Figura IX.6 - Acoplamento translação e rotação no plano $y_1\ y_2$ para $q = n = 0$ e $p \neq 0$.



$$u_i = u_1 \qquad u_j = u_2$$

$$w_i = w_1 - p\,\beta_1 \qquad w_j = w_2 - p\,\beta_1$$

$$\beta_i = \beta_1 \qquad \beta_j = \beta_2$$

Figura IX.7 - Acoplamento translação x rotação no plano $y_1\ y_3$ para $q = n = 0$ e $p \neq 0$.

Em forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix} = \underset{\sim}{R}_E \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} \qquad \text{(IX.7a)}$$

$$\begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \\ \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \end{bmatrix} = \underset{\sim}{R}_E \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(IX.7b)}$$

$$\underset{\sim}{R}_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & n & -q \\ 0 & 1 & 0 & -n & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 & q & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(IX.7c)}$$

A transformação do vetor de deslocamentos incrementais dos nós mestres no vetor de deslocamentos dos nós escravos é representada pela seguinte equação:

$$(\underset{\sim}{\Delta u})_{EN} = \underset{\sim}{T}_E \; (\underset{\sim}{\Delta u})_{CA} \qquad \text{(IX.8a)}$$

Onde,

$$\underset{12 \times 12}{\overset{T}{\underset{\sim}{E}}} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{R}_E & \underset{\sim}{O} \\ \underset{\sim}{O} & \underset{\sim}{R}_E \end{bmatrix} \qquad \text{(IX.8b)}$$

Conhecendo-se as forças nodais no sistema de referência excêntrico determinam-se as forças nodais no sistema de referência móvel aplicando-se as equações de equilíbrio da estática, conforme encontra-se indicado nas figuras IX.8, IX.9 e IX.10.

As forças dos nós "1" e "2" são dadas por:

$$\begin{aligned} N_1 &= N_i \\ V_1 &= V_i \\ Q_1 &= Q_i \end{aligned} \qquad \text{(IX.9a)}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= -n V_i + q Q_i + T_i \\ L_1 &= n N_i - p Q_i + L_i \\ M_1 &= -q N_i + p V_i + M_i \end{aligned} \qquad \text{(IX.9b)}$$

$$N_2 = N_j$$

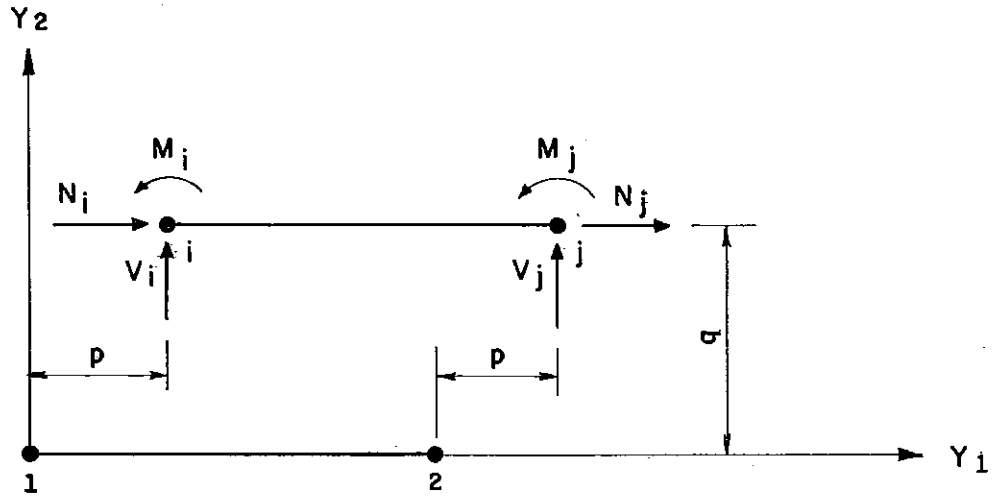
$$V_2 = V_j \qquad \text{(IX.9c)}$$

$$Q_2 = Q_j$$

$$T_2 = -n V_j + q Q_j + T_j$$

$$L_2 = n N_j - p Q_j + L_j \qquad \text{(IX.9d)}$$

$$M_2 = -q N_j + p V_j + M_j$$

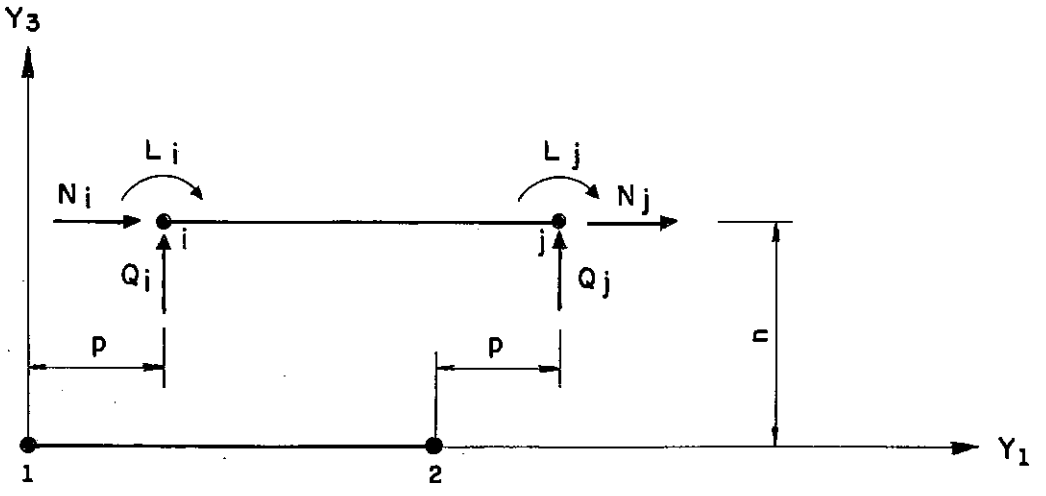


$N_1 = N_i$ $\qquad$ $N_2 = N_j$

$V_1 = V_i$ $\qquad$ $V_2 = V_j$

$M_1 = -qN_i + pV_i + M_i$ $\qquad$ $M_2 = -qN_j + pV_j + M_j$

Figura IX.8 - Equilíbrio de forças no plano y_1 y_2 para n = 0

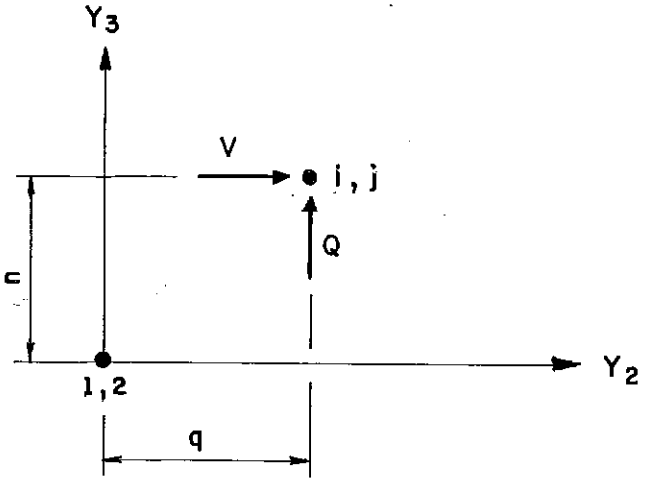


$$N_1 = N_i \qquad N_2 = N_j$$

$$Q_1 = Q_i \qquad Q_2 = Q_j$$

$$L_1 = nN_i - pQ_i + L_i \qquad L_2 = nN_j - pQ_j + L_j$$

Figura IX.9 - Equilíbrio de forças no plano y_1 y_3 para $q = 0$



$$V_1 = V_i \qquad V_2 = V_j$$

$$Q_1 = Q_i \qquad Q_2 = Q_j$$

$$T_1 = nV_i - pQ_i + T_i \qquad T_2 = -nV_j + qQ_j + T_j$$

Figura IX.10 - Equilíbrio de forças no plano y_2 y_3 para $p = 0$.

Em forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ Q_1 \\ T_1 \\ L_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{R}_c \begin{bmatrix} N_i \\ V_i \\ Q_i \\ T_i \\ L_i \\ M_i \end{bmatrix} \qquad \text{(IX.10a)}$$

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ V_2 \\ Q_2 \\ T_2 \\ L_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{R}_c \begin{bmatrix} N_j \\ V_j \\ Q_j \\ T_j \\ L_j \\ M_j \end{bmatrix} \qquad \text{(IX.10b)}$$

$$\underset{\sim}{R}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n & q & 1 & 0 & 0 \\ n & 0 & -p & 0 & 1 & 0 \\ -q & p & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(IX.10c)}$$

A transformação do vetor de forças nodais correspondente aos nós escravos para um vetor de forças nodais correspondente aos nós mestres é representada pela seguinte equação:

$$\left(\Delta \underset{\sim}{P} \right)_{CA} = \underset{\sim}{T}_{c} \left(\Delta \underset{\sim}{P} \right)_{EN} \qquad \text{(IX.11a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{T}_{c} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{R}_{c} & \underset{\sim}{O} \\ \underset{\sim}{O} & \underset{\sim}{R}_{c} \end{bmatrix} \qquad \text{(IX.11b)}$$

A partir da equação (IX.11a) obtém-se

$$\left(\Delta \underset{\sim}{P} \right)_{EN} = \left(\underset{\sim}{T}_{c} \right)^{-1} \left(\Delta \underset{\sim}{P} \right)_{CA} \qquad \text{(IX.12)}$$

No sistema de referência excêntrico a relação força-deslocamento é representada pela seguinte equação:

$$\left(\Delta \underset{\sim}{P} \right)_{EN} = \left(\underset{\sim}{K} \right)_{EN} \left(\Delta \underset{\sim}{u} \right)_{EN} \qquad \text{(IX.13)}$$

Substituindo as equações (IX.8a) e (IX.12) em (IX.13), e isolando $\left(\Delta \underset{\sim}{P} \right)$ tem-se:

$$\left(\Delta \underset{\sim}{P} \right)_{CA} = \underset{\sim}{T}_{C} \left(\underset{\sim}{K} \right)_{EN} \underset{\sim}{T}_{E} \left(\Delta \underset{\sim}{u} \right)_{CA} \qquad \text{(IX.14a)}$$

Fazendo

$$(\underset{\sim}{K})_{CA} = \underset{\sim}{T}_{C} \; (\underset{\sim}{K})_{EN} \; \underset{\sim}{T}_{E} \qquad \text{(IX.14b)}$$

e substituindo (IX.14b) em (IX.14a)

$$(\Delta \underset{\sim}{P})_{CA} = (\underset{\sim}{K})_{CA} \; (\Delta \underset{\sim}{u})_{CA} \qquad \text{(IX.15)}$$

Comparando-se os elementos das matrizes $\underset{\sim}{R}_{E}$ e $\underset{\sim}{R}_{C}$ nas equações (IX.7c) e (IX.10c) constata-se que:

$$\underset{\sim}{R}_{C} = (\underset{\sim}{R}_{E})^{T} \qquad \text{(IX.16)}$$

Comparando-se as submatrizes que compõem as matrizes $\underset{\sim}{T}_{E}$ e $\underset{\sim}{T}_{C}$ nas equações (IX.8) e (IX.11) constata-se que

$$\underset{\sim}{T}_{C} = (\underset{\sim}{T}_{E})^{T} \qquad \text{(IX.17)}$$

Substituindo a equação (IX.17) em (IX.14b) tem-se:

$$(\underset{\sim}{K})_{CA} = (\underset{\sim}{T}_{E})^{T} \; (\underset{\sim}{K})_{EN} \; \underset{\sim}{T}_{E} \qquad \text{(IX.18)}$$

O sistema de referência básico do elemento é o sistema local excêntrico. O campo de deslocamentos é definido em relação a ele e as matrizes de rigidez e o vetor de forças são determinados neste referencial.

Durante uma análise, os deslocamentos são determinados no sistema de referência global e são transformados sucessivamente para o sistema local fixo, local móvel e local excêntrico. As matrizes de rigidez são calculadas e o vetor de forças é atualizado no sistema local excêntrico, sendo transformados sucessivamente para o local móvel, local fixo e global.

IX.3) CAMPO DE DESLOCAMENTOS

O campo de deslocamentos incrementais é escrito tomando-se como referência o sistema local excêntrico. Como este referencial acompanha o deslocamento do elemento podem-se utilizar as mesmas funções de interpolação usadas na análise linear de pórticos.

Desta forma, escolhem-se funções lineares para interpolar os deslocamentos axial e de torção e funções cúbicas para interpolar os deslocamentos transversais, resultantes da flexão.

O elemento possui dois nós com seis incógnitas nodais: três translações e três rotações (Figura IX.11). As equações que expressam o campo de deslocamento em função dos deslocamentos nodais tem a seguinte forma:

$$\Delta u_i = h_{\ell}^{i\,k}\, \Delta u_{\ell} \qquad \begin{matrix} (\,i = 1,\ 2,\ 3) \\ (\,\ell = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ 12) \end{matrix} \qquad \text{(IX.19a)}$$

ou

$$\Delta\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{H}\ \Delta\underset{\sim}{u}^{k} \qquad \text{(IX.19b)}$$

Sendo,

$\Delta\underset{\sim}{u}$ - vetor dos deslocamentos incrementais, referido ao sistema local excêntrico.

$\underset{\sim}{H}$ - matriz das funções de interpolação definidas em relação ao sistema local excêntrico.

$\Delta\underset{\sim}{u}^{k}$ - vetor dos deslocamentos nodais incrementais, referido ao sistema local excêntrico.

h_{ℓ}^{i} - componentes da matriz H, correspondentes a linha "i" e a coluna "ℓ".

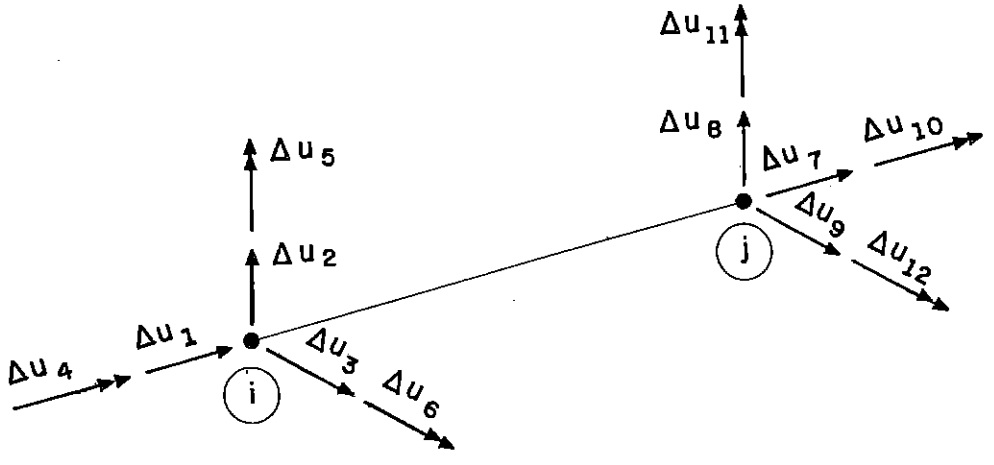


Figura IX.11 - Graus de liberdade do elemento de pórtico.

Os elementos da matriz H, que são polinômios em r, s e t, estão determinados a seguir em função das variáveis s e t e dos polinômios $f_i(r)$ e $g_i(r)$.

$$h_1^1 = f_1 \qquad h_2^1 = -g_2 s \qquad h_3^1 = -g_2 t$$

$$h_5^1 = g_3 t \qquad h_6^1 = -g_3 s \qquad h_7^1 = f_4$$

$$h_8^1 = -g_5 s \qquad h_9^1 = -g_5 t \qquad h_{11}^1 = g_6 t$$

$$h_{12}^1 = -g_6 s \qquad h_2^2 = f_2 \qquad h_4^2 = -f_1 t$$

$$h_6^2 = f_3 \qquad h_8^2 = f_5 \qquad h_{10}^2 = -f_4 t \qquad \text{(IX.20)}$$

$$h_{12}^2 = f_6 \qquad h_3^3 = f_2 \qquad h_4^3 = f_1 s$$

$$h_5^2 = -f_3 \qquad h_9^3 = f_5 \qquad h_{10}^3 = f_4 s$$

$$h_{11}^3 = -f_6$$

$$h_4 = h_{10} = h_1 = h_3 = h_5 = h_7 = h_9 = 0$$

$$h_{11}^2 = h_1^3 = h_2^3 = h_6^3 = h_7^3 = h_8^3 = h_{12}^3 = 0$$

Sendo,

$$f_1 = 1 - \frac{r}{L} \qquad f_2 = 1 - 3\frac{r^2}{L^2} + 2\frac{r^3}{L^3}$$

$$f_3 = \left(\frac{r}{L} - 2\frac{r^2}{L^2} + \frac{r^3}{L^3}\right)L \qquad f_4 = \frac{r}{L} \qquad \text{(IX.21a)}$$

$$f_5 = 3\frac{r^2}{L^2} - 2\frac{r^3}{L^3} \qquad f_6 = \left(-\frac{r}{L} + \frac{r^2}{L^2}\right)r$$

$$g_1 = -\frac{1}{L} \qquad g_2 = \left(-\frac{r}{L} + \frac{r^2}{L^2}\right)\frac{6}{L}$$

$$g_3 = 1 - 4\frac{r}{L} + 3\frac{r^2}{L^2} \qquad g_4 = -g_1 \qquad \text{(IX.21b)}$$

$$g_5 = -g_2 \qquad g_6 = -2\frac{r}{L} + 3\frac{r^2}{L^2}$$

IX.4) EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS E CAMPO DE TENSÕES

As equações constitutivas do elemento foram escolhidas de acordo com a teoria técnica de vigas, pois as barras de um pórtico se comportam como vigas submetidas a flexão, torção e compressão ou tração.

Segundo essa teoria [46], a flexão e a compressão ou tração produzem tensões normais à seção transversal, enquanto a torção produz tensões tangenciais e empenamento da seção. O empenamento, que só deixa de ocorrer em seções circulares, não foi considerado na determinação do campo de deslocamentos, para não contrariar a hipótese das seções planas.

O tensor de tensão para uma viga contém apenas cinco componentes não nulas: S_{11} , $S_{12} = S_{21}$ e $S_{13} = S_{31}$. Durante o processo incremental estas componentes são

determinadas de forma incremental :

$$ {}^{N+1}\underset{\sim}{S}_v = {}^{N}\underset{\sim}{S}_v + \Delta \underset{\sim}{S}_v \qquad \text{(IX.22)} $$

As componentes do tensor incremental de tensão de Cauchy se relacionam com as componentes da parcela linear do tensor incremental de deformação através das equações constitutivas:

$$ \Delta \underset{\sim}{S}_v = \underset{\sim}{C} \; \Delta \underset{\sim}{e}_v \qquad \text{(IX.23)} $$

Onde,

$$ \Delta \underset{\sim}{S}_v^T = \begin{bmatrix} \Delta S_{11} & \Delta S_{12} & \Delta S_{13} \end{bmatrix} \qquad \text{(IX.24a)} $$

$$ \Delta \underset{\sim}{e}_v^T = \begin{bmatrix} \Delta e_{11} & 2\,\Delta e_{12} & 2\,\Delta e_{13} \end{bmatrix} \qquad \text{(IX.24b)} $$

$$ \underset{\sim}{C} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \qquad \text{(IX.24c)} $$

Onde,

E - módulo de elasticidade

ν - coeficiente de Poisson

As componentes Δe_{ij} são dadas por:

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_j} + \right. \qquad \text{(IX.25a)}$$

$$\left. + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i}\right]$$

Levando-se em consideração que a configuração de referência é a configuração da etapa N (referencial local excêntrico), obtem-se:

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Delta u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial y_i}\right] \qquad \text{(IX.25b)}$$

$i = 1$

$j = 1,\ 2,\ 3$

$y_1 = r$

$y_2 = s$

$y_3 = t$

A equação (IX.25a) pode ser simplificada, transformando-se na equação (IX.25b), porque na configuração da etapa N a decomposição incremental dos deslocamentos se reduz a $u_i = {}^{N+1}u_i = \Delta u_i$.

A relação entre $\Delta \underset{\sim}{e}_v$ e os deslocamentos nodais incrementais é estabelecida utilizando-se as equações (IX.19a) e (IX.25b).

$$\Delta \underset{\sim}{e}_v = \underset{\sim}{B}_L \Delta \underset{\sim}{u}^k \qquad \text{(IX.26a)}$$

Sendo,

$$(B_L)_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\partial h_j^1}{\partial y_i} & \text{p/} \quad i = 1 \\ \dfrac{\partial h_j^1}{\partial y_i} + \dfrac{\partial h_j^i}{\partial y_1} & \text{p/} \quad 1 < i \leq 3 \end{cases} \qquad \text{(IX.26b)}$$

Substituindo (IX.26a) em (IX.23), tem-se:

$$\Delta \underset{\sim}{S}_v = \underset{\sim}{C} \; \underset{\sim}{B}_L \; \Delta \underset{\sim}{u}^k \qquad \text{(IX.27)}$$

IX.5) MATRIZES DE RIGIDEZ E VETOR DE FORÇAS INTERNAS

As integrais que determinam as matrizes de rigidez e o vetor de forças internas, são resolvidas explicitamente, na configuração da etapa N. Isto pode ser feito porque as funções de interpolação estão definidas em relação ao referencial excêntrico, que é móvel. As matrizes assim obtidas são transformadas sucessivamente para os referenciais local móvel, local fixo e global.

A matriz de rigidez elástica $\underset{\sim}{K}_E$ é determinada através da equação (V.10a) transcrita a seguir:

$$\underset{\sim}{K}_E = \int \underset{\sim}{B}_L^T \; \underset{\sim}{C} \; \underset{\sim}{B}_L \; dV \qquad \text{(IX.28)}$$

$$
\underset{\sim}{K}_E = \begin{bmatrix}
K_{11} & & & & & & K_{17} & & & & & \\
 & K_{22} & & & K_{26} & & K_{28} & & & & K_{2,12} \\
 & & K_{33} & & K_{35} & & & & K_{39} & & K_{3,11} \\
 & & & K_{44} & & & & & & K_{4,10} & \\
 & & & & K_{55} & & & & K_{59} & & K_{5,11} \\
 & & & & & K_{66} & & K_{68} & & & K_{6,12} \\
 & & & & \text{SIM} & & K_{77} & & & & \\
 & & & & & & & K_{88} & & & K_{8,12} \\
 & & & & & & & & K_{99} & & K_{9,11} \\
 & & & & & & & & & K_{10,10} & \\
 & & & & & & & & & & K_{11,11} \\
 & & & & & & & & & & K_{12,12}
\end{bmatrix}
$$

$$
K_{11} = \frac{E\,A_x}{L} \qquad K_{17} = -K_{11} \qquad \text{(IX.29a)}
$$

$$
K_{22} = \frac{12\,EI_z}{L^3} \qquad K_{26} = \frac{6\,EI_z}{L^2}
$$

$K_{28} = -K_{22}$ $\quad$ $K_{2,12} = K_{26}$

$$K_{33} = \frac{12\,EI_y}{L^3} \qquad K_{35} = \frac{-6\,EI_y}{L^2}$$

$K_{39} = -K_{33}$ $\quad$ $K_{3,11} = K_{35}$

$$K_{44} = \frac{GI_x}{L} \qquad K_{4,10} = -K_{44}$$

$$K_{55} = \frac{4\,EI_y}{L} \qquad K_{5,9} = \frac{6\,EI_y}{L^2}$$

$$K_{5,11} = \frac{2\,EI_y}{L} \qquad K_{66} = \frac{4\,EI_z}{L}$$

$$K_{68} = -\frac{6\,EI_z}{L^2} \qquad K_{6,12} = \frac{2\,EI_z}{L}$$

$K_{77} = K_{11}$ $\quad$ $K_{88} = K_{22}$

$K_{8,12} = -K_{26}$ $\quad$ $K_{99} = K_{33}$

$K_{9,11} = -K_{35}$ $\quad$ $K_{10,10} = K_{4,4}$

$K_{11,11} = K_{5,5}$ $\quad$ $K_{12,12} = K_{6,6}$

Sendo,

A_x - área da seção transversal

I_x - constante de torção

I_y - momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo s

I_z - momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo t

E - módulo de elasticidade

G - módulo de elasticidade transversal

$$\left(G = \frac{E}{2 (1 + \nu)} \right)$$

ν - coeficiente de Poisson

O vetor de forças internas é determinado através das equações (V.10c) e (V.10d), transcritas a seguir:

$$\underset{\sim}{F}^{k} = \underset{\sim}{F}^{k-1} + \Delta \underset{\sim}{F} \qquad \text{(IX.30)}$$

$$\Delta \underset{\sim}{F} = \int \underset{\sim}{B}_L^T \, \Delta \underset{\sim}{S}_V \, dV \qquad \text{(IX.31)}$$

Substituindo sucessivamente (IX.31), (IX.27) e (IX.28) em (IX.30) obtém-se:

$$\underset{\sim}{F}^{k} = \underset{\sim}{F}^{k-1} + \underset{\sim}{K}_E \, \Delta \underset{\sim}{u}^{k-1} \qquad \text{(IX.32)}$$

As forças internas $\underset{\sim}{F}$ são os esforços nodais correspondentes ao campo de tensões $\underset{\sim}{S}_V$. A distribuição de

esforços ao longo do elemento é determinada de acordo com o processo usual da estática. O esforço normal e o momento torsor são constantes em todo elemento, enquanto os momentos fletores variam linearmente.

$$N = - F_1$$

$$T = - F_4$$

$$M_Y = F_5 (1 - (r/L)) - F_{11} (r/L) \qquad \text{(IX.33)}$$

$$M_z = F_6 (1 - (r/L)) - F_{12} (r/L)$$

Sendo,

N - esforço normal

T - momento torsor

M_Y - momento fletor em torno do eixo s

M_z - momento fletor em torno do eixo t

As componentes do tensor de tensão e as forças internas podem ser relacionadas entre si através das

equações (IX.33) e da teoria de flexão usual [136].

$$S_{11} = \frac{N}{A_x} + \frac{M_z\ s}{I_z} - \frac{M_y\ t}{I_y}$$

$$S_{12} = -\frac{T\ t}{I_x} \qquad \text{(IX.34a)}$$

$$S_{13} = \frac{T\ s}{I_x}$$

Substituindo (IX.33) em (IX.34a)

$$S_{11} = -\frac{F_1}{A_x} + \frac{[F_6\ (1 - (r/L) - F_{12}\ (r/L)]\ s}{I_z} +$$

$$- \frac{[F_5\ (1 - (r/L)) - F_{11}\ (r/L)]\ t}{I_y}$$

$$S_{12} = \frac{F_4\ t}{I_x} \qquad \text{(IX.34b)}$$

$$S_{13} = -\frac{F_4\ s}{I_x}$$

A matriz de rigidez geométrica resulta da discretização da seguinte integral:

$$\int {}^{N}S_{ij}\ \delta\ \Delta\ n_{ij}\ dV = (\delta\ \Delta\ \underset{\sim}{u}^{k})^{T}\ \underset{\sim}{K}_{G}\ \Delta\ \underset{\sim}{u}^{k} \qquad \text{(IX.35)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{K}_G = \int \underset{\sim}{B}_{NL}^T \; \underset{\sim}{S}_M \; \underset{\sim}{B}_{NL} \; dV \qquad \text{(IX.36)}$$

As componentes Δn_{ij} são dadas por:

$$\Delta n_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial y_i} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial y_j} \qquad \text{(IX.37)}$$

$i = 1$

$j = 1, 2, 3$

$y_1 = r$

$y_2 = s$

$y_3 = t$

A matriz $\underset{\sim}{B}_{NL}$ é constituída por derivadas das funções de interpolação:

$$(\underset{\sim}{B}_{NL})_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\partial h_j^i}{\partial y_1} & \text{p/ } i \leq 3 \\ \dfrac{\partial h_j^{i-3}}{\partial y_2} & \text{p/ } 3 < i \leq 6 \\ \dfrac{\partial h_j^{i-6}}{\partial y_3} & \text{p/ } 6 < i \leq 9 \end{cases} \qquad \text{(IX.38)}$$

A matriz $\underset{\sim}{S}_M$ contém as componentes do tensor de tensão rearranjadas de uma maneira adequada.

$$\underset{\sim}{S}_{M\ 9x9} = \begin{bmatrix} S_{11}\,\underset{\sim}{I} & S_{12}\,\underset{\sim}{I} & S_{13}\,\underset{\sim}{I} \\ S_{12}\,\underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ S_{13}\,\underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \qquad \text{(IX.39)}$$

Os elementos da matriz de rigidez geométrica referida ao sistema móvel, são determinados utilizando-se as equações (IX.39), (IX.38), (IX.34b) e (IX.36)

$$\underset{\sim}{K}_G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{15} & g_{16} & g_{17} & g_{18} & g_{19} & g_{1,11} & g_{1,12} \\ & g_{22} & g_{24} & g_{26} & g_{27} & g_{28} & g_{2,10} & & g_{2,12} & \\ & & g_{33} & g_{34} & g_{35} & g_{37} & g_{39} & g_{3,10} & g_{3,11} & \\ & & & g_{44} & g_{45} & g_{46} & g_{48} & g_{49} & g_{4,10} & g_{4,11} & g_{4,12} \\ & & & & g_{55} & g_{57} & g_{59} & g_{5,10} & g_{5,11} & \\ & & & & & g_{66} & g_{67} & g_{68} & g_{6,10} & g_{6,12} \\ & & & & & & g_{77} & g_{78} & g_{79} & g_{7,11} & g_{7,12} \\ & & & & & & & g_{88} & g_{8,10} & g_{8,12} \\ & & & & & & & & g_{99} & g_{9,10} & g_{9,11} & \\ & & & & & & & & & g_{10,10} & g_{10,11} & g_{10,12} \\ & & & & & & & & & & g_{11,11} & \\ & & & & & & & & & & & g_{12,12} \end{bmatrix}$$

SIM

$$g_{11} = -\frac{F_1}{L} \; ; \; g_{12} = -\frac{F_6}{L^2} - \frac{F_{12}}{L^2} \; ; \; g_{13} = \frac{F_5}{L^2} + \frac{F_1}{L^2}$$

$$g_{15} = -\frac{F_5}{L} \; ; \; g_{16} = -\frac{F_6}{L} \; ; \; g_{17} = \frac{F_1}{L}$$

$$g_{18} = \frac{F_6}{L^2} + \frac{F_{12}}{L^2} \; ; \; g_{19} = -\frac{F_5}{L^2} - \frac{F_{11}}{L^2} \; ; \; g_{1,11} = -\frac{F_{11}}{L}$$

$$g_{1,12} = -\frac{F_{12}}{L} \; ; \; g_{22} = -\frac{12I_z}{L^3A_x} F_1 - \frac{6}{5L} F_1$$

$$g_{24} = \frac{F_5}{2L} + \frac{F_{11}}{2L} \; ; \; g_{26} = -\frac{6I_z}{L^2A_x} F_1 - \frac{F_1}{10} \qquad \text{(IX.40a)}$$

$$g_{27} = \frac{F_6}{L^2} + \frac{F_{12}}{L^2} \; ; \; g_{28} = \frac{12I_z}{L^3A_x} F_1 + \frac{6}{5L} F_1$$

$$g_{2,10} = -\frac{F_5}{2L} + \frac{F_{11}}{2L} \; ; \; g_{2,12} = -\frac{6I_z}{L^2A_x} F_1 - \frac{F_1}{10}$$

$$g_{3,3} = -\frac{12I_y}{L^3A_x} F_1 - \frac{6}{5L} F_1 \; ; \; g_{3,4} = \frac{F_6}{2L} - \frac{F_{12}}{2L}$$

$$g_{3,5} = \frac{6I_y}{L^2A_x} F_1 + \frac{F_1}{10} \; ; \; g_{37} = -\frac{F_5}{L^2} - \frac{F_{11}}{L^2}$$

$$g_{3,9} = \frac{12I_y}{L^3A_x} F_1 + \frac{6}{5L} F_1 \; ; \; g_{3,10} = -\frac{F_6}{2L} + \frac{F_{12}}{2L}$$

$$g_{3,11} = \frac{6I_y}{L^2 A_x} F_1 + \frac{F_1}{10} \; ; \; g_{44} = -\frac{I_x}{LA_x} F_1$$

$$g_{45} = \frac{F_6}{12} + \frac{F_{12}}{12} \; ; \; g_{46} = -\frac{F_5}{12} - \frac{F_{11}}{12} \qquad \text{(IX.40b)}$$

$$g_{48} = -\frac{F_5}{2L} + \frac{F_{11}}{2L} \; ; \; g_{49} = -\frac{F_6}{2L} + \frac{F_{12}}{2L}$$

$$g_{4,10} = \frac{I_x}{LA_x} F_1 \; ; \; g_{4,11} = -\frac{F_6}{12} - \frac{F_{12}}{12}$$

$$g_{4,12} = \frac{F_5}{12} + \frac{F_{11}}{12} \; ; \; g_{55} = -\frac{4I_y}{LA_x} F - \frac{2L}{15} F_1$$

$$g_{57} = \frac{F_5}{L} \; ; \; g_{59} = -\frac{6I_y}{L^2 A_x} F_1 - \frac{F_1}{10}$$

$$g_{5,10} = -\frac{F_6}{12} - \frac{F_{12}}{12} \; ; \; g_{5,11} = -\frac{2I_y}{LA_x} F_1 + \frac{L}{30} F_1$$

$$g_{66} = -\frac{4I_z}{LA_x} F - \frac{2L}{15} F_1 \; ; \; g_{67} = \frac{F_6}{L} \qquad \text{(IX.40c)}$$

$$g_{68} = \frac{6I_z}{A_x L^2} F_1 + \frac{F_1}{10} \; ; \; g_{6,10} = \frac{F_5}{12} + \frac{F_{11}}{12}$$

$$g_{6,12} = -\frac{2I_z}{LA_x} F_1 + \frac{L}{30} F_1 \; ; \; g_{77} = -\frac{F_1}{L}$$

$$g_{78} = -\frac{F_6}{L^2} - \frac{F_{12}}{L^2} \; ; \; g_{79} = \frac{F_5}{L^2} + \frac{F_{11}}{L^2}$$

$$g_{7,11} = \frac{F_{11}}{L} \; ; \; g_{7,12} = \frac{F_{12}}{L}$$

$$g_{88} = -\frac{12I_z}{L^3A_x} F_1 - \frac{6}{5L} F_1 \; ; \; g_{6,10} = \frac{F_5}{2L} - \frac{F_{11}}{2L}$$

$$g_{8,12} = \frac{6I_z}{L^2A_x} F_1 + \frac{F_1}{10} \; ; \; g_{99} = -\frac{12I_y}{L^3A} F_1 - \frac{6}{5L} F_1$$

$$g_{9,10} = \frac{F_6}{2L} - \frac{F_{12}}{2L} \; ; \; g_{9,11} = -\frac{6I_y}{L^2A} F_1 - \frac{F_1}{10} \qquad \text{(IX.40d)}$$

$$g_{10,10} = -\frac{I_x}{LA_x} F_1 \; ; \; g_{10,11} = \frac{F_6}{12} + \frac{F_{12}}{12}$$

$$g_{10,12} = -\frac{F_5}{12} - \frac{F_{11}}{12} \; ; \; g_{11,11} = -\frac{4I_y}{LA_x} F_1 - \frac{2L}{15} F_1$$

$$g_{12,12} = -\frac{4I_z}{LA_x} F_1 - \frac{2L}{15} F_1$$

O esforço F_1 atua no nó "i" e representa o esforço normal no elemento. F_1 é positivo quando o esforço é de compressão e negativo quando de tração. Os esforços F_5 e F_6 são os momentos fletores no nó "i" e os esforços F_{11} e F_{12} são os momentos fletores no nó "j". Todos estes esforços encontram-se referidos ao sistema de referência local excêntrico.

As matrizes de rigidez e o vetor de forças internas referidos ao sistema de coordenadas global são determinados através das seguintes equações:

$$\underset{\sim}{G}\underset{\sim}{K}_L = \underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{R}^T \underset{\sim}{T}_E^T \underset{\sim}{K}_L \underset{\sim}{T}_E \underset{\sim}{R} \underset{\sim}{T} \qquad \text{(IX.41a)}$$

$$\underset{\sim}{G}^F = \underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{R}^T \underset{\sim}{T}_E^T \underset{\sim}{F} \qquad \text{(IX.41b)}$$

$$\underset{\sim}{G}\underset{\sim}{K}_G = \underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{R}^T \underset{\sim}{T}_E^T \underset{\sim}{K}_G \underset{\sim}{T}_E \underset{\sim}{R} \underset{\sim}{T} \qquad \text{(IX.41c)}$$

onde:

$\underset{\sim}{R}$ - matriz que realiza a transformação do sistema de referência local fixo para o local móvel;

$\underset{\sim}{T}$ - matriz que realiza a transformação do sistema de referência global para o local fixo;

$\underset{\sim}{T}_E$ - matriz que realiza a transformação do sistema de referência local móvel para o local excêntrico.

CAPÍTULO X

ELEMENTO DE PÓRTICO ENRIJECEDOR ELASTO-PLÁSTICO

As formulações de elementos finitos de pórtico considerando não-linearidade física têm seguido até hoje basicamente três enfoques. O primeiro deles se baseia na teoria plástica de vigas e utiliza resultantes de tensões na definição do critério de escoamento [137]. O segundo enfoque se baseia na teoria matemática da plasticidade e utiliza tensões na definição do critério de escoamento [138]. O terceiro enfoque procura conciliar os dois anteriores [139].

A formulação apresentada neste capítulo segue o primeiro enfoque e foi desenvolvida como parte de um exame de qualificação para o Doutorado [127]. Ela caracteriza-se pela simplicidade teórica e pela eficiência computacional [128]. Ou seja, as rotinas de elemento são simples e são obtidos bons resultados com o mínimo de esforço computacional.

As hipóteses básicas adotadas são as seguintes:

i) As translações e as rotações são pequenas em comparação, respectivamente, com as dimensões da estrutura e com a unidade (Hipótese de pequenos deslocamentos).

ii) Pode ocorrer plastificação apenas nas extremidades do elemento.

iii) As relações incrementais entre os esforços internos e os deslocamentos nodais do elemento podem ser obtidas tratando-se as rótulas plásticas como rótulas elásticas.

iv) O critério de escoamento da seção pode ser função apenas dos momentos fletores e do esforço normal que atuam nesta seção.

v) As cargas são aplicadas incrementalmente de forma que a plastificação da estrutura ocorra de maneira gradual.

O elemento tem dois nós com seis incógnitas cada. São utilizados três sistemas de referência: o global, o local fixo e o local excêntrico. A matriz de rigidez e o vetor de forças internas do elemento são determinados no sistema de referência local excêntrico (ver item (IX.2))

X.1) EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

As equações incrementais utilizadas pelo algoritmo incremental-iterativo correspondem às equações (V.13) transcritas a seguir:

$$\underset{\sim}{K}_P \, \Delta \underset{\sim}{u}^k = \underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{F} \qquad (X.1)$$

X.2) MATRIZ DE RIGIDEZ ELASTO-PLÁSTICA

Na análise linear de estruturas reticuladas existem três elementos básicos: a treliça com dois nós e dois GDL*, a viga com dois nós e quatro GDL e o elemento de torção com dois nós e dois GDL. Outros elementos são obtidos através da combinação destes três. O elemento de pórtico com dois nós e seis GDL resulta da superposição da treliça e da viga no plano xy. O elemento de pórtico de dois nós e doze GDL resulta da superposição dos seguintes elementos: treliça, viga no plano xy, viga no plano xz e elemento de torção.

Para construir a matriz de rigidez elasto-plástica do elemeto de pórtico com dois nós e doze graus de liberdade (Figura X.1), utilizou-se um procedimento análogo ao empregado nos elementos lineares. Foram superpostas as matrizes de rigidez dos seguintes elementos: treliça elasto-plástica, viga elasto-plástica no plano xy, viga elasto-plástica no plano xz e elemento elástico de torção.

* GDL - graus de liberdade

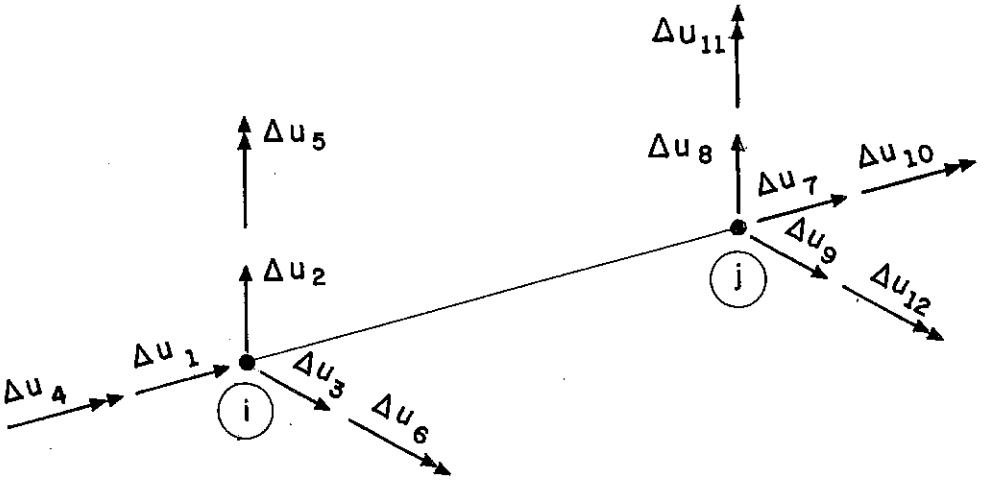


Figura X.1

X.2.1) Matriz de rigidez do elemento de viga

Este elemento possui dois nós com duas incógnitas nodais: uma translação e uma rotação (Figura X.2). Considerando-se que as rótulas plásticas podem ser tratadas como rótulas elásticas (verdadeiras), tem-se quatro configurações básicas para a matriz de rigidez do elemento [140]:

i) matriz elástica

$$\underset{\sim}{KL} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

ii) matriz considerando rótula no nó "i"

$$\underset{\sim}{KI} = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L^3} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3EI}{L^3} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

iii) matriz considerando rótula no nó "j"

$$\underset{\sim}{KJ} = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & -\frac{3EI}{L^3} & 0 \\ \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

iv) matriz considerando rótula nos dois nós

$$\underset{\sim}{KIJ} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Na definição das matrizes utilizou-se a nomenclatura usual em análise de estruturas, ou seja:

E - módulo de elasticidade longitudinal do material

I - momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo z

L - comprimento do elemento

Em publicações anteriores [137,140] a passagem de uma configuração para a outra é feita diretamente, sem que haja configurações intermediárias. Isto introduz descontinuidades na representação da rigidez do elemento, que em algoritmos incrementais-iterativos geram problemas de convergência.

Para evitar estas descontinuidades deve-se ter condições de gerar uma série continua de configurações que tenha como ponto de partida a configuração (i) e ponto final a configuração (iv), passando por (ii) ou por (iii). Isto pode ser feito supondo-se que as configurações intermediárias e a configuração (iv) podem ser obtidas

através de uma combinação linear das configurações (i), (ii), e (iii).

Para ampliar o universo de configurações possíveis define-se um terceiro nó no meio do elemento (Figura X.3). Este nó não está sujeito a plastificação e não há cargas externas aplicadas a ele. Com isto, o elemento passa a ser composto por dois sub-elementos e sua matriz de rigidez passa a ter, provisoriamente, seis colunas e seis linhas.

A matriz de rigidez do sub-elemento 1 possui duas configurações básicas: matriz elástica e matriz considerando rótula no nó "i". A diferença entre estas duas matrizes é dada por:

$$\Delta \underset{\sim}{KI} = \underset{\sim}{KL} - \underset{\sim}{KI} \qquad (X.2)$$

$$\Delta \underset{\sim}{KI} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \quad 1 & \quad 2 & \quad 5 & \quad 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{9EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & -\frac{9EI}{\ell^3} & \frac{3EI}{\ell^2} \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ -\frac{9EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{9EI}{\ell^3} & -\frac{3EI}{\ell^2} \\ \frac{3EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & -\frac{3EI}{\ell^2} & \frac{EI}{\ell} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{array}$$

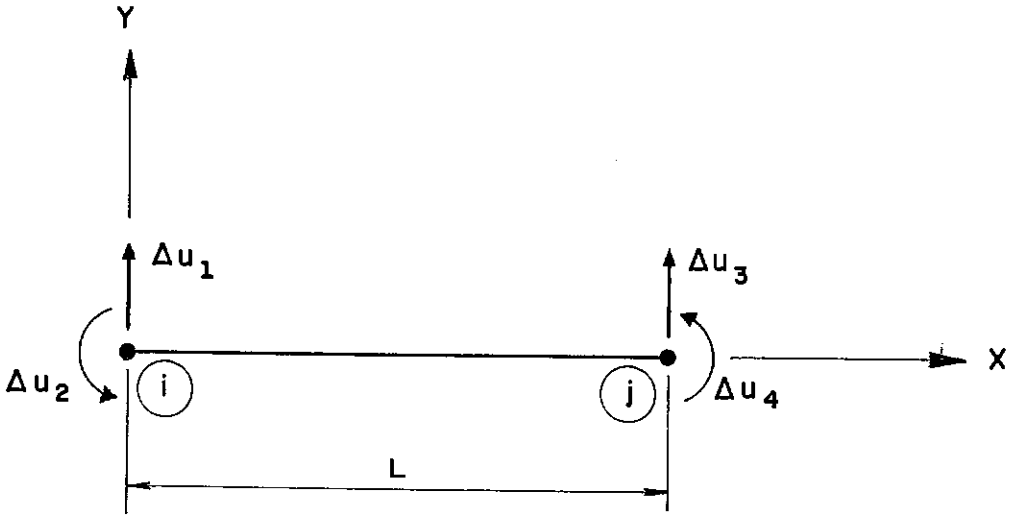


Figura X.2

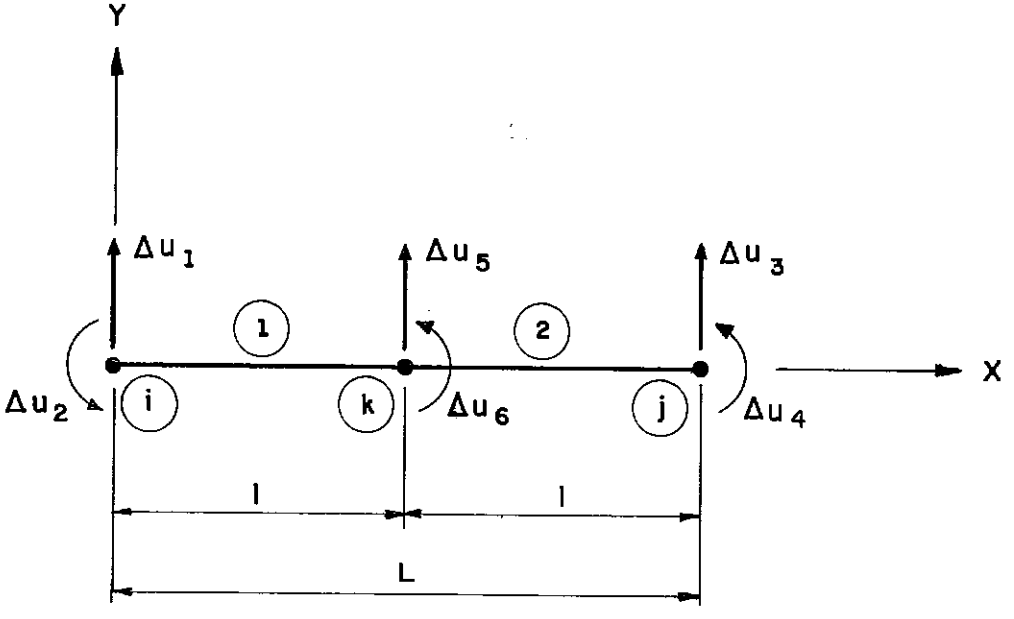


Figura X.3

As configurações intermediárias podem ser obtidas pela combinação linear das duas configurações básicas, isto é:

$$\underset{\sim}{KE} = \underset{\sim}{KL} - \alpha \quad \Delta \underset{\sim}{KI} \tag{X.3}$$

$0 \leq \alpha \leq 1$

$$\underset{\sim}{KE} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Sendo,

$$a_{11} = \frac{EI}{\ell^3} (4 - 3\alpha)\ 3 \quad ; \quad a_{12} = \frac{EI}{\ell^3} (1 - \alpha)\ 6\ell$$

$$a_{13} = -\frac{EI}{\ell^3} (4 - 3\ \alpha)\ 3 \quad ; \quad a_{14} = \frac{EI}{\ell^3} (2 - \alpha)\ 3\ell$$

$$a_{22} = \frac{EI}{\ell^3} (1 - \alpha)\ 4\ell^2 \quad ; \quad a_{23} = -\frac{EI}{\ell^3} (1 - \alpha)\ 6\ell$$

$$a_{24} = \frac{EI}{\ell^3} (1 - \alpha)\ 2\ell^2 \quad ; \quad a_{33} = \frac{EI}{\ell^3} (4 - 3\ \alpha)\ 3 \tag{X.4}$$

$$a_{34} = -\frac{EI}{\ell^3} (2 - \alpha)\ 3\ell \quad ; \quad a_{44} = \frac{EI}{\ell^3} (4 - \alpha)\ \ell^2$$

$a_{21} = a_{12}$; $a_{31} = a_{13}$; $a_{32} = a_{23}$

$a_{41} = a_{14}$; $a_{42} = a_{24}$; $a_{43} = a_{34}$

A matriz de rigidez do sub-elemento 2 posssui duas configurações básicas: matriz elástica e matriz considerando rótula no nó "j". A diferença entre estas duas matrizes é dada por:

$$\Delta \underset{\sim}{KJ} = \underset{\sim}{KL} - \underset{\sim}{KJ} \qquad (X.5)$$

$$\Delta \underset{\sim}{KJ} = \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 5 & 6 & 3 & 4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{9Ei}{\ell^3} & \frac{3EI}{\ell^2} & -\frac{9EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{3EI}{\ell^2} & \frac{EI}{\ell} & -\frac{3EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ -\frac{9EI}{\ell^3} & -\frac{3EI}{\ell^2} & \frac{9EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

As configurações intermediárias podem ser obtidas pela combinação linear das configurações básicas, isto é,

$$\underset{\sim}{KD} = \underset{\sim}{KL} - \beta \, \Delta \, \underset{\sim}{KJ} \qquad (X.6)$$

$$0 \leq \beta \leq 1$$

$$\underset{\sim}{KD} = \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 5 & 6 & 3 & 4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$b_{11} = \frac{EI}{\ell^3}(4 - 3\beta)\,3 \quad ; \quad b_{12} = \frac{EI}{\ell^3}(2 - \beta)\,3\ell$$

$$b_{13} = -\frac{EI}{\ell^3}(4 - 3\beta)\,3 \quad ; \quad b_{14} = \frac{EI}{\ell^3}(1 - \beta)\,6\ell$$

$$b_{22} = \frac{EI}{\ell^3}(4 - \beta)\,\ell^2 \quad ; \quad b_{23} = -\frac{EI}{\ell^3}(2-\beta)\,3\ell \qquad (X.7)$$

$$b_{24} = \frac{EI}{\ell^3}(1 - \beta)\,2\ell^2 \quad ; \quad b_{33} = \frac{EI}{\ell^3}(4 - 3\beta)\,3$$

$$b_{34} = -\frac{EI}{\ell^3}(1 - \beta)\,6\ell \quad ; \quad b_{44} = \frac{EI}{\ell^3}(1 - \beta)\,4\ell^2$$

$$b_{21} = b_{12} \; ; \; b_{31} = b_{13} \; ; \; b_{32} = b_{23}$$

$$b_{41} = b_{14} \; ; \; b_{42} = b_{24} \; ; \; b_{43} = b_{34}$$

A matriz expandida do elemento é montada a partir das matrizes dos sub-elementos.

$$KM = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} & b_{31} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} & b_{41} & b_{42} \\ a_{31} & a_{32} & b_{13} & b_{14} & (a_{33}+b_{11}) & (a_{34}+b_{12}) \\ a_{41} & a_{42} & b_{23} & b_{24} & (a_{43}+b_{21}) & (a_{44}+b_{22}) \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Eliminando-se as linhas e colunas correspondentes aos graus de liberdade do nó interno, através de uma condensação estática [48] , obtém-se a matriz definitiva do elemento.

$$\underset{\sim}{KV} = \underset{\sim}{K}_{aa} - \underset{\sim}{K}_{ab}\,\underset{\sim}{K}_{bb}^{-1}\,\underset{\sim}{K}_{ba} \qquad (X.8)$$

Sendo,

$$\underset{\sim}{K}_{aa} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{K}_{ab} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{K}_{ba} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & b_{13} & b_{14} \\ a_{41} & a_{42} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{K}_{bb} = \begin{bmatrix} (a_{33}+b_{11}) & (a_{34}+b_{12}) \\ (a_{43}+b_{21}) & (a_{44}+b_{22}) \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{KV} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \quad 1 & \quad 2 & \quad 3 & \quad 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3}c_1 & \frac{6EI}{L^2}c_2 & -\frac{12EI}{L^3}c_1 & \frac{6EI}{L^2}c_3 \\ \frac{6EI}{L^2}c_2 & \frac{4EI}{L}c_4 & -\frac{6EI}{L^2}c_2 & \frac{2EI}{L}c_6 \\ -\frac{12EI}{L^3}c_1 & -\frac{6EI}{L^2}c_2 & \frac{12EI}{L^3}c_1 & -\frac{6EI}{L^2}c_3 \\ \frac{6EI}{L^2}c_3 & \frac{2EI}{L}c_6 & -\frac{6EI}{L^2}c_3 & \frac{4EI}{L}c_5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{array}$$

$$c_1 = \frac{f_1}{f_7} \quad ; \quad c_2 = \frac{f_2}{f_7} \quad ; \quad c_3 = \frac{f_3}{f_7}$$

$$c_4 = \frac{f_4}{f_7} \quad ; \quad c_5 = \frac{f_5}{f_7} \quad ; \quad c_6 = \frac{f_6}{f_7} \qquad (X.9)$$

$$f_1 = 2(8 - 7\alpha - 7\beta + 6\alpha\beta)$$

$$f_2 = 2(8 - 8\alpha - 6\beta + 6\alpha\beta)$$

$$f_3 = 2(8 - 6\alpha - 8\beta + 6\alpha\beta)$$

$$f_4 = 2(8 - 8\alpha - 5\beta + 5\alpha\beta) \qquad (X.10)$$

$$f_5 = 2(8 - 5\alpha - 8\beta + 5\alpha\beta)$$

$$f_6 = 16(1 - \alpha - \beta + \alpha\beta)$$

$$f_7 = 16 - 8\alpha - 8\beta + 3\alpha\beta$$

Variando-se os parâmetros α e β entre 0 e 1 consegue-se gerar uma série continua de configurações da

matriz de rigidez do elemento. Esta série contém as configurações básicas (i), (ii), (iii) e (iv).

X.2.2) Matriz de rigidez do elemento de treliça

Os coeficientes da matriz de rigidez do elemento de treliça são calculados utilizando-se o seguinte módulo de elasticidade:

$$E_v = E\ c_7 \qquad \text{(X.11a)}$$

Sendo,

$$c_7 = (1 - \alpha - \beta + \alpha\beta)^{1/2} \qquad \text{(X.11b)}$$

$0 \leq \alpha \leq 1$

$0 \leq \beta \leq 1$

E_v - módulo de elasticidade variável

α, β- parâmetros já definidos no item X.2.1

A matriz de rigidez do elemento tem o seguinte aspecto:

$$KT = \begin{bmatrix} \frac{E_v A}{L} & -\frac{E_v A}{L} \\ -\frac{E_v A}{L} & \frac{E_v A}{L} \end{bmatrix}$$

A adoção de um módulo de elasticiidade variável é a hipótese usual utilizada na formulação de elementos de treliça não-lineares físicos [136]. A função c_7 foi escolhida de forma a permitir que a rigidez axial do elemento varie continuamente em função dos parâmetros α e β, assumindo o valor elástico para $\alpha = \beta = 0$ e o valor plástico (nulo) para $\alpha = \beta = 1$.

X.2.3) Matriz de rigidez do elemento de pórtico

A matriz de rigidez do elemento de pórtico é construída espalhando-se de maneira adequada os coeficientes das matrizes de rigidez dos elementos de treliça, de viga no plano xy, de viga no plano xz e de torção.

A matriz de rigidez do elemento tem o seguinte aspecto:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & & & & & & K_{17} & & & & & \\ & K_{22} & & & & K_{26} & & K_{28} & & & & K_{2,12} \\ & & K_{33} & & K_{35} & & & & K_{39} & & K_{3,11} & \\ & & & K_{44} & & & & & & K_{4\,10} & & \\ & & & & K_{55} & & & & K_{59} & & K_{5,11} & \\ & & \text{SIM} & & & K_{66} & & K_{68} & & & & K_{6,12} \\ & & & & & & K_{77} & & & & & \\ & & & & & & & K_{88} & & & & K_{8,12} \\ & & & & & & & & K_{99} & & K_{9,11} & \\ & & & & & & & & & K_{10,10} & & \\ & & & & & & & & & & K_{11,11} & \\ & & & & & & & & & & & K_{12,12} \end{bmatrix}$$

$$K_{11} = \frac{E_v A_x}{L} \qquad K_{17} = -\frac{E_v A_x}{L}$$

$$K_{22} = \frac{12EI_z}{L^3} c_1 \qquad K_{26} = \frac{6EI_z}{L^2} c_2$$

$$K_{28} = -\frac{12EI_z}{L^3} c_1 \qquad K_{2,12} = \frac{6EI_z}{L^2} c_3$$

$$K_{33} = \frac{12EI_y}{L^3} c_1 \qquad K_{35} = -\frac{6EI_y}{L^2} c_2$$

$$K_{39} = -\frac{12EI_y}{L^3} c_1 \qquad K_{3,11} = -\frac{6EI_y}{L^2} c_1$$

$$K_{44} = \frac{GI_x}{L} \qquad K_{4,10} = -\frac{GI_x}{L}$$

$$K_{55} = \frac{4EI_y}{L} c_4 \qquad K_{59} = \frac{6EI_y}{L^2} c_2$$

$$K_{5,11} = \frac{2EI_y}{L} c_6 \qquad K_{66} = \frac{4EI_z}{L} c_4$$

$$K_{68} = -\frac{6EI_z}{L^2} c_2 \qquad K_{6,12} = \frac{2EI_z}{L} c_6$$

$$K_{77} = \frac{E_v A_x}{L} \qquad K_{88} = \frac{12EI_z}{L^3} c_1$$

$$K_{8,12} = -\frac{6EI_z}{L^2} c_3 \qquad K_{99} = \frac{12EI_y}{L^3} c_1$$

$$K_{9,11} = \frac{6EI_y}{L^2} c_3 \qquad K_{10,10} = \frac{GI_x}{L}$$

$$K_{11,11} = \frac{4EI_y}{L} c_5 \qquad K_{12,12} = \frac{4EI_z}{L} c_5$$

Sendo,

A_x - área da seção transversal

L - comprimento do elemento

I_x - constante de torção

I_y - momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo y

I_z - momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo z

E_v - módulo de elasticidade variável

E - módulo de elasticidade longitudinal

G - módulo de elasticidade transversal

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

ν - coeficiente de Poisson

c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , c_5 , c_6 - parâmetros definidos no item X.2.1

X.3) CRITÉRIO DE ESCOAMENTO E DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS α E β

Para critério de escoamento adota-se uma inequação análoga as conhecidas fórmulas de interação ("interaction formulas") utilizadas no dimensionamento de estruturas metálicas [141]:

$$\frac{N}{N_p} + \frac{M_y}{M_{py}} + \frac{M_z}{M_{pz}} \leq 1 \qquad (X.12)$$

Sendo,

N - esforço axial no elemento (valor absoluto)

M_y - momento fletor (valor absoluto) em relação ao eixo y, no nó considerado (nó "i" ou nó "j")

M_z - momento fletor (valor absoluto) em relação ao eixo z, no nó considerado (nó "i" ou "j")

N_p - força axial de plastificação

M_{py} - momento fletor de plastificação em relação ao eixo y

M_{pz} - momento fletor de plastificação em relação ao eixo z

Os valores de N_p , M_{py} e M_{pz} são calculados da seguinte forma [29]:

$$N_p = A \ \sigma_0$$

$$M_{py} = Z_y \ \sigma_0 \qquad (X.13)$$

$$M_{pz} = Z_z \ \sigma_0$$

Sendo,

σ_0 - tensão de escoamento do material

A - área da seção transversal do elemento

Z_y - módulo plástico da seção em relação ao eixo y

Z_z - módulo plástico da seção em relação ao eixo z

Na determinação dos valores de α e β utilizam-se, além das variáveis e constantes já definidas, os módulos elásticos da seção [29], que se relacionam com os momentos de escoamento através das seguintes equações:

$$M_{ey} = S_y \ \sigma_0 \qquad (X.14a)$$

$$M_{ez} = S_z \sigma_0 \qquad \text{(X.14b)}$$

Sendo,

M_{ey} - momento de escoamento da seção em relação ao eixo y

M_{ez} - momento de escoamento da seção em relação ao eixo z

S_y - módulo elástico da seção em relação ao eixo y

S_z - módulo elástico da seção em relação ao eixo z

Os parâmetros α e β são determinados através das seguintes equações:

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{p/ } f_{ei} < f_{oi} \\ \dfrac{(f_{ei} - f_{oi})}{(1 - f_{oi})} & \text{p/ } f_{oi} \leq f_{ei} \leq 1 \\ 1 & \text{p/ } f_{ei} > 1 \end{cases} \qquad \text{(X.15)}$$

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{p/ } f_{ej} < f_{oj} \\ \dfrac{(f_{ej} - f_{oj})}{(1 - f_{oj})} & \text{p/ } f_{oj} \leq f_{ej} \leq 1 \\ 1 & \text{p/ } f_{ej} > 1 \end{cases} \qquad \text{(X.16)}$$

Sendo,

$$f_{ei} = \frac{N}{N_p} + \frac{(M_y)_i}{M_{py}} + \frac{(M_z)_i}{M_{pz}} \qquad \text{(X.17a)}$$

$$f_{ej} = \frac{N}{N_p} + \frac{(M_y)_j}{M_{py}} + \frac{(M_z)_j}{M_{pz}} \qquad \text{(X.17b)}$$

Os valores $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ são alcançados quando a função de escoamento do nó (f_{ei} ou f_{ej}) atinge o valor unitário (esgotamento da resistência da seção). Os valores $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ são mantidos até o instante em que a função de escoamento do nó torna-se maior que o valor inicial (f_{oi} ou f_{oj}), indicando o início de escoamento das fibras da seção. Este valor é determinado em função dos esforços que estão atuando no nó, de acordo com as seguintes equações:

$$f_{oi} = \frac{1}{f_{ei}} \left[0.99 \frac{N}{N_p} + \frac{S_y}{Z_y} \frac{(M_y)_i}{M_{py}} + \frac{S_z}{Z_z} \frac{(M_z)_i}{M_{pz}} \right] \qquad \text{(X.18a)}$$

$$f_{oj} = \frac{1}{f_{ej}} \left[0.99 \frac{N}{N_p} + \frac{S_y}{Z_y} \frac{(M_y)_j}{M_{py}} + \frac{S_z}{Z_z} \frac{(M_z)_j}{M_{pz}} \right] \qquad \text{(X.18b)}$$

A utilização dos parâmetros α e β se justifica não apenas por motivos numéricos relacionados ao algoritmo incremental-iterativo, mas também por motivos físicos. Segundo a teoria plástica de vigas [29] a seção de uma peça fletida, antes de esgotar a sua resistência, passa por vários estágios intermediários. Nestes estágios a seção encontra-se parcialmente plastificada, com algumas fibras em escoamento e outras ainda em regime elástico.

Na implementação computacional, para evitar que os coeficientes da matriz de rigidez do elemento se anulem totalmente, α e β podem ser no máximo iguais a 0.9988.

X.4) VETOR DE FORÇAS INTERNAS

As forças internas do elemento são determinadas através da seguinte equação:

$$\underset{\sim}{F}^{k} = \underset{\sim}{F}^{k-1} + \underset{\sim}{K}_P \, \Delta \underset{\sim}{u}^{k-1} \qquad \text{(X.19)}$$

Onde,

$\underset{\sim}{F}^{k}$ - vetor de forças internas correspondente a iteração k da etapa de carga N + 1

$^{k-1}\underset{\sim}{F}$ - vetor de forças internas correspondente a iteração k - 1 da etapa de carga N + 1

$\underset{\sim}{K}_p$ - matriz de rigidez elato-plástica do elemento calculada na iteração k da etapa de carga N+1

$\Delta \underset{\sim}{u}^{k-1}$ - vetor de deslocamento nodais incrementais do elemento calculado na interação k - 1 da etapa de carga N+1

Quando a função de escoamento do nó (f_{ei} ou f_{ej}) atinge o valor de plastificação o vetor de forças passa a ser controlado para que o critério de escoamento não seja violado.

X.5) TRANSFORMAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ E DO VETOR DE FORÇAS INTERNAS DO SISTEMA DE REFERÊNCIA LOCAL EXCÊNTRICO PARA O GLOBAL

A matriz de rigidez e o vetor de forças internas definidos nos itens (X.2) e (X.4) estão referidos ao sistema de referência local excêntrico (ver item (IX.2)). Como o elemento é linear do ponto de vista geométrico não existe sistema de referência local móvel. A passagem para o referencial global é feita de acordo com as seguintes equações:

$$\underset{G\sim P}{K} = \underset{\sim}{T}^T \; \underset{\sim E}{T}^T \; \underset{\sim P}{K} \; \underset{\sim E}{T} \; \underset{\sim}{T} \qquad \text{(X.20a)}$$

$$\underset{\sim}{F}_G = \underset{\sim}{T}^T \; \underset{\sim}{T}_E^T \; \underset{\sim}{F} \qquad \text{(X.20b)}$$

Onde,

$\underset{\sim}{T}_E$ - matriz que realiza a transformação do sistema de referência local fixo para o local excêntrico.

$\underset{\sim}{T}$ - matriz que realiza a transformação do sistema de referência global para o local fixo.

CAPÍTULO XI

ELEMENTO DE PÓRTICO ENRIJECEDOR ELASTO-PLÁSTICO NÃO-LINEAR GEOMÉTRICO

Apresenta-se neste capítulo uma formulação de elemento de pórtico que resulta da junção da formulação NLGEO (não-linear geométrica) apresentada no Capítulo IX e da formulação NLFIS (não-linear física) apresentada no Capítulo X. O elemento utiliza quatro sistemas de referência: o global, o local fixo, o local móvel e local excêntrico (ver Capítulo IX). A não-linearidade física (elasto-plasticidade) é considerada através de um critério de escoamento definido em termos de resultantes de tensões (ver Capítulo X). A não-linearidade geométrica é considerada através de uma teoria incremental-iterativa, de caráter geral, baseada no Princípio dos Trabalhos Virtuais (ver Capítulo V).

A matriz de rigidez elasto-plástica, deduzida a partir do conceito de rótulas plásticas, realiza uma correspondência elasto-plástica entre deslocamentos e esforços nodais incrementais. Esta matriz é mantida na forma elástica até que os momentos fletores e esforços normais, que atuam nos nós do elemento, atinjam determinados valores, quando passa a ter seus coeficientes reduzidos de acordo com funções previamente estabelecidas. O critério de escoamento ao indicar a plastificação de uma seção influencia, não apenas a matriz de rigidez elasto-plástica, mas também o vetor de forças internas, que

passa a ser controlado para que este critério não seja violado.

A matriz de rigidez geométrica, deduzida utilizando-se o princípio dos trabalhos virtuais e um tensor de deformação não-linear, realiza o acoplamento das deformações axial, de flexão e de torção do elemento. Esta matriz é função não apenas dos esforços normais, mas também dos momentos fletores que atuam nos nós do elemento. As duas matrizes de rigidez e o vetor de forças do elemento são determinados explicitamente no referencial excêntrico e em seguida transformados para o local móvel, para o local fixo e para o global.

As hipóteses básicas adotadas são:

i) Pode ocorrer plastificação apenas nas extremidades do elemento.

ii) As relações incrementais entre os esforços internos e os deslocamentos nodais do elemento podem ser obtidas tratando-se as rótulas plásticas como rótulas elásticas.

iii) O critério de escoamento da seção pode ser função apenas dos momentos fletores e do esforço normal que atuam nesta seção.

iv) As deformações são pequenas em comparação com a unidade.

v) As seções normais ao eixo, inicialmente planas, permanecem planas durante a deformação.

vi) As translações e as rotações são grandes em comparação, respectivamente, com as dimensões da estrutura e com a unidade.

vii) A configuração do elemento pode ser atualizada considerando-se apenas rotações de corpo rígido, ou seja, mantendo-se o eixo reto e a seção transversal e o comprimento inalterados.

viii) As cargas são aplicadas incrementalmente de forma que os deslocamentos incrementais (translações e rotações incrementais) satisfaçam a hipótese de pequenos deslocamentos e a plastificação da estrutura ocorra de maneira gradual.

O elemento possui dois nós com seis incógnitas cada: três translações e três rotações. O campo de deslocamentos é escrito tomando-se como referência o sistema local excêntrico.

XI.1) EQUAÇÕES DE EQUILIBRIO

As equações incrementais utilizadas pelo algoritmo incremental-iterativo correspondem às equações (V.19), transcritas a seguir:

$$(\underset{\sim}{K}_P + \underset{\sim}{K}_G) \, \Delta u^k = \underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{F} \qquad \text{(XI.1)}$$

XI.2) MATRIZES DE RIGIDEZ E VETOR DE FORÇAS INTERNAS

A matriz de rigidez elasto-plástica $\underset{\sim}{K}_P$ é idêntica à matriz definida no item (X.2.3).

A matriz de rigidez geométrica $\underset{\sim}{K}_G$ é idêntica à matriz de rigidez geométrica definiida no item IX.5.

O vetor de forças internas em cada iteração é determinado através da seguinte equação:

$$\underset{\sim}{F}^{k+1} = \underset{\sim}{F}^{k} + \Delta\underset{\sim}{F} \qquad \text{(XI.2a)}$$

Onde,

$$\Delta \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{K}_P \; \Delta \underset{\sim}{u}^{k} \qquad \text{(XI.2b)}$$

$\underset{\sim}{F}^{k+1}$ - vetor de força internas no incremento de carga N+1 na iteração k + 1.

$\underset{\sim}{F}^{k}$ - vetor de força interna no incremento de carga N+1, na iteração k.

$\Delta\underset{\sim}{F}$ - vetor de força internas incrementais no incremento de carga N+1, na iteração k.

$\Delta \underset{\sim}{u}^{k}$ - vetor de deslocamentos nodais incrementais do elemento na iteração k, no sistema de referência local excêntrico.

XI.3) TRANSFORMAÇÃO DAS MATRIZES DO ELEMENTO DO SISTEMA DE REFERÊNCIA LOCAL EXCÊNTRICO PARA O GLOBAL

As matrizes de rigidez e o vetor de forças internas referidos ao sistemas de coordenadas globais são determinados através das seguintes equações:

$$\underset{G\sim P}{K} = \underset{\sim}{T}^{T}\ \underset{\sim}{R}^{T}\ \underset{\sim E}{T}^{T}\ \underset{\sim P}{K}\ \underset{\sim E}{T}\ \underset{\sim}{R}\ \underset{\sim}{T} \qquad \text{(XI.3a)}$$

$$\underset{G\sim}{F} = \underset{\sim}{T}^{T}\ \underset{\sim}{R}^{T}\ \underset{\sim E}{T}^{T}\ \underset{\sim}{F} \qquad \text{(XI.3b)}$$

$$\underset{G\sim G}{K} = \underset{\sim}{T}^{T}\ \underset{\sim}{R}^{T}\ \underset{\sim E}{T}^{T}\ \underset{\sim G}{K}\ \underset{\sim E}{T}\ \underset{\sim}{R}\ \underset{\sim}{T} \qquad \text{(XI.3c)}$$

Onde,

$\underset{\sim E}{T}$ - matriz que realiza a transformação do sistema de referência local móvel para o local excêntrico.

$\underset{\sim}{R}$ - matriz que realiza a transformação do sistema de referência local fixo para o local móvel.

$\underset{\sim}{T}$ - matriz que realiza a transformação do sistema de referência global para o local fixo.

CAPÍTULO XII

ELEMENTO TRIANGULAR DE CASCA NÃO LINEAR GEOMÉTRICO

Apresenta-se neste capítulo uma formulação de elemento triangular plano desenvolvida com base na suposição de que a geometria de uma casca (cilíndrica, esférica, cônica, ou de outra forma qualquer) pode ser representada satisfatoriamente por uma malha refinada de elementos triangulares planos. Para garantir a eficiência computacional do elemento foram escolhidas funções de interpolação simples. Os deslocamentos no plano do elemento são interpolados por funções lineares e o deslocamento perpendicular ao plano do elemento por funções cúbicas. A não-linearidade geométrica é considerada através de uma teoria incremental-iterativa, de caráter geral, baseada no Princípio dos Trabalhos Virtuais (ver capítulo V).

As hipóteses básicas adotadas são as seguintes:

i) As deformações são pequenas em comparação com a unidade.

ii) As seções normais ao plano do elemento, inicialmente planas, permanecem planas durante a deformação.

iii) A espessura da casca é pequena em comparação com as suas outras dimensões.

iv) As translações e as rotações são grandes em comparação, respectivamente, com as dimensões da casca e com a unidade.

v) A configuração do elemento pode ser atualizada considerando-se apenas deslocamentos de corpo rígido, ou

seja, na configuração deformada o elemento se mantém plano e a sua espessura e a sua área não variam.

vi) As cargas são aplicadas incrementalmente de forma que os deslocamentos incrementais (translações e rotações) satisfaçam à hipótese de pequenos deslocamentos.

Na sua versão linear, o elemento apresentado aqui resulta da superposição do elemento linear de membrana CST ("Constant Strain Triangle") e do elemento cúbico não conforme de placa proposto por Holand e Bell [123].

XII.1) EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

As equações incrementais utilizadas pelo algorítmo incremental-iterativo correspondem às equações (V.12), transcritas a seguir:

$$(\underset{\sim}{K}_E + \underset{\sim}{K}_G) \; \Delta \underset{\sim}{u}^k = \underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{F} \qquad \text{(XII.1)}$$

XII.2) SISTEMAS DE REFERÊNCIA

Além do sistema de referência global, utilizam-se mais dois sistemas de referência: o local fixo e o local móvel.

XII.2.1) Sistema de Referência Local Fixo

Os nós do elemento são numerados no sentido anti-horário. A origem do sistema de coordenadas é no nó 1. O eixo x_F é paralelo a reta que une os nós 2 e 3, com sentido positivo de 2 para 3 (Figura XII.1). O eixo y_F situa-se no plano do elemento perpendicularmente ao eixo x_F e o eixo z_F é perpendicular ao plano do elemento. Os sentidos de y_F e z_F são tais que formam um triedro direto com x_F .

A matriz $\underset{\sim}{RO}$, que transforma vetores do sistema de referência global para o sistema local fixo, é determinada em função das coordenadas nodais, usando algebra vetorial.

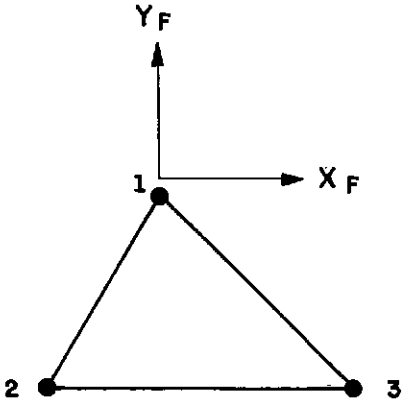


Figura XII.1 - Numeração dos nós do elemento e sistema de referência local fixo

As coordenadas de um vetor paralelo ao lado 12 do elemento são dadas por:

$$\underset{\sim}{X}_{12} = \underset{\sim}{X}_{1} - \underset{\sim}{X}_{2} \qquad \text{(XII.2)}$$

Onde,

$\underset{\sim}{X}_1$ - vetor com as coordenadas do nó 1 no sistema de referência global

$\underset{\sim}{X}_2$ - vetor com as coordenadas do nó 2 no sistema de referência global

As coordenadas de um vetor paralelo ao lado 23 do elemento são dadas por:

$$\underset{\sim}{X}_{32} = \underset{\sim}{X}_{3} - \underset{\sim}{X}_{2} \qquad \text{(XII.3)}$$

Onde,

$\underset{\sim}{X}_3$ - vetor com as coordenadas do nó 3 no sistema de referência global

Os vetores $\underset{\sim}{X}_{12}$ e $\underset{\sim}{X}_{32}$ estão situados no plano do elemento. Fazendo o seu produto vetorial obtém-se um vetor perpendicular ao plano do elemento.

$$\underset{\sim}{V}_{3} = \underset{\sim}{X}_{32} \times \underset{\sim}{X}_{12} \qquad \text{(XII.4)}$$

Um vetor perpendicular aos vetores $\underset{\sim}{V}_3$ e $\underset{\sim}{X}_{32}$ é obtido fazendo-se o seu produto vetorial:

$$\underset{\sim}{V}_2 = \underset{\sim}{V}_3 \times \underset{\sim}{X}_{32} \qquad \text{(XII.5)}$$

Os cossenos diretores dos eixos x_F, y_F e z_F são vetores unitários na direção de $\underset{\sim}{X}_{32}$, $\underset{\sim}{V}_2$ e $\underset{\sim}{V}_3$, respectivamente:

$$\underset{\sim}{v}_1 = \frac{\underset{\sim}{X}_{32}}{\| \underset{\sim}{X}_{32} \|} \qquad \text{(XII.6a)}$$

$$\underset{\sim}{v}_2 = \frac{\underset{\sim}{V}_2}{\| \underset{\sim}{V}_2 \|} \qquad \text{(XII.6b)}$$

$$\underset{\sim}{v}_3 = \frac{\underset{\sim}{V}_3}{\| \underset{\sim}{V}_3 \|} \qquad \text{(XII.6c)}$$

Onde,

$\| \underset{\sim}{V} \|$ - módulo do vetor $\underset{\sim}{V}$

A matriz $\underset{\sim}{RO}$ é formada a partir dos vetores unitários, definidos nas equações (XII.6), da seguinte forma:

$$\underset{3x3}{\underset{\sim}{RO}} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{v}_1^T \\ \underset{\sim}{v}_2^T \\ \underset{\sim}{v}_3^T \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.7)}$$

A matriz $\underset{\sim}{T}$ que transforma os vetores de deslocamentos nodais, o vetor de forças internas e as matrizes de rigidez é montada a partir da matriz $\underset{\sim}{RO}$:

$$\underset{18 \times 18}{\underset{\sim}{T}} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{RO} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{RO} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & 0 & \underset{\sim}{RO} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{RO} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & 0 & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{RO} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & 0 & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{RO} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.8)}$$

Sendo,

$\underset{\sim}{0}$ - matriz nula 3x3

As coordenadas nodais no sistema de referência local são obtidas através da seguinte equação:

$$\underset{\sim}{X}_i = RO \; (\underset{\sim}{X}_i - \underset{\sim}{X}_1) \qquad \text{(XII.9a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{X}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.9b)}$$

x_i - coordenada x do nó "i" no sistema de referência local (fixo ou móvel)

y_i - coordenada y do nó "i" no sistema de referência local(fixo ou móvel)

z_i - coordenada z do nó "i" no sistema de referência local (fixo ou móvel)

XII.2.2) Sistema de Referência Local Móvel

O sistema móvel se desloca a medida em que o elemento sofre deformação. Os eixos se mantêm sempre retos e mutuamente perpendiculares. Na etapa de carga O os sistemas local fixo e local móvel são coincidentes.

O referencial móvel está sempre situado na configuração correspondente a etapa N, pois a configuração da etapa N+1, para ser determinada, depende dos

deslocamentos incrementais que são a incógnita do problema. A utilização deste referencial é equivalente à escolha da configuração da etapa N para referência.

A matriz $\underset{\sim}{RT}$ que transforma vetores do sistema de referência local fixo para o sistema local móvel é determinada em função das coordenadas nodais atualizadas usando algebra vetorial, num procedimento análogo ao apresentado no item (XII.2.1).

Transformando as coordenadas nodais atualizadas do sistema de referência global para o local fixo tem-se:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{XL}_1 &= \underset{\sim}{RO}\ (\underset{\sim}{X}_1 + \underset{\sim}{U}_1) \\ \underset{\sim}{XL}_2 &= \underset{\sim}{RO}\ (\underset{\sim}{X}_2 + \underset{\sim}{U}_2) \\ \underset{\sim}{XL}_3 &= \underset{\sim}{RO}\ (\underset{\sim}{X}_3 + \underset{\sim}{U}_3) \end{aligned} \qquad \text{(XII.10)}$$

Onde,

$\underset{\sim}{U}_i$ - vetor de translações totais do nó "i" referidas ao sistema global.

$\underset{\sim}{XL}_i$ - vetor de coordenadas atualizadas do nó "i", referidas ao sistema local fixo.

Para obter os cossenos diretores dos eixos x_M, y_M e z_M (eixos do sistema de referência móvel) as operações definidas nas equações (XII.2), (XII.3), (XII.4), (XII.5) e

(XII.6) são repetidas, substituindo-se os vetores $\underset{\sim}{X}_1$, $\underset{\sim}{X}_2$, $\underset{\sim}{X}_3$, $\underset{\sim}{v}_1$, $\underset{\sim}{v}_2$ e $\underset{\sim}{v}_3$ por $\underset{\sim}{XL}_1$, $\underset{\sim}{XL}_2$, $\underset{\sim}{XL}_3$, $\underset{\sim}{a}_1$, $\underset{\sim}{a}_2$ e $\underset{\sim}{a}_3$.

De maneira analoga à matriz $\underset{\sim}{RO}$, a matriz $\underset{\sim}{RT}$ é formada pelos cossenos diretores $\underset{\sim}{a}_i$:

$$\underset{3x3}{RT} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{a}_1^T \\ \underset{\sim}{a}_2^T \\ \underset{\sim}{a}_3^T \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.11)}$$

A matriz $\underset{\sim}{R}$ que transforma os vetores de deslocamentos nodais, o vetor de forças internas e as matrizes de rigidez é montada a partir da matriz $\underset{\sim}{RT}$:

$$\underset{18 \times 18}{\underset{\sim}{R}} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{RT} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{RT} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & 0 & \underset{\sim}{RT} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{RT} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & 0 & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{RT} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & 0 & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{RT} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.12)}$$

Sendo,

$\underset{\sim}{0}$ - matriz nula 3 x 3

XII.3) CAMPO DE DESLOCAMENTOS

O elemento possui três nós com seis incógnitas cada: três translações e três rotações (Figura XII.2). O campo de deslocamentos incrementais é escrito tomando-se como referência o sistema local móvel.

As translações da superfície média do elemento e as suas rotações são aproximadas por polinômios das coordenadas triangulares L_1 , L_2 e L_3 (ver Apêndice A):

$$u = a_o + a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3 \qquad \text{(XII.13a)}$$

$$v = a_o + a_4 L_1 + a_5 L_2 + a_6 L_3 \qquad \text{(XII.13b)}$$

$$w = a_o + a_7 L_1 + a_8 L_2 + a_9 L_3 +$$
$$a_{10} L_1 L_2 + a_{11} L_2 L_3 + a_{12} L_1 L_3 +$$
$$a_{13} (L_1 L_2^2 - L_2 L_1^2) + a_{14} (L_2 L_3^2 - L_3 L_2^2) +$$
$$a_{15} (L_3 L_1^2 - L_1 L_3^2) \qquad \text{(XII.14)}$$

$$\theta_x = \frac{\partial w_o}{\partial y} \qquad \text{(XII.15a)}$$

$$\theta_y = -\frac{\partial w_o}{\partial x} \qquad \text{(XII.15b)}$$

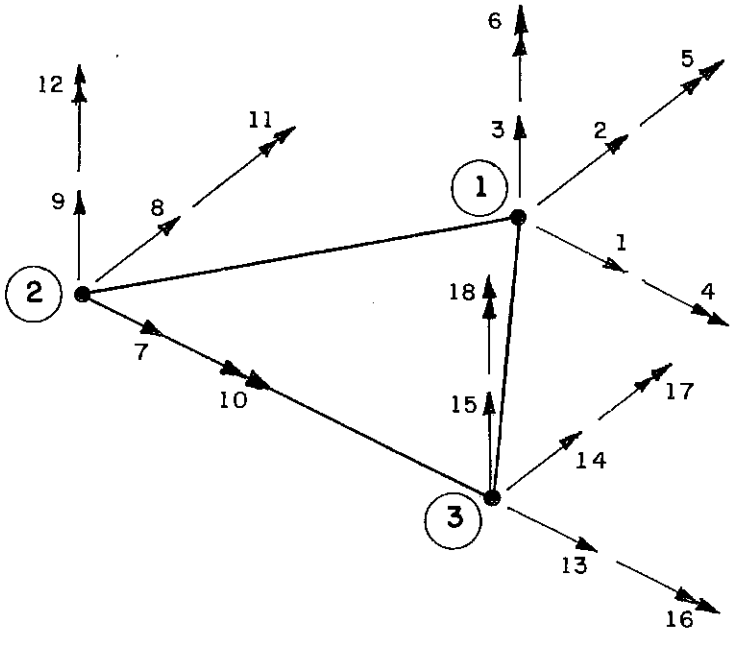


Figura XII.2 - Graus de liberdade do elemento

As coordenadas generalizadas a_i são calculadas em função dos deslocamentos nodais de acordo com o procedimento usual [48] .

As translações de um ponto qualquer do elemento são determinadas pelas equações a seguir:

$$\Delta u_1(x, y, z) = u_o + u' \qquad \text{(XII.16a)}$$

$$\Delta u_2(x, y, z) = v_o + v' \qquad \text{(XII.16b)}$$

$$\Delta u_3(x, y, z) = w_o \qquad \text{(XII.17)}$$

Os deslocamentos u' e v' são calculados em função das rotações do elemento, utilizando-se a hipótese das seções planas (Figura XII.3):

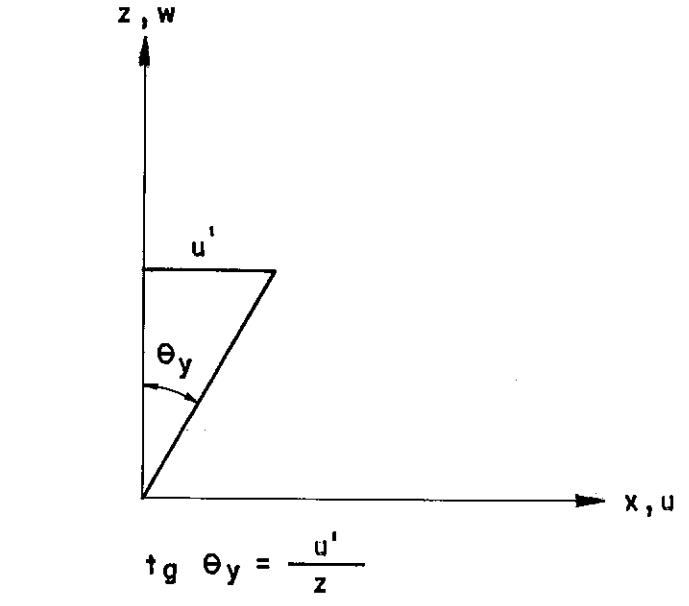
$$u' = z \operatorname{tg} \theta_y \qquad \text{(XII.18a)}$$

$$v' = - z \operatorname{tg} \theta_x \qquad \text{(XII.18b)}$$

Como a hipótese de pequenos deslocamentos é válida em cada incremento de carga e as rotações θ_x e θ_y são deslocamentos incrementais, pode-se considerar $\operatorname{tg} \theta \cong \theta$ nas equações (XII.18).

$$u' = z \theta_y \qquad \text{(XII.19a)}$$

$$v' = - z \theta_z \qquad \text{(XII.19b)}$$



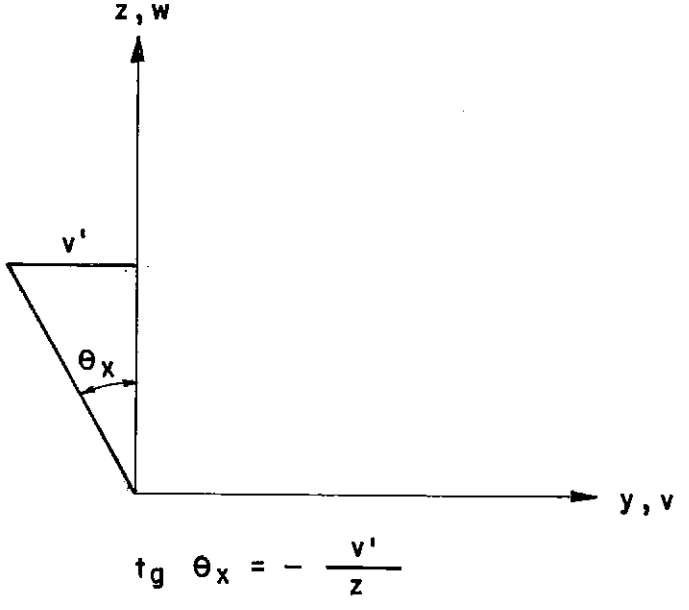


Figura XII.3 - Aplicação da hipótese das seções planas.

Substituindo sucessivamente as equações (XII.19) e (XII.15) e (XII.16), obtém-se:

$$\Delta u_1(x, y, z) = u_o - z \frac{\partial w_o}{\partial x} \qquad \text{(XII.20a)}$$

$$\Delta u_2(x, y, z) = v_o - z \frac{\partial w_o}{\partial y} \qquad \text{(XII.20b)}$$

$$\Delta u_3(x, y, z) = w_o \qquad \text{(XII.21)}$$

XII.4) EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

As equações constitutivas do elemento devem representar os comportamentos de membrana e de placa fina.

Tanto a membrana quanto a placa fina encontram-se submetidas a um estado plano de tensões. Em razão disso o tensor de tensão do elemento contém apenas três componentes não nulas: S_{11} , S_{22} , $S_{12} = S_{21}$. Durante um processo incremental estas componentes são determinadas de forma incremental, também:

$$\underset{\sim}{S}_v^{k+1} = \underset{\sim}{S}_v^{k} + \Delta \underset{\sim}{S}_v \qquad \text{(XII.22)}$$

As componentes do tensor incremental de tensão de Cauchy se relacionam com as componentes da parcela linear do tensor incremental de deformação através da equação constitutiva seguinte:

$$\Delta \underset{\sim}{S}_v = \underset{\sim}{C}\ \Delta \underset{\sim}{e}_v \qquad \text{(XII.23a)}$$

Onde,

$$\Delta \underset{\sim}{S}_v^T = [\ \Delta S_{11}\quad \Delta S_{12}\quad \Delta S_{12}\ ] \qquad \text{(XII.23b)}$$

$$\Delta \underset{\sim}{e}_v^T = [\ \Delta e_{11}\quad \Delta e_{22}\quad 2\ \Delta e_{12}\ ] \qquad \text{(XII.23c)}$$

$$\underset{\sim}{C} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.23d)}$$

$\underset{\sim}{C}$ - matriz constitutiva de estado plano de tensões

E - módulo de elasticidade longitudinal

ν - coeficiente de Poisson

Decompondo o tensor incremental de tensão nas parcelas correspondentes ao comportamento de membrana e de placa, tem-se:

$$\Delta \underset{\sim}{S}_v = (\ \Delta \underset{\sim}{S}_v\ )_m + (\ \Delta \underset{\sim}{S}_v\ )_f \qquad \text{(XII.24a)}$$

Onde,

$$\left(\Delta \underset{\sim}{S}_v \right)_m^T = \left[\left(\Delta \sigma_x \right)_m \left(\Delta \sigma_y \right)_m \left(\Delta \sigma_{xy} \right)_m \right] \qquad \text{(XII.24b)}$$

$$\left(\Delta \underset{\sim}{S}_v \right)_f^T = \left[\left(\Delta \sigma_x \right)_f \left(\Delta \sigma_y \right)_f \left(\Delta \sigma_{xy} \right)_m \right] \qquad \text{(XII.24c)}$$

A relação entre o vetor de tensão e o vetor de tensão generalizada de membrana é dada por:

$$\left(\Delta \underset{\sim}{S}_v \right)_m = \frac{1}{t} \Delta \underset{\sim}{N} \qquad \text{(XII.25a)}$$

Onde,

$$\Delta \underset{\sim}{N}^T = \left[\Delta N_x \quad \Delta N_y \quad \Delta N_{xy} \right] \qquad \text{(XII.25b)}$$

$\Delta \underset{\sim}{N}$ - vetor de tensão generalizada incremental de membrana (força por unidade de comprimento)

t - espessura do elemento

A relação entre o vetor de tensão e o vetor de tensão generalizada de flexão é dada por:

$$\left(\Delta \underset{\sim}{S}_v \right)_f = \frac{12}{t^3} z \, \Delta \underset{\sim}{M} \qquad \text{(XII.26a)}$$

Onde,

$$M = [\ \Delta M_x \quad \Delta M_y \quad \Delta M_{xy}\ ] \qquad \text{(XII.26b)}$$

$\Delta \underset{\sim}{M}$ - vetor de tensão generalizada incremental de flexão (momento por unidade de comprimento)

As convenções de sinais para as tensões e tensões generalizadas, para comportamento de membrana e de placa respectivamente, encontram-se nas Figuras (XII.4) e (XII.5). A convenção adotada para tensões de membrana é a mesma utilizada na Teoria da Elasticidade, em que as tensões normais positivas são as tensões de tração.

A convenção adotada para tensões de flexão supõe que as tensões $(\sigma_x)_f$, $(\sigma_y)_f$ e $(\sigma_{xy})_f$, quando positivas, têm distribuição tal que na face superior do elemento atua uma tensão positiva e na inferior uma tensão negativa. Ou seja, as tensões normais, quando positivas, provocam tração na face superior e compressão na inferior. Ao longo da espessura do elemento as tensões de flexão variam linearmente. A convenção para os momentos M_x , M_y e M_{xy} é decorrente da convenção adotada para as tensões.

As equações constitutivas podem ser expressas também em termos de tensões generalizadas e deformações generalizadas. Para o comportamento de membrana tem-se:

$$(\ \Delta \underset{\sim}{S}\ )_{v\ m} = \underset{\sim}{C}\ (\ \Delta \underset{\sim}{e}\ )_{v\ m} \qquad \text{(XII.27)}$$

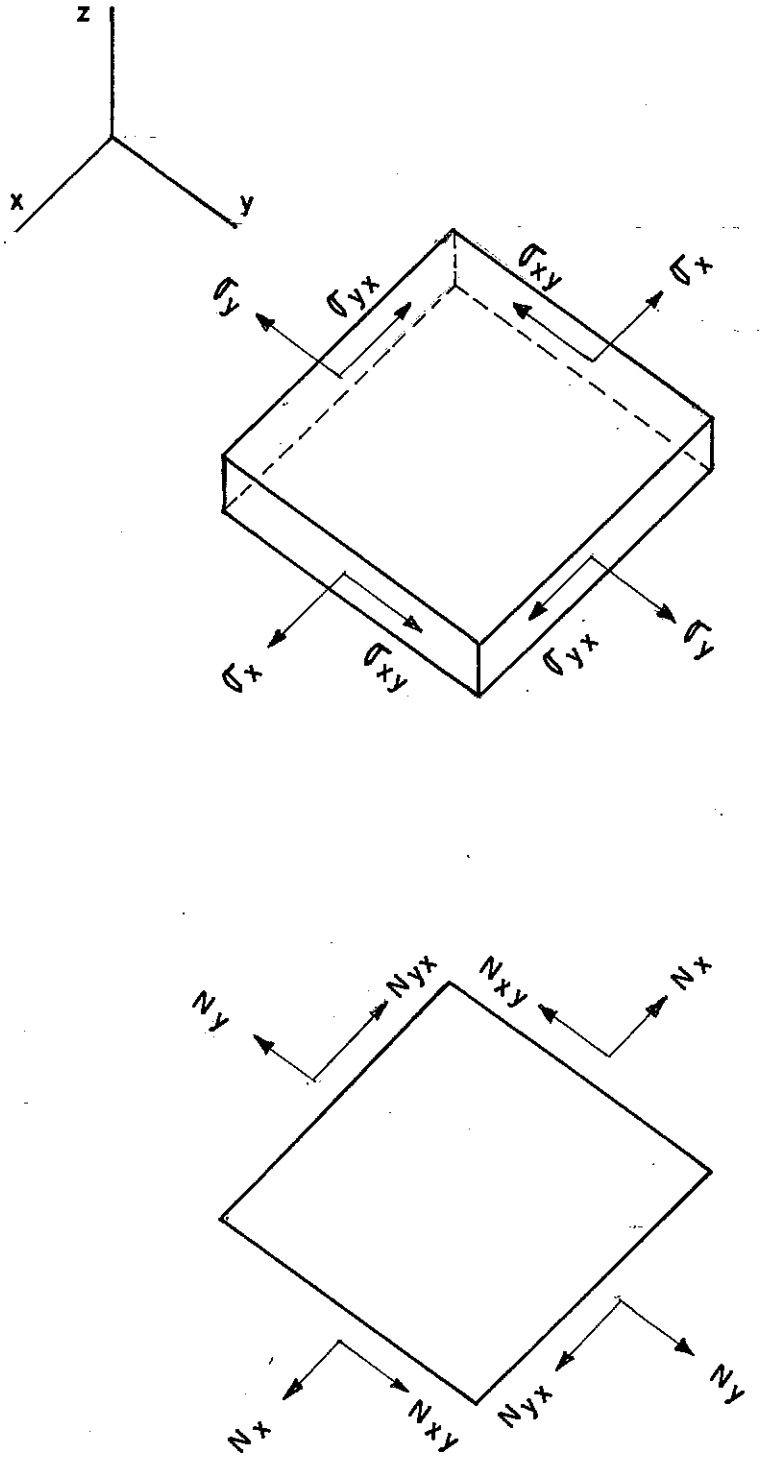


Figura XII.4 - Convenção de sinais para tensões de membrana.

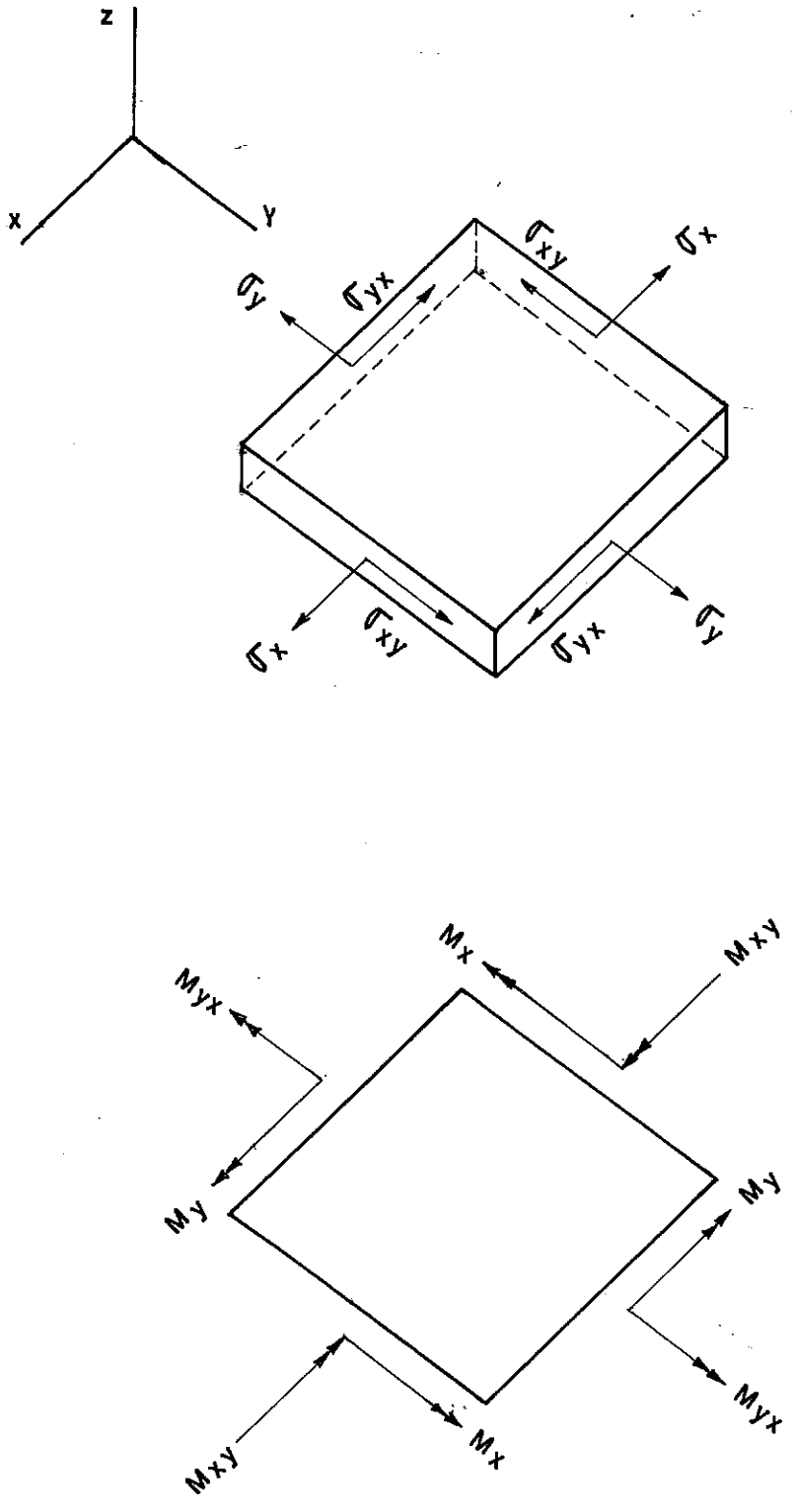


Figura XII.5 - Convenção de sinais para tensões de flexão.

Substituindo a equação (XII.25a) em (XII.27), tem-se:

$$\Delta \underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{CM} \left(\Delta \underset{\sim}{e} \right)_{v\ m} \qquad \text{(XII.28a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{CM} = \frac{E\ t}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.28b)}$$

$\underset{\sim}{CM}$ - matriz constitutiva de comportamento de membrana

Para o comportamento de placa, tem-se:

$$\left(\Delta \underset{\sim}{S} \right)_{f} = \underset{\sim}{C} \left(\Delta \underset{\sim}{e} \right)_{v\ f} \qquad \text{(XII.29)}$$

A relação entre o vetor de deformação e o vetor de deformação generalizada para placa é dada por [142]:

$$\left(\Delta \underset{\sim}{e} \right)_{v\ f} = z\ \Delta \underset{\sim}{\psi} \qquad \text{(XII.30)}$$

Onde,

$\Delta \underset{\sim}{\psi}$ - vetor de curvaturas

Substituindo as equações (XII.26a) e (XII.30) em (XII.29) tem-se:

$$\Delta \underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{CP}\ \Delta \underset{\sim}{\psi} \qquad \text{(XII.31a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{CP} = \frac{E\ t^3}{12\ (1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.31b)}$$

$\underset{\sim}{CP}$ - matriz constitutiva de comportamento de placa

XII.5) RELAÇÕES DEFORMAÇÃO - DESLOCAMENTO

O tensor de deformação de Green-Lagrange na sua forma incremental tem o seguinte aspecto (ver capítulo IV):

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \Delta e_{ij} + \Delta n_{ij} \qquad \text{(XII.32)}$$

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i}\right] \qquad \text{(XII.33a)}$$

$$\Delta n_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i}\frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_j} \qquad \text{(XII.33b)}$$

Levando-se em consideração que a configuração de referência é a configuração da etapa N (referencial local móvel) as equações (XII.33) assumem a seguinte forma:

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Delta u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial y_i}\right] \qquad \text{(XII.34a)}$$

$$\Delta n_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Delta u_k}{\partial y_i}\frac{\partial \Delta u_k}{\partial y_j}\right] \qquad \text{(XII.34b)}$$

$i = 1, 2$ $\qquad y_1 = x$

$j = 1, 2$ $\qquad y_2 = y$

$k = 1, 2, 3$ $\qquad y_3 = z$

As equações (XII.33) podem ser simplificadas, transformando-se nas equações (XII.34), porque na configuração da etapa N, a decomposição incremental dos deslocamentos se reduz a $u_i = {}^{N+1}u_i = \Delta u_i$.

Expandindo as equações (XII.34a) e (XII.34b) tem-se:

$$\Delta e_{11} = \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x} \qquad \text{(XII.35a)}$$

$$\Delta e_{22} = \frac{\partial \Delta u_2}{\partial y} \qquad \text{(XII.35b)}$$

$$\Delta e_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta u_1}{\partial y} + \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x}\right) \qquad \text{(XII.35c)}$$

$$\Delta n_{11} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\Delta u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta u_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta u_3}{\partial x}\right)^2\right] \qquad \text{(XII.36a)}$$

$$\Delta n_{22} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\Delta u_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\Delta u_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\Delta u_3}{\partial y}\right)^2\right] \qquad \text{(XII.36b)}$$

$$\Delta n_{12} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Delta u_1}{\partial x}\frac{\partial \Delta u_1}{\partial y} + \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x}\frac{\partial \Delta u_2}{\partial y} + \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x}\frac{\partial \Delta u_3}{\partial y}\right] \qquad \text{(XII.36c)}$$

Utilizando as equações (XII.20) e (XII.21) para fazer as derivações nas equações (XII.35) e (XII.36) obtém-se:

$$\Delta e_{11} = \frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \qquad \text{(XII.37a)}$$

$$\Delta e_{22} = \frac{\partial v_o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \qquad \text{(XII.37b)}$$

$$\Delta e_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2 z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \right] \qquad \text{(XII.37c)}$$

$$\Delta n_{11} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial v_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \right)^2 \right] \qquad \text{(XII.38a)}$$

$$\Delta n_{22} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_o}{\partial y} - z\,\frac{\partial^2 w_o}{\partial y \partial x}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} - \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_o}{\partial y}\right)^2\right] \qquad \text{(XII.38b)}$$

$$\Delta n_{12} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_o}{\partial x} - z\,\frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial u_o}{\partial y} - \frac{\partial^2 w_o}{\partial y \partial x}\right) + \right.$$

$$+ \left(\frac{\partial v_o}{\partial x} - z\,\frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y}\right)\left(\frac{\partial v_o}{\partial y} - z\,\frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2}\right) + \qquad \text{(XII.38c)}$$

$$\left. + \left(\frac{\partial w_o}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w_o}{\partial y}\right)\right]$$

Em diversas formulações encontradas na literatura [71, 73, 94, 143] apenas os termos assinalados nas equações (XII.36) e (XII.38) são mantidos, sendo os outros desprezados. Isto corresponde à adoção de uma das hipóteses da teoria de grandes deslocamentos de placas de von Karman que diz [37]: " Nas relações deformação-deslocamento apenas os termos não-lineares em que $\frac{\partial w_o}{\partial x}$ e $\frac{\partial w_o}{\partial y}$ aparecem devem ser mantidos".

Esta simplificação é feita, segundo Horrigmoe e Bergan [91] e Meek e Tan [94], para evitar "self-straining" em formulações lagrangeanas totais. Porém como numa formulação la

grangeana atualizada o efeito de "self-straining" não ocorre, não há necessidade de introduzir-se esta simplificação neste tipo de formulação.

A ausência dos termos não-lineares desprezados pela teoria de von Karman impede o surgimento na matriz de rigidez geométrica de duas submatrizes que são funções dos momentos generalizados, e podem ser importantes na análise de estabilidade de estruturas em que existe flexão no estado de equilíbrio pré-crítico.

A parcela linear do tensor de deformação (Equações (XII.37)), pode ser desmembrada em duas partes, uma correspondente ao comportamento de membrana e a outra correspondente ao comportamento de placa:

$$\left(\Delta e_{11} \right)_m = \frac{\partial u_o}{\partial x} \qquad \text{(XII.39a)}$$

$$\left(\Delta e_{22} \right)_m = \frac{\partial v_o}{\partial y} \qquad \text{(XII.39b)}$$

$$\left(\Delta e_{12} \right)_m = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \right) \qquad \text{(XII.39c)}$$

$$\left(\Delta e_{11} \right)_f = - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \qquad \text{(XII.40a)}$$

$$\left(\Delta e_{22} \right)_f = - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \qquad \text{(XII.40b)}$$

$$\left(\Delta e_{12} \right)_f = - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \qquad \text{(XII.40c)}$$

XII.5.1) Relações Deformação - Deslocamento Lineares Referentes ao Comportamento de Membrana

O campo de deslocamentos correspondente ao comportamento de membrana foi escrito nas equações (XII.13) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_o &= a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3 \\ v_o &= a_4 L_1 + a_4 L_2 + a_5 L_2 + a_6 L_3 \end{aligned} \qquad \text{(XII.41)}$$

As coordenadas generalizadas a_i (i= 1,2,3,4,5,6) são calculadas em função dos deslocamentos nodais através das condições que u_o e v_o devem satisfazer nos nós 1,2, e 3.

- no nó 1

$$\begin{aligned} u_o &= a_1 = \Delta u_1 \\ v_o &= a_4 = \Delta v_1 \end{aligned} \qquad \text{(XII.42a)}$$

- no nó 2

$$u_o = a_2 = \Delta u_2$$
$$v_o = a_5 = \Delta v_2 \qquad \text{(XII.42b)}$$

- no nó 3

$$u_o = a_3 = \Delta u_3$$
$$v_o = a_6 = \Delta v_3 \qquad \text{(XII.42c)}$$

Escrevendo-se as equações (XII.41) em forma matricial e usando as equações (XII.42) tem-se:

$$\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{H}_m \; \overset{k}{\underset{\sim}{\Delta v}} \qquad \text{(XII.43a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{v}^T = \begin{bmatrix} u_o & v_o \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.43b)}$$

$$\underset{\sim}{H}_m = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ \\ L_1 & L_2 & L_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.43c)}$$

$$\left(\overset{k}{\underset{\sim}{\Delta v}} \right)^T = \begin{bmatrix} \Delta u_1 & \Delta u_2 & \Delta u_3 & \Delta v_1 & \Delta v_2 & \Delta v_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.43d)}$$

As componentes do vetor de deformação de membrana são definidas a partir das equações (XII.39), da seguinte forma:

$$\left(\Delta e_{11} \right)_m = \frac{\partial u_o}{\partial x} \qquad \text{(XII.44a)}$$

$$\left(\Delta e_{22} \right)_m = \frac{\partial v_o}{\partial y} \qquad \text{(XII.44b)}$$

$$2 \left(\Delta e_{12} \right)_m = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial y} \qquad \text{(XII.44c)}$$

Em forma matricial as equações (XII.44) têm o seguinte aspecto:

$$\left(\underset{\sim}{\Delta e}_v \right)_m = \underset{\sim}{PV} \; \underset{\sim}{v}_r \qquad \text{(XII.45a)}$$

Onde,

$$\left(\underset{\sim}{\Delta e}_v \right)_m^T = \left[\left(\Delta e_{11} \right)_m \quad \left(\Delta e_{22} \right)_m \quad 2\left(\Delta e_{12} \right)_m \right] \qquad \text{(XII.45b)}$$

$$\underset{\sim}{PV} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.45c)}$$

$$\left(\underset{\sim}{v}_r \right)^T = \left[\frac{\partial u_o}{\partial x} \quad \frac{\partial u_o}{\partial y} \quad \frac{\partial v_o}{\partial x} \quad \frac{\partial v_o}{\partial y} \right] \qquad \text{(XII.45d)}$$

A relação entre as derivadas dos deslocamentos no sistema de coordenadas cartesiano e no sistema triangular é dada por:

$$\underset{\sim}{v}_r = \underset{\sim}{JV}\ \underset{\sim}{v}_L \qquad \text{(XII.46a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{JV} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{J}^{-1} & \underset{\sim}{O} \\ \underset{\sim}{O} & \underset{\sim}{J}^{-1} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.46b)}$$

$$\left(\underset{\sim}{v}_L\right)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_o}{\partial L_1} & \frac{\partial u_o}{\partial L_2} & \frac{\partial v_o}{\partial L_1} & \frac{\partial v_o}{\partial L_2} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.46c)}$$

$$\underset{\sim}{J}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} Y_{23} & Y_{31} \\ X_{32} & X_{13} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.46d)}$$

$\underset{\sim}{O}$ - matriz nula 2x2

$\underset{\sim}{J}^{-1}$ - inversa da matriz jacobiana $\underset{\sim}{J}$ que transforma derivadas no sistema de coordenadas cartesiano, em derivadas no sistema de coordenadas triangulares (Ver Apêndice A)

A - área do elemento

A relação entre as derivadas dos deslocamentos no sistema de coordenadas triangulares e os deslocamentos nodais é dada por:

$$\underset{\sim}{v}_L = \underset{\sim}{DVL} \; \Delta\underset{\sim}{v}^k \qquad \text{(XII.47a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{DVL} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.47b)}$$

No vetor $\Delta\underset{\sim}{v}^k$ os deslocamentos não estão posicionados na sequência em que aparecem nos nós. A relação entre o vetor $\Delta\underset{\sim}{v}^k$ e o vetor $(\Delta\underset{\sim}{u}^k)_m$ em que os deslocamentos aparecem na sequência adequada é dada por:

$$\Delta\underset{\sim}{v}^k = \underset{\sim}{TV} \; (\Delta\underset{\sim}{u}^k)_m \qquad \text{(XII.48a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{TV} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.48b)}$$

$$\left(\underset{\sim}{\Delta u}^{k} \right)_{m}^{T} = \begin{bmatrix} \Delta u_1 & \Delta v_1 & \Delta u_2 & \Delta v_2 & \Delta u_3 & \Delta v_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.48c)}$$

Substituindo sucessivamente as equações (XII.46a), (XII.47a) e (XII.48a) em (XII.45a) tem-se:

$$\left(\underset{\sim}{\Delta e}_{v} \right)_{m} = \underset{\sim}{B}_{1} \left(\underset{\sim}{\Delta u}^{k} \right)_{m} \qquad \text{(XII.49a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{B}_{1} = \underset{\sim}{PV}\ \underset{\sim}{JV}\ \underset{\sim}{DVL}\ \underset{\sim}{TV} \qquad \text{(XII.49c)}$$

Realizando-se as operações matriciais indicadas em (XII.49c) obtém-se:

$$\underset{\sim}{B}_{1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.50a)}$$

Sendo,

$$y_{23} = y_2 - y_3$$

$$y_{31} = y_3 - y_1$$

$$y_{12} = y_1 - y_2 \qquad \text{(XII.50b)}$$

$$x_{32} = x_3 - x_2$$

$$x_{13} = x_1 - x_3$$

$$x_{21} = x_2 - x_1$$

x_i - coordenada x do nó "i" (i= 1,2,3) no sistema de referência local móvel

y_i - coordenada y do nó "i" (i= 1,2,3) no sistema de referência local móvel.

XII.5.2) Relações Deformação-Deslocamento Lineares Referentes ao Comportamento de Placa

O campo de deslocamentos correspondente ao comportamento de placa foi escrito nas equações (XII.14) e (XII.15) da seguinte forma:

$$w_o = a_7 L_1 + a_8 L_2 + a_9 L_3 +$$
$$a_{10} L_1 L_2 + a_{11} L_2 L_3 + a_{12} L_1 L_3 +$$
$$a_{13} (L_1^2 L_2 - L_2 L_1^2) + a_{14} (L_2^2 L_3 - L_3^2 L_2) +$$
$$a_{15} (L_3^2 L_1 - L_1 L_3^2) \qquad \text{(XII.51)}$$

$$\theta_x = \frac{\partial w_o}{\partial y} \qquad \text{(XII.52a)}$$

$$\theta_y = \frac{\partial w_o}{\partial x} \qquad \text{(XII.52b)}$$

XII.5.2.1) Relação Entre as Coordenadas Generalizadas e os Deslocamentos Nodais

Define-se o vetor $\underset{\sim}{w}_n$ da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{w}_n^T = \left[w_o \quad \frac{\partial w_o}{\partial L_1} \quad \frac{\partial w_o}{\partial L_2} \right] \qquad \text{(XII.53)}$$

A relação entre o vetor $\underset{\sim}{w}_n$ e o vetor de coordenadas generalizadas é dada por:

$$\underset{\sim}{w}_n = \underset{\sim}{\phi}_n \underset{\sim}{\alpha} \qquad \text{(XII.54a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{\phi}_n = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_1 L_2 & L_2 L_3 \\ 1 & 0 & -1 & L_2 & -L_2 \\ 0 & 1 & -1 & L_1 & (-L_2 + L_3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_1 L_3 & (L_1^2 L_2 - L_2^2 L_1) & (L_2^2 L_3 - L_3^2 L_2) \\ (-L_1 + L_3) & (L_2^2 - 2 L_1 L_2) & (L_2^2 - 2 L_2 L_3) \\ -L_1 & (-L_1^2 + 2 L_1 L_2) & (L_2^2 - 4 L_2 L_3 + L_3^2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (L_3^2 L_1 - L_1^2 L_3) \\ (-L_1^2 + 4 L_1 L_3 - L_3^2) \\ (-L_1^2 + 2 L_1 L_3) \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.54b)}$$

$$\underset{\sim}{\alpha}^T = [a_7 \; a_8 \; a_9 \; a_{10} \; a_{11} \; a_{12} \; a_{13} \; a_{14} \; a_{15}] \qquad \text{(XII.54c)}$$

Aplicando-se a equação (XII.54a) aos nós do elemento tem-se:

$$\underset{\sim}{w}_d^k = \underset{\sim}{\phi}_d^k \, \underset{\sim}{\alpha} \qquad \text{(XII.55a)}$$

Onde,

$$\left(\underset{\sim}{w}_d^k \right)^T = \left[\Delta w_1 \;\; \Delta w_2 \;\; \Delta w_3 \left(\frac{\partial w_o}{\partial L_1} \right)_1 \;\; \left(\frac{\partial w_o}{\partial L_1} \right)_2 \left(\frac{\partial w_o}{\partial L_1} \right)_3 \right. \qquad \text{(XII.55b)}$$

$$\left. \left(\frac{\partial w_o}{\partial L_2} \right)_1 \;\; \left(\frac{\partial w_o}{\partial L_2} \right)_2 \;\; \left(\frac{\partial w_o}{\partial L_2} \right)_3 \right]$$

$$\underset{\sim}{\phi}_d^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(XII.55c)

Passando as coordenadas generalizadas, que são as incógnitas, para o lado esquerdo da equação (XII.55a) tem-se:

$$\underset{\sim}{\alpha} = \left(\underset{\sim}{\phi}_d^k \right)^{-1} \underset{\sim}{w}_d^k \qquad \text{(XII.56)}$$

As derivadas no sistema de coordenadas triangulares relacionam-se com as derivadas cartesianas através da equação (A.10a) (ver Apêndice A), portanto:

$$\underset{\sim}{w}_n = \underset{\sim}{J}_w \; \underset{\sim}{w}_r \qquad \text{(XII.57a)}$$

Onde,

$$(\underset{\sim}{w}_r)^T = \left[w_o \quad \frac{\partial w_o}{\partial x} \quad \frac{\partial w_o}{\partial y} \right] \qquad \text{(XII.57b)}$$

$$\underset{\sim}{J}_w = \begin{bmatrix} 1 & \underset{\sim}{0}^T \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{J} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.57c)}$$

$\underset{\sim}{0}$ - vetor nulo de duas posições

Aplicando-se a equação (XII.57a) aos nós do elemento tem-se:

$$\underset{\sim}{w}_n^k = \underset{\sim}{S}\underset{\sim}{J}\ \underset{\sim}{w}_r^k \qquad \text{(XII.58a)}$$

Onde,

$$(\underset{\sim}{w}_n^k)^T = \left[\Delta w_1 \left(\frac{\partial w_o}{\partial L_1}\right)_1 \left(\frac{\partial w_o}{\partial L_2}\right)_1 \Delta w_2 \left(\frac{\partial w_o}{\partial L_1}\right)_2 \left(\frac{w_o}{\partial L_2}\right)_2 \right.$$
$$\left. \Delta w_3 \left(\frac{\partial w_o}{\partial L_1}\right)_3 \left(\frac{\partial w_o}{\partial L_2}\right)_3 \right] \qquad \text{(XII.58b)}$$

$$(\underset{\sim}{w}_r^k)^T = \left[\Delta w_1 \left(\frac{\partial w_o}{\partial x}\right)_1 \left(\frac{\partial w_o}{\partial y}\right)_1 \Delta w_2 \left(\frac{\partial w_o}{\partial x}\right)_2 \left(\frac{\partial w_o}{\partial y}\right)_2 \right.$$
$$\left. \Delta w_3 \left(\frac{\partial w_o}{\partial x}\right)_3 \left(\frac{\partial w_o}{\partial y}\right)_3 \right] \qquad \text{(XII.58c)}$$

$$\underset{\sim}{SJ} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{J}_w & \underset{\sim}{O} & \underset{\sim}{O} \\ \underset{\sim}{O} & \underset{\sim}{J}_w & \underset{\sim}{O} \\ \underset{\sim}{O} & \underset{\sim}{O} & \underset{\sim}{J}_w \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.58d)}$$

$\underset{\sim}{O}$ - matriz nula 3x3

Os deslocamentos nodais se relacionam com as derivadas cartesianas através da seguinte equação:

$$\underset{\sim}{w}_r^k = SR \left(\underset{\sim}{\Delta u}^k \right)_f \qquad \text{(XII.59a)}$$

Onde,

$$\left(\underset{\sim}{\Delta u}^k \right)^T = [\Delta w_1 \Delta\theta_{x1} \ \Delta\theta_{y1} \ \Delta w_2 \ \Delta\theta_{x2} \ \Delta\theta_{y2} \ \Delta w_3 \ \Delta\theta_{x3} \ \Delta\theta_{y3}\ ] \qquad \text{(XII.59b)}$$

$$\underset{\sim}{SR} = \begin{bmatrix} SV & \underset{\sim}{O} & \underset{\sim}{O} \\ \underset{\sim}{O} & SV & \underset{\sim}{O} \\ \underset{\sim}{O} & \underset{\sim}{O} & SV \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.59c)}$$

$\underset{\sim}{O}$ - matriz nula 3x3

$$\underset{\sim}{SV} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.59d)}$$

O vetor $\underset{\sim}{w}_n^k$ é transformado no vetor $\underset{\sim}{w}_d^k$ através da seguinte equação:

$$\underset{\sim}{w}_d^k = \underset{\sim}{SM}\ \underset{\sim}{w}_n^k \qquad \text{(XII.60a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{SM} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.60b)}$$

Substituindo as equações (XII.60a), (XII.58a) e (XII.59a) em (XII.56) tem-se:

$$\underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{U}\ \left(\Delta \underset{\sim}{u}^k \right)_f \qquad \text{(XII.61a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{U} = \left(\underset{\sim}{\phi}_d^k \right)^{-1} \underset{\sim}{SM}\ \underset{\sim}{SJ}\ \underset{\sim}{SR} \qquad \text{(XII.61b)}$$

Efetuando-se as operações matriciais indicadas em (XII.61b) e realizando-se algumas simplificações, tem-se

$$\underset{\sim}{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y_{21}}{2} & -\frac{x_{21}}{2} & 0 & -\frac{y_{21}}{2} & \frac{x_{21}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{y_{23}}{2} & \frac{x_{23}}{2} & 0 & \frac{y_{23}}{2} & -\frac{x_{23}}{2} \\ 0 & -\frac{y_{13}}{2} & \frac{x_{13}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y_{13}}{2} & -\frac{x_{13}}{2} \\ -1 & -\frac{y_{21}}{2} & \frac{x_{21}}{2} & 1 & -\frac{y_{21}}{2} & \frac{x_{21}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{y_{23}}{2} & -\frac{x_{23}}{2} & 1 & \frac{y_{23}}{2} & -\frac{x_{23}}{2} \\ 1 & -\frac{y_{13}}{2} & \frac{x_{13}}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{y_{13}}{2} & \frac{x_{13}}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.62a)}$$

Onde,

$$y_{21} = y_2 - y_1$$

$$y_{13} = y_1 - y_3 \qquad \text{(XII.62b)}$$

$$y_{23} = y_2 - y_3$$

$$x_{21} = x_2 - x_1$$

$$x_{13} = x_1 - x_3 \qquad \text{(XII.62c)}$$

$$x_{23} = x_2 - x_3$$

x_i - coordenada x do nó "i" (i=1,2,3) no sistema de referência local móvel

y_i - coordenada y do nó "i" (i=1,2,3) no sistema de referência local móvel

XII.5.2.2) Relação Entre os Deslocamentos no Elemento e os Deslocamentos Nodais

De acordo com as equações (XII.20) e (XII.21), quando o elemento encontra-se submetido apenas a flexão ($u_o=v_o=0$) as translações em um ponto qualquer do elemento são dadas por:

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y, z) &= - z \ \partial w_o/\partial x \\ \Delta v(x, y, z) &= - z \ \partial w_o/\partial y \\ \Delta w(x, y, z) &= w_o \end{aligned} \qquad \text{(XII.63)}$$

Colocando a equação (XII.63) em forma matricial, tem-se:

$$\underset{\sim}{\Delta u} = \underset{\sim}{PD} \ \underset{\sim}{w_r} \qquad \text{(XII.64a)}$$

Onde,

$$\left(\Delta\underset{\sim}{u}\right)^{T} = \left[\Delta u \quad \Delta v \quad \Delta w\right] \qquad \text{(XII.64b)}$$

$$\underset{\sim}{PD} = \begin{bmatrix} 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & -z \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.64c)}$$

Isolando-se o vetor $\underset{\sim}{w}_r$ na equação (XII.57a) obtém-se:

$$\underset{\sim}{w}_r = \left(\underset{\sim}{J}_w\right)^{-1} \underset{\sim}{w}_n \qquad \text{(XII.65)}$$

A relação entre as derivadas no sistema de coordenadas triangulares e os deslocamentos nodais é obtida substituindo-se a equação (XII.61a) em (XII.54a):

$$\underset{\sim}{w}_n = \underset{\sim}{\phi}_n \; \underset{\sim}{U} \; \left(\Delta\underset{\sim}{u}^{k}\right)_f \qquad \text{(XII.66)}$$

Substituindo a equação (XII.66) em (XII.65) tem-se:

$$\underset{\sim}{w}_r = \left(\underset{\sim}{J}_w\right)^{-1} \underset{\sim}{\phi}_n \; \underset{\sim}{U} \; \left(\Delta\underset{\sim}{u}^{k}\right)_f \qquad \text{(XII.67)}$$

Substituindo a equação (XII.67) em (XII.64a) tem-se:

$$\Delta\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{H}_f \left(\Delta\underset{\sim}{u}^{k}\right)_f \qquad \text{(XII.68a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{H}_f = PD \left(\underset{\sim}{J}_w \right)^{-1} \underset{\sim}{\phi}_n \underset{\sim}{U} \qquad \text{(XII.68b)}$$

XII.5.2.3) Relação Entre a Parcela Linear do Tensor de Deformação e os Deslocamentos Nodais

As componentes do vetor de deformação de flexão são definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (\Delta e_{11})_f &= \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \\ (\Delta e_{22})_f &= \frac{\partial \Delta v}{\partial y} \\ 2(\Delta e_{12})_f &= \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \end{aligned} \qquad \text{(XII.69)}$$

Colocando as equações (XII.69) em forma matricial tem-se:

$$(\underset{\sim}{\Delta e}_v)_f = \underset{\sim}{PU}\ \underset{\sim}{DU} \qquad \text{(XII.70a)}$$

Onde,

$$(\underset{\sim}{\Delta e}_v)_f^T = [\,(\Delta e_{11})_f \quad (\Delta e_{22})_f \quad 2(\Delta e_{12})_f\,] \qquad \text{(XII.70b)}$$

$$\underset{\sim}{PU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.70c)}$$

$$\underset{\sim}{DU}^{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} & \frac{\partial \Delta u}{\partial y} & \frac{\partial \Delta v}{\partial x} & \frac{\partial \Delta v}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.70d)}$$

Usando as equações (XII.63) e realizando as derivações indicadas em (XII.70d) tem-se

$$\underset{\sim}{DU} = - z \quad \underset{\sim}{PW} \quad \underset{\sim}{DW} \qquad \text{(XII.71a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{PW} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.71b)}$$

$$\underset{\sim}{DW}^{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.71c)}$$

A relação entre as derivadas segundas nos sistemas cartesiano e triangular é dada pela equação (A.14a) (ver Apêndice A):

$$\underset{\sim}{DW} = \underset{\sim}{T} \quad \underset{\sim}{DL} \qquad \text{(XII.72a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{T} = \frac{1}{4A^2}\begin{bmatrix} (y_{23})^2 & (y_{31})^2 & 2\,y_{23}\,y_{31} \\ (x_{32})^2 & (x_{13})^2 & 2\,x_{32}\,x_{13} \\ y_{23}\,x_{32} & y_{31}\,x_{13} & (y_{23}\,x_{13} + y_{31}\,x_{32}) \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.72b)}$$

A - área do elemento

$$\underset{\sim}{DL} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_o}{\partial L_1^2} & \frac{\partial^2 w_o}{\partial L_2^2} & \frac{\partial^2 w_o}{\partial L_1 \partial L_2} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.72c)}$$

As derivadas segundas no sistema triangular se relacionam com as coordenadas generalizadas da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{DL} = \underset{\sim}{FD}\ \underset{\sim}{\alpha} \qquad \text{(XII.73a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{FD} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2\,L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2\,L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2\,(-L_1 + L_2) \\ 2L_2 & & & 6\,(-L_1 + L_3) & & & \\ 6\,(L_2 - L_3) & & & -2L_1 & & & \\ (4\,L_2 - 2L_3) & & & (-4L_1 + 2L_3) & & & \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.73b)}$$

Substituindo (XII.71a), (XII.72a), (XII.73a) e (XII.61a) em (XII.61a) em (XII.70a) tem-se:

$$\left(\underset{\sim}{\Delta e}_{v} \right)_{f} = \underset{\sim}{B}_{2} \left(\underset{\sim}{\Delta u}^{k} \right)_{f} \qquad \text{(XII.74a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{B}_{2} = - z \; \underset{\sim}{PU} \; \underset{\sim}{PW} \; \underset{\sim}{T} \; \underset{\sim}{FD} \; \underset{\sim}{U} \qquad \text{(XII.74b)}$$

XII.5.3) Relações Deformação Deslocamento Lineares Referentes ao Comportamento de Casca

O vetor de deformação de casca é dado por:

$$\underset{\sim}{\Delta e}_{v} = \left(\underset{\sim}{\Delta e}_{v} \right)_{m} + \left(\underset{\sim}{\Delta e}_{v} \right)_{f} \qquad \text{(XII.75)}$$

Substituindo as equações (XII.49a) e (XII.74a) em (XII.75) tem-se

$$\underset{\sim}{\Delta e}_{v} = \underset{\sim}{B}_{1} \left(\underset{\sim}{\Delta u}^{k} \right)_{m} + \underset{\sim}{B}_{2} \left(\underset{\sim}{\Delta u}^{k} \right)_{f} \qquad \text{(XII.76)}$$

Fazendo

$$\underset{\sim}{B}_{L} = \left[\underset{\sim}{B}_{1} \quad \underset{\sim}{B}_{2} \right] \qquad \text{(XII.77a)}$$

$$\left(\Delta \underset{\sim}{u}^{k} \right)_{SEP} = \begin{bmatrix} \left(\Delta \underset{\sim}{u}^{k} \right)_{m} \\ \\ \left(\Delta \underset{\sim}{u}^{k} \right)_{f} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.77b)}$$

e substituindo em (XII.76) tem-se:

$$\Delta \underset{\sim}{e}_{v} = \underset{\sim}{B}_{L} \left(\Delta \underset{\sim}{u}^{k} \right)_{SEP} \qquad \text{(XII.78)}$$

O subíndice "SEP" colocado no vetor de deslocamentos da equação (XII.79) indica que ele corresponde aos graus de liberdade de membrana e de flexão, numerados por tipo de comportamento (primeiro membrana, depois flexão) e não na sequência em que ocorrem em cada nó. Neste vetor, não estão incluídas as rotações (três graus de liberdade) dos nós em torno do eixo perpendicular ao plano do elemento.

XII.6) MATRIZ DE RIGIDEZ ELÁSTICA E VETOR DE FORÇAS INTERNAS

A matriz de rigidez elástica que reúne os comportamentos de membrana e de placa é dada por (ver Equação (V.10a))

$$\left(\underset{\sim}{K}_{E} \right)_{SEP} = \int \underset{\sim}{B}_{L}^{T} \; \underset{\sim}{C} \; \underset{\sim}{B}_{L} \, dV \qquad \text{(XII.79)}$$

Substituindo a equação (XII.77a) em (XII.79) e realizando algumas operações matriciais obtém-se:

$$\left(\underset{\sim}{K}_{E}\right)_{SEP} = \begin{bmatrix} \left(\underset{\sim}{K}_{E}\right)_{m} & \left(\underset{\sim}{K}_{E}\right)_{mf} \\ \left(\underset{\sim}{K}_{E}\right)^{T}_{mf} & \left(\underset{\sim}{K}_{E}\right)_{f} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.80a)}$$

Onde,

$$\left(\underset{\sim}{K}_{E}\right)_{m} = \int \underset{\sim}{B}_{1}^{T}\ \underset{\sim}{C}\ \underset{\sim}{B}_{1}\ dV \qquad \text{(XII.80b)}$$

$$\left(\underset{\sim}{K}_{E}\right)_{mf} = \int \underset{\sim}{B}_{1}^{T}\ \underset{\sim}{C}\ \underset{\sim}{B}_{2}\ dV \qquad \text{(XII.80c)}$$

$$\left(\underset{\sim}{K}_{E}\right)_{f} = \int \underset{\sim}{B}_{2}^{T}\ \underset{\sim}{C}\ \underset{\sim}{B}_{2}\ dV \qquad \text{(XII.80d)}$$

A integral da equação (XII.80c) é nula portanto:

$$\left(\underset{\sim}{K}_{E}\right)_{mf} = \underset{\sim}{O} \qquad \text{(XII.81)}$$

Substituindo a equação (XII.81) em (XII.80a), tem-se:

$$\left(\underset{\sim}{K}_{E}\right)_{SEP} = \begin{bmatrix} \left(\underset{\sim}{K}_{E}\right)_{m} & O \\ \underset{\sim}{O} & \left(\underset{\sim}{K}_{E}\right)_{f} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.82)}$$

O subíndice "SEP" colocado na matriz de rigidez da equação (XII.82) indica que ela corresponde aos graus de liberdade de membrana e de flexão, numerados por tipo de comportamento (primeiro membrana, depois flexão) e não na sequência em que ocorrem em cada nó. Nesta matriz não está incluída a sub-matriz correspondente a rigidez na direção das rotações (três graus de liberdade) dos nós em torno do eixo perpendicular ao plano do elemento.

XII.6.1) Matriz de Rigidez Elástica Referente ao Comportamento de Membrana

A matriz de rigidez referente ao comportamento de membrana está definida na equação (XII.80b). Resolvendo-se a integral indicada nesta equação obtém-se:

$$(\underset{\sim}{K}_{E})_{m} = (\underset{\sim}{B}_{1}^{T} \; \underset{\sim}{C} \; \underset{\sim}{B}_{1}) \; A \; t \qquad \text{(XII.83)}$$

Onde,

A - área do elemento

t - espessura do elemento

Efetuando-se as operações matriciais indicadas na equação (XII.83) determinam-se explicitamente os elementos da matriz $(\underset{\sim}{K}_{E})_{m}$.

XII.6.2) Matriz de Rigidez Elástica Referente ao Comportamento de Placa

A equação (XII.74b) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{B}_2 = - z \; \underset{\sim}{TM2} \; \underset{\sim}{FDR} \; \underset{\sim}{UR} \qquad \text{(XII.84a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{TM2} = \underset{\sim}{PU} \; \underset{\sim}{PW} \; \underset{\sim}{T} \qquad \text{(XII.84b)}$$

$$\underset{\sim}{FDR} \; \underset{\sim}{UR} = \underset{\sim}{FD} \; \underset{\sim}{U} \qquad \text{(XII.84c)}$$

A matriz $\underset{\sim}{FDR}$ é a matriz $\underset{\sim}{FD}$ (Equação XII.73b) sem as três primeiras colunas. A matriz $\underset{\sim}{UR}$ é a matriz $\underset{\sim}{U}$ sem as três primeiras linhas.

A matriz transposta de $\underset{\sim}{B}_2$ é dada por :

$$\underset{\sim}{B}_2^T = - z \; \underset{\sim}{UR}^T \; \underset{\sim}{FDR}^T \; \underset{\sim}{TM2}^T \qquad \text{(XII.85)}$$

Substituindo as equações (XII.84a) e (XII.85) em (XII.80d) obtém-se:

$$\left(\underset{\sim}{K}_E \right)_f = \underset{\sim}{UR}^T \left[\underset{\sim}{FDR}^T \; \underset{\sim}{TM2}^T \; \underset{\sim}{C} \; \underset{\sim}{TM2} \; \underset{\sim}{FDR} \; dV \right] \underset{\sim}{UR}$$

(XII.86)

Realizando a integração em z na equação (XII.86) obtém-se:

$$\left(\underset{\sim}{K}_E \right)_f = \underset{\sim}{UR}^T \left[\int \underset{\sim}{FDR}^T \; \underset{\sim}{EHE} \; \underset{\sim}{FDR} \; dA \right] \underset{\sim}{UR} \qquad \text{(XII.87a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{EHE} = \underset{\sim}{TM2}^T \; \underset{\sim}{CP} \; \underset{\sim}{TM2} \qquad \text{(XII.87b)}$$

A matriz CP que aparece na equação (XII.87b) foi definida anteriormente na equação (XII.31b).

Isolando-se a integral da equação (XII.87a) tem-se:

$$\underset{\sim}{RFT} = \int \underset{\sim}{FDR}^T \; \underset{\sim}{EHE} \; \underset{\sim}{FDR} \; dA \qquad \text{(XII.88)}$$

Efetuando-se explicitamente a integração indicada em (XII.88), determina-se a matriz $\left(\underset{\sim}{K}_E \right)_f$ através da seguinte equação:

$$\left(\underset{\sim}{K}_E \right)_f = \underset{\sim}{UR}^T \; \underset{\sim}{RFT} \; \underset{\sim}{UR} \qquad \text{(XII.89)}$$

XII.6.3) Matriz Correspondente a Rigidez na Direção das Rotações em Torno do Eixo z Local

A matriz correspondente à rigidez na direção das rotações θ's$_z$ é dada por:

$$(\tilde{K}_E)_R = \begin{bmatrix} KR_{13} & 0 & 0 \\ 0 & KR_{23} & 0 \\ 0 & 0 & KR_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.90)}$$

Onde,

KR_{i3} - rigidez correspondente a rotação em torno do eixo z no nó i (i=1, 2, 3)

A rigidez KR_{i3} é nula para os nós não coplanares e não nula para os nós coplanares. Define-se nó coplanar como aquele em que todos os elementos afluentes encontram-se no mesmo plano.

Para os nós coplanares o valor da rigidez KR_{i3} é determinado da seguinte forma:

$$KR_{i3} = CKR \; \max(KR_{i1}, KR_{i2}) \qquad \text{(XII.91)}$$

Onde,

max(A,B) - função que retorna o maior valor dentre os dois parâmetros A e B

CKR - fator de escala

KR_{i1} - rigidez correspondente a rotação em torno do eixo x no nó i (i=1,2,3)

KR_{i2} - rigidez correspondente a rotação em torno do eixo y no nó i (i=1,2,3)

As variáveis KR_{i1} e KR_{i2} assumem os valores dos elementos que ocupam a diagonal da matriz de placa (Equação (XII.89)) nas posições 2 e 3 (i=1), 5 e 6 (i=2) e 8 e 9 (i=3).

Antes de chegar ao valor definitivo do fator CKR foram feitos muitos experimentos numéricos, em que CKR podia assumir valores entre 0.0001 e 10000. Constatou-se que CKR = 1 é a melhor opção, pois retira a singularidade da matriz de rigidez sem prejudicar a convergência do processo iterativo, nem afastar o resultado numérico da solução correta. Isto ocorre porque com CKR = 1 o valor adotado para a rigidez KR_{i3} tem a mesma ordem de grandeza dos outros coeficientes de rigidez de rotação do nó "i"

Na literatura existem outras soluções para contornar a singularidade das equações de equilíbrio dos nós coplanares. Duas delas chegaram a ser testadas, porém foram menos eficientes que a solução proposta nas equações (XII.90) e (XII.91). Uma das soluções foi proposta por

Bathe e HO [93]. Consiste numa matriz igual a definida na equação (XII.90) com KR_{i3} calculado através de uma forma modificada da equação (XII.91) em que a função "max" é substituída pela função "min" e CKR é igual 0.0001. A desvantagem desta solução é que, apesar de contornar a singularidade das equações de equilíbrio, o valor de KR_{i3} é muito pequeno para evitar que a rotação θ_z fique "solta", e chegue até a atingir valores irreais em alguns casos.

A outra solução testada foi proposta por Zienkiewicz [15]. Consiste em substituir a matriz da equação (XII.90) por uma matriz cheia, multiplicada por um parâmetro dimensional PAR (PAR = c E A t) a ser considerada sempre, e não só quando houver nós coplanares. A diagonal da matriz é ocupada por valores unitários e as outras posições pelo número - 0.5. O valor do parâmetro PAR é função da variável c. É recomendado adotar-se para c um valor entre 0.000001 e 0.01. A desvantagem desta solução é que ela trata os nós coplanares e não coplanares da mesma maneira, o que faz com que seja considerada nos nós não coplanares uma rigidez inexistente e injustificável do ponto de vista teórico. Em alguns problemas esta consideração pode gerar um enrijecimento artificial da estrutura.

A solução adotada por Horrigmoe e Bergan [91] retira as rotações θ_z's do vetor de deslocamentos do elemento

reduzindo os seus GDL* de seis por nó para cinco por nó. Para que isto seja feito as equações de equilíbrio da estrutura são referidas a um sistema de referência nodal, que em cada nó tem o eixo z perpendicular à superfície da casca. Em malhas de elementos planos, esta direção é determinada fazendo-se uma média das direções perpendiculares aos planos dos elementos que chegam ao nó. As desvantagens desta solução encontram-se nos efeitos produzidos pela redução dos GDL nodais de seis para cinco. A utilização de um sistema de referência para cada nó torna o processo de montagem das equações de equilíbrio da estrutura mais complexo e computacionalmente mais caro que o processo convencional que utiliza um único sistema de referência, o global. A inexistência do sexto GDL pode dificultar, ou mesmo impossibilitar, a solução de problemas de geometria complexa. A eliminação pura e simples da rotação θ_z pode em certos problemas, segundo Carpenter e outros [81], impedir a representação correta da rotação de corpo rígido da casca como um todo.

A solução que vem sendo adotada mais recentemente [104,144] consiste em desenvolver elementos de casca que modelem o comportamento de membrana com formulações que têm rotações como incógnitas nodais. Desta forma a matriz de rigidez correspondente às rotações θ_z's surge naturalmente, como decorrência da representação do comportamento de membrana. Esta solução tem-se mostrado bastante promissora

---

* GDL - Graus de liberdade

porém, como ainda não se encontra assentada em sólidas bases matemáticas, existem algumas deficiências que precisam ser corrigidas. Na análise de estruturas espaciais pode apresentar hiperenrijecimento ("locking"), principalmente quando existe dupla curvatura [104]. Em problemas planos podem surgir modos de deformação espúrios com energia nula [144]. Neste tipo de elemento a representação do comportamento de membrana é muito sensível a distorções na malha [144].

XII.6.4) Matriz de Rigidez Referente ao Comportamento de Casca

A matriz de rigidez expandida do elemento de casca, que inclui a matriz correspondente à rigidez na direção das rotações θ_z's , é dada por:

$$(\underset{\sim}{K}_E)_{EXP} = \begin{bmatrix} (\underset{\sim}{K}_E)_m & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & (\underset{\sim}{K}_E)_f & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & (\underset{\sim}{K}_E)_R \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.92)}$$

A matriz $(\underset{\sim}{K}_E)_{EXP}$ corresponde aos GDL de membrana, flexão e rotações θ_z's numerados por tipo de comportamento. Na sua forma final a matriz de rigidez do elemento de casca $\underset{\sim}{K}_E$, deve corresponder aos GDL numerados na sequência em que ocorrem em cada nó. Isto é

obtido realizando-se um espalhamento dos elementos das matrizes $(\underset{\sim}{K}_E)_m$, $(\underset{\sim}{K}_E)_f$ e $(\underset{\sim}{K}_E)_R$ na matriz $\underset{\sim}{K}_E$. Este espalhamento é feito usando os seguintes vetores de conetividades:

$$(L)_m = [1, 2, 7, 8, 13, 14] \qquad \text{(XII.93a)}$$

$$(L)_f = [3, 4, 5, 9, 10, 11, 15, 16, 17] \qquad \text{(XII.93b)}$$

$$(L)_R = [6, 12, 18] \qquad \text{(XII.93c)}$$

XII.6.5) Vetor de Forças Internas

O vetor de forças internas é determinado em cada iteração, através da seguinte equação:

$$\underset{\sim}{F}^{k+1} = \underset{\sim}{F}^{k} + \Delta\underset{\sim}{F} \qquad \text{(XII.94a)}$$

Onde,

$$\Delta\underset{\sim}{F} = \int \underset{\sim}{B}_L^T \; \Delta\underset{\sim}{S}_v \; dV \qquad \text{(XII.94b)}$$

Como o material é elástico o vetor de forças internas incrementais da equação (XII.94b) pode ser determinado de uma maneira mais simples através da seguinte equação:

$$\Delta \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{K}_E \quad \Delta \underset{\sim}{u}^k \qquad \text{(XII.95a)}$$

Onde,

$\underset{\sim}{K}_E$ - matriz de rigidez do subitem (XII.6.4) correspondente aos GDL numerados na sequência em que ocorrem em cada nó.

$\Delta \underset{\sim}{u}^k$ - vetor com os dezoito deslocamentos nodais incrementais do elemento

XII.7) TENSÕES GENERALIZADAS

O vetor de tensão generalizada de membrana é determinado em cada iteração, através da seguinte equação:

$$\underset{\sim}{N}^{k+1} = \underset{\sim}{N}^{k} + \Delta \underset{\sim}{N} \qquad \text{(XII.96)}$$

De acordo com a equação (XII.28a) o vetor $\Delta \underset{\sim}{N}$ é dado por:

$$\Delta \underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{C}_M \quad (\Delta \underset{\sim}{e}_{v\ m}) \qquad \text{(XII.97)}$$

Substituindo a equação (XII.49a) em (XII.97) tem-se:

$$\Delta \underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{CM} \; \underset{\sim}{B}_1 \; (\Delta \overset{k}{\underset{\sim}{u}})_m \qquad \text{(XII.98)}$$

O vetor de tensão generalizada de flexão é determinado em cada iteração através da seguinte equação:

$$\overset{k+1}{\underset{\sim}{M}} = \overset{k}{\underset{\sim}{M}} + \Delta \underset{\sim}{M} \qquad \text{(XII.99)}$$

De acordo com a equação (XII.31a) o vetor $\Delta \underset{\sim}{M}$ é dado por:

$$\Delta \underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{CP} \; \Delta \underset{\sim}{\psi} \qquad \text{(XII.100)}$$

De acordo coom a equação (XII.30) o vetor $\Delta \underset{\sim}{\psi}$ é dado por:

$$\Delta \underset{\sim}{\psi} = \frac{1}{z} \; (\Delta \underset{\sim}{e}_v)_f \qquad \text{(XII.101)}$$

Substituindo sucessivamente as equações (XII.101), (XII.74a) e (XII.74b) em (XII.100) tem-se:

$$\Delta \underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{CBF} \; (\Delta \overset{k}{\underset{\sim}{u}})_f \qquad \text{(XII.102a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{CBF} = - \underset{\sim}{CP}\ \underset{\sim}{PU}\ \underset{\sim}{PW}\ \underset{\sim}{T}\ \underset{\sim}{FD}\ \underset{\sim}{U} \qquad \text{(XII.102b)}$$

XII.8) MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA

A matriz de rigidez geométrica resulta da descretização da seguinte integral (ver capítulo V):

$$\int {}^{N}S_{ij}\ \delta\ \Delta n_{ij}\ dV$$

Explicitando-se o somatório indicado obtém-se:

$$\int {}^{N}S_{ij}\ \delta\ \Delta n_{ij}\ dV = \int (S_{11}\ \delta\ \Delta n_{11} + S_{22}\ \delta\ \Delta n_{22} + S_{33}\ \delta\ \Delta n_{33} + 2\ S_{12}\ \delta\ \Delta n_{12} + 2\ S_{12}\ \delta\ \Delta n_{12} + 2\ S_{23}\ \delta \Delta n_{23} + 2\ S_{13}\ \delta\ \Delta n_{13})\ dV \qquad \text{(XII.103)}$$

Como apenas as tensões S_{11} , S_{22} e S_{12} estão sendo consideradas tem-se:

$$\int {}^{N}S_{ij}\ \delta\ \Delta n_{ij}\ dV = \int (S_{11}\ \delta\ \Delta n_{11} + S_{22}\ \delta\ \Delta n_{22} + 2\ S_{12}\ \delta\ \Delta n_{12})\ dV \qquad \text{(XII.104)}$$

As componentes Δn_{ij} são dadas pela equação (XII.34b), ou em forma matricial por:

$$\Delta n_{ij} = \frac{1}{2} \; \underset{\sim}{DU}_i^T \; \underset{\sim}{DU}_j = \frac{1}{2} \; \underset{\sim}{DU}_j^T \; \underset{\sim}{DU}_i \qquad \text{(XII.105a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{DU}_i^T = \left[\frac{\partial \Delta u_1}{\partial y_i} \quad \frac{\partial \Delta u_2}{\partial y_i} \quad \frac{\partial \Delta u_3}{\partial y_i} \right] \qquad \text{(XII.105b)}$$

$$\underset{\sim}{DU}_j^T = \left[\frac{\partial \Delta u_1}{\partial y_j} \quad \frac{\partial \Delta u_2}{\partial y_j} \quad \frac{\partial \Delta u_3}{\partial y_j} \right] \qquad \text{(XII.105c)}$$

ou

$$\underset{\sim}{DU}_i = \underset{\sim}{M}_i \; \underset{\sim}{DUX} \qquad \text{(XII.105d)}$$

$$\underset{\sim}{DU}_j = \underset{\sim}{M}_j \; \underset{\sim}{DUX} \qquad \text{(XII.105e)}$$

$$\underset{\sim}{M}_1 = [\; \underset{\sim}{I}_3 \quad \underset{\sim}{O} \;] \qquad \text{(XII.105f)}$$

$$\underset{\sim}{M}_2 = [\; \underset{\sim}{O} \quad \underset{\sim}{I}_3 \;] \qquad \text{(XII.105g)}$$

$\underset{\sim}{I}$ - matriz identidade 3x3

$\underset{\sim}{O}$ - matriz nula 3x3

O vetor DUX é dado por:

$$\underset{\sim}{DUX} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Delta u_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \Delta u_2}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \Delta u_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \Delta u_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \Delta u_2}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \Delta u_3}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.106)}$$

Usando as equações (XII.20) e (XII.21) e fazendo as derivações indicadas em (XII.106) tem-se:

$$\underset{\sim}{DUX} = (\underset{\sim}{DUX})_m + (\underset{\sim}{DUX})_f \qquad \text{(XII.107a)}$$

Onde,

$$(\underset{\sim}{DUX})_m^T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} & \dfrac{\partial v_0}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial u_0}{\partial y} & \dfrac{\partial v_0}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.107b)}$$

$$(\underset{\sim}{DUX})_f^T = \left[- z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_o}{\partial x} \right.$$

$$\left. - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \frac{\partial w_o}{\partial y} \right] \qquad \text{(XII.107c)}$$

Os vetores $(\underset{\sim}{DUX})_m$ e $(\underset{\sim}{DUX})_f$ são dados por:

$$(\underset{\sim}{DUX})_m = \underset{\sim}{B}_3 \left(\Delta \underset{\sim}{u}^k \right)_m \qquad \text{(XII.108a)}$$

$$(\underset{\sim}{DUX})_f = \underset{\sim}{B}_4 \left(\Delta \underset{\sim}{u}^k \right)_f \qquad \text{(XII.108b)}$$

Onde,

$\underset{\sim}{B}_3$ - matriz a ser deduzida no item XII.8.1

$\underset{\sim}{B}_4$ - matriz a ser deduzida no item XII.8.2

Substituindo as equações (XII.108) em (XII.107a) tem-se:

$$\underset{\sim}{DUX} = \underset{\sim}{B}_{NL} \left(\Delta \underset{\sim}{u}^k \right)_{SEP} \qquad \text{(XII.109a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{B}_{NL} = \left[\underset{\sim}{B}_3 \quad \underset{\sim}{B}_4 \right] \qquad \text{(XII.109b)}$$

Transpondo os vetores das equações (XII.105d) e (XII.105e) tem-se:

$$\underset{\sim}{DU}_i^T = \underset{\sim}{DUX}^T \; \underset{\sim}{M}_i^T \qquad \text{(XII.110a)}$$

$$\underset{\sim}{DU}_j^T = \underset{\sim}{DUX}^T \; M_j^T \qquad \text{(XII.110b)}$$

Fazendo-se a variação das equações (XII.105a), (XII.110a) e (XII.110b) tem-se:

$$\delta \, \Delta n_{ij} = \frac{1}{2} \left[\; \delta \, \underset{\sim}{DU}_i^T \; \underset{\sim}{DU}_j + \delta \, \underset{\sim}{DU}_j^T \; \underset{\sim}{DU}_i \; \right] \qquad \text{(XII.111a)}$$

$$\delta \, \underset{\sim}{DU}_i^T = \delta \, \underset{\sim}{DUX}^T \; \underset{\sim}{M}_i^T \qquad \text{(XII.111b)}$$

$$\delta \, \underset{\sim}{DU}_j^T = \delta \, \underset{\sim}{DUX}^T \; \underset{\sim}{M}_j^T \qquad \text{(XII.111c)}$$

Substituindo as equações (XII.111b), (XII.110b), (XII.105d) e (XII.105e) em (XII.111a) tem-se:

$$\delta \, \Delta n_{ij} = \frac{1}{2} \, \delta (\underset{\sim}{DUX})^T \left[\; \underset{\sim}{M}_i^T \; \underset{\sim}{M}_j + \underset{\sim}{M}_j^T \; \underset{\sim}{M}_i \; \right] \underset{\sim}{DUX} \qquad \text{(XII.112)}$$

Transpondo o vetor da equação (XII.109a) e fazendo-se a sua variação tem-se:

$$(\underset{\sim}{DUX})^T = (\underset{\sim}{\Delta u}^k)^T_{SEP} \underset{\sim}{B}^T_{NL} \qquad \text{(XII.113a)}$$

$$\delta(\underset{\sim}{DUX})^T = \delta(\underset{\sim}{\Delta u}^k)^T_{SEP} \underset{\sim}{B}^T_{NL} \qquad \text{(XII.113b)}$$

Substituindo as equações (XII.113b) e (XII.109a) em (XII.112) tem-se:

$$\delta \Delta n_{ij} = \delta (\underset{\sim}{\Delta u}^k)^T_{SEP} \underset{\sim}{B}^T_{NL} [\underset{\sim}{M}^T_i \underset{\sim}{M}_j + \underset{\sim}{M}^T_j \underset{\sim}{M}_i] \underset{\sim}{B}_{NL} (\underset{\sim}{\Delta u}^k)_{SEP} \qquad \text{(XII.114)}$$

Fazendo os índices i e j da equação (XII.114) assumirem os valores 1 e 2 tem-se:

$$\delta \Delta n_{11} = \delta (\underset{\sim}{\Delta u}^k)^T_{SEP} \underset{\sim}{B}^T_{NL} \underset{\sim}{M}^T_1 \underset{\sim}{M}_1 \underset{\sim}{B}_{NL} (\underset{\sim}{\Delta u}^k)_{SEP} \qquad \text{(XII.115a)}$$

$$\delta \Delta n_{22} = \delta (\underset{\sim}{\Delta u}^k)^T \underset{\sim}{B}_{NL} \underset{\sim}{M}^T_2 \underset{\sim}{M}_2 \underset{\sim}{B}_{NL} (\underset{\sim}{\Delta u}^k)_{SEP} \qquad \text{(XII.115b)}$$

$$\delta \Delta n_{12} = \frac{1}{2} \delta \left(\Delta \underset{\sim}{u}^{k} \right)^{T}_{SEP} \underset{\sim}{B}^{T}_{NL} \left[\underset{\sim}{M}^{T}_{1} \underset{\sim}{M}_{2} + \underset{\sim}{M}^{T}_{2} \underset{\sim}{M}_{1} \right] \underset{\sim}{B}_{NL} \left(\Delta \underset{\sim}{u}^{k} \right)_{SEP} \qquad \text{(XII.115c)}$$

Substituindo as equações (XII.115) em (XII.104) tem-se:

$$\int {}^{N}S_{ij} \, \delta \Delta n_{ij} \, dV = \delta \left(\Delta \underset{\sim}{u}^{k} \right)^{T}_{SEP} \left(\underset{\sim}{K}_{G} \right)_{SEP} \left(\Delta \underset{\sim}{u}^{k} \right)_{SEP} \qquad \text{(XII.116a)}$$

Onde,

$$\left(\underset{\sim}{K}_{G} \right)_{SEP} = \int \underset{\sim}{B}^{T}_{NL} \underset{\sim}{S}_{M} \underset{\sim}{B}_{NL} \, dV \qquad \text{(XII.116b)}$$

$$\underset{\sim}{S}_{M} = S_{11} \underset{\sim}{M}^{T}_{1} \underset{\sim}{M}_{2} + S_{22} \underset{\sim}{M}^{T}_{2} \underset{\sim}{M}_{2} + S_{12} \left(\underset{\sim}{M}^{T}_{1} \underset{\sim}{M}_{2} + \underset{\sim}{M}^{T}_{2} \underset{\sim}{M}_{1} \right) \qquad \text{(XII.116c)}$$

Efetuando-se as multiplicações indicadas em (XII.116c) tem-se:

$$\underset{\sim}{S}_{M} = \begin{bmatrix} S_{11} \underset{\sim}{I}_{3} & S_{12} \underset{\sim}{I}_{3} \\ S_{12} \underset{\sim}{I}_{3} & S_{22} \underset{\sim}{I}_{3} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.117)}$$

Onde,

S_{ij} - componente do tensor de tensão na iteração k+1 da etapa N+1 (i=1,2 e j=1,2)

Decompondo a matriz de tensão nas parcelas correspondentes ao comportamento de membrana e de placa, tem-se:

$$\underset{\sim}{S}_M = (\underset{\sim}{S}_M)_m + (\underset{\sim}{S}_M)_f \qquad \text{(XII.118a)}$$

Onde,

$$(\underset{\sim}{S}_M)_m = \frac{1}{t} \begin{bmatrix} N_x \underset{\sim}{I}_3 & N_{xy} \underset{\sim}{I}_3 \\ N_{xy} \underset{\sim}{I}_3 & N_y \underset{\sim}{I}_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.118b)}$$

$$(\underset{\sim}{S}_M)_f = z \frac{12}{t^3} \begin{bmatrix} M_x \underset{\sim}{I}_3 & M_{xy} \underset{\sim}{I}_3 \\ M_{xy} \underset{\sim}{I}_3 & M_y \underset{\sim}{I}_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.118c)}$$

Substituindo as equações (XII.118a) e (XII.109b) em (XII.116b) tem-se:

$$(\underset{\sim}{K}_G)_{SEP} = (\underset{\sim}{K}_G)_1 + (\underset{\sim}{K}_G)_2 \qquad \text{(XII.119a)}$$

Onde,

$$\left(\underset{\sim}{K}_{G\ 1} \right) = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{KG1} & KG2 \\ \underset{\sim}{KG3} & \underset{\sim}{KG4} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.119b)}$$

$$\left(\underset{\sim}{K}_{G\ 2} \right) = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{KG5} & \underset{\sim}{KG6} \\ \underset{\sim}{KG7} & \underset{\sim}{KG8} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.119c)}$$

As submatrizes indicadas nas equações (XII.119b) e (XII.119c) são dadas por:

$$\underset{\sim}{KG1} = \int \underset{\sim}{B}_3^T \left(\underset{\sim}{S}_M \right)_m \underset{\sim}{B}_3 \, dV \qquad \text{(XII.120a)}$$

$$\left(\underset{\sim}{KG3} \right)^T = \underset{\sim}{KG2} = \int \underset{\sim}{B}_3^T \left(\underset{\sim}{S}_M \right)_m \underset{\sim}{B}_4 \, dV \qquad \text{(XII.120b)}$$

$$\underset{\sim}{KG4} = \int \underset{\sim}{B}_4^T \left(\underset{\sim}{S}_M \right)_m \underset{\sim}{B}_4 \, dV \qquad \text{(XII.120c)}$$

$$\underset{\sim}{KG5} = \int \underset{\sim}{B}_3^T \left(\underset{\sim}{S}_M \right)_f \underset{\sim}{B}_3 \, dV \qquad \text{(XII.120d)}$$

$$\left(\underset{\sim}{KG7} \right)^T = \underset{\sim}{KG6} = \int \underset{\sim}{B}_3^T \left(\underset{\sim}{S}_M \right)_f \underset{\sim}{B}_4 \, dV \qquad \text{(XII.120e)}$$

$$(\underset{\sim}{KG8}) = \int \underset{\sim}{B}_4^T \; (\underset{\sim}{S}_M)_f \; \underset{\sim}{B}_4 \; dV \qquad \text{(XII.120f)}$$

Realizando a integração em z nas equações (XII.120b), (XII.120d) e (XII.120f) obtém-se:

$$(\underset{\sim}{KG3})^T = \underset{\sim}{KG2} = \underset{\sim}{O} \qquad \text{(XII.121a)}$$

$$\underset{\sim}{KG5} = \underset{\sim}{O} \qquad \text{(XII.121b)}$$

$$\underset{\sim}{KG8} = \underset{\sim}{O} \qquad \text{(XII.121c)}$$

XII.8.1) Relações Deformação -Deslocamento Não-Lineares Referentes ao Comportamento de Membrana.

Colocando a equação (XII.107b) em forma matricial tem-se:

$$(\underset{\sim}{DUX})_m = \underset{\sim}{PX} \; \underset{\sim}{v}_r \qquad \text{(XII.122a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{PX} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.122b)}$$

Substituindo sucessivamente as equações (XII.46a), (XII.47a), (XII.48a) em (XII.122a) tem-se:

$$(\underset{\sim}{DUX})_m = \underset{\sim}{B}_3 \left(\Delta \underset{\sim}{u}^k \right)_m \qquad \text{(XII.123a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{B}_3 = \underset{\sim}{PX}\ \underset{\sim}{JV}\ \underset{\sim}{DVL}\ \underset{\sim}{TV} \qquad \text{(XII.123b)}$$

Realizando-se as operações matriciais indicadas em (XII.123b) tem-se:

$$\underset{\sim}{B}_3 = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.124)}$$

XII.8.2) Relações Deformação-Deslocamento Não-Lineares Referentes ao Comportamento de Placa

Colocando a equação (XII.107c) em forma matricial tem-se:

$$(\underset{\sim}{DUX})_f = \underset{\sim}{PZ} \quad \underset{\sim}{DWX} \tag{XII.125a}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{PZ} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -z \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -z \\ 0 & 0 & 0 & -z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{XII.125b}$$

$$\underset{\sim}{DWX}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_o}{\partial x} & \frac{\partial w_o}{\partial y} & \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \tag{XII.125c}$$

A relação entre o vetor DWX e as derivadas no sistema triangular é dada por:

$$\underset{\sim}{DWX} = \underset{\sim}{DTR} \quad \underset{\sim}{DWL} \tag{XII.126a}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{DTR} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{J}^{-1} & \underset{\sim}{O} \\ \underset{\sim}{O} & \underset{\sim}{T} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.126b)}$$

$$\underset{\sim}{DWT}^{T} = \left[\frac{\partial w_o}{\partial L_1} \quad \frac{\partial w_o}{\partial L_2} \quad \frac{\partial^2 w_o}{\partial L_1^2} \quad \frac{\partial^2 w_o}{\partial L_2^2} \quad \frac{\partial^2 w_o}{\partial L_1 \partial L_2} \right] \qquad \text{(XII.126c)}$$

$\underset{\sim}{J}^{-1}$ - inversa da matriz jacobiana que transforma derivadas no sistema de coordenadas cartesianas, em derivadas no sistema de coordenadas triangulares (Ver Apêndice A).

$\underset{\sim}{T}$ - matriz definida na equação (XII.72b)

A relação entre o vetor $\underset{\sim}{DWL}$ e as coordenadas generalizadas é dada por:

$$\underset{\sim}{DWL} = \underset{\sim}{DTA}\ \underset{\sim}{\alpha} \qquad \text{(XII.127a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{DTA} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{F\phi} \\ \\ \underset{\sim}{FD} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.127b)}$$

$$\underset{\sim}{F\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{L}{2} & -\frac{L}{2} & \left(-\frac{L}{1} + \frac{L}{3}\right) \\ \\ 0 & 1 & -1 & \frac{L}{1} & \left(-\frac{L}{2} + \frac{L}{3}\right) & -\frac{L}{1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{L^2}{2} - \frac{2L\ L}{1\ 2}\right) & \left(\frac{L^2}{2} - \frac{2L\ L}{2\ 3}\right) \\ \\ \left(-\frac{L^2}{1} + \frac{2L\ L}{1\ 2}\right) & \left(\frac{L^2}{2} - \frac{4L\ L}{2\ 3} + \frac{L^2}{3}\right) \\ \\ \left(-\frac{L^2}{1} + \frac{4L\ L}{1\ 3} - \frac{L^2}{3}\right) & \\ \\ \left(-\frac{L^2}{1} + \frac{2L\ L}{1\ 3}\right) & \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.127c)}$$

$\underset{\sim}{FD}$ - matriz definida na equação (XII.73b)

Substituindo sucessivamente as equações (XII.127a), (XII.127b) e (XII.61a) em (XII.125a) tem-se:

$$\underset{\sim}{(DUX)}_f = \underset{\sim}{B}_4 \left(\overset{k}{\underset{\sim}{\Delta u}}_f \right) \qquad \text{(XII.128a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{B}_4 = \underset{\sim}{PZ} \quad \underset{\sim}{DTR} \quad \underset{\sim}{DTA} \quad \underset{\sim}{U} \qquad \text{(XII.128b)}$$

XII.8.3) Matriz de Rigidez Geométrica Referente ao Comportamento da Membrana

A matriz de rigidez geométrica referente ao comportamento de membrana está definida na equação (XII.120a). Resolvendo-se a integral indicada nesta equação obtém-se:

$$\underset{\sim}{KG1} = \underset{\sim}{B}_3^T \quad \underset{\sim}{EN} \quad \underset{\sim}{B}_3 \quad A \qquad \text{(XII.129a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{EN} = \begin{bmatrix} N_x \, \underset{\sim}{I}_3 & N_{xy} \, \underset{\sim}{I}_3 \\ N_{xy} \, \underset{\sim}{I}_3 & N_y \, \underset{\sim}{I}_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.129b)}$$

$\underset{\sim}{I}$ - matriz identidade 3x3

$\underset{\sim}{N}_x$, N_y , N_{xy} - tensões generalizadas de membrana na iteração k+1 da etapa N+1

Efetuando-se as operações matriciais indicadas na equação (XII.129a) determinam-se, em função das tensões generalizadas de membrana, os elementos da matriz $\underset{\sim}{KG1}$.

XII.8.4) Matriz de Rigidez Geométrica Referente ao Comportamento de Placa

A matriz de rigidez geométrica referente ao comportamento de placa está definida na equação (XII.120a). Realizando a integração em z e utilizando a equação (XII.128b) obtém-se:

$$\underset{\sim}{KG4} = \underset{\sim}{U}^{T} \; \underset{\sim}{G4I} \; \underset{\sim}{U} \qquad \text{(XII.130a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{G4I} = \int \underset{\sim}{DTA}^{T} \; \underset{\sim}{DTR}^{T} \; \underset{\sim}{PNZ} \; \underset{\sim}{DTR} \; \underset{\sim}{DTA} \; dA \qquad \text{(XII.130b)}$$

A matriz $\underset{\sim}{PNZ}$ da equação (XII.130b) é dada por:

$$\underset{\sim}{PNZ} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{PZ1} & \underset{\sim}{O} \\ \underset{\sim}{O} & \underset{\sim}{PZ2} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.131a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{PZ1} = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.131b)}$$

$$\underset{\sim}{PZ2} = \frac{t^2}{12} \begin{bmatrix} N_x & 0 & N_{xy} \\ 0 & N_y & N_{xy} \\ N_{xy} & N_{xy} & (N_x + N_y) \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.131c)}$$

A integral da equação (XII.130b) é resolvida através do procedimento numérico indicado no Apêndice A.

XII.8.5) Matrizes de Rigidez Geométricas que Acoplam os Graus de Liberdade de Membrana e de Flexão

As matrizes de rigidez geométricas que acoplam os GDL de membrana e de flexão estão definidas na equação (XII.120e). Realizando a integração em z e utilizando a equação (XII.128b) obtém-se:

$$(\underset{\sim}{KG7})^T = \underset{\sim}{KG6} = \underset{\sim}{B}_3^T \; \underset{\sim}{G6I} \; \underset{\sim}{U} \qquad \text{(XII.132a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{G6I} = \int \underset{\sim}{EFZ} \; \underset{\sim}{DTR} \; \underset{\sim}{DTA} \; dA \qquad \text{(XII.132b)}$$

A matriz $\underset{\sim}{EFZ}$ da equação (XII.130b) é dada por:

$$\underset{\sim}{EFZ} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{O} & \underset{\sim}{EZ1} \\ \\ \underset{\sim}{O} & \underset{\sim}{EZ2} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.133a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{EZ1} = \begin{bmatrix} -M_x & 0 & -M_{xy} \\ 0 & -M_{xy} & -M_x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.133b)}$$

$$\underset{\sim}{EZ2} = \begin{bmatrix} -M_{xy} & 0 & -M_y \\ 0 & -M_y & -M_{xy} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.133c)}$$

M_x , M_y , M_{xy} tensões generalizadas de flexão na iteração k+1 da etapa N+1

A integral da equação (XII.132b) é resolvida através do procedimento numérico indicado no Apêndice A.

XII.8.6) Matriz de Rigidez Geométrica Referente ao Comportamento de Casca

Substituindo sucessivamente as equações (XII.119b), (XII.119c), (XII.121a), (XII.121b) e (XII.121c) em (XII.119a) tem-se:

$$\left(\underset{\sim}{K}_{G} \right)_{SEP} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{KG1} & \underset{\sim}{KG6} \\ \\ \underset{\sim}{KG7} & \underset{\sim}{KG4} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.134)}$$

A matriz de rigidez geométrica expandida do elemento de casca, que inclui as linhas e colunas correspondentes às direções das rotações θ_z's ,é dada por:

$$\left(\underset{\sim}{K}_{E} \right)_{EXP} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{KG1} & \underset{\sim}{KG6} & \underset{\sim}{O} \\ \underset{\sim}{KG7} & \underset{\sim}{KG4} & \underset{\sim}{O} \\ \underset{\sim}{O} & \underset{\sim}{O} & \underset{\sim}{O} \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.135)}$$

A matriz $\left(\underset{\sim}{K}_{G} \right)_{EXP}$ corresponde aos GDL de membrana, flexão e rotações θ_z's numerados por tipo de comportamento. Na sua forma final a matriz de rigidez geométrica do elemento de casca $\underset{\sim}{K}_{G}$, deve corresponder aos GDL numerados na sequência em que ocorrem em cada nó. Isto é obtido realizando-se um espalhamento dos elementos das matrizes KG1 , KG4 , KG6 e KG7 na matriz $\underset{\sim}{K}_{G}$. Este espalhamento é feito usando os vetores de conetividades definidos nas equações (XII.93).

XII.9) TRANSFORMAÇÃO DAS MATRIZES DO ELEMENTO DO SISTEMA DE REFERÊNCIA LOCAL MÓVEL PARA O GLOBAL

As matrizes de rigidez e o vetor de forças internas referidos ao sistema de coordenadas globais são determinados através das seguintes equações:

$$\underset{\tilde{G}\tilde{E}}{K} = \underset{\tilde{}}{T}^{T}\ \underset{\tilde{}}{R}^{T}\ \underset{\tilde{E}}{K}\ \underset{\tilde{}}{R}\ \underset{\tilde{}}{T} \qquad \text{(XII.136a)}$$

$$\underset{\tilde{G}}{F} = \underset{\tilde{}}{T}^{T}\ \underset{\tilde{}}{R}^{T}\ \underset{\tilde{}}{F} \qquad \text{(XII.136b)}$$

$$\underset{\tilde{G}\tilde{G}}{K} = \underset{\tilde{}}{T}^{T}\ \underset{\tilde{}}{R}^{T}\ \underset{\tilde{G}}{K}\ \underset{\tilde{}}{R}\ \underset{\tilde{}}{T} \qquad \text{(XII.136c)}$$

Onde,

$\underset{\tilde{}}{R}$ - matriz que realiza a transformação do sistema de referência local fixo para o local móvel

$\underset{\tilde{}}{T}$ - matriz que realiza a transformação do sistema de referência global para o local fixo

CAPÍTULO XIII

ELEMENTO TRIANGULAR DE CASCA ELASTO-PLÁSTICO

Apresenta-se neste capítulo uma formulação de elemento triangular plano complementar à formulação apresentada no capítulo XII. As funções de interpolação são iguais nas duas formulações porém, em vez de não-linearidade geométrica, considera-se não-linearidade física. O elemento utiliza apenas dois sistemas de referência: o sistema global e o sistema local fixo. A não-linearidade física (elasto-plasticidade) é considerada através de uma superfície de escoamento para cascas finas, que engloba as superfícies de Ilyushin e de Ivanov (ver capítulo VII).

As hipóteses básicas adotadas são:

i) As translações e as rotações são pequenas em comparação, respectivamente, com as dimensões da casca e com a unidade (Hipótese de pequenos deslocamento).
ii) As seções normais ao plano do elemento, inicialmente planas, permanecem planas durante a deformação.
iii) A espessura da casca é pequena em comparação com suas outras dimensões.
iv) As cargas são aplicadas incrementalmente de forma que a plastificação da estrutura ocorra de maneira gradual.

O elemento possui três nós com seis incógnitas cada: três translações e três rotações. O campo de deslocamento é escrito tomando-se como referência o sistema local fixo.

As matrizes e vetores do elemento são integrados explicitamente na direção da espessura. As integrais de área são resolvidas através do procedimento numérico descrito no Apêndice A. São utilizados quatro pontos de integração.

XIII.1) EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

As equações incrementais utilizadas pelo algorítmo incremental-iterativo correspondem às equações (V.13), transcritas a seguir:

$$\underset{\sim}{K}_M \quad \Delta \underset{\sim}{u}^k = \underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{F} \qquad \text{(XIII.1)}$$

XIII.2) EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS NO DOMÍNIO ELÁSTICO

As equações constitutivas do elemento devem representar os comportamentos de membrana e de placa fina (ver item XII.4).

Durante o processo incremental-iterativo as tensões generalizadas, assim como as tensões, são determinadas de forma incremental:

$$\underset{\sim}{N}^{k+1} = \underset{\sim}{N}^{k} + \Delta \underset{\sim}{N} \qquad \text{(XIII.2a)}$$

$$\underset{\sim}{M}^{k+1} = \underset{\sim}{M}^{k} + \Delta \underset{\sim}{M} \qquad \text{(XIII.2b)}$$

As tensões generalizadas incrementais de membrana se relacionam com o vetor de deformações incrementais de membrana através da seguinte equação:

$$\Delta \underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{CM}\ \Delta \underset{\sim}{\varepsilon}_v \qquad \text{(XIII.3a)}$$

Onde,

$$\Delta \underset{\sim}{N}^T = [\ \Delta N_x \quad \Delta N_y \quad \Delta N_{xy}\ ] \qquad \text{(XIII.3b)}$$

$$\Delta \underset{\sim}{\varepsilon}_v^T = [\ \Delta \varepsilon_x \quad \Delta \varepsilon_y \quad 2\,\Delta \varepsilon_{xy}\ ] \qquad \text{(XIII.3c)}$$

$$\underset{\sim}{CM} = \frac{E\ t}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{(XIII.3d)}$$

$\underset{\sim}{CM}$ - matriz constitutiva de comportamento de membrana

As tensões generalizadas incrementtais de flexão se relacionam com o vetor de deformações incrementais generalizadas de flexão através da seguinte equação:

$$\Delta \underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{CP}\ \Delta \underset{\sim}{k} \qquad \text{(XIII.4a)}$$

Onde,

$$\Delta \underset{\sim}{M}^T = [\ \Delta M_x \quad \Delta M_y \quad \Delta M_{xy}\ ] \qquad \text{(XIII.4b)}$$

$$\Delta \underset{\sim}{k}^T = [\ \Delta k_x \quad \Delta k_y \quad \Delta k_{xy}\ ] \qquad \text{(XIII.4c)}$$

$$\underset{\sim}{CP} = \frac{E\ t^3}{12\ (1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{(XIII.4d)}$$

$\underset{\sim}{CP}$ - matriz constitutiva de comportamento de placa

XIII.3) RELAÇÕES DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO

As componentes do vetor de deformações incrementais de membrana são dadas por (ver item XII.5):

$$\Delta \varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$\Delta \varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} \qquad \text{(XIII.5)}$$

$$2\ \Delta \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}$$

As componentes do vetor de deformações incrementais generalizadas de flexão são dadas por (ver item XII.5):

$$\Delta k_x = - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$$

$$\Delta k_y = - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \qquad \text{(XIII.6)}$$

$$\Delta k_{xy} = - 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \, \partial y}$$

As relações deformação-deslocamento de membrana são dadas por (ver item XII.5):

$$\Delta \underset{\sim}{\varepsilon}_v = \underset{\sim}{B}_m \left(\Delta \overset{k}{\underset{\sim}{u}} \right)_m \qquad \text{(XIII.7a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{B}_m = \underset{\sim}{PV} \quad \underset{\sim}{JV} \quad \underset{\sim}{DVL} \quad \underset{\sim}{TV} \qquad \text{(XIII.7b)}$$

Substituindo a equação (XII.30) em (XII.74a), obtém-se a relação deformação-deslocamento generalizada de flexão:

$$\Delta \underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{B}_f \left(\Delta \overset{k}{\underset{\sim}{u}} \right)_f \qquad \text{(XIII.8a)}$$

Sendo,

$$\underset{\sim}{B}_f = - \underset{\sim}{PU} \quad \underset{\sim}{PW} \quad \underset{\sim}{T} \quad \underset{\sim}{FD} \quad \underset{\sim}{U} \qquad \text{(XIII.8b)}$$

XIII.4) MATRIZ DE RIGIDEZ ELÁSTICA

A matriz de rigidez elástica expandida do elemento de casca, que inclui a matriz corresppondente à rigidez na direção das rotações θ_z's , é dada por (ver item(XII.6)):

$$\left(\underset{\sim}{K}_E \right)_{EXP} = \begin{bmatrix} (\underset{\sim}{K}_E)_m & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & (\underset{\sim}{K}_E)_f & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & (\underset{\sim}{K}_E)_R \end{bmatrix} \qquad \text{(XIII.9)}$$

A matriz $(\underset{\sim}{K}_E)_{EXP}$ corresponde aos GDL* de membrana,flexão e rotações θ_z's numerados por tipo de comportamento. Na sua forma final a matriz de rigidez do elemento de casca $\underset{\sim}{K}_E$, deve corresponder aos GDL numerados

---

*GDL - Graus de liberadade

na sequência em que ocorrem em cada nó. Isto é obtido realizando-se um espalhamento dos elementos das matrizes $(\underset{\sim}{K}_E)_m$, $(\underset{\sim}{K}_E)_f$ e $(\underset{\sim}{K}_E)_R$ na matriz $\underset{\sim}{K}_E$. Este espalhamento é feito usando os vetores de conetividade definidos nas equações (XII.93).

A matriz de rigidez elástica da equação (XIII.9) é idêntica à matriz da equação (XII.92). A diferença entre elas é estabelecida pelo sistema de referência em que estão definidas. Uma, a matriz da equação (XII.92), é referida ao sistema local móvel, enquanto a outra, a matriz da equação (XIII.9), é referida ao sistema local fixo.

XIII.5) TENSÕES GENERALIZADAS E VETOR DE FORÇAS INTERNAS NO DOMÍNIO ELÁSTICO

As tensões generalizadas são determinadas em cada iteração através das equações (XIII.2a) e (XIII.2b) transcritas a seguir:

$$\underset{\sim}{N}^{k+1} = \underset{\sim}{N}^{k} + \Delta \underset{\sim}{N} \qquad \text{(XIII.10a)}$$

$$\underset{\sim}{M}^{k+1} = \underset{\sim}{M}^{k} + \Delta \underset{\sim}{M} \qquad \text{(XIII.10b)}$$

Substituindo a equação (XIII.7a) em (XIII.3a) e a equação (XIII.8a) em (XIII.4a) obtém-se as tensões

generalizadas incrementais:

$$\Delta \underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{CM} \quad \underset{\sim}{B}_m \quad (\Delta \underset{\sim}{u}^k)_m \qquad \text{(XIII.11a)}$$

$$\Delta \underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{CP} \quad \underset{\sim}{B}_f \quad (\Delta \underset{\sim}{u}^k)_f \qquad \text{(XIII.11b)}$$

O vetor de forças internas também é determinado de forma incremental, através da seguinte equação:

$$\underset{\sim}{F}^{k+1} = \underset{\sim}{F}^{k} + \Delta \underset{\sim}{F} \qquad \text{(XIII.12)}$$

Enquanto todos os pontos de integração do elemento permanecerem no domínio elástico o vetor de forças não precisa ser calculado através da integração do vetor de tensões. Em vez disso utiliza-se a seguinte equação:

$$\Delta \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{K}_E \quad \Delta \underset{\sim}{u}^k \qquad \text{(XIII.13a)}$$

Onde,

$\underset{\sim}{K}_E$ - matriz de rigidez do item (XIII.4) correspondente aos GDL numerados na sequência em que ocorrem em cada nó.

$\Delta \underset{\sim}{u}^k$ - vetor com os dezoito deslocamentos nodais incrementais do elemento

XIII.6) CRITÉRIO DE ESCOAMENTO E TENSÕES GENERALIZADAS NO DOMÍNIO PLÁSTICO

O critério de escoamento é dado pela equação (VII.29), transcrita a seguir:

$$f = \bar{\sigma} - \sigma_0 \qquad \text{(XIII.14a)}$$

Onde,

$$\bar{\sigma} = \left[\frac{\bar{N}}{t^2} + \frac{8\ (2 - b)\ \bar{M}}{\alpha^2\ t^4} + \frac{4\ a\ \delta\ c\ \overline{MN}}{\alpha\ \sqrt{3}\ t^3} + \right.$$

$$\left. + b \left(\frac{64\ \bar{M}^2}{\alpha^4\ t^8} + \frac{16\ \overline{MN}^2}{\alpha^2\ t^6} \right)^{1/2} \right]^{1/2} \qquad \text{(XIII.14b)}$$

$$\bar{N} = N_x^2 + N_y^2 - N_x N_y + 3 N_{xy}^2 \qquad \text{(XIII.15a)}$$

$$\bar{M} = M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3 M_{xy}^2 \qquad \text{(XIII.15b)}$$

$$\overline{MN} = N_x M_x + N_y M_y - \frac{1}{2} N_x M_y - \frac{1}{2} N_y M_x + 3 N_{xy} M_{xy} \qquad \text{(XIII.15c)}$$

$$\alpha = 1 - \frac{1}{3} \; EXP\left(-\frac{4}{3} \; \frac{E\,t}{\sigma_0} \; \bar{k}_p\right) \qquad \text{(XIII.16)}$$

$0 \leq a \leq 1$

$0 \leq b \leq 1$

$0 \leq c \leq 1$

$\bar{\sigma}$ - tensão efetiva

σ_0 - tensão de escoamento do material

$\bar{k}_p$ - curvatura plástica equivalente

Os valores das variáveis "a", "b" e "c" devem ser fornecidos como dados do problema. No capítulo VII foram estabelecidas as regras para escolha destes valores.

No domínio plástico os incrementos infinitesimais das deformações totais de membrana e de flexão, análogamente à equação (III.45), são constituídos por duas parcelas, uma elástica e outra plástica:

$$(d\,\underset{\sim}{\varepsilon}_v)_{tot} = (d\,\underset{\sim}{\varepsilon}_v)_e + (d\,\underset{\sim}{\varepsilon}_v)_p \qquad \text{(XIII.17a)}$$

$$(d\,\underset{\sim}{k})_{tot} = (d\,\underset{\sim}{k})_e + (d\,\underset{\sim}{k})_p \qquad \text{(XIII.17b)}$$

Os vetores $(d\,\underset{\sim}{\varepsilon}_v)_e$ e $(d\,\underset{\sim}{k})_e$ são dados por (ver equações (XIII.3a) e (XIII.4a)):

$$(d\,\underset{\sim}{\varepsilon}_v)_e = \underset{\sim}{C}\underset{\sim}{M}^{-1} \; d\underset{\sim}{N} \qquad \text{(XIII.18a)}$$

$$(d\underset{\sim}{k})_e = \underset{\sim}{C}_P^{-1} \; d\underset{\sim}{M} \qquad \text{(XIII.18b)}$$

Substituindo as equações (XIII.18a) e (XIII.18b) respectivamente nas equações (XIII.17a) e (XIII.17b) e isolando dN e dM tem-se:

$$d\underset{\sim}{N} = C_M \; [\; (d\underset{\sim}{\varepsilon}_v)_{tot} - (d\underset{\sim}{\varepsilon}_v)_p \;] \qquad \text{(XIII.19a)}$$

$$d\underset{\sim}{M} = C_P \; [\; (d\underset{\sim}{h})_{tot} - (d\underset{\sim}{h})_P \;] \qquad \text{(XIII.19b)}$$

Onde,

$$(d\underset{\sim}{\varepsilon}_v)_{tot} = \underset{\sim}{B}_m \; (\Delta \overset{k}{\underset{\sim}{u}})_m \qquad \text{(XIII.19c)}$$

$$(d\underset{\sim}{k})_{tot} = \underset{\sim}{B}_f \; (\Delta \overset{k}{\underset{\sim}{u}})_f \qquad \text{(XIII.19d)}$$

Adotando uma regra de escoamento associada (ver item (III.6)) determinam-se os vetores $(d\underset{\sim}{\varepsilon}_v)_p$ e $(d\underset{\sim}{k})_p$:

$$(d\underset{\sim}{\varepsilon}_v)_p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{N}} \qquad \text{(XIII.20a)}$$

$$(d\underset{\sim}{k})_p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{M}} \qquad \text{(XIII.20b)}$$

Onde,

$d\lambda$ - fator de proporcionalidade

XIII.6.1) Vetores de Deformação Plástica de Membrana e de Flexão

Usando a equação (XIII.14a) em (XIII.20a) e (XIII.20b) obtém-se:

$$(d\underset{\sim}{\varepsilon}_v)_p = d\lambda \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\underset{\sim}{N}} \qquad \text{(XIII.21a)}$$

$$(d\underset{\sim}{k})_p = d\lambda \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\underset{\sim}{M}} \qquad \text{(XIII.21b)}$$

Durante o escoamento plástico, para que o estado de tensão continue sobre a superfície de escoamento, deve-se ter (ver item (III.6)):

$$df = 0 \qquad \text{(XIII.22a)}$$

$$df = \left[\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\underset{\sim}{N}}\right]^T d\underset{\sim}{N} + \left[\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\underset{\sim}{M}}\right]^T d\underset{\sim}{M} + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{k}_p} d\bar{k}_p \qquad \text{(XIII.22b)}$$

Onde,

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{N}} = \frac{1}{2\bar{\sigma}} \left[CN \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \underset{\sim}{N}} \right) + CNM \left(\frac{\partial \bar{M}}{\partial \underset{\sim}{M}} \right) \right] \qquad \text{(XIII.23a)}$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{M}} = \frac{1}{2\bar{\sigma}} \left[CNM \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \underset{\sim}{N}} \right) + CM \left(\frac{\partial \bar{M}}{\partial \underset{\sim}{M}} \right) \right] \qquad \text{(XIII.23b)}$$

$$CN = \frac{1}{t^2} \qquad \text{(XIII.23c)}$$

$$CNM = \frac{2\ a\ \delta\ c}{\alpha\ \sqrt{3}\ t^3} + \frac{2\ b\ \overline{MN}}{t^2\ (4\ \bar{M}^2 + \alpha^2\ t^2\ \overline{MN}^2)^{1/2}} \qquad \text{(XIII.23d)}$$

$$CM = \frac{8\ (2-b)}{\alpha^2\ t^4} + \frac{16\ b\ \bar{M}}{\alpha^2\ t^4\ (4\ \bar{M}^2 + \alpha^2\ t^2\ \overline{MN}^2)^{1/2}} \qquad \text{(XIII.23e)}$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{k}_p} = \frac{1}{2\bar{\sigma}}\ VA\ VC \qquad \text{(XIII.24a)}$$

$$VA = -\frac{16\ (2-b)\ \bar{M}}{\alpha^3\ t^4} - \frac{4\ a\ \delta\ c\ \overline{MN}}{\alpha^2\ \sqrt{3}\ t^3} + \\ - \frac{4\ b\ (8\ \bar{M}^2 + \alpha^2\ t^2\ \overline{MN}^2)}{(4\ \bar{M}^2 + \alpha^2\ t^2\ \overline{MN}^2)^{1/2}} \qquad \text{(XIII.24b)}$$

$$VC = \frac{4}{9} \frac{E\ t}{\sigma_0} EXP \left(- \frac{4}{3} \frac{E\ t}{\sigma_0} \bar{k}_p \right) \qquad \text{(XIII.24c)}$$

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial \underset{\sim}{N}} = \begin{bmatrix} 2\ N_x - N_y \\ 2\ N_y - N_x \\ 6\ N_{xy} \end{bmatrix} \qquad \text{(XIII.25a)}$$

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial \underset{\sim}{N}} = \begin{bmatrix} 2\ M_x - M_y \\ 2\ M_y - M_x \\ 6\ M_{xy} \end{bmatrix} \qquad \text{(XIII.25b)}$$

Substituindo as equações (XIII.21a) e (XIII.21b) em (XIII.19a) e (XIII.19b) tem-se:

$$d\underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{CM} \left[(d\ \underset{\sim}{\varepsilon}_v)_{tot} - d\ \lambda \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{N}} \right] \qquad \text{(XIII.26a)}$$

$$d\underset{\sim}{M} = CP \left[(d\underset{\sim}{k})_{tot} - d\lambda \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{M}} \right] \qquad \text{(XIII.26b)}$$

A curvatura plástica equivalente $\bar{k}_p$ é definida como sendo igual a somatória dos incrementos infinitesimais de curvatura [71,76]

$$\bar{k}_p = \Sigma\, d\,\bar{k}_p \qquad \text{(XIII.27a)}$$

Onde,

$$d\bar{k}_p = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(d\,k_{px}^2 + d\,k_{py}^2 + d\,k_{px}\,d\,k_{py} + \frac{d\,k_{pxy}}{4} \right)^{1/2} \qquad \text{(XIII.27b)}$$

Usando as equações (XIII.21b) e (XIII.23b) em (XIII.27b) obtém-se:

$$d\bar{k}_p = VB\ d\lambda \qquad \text{(XIII.28a)}$$

Onde,

$$VB = 2 \left[C_1^2\, \bar{N} + 2\, C_1\, C_2\, \overline{MN} + C_2^2\, \bar{M} \right]^{1/2} \qquad \text{(XIII.28b)}$$

$$C_1 = \frac{1}{2\bar{\sigma}} \left[\frac{2\,a\,\delta\,c}{\alpha\,\sqrt{3}\,t^3} + \frac{2\,b\,\overline{MN}}{t^2\,(4\,\bar{M}^2 + \alpha^2\,t^2\,\overline{MN}^2)^{1/2}} \right] \qquad \text{(XIII.28c)}$$

$$C_2 = \frac{1}{2\bar{\sigma}} \left[\frac{8\ (2 - b)}{\alpha^2\ t^4} + \frac{16\ b\ \bar{M}}{\alpha^2\ t^4 (4\ \bar{M}^2 + \alpha^2\ t^2\ \overline{MN}^2)^{1/2}} \right]$$

(XIII.28d)

Substituindo as equações (XIII.26a), (XIII.26b), (XIII.28a) e (XIII.22a) em (XIII.22b), e isolando $d\lambda$ obtem-se:

$$d\lambda = \frac{[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{N}}]^T \underset{\sim}{C}M\ (d\underset{\sim}{\varepsilon}_v)_{tot} + [\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{M}}]^T \underset{\sim}{C}P\ (d\underset{\sim}{k})_{tot}}{[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{N}}]^T \underset{\sim}{C}M\ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{N}} + [\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{M}}]^T \underset{\sim}{C}P\ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{M}} - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{k}_p} VB}$$

(XIII.29)

XIII.6.2) Tensões Generalizadas

No domínio plástico, assim como no elástico, as tensões generalizadas também são determinadas de forma incremental através das equações (XIII.2a) e (XIII.2b),

transcritas a seguir.

$$\underset{\sim}{N}^{k+1} = \underset{\sim}{N}^{k} + d\underset{\sim}{N} \qquad \text{(XIII.30a)}$$

$$\underset{\sim}{M}^{k+1} = \underset{\sim}{M}^{k} + d\underset{\sim}{M} \qquad \text{(XIII.30b)}$$

A diferença entre as duas situações encontra-se no fato de que no domínio plástico para se obter os vetores de tensões incrementais deve-se resolver uma equação diferencial. Na implementação computacional, os vetores $d\underset{\sim}{N}$ e $d\underset{\sim}{M}$ são determinados em cada ponto de integração utilizando-se o algoritmo de integração de Euler com controle de êrro, apresentado no capítulo VI. As equações correspondentes a equação (VI.7a), são as equações (XIII.26a) e (XIII.26b) escritas da seguinte forma:

$$d\underset{\sim}{N} = \left(d\underset{\sim}{N} \right)_{est} - d\lambda \, \underset{\sim}{CM} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{N}} \qquad \text{(XIII.31a)}$$

$$d\underset{\sim}{M} = \left(d\underset{\sim}{M} \right)_{est} - d\lambda \, \underset{\sim}{CP} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{M}} \qquad \text{(XIII.31b)}$$

Onde,

$$\left(d\underset{\sim}{N} \right)_{est} = CM \; (d \, \underset{\sim}{\varepsilon}_v)_{tot} \qquad \text{(XIII.31C)}$$

$$\left(d\underset{\sim}{M} \right)_{est} = CP \; (d \, \underset{\sim}{k})_{tot} \qquad \text{(XIII.31d)}$$

No domínio elástico o vetor $\overset{k+1}{\underset{\sim}{N}}$ não varia de ponto de integração para ponto de integração pois o comportamento de membrana é representado por funções de interpolação lineares que produzem tensões de membrana constantes. No domínio plástico o vetor $\overset{k+1}{\underset{\sim}{N}}$ ao sair do ciclo em que a integração de tensões é realizada pode ter valores diferentes em cada ponto de integração.

Na literatura existe outra formulação de elemento triangular de casca elasto-plástico [73] que também representa o comportamento de membrana com o elemento CST. Porém como neste trabalho não foi mencionada a variação do vetor $\overset{k+1}{\underset{\sim}{N}}$ de ponto de integração para ponto de integração, tudo indica que esta variação foi aceita como válida.

Na verdade o vetor $\overset{k+1}{\underset{\sim}{N}}$ precisa ser constante ao longo do elemento para que a formulação do comportamento de membrana não tenha uma das suas hipóteses básicas (tensão de membrana constante) violada.

Na implementação computacional este problema foi resolvido criando-se, logo após o ciclo de integração de tensões no domínio plástico, um segundo ciclo em que todo ponto de integração que tenha o invariante $\overline{N}$ (ver equação (XIII.15a)) maior do que o invariante $\overline{N}$ do ponto padrão, seja forçado a percorrer a superfície de escoamento até que os dois invariantes estejam igualados. Após este ciclo é feita uma uniformização de tensões de membrana em que as tensões do ponto padrão são impostas a todos os

outros três pontos. O ponto padrão é escolhido como sendo o ponto plastificado em que o valor de $\bar{N}$ é menor.

XIII.7) EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS NO DOMÍNIO PLÁSTICO

Substituindo a equação (XIII.29) em (XIII.26a) e (XIII.26b) obtém-se:

$$d\underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{CE} \; (d\,\underset{\sim}{\varepsilon}_V)_{tot} + \underset{\sim}{CEF} \; (d\,\underset{\sim}{k})_{tot} \qquad \text{(XIII.32a)}$$

$$d\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{CEF}^T \; (d\,\underset{\sim}{\varepsilon}_V)_{tot} + \underset{\sim}{CF} \; (d\,\underset{\sim}{k})_{tot} \qquad \text{(XIII.32b)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{CE} = \underset{\sim}{CM} - VH\; \underset{\sim}{CM} \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{N}}\right] \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{N}}\right]^T \underset{\sim}{CM} \qquad \text{(XIII.33a)}$$

$$\underset{\sim}{CEF} = -\; VH\; \underset{\sim}{CM} \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{N}}\right] \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{M}}\right]^T \underset{\sim}{CP} \qquad \text{(XIII.33b)}$$

$$\underset{\sim}{CF} = \underset{\sim}{CP} - VH\; \underset{\sim}{CP} \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{M}}\right] \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{M}}\right]^T \underset{\sim}{CP} \qquad \text{(XIII.33c)}$$

$$VH = \frac{1}{\left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{N}}\right]^T \underset{\sim}{CM} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{N}} + \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{M}}\right]^T \underset{\sim}{CP} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{M}} - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{k}_p} VB} \qquad \text{(XIII.33d)}$$

As equações (XIII.32) representam as equações constitutivas do elemento de casca e podem ser unificadas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} d\underset{\sim}{N} \\ \\ d\underset{\sim}{M} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{CEP} \begin{bmatrix} (d\underset{\sim}{\varepsilon}_v)_{tot} \\ \\ (d\underset{\sim}{k})_{tot} \end{bmatrix} \qquad \text{(XIII.34a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{CEP} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{CE} & \underset{\sim}{CEF} \\ \\ \underset{\sim}{CEF}^T & \underset{\sim}{CF} \end{bmatrix} \qquad \text{(XIII.34b)}$$

XIII.8) MATRIZ DE RIGIDEZ ELASTO-PLÁSTICA

A matriz de rigidez elasto-plástica que reúne os comportamentos de membrana e de flexão é dada por:

$$(\underset{\sim}{K}_P)_{SEP} = \int \underset{\sim}{B}_c^T \; \underset{\sim}{CEP} \; \underset{\sim}{B}_c \; dA \qquad \text{(XIII.35a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{B}_c = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{B}_m & \underset{\sim}{O} \\ \underset{\sim}{O} & \underset{\sim}{B}_f \end{bmatrix} \qquad \text{(XIIII.35b)}$$

Substituindo as equações (XIII.35b)) e (XIII.34b) em (XIII.35a) e realizando as operações matricias indicadas obtém-se:

$$(\underset{\sim}{K}_P)_{SEP} = \begin{bmatrix} (\underset{\sim}{K}_P)_m & (\underset{\sim}{K}_P)_{mf} \\ (\underset{\sim}{K}_P)_{mf}^T & (\underset{\sim}{K}_P)_f \end{bmatrix} \qquad \text{(XIII.36a)}$$

Onde,

$$\left(\underset{\sim}{K}_P \right)_m = \int \underset{\sim}{B}_m^T \; \underset{\sim}{CE} \; \underset{\sim}{B}_m \; dA \qquad \text{(XIII.36b)}$$

$$\left(\underset{\sim}{K}_p \right)_{mf} = \int \underset{\sim}{B}_m^T \; \underset{\sim}{CEF} \; \underset{\sim}{B}_f \; dA \qquad \text{(XIII.36c)}$$

$$\left(\underset{\sim}{K}_P \right)_f = \int \underset{\sim}{B}_f^T \; \underset{\sim}{CF} \; \underset{\sim}{B}_f \; dA \qquad \text{(XIII.36d)}$$

O sub-índice "SEP" colocado na matriz de rigidez da equação (XIII.36a) indica que ela corresponde aos graus de liberdade de membrana e de flexão, numerados por tipo de comportamento.

XIII.8.1) Matriz de Rigidez Elasto-Plástica Referente ao Comportamento de Membrana

Quando ocorre plastificação e o elemento de casca encontra-se submetido a flexão, não há necessariamente plastificação em todos os pontos do elemento. Isto significa que a matriz $\underset{\sim}{CE}$ varia de ponto de integração para ponto de integração. A matriz $\underset{\sim}{B}_m$ no entanto é independente de x e y.

A equação (XIII.36b) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left(\underset{\sim}{K}_P \right)_m = \underset{\sim}{B}_m^T \; \underset{\sim}{CIE} \; \underset{\sim}{B}_m \qquad \text{(XIII.37a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{CIE} = \int \underset{\sim}{CE} \; dA \qquad \text{(XIII.37b)}$$

A integral da equação (XIII.37.b) é resolvida através do procedimento numérico descrito no Apêndice A.

XIII.8.2) Matriz de Rigidez Elasto-Plástica Referente ao Comportamento de Flexão

A equação (XIII.8b) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{B}_f = - \; \underset{\sim}{TM2} \; \underset{\sim}{FDR} \; \underset{\sim}{UR} \qquad \text{(XIII.38a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{TM2} = \underset{\sim}{PU} \; \underset{\sim}{PW} \; \underset{\sim}{T} \qquad \text{(XIII.38b)}$$

$$\underset{\sim}{FDR} \; \underset{\sim}{UR} = \underset{\sim}{FD} \; \underset{\sim}{U} \qquad \text{(XIII.38c)}$$

A matriz $\underset{\sim}{FDR}$ é a matriz $\underset{\sim}{FD}$ (Equação (XII.73b)) sem as três primeiras colunas. A matriz $\underset{\sim}{UR}$ é a matriz $\underset{\sim}{U}$ (Equação (XII.62a)) sem as três primeiras linhas.

Substituindo a equação (XII.38a) em (XIII.36d) tem-se:

$$\left(\underset{\sim}{K}_P \right)_f = \underset{\sim}{UR}^T \; \underset{\sim}{RFT} \; \underset{\sim}{UR} \qquad \text{(XIII.39a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{RFT} = \int \underset{\sim}{FDR}^T \; \underset{\sim}{EHE} \; \underset{\sim}{FDR} \; dA \qquad \text{(XIII.39b)}$$

$$\underset{\sim}{EHE} = \underset{\sim}{TM2}^T \; \underset{\sim}{CF} \; \underset{\sim}{TM2} \qquad \text{(XIII.39c)}$$

A integral da equação ((XIII.39b) é resolvida através do procedimento numérico descrito no Apêndice A.

XIII.8.3) Matriz de Rigidez Elasto-Plástica que Acopla os Graus de Liberdade de Membrana e de Flexão

Substituindo (XIII.38a) em (XIII.36c) obtém-se:

$$\left(\underset{\sim}{K}_P \right)_{mf} = - \underset{\sim}{B}_m^T \; \underset{\sim}{CFI} \; \underset{\sim}{UR} \qquad \text{(XIII.40a)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{CFI} = \int \underset{\sim}{CEF} \quad \underset{\sim}{TM2} \quad \underset{\sim}{FDR} \quad dA \qquad \text{(XIII.40b)}$$

A integral da equação (XIII.40b) é resolvida através do procedimento numérico descrito no Apêndice A.

XIII.8.4) Matriz de Rigidez Elasto-Plástica Correspondente à Rigidez na Direção das Rotações em Torno do Eixo Z Local

A matriz correspondente à rigidez na direção das rotações θ_z's é dada por:

$$\left(\underset{\sim}{K}_P \right)_R = \begin{bmatrix} KR_{13} & 0 & 0 \\ 0 & KR_{23} & 0 \\ 0 & 0 & KR_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{(XIII.41)}$$

A rigidez KR_{i3} (i=1,2,3) é determinada pelo procedimento descrito no item (XIII.6.3)

XIII.8.5) Matriz de Rigidez Elasto-Plástica do Elemento de Casca

A matriz de rigidez elasto-plástica expandida do elemento de casca é dada por:

$$(\underset{\sim}{K}_P)_{EXP} = \begin{bmatrix} (\underset{\sim}{K}_P)_m & (\underset{\sim}{K}_P)_{mf} & \underset{\sim}{0} \\ (\underset{\sim}{K}_P)_{mf}^T & (\underset{\sim}{K}_P)_f & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & (\underset{\sim}{K}_P)_R \end{bmatrix} \qquad \text{(XIII.42)}$$

A matriz $(\underset{\sim}{K}_p)_{EXP}$ corresponde aos GDL de membrana, flexão e rotações θ_z's numerados por tipo de comportamento. Na sua forma final a matriz de rigidez do elemento de casca $\underset{\sim}{K}_p$, deve corresponder aos GDL numerados na sequência em que ocorrem em cada nó. Isto é obtido realizando-se um espalhamento dos elementos das matrizes $(\underset{\sim}{K}_p)_m$, $(\underset{\sim}{K}_p)_{mf}$, $(\underset{\sim}{K}_p)_f$ e $(\underset{\sim}{K}_p)_R$ na matriz $\underset{\sim}{K}_p$. Este espalhamento é feito usando os vetores de conetividade definidos nas equações (XII.93).

XIII.9) VETOR DE FORÇAS INTERNAS NO DOMÍNIO PLÁSTICO

O vetor de forças incrementais no domínio plástico referente aos comportamentos de membrana e flexão é

determinado da seguinte forma:

$$(\Delta \underset{\sim}{F})_{SEP} = \begin{bmatrix} (\Delta \underset{\sim}{F})_m \\ (\Delta \underset{\sim}{F})_f \end{bmatrix} \qquad \text{(XIII.43a)}$$

Onde,

$$(\Delta \underset{\sim}{F})_m = \int \underset{\sim}{B}_m^T \; \Delta \underset{\sim}{N} \; dA \qquad \text{(XIII.43b)}$$

$$(\Delta \underset{\sim}{F})_f = \int \underset{\sim}{B}_f^T \; \Delta \underset{\sim}{M} \; dA \qquad \text{(XIII.43c)}$$

Os vetores $\Delta \underset{\sim}{N}$ e $\Delta \underset{\sim}{M}$ são determinados, após a realização dos dois ciclos de integração de tensões e após a uniformização das tensões de membrana (ver item XIII.6.2), através da seguinte equação:

$$\Delta \underset{\sim}{N} = \overset{k+1}{\underset{\sim}{N}} - \overset{k}{\underset{\sim}{N}} \qquad \text{(XIII.44a)}$$

$$\Delta \underset{\sim}{M} = \overset{k+1}{\underset{\sim}{M}} - \overset{K}{\underset{\sim}{M}} \qquad \text{(XIII.44b)}$$

XIII.9.1) Vetor de Forças Incrementais Referente ao Comportamento de Membrana

Após a realização da uniformização das tensões de membrana o vetor $\Delta \underset{\sim}{N}$ é constante ao longo do elemento, o que permite realizar uma integração explícita na equação

(XIII.43b), obtendo-se:

$$(\Delta \underset{\sim}{F})_m = \underset{\sim}{B}_m^T \Delta \underset{\sim}{N} A \qquad \text{(XIII.45)}$$

XIII.9.2) Vetor de Forças Incrementais Referente ao Comportamento de Flexão

Substituindo a equação (XIII.38a) em (XIII.43c) obtém-se:

$$(\Delta \underset{\sim}{F})_f = \underset{\sim}{UR}^T \underset{\sim}{VFI} \qquad \text{(XIII.46a)}$$

$$\underset{\sim}{VFI} = - \int \underset{\sim}{FDR}^T \underset{\sim}{TM2}^T \Delta \underset{\sim}{M} \, dA \qquad \text{(XIII.46b)}$$

A integral da equação (XIII.46b) é resolvida através do procedimento numérico descrito no Apêndice A.

XIII.9.3) Vetor de Forças Incrementais na Direção das Rotações em Torno do Eixo Z Local

Os momentos na direção das rotações θ_z's são determinados através da seguinte equação:

$$(\Delta \underset{\sim}{F})_R = (\underset{\sim}{K}_P)_R (\Delta \underset{\sim}{u}^k)_R \qquad \text{(XIII.47)}$$

Onde,

$(\underset{\sim}{K}_P)_R$ - matriz definida na equação (XIII.41)

$(\Delta \overset{k}{\underset{\sim}{u}})_R$ - vetor de rotações incrementais em torno do eixo z local.

XIII.9.4) Vetor de Forças do Elemento de Casca

O vetor de forças incrementais expandido no domínio plástico é dado por:

$$(\Delta \underset{\sim}{F})_{EXP} = \begin{bmatrix} (\Delta \underset{\sim}{F})_m \\ (\Delta \underset{\sim}{F})_f \\ (\Delta \underset{\sim}{F})_R \end{bmatrix} \qquad \text{(XIII.48)}$$

O vetor $(\Delta \underset{\sim}{F})_{EXP}$ corresponde aos GDL de membrana, flexão e rotações θ_z's numerados por tipo de comportamento. Antes de realizar-se a atualização do vetor de forças totais do elemento é necessário determinar o vetor $\Delta \underset{\sim}{F}$ correspondente aos GDL numerados na sequência em que ocorrem em cada nó. O vetor $\Delta \underset{\sim}{F}$ é obtido fazendo-se um espalhamento dos elementos dos vetores $(\Delta \underset{\sim}{F})_m$, $(\Delta \underset{\sim}{F})_f$ e $(\Delta \underset{\sim}{F})_R$ no vetor $\Delta \underset{\sim}{F}$. Este espalhamento é feito usando os vetores de conetividade definidos nas equações(XII.93).

O vetor de forças internas do elemento é determinado de forma incremental através da seguinte equação:

$$\underset{\sim}{F}^{k+1} = \underset{\sim}{F}^{k} + \Delta \underset{\sim}{F} \qquad \text{(XIII.49)}$$

XIII.10) TRANSFORMAÇÃO DAS MATRIZES DO ELEMENTO DO SISTEMA DE REFERÊNCIA LOCAL FIXO PARA O GLOBAL

A matriz de rigidez e o vetor de forças internas referidos ao sistema de coordenadas globais são determinados através das seguintes equações:

$$\underset{G\sim M}{K} = \underset{\sim}{T}^{T} \underset{\sim M}{K} \underset{\sim}{T} \qquad \text{(XIII.50a)}$$

$$\underset{G\sim}{F} = \underset{\sim}{T}^{T} \underset{\sim}{F} \qquad \text{(XIII.50b)}$$

Onde,

$\underset{\sim}{T}$ - matriz que realiza a transformação do sistema de referência global para o local fixo

CAPÍTULO XIV

ELEMENTO TRIANGULAR DE CASCA ELASTO-PLÁSTICO NÃO-LINEAR GEOMÉTRICO

Apresenta-se neste capítulo uma formulação de elemento triangular plano que resulta da junção da formulação NLGEO (não-linear geométrica) apresentada no Capítulo XII e da formulação NLFIS (não-linear física) apresentada no Capítulo XIII. O elemento utiliza três sistemas de referência: o global, o local fixo e o local móvel. A não-linearidade física (elasto-plasticidade) é considerada através de uma superfície de escoamento para cascas finas, que engloba as superfícies de Ilyushin e de Ivanov (ver Capítulo VII). A não-linearidade geométrica é considerada através de uma teoria incremental-iterativa, de caráter geral, baseada no Princípio dos Trabalhos Virtuais (ver Capítulo V).

Na formulação NLNL (não-linear física e geométrica) aqui apresentada, as características não-lineares das outras duas formulações se entrelaçam, ampliando o universo de soluções possíveis. O entrelaçamento das não-linearidades ocorre de duas maneiras: através do sistema de referência móvel, que é o referencial no qual as matrizes de rigidez e os vetores de tensão do elemento são determinados; e através das tensões generalizadas de membrana e de flexão, usadas

para calcular a matriz de rigidez geométrica, que são determinadas obedecendo às restrições do critério de escoamento.

As hipóteses básicas adotadas são:

i) As deformações são pequenas em comparação com a unidade.

ii) As seções normais ao plano do elemento, inicialmente planas, permanecem planas durante a deformação.

iii) A espessura da casca é pequena em comparação com as suas outras dimensões.

iv) As translações e as rotações são grandes em comparação, respectivamente, com as dimensões da casca e com a unidade.

v) A configuração do elemento pode ser atualizada considerando-se apenas deslocamentos de corpo rígido, ou seja, na configuração deformada o elemento se mantém plano e a sua espessura e a sua área não variam.

vi) As cargas são aplicadas incrementalmente de forma que os deslocamentos incrementais (translações e rotações) satisfaçam a hipótese de pequenos deslocamentos, e a plastificação da estrutura ocorra de maneira gradual.

O elemento possui três nós com seis incógnitas cada: três translações e três rotações. O campo de deslocamentos é escrito tomando-se como referência o sistema local móvel.

XIV.1) EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

As equações incrementais utilizadas pelo algoritmo incremental-iterativo correspondem às equações (V.19), transcritas a seguir:

$$(\underset{\sim}{K}_M + \underset{\sim}{K}_G) \Delta \overset{k}{\underset{\sim}{u}} = \underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{F} \qquad \text{(XIV.1)}$$

XIV.2) MATRIZ DE RIGIDEZ MATERIAL, TENSÕES GENERALIZADAS E VETOR DE FORÇAS INTERNAS NO DOMÍNIO ELÁSTICO

Enquanto todos os pontos de integração do elemento permanecerem no domínio elástico, a matriz de rigidez material, o vetor de tensões generalizadas e o vetor de forças internas podem ser determinados pelas equações da formulação NLGEO (elástica não-linear geométrica).

A matriz de rigidez elástica expandida do elemento de casca, que inclui a matriz correspondente à rigidez na

direção das rotações θ_z's, é dada por (ver item (XII.6)):

$$\left(\underset{\sim}{K}_E\right)_{EXP} = \begin{bmatrix} \left(\underset{\sim}{K}_E\right)_m & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \left(\underset{\sim}{K}_E\right)_f & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \left(\underset{\sim}{K}_E\right)_R \end{bmatrix} \qquad \text{(XIV.2)}$$

A matriz $\left(\underset{\sim}{K}_E\right)_{exp}$ corresponde aos GDL* de membrana, flexão e rotações θ_z's numerados por tipo de comportamento, Na sua forma final a matriz de rigidez do elemento de casca $\underset{\sim}{K}_E$, deve corresponder aos GDL numerados na sequência em que ocorrem em cada nó. Isto é obtido realizando-se um espalhamento dos elementos das matrizes $\left(\underset{\sim}{K}_E\right)_m$, $\left(\underset{\sim}{K}_E\right)_f$ e $\left(\underset{\sim}{K}_E\right)_R$ na matriz $\underset{\sim}{K}_E$. Este espalhamento é feito usando os vetores de conetividade definidos nas equações (XII.93).

A matriz de rigidez elástica da equação (XIV.2) é idêntica à matriz da equação (XII.92), inclusive no que diz respeito ao sistema de referência. Estão ambas referidas ao sistema local móvel.

*GDL - graus de liberdade

As tensões generalizadas são determinadas em cada iteração através das equações (XIII.10a) e (XIII.10b), transcritas a seguir:

$$\underset{\sim}{N}^{k+1} = \underset{\sim}{N}^{k} + \Delta \underset{\sim}{N} \qquad \text{(XIV.3a)}$$

$$\underset{\sim}{M}^{k+1} = \underset{\sim}{M}^{k} + \Delta \underset{\sim}{M} \qquad \text{(XIV.3b)}$$

Onde,

$$\Delta \underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{CM}\ \underset{\sim}{B}_m\ (\Delta \underset{\sim}{u}^{k})_m \qquad \text{(XIV.4a)}$$

$$\Delta \underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{CP}\ \underset{\sim}{B}_f\ (\Delta \underset{\sim}{u}^{k})_f \qquad \text{(XIV.4b)}$$

$\underset{\sim}{B}_m$ - matriz definida na equação (XIII.7b).

$\underset{\sim}{B}_f$ - matriz definida na equação (XIII.8b).

O vetor de forças internas em cada iteração é determinado através da equação a seguir:

$$\underset{\sim}{F}^{k+1} = \underset{\sim}{F}^{k} + \Delta \underset{\sim}{F} \qquad \text{(XIV.5a)}$$

Onde,

$$\Delta \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{K}_E \quad \Delta \underset{\sim}{u}^k \qquad \text{(XIV.5b)}$$

$\underset{\sim}{K}_E$ - matriz de rigidez correspondente aos GDL numerados na sequência em que ocorrem em cada nó.

$\Delta \underset{\sim}{u}^k$ - vetor com os dezoito deslocamentos nodais incrementais do elemento.

XIV.3) TENSÕES GENERALIZADAS, MATRIZ DE RIGIDEZ MATERIAL E VETOR DE FORÇAS INTERNAS NO DOMÍNIO PLÁSTICO

As tensões generalizadas são determinadas em cada iteração através das equações (XIII.30a) e (XIII.30b) transcritas a seguir:

$$\underset{\sim}{N}^{k+1} = \underset{\sim}{N}^{k} + \underset{\sim}{dN} \qquad \text{(XIV.6a)}$$

$$\underset{\sim}{M}^{k+1} = \underset{\sim}{M}^{k} + \underset{\sim}{dM} \qquad \text{(XIV.6b)}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{dN} = \left(\underset{\sim}{dN} \right)_{est} - d\lambda \, \underset{\sim}{C_M} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{N}} \qquad \text{(XIV.7a)}$$

$$d\underset{\sim}{M} = \left(d\underset{\sim}{M} \right)_{est} - d\lambda \, \underset{\sim}{CP} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underset{\sim}{M}} \qquad \text{(XIV.7b)}$$

Os vetores $d\underset{\sim}{N}$ e $d\underset{\sim}{M}$ são determinados em cada ponto de integração usando as equações (XIV.7a) e (XIV.7b) e os procedimentos computacionais descritos no item (XIII.6.2).

A matriz de rigidez elasto-plástica expandida do elemento de casca é dada por (ver item (XIII.8.5)):

$$\left(\underset{\sim}{K}_P \right)_{EXP} = \begin{bmatrix} \left(\underset{\sim}{K}_P \right)_m & \left(\underset{\sim}{K}_P \right)_{mf} & \underset{\sim}{0} \\ \left(\underset{\sim}{K}_P \right)_{mf}^T & \left(\underset{\sim}{K}_P \right)_f & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \left(\underset{\sim}{K}_P \right)_R \end{bmatrix} \qquad \text{(XIV.8)}$$

A matriz $\left(\underset{\sim}{K}_P \right)_{EXP}$ corresponde aos GDL de membrana, flexão e rotações θ_z's numerados por tipo de comportamento. Na sua forma final a matriz de rigidez do elemento de casca $\underset{\sim}{K}_p$, deve corresponder aos GDL numerados na sequência em que ocorrem em cada nó. Isto é obtido realizando-se um espalhamento dos elementos das matrizes $\left(\underset{\sim}{K}_P \right)_m$, $\left(\underset{\sim}{K}_P \right)_{mf}$, $\left(\underset{\sim}{K}_P \right)_f$ e $\left(\underset{\sim}{K}_P \right)_R$ na matriz $\underset{\sim}{K}_P$. Este espalhamento é feito usando os vetores de conetividade definidos nas equações (XII.93).

A matriz de rigidez plástica da equação (XIV.8) é idêntica a matriz da equação (XIII.42). A diferença entre elas é estabelecida pelo sistema de referência em que estão

definidas. Uma, a matriz da equação (XIII.42), é referida ao sistema local fixo, enquanto a outra, a matriz da equação (XIV.8), é referida ao sistema local móvel.

O vetor de forças internas em cada iteração é determinado através da equação a seguir (ver item (XIII.9.4)).

$$\underset{\sim}{F}^{k+1} = \underset{\sim}{F}^{k} + \Delta \underset{\sim}{F} \qquad \text{(XIV.9)}$$

Onde,

$\Delta \underset{\sim}{F}$ - vetor de forças incrementais correspondente aos GDL numerados na sequência em que ocorrem em cada nó.

O vetor $\Delta \underset{\sim}{F}$ é obtido realizando-se a integração do campo de tensões generalizadas conforme procedimento detalhado no item (XIII.9).

XIV.4) MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA

A matriz de rigidez geométrica expandida do elemento de casca é dada por (ver item (XII.8.6)).

$$\left(\underset{\sim}{K}_G \right)_{EXP} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{KG1} & \underset{\sim}{KG6} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{KG7} & \underset{\sim}{KG4} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \qquad \text{(XIV.10)}$$

A matriz $(\underset{\sim}{K}_G)_{EXP}$ corresponde aos GDL de membrana, flexão e rotações θ_z's numerados por tipo de comportamento. Na sua forma final a matriz de rigidez geométrica do elemento de casca $\underset{\sim}{K}_G$, deve corresponder aos GDL numerados na sequência em que ocorrem em cada nó. Isto é obtido realizando-se um espalhamento dos elementos das matrizes $\underset{\sim}{KG1}$, $\underset{\sim}{KG4}$, $\underset{\sim}{KG6}$ e $\underset{\sim}{KG7}$ na matriz $\underset{\sim}{K}_G$. Este espalhamento é feito usando os vetores de conetividade definidos nas equações (XII.93).

A matriz de rigidez geométrica da equação (XIV.10) é idêntica a matriz da equação (XII.134), inclusive no que diz respeito ao sistema de referência. Estão ambas referidas ao sistema local móvel.

XIV.5) TRANSFORMAÇÃO DAS MATRIZES DO ELEMENTO DO SISTEMA DE REFERÊNCIA LOCAL MÓVEL PARA O GLOBAL

As matrizes de rigidez e o vetor de forças internas referidos ao sistema de coordenadas globais são determinados através das seguintes equações:

$$\underset{G\sim M}{K} = \underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{R}^T \underset{\sim M}{K} \underset{\sim}{R}\ \underset{\sim}{T} \qquad \text{(XIV.11a)}$$

$$\underset{G\sim}{F} = \underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{R}^T \underset{\sim}{F} \qquad \text{(XIV.11b)}$$

$$K_G = \underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{R}^T \underset{\sim}{K}_G \underset{\sim}{R} \underset{\sim}{T} \qquad \text{(XIV.11c)}$$

Onde,

$\underset{\sim}{R}$ - matriz que realiza a transformação do sistema de referência local fixo para o local móvel.

$\underset{\sim}{T}$ - matriz que realiza a transformação do sistema de referência global para o local fixo.

CAPÍTULO XV

RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados os resultados das análises de várias estruturas laminares realizadas para testar as formulações de elementos finitos desenvolvidas no presente trabalho.

Apresentam-se também comparações com as soluções para estes problemas publicadas por outros pesquisadores.

Para facilitar a descrição das análises e a discussão dos resultados os elementos propostos no presente trabalho serão identificados através dos seguintes nomes:

- CLCB/NLG - Elemento de pórtico não-linear geométrico apresentado no Capítulo IX.
- CLCB/NLF - Elemento de pórtico elasto-plástico apresentado no Capítulo X.
- CLCB/NFG - Elemento de pórtico elasto-plástico não-linear geométrico apresentado no Capítulo XI.
- LCTS - Elemento triangular de casca na sua versão linear discutida no item (VIII.3).
- LCTS/NLG - Elemento triangular de casca não-linear geométrico apresentado no Capítulo XII.
- LCTS/NLF - Elemento triangular de casca elasto-plástico apresentado no Capítulo XIII.
- LCTS/NFG - Elemento triangular de casca elasto-plástico não-linear geométrico apresentado no Capítulo XIV.

XV.1) ANÁLISES LINEARES

XV.1.1) Casca Cilíndrica Apoiada em Diafragmas Submetida a Carga de Peso Próprio

Este problema, conhecido na literatura com o nome de casca cilíndrica de Scordelis e Lo, é muito utilizado para testar elementos de casca. Na figura (XV.1) encontram-se as suas características geométricas e materiais. A carga uniforme "q" é aplicada na direção negativa do eixo z e em análises lineares tem o valor de 0.4309 N/cm (q = 0.625 lbf/in). Nos bordos curvos, apoiados nos diafragmas, as translações "u" e "w" e a rotação "ry" da casca são restringidos. Nos bordos retos todas as translações e rotações são livres.

Para testar a convergência dos resultados do elemento LCTS linear para a solução de uma teoria de cascas de grande curvatura ("deep shell theory") foram realizadas quatro análises lineares com malhas de refinamento crescente, cujas características e resultados encontram-se na tabela (XV.1).

Segundo várias citações encontradas na literatura [18, 82, 145] o deslocamento vertical do ponto B "w_B" (ver Figura (XV.1)) tem o valor de -93.878 mm (w_{Bs} = - 3.696 in) de acordo com uma teoria de "shallow shell" [145] e um valor de -91.059 mm (w_{Bd} = - 3.585 in) de acordo com uma teoria de "deep shell" [147].

Os valores da última coluna da tabela (XV.1) mostram que à medida em que a malha é refinada o deslocamento "w_B" calculado através do LCTS se aproxima mais de "w_{Bd}". Para a malha mais refinada (14 x 20) "w_B" é 96.7% de "w_{Bd}", o que pode-se considerar uma boa aproximação levando-se em conta que houve conversões de unidades e que não existe um consenso na literatura quanto ao valor correto de "w_{Bd}". Szabó e Sahrmann [148], por exemplo, trabalham com um valor de -89.662 mm (w_{Bd} = -3.53 in). Já Nygard considera que "w_{Bd}" é igual a - 91.93 mm.

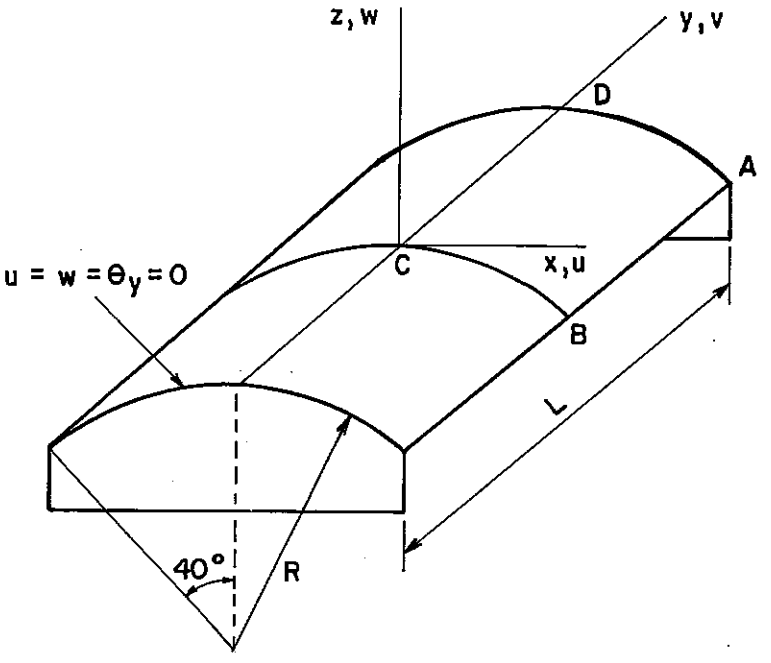
Na figura (XV.2) encontram-se as curvas de deslocamentos "w_B" em relação aos GDLT* das malhas do LCTS e de outros elementos utilizados para resolver este problema. Os elementos SSECS ("Standard Strain Element for Cylindrical Shells") e ISECS ("Improved Strain Element for Cylindrical Shells") propostos por Ashwell [145] são elementos específicos para análises de cascas cilíndricas e por isso se aproximam da solução de "deep shell" com 606 e 244 GDLT respectivamente. Os elementos DKTCST e DKTLR, foram submetidos a vários testes na referência [81] e no caso da casca de Scordelis e Lo se aproximaram da solução de "deep shell" com 1734 e 150 GDLT respectivamente. O elemento LCTS se aproximou da solução de "deep shell" com 1890 GDLT.

*GDLT - Graus de liberdade totais.

O gráfico da figura (XV.2) mostra que, para alcançar uma boa solução com elementos de casca planos que utilizam o elemento CST para representar o comportamento de membrana, foi necessária uma grande quantidade de GDL**. Este é o caso do LCTS e do DKTCST. Já o DKTLR que resulta da superposição do elemento de placa DKT [149], com o elemento de membrana LR [150] tem um desempenho bem melhor neste problema. Isto vem apenas confirmar que o elemento LCTS, conforme discutido no item (VIII.3.1), necessita de malhas refinadas para resolver problemas em que o estado de tensão de membrana varia rapidamente.

Testes de convergência como aqueles representados na figura (XV.2) servem para avaliar a capacidade de um determinado elemento para resolver um problema , porém não podem ser vistos como uma medida de eficiência computacional. Na verdade não existe uma medida absoluta de eficiência computacional, porém uma boa indicação é o tempo de CPU gasto. Um elemento simples como o LCTS pode resolver um problema usando quatro ou cinco vezes mais GDL do que um outro elemento mais complexo e mesmo assim gastar menos tempo de CPU.

** GDL - Graus de liberdade



$E = 2.1 \times 10^4 \ N/mm^2$

$\nu = 0.0$

$\sigma_0 = 4.2 \ N/mm^2$

$L = 15200 \ mm$

$R = 7600 \ mm$

$t = 76 \ mm$

Figura XV.1 - Casca cilíndrica de Scordelis e Lo.

Tabela XV.1

MALHA	NÓS	ELEMENTOS	GDLT	w_B (mm)	$\frac{w_B}{w_{Bd}}$
5 x 7	48	70	288	- 73.480	0.807
7 x 10	88	140	528	- 80.264	0.881
10 x 14	165	280	990	- 85.159	0.935
14 x 20	315	560	1890	- 88.027	0.967

XV.2) ANÁLISES NÃO-LINEARES GEOMÉTRICAS

XV.2.1) Placa Quadrada Simplesmente Apoiada Submetida a Carga Distribuída Uniforme

Na placa da figura (XV.3) as translações nos quatro bordos são restringidas, as rotações em torno da linha de cada bordo são livres e a carga uniforme é aplicada perpendicularmente ao plano da placa. Esta placa foi analisada anteriormente por Bergan e Clough [143] utilizando um elemento quadrangular de casca, desenvolvido a partir de uma teoria de cascas abatidas ("shallow shell theory"), e uma malha 4x4 para um quarto da placa. Bathe e Bolourchi [69] resolveram este mesmo problema com um elemento isoparamétrico de casca de 16 nós discretizando um quarto da placa.

A análise com o elemento LCTS/NLG foi feita utilizando-se uma malha 4x4 para um quadrante (Figura (XV.3)).

Neste exemplo a não-linearidade geométrica se manifesta desde o início do processo de carregamento através do surgimento de tensões de membrana. Estas tensões fazem com que a rigidez à flexão da placa aumente a medida em que os deslocamentos transversais crescem.

As curvas da carga em relação ao deslocamento do ponto médio da placa, correspondentes às três análises,

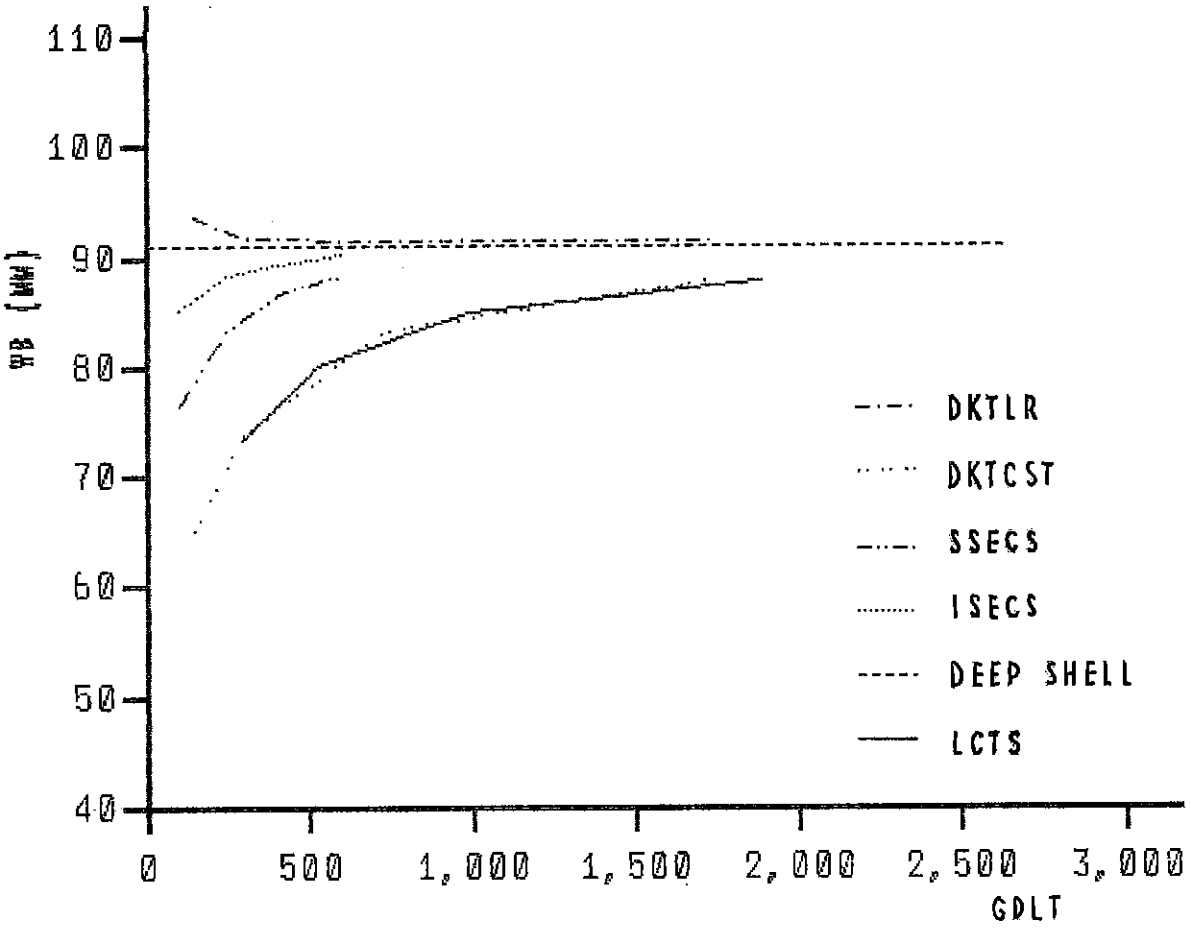


Figura XV.2 - Convergência de vários elementos para a solução de uma teoria de "deep shell".

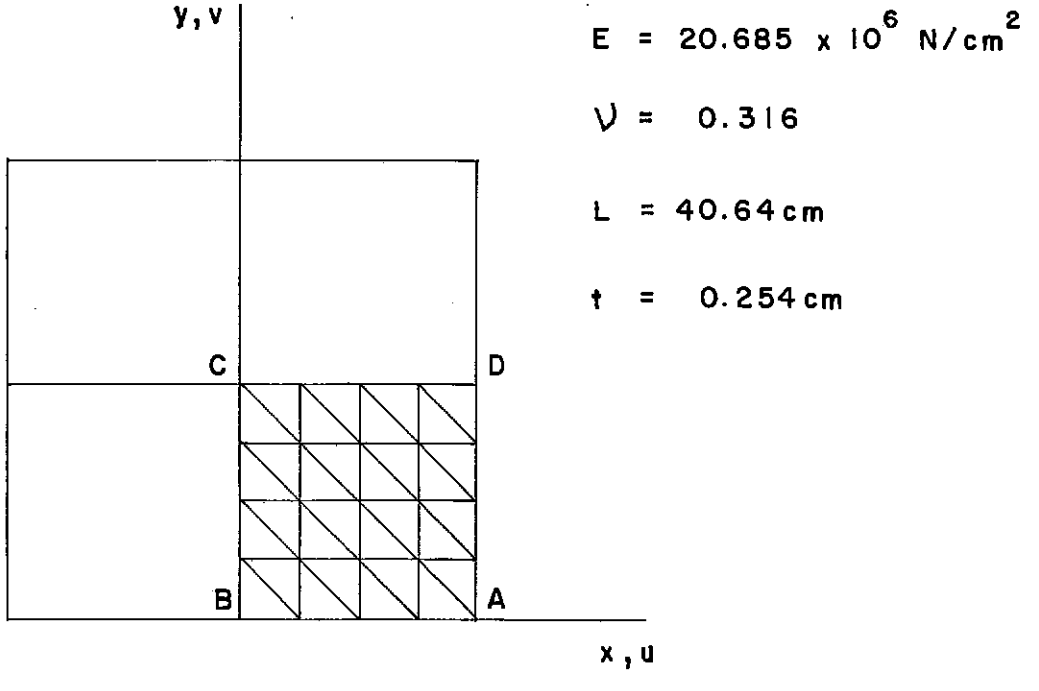


Figura XV.3 - Placa apoiada submetida a carga distribuída.

encontram-se no gráfico da figura (XV.4). Os resultados obtidos com o LCTS/NLG são praticamente idênticos aos publicados por Bergan e Clough e bastante próximos aos de Bathe e Bolourchi.

XV.2.2) Viga Engastada em Balanço com Momento Fletor na Extremidade Livre

A viga da figura (XV.5) foi analisada anteriormente por Horrigmoe e Bergan [91] utilizando cinco elementos quadrangulares planos de casca e aplicando a carga em 10 incrementos iguais.

A análise com o elemento LCTS/NLG foi feita com a malha 20x2 indicada na figura (XV.6) e a carga foi aplicada em 800 incrementos iguais.

Na figura (XV.7) encontram-se as curvas da carga em relação ao deslocamento da extremidade livre correspondentes às duas análises. Os resultados obtidos com o LCTS/NLG são praticamente coincidentes com os de Horrigmoe e Bergan.

Na solução analítica deste problema, na configuração deformada final da viga o nó da extremidade livre ocupa a mesma posição do nó da extremidade engastada e a viga tem a forma de um círculo. Na figura (XV.8) encontram-se as configurações deformadas correspondentes a valores de "n" variando de 1 a 5 ($M = n\ 0.4\ \pi\ E\ I\ /L$), determinadas na

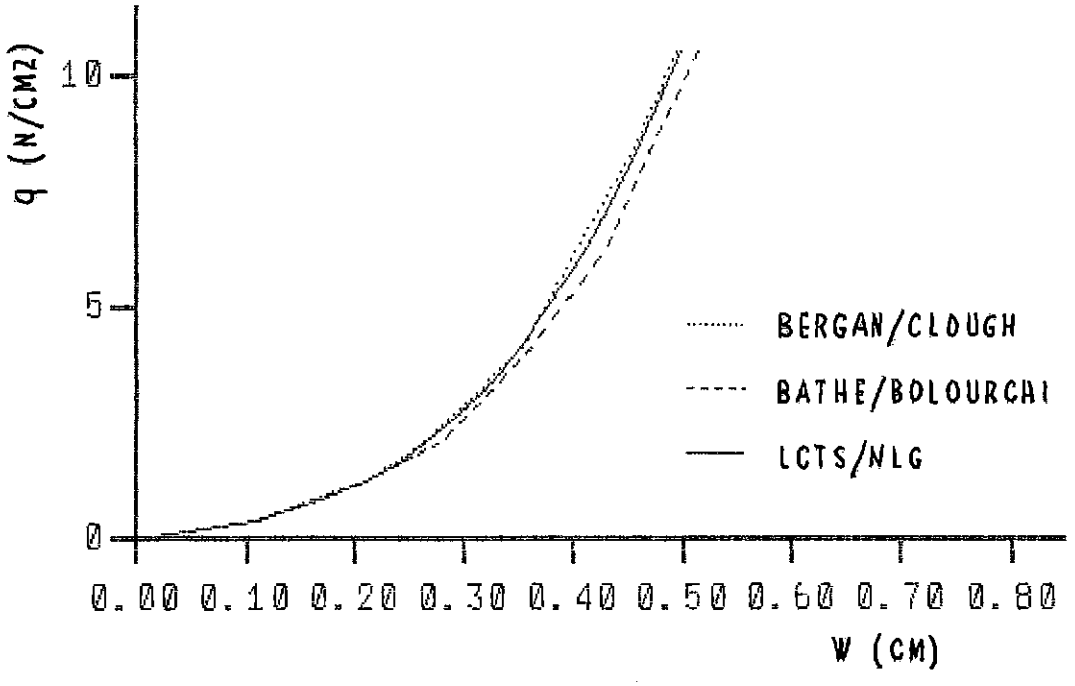


Figura XV.4 - Curva carga x deslocamento da placa apoiada submetida a carga distribuída.

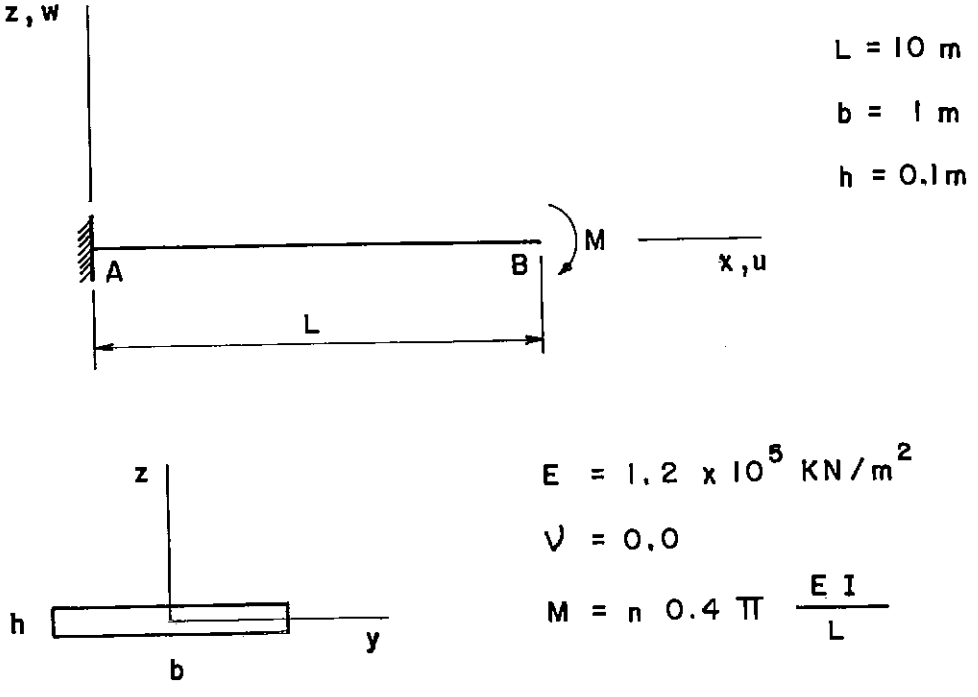


Figura XV.5 - Viga engastada em balanço com momento fletor na extremidade livre.

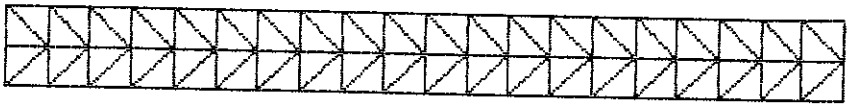


Figura XV.6 - Viga engastada discretizada por uma malha 20 x 2.

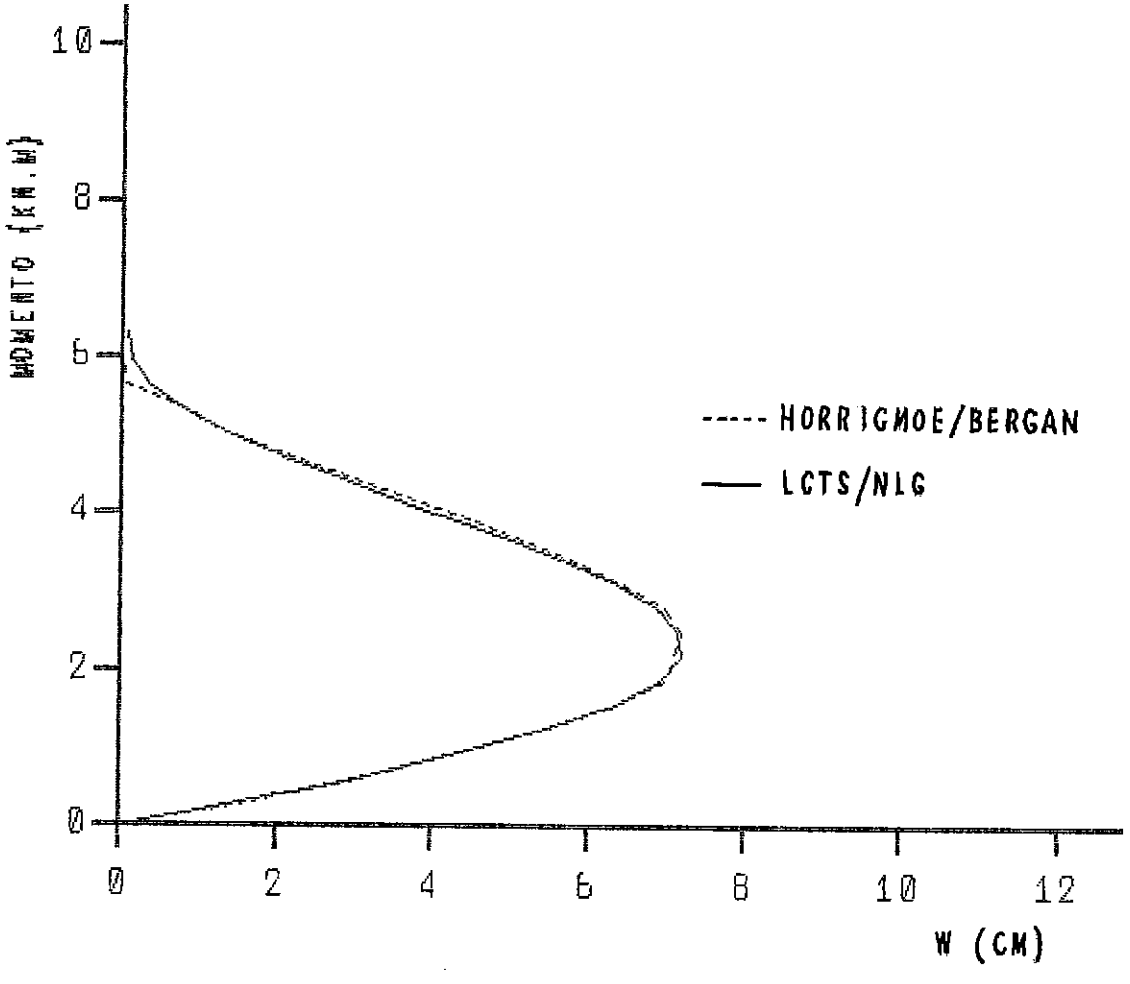


Figura XV.7 - Relação carga-deslocamento para a viga engastada.

análise com o LCTS/NLG. Pode-se constatar que na configuração final correspondente a n = 5 o círculo está praticamente fechado, havendo apenas uma pequena diferença entre as coordenadas dos nós da extremidade livre e da extremidade engastada.

Neste exemplo a capacidade de um elemento representar grandes deslocamentos é submetida a um teste difícil. Devido à grande flexibilidade da viga os deslocamentos que ela sofre são extremamente grandes e predominantemente constituídos por movimentos de corpo rígido. Do ponto de vista acadêmico é sem dúvida alguma um bom teste porém é pouco provável que uma estrutura laminar real tenha tamanha flexiblidade.

A diferença entre as quantidades de incrementos utilizadas nas duas análises deve-se ao fato de que o elemento usado por Horrigmoe e Bergan utiliza um procedimento específico para tratamento de deslocamentos de corpo rígido o que elimina a restrição quanto à magnitude dos deslocamentos incrementais (ver item (V.1)).

XV.2.3) Casca Esférica Submetida a Carga Concentrada Vertical

Na casca da figura (XV.9) quatro bordos são rotulados e impedidos de sofrer translações. Esta casca foi analisada anteriormente por Horrigmoe e Bergan [91] utilizando um elemento triangular plano de casca e uma malha 5x5 para um

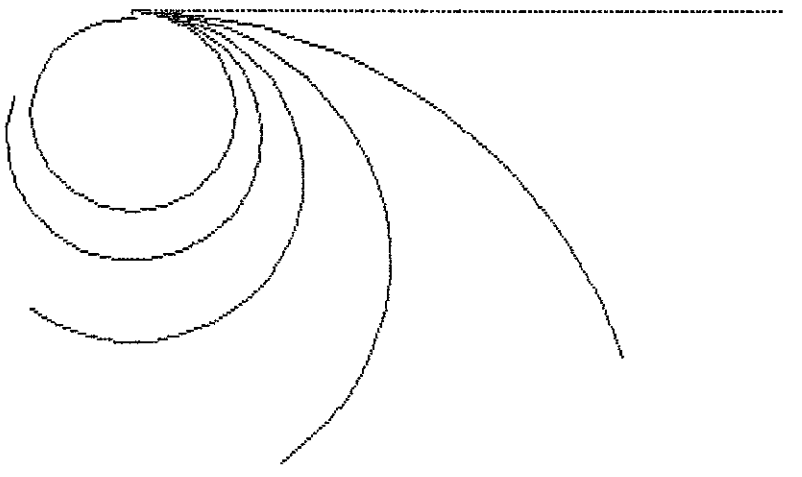


Figura XV.8 - Configurações deformadas da viga engastada.

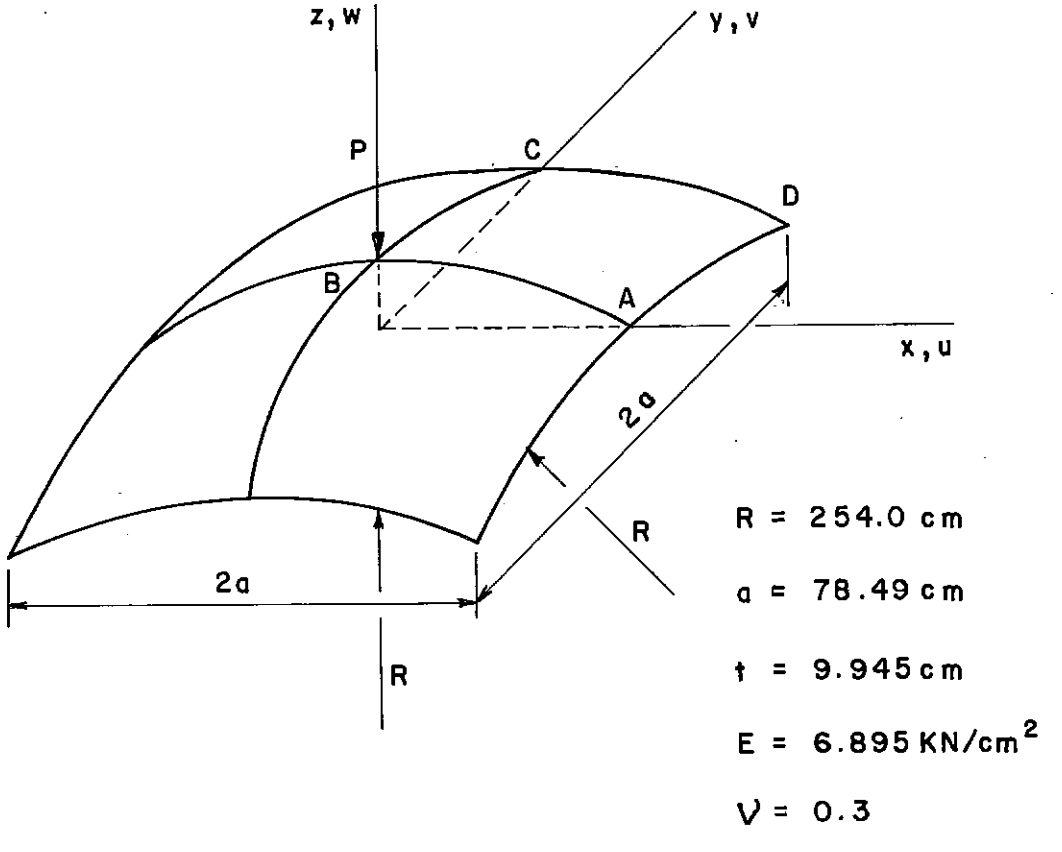


Figura XV.9 - Casca esférica submetida a carga concentrada vertical.

quarto da casca. Parisch [100] resolveu este mesmo problema utilizando um elemento isoparamétrico de casca de 4 nós e uma malha 4x4 para um quarto da casca.

A análise com o elemento LCTS/NLG foi feita com a malha 10x10 para um quarto da placa, indicada na figura (XV.10).

Neste exemplo,a não-linearidade geométrica faz com que a rigidez da casca se reduza gradualmente até que a carga de flambagem seja atingida. Após este ponto a casca passa por um processo de descarregamento, em que as deformações aumentam e a carga externa se reduz, até alcançar uma configuração de equilíbrio estável. Nesta nova configuração a estrutura restabelece a sua capacidade de absorver carga e desenvolve tensões de membrana que provocam enrijecimento a medida em que a carga externa cresce.

As curvas da carga em relação ao deslocamento do ponto médio da casca, correspondentes às três análises, encontram-se no gráfico da figura (XV.11). As cargas de flambagem de Horrigmoe e Bergan e de Parisch são 50 KN e 49.26 KN respectivamente enquanto a carga obtida com o LCTS/NLG é 46.37KN. No trecho inicial até começar o enrijecimento a malha do LCTS/NLG é menos rígida que a malha de Horrigmoe e Bergan, invertendo-se a situação após o início do enrijecimento. A malha de Parisch assume uma posição intermediária no trecho inicial até começar o enrijecimento e depois torna-se a mais flexível das três. Estas variações nas três respostas são causadas pelas

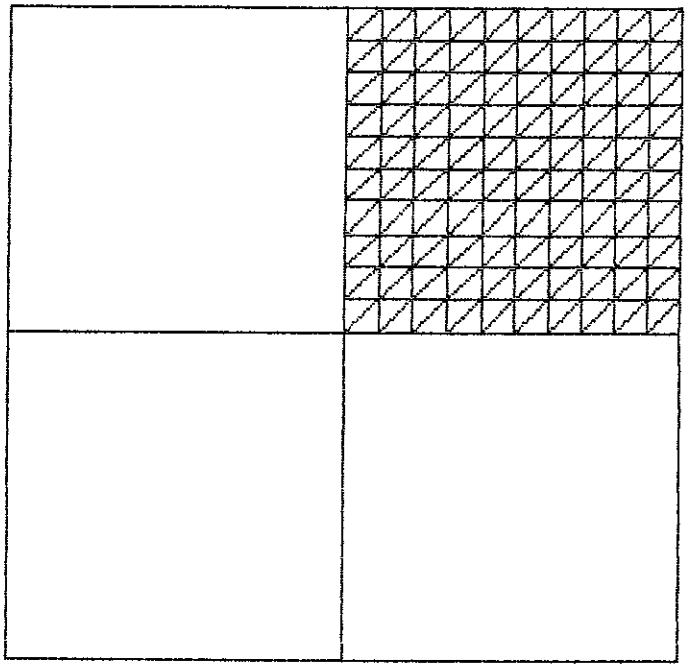


Figura XV.10 - Projeção no plano horizontal da malha 10 x 10 usada para analisar a casca esférica.

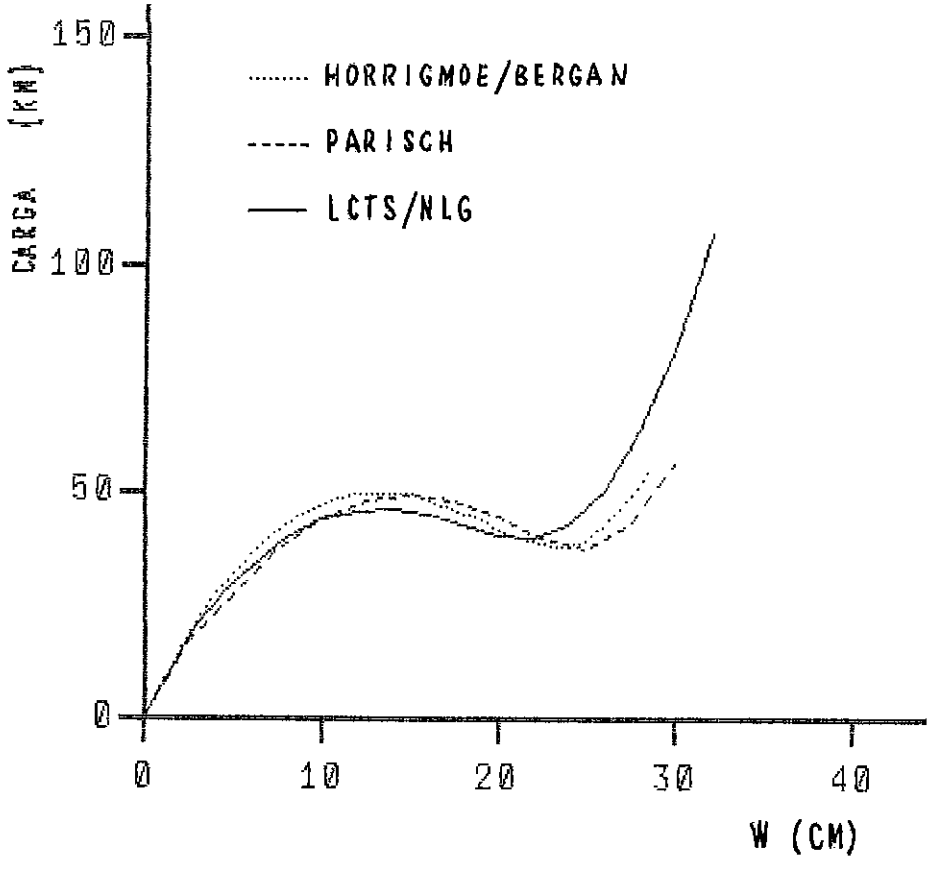


Figura XV.11 - Relação carga-deslocamento para a casca esférica submetida a carga concentrada vertical.

características diferentes de cada uma das três formulações e pela complexidade do comportamento analisado que faz com que estas diferenças se destaquem.

XV.2.4) Cilíndro Circular D190 Submetido a Compressão Axial.

O cilindro da figura (XV.12) tem as extremidades rotuladas e impedidas de sofrer translações nas direções radial e circunferencial. A carga de compressão axial uniforme é aplicada de forma centrada, diretamente sobre a parede do cilindro, na extremidade superior que é livre para se deslocar na direção axial. Na extremidade inferior o deslocamento axial é restringido.

De acordo com a Teoria da Estabilidade Elástica [30] a pressão externa crítica deste cilindro é dada por:

$$p_{cr} = \frac{Et}{R\,[3\,(1 - \nu^2)\,]^{1/2}}$$

Onde,

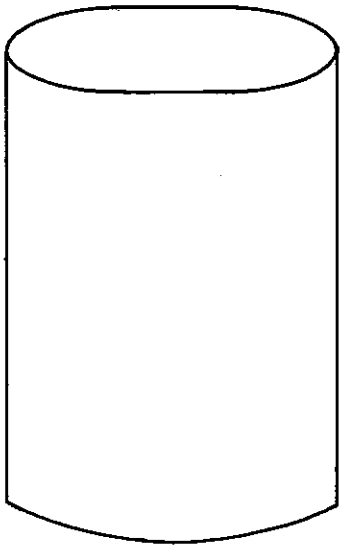
$R = D/2$

De acordo com esta mesma teoria ao atingir a pressão crítica a parede do cilindro assume uma forma ondulada que pode ser representada por "m" semi-ondas senoidais na

direção longitudinal e "n" semi-ondas senoidais na direção circunferencial.

Foram realizadas duas análises com o elemento LCTS/NLG para determinar a pressão crítica e a configuração deformada correspondente ao modo de flambagem axialmente simétrico (n = 0) do cilindro. Em ambas as análises o esforço de compressão foi aplicado através de deslocamento prescrito. Para o cilindro deste exemplo a pressão "p_{cr}" é igual a 133.8 KN/cm² e o modo de flambagem axialmente simétrico tem aproximadamente nove semi-ondas longitudinais (m = 9 e n = 0).

Na primeira análise foi utilizada uma malha 32 x 36, a Malha 1, que discretiza toda a dimensão do cilindro na direção axial e apenas um quarto na direção circunferencial. Ao longo das geratrizes do cilindro, correspondentes aos ângulos de 0 e 90 graus na direção circunferencial, foram especificadas condições de contorno adequadas à consideração de simetria. Esta análise foi interrompida, por falta de convergência, no incremento 25 quando o deslocamento axial da extremidade "w_B" e a carga "p" já haviam atingido no incremento 24 os valores de 0.919 cm e 118.8 KN/cm², respectivamente. A configuração deformada correspondente a esta carga encontra-se na figura (XV.13). Pode-se notar que próximo às duas extremidades surgiram saliências pronunciadas e que ao longo da altura do cilindro começam a aparecer pequenas ondulações.



$E = 21000\ KN/cm^2$

$\nu = 0.3$

$L = 160\ cm$

$D = 190\ cm$

$t = 1\ cm$

Figura XV.12 - Cilindro circular D190 submetido a compressão axial

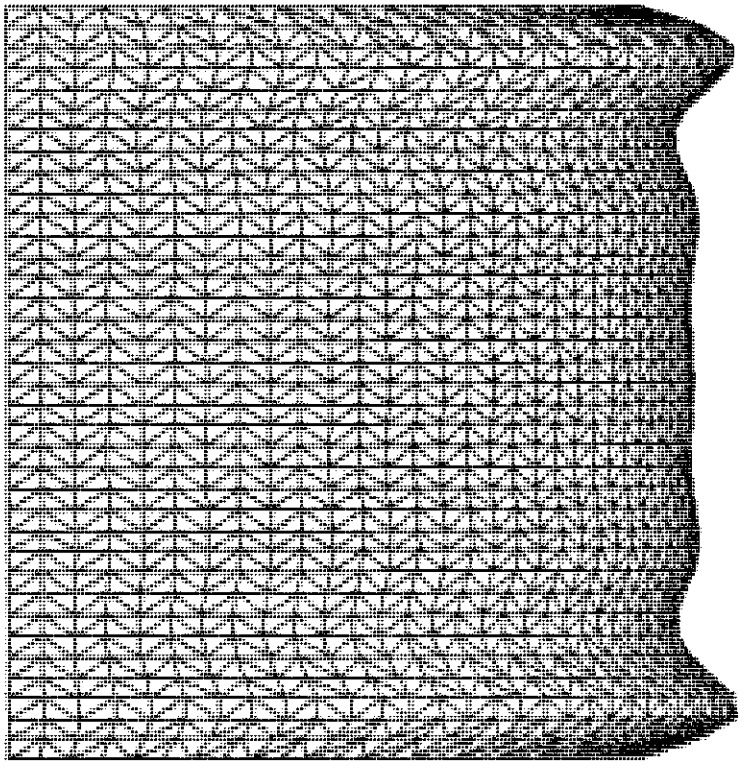


Figura XV.13 - Configuração deformada do cilindro D190 (Malha 1) correspondente a p = 118.1 KN/cm²

Na segunda análise uma malha 2x72, a Malha 2, foi utilizada para discretizar toda a dimensão do cilindro na direção axial e, na direção circunferencial, apenas a parte compreendida entre os ângulos de 0 e 2.8125 graus. Nos dois bordos desta faixa estreita foram impostas condições de contorno adequadas à consideração de simetria. Esta análise foi interrompida por falta de convergência no incremento 137 quando o deslocamento "w_B" e a carga "p" já haviam atingido no incremento 136 os valores de 1.451 cm e 132.6 KN/cm^2 respectivamente. Os perfis das configurações deformadas correspondentes às cargas de 116.9, 126.0, 131.5 e 132.6 KN/cm^2 encontram-se na figura (XV.14). Pode-se acompanhar nesta figura o processo de formação de semi ondas longitudinais, que na configuração do incremento 136 atingem a quantidade prevista pela teoria clássica (m = 9). A carga máxima alcançada nesta análise (p=132.6 KN/cm^2) é igual a 99% da carga crítica prevista na teoria clássica (p_{cr} = 133.8 KN/cm^2).

Na figura (XV.16) encontram-se a curva da carga em relação ao deslocamento axial do cilindro e a curva da carga em relação ao deslocamento radial do nó 13. Este nó foi escolhido porque está situado a uma distância de 8.889 cm da extremidade, na posição em que os deslocamentos radiais têm seu valor máximo.

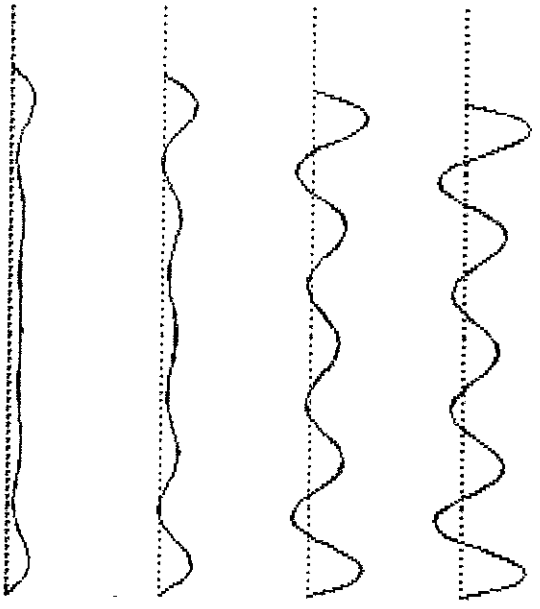


Figura XV.14 - Perfis laterais das configurações deformadas do cilindro D190 (Malha 2) correspondentes as cargas de 116.9, 126.0, 131.5 e 132.6 KN/cm².

Figura XV.15 - Perspectiva da configuração deformada do cilindro D190 (Malha 2) correspondente a p = 132.6 KN/cm².

XV.3) ANÁLISES NÃO-LINEARES FÍSICAS

XV.3.1) Viga Bi-Engastada Submetida a Carga Distribuída Uniforme

A viga da figura (XV.17) foi analisada anteriormente por Benjamin e Ebecken [128] utilizando o elemento de pórtico CLCB/NLF e uma malha de 40 elementos para metade do vão.

Este é um exemplo clássico da Teoria Plástica de Vigas [29] em que aparece com destaque uma das características principais do colapso plástico de estruturas hiperestáticas: a redistribuição de tensões. Para um elemento de pórtico como o CLCB/NLF, desenvolvido a partir da Teoria Plástica de Vigas, este problema é resolvido facilmente. Porém para elementos de casca, que neste caso funcionam como elementos de estado plano de tensões, o grau de dificuldade é alto.

Na realidade este é um teste difícil porque o elemento de estado plano de tensões está sendo utilizado para resolver um problema (flexão de vigas) que está fora da sua área de aplicação. Porém do ponto de vista acadêmico é interessante que um elemento finito seja submetido a testes deste tipo.

A análise com o elemento LCTS/NLF foi feita com uma malha 40x8 para metade do vão, indicada na figura (XV.18).

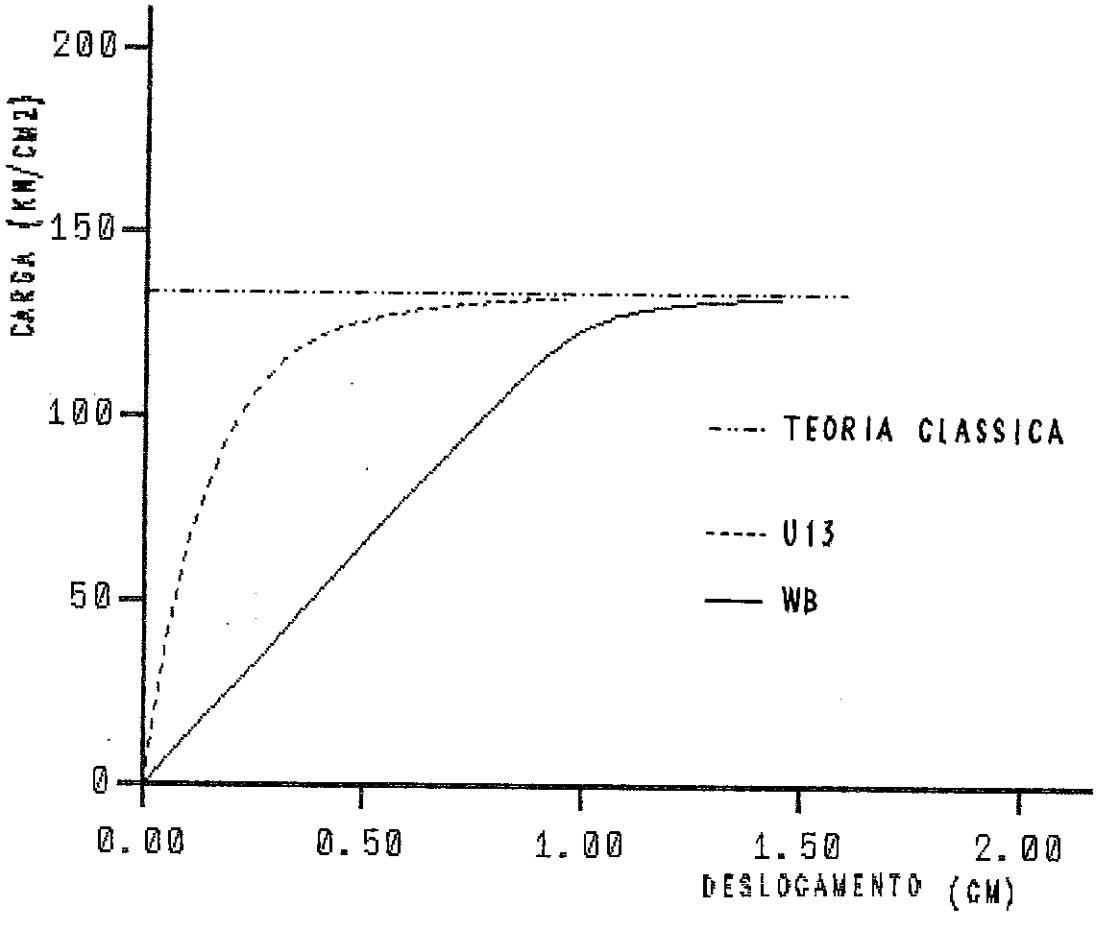
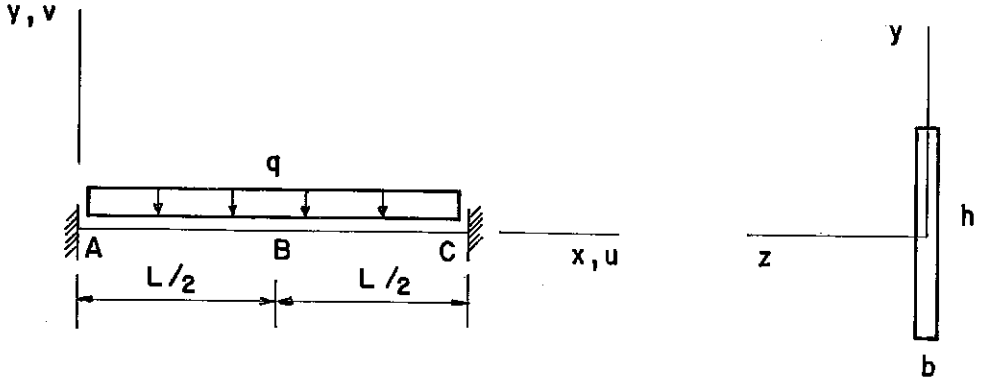


Figura XV.16 - Relação carga-deslocamento para o cilindro D190.



L = 400 cm E = 21000 KN/cm²

b = 4 cm ν = 0.0

h = 40 cm σ_0 = 25 KN/cm²

Figura XV.17 - Viga bi-engastada submetida a carga uniforme distribuída.

Esta malha refinada foi utilizada para que o LCTS/NLF pudesse representar a variação de tensões na direção axial e ao longo da altura. Como não havia preocupação em otimizar a malha adotou-se uma que garantisse a qualidade dos resultados. Isso não significa que com uma malha mais grosseira não fosse possível resolver este problema.

De acordo com a Teoria Plástica de Vigas a carga de colapso "q_u" desta viga tem o valor de 4.0 KN/cm^2. Na análise com o elemento CLCB/NLF a análise foi interrompida por falta de convergência, no incremento 20 (q = 4.0 KN/cm^2) quando a carga "q" e o deslocamento "v_B" do ponto central já haviam atingido, no incremento 19, 3.99 KN/cm e 1.31 cm respectivamente. Na análise com o elemento LCTS/NLF a análise foi interrompida, por falta de convergência, no incremento 83 (q = 4.925 KN/cm^2), quando a carga "q" e o deslocamento "v " já haviam atingido, no incremento 80, 4.28 KN/cm^2 e 1.938 cm respectivamente.

A carga de colapso calculada pelo LCTS/NLF é 7.4% maior que "q_u", porém pode ser considerada um bom resultado, levando-se em consideração que as cargas de colapso determinadas pela Teoria Plástica de Vigas são um limite inferior das cargas de colapso determinadas em ensaios experimentais [29]. Na figura (XV.19) encontram-se as curvas da carga "q" em relação ao deslocamento "v_B" determinadas pelo CLCB/NLF e LCTS/NLF. Além das cargas de colapso que são diferentes as duas curvas diferem também na sua forma. A curva correspondente ao LCTS/NLF diminui a sua inclinação lentamente e no seu trecho final forma um

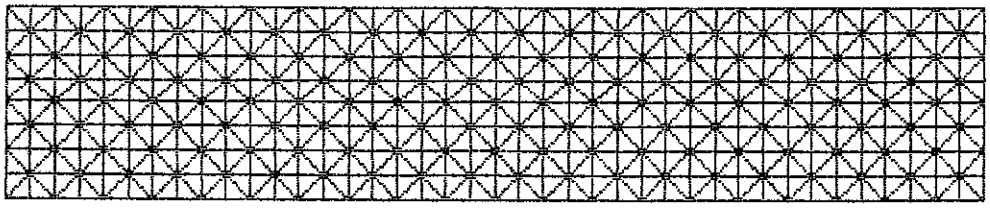


Figura XV.18 - Malha 40x8 usada para discretizar a viga bi-engastada

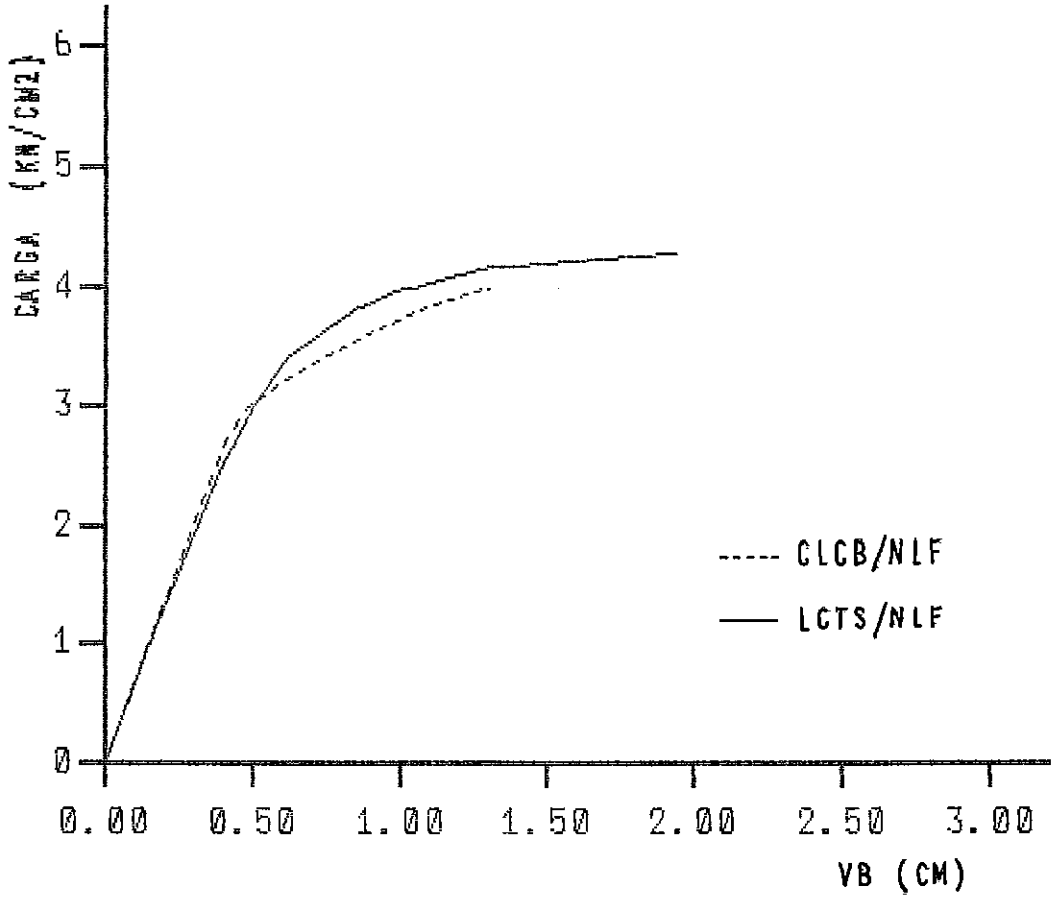


Figura XV.19 - Relação carga-deslocamento para a viga bi-engastada.

patamar de escoamento bem definido. A curva correspondente ao CLCB/NLF é formada por dois trechos de inclinação praticamente constante e não chega a formar um patamar de escoamento.

Este exemplo foi usado também para fazer uma comparação entre os algorítmos para realização de iterações em problemas elásto-plásticos, apresentados no Capítulo V. Foram realizadas quatro análises utilizando em cada uma o MNR (Método de Newton-Raphson), o MTM (Método da Tensão Inicial Modificado), o MTI (Método da Tensão Inicial) e o MNM (Método de Newton-Raphson Modificado). Nas quatro análises a carga foi aplicada de acordo com a mesma função-carga (ver Capítulo V).

Com o MNR e o MTM a análise foi interrompida no incremento 83 ($q = 4.295$ KN/cm^2). Com o MTI e o MNM a análise foi interrompida nos incrementos 41 ($q = 4.085$ KN/cm^2) e 11 ($q = 3.6$ KN/cm^2) respectivamente. Ou seja, a análise com o MNM não foi bem sucedida e a análise com o MTI foi interrompida um pouco antes da carga máxima ser atingida.

Na tabela (XV.2) encontram-se a quantidade de incrementos "NINC", a quantidade total de iterações "NITE", o tempo total de CPU "TTOT", o tempo de CPU por incremento "TINC" e o tempo de CPU por iteração "TITE" correspondentes a cada uma das quatro análises. Os tempos "TTOT", "TINC" e "TITE" foram divididos por um tempo básico "TB" para serem apresentados numa forma adimensional.

O MNR teve o melhor desempenho computacional seguido de perto pelo MTM. O MTM teve um tempo total de CPU 1.6 vezes maior que o tempo do MNR apesar de ter feito cada iteração em um tempo 24% menor que o tempo do MNR. O MNR conseguiu ter um tempo total menor que o do MTM porque fez uma média de 3.8 iterações por incremento enquanto o MTM fez uma média de 8.1 iterações. O MIT teve o menor gasto por iteração dos quatro algorítmos, porém fez uma média de 91.4 iterações por incremento e não conseguiu levar a análise até o incremento 83, como fizeram o MNR e o MTM.

XV.3.2) Placa Quadrada Engastada Submetida a Carga Distribuída Uniforme.

Na placa da figura (XV.20) as translações e rotações são restringidas nos quatro bordos e a carga é aplicada perpendicularmente ao plano da placa. Esta placa foi analisada anteriormente por Owen e Figueiras [70,78] utilizando um elemento "semiloof" de casca e um elemento isoparamétrico de casca. Nas duas análises foi utilizada uma malha 3x3 para um quarto da placa.

Na análise com o elemento LCTS/NLF foi utilizada a malha 8x8 para um quarto da placa, indicada na figura (XV.21). A carga máxima determinada nesta análise tem o valor de 0.391 N/mm^2. Nas análises com os elementos "semiloof" e isoparamétrico foram determinados para a carga máxima os valores de 0.402 N/mm^2 e 0.396 N/mm^2 respectivamente. A carga máxima determinada pelo LCTS/NL

Tabela XV.2

Algoritmo	NINC	NITE	TTOT / TB	TINC / TB	TITE / TB
MNR	83	316	315.7	3.80	1.00
MTM	83	674	510.1	6.15	0.76
MTI(1)	41	3750	2023.1	49.34	0.54
MNM(2)	11	66	39.7	3.60	0.60

(1) A análise foi interrompida no incremento 41

(2) A análise foi interrompida no incremento 11

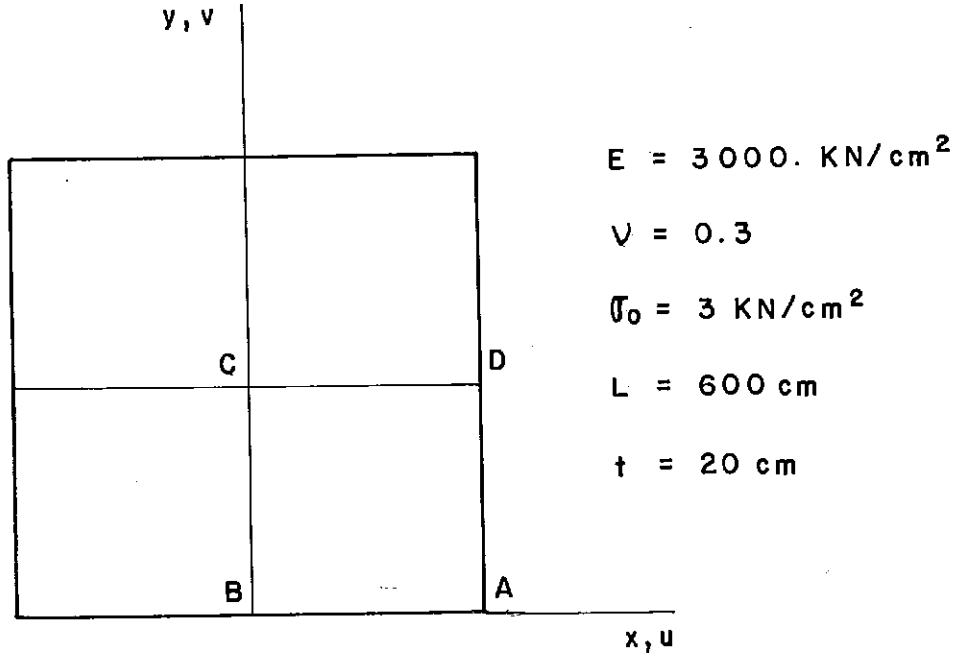


Figura XV.20 - Placa quadrada engastada submetida a carga uniforme.

está bastante próxima das outras duas cargas e tem uma diferença de 1.3% em relação ao valor médio que é de 0.396 N/mm^2. Portanto, pode-se considerar que este resultado está muito bom.

As curvas da carga em relação ao deslocamento do ponto médio da casca, correspondentes às três análises, encontram-se na figura (XV.22). Pode-se notar que na curva correspondente ao LCTS/NLF a perda de rigidez provocada pela plastificação da placa é maior e a carga máxima é atingida após a formação de um patamar de escoamento bem definido.

XV.3.3) Casca Quadrática Engastada Submetida a Carga Concentrada Vertical.

Na casca da figura (XV.23) as translações e rotações em todos os quatros bordos são restringidas e a carga vertical "P" é aplicada no ponto central da casca na direção negativa do eixo "z". As suas características físicas e geométricas são as seguintes:

$E = 21000\ KN/cm^2$ $\qquad$ $L = 600\ cm$

$\nu = 0.3$ $\qquad$ $c = 60\ cm$

$\sigma_o = 25\ KN/cm^2$ $\qquad$ $t = 6\ cm$

$$z = -\frac{c}{(L/2)^2}(x^2 + y^2)$$

Esta casca, com características físicas e espessura diferentes, foi analisada anteriormente por Owen e

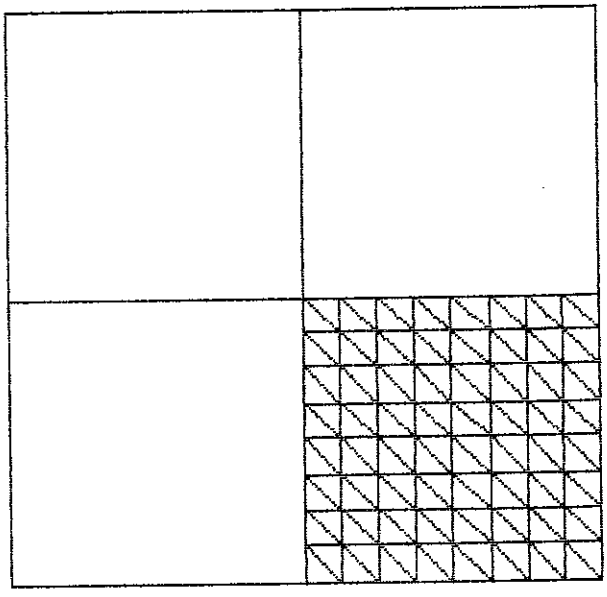


Figura XV.21 - Placa quadrada discretizada por malha 8 x 8.

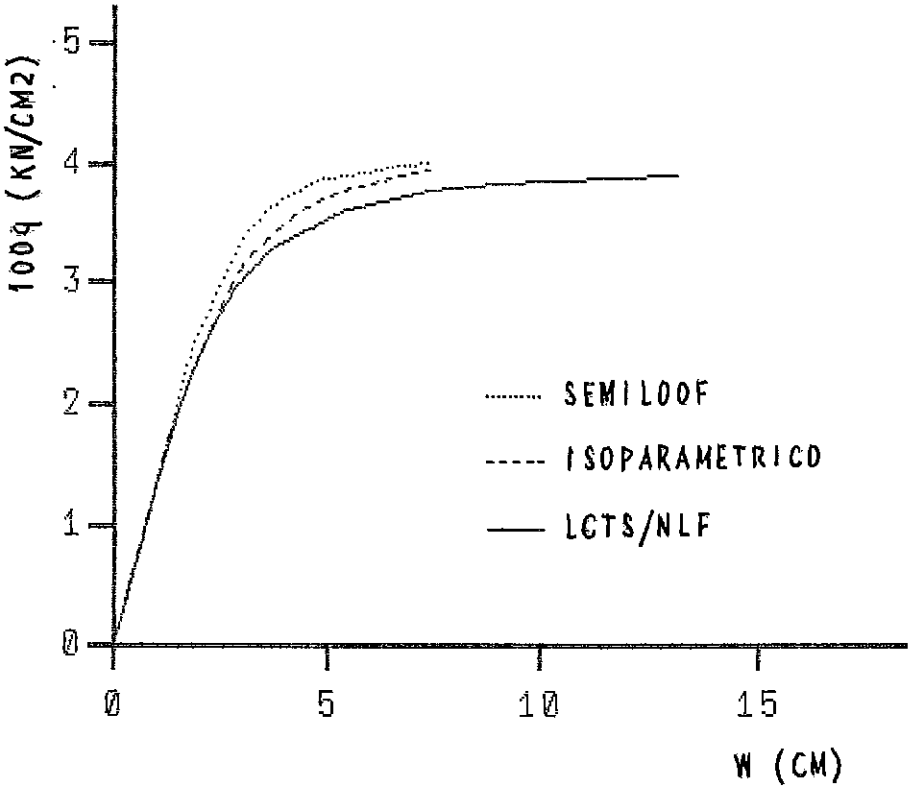


Figura XV.22 - Relação carga-deslocamento para a placa quadrada engastada.

Figueiras [70,78] Neste exemplo, como havia interesse em analisar uma casca fina, a espessura foi reduzida de 20cm para 6 cm e as características físicas foram substituídas pelas características do aço.

Este exemplo foi usado para fazer uma comparação entre as três superfícies de escoamento para cascas finas apresentadas no Capítulo VII. Foram realizadas três análises utilizando em cada uma a SIS (Superfície de Ilyushin Simplificada), a SIV (Superfície de Ivanov) e a SIC (Superfície de Ilyushin Completa). Em todas as três análises foi utilizado o elemento LCTS/NLF e a malha 16x16, para um quarto da placa, indicada na figura (XV.24).

As curvas da carga "P" em relação ao deslocamento vertical do ponto central da casca "w_B", correspondentes às três análises, encontram-se na figura (XV.25). As cargas máximas calculadas pelas SIS, SIV E SIC são 2600 KN, 2425 KN e 2263 KN respectivamente . Nas três análises o escoamento iniciou-se no incremento 5 (P = 950 KN).

Não é possível determinar qual das três soluções é a mais correta. No entanto, como são três superfícies de uso corrente em formulações de elementos de casca e desfrutam de confiabilidade, é razoável supor que a média das três soluções seja a solução "correta".

A carga máxima média é 2429.3 KN o que faz com que a carga determinada pela SIV seja a que apresenta o menor desvio em relação à média (0.18%). As cargas determinadas

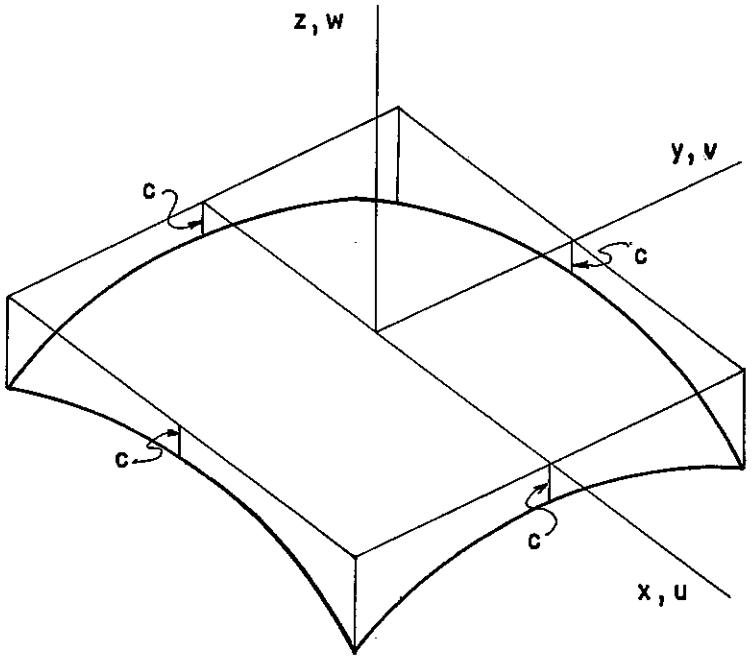


Figura XV.23 - Casca quadrática engastada submetida a carga concentrada vertical.

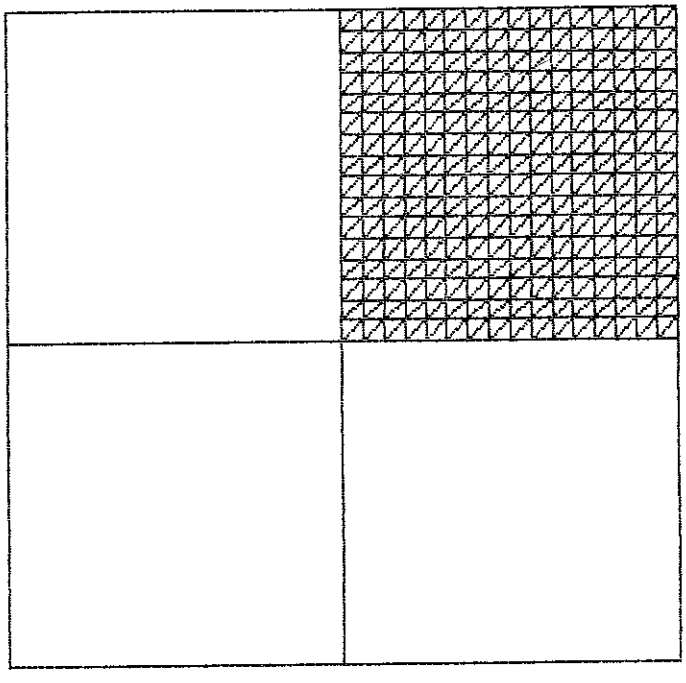


Figura XV.24 - Projeção no plano horizontal da malha 16x16 usada para analisar a casca quadrática

pelas SIS e SIC apresentam desvios de 7% e 6.8%. Estão portanto dentro do limite de variação aceitável.

De acordo com este exemplo a SIV é a melhor superfície de escoamento pois determinou a carga mais correta e apresentou também uma "ductilidade" considerável. Em segundo lugar ficou a SIS que determinou uma carga aceitável e apresentou a "ductilidade" maior. Em terceiro lugar restou a SIC que apesar de ter determinado uma carga aceitável não apresentou uma boa "ductilidade". Entenda-se o termo "ductilidade" como a capacidade que a superfície de escoamento tem de manter a estabilidade numérica da solução, mesmo quando a rigidez da esrutura já se encontra bastante reduzida. Esta propriedade é que permite a formação de um patamar de escoamento bem definido, como os que as curvas da SIS e SIV apresentam na figura (XV.25).

Neste exemplo contribuiu para a estabilidade numérica das soluções, além das superfícies de escoamento, o Método da Tensão Inicial Modificado, que foi o algorítmo para realização de iterações utilizado nas três análises. O Método de Newton-Raphson foi utilizado nas primeiras tentativas porém não funcionou bem e foi abandonado.

Este exemplo foi escolhido para fazer a comparação entre as três superfícies por dois motivos. Em primeiro lugar porque, ao contrário dos exemplos (XV.3.1) e (XV.3.2), é um caso geral em que estão presentes tensões de membrana e de flexão. Em segundo lugar porque, mesmo não sendo um problema dificílimo, apresenta um grau de

dificuldade considerável por causa das tensões nas vizinhanças do ponto de aplicação da carga que variam muito rapidamente.

XV.3.4) Casca Cilíndrica Apoiada em Diafragmas Submetida a Carga de Pêso Próprio.

A casca cilíndrica de Scordelis e Lo (Figura (XV.1)) é também muito utilizada para testar formulações elasto-plásticas de elementos de casca. Dupuis e outros [151] foram os primeiros pesquisadores a realizarem uma análise elasto-plástica desta casca. Daí em diante muitos outros fizeram o mesmo. Owen e Figueiras [70] resolveram o problema utilizando uma malha 2x3 de elementos isoparamétricos de 9 nós e Chueiri [73] utilizou uma malha 4x5 de elementos triangulares planos de 3 nós. Nestas duas análises apenas um quarto da casca foi discretizado.

A análise com o elemento LCTS/NLF foi feita utilizando-se uma malha 14x20 para um quadrante. Para superfície de escoamento especificou-se a Superfície de Ivanov.

As curvas da carga "q" em relação ao deslocamento "w_B" do ponto médio do bordo livre, correspondentes às quatro análises encontram-se no gráfico da figura (XV.26). As cargas máximas determinadas por Owen e Figueiras e por Chueiri são respectivamente 0.289 N/cm e 0.300 N/cm^2, enquanto Dupuis e outros obtiveram um valor de 0.285 N/cm^2.

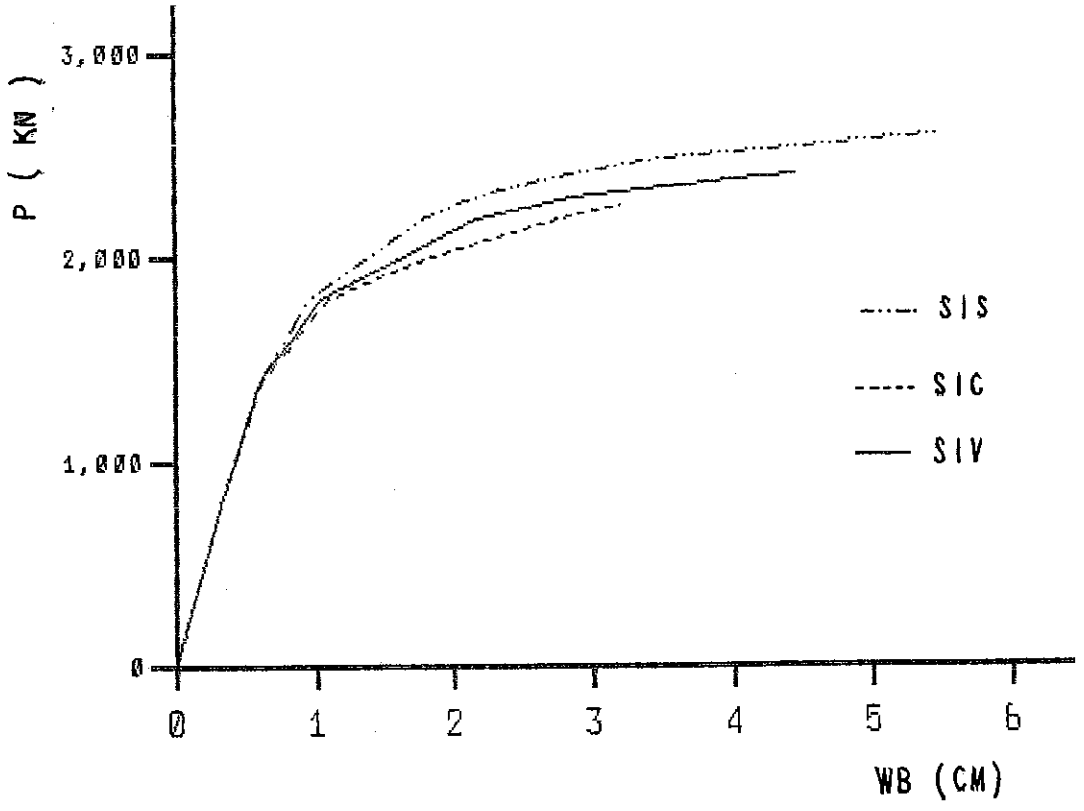


Figura XV.25 - Relação carga-deslocamento para a casca quadrática engastada.

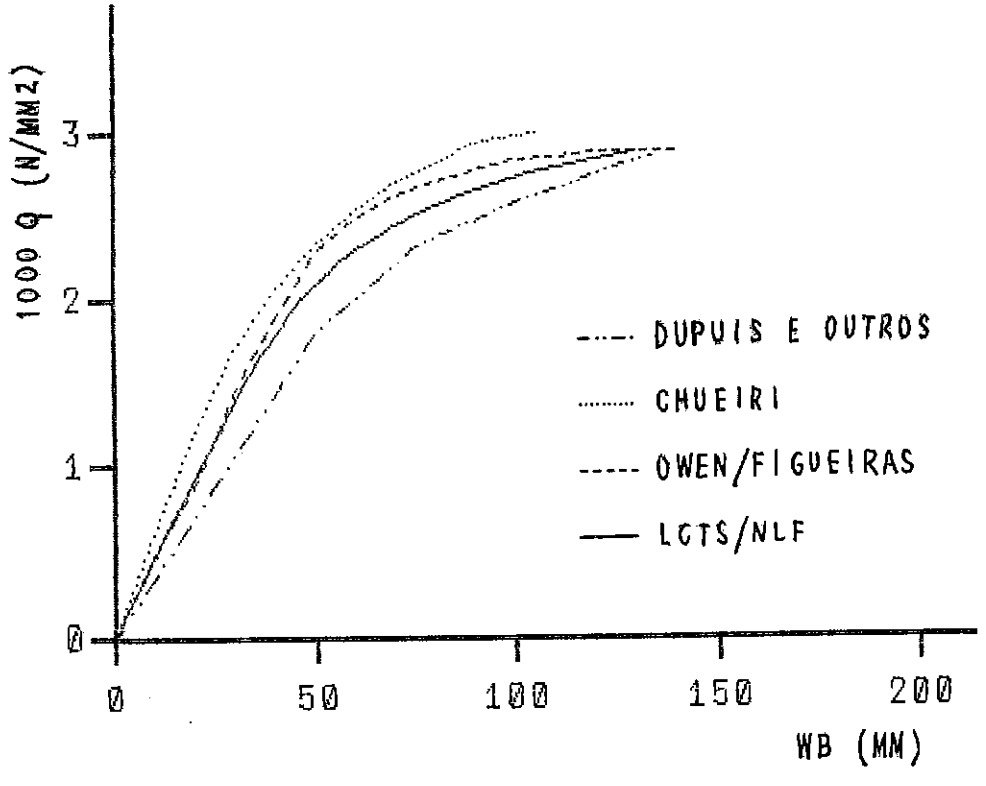


Figura XV.26 - Relação carga-deslocamento para casca de Scordelis e Lo

Na análise com o LCTS/NLF foi determinada uma carga máxima de 0.297 N/cm^2, o que pode ser considerado um resultado muito bom pois está bem próximo dos outros resultados publicados. No gráfico da figura (XV.26) as quatro curvas, apesar de alcançarem cargas máximas muito próximas, correspondem a malhas de rigidez diferente. A malha usada por Chueiri é a mais rígida das quatro. O motivo principal para isto deve ser a falta de refinamento da malha. A diferença de rigidez entre a malha do LCTS/NLF e a malha de Owen e Figueiras aparece apenas a partir de determinado nível de carga e deve ser causada pelas peculiaridades das duas formulações elasto-plásticas. A malha de Dupuis e outros é a mais flexível das quatro, provavelmente por causa da formulação do elemento que é baseada em uma teoria de "shallow shell".

Este exemplo, assim como o exemplo (XV.3.1), foi usado também para fazer uma comparação entre os algorítmos para realização de iteração em problemas elasto-plásticos, apresentados no Capítulo V. Foram realizadas quatro análises utilizando em cada uma o MNR, o MNM, o MTM e o MTI. As análises com o MNR e com o MNM foram interrompidas prematuramente, por falta de convergência, no incremento 14 (q = 0.2125 N/cm^2) e no incremento 9 (q = 0.1625 N/cm^2) respectivamente. As análises com o MTM e com o MTI foram interrompidas, por falta de convergência, no incremento 36 (q = 0.300 N/cm^2) e no incremento 34 (q = 0.294 N/cm^2), respectivamente. Nas quatro análises a carga foi aplicada de acordo com a mesma função-carga (ver Capítulo V).

Na tabela XV.3 encontram-se a quantidade de incrementos "NINC", a quantidade total de iterações "NITE", o tempo total de CPU "TTOT", o tempo de CPU por incremento "TINC" e o tempo de CPU por iteração "TITE" correspondentes às análises com o MTM e MTI. As análises com o MNR e o MNM não foram incluídas porque não chegaram a ser concluídas. Os tempos "TTOT", "TINC" e "TITE" foram divididos por um tempo básico "TB" para serem apresentados numa forma adimensional.

O MTM teve um desempenho computacional melhor que o MTI. O seu tempo total de CPU foi 71.3% do tempo do MTI. O tempo do MTI por iteração é menor que o do MTM. Porém o MTM conseguiu ter um tempo total menor que o do MTI, porque fez uma média de 22.6 iterações por incremento enquanto o MTI fez uma média de 48.4 iterações.

XV.3.5) Viga Engastada de Seção I com Carga Concentrada na Extremidade Livre.

As características físicas e geométricas da viga da figura (XV.27) são as seguintes:

$E = 20683\ KN/cm^2$ $\qquad$ $A = 1.871\ cm^2$

$\sigma_o = 20.683\ KN/cm^2$ $\qquad$ $I_z = 2.341\ cm$

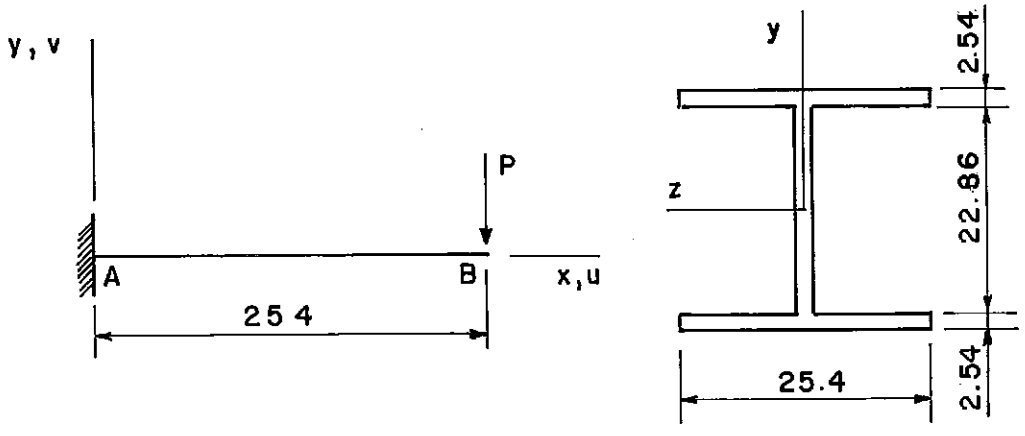
$\nu = 0.3$ $\qquad$ $S_z = 1.676\ cm^3$

$M_e = 34.665\ KN.\ cm$ $\qquad$ $Z_z = 1.963\ cm^3$

$M_p = 40.601\ KN.\ cm$

Tabela XV.3

Algoritmo	NINC	NITE	TTOT / TB	TINC / TB	TITE / TB
MTM	36	815	819.8	22.8	1.00
MTI	34	1644	1149.0	33.8	0.700



Unidade: mm

Figura XV.27 - Viga engastada de seção I submetida a carga concentrada na extremidades.

Esta viga foi analisada anteriormente por Bathe e Wiener [111] usando duas malhas diferentes. No Modelo 4 a viga foi discretizada por 3 camadas de 3 elementos isoparametricos de pórtico de 4 nós do programa ADINA. No Modelo 5 a viga foi discretizada por 3 camadas de 3 elementos isoparametricos de casca de 9 nós do programa ADINA.

No presente trabalho também foram utilizadas duas malhas diferentes. No Modelo 1 a viga foi discretizada por 3 camadas de 40 elementos CLCB/NLF, correspondendo as camadas inferior e superior às duas mesas da seção I e a camada intermediária correspondendo a alma. No Modelo 2, cuja malha encontra-se indicada na figura (XV.28), as mesas da viga foram discretizadas cada uma por uma malha 20x2 de elementos LCTS/NLF. Para os elementos LCTS/NLF foi especificada a superfície de escoamento de Ilyushin Simplificada.

De acordo com a Teoria Plástica de Vigas [29] uma viga engastada esgota sua capacidade de carga quando o momento no engaste atinge o valor de plastificação "M_p". Portanto a carga máxima "P_u" da viga da figura (XV.27), prevista por esta teoria, tem o valor de 1.598 KN.

Nas análises com o modelo 1 (elemento CLCB/NLF) e com o Modelo 4 (elemento isoparametrico de pórtico do ADINA) as cargas máximas obtidas foram 1.512 KN e 1.647 KN respectivamente.

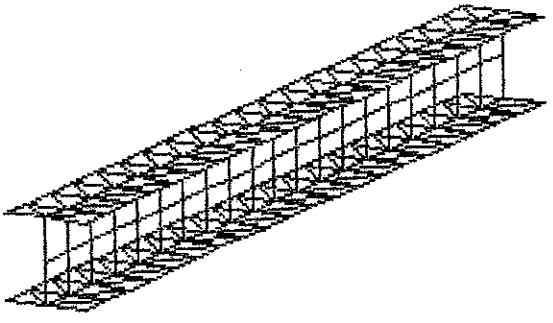


Figura XV.28 - Modelo 2 utilizado para discretizar a viga engastada de seção I.

Na figura (XV.29) encontram-se as curvas da carga em relação ao deslocamento da extremidade livre da viga correspondentes às análises com o Modelo 2 (elementos CLCB/NLF e LCTS/NLF) e com o modelo 5 (elemento isoparamétrico de casca do ADINA). A reta horizontal nesta figura corresponde a carga máxima "P " determinada pela Teoria Plástica de Vigas. As cargas máximas determinadas pelos Modelos 2 e 5 foram 1.662 KN e 1.830 KN respectivamente.

As análises com os Modelos 1 e 2 obtiveram cargas um pouco abaixo (Modelo 1) e um pouco acima (Modelo 2) da carga "P_u". O resultado do Modelo 4 também foi próximo de "P_u", porém a carga correspondente ao Modelo 5 foi 14.5% maior que a carga "P ". Isto deve ter ocorrido porque a malha do Modelo 5 não estava suficientemente refinada. Este resultado confirma o que já havia sido comentado no item (XV.3.1) a respeito da utilização de elementos de casca para representar o comportamento de vigas fletidas. Como o elemento está sendo utilizado para resolver um problema fora da sua especialidade o grau de dificuldade é alto e exige, em geral, a utilização de malhas refinadas.

A vinculação dos nós da alma aos nós da mesa nos Modelos 1 e 2 foi feita de duas maneiras diferentes. No Modelo 1 apenas os nós da alma foram especificados explicitamente. A posição dos elementos situados nas duas mesas foi definida através dos nós da alma e da declaração de excentricidade (ver itens (VIII.2) e (IX.2)). No Modelo 2 foram declarados todos os nós das mesas e da alma e a

ligação entre eles foi feita através de elementos de pórtico CLCB/NLF com rigidez elevada. Isto equivale a utilização de restrições generalizados (ver item (VIII.2)).

XV.4) Análises Não-Lineares Físicas e Geométricas.

XV.4.1) Placa Retangular Simplesmente Apoiada Submetida a Compressão.

A placa da figura (XV.30) tem as translações "w" impedidas e as translações "v" livres nos quatro lados. As translações "u" são livres nos dois lados paralelos ao eixo "x" e o esforço de compressão é aplicado através de translações "u" prescritas nos dois lados paralelos ao eixo "y". A placa tem uma imperfeição inicial que é dada por

$$w = w_o \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

Sendo w_o igual a 0.001 b e as constantes a e b iguais as dimensões dos lados (ver Figura (XV.30)).

Esta placa foi analisada anteriormente por Nygard [104] utilizando uma malha 4x4 de elementos triangulares planos de casca para um quarto da placa. Javaherian e Dowling [152] resolveram este mesmo problema utilizando um elemento "semiloof" de casca e uma malha 4x4 para um quarto da placa.

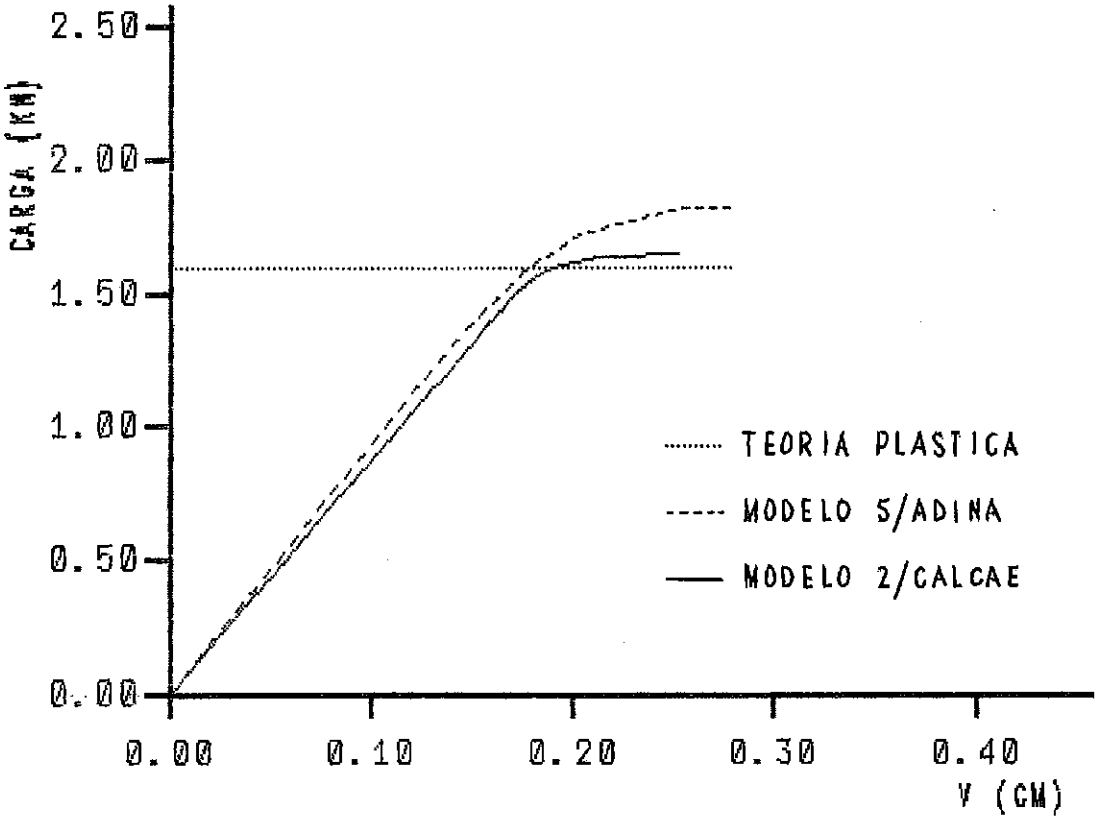


Figura XV.29 - Relação carga-deslocamento para a viga engastada de seção I.

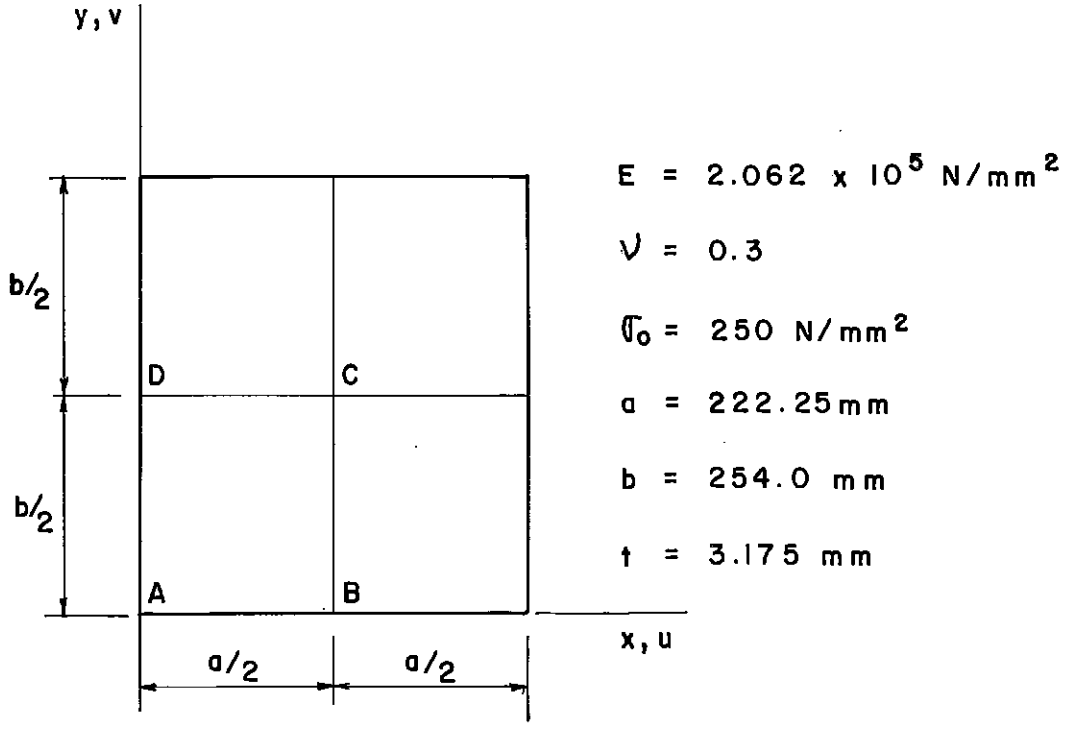


Figura XV.30 - Placa retangular apoiada submetida a compressão.

A análise com o elemento LCTS/NLF foi feita utilizando-se a malha 7x8 para um quarto da placa, indicada na figura (XV.31). Para superfície de escoamento especificou-se a superfície de Ivanov.

As curvas da reação total resultante no bordo carregado em função do deslocamento "w_c", correspondentes às três análises encontram-se no gráfico da figura (XV.32). As reações máximas determinadas por Nygard e por Javaherian e Dowling são 116.9 KN e 112.7 KN respectivamente.

Na análise com o LCTS/NFG foi determinada uma reação total máxima de 114.2 KN que está bem próxima das reações determinadas nas duas análises anteriores. As três curvas são praticamente idênticas no trecho pré-flambagem. No trecho pós-flambagem há uma diferenciação, com a curva de Javaherian e Dowling se afastando das outras e terminando antes. As curvas do LCTS/NFG e de Nygard se distanciam um pouco logo após a flambagem e depois voltam a se aproximar interrompendo-se no mesmo ponto.

XV.4.2) Casca Cilindrica Apoiada em Diafragmas Submetida a Carga de Pêso Próprio.

A casca cilíndrica de Scordelis e Lo (Figura (XV.1)), que já foi analisada nos itens (XV.1.1) e (XV.3.4) para determinação dos comportamentos linear e não-linear físico, pode ser analisada também considerando-se as não-linearidades física e geométrica. Parisch [100] fez este

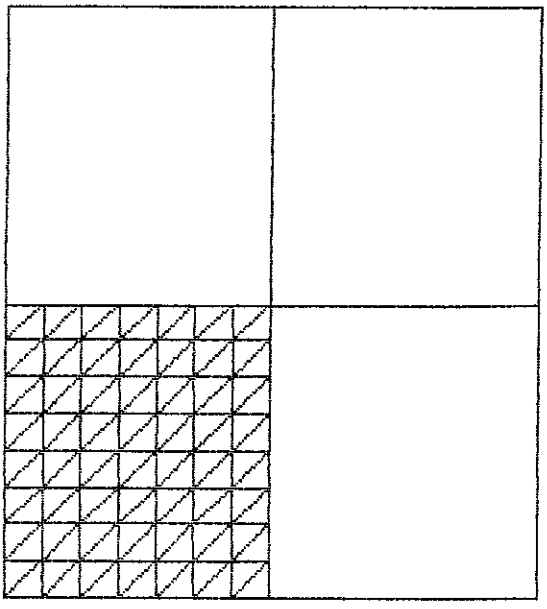


Figura XV.31 - Placa retangular apoiada discretizada por malha 7 x 8.

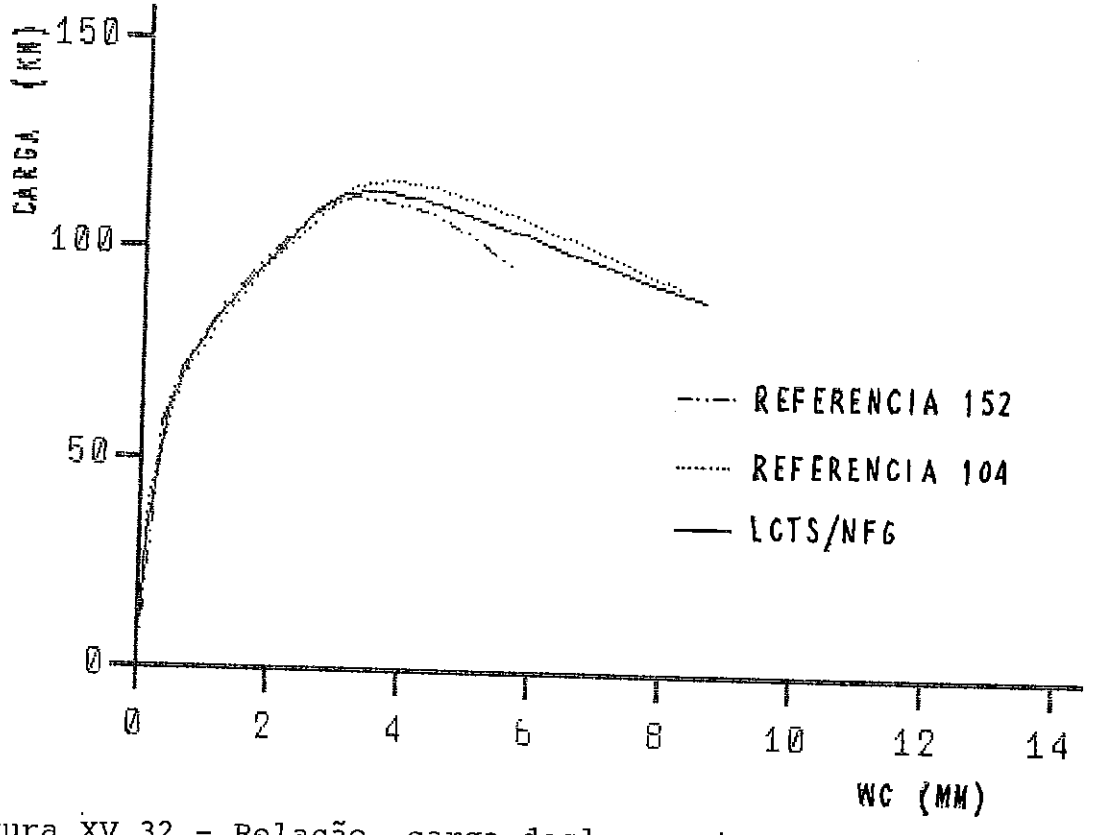


Figura XV.32 - Relação carga-deslocamento para a placa retangular apoiada.

tipo de análise usando um elemento isoparamétrico de 4 nós e uma malha 4x4 para um quadrante. Krakeland [51, 153] resolveu este problema usando um elemento isoparamétrico de 8 nós e uma malha 4x4 para um quadrante. Mais recentemente Nygard [104] analisou esta casca usando um elemento triangular plano e uma malha 16x16 para um quadrante.

A análise com o elemento LCTS/NFG foi feita utilizando-se uma malha 14x20 para um quadrante. Para superfície de escoamento especificou-se a superfície de Ivanov.

As curvas da carga "q" em relação ao deslocamento "w_B" correspondentes às análises de Nygard e do LCTS/NFG encontram-se no gráfico da figura (XV.33). Para efeito de comparação, foi incluída também a curva do LCTS/NLF. As curvas das outras duas análises não foram desenhadas porque são praticamente coincidentes com as de Nygard e do LCTS/NFG e terminam antes.

As cargas máximas alcançadas por Nygard, Parisch e Krakeland são 0.400, 0.300 e 0.315 N/cm² respectivamente. Na análise com o LCTS/NFG foi determinada uma carga máxima de 0.391 N/cm² que é bastante próxima da de Nygard. Além disso a curva do LCTS/NFG e a publicada por Nygard são muito próximas não havendo para efeito prático diferença entre as duas.

A comparação da curva do LCTS/NFG com curva do LCTS/NLF, na figura (XV.33) mostra que a consideração da

não-linearidade geométrica permitiu aplicar cargas maiores na casca cilíndrica de Scordelis e Lo.

Este efeito pode, de uma certa forma, ser entendido observando-se na figura (XV.34) a configuração deformada da casca, correspondente à carga de 0.389 N/cm^2. O bordo lateral livre desceu bastante, porém a linha central subiu provocando uma ovalização variável da superfície da casca. Esta ovalização é máxima na seção transversal do meio do vão e diminui a medida em que se aproxima do apoio. Este tipo de deformação, que aparece deste início do processo de carregamento, faz com que as tensões de membrana que surgem na casca provoquem enrijecimento em vez de instabilidade.

XV.4.3) Painel Enrijecido DRES

O painel enrijecido da figura (XV.35) foi construído pelo DRES ("Defense Research Establishment in Suffield") do Canadá para ser submetido a um teste com carga de explosão. Esta estrutura foi analisada recentemente por Abayakoon [110] e por Abayakoon e outros [154] usando o Método da Faixa Finita ("Finite Strip Method").

Neste painel as translações e as rotações são restringidas nos quatro lados e a carga distribuída uniforme é aplicada perpendicularmente ao plano da placa.

Após realizar uma análise do painel inteiro Abayakoon [110] concluiu que seria possível representar o seu

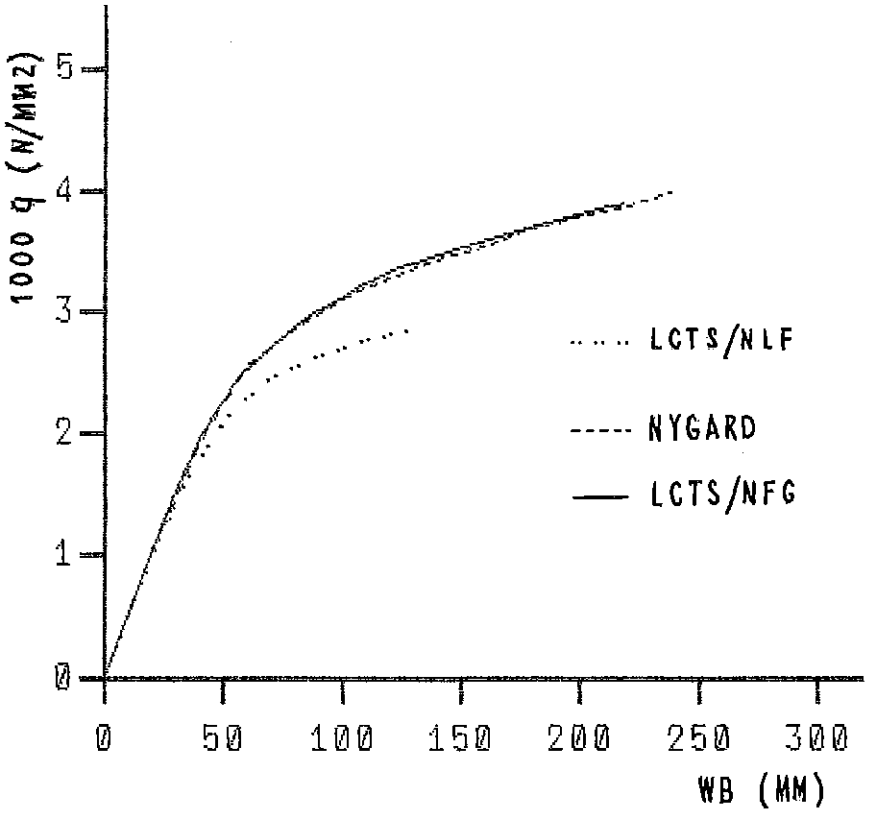


Figura XV.33 - Relação carga-deslocamento para a casca de Scordelis e Lo.

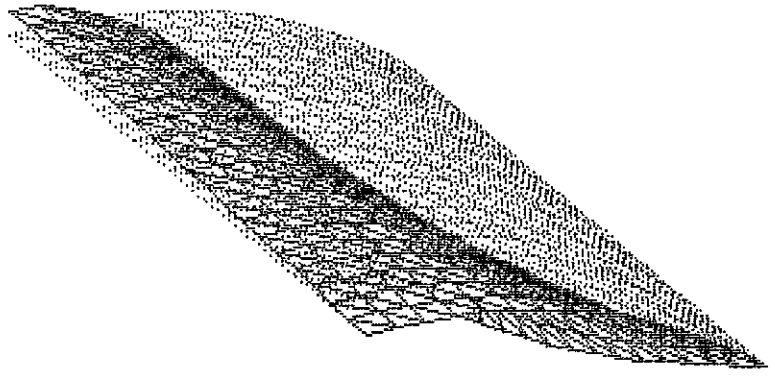
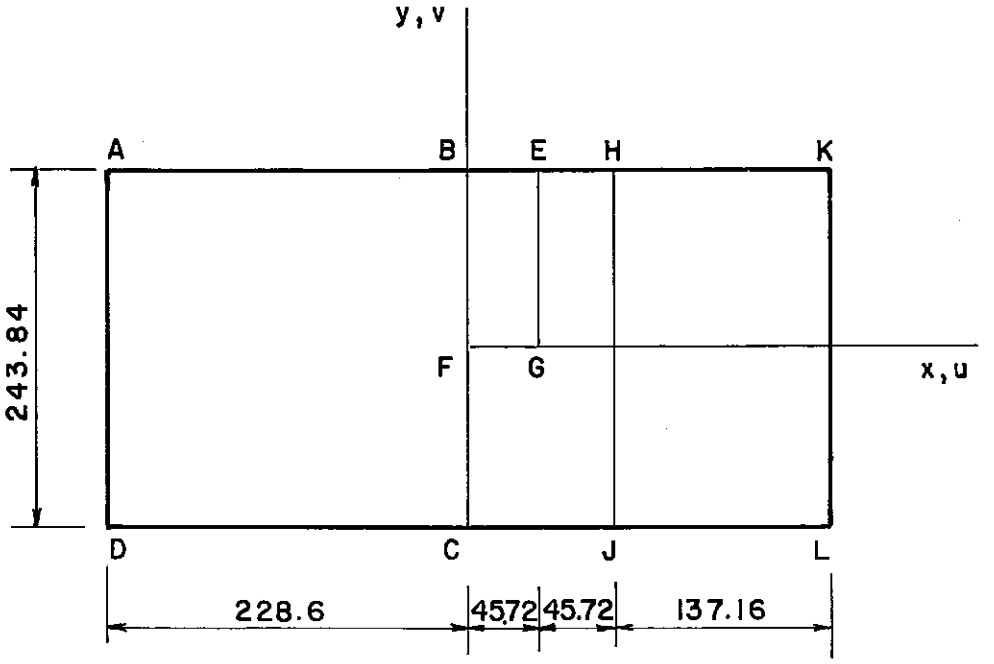
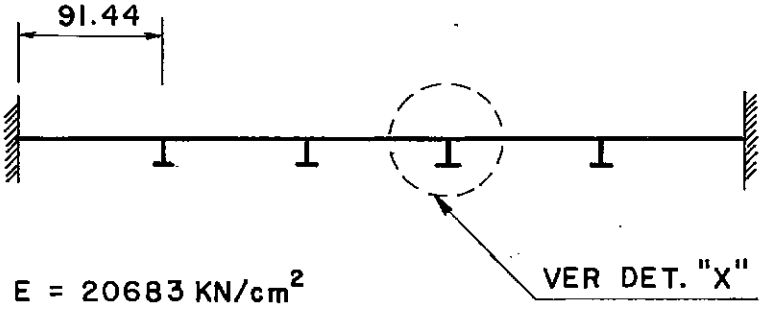


Figura XV.34 - Configuração deformada da casca de Scordelis e Lo correspondente a carga q = 0.389 N/cm.

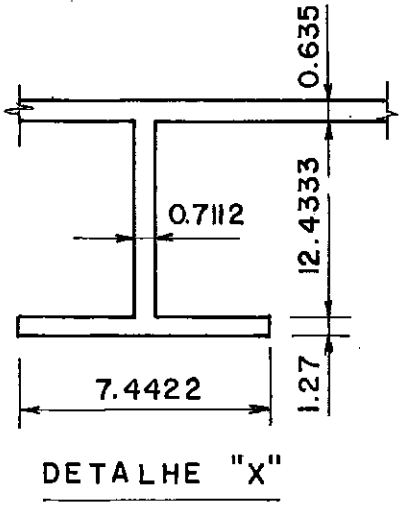




$E = 20683\ KN/cm^2$

$\nu = 0.3$

$\sigma_0 = 31\ KN/cm^2$



DETALHE "X"

Figura XV.35 - Painel enrijecido DRES.

comportamento considerando-se apenas a área BCJH (ver Figura (XV.35) com a translação "u" e a rotação "ry" restringidas nos lados BC e HJ.

Na análise da área BCJH, Abayakoon e outros usaram 8 faixas finitas paralelas ao eixo "y" para discretizar a placa. A alma do enrijecedor, situado no centro da área BCJH, foi discretizada com 1 faixa finita e a mesa com 2 faixas. No total portanto foram utilizadas 11 faixas finitas.

Tomando-se como correta a conclusão de Abayakoon de que apenas a área BCJH precisa ser analisada, pode-se reduzir mais ainda a área de análise considerando apenas o retângulo BFIH com as translações "v" e as rotações "rx" restringidas no lado FI. Isto pode ser feito porque a estrutura e o carregamento são simétricos em relação ao eixo "x".

No presente trabalho foram utilizadas duas malhas diferentes para analisar a área BFIH. No Modelo 1 a placa foi discretizada com uma malha 8x10 de elementos LCTS/NFG, a alma do enrijecedor com 1 camada de 10 elementos CLCB/NFG e a mesa do enrijecedor com 10 elementos CLCB/NFG. No Modelo 2 a placa foi discretizada com uma malha 16x20 de elementos LCTS/NFG, a alma do enrijecedor com 1 camada de 20 elementos CLCB/NFG e a mesa do enrijecedor com 20 elementos CLCB/NFG. Nos dois modelos foi especificada a superfície de escoamento de Ivanov para os elementos LCTS/NFG e os nós dos elementos CLCB/NFG não foram

declarados explicitamente. A posição deses elementos foi definida através dos nós da placa e da declaração de excentricidade nodal (ver itens (VIII.2) e (IX.2)).

Para melhorar o desempenho do Modelo 2 a malha de elementos de casca, em vez de ser regular como no Modelo 1, tem um espaçamento variável. Conforme encontra-se indicado na figura (XV.36) o espaçamento se reduz a medida em que se aproxima do apoio (lado BH) e da posição do enrijecedor (linha EG).

Na figura (XV.37) encontram-se as configurações deformadas da linha situada sobre o eixo "x" (lado FI), determinadas com o Modelo 2, para as cargas de 10.34, 18.27, 24.99 e 31.71 N/cm^2. Na primeira configuração de cima para baixo, correspondente ao incremento 24, os pontos centrais próximos ao enrijecedor se deslocam bem menos que os pontos laterais. Isto ocorre porque neste nível de carga a rigidez do enrijecedor ainda é alta, apesar do escoamento plástico que se iniciou na seção próxima ao apoio. Nas outras configurações, correspondentes aos incrementos 48, 72 e 112, a diferença entre os deslocamentos totais dos vários pontos da seção diminui, evidenciando que a rigidez do enrijecedor se reduz rapidamente a medida em que a carga vai sendo aplicada.

Na figura (XV.38) encontra-se uma perspectiva da configuração deformada no incremento 24 ($q = 10.34$ N/cm^2) determinada com o Modelo 2. Neste desenho pode-se notar bem destacada a linha central correspondente ao

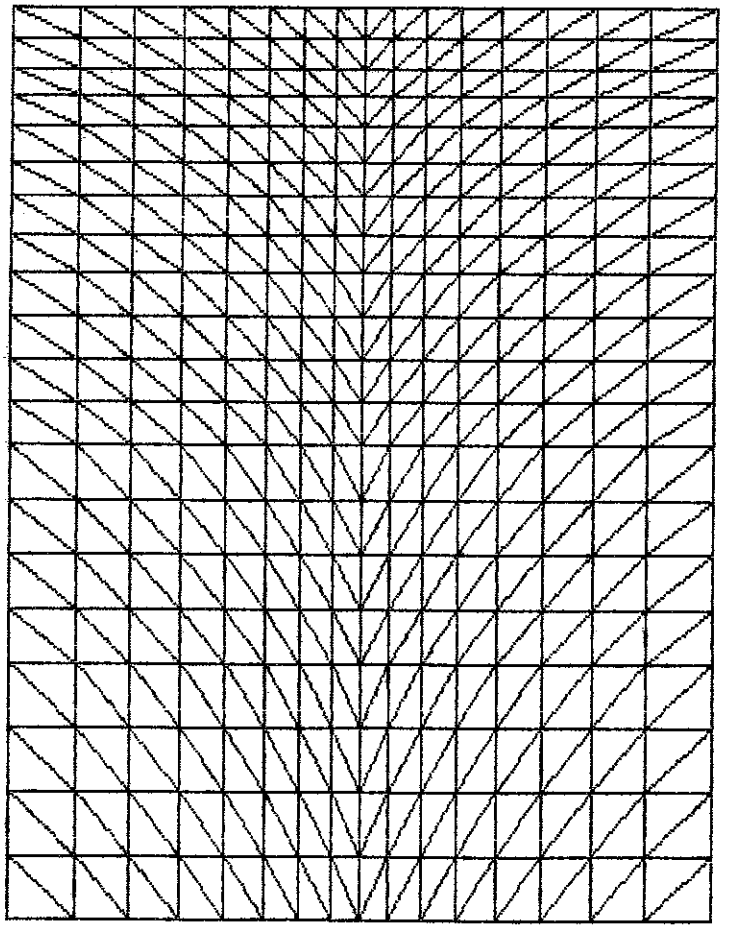


Figura XV.36 - Painel enrijecido DRES discretizado pelo Modelo 2.

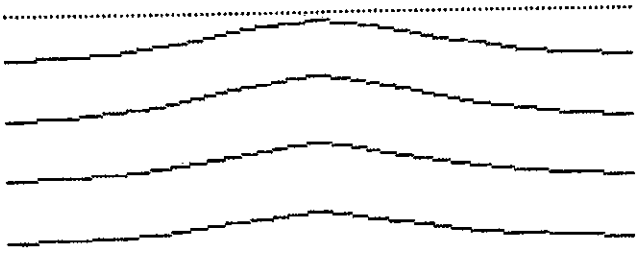


Figura XV.37 - Configuração deformada do lado FI do painel enrijecido DRES correspondente a vários níveis de carga.

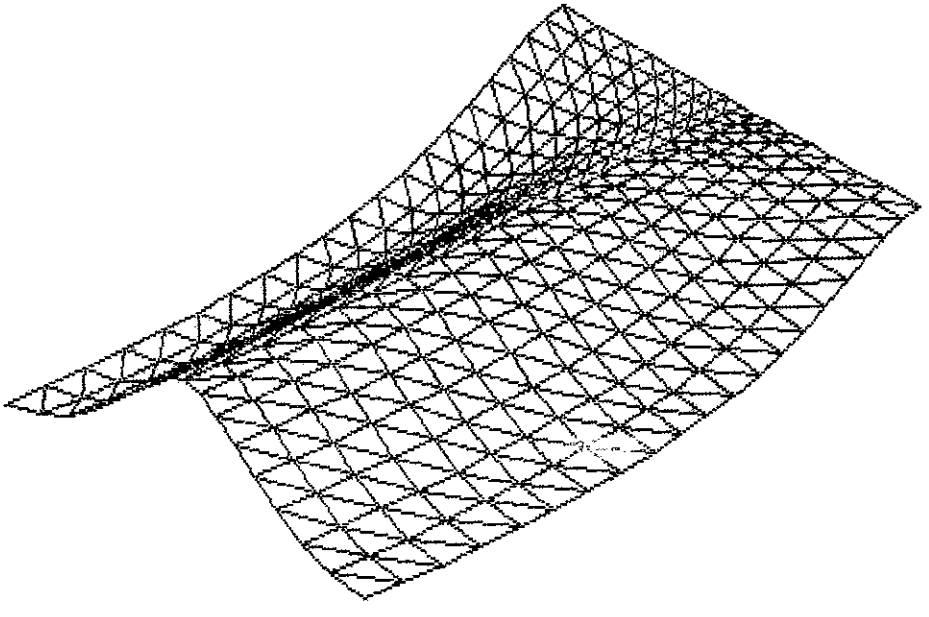


Figura XV.38 - Configuração deformada do painel enrijecido DRES (Modelo 2) correspondente a carga de 10.34 N/cm^2.

enrijecedor onde os deslocamentos "w" ainda são muito pequenos.

Na figura (XV.39) encontram-se as curvas da carga em relação ao deslocamento do ponto G "w_G" (ver Figura XV.35) determinadas por Abayakoon e outros e pelos Modelos 1 e 2. A carga máxima obtida por Abayakoon e outros foi de 34.47 N/cm^2 enquanto os Modelos 1 e 2 forneceram 34.47 e 31.71 N/cm^2.

Do ponto de vista das cargas máximas a diferença entre os resultados das três análises é pequena. Porém do ponto de vista de deformação a diferença entre a análise de Abayakoon e outros e as análises feitas com os Modelos 1 e 2 é muito grande.

No gráfico da figura (XV.40), em que se encontram as curvas da carga em relação ao deslocamento do ponto F "w_F" (ver figura XV.35), esta diferença é um pouco menor, porém continua sendo considerável.

Pelo que está relatado nas referências [110] e [154] esta diferença é em grande parte causada por limitações do modelo de faixas finitas, que utiliza na direção do eixo do enrijecedor funções trigonométricas para representar a configuração deformada. Estas funções não conseguem, segundo estes autores, representar com precisão a deformação de barras fletidas quando há formação de rótulas plásticas. Nas referências [110] e [154] foi apresentada uma análise elasto-plástica de uma viga bi-engastada de

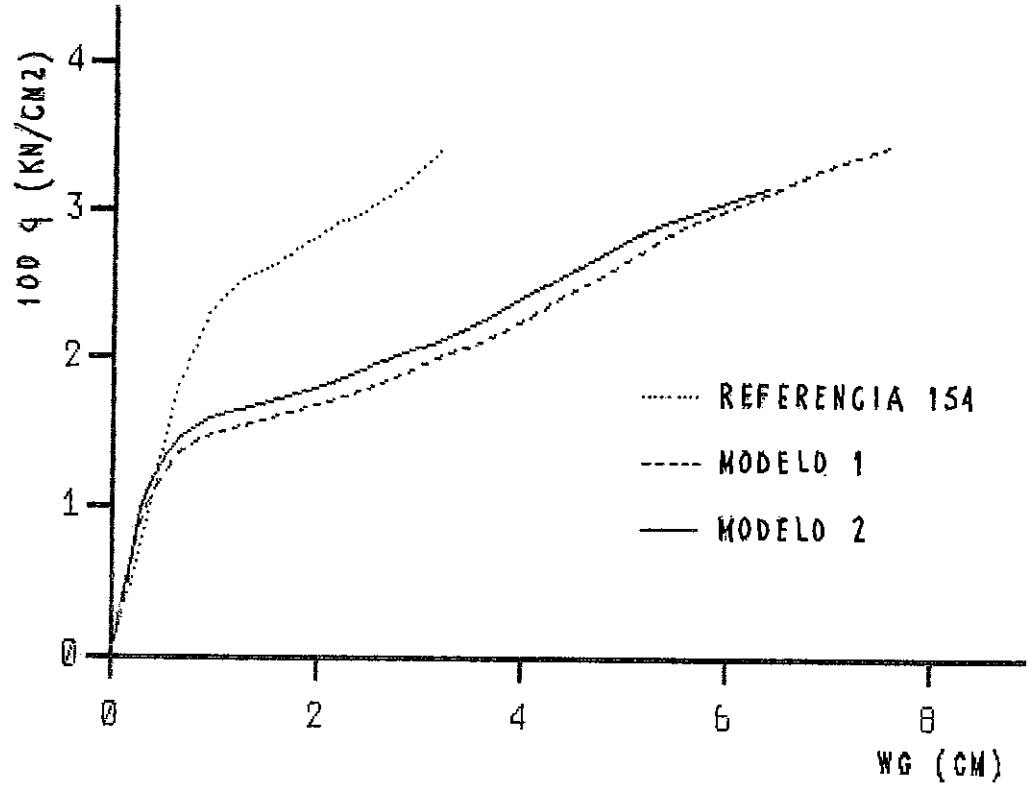


Figura XV.39 - Variação da carga com o deslocamento w_G do painel enrijecido DRES.

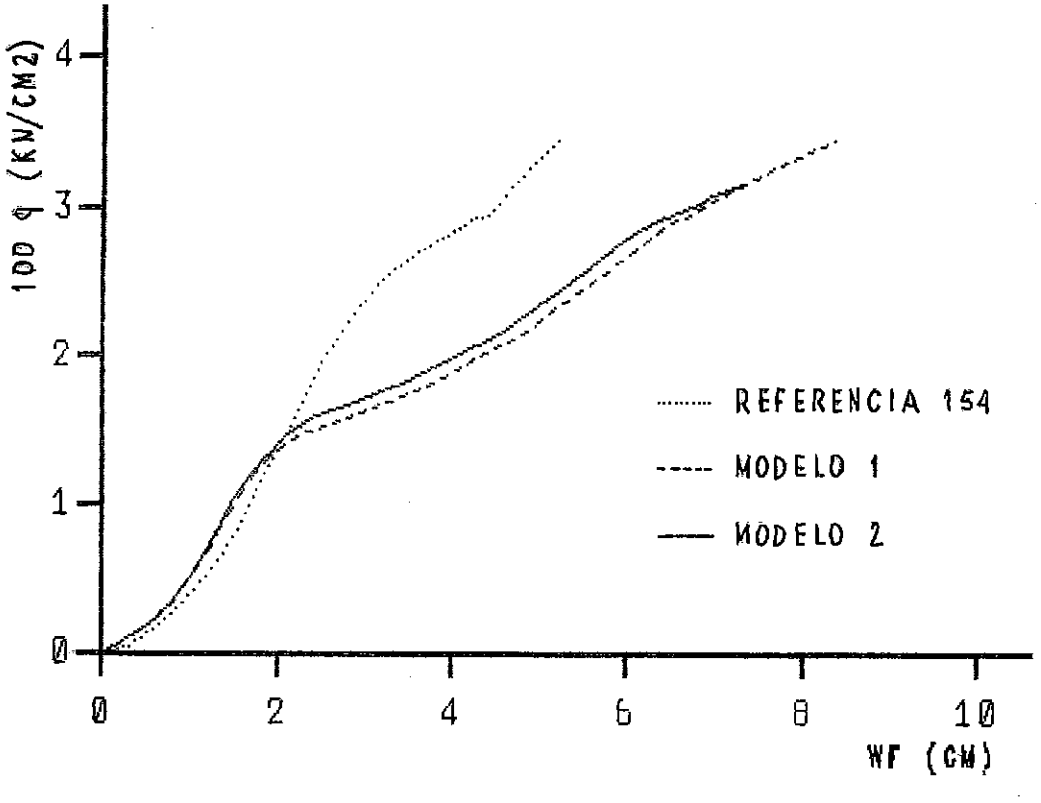


Figura XV.40 - Variação da carga com o deslocamento w_F do painel enrijecido DRES.

seção I em que a carga de colapso obtida com o método da faixa finita é bem maior que a carga calculada pela Teoria Plástica de Vigas e pelo FENTAB, um programa de elementos finitos.

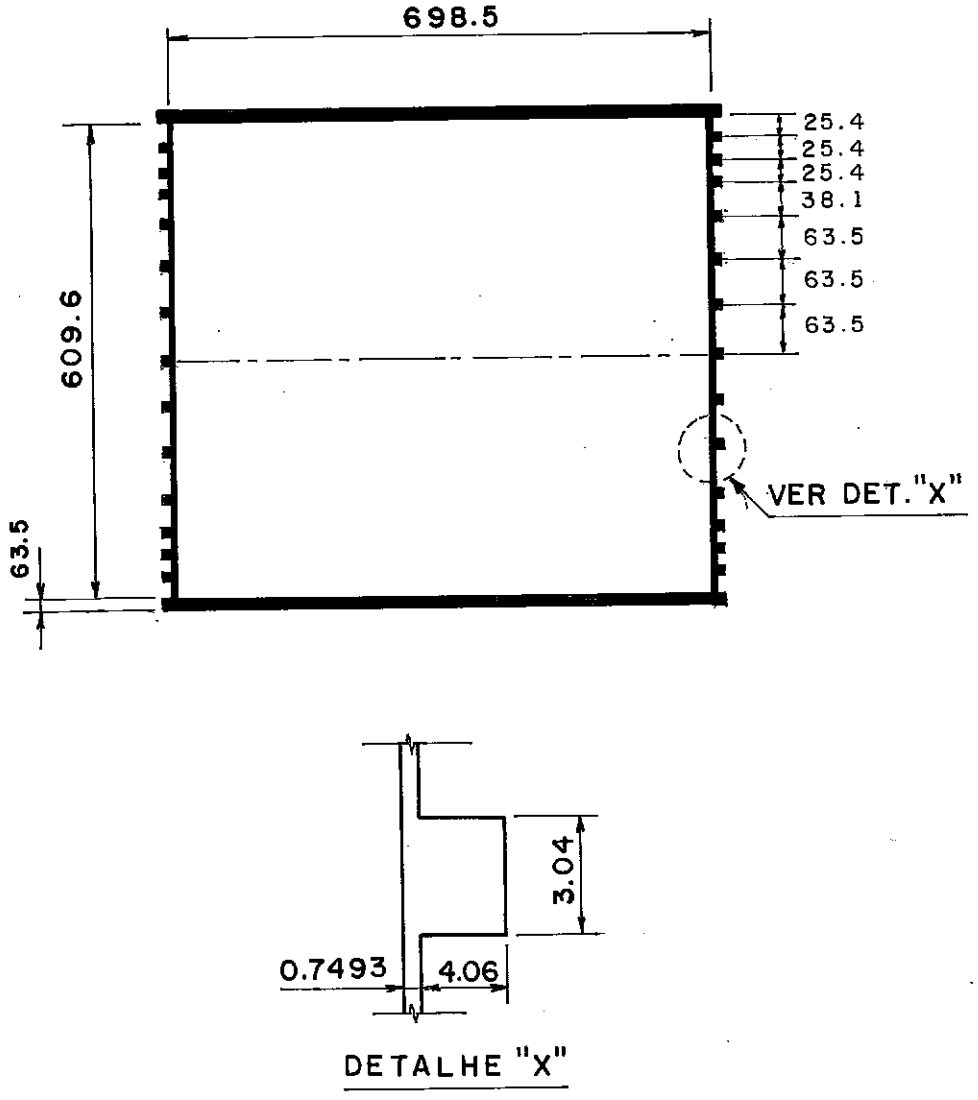
O painel enrijecido DRES tem um comportamento estrutural muito interessante. No início do processo de carregamento, até aproximadamente a carga de 13.79 N/cm^2, a sua rigidez é alta e depende muito do enrijecedor.

A partir desta carga, como a rigidez do enrijecedor passa a diminuir rapidamente por causa da plastificação, a rigidez global do painel, se reduz também, porém as tensões de membrana na placa provocam um enrijecimento que evita o colapso prematuro do conjunto.

XV.4.4) Cilindro Enrijecido LANL

O cilindro enrijecido da figura (XV.41) fez parte de um lote de seis cilindros ensaiados pelo LANL ("Los Alamos National Laboratory") nos Estados Unidos da América. Os resultados destes ensaios experimentais foram relatados resumidamente na referência [155]. Também fez parte deste projeto, a realização de análises numéricas descritas na referência [33] utilizando os programas BOSOR5 E STAGSC-1.

No espécime 2, que foi analisado no presente trabalho, a carga de compressão foi aplicada no centro de uma das placas rígidas da extremidade (ver Figura (XV.41)).



Unidade: mm

Figura XV.41 - Cilindro enrijecido LANL.

Seguindo o mesmo procedimento adotado na referência [33], apenas uma faixa estreita longitudinal do cilindro correspondente a metade da altura foi discretizada, conforme encontra-se indicado na figura (XV.42). Como a configuração de colapso é axialmente simétrica e simétrica em relação ao plano horizontal que corta o cilindro a meia altura, esta consideração não introduz nenhuma imprecisão nos resultados da análise. Nos bordos laterais e inferior desta faixa estreita foram impostas condições de contorno adequadas à consideração de simetria.

A parede do cilindro foi discretizada por uma malha 2x24 de elementos LCTS/NFG. Para superfície de escoamento escolheu-se a superfície de Ivanov. Os anéis enrijecedores foram discretizados cada um por 2 elementos de pórtico CLCB/NFG. A placa rígida da extremidade foi discretizada por 68 elementos de pórtico, dispostos em forma de grelha. O ângulo formado pelos bordos da faixa estreita correspondente à placa rígida é de 4.2857 graus.

As características físicas do cilindro são as seguintes:

- placas rígidas das extremidades

$E = 179\ 000\ N/mm^2$

$\nu = 0.3$

- casca cilíndrica

$E = 179\ 000\ N/mm^2$

$\nu = 0.3$

$\sigma_o = 137.7\ N/mm^2$

- anéis enrijecedores

$E = 200\ 000\ N/mm^2$

$\nu = 0.3$

$\sigma_o = 350\ N/mm^2$

A relação tensão-deformação para o material da parede do cilindro determinada em ensaio encontra-se na figura (XV.43), juntamente com a curva adotada nas análises do presente trabalho.

O cilindro foi analisado com e sem imperfeição geométrica (ver Figura (XV.44)). A imperfeição, escolhida arbitrariamente, é definida através da seguinte equação:

$$R = \left(R_o - \frac{t}{30}\right) + a \left| \operatorname{sen} \theta \right|$$

$$\theta = \frac{\pi z}{b}$$

Onde

$R_o = 349.25$ mm

$t = 0.7493$ mm

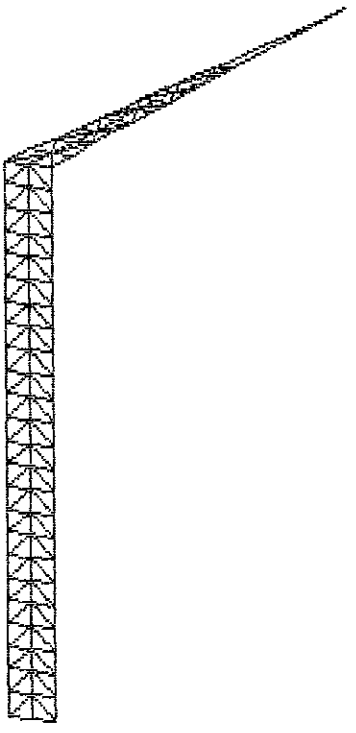


Figura XV.42 - Faixa estreita longitudinal do cilindro enrijecido LANL discretizada por malha 2 x 24.

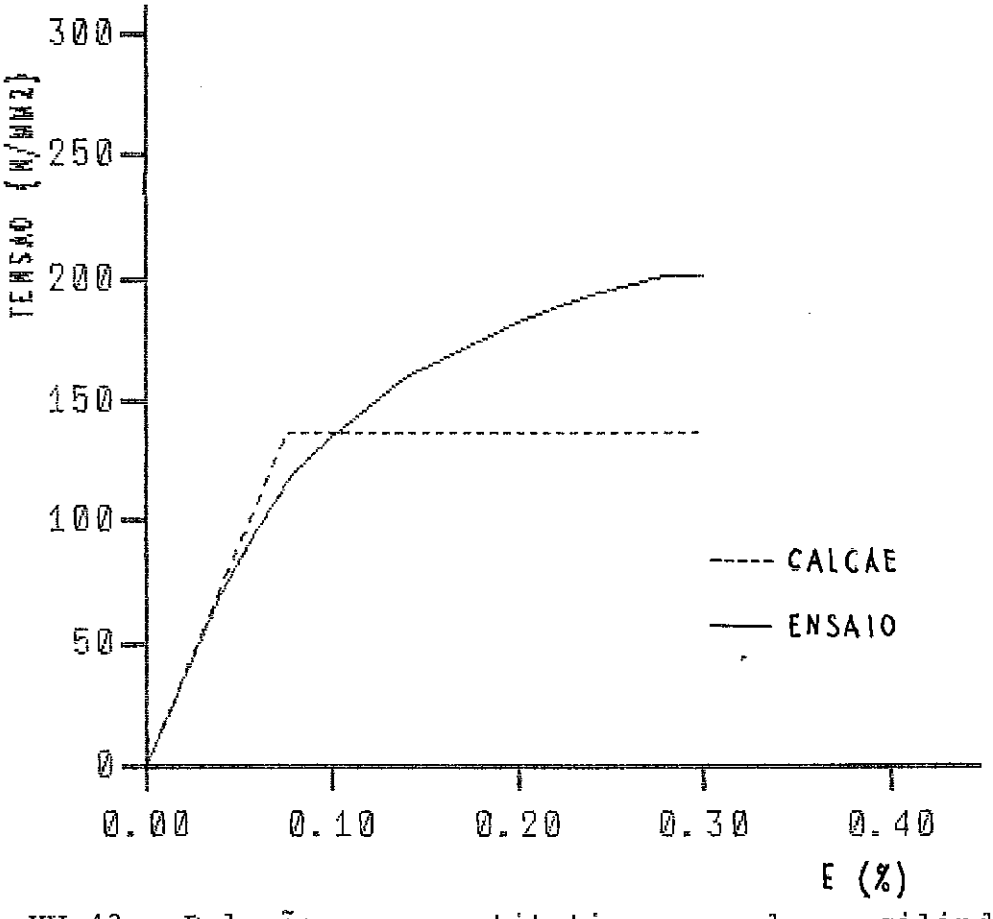


Figura XV.43 - Relações constitutivas do cilindro enrijecido LANL.

$$a = \begin{cases} \dfrac{t}{10} & \text{p/} \quad z \leq 190.5 \text{ mm} \\ \dfrac{t}{30} & \text{p/} \quad z > 190.5 \text{ mm} \end{cases}$$

$$b = \begin{cases} 63.5 & \text{p/} \quad z \leq 190.5 \text{ mm} \\ 228.6 & \text{p/} \quad z > 190.5 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\bar{z} = \begin{cases} z & \text{p/} \quad z \leq 190.5 \text{ mm} \\ z - 190.5 & \text{p/} \quad z > 190.5 \text{ mm} \end{cases}$$

O esforço de compressão foi aplicado através de deslocamento prescrito no centro da placa rígida.

As análises com os programas BOSOR5 e STAGSC-1 determinaram para o cilindro perfeito as cargas máximas de 98.8 N/mm e 100.2 N/mm respectivamente. A carga máxima obtida pelo ensaio experimental foi de 94.45 N/mm.

Na figura (XV.45) encontram-se as curvas da carga por unidade de comprimento da parede do cilindro em relação ao deslocamento axial da parede no bordo superior "w_i" (i = 1,2), para as análises do cilindro perfeito e imperfeito. Na mesma figura encontram-se também as curvas correspondentes ao deslocamento radial máximo no cilindro perfeito "u_1" e ao deslocamento radial máximo no cilindro imperfeito "u_2".

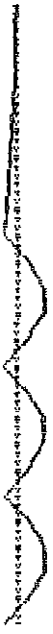


Figura XV.44 - Imperfeição geométrica considerada na parede do cilindro enrijecido LANL.

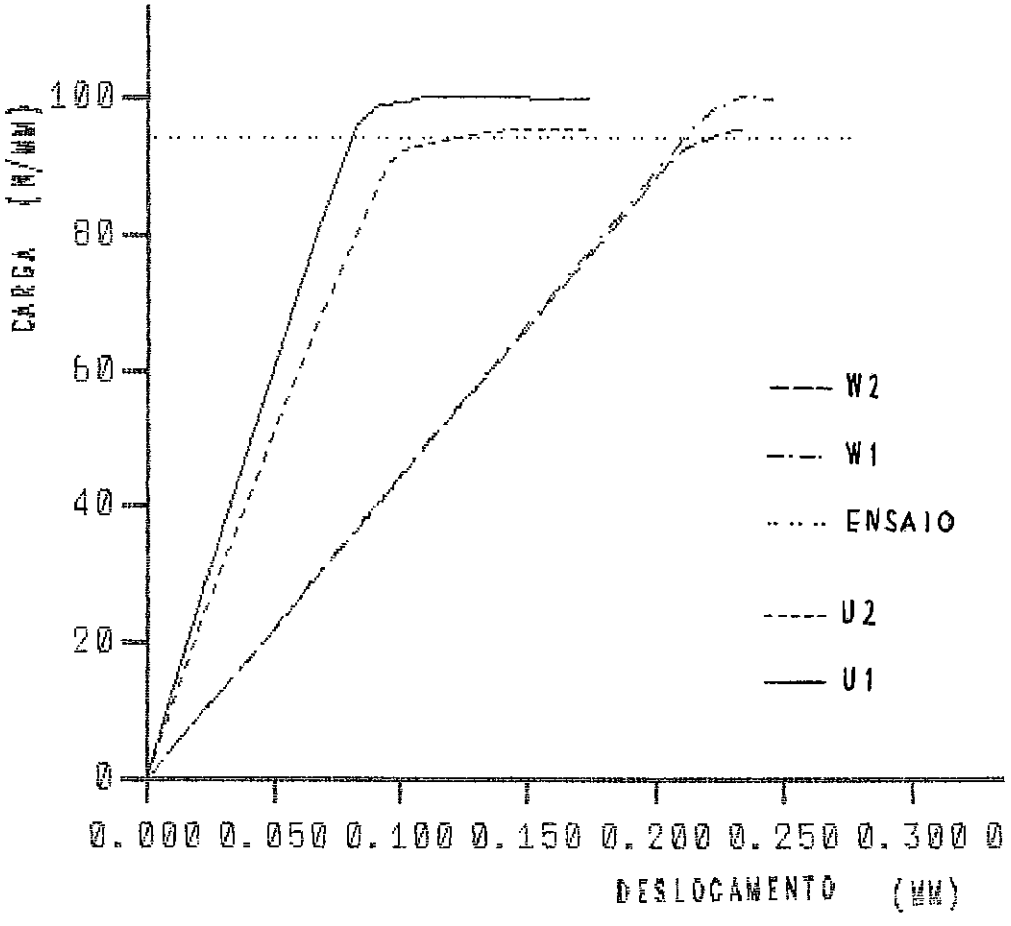


Figura XV.45 - Relação carga-deslocamento para o cilindro enrijecido LANL.

As cargas máximas para o cilindro perfeito e imperfeito foram 100.44 N/mm e 95.64 N/mm respectivamente. Estes valores estão bastante próximos dos obtidos pelo BOSOR5 e pelo STAGSC-1 e no ensaio experimental.

Nas figuras (XV.46) e (XV.48) encontram-se os perfis das configurações deformadas correspondentes às cargas máximas dos cilindros perfeito e imperfeito. Nas figuras (XV.47) e (XV.49) encontram-se as perspectivas destas mesmas configurações. O aspecto destas configurações é bastante parecido porém o deslocamento radial máximo ocorre em pontos diferentes. No cilindro perfeito o deslocamento máximo ocorre a 139.7 mm do bordo superior e no cilindro imperfeito ocorre a 203.2 mm do bordo superior.

XV.4.5) Cilindro Enrijecido IC3

O cilindro enrijecido da figura (XV.50) fez parte de um lote de três cilindros ensaiados por Dowling e Harding [34]. Como parte de um programa de pesquisa desenvolvido no Imperial College na Inglaterra. Nestes ensaios, a carga de compressão foi aplicada de forma centrada e uniforme sobre a parede do cilindro.

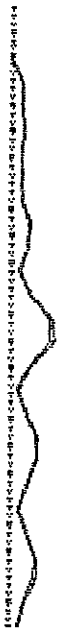
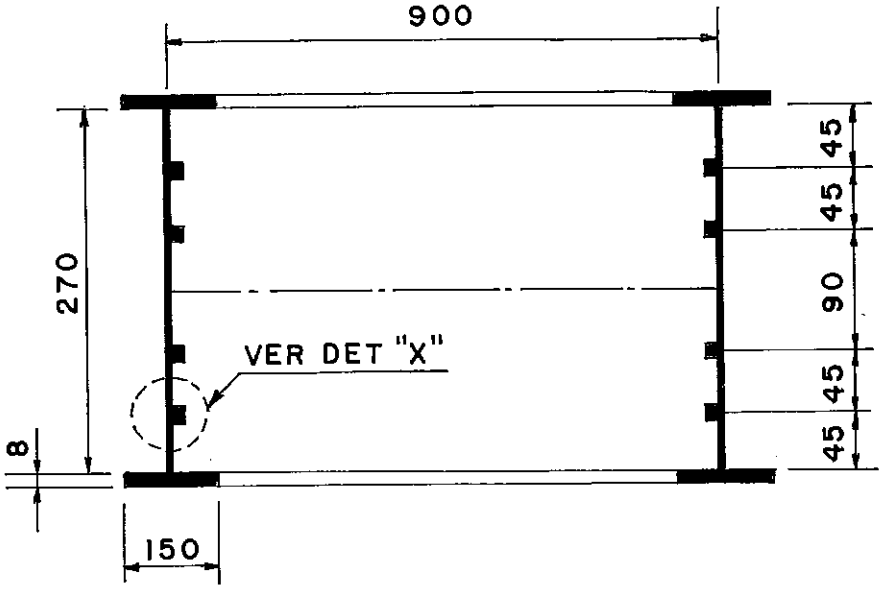


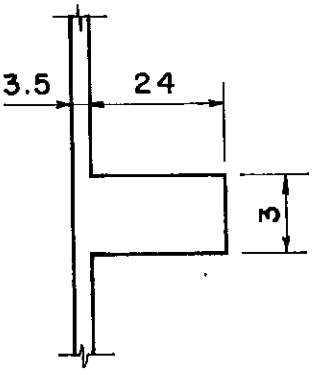
Figura XV.46 - Perfil da configuração deformada do cilindro enrijecido LANL geometricamente perfeito.

Figura XV.47 - Perspectiva da configuração deformada do cilindro enrijecido LANL geometricamente perfeito.

Figura XV.48 - Perfil da configuração deformada do cilindro enrijecido LANL geometricamente imperfeito.

Figura XV.49 - Perspectiva da configuração deformada do cilindro enrijecido LANL geometricamente imperfeito.





DETALHE "X"

Unidade: cm

Figura XV.50 - Cilindro enrijecido IC3.

As características físicas do cilindro são:

$E = 206\ 000$ N/mm

$\nu = 0.3$

$\sigma_o = 291$ N/mm (sub-cilindro central e enrijecedores)

$\sigma_o = 344$ N/mm (sub-cilindros laterais)

No presente trabalho apenas uma faixa estreita longitudinal do cilindro IC3 correspondente a toda a altura foi discretizada, conforme encontra-se indicado na figura (XV.51). Nos dois bordos laterais, compreendidos entre os ângulos de 0 e 1.9565 graus foram impostas condições de contorno adequadas à consideração de simetria.

A parede do cilindro foi discretizada por uma malha 2x36 de elementos LCTS/NFG. Para superfície de escoamento escolheu-se a superfície de Ivanov. Os anéis enrijecedores foram discretizados cada um por 2 elementos de pórtico CLCB/NFG. Os bordos superior e inferior do cilindro foram considerados como rotulados e impedidos de se deslocar radialmente e circunferencialmente. No bordo inferior o deslocamento axial foi restringido. O esforço de compressão foi aplicado através de deslocamento prescrito no bordo superior.

O cilindro foi analisado com e sem imperfeição geométrica (ver Figura (XV.52)). A imperfeição, escolhida arbitrariamente, é definida através da seguinte equação:

$$R = R_o - a \operatorname{sen} \theta$$

Figura XV.51 - Faixa estreita longitudinal do cilindro enrijecido IC3 discretizado por malha 2 x 36.

Figura XV.52 - Imperfeição geométrica considerada na parede do cilindro enrijecido IC3.

$$\theta = \frac{z}{b}$$

Onde,

$R_o = 450$ mm

$a = 0.5$ mm

$b = 90$ mm

A carga máxima determinada pelo ensaio experimental foi de 251.7 N/mm^2 e o colapso ocorreu por flambagem plástica do sub-cilindro central.

Na figura (XV.53) encontram-se as curvas da carga por unidade de área da parede do cilindro em relação ao deslocamento axial da parede no bordo superior, determinadas nas análises dos cilindros perfeito e imperfeito e no ensaio experimental. As cargas máximas determinadas para os cilindros perfeito e imperfeito foram 290.9 N/mm^2 e 254.1 N/mm^2. A curva correspondente ao cilindro imperfeito está semelhante a do ensaio experimental apesar da imperfeição utilizada não corresponder à existente no espécime ensaiado.

Na figura (XV.54) encontram-se as curvas da carga por unidade de área da parede do cilindro em relação ao deslocamento radial dos pontos situados à meia altura.

Na figura (XV.55) encontram-se os perfis das configurações deformadas do cilindro imperfeito

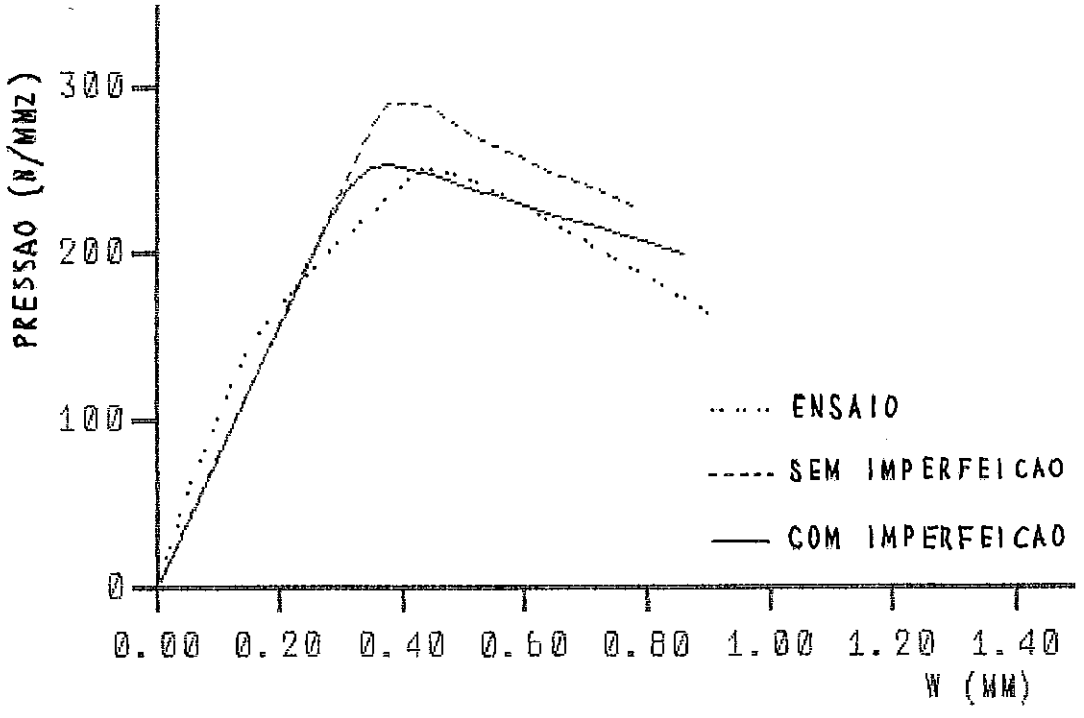


Figura XV.53 - Variação da carga com o deslocamento axial do cilindro enrijecido IC3.

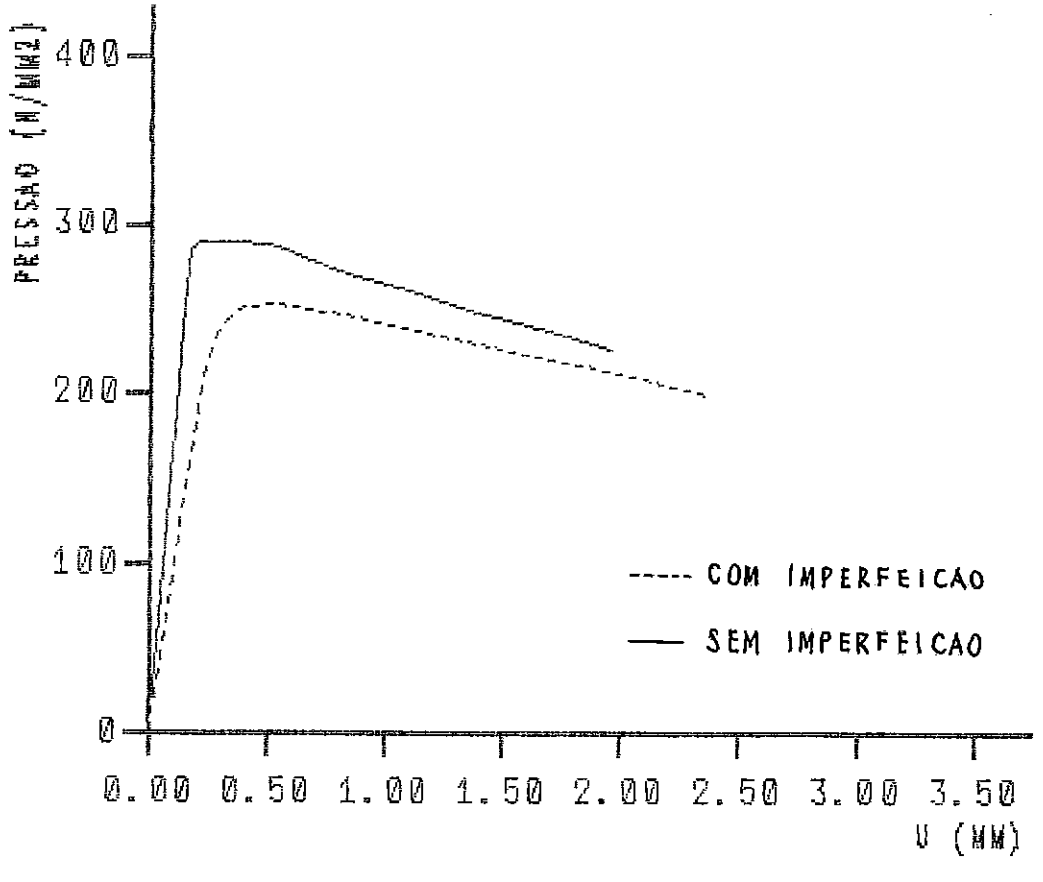


Figura XV.54 - Variação da carga com o deslocamento lateral do cilindro enrijecido IC3.

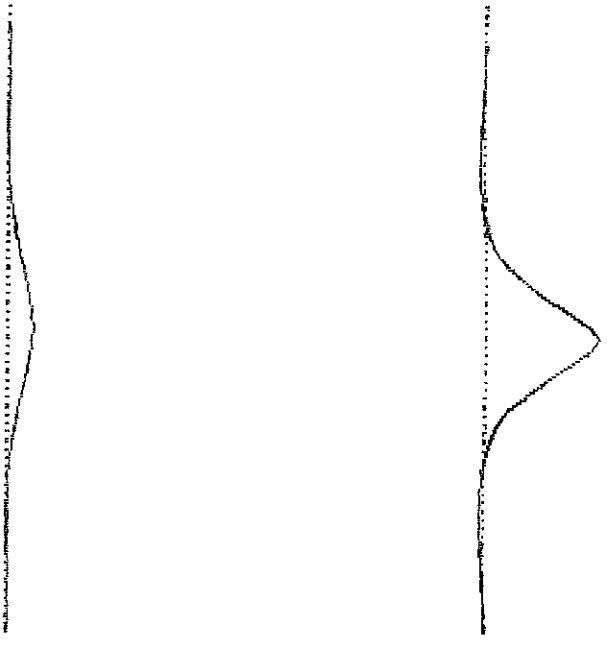


Figura XV.55 - Perfis da configuração deformada do cilindro enrijecido IC3 com imperfeição geométrica.

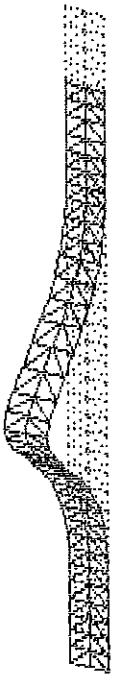


Figura XV.56 - Perspectiva da configuração deformada do cilindro enrijecido IC3 com imperfeição geométrica.

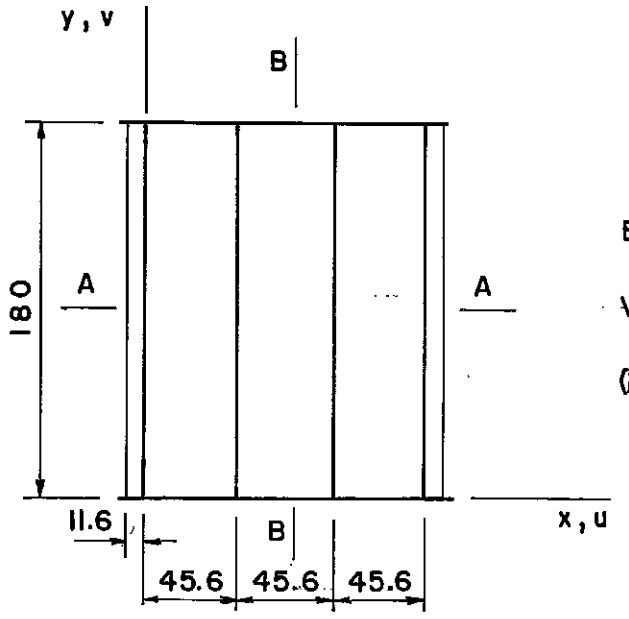
correspondentes aos incrementos 32 ($p = 254.1$ N/mm^2) e 88 ($p = 200,6$ N/mm^2). A forma destes perfis e a ordem de grandeza dos deslocamentos está próxima dos observados no ensaio experimental [34].

Na figura (XV.56) encontra-se a perspectiva da configuração deformada do cilindro imperfeito correspondente ao incremento 32.

XV.4.6) Painel Enrijecido UM7040

O painel enrijecido da figura (XV.57) fez parte de um lote de 86 painéis ensaiados na Universidade de Manchester na Inglaterra. Um relato resumido destes experimentos encontra-se na referência [156]. Nestes ensaios, os dois bordos paralelos ao eixo "x" são rotulados, os dois bordos paralelos ao eixo "y" são livres e a carga de compressão uniforme na direção longitudinal (eixo "y") é aplicada de forma centrada, na placa rígida da extremidade.

No presente trabalho foi analisada apenas metade do painel,já que existe simetria em relação ao eixo paralelo ao eixo "y", que divide o painel em duas metades iguais. A placa foi discretizada pela malha 14x36 de elementos LCTS/NFG, indicada na figura (XV.58). Para superfície de escoamento escolheu-se a superfície de Ilyushin Simplificada.Os enrijecedores foram discretizados, cada um, por 36 elementos de pórtico CLCB/NFG. Para tentar levar em conta as imperfeições existentes no espécime ensaiado

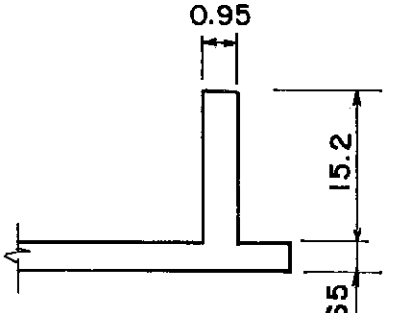


$E = 21000\ KN/cm^2$

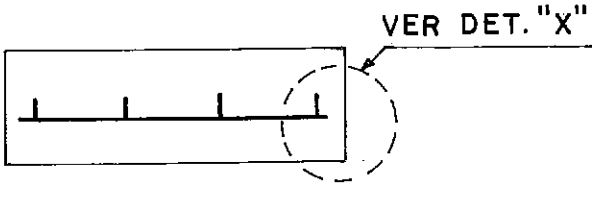
$\nu = 0.3$

$\sigma_0 = 25\ KN/cm^2$

CORTE B-B



DETALHE "X"



CORTE A-A

Figura XV.57 - Painel enrijecido UM7040.

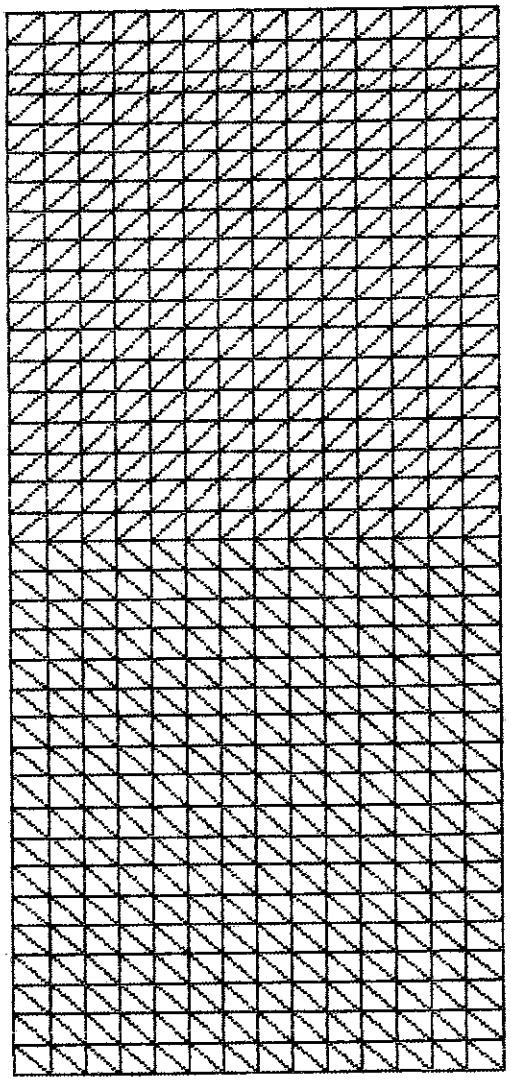


Figura XV.58 - Painel enrijecido UM7040 discretizado por malha 14x36.

aplicou-se a carga de compressão com uma excentricidade de 0.05 cm (na direção negativa do eixo z) e considerou-se uma imperfeição geométrica definida por funções trigonométricas. Na direção longitudinal (eixo "y") considerou-se uma curvatura definida por uma semi-onda senoidal de amplitude igual a 0.225cm. Sobre esta imperfeição foi superposta uma ondulação definida por semi-ondas senoidais longitudinais e transversais de comprimento igual a 45.6 cm e amplitude de 0.014 cm.

O painel foi analisado com e sem tensões residuais. Estas tensões foram arbitrariamente definidas como obedecendo à distribuição apresentada no capítulo II (ver Figura (II.2)) com n = 8.769. A sequência da análise com tensões residuais foi a seguinte:

- Leitura das tensões residuais na placa, já com as imperfeições geométricas incorporadas às coordenadas nodais

- Realização de um ciclo incremental-iterativo de 2 incrementos para que os enrijecedores, inicialmente descarregados, absorvessem parte da carga e fosse estabelecido um estado de tensão auto-equilíbrado, sem carga externa aplicada.

- Realização de mais um ciclo incremental-iterativo de 1 incremento para garantir que a estrutura está totalmente equilibrada.

Sobre a configuração deformada e o estado de tensões assim determinado foi então aplicada a carga externa de compressão.

A carga resultante de colapso determinada no ensaio experimental [156] foi de 2507.3 KN que equivale a uma pressão média de 15.5 KN/cm^2.

No presente trabalho, a análise do painel sem tensões residuais determinou uma pressão máxima de 19.9 KN/cm^2, que corresponde a uma carga resultante de 3219 KN. A diferença entre os dois resultados é grande (+28.4%) e pode ser atribuída basicamente à redução que as tensões residuais provocaram na capacidade de carga do painel ensaiado.

A análise do painel com tensões residuais determinou uma pressão máxima de 12.85 KN/cm^2, que corresponde a uma carga resultante de 2078.6 KN. Neste caso a diferença entre o resultado numérico e o experimental ainda é grande (-17.1%) porém para menos. Esta diferença pode ser atribuída ao fato de que, no ensaio, a carga é aplicada sobre as placas rígidas das extremidades, que fazem com que todos os pontos situados nas bordas tenham o mesmo deslocamento. Além disso, pouco antes de atingir o colapso, no ensaio o esforço de compressão passa a ser aplicado através de deslocamento imposto o que permite que toda a sua capacidade de carga seja aproveitada.

Esta forma de aplicar a carga não foi usada nas análises numéricas porque, como os nós dos enrijecedores

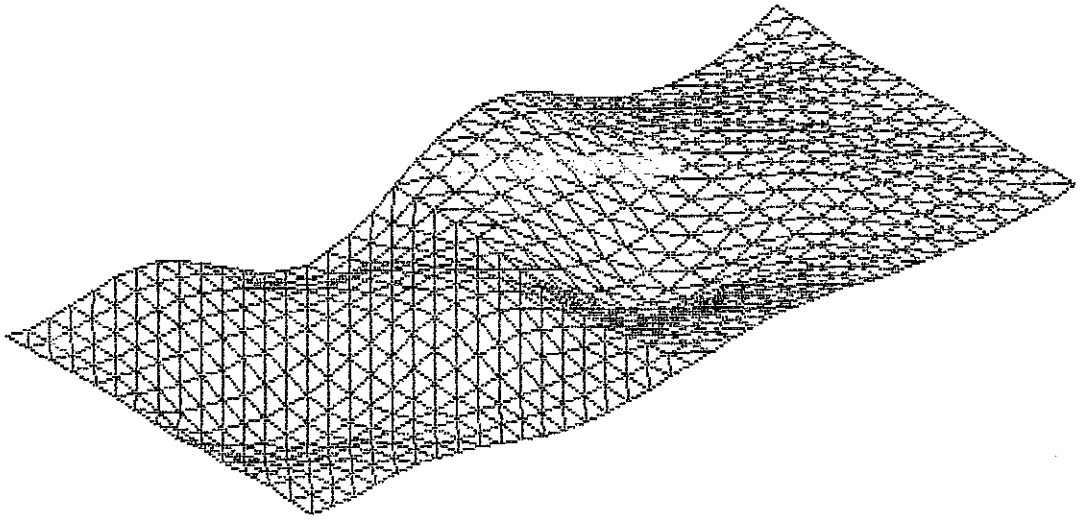


Figura XV.59 - Configuração deformada do painel enrijecido UM7040 no incremento 28.

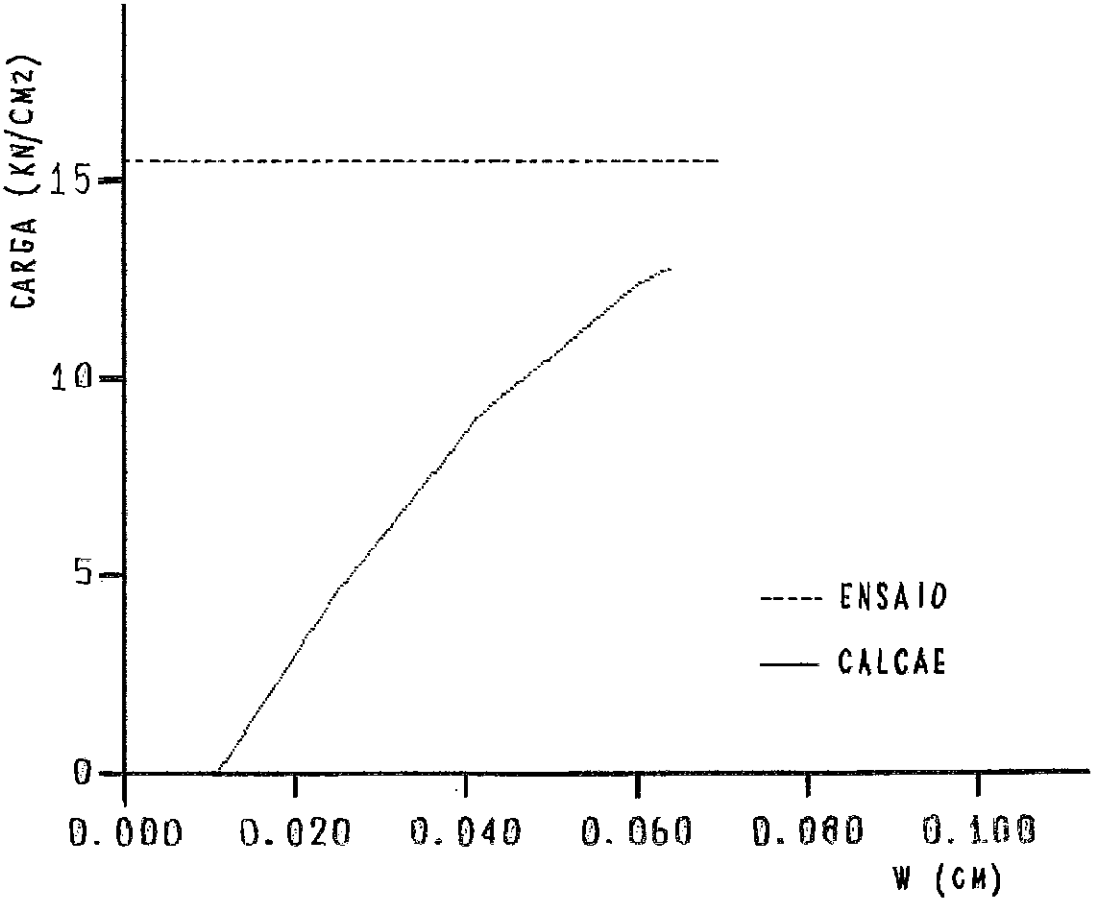


Figura XV.60 - Relação pressão-deslocamento do painel enrijecido UM7040.

não encontravam-se declarados explicitamente, não havia como impor deslocamentos e respeitar a condição de apoio das duas extremidades (rotuladas) carregadas.

Na figura (XV.59) encontra-se a configuração deformada do painel correspondente ao incremento 28 (p = 12.85 KN/cm^2) da análise com tensões residuais. Nesta configuração vários elementos já se encontravam totalmente plastificados. O deslocamento "w" máximo foi de 0.287 cm.

Na figura (XV.59) encontra-se a curva da pressão em função do deslocamento "w" do ponto médio do painel. O trecho inicial com pressão nula e deslocamento final de 0.0106 cm corresponde aos 4 incrementos iniciais, quando foi realizada a incorporação das tensões residuais.

CAPÍTULO XVI

CONCLUSÃO

Nesta Tese foi proposto um modelo numérico para análise não-linear física e geométrica de cascas enrijecidas. Apesar de todas as hipóteses simplificadoras utilizadas este modelo demonstrou uma boa precisão nas comparações feitas com outros modelos numéricos e com modelos físicos, também.

Para atingir este grau de precisão contou-se com três opções de superfície de escoamento e quatro opções de algoritmos para realização de iterações, que permitiram uma otimização do desempenho do modelo em função das características da estrutura analisada.

No entanto, foram detectadas duas limitações. A primeira, detectada no exemplo do item (XV.2.2), é a necessidade de utilização de uma grande quantidade de incrementos para analisar estruturas excessivamente flexíveis, que sofrem deslocamentos com ordem de grandeza igual a da sua maior dimensão. Apesar deste tipo de comportamento não ser encontrado em estruturas laminares reais, a limitação existe. A segunda limitação, detectada no exemplo (XV.4.6), é a impossibilidade de prescrever deslocamentos para os nós dos enrijecedores quando estes nós não forem declarados explicitamente.

Soluções para a primeira limitação existem várias na

literatura, como por exemplo a solução proposta por Hsiao (ver item (VIII.1)) para elementos triangulares planos, que pode ser extendida para elementos de pórtico. No entanto, como as formulações elasto-plásticas impõem também limitações à magnitude dos deslocamentos incrementais, seria necessário modificá-las também para que o modelo não-linear físico e geométrico conservasse a compatibilidade de hipóteses. Porém neste caso não há ainda na literatura uma solução consolidada que possa ser utilizada sem riscos.

A solução mais direta para a segunda limitação é a implementação de restrições generalizadas com tratamento específico para não-linearidade geométrica (ver item (VIII.2)). Porém existe uma solução indireta que consiste no desenvolvimento de um elemento enrijecedor bi-dimensional compatível com o elemento triangular plano de casca. No entanto, esta solução requer um investimento grande para desenvolvimento de uma formulação básica e de três formulações não-lineares. Existindo ainda o inconveniente de que o novo elemento será necessariamente (por ser bidimensional) computacionalmente menos eficiente que o elemento de pórtico.

Os testes realizados foram suficientes para demonstrar a precisão e as potencialidades do modelo proposto. Porém numa segunda etapa desta pesquisa seria interessante realizar os seguintes testes: análise de cascas longitudinalmente e ortogonalmente enrijecidas; análise de estruturas ensaiadas experimentalmente, cujos dados sobre

imperfeições iniciais estejam disponíveis e análise de problemas práticos, como por exemplo colunas de plataformas flutuantes.

Por limitação de tempo a pesquisa sobre superfícies de escoamento para cascas finas não pôde ser mais aprofundada. Porém este é um tema de importância fundamental para o desempenho computacional de elementos de casca e merece ser retomado em pesquisas futuras.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ELLINAS, C.P. ; SUPPLE, W. J. AND WALKER, A.C. - Buckling of Offshore Structures - Prepared for the U.K. Department of Energy by J.P. Kenny and Partners LTD, Published by Granada Publishing (1984).

[2] BUSHNELL, D. - Plastic Buckling of Various Shells - Trans. ASME, J. Pressure Vessel Technology, vol.104, pp 51-72 (1982).

[3] FAULKNER, D; BIRREL, N.D. and STIANSEN, S.G. - Development of a Reliability - Based Design Code for the Structure of Tension Leg Platforms - Proc. of the 15th OTC, Paper 4648, pp 575 - 586 (1983).

[4] LLOYD, J.R. and KARSAN, D.I. - Development of a Reliability - Based Alternative to API RP2A - Proc. of the 20th OTC, Paper 5882, pp 593 - 600 (1988).

[5] THOFT - CHRISTENSEN, P. - Application of Structural Systems Reability Theory in Offshore Engineering: A state - of- the - Art - In: Integrity of Offshore Structures, vol. 3, edited by D. Faulkner, M.J. Cowling and A. Incecik, pp 1 - 23, (1987).

[6] TORHAUG, M. and JENSSEN, D. N. - Planning and Designing for Offshore Reliability - Oil. & Gas Journal, pp 85 - 87, May 24 (1982).

[7] GUÉNARD, Y. F. - "Application of Structural System Reliability Analysis to Offshore Structures", Ph.D. Thesis, Stanford University (1984).

[8] BEA, R.G.; HONG, S.T. and MITCHELL, J. S. - Decision Analysis Approach to Offshore Platform Design - ASCE, J. Structural Division, vol.110, ST 1, (1984).

[9] BEA, R.G.; LITTON, R.W. and VAISH, A.K. - Requalification of Existing Platforms - Proc. of the 17th OTC, Paper 4858, pp 163 - 175 (1985).

[10] ELLINAS, C.P. and VALSGARD, S. - Collisions and Damage of Offshore Structures: A State - of - the - Art - Trans ASME, J. Energy Resouces Technology, vol. 107, pp 297 - 314 (1985).

[11] ZAYAS, V.A. ; DAO, B. V. and HAMMETT, D.S. - Experimental and Analytical Comparisons of Semisubmersible Offshore Rig Damage Resulting from a Ship Collision - Proc. of the 17th OTC, Paper 4888, pp 413 - 422 (1985).

[12] SKRIKERUD, P. ; HALL, M. ; VORMEDAL, H. and RAVNDAL, E. - Investigation of Damage to an Articulated Crude Loading Tower Caused by a Tanker Collision - Proc. of the Conference BOSS'88, pp 1509 - 1523 (1988).

[13] CLAUSS, G.F. - Stability and Dynamics of Semisubmersible After Accidental Damage - Proc. of the 16th OTC, Paper 4729, pp 159 - 171 (1984).

[14] ROREN, E.M.Q.; SOLLIE, T. and CARLIN, T. - Case Histories of Structural Damages - Lessons Learned - Proc. of the Conference BOSS'85, pp 1 - 6 (1985).

[15] ZIENKIEWICZ, O.C. - The Finite Element Method - McGraw-Hill, 3rd ed. (1977).

[16] GALAGHER, R.H. - Finite Element Analysis: Fundamentals - Prentice - Hall, INC., Englewood Cliffs, New Jersey (1975).

[17] NOOR, A.K. ; BELYTSCHKO, T. and SIMO, J.C. (editors) - Analytical and Computacional Models of Shells - Proc. of the Winter Annual Meeting of the ASME, San Francisco, California (1989).

[18] YANG, H.T.Y.; SAIGAL, S. and LIAW, D. G. - Advances of thin shell finite elements and some applications - Version 1 - Computers & Structures, vol. 35, No. 4, pp. 481 - 504 (1990).

[19] TIMOSHENKO, S.P. and GERE, J.M. - Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, New York (1961).

[20] CHAJES, A. - Principles of Structural Stability Theory - Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1974).

[21] FAULKNER, D. - Effects of residual stresses on the ductile strength of plane welded grillage and ring stiffened cylinders - Journal of Strain Analysis, vol 12, No 2, pp 130 - 139 (1977).

[22] TALL, L. - The calculation of Residual Stresses in Perspective - In: Residual Stresses in Welded Construction and their Effects - An International Conference, held in London in November 1977, pp 49 - 62, published by the Welding Institute (1978).

[23] SMITH, C.S and KIRKWOOD, W - Influence of Initial Deformations and Residual Stresses on Inelastic Flexural Buckling of Stiffened Plates and Shells - In: Steel Plated Structures - An International Symposium, edited by P.J. Dowling, J.E. Harding and P.A. Frieze, pp 838 - 864, Crosby Lockwood Staples London (1977).

[24] JOHNSTON, B. G. - Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures - John Wiley & Sons, New York, 3rd edition (1976).

[25] FAULKNER, D. - Compression tests on welded eccentrically stiffened plate panels - In Steel Plated Structures - An International Symposium, edited by P.J. Dowling, J.E Harding and P.A. Frieze, pp 581 - 617, Crosby Lockwood Staples London (1977).

[26] NARAYANAN, R.- The influence of residual shrinkage stresses on the ultimate strength of stiffened steel flanges - In: Residual Stresses in Welded Construction and their Effects - An International Conference, held in London in November 1977, pp 165 - 172, published by the Welding Institute (1978).

[27] TROMP, W.A.J - An experimental study on the influence of residual welding stresses on the strength of stiffened steel panels in compression - In: Residual Stresses in Welded Construction and Their Effects An International Conference, held in London in November 1977, pp 349 - 358, published by the Welding Institute (1978).

[28] DOWLING, P.J. AND FRIEZE, P.A. - Residual Stresses in Welded Steel Box Girder Flanges - In: Residual Stresses in Welded Construction and Their Effects An International Conference, held in London in November 1977, pp 307 - 320, published by the Welding Institute (1978).

[29] NEAL, B.G. - The Plastic Methods of Structural Analysis - John Wiley & Sons, 2nd ed., New York (1963).

[30] BRUSH, D. O. and ALMROTH, B. O - Buckling of Bars Plates and Shells - Mc Graw-Hill Book Company, New York (1975).

[31] McGUIRE, W. - Steel Structures - Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New York (1968).

[32] SOBEL, L. H. and NEWMAN, S.Z. - Plastic Buckling of Cylindrical Shells Under Axial Compression - Trans. ASME, J. Pressure Vessel Technology, vol.102, pp 40 - 44 (1980).

[33] BUSHNELL, D. and MELLER, E. - Elastic - Plastic Collapse of Axially Compressed Ring Stiffened Cylindrical Shells: A Brief Survey with Particular Application to Ring-Stiffened Cylindrical Shells with Reinforced Openings - Trans. ASME, J Pressure Vessel Technology, vol.106, pp 2-16 (1984).

[34] DOWLING, P. J. and HARDING, J.E. - Experimental Behaviour of Ring and Stringer Stiffened Shells - In: Buckling of Offshore Structures, edited by J.E. Harding, P.J. Dowling and N. Agelidis, pp 73-107, published by Granada Publishing LTD (1982).

[35] DWIGHT, J.B. - Imperfection Levels in Large Stiffened Tubulars - In: Buckling of Shells in Offshore Structures, edited by J.E. Harding, P.J. Dowling and N. Agelidis, pp 393-412, published by Granada Publishing LTD, London (1982).

[36] WHITE, J.D. and DWIGHT, J.B. - Weld Shrinkage in Large Stiffened Tubulars - In: Residual Stresses in Welded Construction and their Effects - An International Conference, held in London in November 1977, pp 337-348, published by the Welding Institute (1978).

[37] FUNG, Y.C. - Foundations of Solid Mechanics - Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1975).

[38] MALVERN, L.E. - Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium - Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1969).

[39] FLÜGGE, W - Viscoelasticity - Springer - Verlag, 2nd edition (1975).

[40] KACHANOV, L.M. - Fudamentals of the Theory of Plasticity - Mir Publishers, Moscow (1974).

[41] BRIDGMAN, P.W. - The Compressibility of Thirty Metals as a Function of Pressure and Temperature - Proc. Am. Acad. Art. Sci., Vol. 58, pp. 163-242 (1923).

[42] CROSSLAND, B. - The Effect of Fluid Pressure on the Shear Properties of Metal - Proc. Inst. Mech. Engr., Vol. 169, pp. 935-44 (1954).

[43] CHEN, W.F. and HAN, D.J. - Plasticity for Structural Engineers - Springer-Verlag New York Inc. (1988).

[44] WASHIZU, K. - Variational Methods in Elasticity and Plasticity - Pergamon Press, 2nd ed. (1975).

[45] NOVOZHILOV, V.V. - Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity - Graylock Press, Rochester, New York (1953).

[46] DYM, C.L. and SHAMES, I.H. - Solid Mechanics - a Variational Approach - McGraw-Hill Kogakusha, Ltd. (1973).

[47] BATHE, K.J. - Finite Elements Procedures for Engineering Analysis - Prentice-Hall, New Jersey, USA (1982).

[48] BATHE, K.J. and WILSON, E.L. - Numerical Methods in Finite Element Analysis - Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1976).

[49] KARAMANLIDIS, D. - A Note on Incrementation Schemes in Non-Linear Structural Analysis - Engineering Analysis - Vol. 3, No. 4, pp. 225-234 (1986).

[50] CLARKE, M.J. and HANCOCK, G.J. - A Study of Incremental-Iterative Strategies For Non-Linear Analysis - Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 29, pp. 1365-1391 (1990).

[51] BERGAN, P.G.; HORRIGMOE, G.; KRAKELAND, B. and SOREIDE, T.H.- Solution Techniques For Non-Linear Finite Element Problems - Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 12, pp. 1677-1696 (1978).

[52] IRONS, B. and AHMAD, S. - Techniques of Finite Elements - John Wiley and Sons (1981).

[53] OWEN, D.R.J. and HINTON, E. - Finite Elements in Plasticity: Theory and Pratice - Pineridge Press Ltd., Swansea, U.K. (1980).

[54] NAYAK, G.C. and ZIENKIEWICZ, O.C. - Elasto-Plastic Stress Analysis. A Generalization for Various Constitutive Relations Including Strain Softening - Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 5, pp.113-135 (1972).

[55] SIMO, J.C. and TAYLOR, R.L. - Consistent Tangent Operators For Rate-Independent Elastoplasticity - Comp. Meth. Appl. Mechs. Engng., Vol. 48, pp. 101-118 (1985).

[56] BUSHNELL, D. - A Strategy for the Solution of Problems Involving Large Deflections, Plasticity and Creep - Int. J. Num. Meth. Engng., Vol 11, pp. 683-708 (1977).

[57] MARQUES, J.M.M.C. - Stress Computation in Elasto Plasticity - Engng. Comput., Vol. 1, pp. 42-51 (1984).

[58] NYSSEN, C. - An Efficient and Accurate Iterative Method, Allowing Large Incremental Steps to Solve Elasto-Plastic Problems - Computers & Structures, Vol. 13, pp. 63-71 (1981).

[59] ZIENKIEWICZ, O.C.; VALLIAPPAN, S. and KING, I.P.- Elasto-Plastic Solutions of Engineering Problems- 'Initial Stress' Finite Element Approach - Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 1, pp. 75-100 (1969).

[60] BATHE, K.J. and CIMENTO, A.P. - Some Pratical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations - Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol. 22, pp. 59-85 (1980).

[61] SLOAN, S.W. - Substepping Schemes for the Numerical Integration of Elastoplastic Stress-Strain Relations - Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 24, pp. 893-911 (1987).

[62] FROBERG, C.E. - Introduction to Numerical Analysis - Addison-Wesley Publishing Company, 2nd ed. (1973).

[63] WYLE, C.R. and BARRET, L.C. - Advanced Engineering Mathematics - McGraw-Hill International Book Company, 5 th ed. (1982).

[64] BRAUDEL, H.J.; ABOUAF, M. and CHENOT, J. L. - An Implicit and Incremental Formulation for the Solution of Elastoplastic Problems by the Finite Element Method - Computer & Structures, Vol. 22, No. 5, pp.801-814 (1986).

[65] SCHREYER, H.L.; KULAK, R.F. and KRAMER, J.M. - Accurate Numerical Solutions for Elastic-Plastic Models - Trans. ASME, J. Pressure Vessel Tech., Vol 101, pp. 226-234, AUGUST (1979).

[66] KRIEG, R.D. and KRIEG, D.B. - Accuracies of Numerical Solution Methods for the Elastic-Perfectly Plastic Model - Trans. ASME, J. Pressure Vessel Tech., Vol 99, pp. 510-515, NOVEMBER (1977).

[67] WU, W. - A Unified Numerical Integration Formula for the Perfectly Plastic Von Mises Model-Int J. Num. Meth. Engng., Vol. 30, pp. 491-504 (1990).

[68] MARQUES, J.M.M.C. and OWEN, D.R.J. - Some Reflections on Elastoplastic Stress Calculation in Finite Element Analysis - Computer & Structures, Vol. 18, No. 6, pp.1135-1139 (1984).

[69] BATHE, K.J. and BOLOURCHI, S. - A Geometric and Material Non-Linear Plate and Shell Element - Computers & Structures, vol. 11, pp. 23-48 (1980).

[70] OWEN, D. R. J. and FIGUEIRAS, J. A. - Anisotropic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells - Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 19, pp. 541-566 (1983).

[71] CRISFIELD, M.A. - Large-deflection elasto-plastic buckling analysis of plates using finite elements - Transport and Road Research Laboratory, TRRL Report LR 593, Crowthorne, (1973).

[72] BATHE, K. J.; DVORKIN, E.N. and HO, L.W. - Our Discrete - Kirchhoff and Isoparametric Shell Elements for Nonlinear Analysis - An Assessment - Computers & Structures, vol. 16, pp. 89-98 (1983).

[73] CHUEIRI, L.H.M. - Um Modelo Simples para a Representação do Comportamento Não-Linear de Estruturas de Superfície - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ (1985).

[74] HILL, R. - The Mathematical Theory of Plasticity - Oxford University Press (1950).

[75] FLUGGE, W. - Stresses in Shells - Springer-Verlag, 2nd edition (1973).

[76] ILYUSHIN, A.A. - Plasticite - Editions Eyrolles, Paris (1956).

[77] ROBINSON, M. - A comparison of yield surfaces for thin shells - International Journal for Mechanical Science, vol. 13, pp. 345-354 (1971).

[78] OWEN, D.R.J. and FIGUEIRAS, J.A. - Elasto-plastic analysis of anisotropic plates and shells by the semiloof element - Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 19, pp. 521-539 (1983).

[79] CRISFIELD, M.A. - On an approximate yield criterion for thin steel shells - Transport and Road Research Laboratory, TRRL REPORT LR 658, Crowthorne (1974).

[80] EIDSHEIM, O.M. and LARSEN, P.K. - A Study of Some Generalized Constitutive Models for Elasto-Plastic Shells - In: Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, edited by W. Wunderlich, E. Stein and K. J. Bathe, Springer Verlag (1981)

[81] CARPENTER, N., STOLARSKI, H. and BELYTSCHKO, T. - Improvements in 3-Node Triangular Shell Elements - Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 23, pp. 1643-1667 (1986).

[82] MEEK, J.L. and TAN, H.S. - A Faceted Shell Element with Loof Nodes - Int. J. Num. Meth. Engng., vol 23, pp 49-67 (1986)

[83] DAWE, D.J. - Some High - Order Elements for Arches and Shells - In : Finite Elements for Thin Shells & Curved Members, edited by D.G. Ashwell and R.H. Galagher, pp 131 - 153, published by John Wiley & Sons LTD, London (1976).

[84] ARGYRIS, J.H. and SCHARPF, D.W. - The SHEBA family of shell elements for the matrix displacement method - Journal of the Royal Aeronautical Society, vol.72, pp. 878-883 (1968).

[85] AHMAD, S. ; IRONS, B.M. and ZIENKIEWICZ, O.C. - Analysis of thick and thin shell structures by curved elements - Int. J. Num. Meth. Engng., vol.2, pp. 419-451 (1970).

[86] PAWSEY, S. F. and CLOUGH, R. W. - Improved numerical Integration of thick shell finite elements - Int. J. Num. Meth. Engng., vol.3, pp. 575-586 (1971).

[87] PARISCH, H. - A critical survey of the 9 node degenerated shell elements with special emphasis on thin shell application and reduced integration - Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., vol. 20, pp. 323-350 (1979).

[88] HUANG, H.C. and HINTON, E. - A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation - Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 22, pp. 73-92 (1986).

[89] BACKLUND, J. and WENNERSTROM, H. - Finite Element Analysis of Elasto-Plastic Shells - Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 8, pp. 415-424 (1974).

[90] ARGYRIS, J.H., DUNNE, P.C., MALEJANNAKIS, G.A. and SCHELKLE, E. - A Simple Triangular Facet Shell Element with Applications to Linear and Non-Linear Equilibrium and Elastic Stability Problems - Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., vol. 10, pp. 371-403 and vol. 11, pp. 97-131 (1977).

[91] HORRIGMOE, G. and BERGAN, P.G. - Nonlinear Analysis of Free-Form Shells by Flat Finite Elements - Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol. 16, pp. 11-35 (1978).

[92] CHEN, K.K. - A Triangular Plate Finite Element for Large - Displacement Elastic-Plastic Analysis of

Automobile Structural Components - Computers & Structures, vol. 10, pp. 203-215 (1979).

[93] BATHE, K.J. and HO, L.W. - A Simple and Effective Element for Analysis of General Shell Structures - Computers & Structures., Vol. 13, pp. 673-681 (1981).

[94] MEEK, J.L. and TAN, H.S. - Instability Analysis of Thin Plates and Arbitrary Shells Using Faceted Shell Element with Loof Nodes - Comp. Meth. Appl. Mech Engng., Vol. 57, pp. 143-170 (1986).

[95] HSIAO, K.M. - Nonlinear analysis of general shell structures by flat triangular shell element - Computers & Structures, vol. 25, No.5, pp. 665-675 (1987).

[96] SCHOOP, H. - A simple nonlinear flat element for large displacement structures - Computers & Structures, vol.32, No. 2, pp 379-385 (1989).

[97] JANG, J. and PINSKY, P.M. - Convergence of curved shell elements based on assumed covariant strain interpolations - Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 26, pp. 329-347 (1988).

[98] BATHE, K.J. and DVORKIN, E. N. - A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components - Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 22, pp. 697-722 (1986).

[99] EBECKEN, N. F. F. - LORANE NL: Uma Linguagem Orientada à Análise Estrutural Não-Linear - Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ (1977).

[100] PARISCH, H. - Large Displacements of Shells Including Material Non-Linearities - Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., vol. 27, pp. 183-214 (1981).

[101] DVORKIN, E. N. and BATHE, K. J. - A continunm mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis - Engineering Computation, vol. 1, pp. 77-88, March (1984).

[102] HUANG, H.C. and HINTON, E. - Elastic-plastic and geometrically nonlinear analysis of plates and shells using a new nine node element - Proc. Symposium of Finite Element Methods for Nonlinear Problems - Trondheim - Norway (1985).

[103] FELIPPA, C.A. and MILITELLO, C. - Developments in variational methods for high performance plate and shell elements - In: Analytical and Computational Models of Shells, edited by A.K. NOOR, T. Belytschko and J.C. Simo, Proc. of the Winter Annual Meeting of the ASME, pp. 191-215 (1989).

[104] NYGARD, M.K. - The Free Formulation for Non-Linear Finite Elements with Applications to Shells - The Norwegian Institute of Technology, Division of Structural Mechanics, Trondheim, Norway, Dr. Ing. Thesis, Report No. 86-2 (1986).

[105] JAAMEY, S.; FREY, F. and JETTEUR, P. - Nonlinear thin shell finite element with six degrees of freedom per node - Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., vol.75, pp 251-266 (1989).

[106] COOK, R.D. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis - John Wiley & Sons, 2nd edition (1981).

[107] CRISFIELD, M.A. - Large-deflection elasto-plastic buckling analysis of eccentrically stiffened plates using finite elements - Transport and Road Research Laboratory, TRRL Report LR 725, Crowthorne, (1976).

[108] SOREIDE, T.H. ; BERGAN, P.G. and MOAN, T. - Ultimate collapse behaviour of stiffened plates using alternative finite element formulations - In : Steel Plated Structures - An International Symposium - edited by P.J. Dowling, J.E. Harding and P.A. Frieze, pp. 618-637, published by Granada Publishing Ltd (1977).

[109] ONOUFRIOU, A. and HARDING, J.E. - Residual strength of damaged ring-stiffened cylinders - Proc. 4th International Symposium on Offshore Mechanics & Artic Engineering, OMAE'85, pp. 537-545 (1985).

[110] ABAYAKOON, S.B.S. - Large deflection elastic-plastic analysis of plate structures by the finite strip method - Ph.D. Thesis, The University of British Columbia, Department of Civil Engineering, Vancouver, Canada (1987).

[111] BATHE, K. J. and WIENER, P. M. - On elastic-plastic analysis of I-beams in bending and torsion - Computers & Structures, vol. 17, pp. 711-718 (1983).

[112] BUSHNELL, D. - BOSOR5 - Program for buckling of elastic-plastic complex shells of revolution including large deflections and creep - Computers & Structures, vol.6, pp. 221-239 (1976).

[113] ARBOCZ, J. and BABCOCK, C.D. - Stability analysis of shells using the STAGS computer code - In: Buckling of Shells in Offshore Structures, edited by J. E. Harding, P. J. Dowling and N. Agelidis, pp. 549-575, published by Granada Publishing Ltd (1982).

[114] FRIEZE, P. A. and SACHINIS, A. - Compressive strength of stress-relieved ring-stiffened cylinders including local damage - Proc. International

Conference on Marine Safety, pp 341-362, University of Glasgow.(1983).

[115] MULHOLLAND, M. F. and PALAZOTTO, A. N. - The non-membrane prebuckling effects on stiffened cylindrical panels - Computers & Structures, vol.18, No. 6, pp. 1115-1120 (1984).

[116] ESTEFEN, S. F. and HARDING, J.E. - The effect of ring stiffeners on inter-ring cylindrical panel buckling - In: Offshore Engineering, vol.5, edited by F.L.L.B. Carneiro, R. C. Batista and A. J. Ferrante, Proc. 5th International Symposium on Offshore Engineering, Brasil Offshore'85, pp 460-476, published by Pentech Press Ltd (1986).

[117] BUSHNELL, D. - PANDA2 - Program for minimum weight design of stiffened, composite, locally buckled panels - Computers & Structures, vol. 25, No. 4, pp. 468-605 (1987).

[118] SYNGELLAKIS, S. and WALKER, A.C. - Elastic local buckling of longitudinally stiffened cylinders - In : Stability Problems in Engineering Structures and Components, edited by T.H. Richards and P. Stanley, pp. 159-178, published by Applied Science Publ. Ltd. London (1979).

[119] BATISTA, R.C. - Lower Bound Estimates for Cylindrical Shells Buckling - Ph. D. Thesis, University College, London (1979).

[120] ANTONINNI, R.C. - Influência da Interação Entre Modos e Imperfeições na Flambagem de Cascas Cilíndricas Axialmente Comprimidas - Tese de M. Sc., COPPE/UFRJ (1981).

[121] JUSTINO FILHO, M.R. - Estabilidade Local de Paineis Cilíndricos Enrijecidos - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ (1982).

[122] GONÇALVES, P.B. - Instabilidade e Sensibilidade de Cascas Cilíndricas Circunferencialmente Enrijecidas - Tese de M. Sc., COPPE/UFRJ (1983).

[123] HOLAND, I. and BELL, K. - Finite Element Methods in Stress Analysis - TAPIR (1970).

[124] BREBBIA, C.A. and FERRANTE, A.J. (editors) - The Finite Element Technique : An Introduction For Engineers - Editora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil (1975).

[125] BERGAN, P.G. - Finite elements based on energy orthogonal functions - Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 15, pp. 1541-1555 (1980).

[126] BENJAMIN, A.C. - Análise Não-Linear Geométrica de Pórticos Tridimensionais pelo Método dos Elementos Finitos - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ (1982).

[127] BENJAMIN, A.C. - Formulação de um elemento finito de pórtico elasto-plástico a partir da teoria plástica de vigas - Seminário de D.Sc. COPPE/UFRJ (1985)

[128] BENJAMIN, A.C. e EBECKEN, N.F.F. - Formulação de um Elemento de Pórtico Elasto-Plástico a partir da Teoria Plástica de Vigas - Revista Brasileira de Engenharia, Caderno de Engenharia Estrutural. Vol. 3, N. 2, pags. 29-57 (1985).

[129] BENJAMIN, A.C. e EBECKEN, N.F.F. - Formulação de um elemento finito de pórtico elasto-plástico não-linear com matriz de rigidez determinada explícitamente - Revista Brasileira de Engenharia Caderno de Engenharia Estrutural, Vol. 4, N. 2, pags. 45-73 (1986).

[130] GUPTA, A.K. and MA, P.S. - Error in eccentric beam formulation - Int. J. Num. Meth. Engng., Short Communications, vol. 11, pp. 1473-1483 (1977).

[131] BALMER, H.A. - Another aspect of the error in eccentric beam formulation - Int. J. Num. Meth. Engng., Short Communications, vol. 12, pp. 1761-1771 (1978).

[132] MILLER, R.E. - Reduction of the error in eccentric beam modeling - Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 15, pp. 575-582 (1980).

[133] ORAN, C. - Tangent Stiffness in Space Frames - J. Struct. Div., ASCE, Vol. 99, No ST6, pp. 987-1001 (1973).

[134] CAREY, G.F. - A Unified Approach to Three Finite Element Theories for Geometric Nonlinearity - Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., vol. 4, pp. 69-79 (1974).

[135] BATHE, K.J. and BOLOURCHI, S. - Large Displacement Analysis of Three-Dimensional Beam Structures - Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 14, pp. 961-986 (1979).

[136] MARTIN, H.C. and CAREY, G.F. - Introduction to Finite Element Analysis : Theory and Application - McGraw-Hill Book Company, New York, USA (1973).

[137] WANG, C.K. - General Computer Program for Limit Analysis - J. Struct. Div., ASCE, Vol. 89, ST6, pp. 101-117 - (1963).

[138] BOLOURCHI, S. and BATHE, K.J. - A Geometric and Material Non-Linear Three-Dimensional Beam

Element - Report 82448-4, Acoustics and Vibration Lab.- Mechanical Engineering Department, MIT (1977).

[139] ORBISON, J.B., McGUIRE, W and ABEL, J.F. - Yield Surface Applications in Non-Linear Steel Frame Analysis - Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., vol. 33, pp. 557-573 (1982).

[140] GHALI, A and NEVILLE, A.M. - Structural Analysis - a unified classical and matrix approach - 2nd edition, Chapman and Hall Ltd., London (1979).

[141] SALMON, C.G. and JOHNSON, J.E. - Steel Structures Design and Behaviour - 2nd edition, Harper and Row, New York, USA (1980).

[142] ODEN, J.T. and RIPPERGER,E.A. - Mechanics of Elastic Structures - McGraw-Hill, 2nd. ed. (1981).

[143] BERGAN, P.G. and CLOUGH, R.W. - Large Deflection Analysis of Plates and Shallow Shells Using the Finite Element Method - Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 5, pp. 543-556 (1973).

[144] FREY, F. - Shell Finite Elements With Six Degrees of Freedom per Node. - In: Analytical and Computational Models of Shells - edited by A.K. NOOR, T. Belytschko and J.C. Simo, Proc. of the Winter Annual Meeting of the ASME, pp. 291-316 (1989).

[145] ASHWELL, D. G. - Strain elements, with applications to arches, rings and cylindrical shells - In: Finite Elements for Thin Shell & Curved Members - edited by D. G. Ashwell and R. H. Galagher, pp. 91 - 111, published by Jonh Wiley & Sons Ltd, London (1976).

[146] SCORDELIS, A. C. and LO, K. S. - Computer analysis of cylindrical Shells - J. Amer. Concrete Inst., vol. 61, pp. 539 - 560 (1964).

[147] FORSBERG, K. and HARTUNG, R. - An evaluation of finite difference and finite element techniques for analysis of general Shells - Symposium on High Speed Computing of Elastic Structures, I. U. T. A. M., Liege, 1970, pp. 837 - 859.

[148] SZABÓ, B. A. and SAHRMANN, G. J. - Hierarchic plate and shell models based on p-extension - Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 26, pp. 1855 - 1881 (1988).

[149] BATOZ, J. L. - An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element - Int. J. Num. Meth Engng., vol.18, pp. 1077 - 1089 (1982).

[150] CARPENTER, N. J. STOLARSKI, H. and BELYTSCHKO, T. - A flat triangular shell element with improved membrane interpolation - Communications in Applied Numerical Methods, vol.1, pp. 161 - 168 (1985).

[151] DUPUIS, G.A.; HIBBITT, H.D.; McNAMARA, S.F. and MARCAL, P.V. - Non-Linear Material and Geometric Behaviour of Shell Structures, Computers & Structures, vol. 1, pp. 223-239 (1972).

[152] JAVAHERIAN, H. and DOWLING, P.J. - Large Deflection elastoplastic analysis of thin shells - Engn.Struct., vol. 7, pp. 154-162, July (1985).

[153] KRAKELAND, B.K. - Large displacement analysis of shells considering elasto-plastic and elasto-viscoplastic materials - Report No. 77-6, Div. struct. Mech., The Norwegian Institute of Technology, Trondheim (1977).

[154] ABAYAKOON, S.B.S.; OLSON, M.D. and ANDERSON, D.L. - Large Defeection Elastic-Plastic Analysis of Plate structures by the finite strip method - Int. J. Num. Meth. Engn., vol. 28, pp. 331-358 (1989).

[155] BAKER, W.E.; BENNETT, J.G. and BABCOCK, C.D. - Experimental Buckling Investigation of Ring - stiffened Cylindrical shells under unsymmetrical Axial Loads - Trans. ASME J. Presure Vessel Technology, vol. 105, pp. 342-346 (1983).

[156] HORNE, M. R. and NARAYANAN, R. - Ultimate strength of stiffened panels under uniaxial compression - In Steel Plated Structures - An International Symposium, edited by P.J. Dowling, J.E. Harding and P.A. Frieze, pp. 1-23, Crosby Lockwood Staples London (1977).

[157] LANNOY, F.G. - Triangular finite elements and numerical integration - Computers & Structures, vol. 7, p. 613 (1977).

APÊNDICE A

COORDENADAS TRIANGULARES

Neste apêndice são apresentadas as equações básicas necessárias para desenvolver formulações de elementos finitos triangulares usando coordenadas triangulares.

A.1) DEFINIÇÃO DA POSIÇÃO DE UM PONTO ATRAVÉS DE COORDENADAS TRIANGULARES.

A posição de um ponto P qualquer de um triângulo é definida pelas coordenadas cartesianas x e y conforme indicado na figura (A.1). Nesta figura, os nós 1, 2 e 3 situam-se nos vértices do triângulo. Cada lado do triângulo tem o número do nó situado no vértice oposto, isto é, o lado 1 é definido pelos vértices 2 e 3, e assim por diante.

Unindo-se por linhas retas o ponto P e os nós 1, 2 e 3 dividi-se o triângulo em três áreas (Figura (A.2)). A cada área dá-se o número do nó situado no vértice oposto.

A soma das três áreas é igual a área total A:

$$A_1 + A_2 + A_3 = A \qquad (A.1)$$

A posição do ponto P pode ser definida tanto pelas coordenadas cartesianas x e y quanto pelas áreas A_1, A_2 e

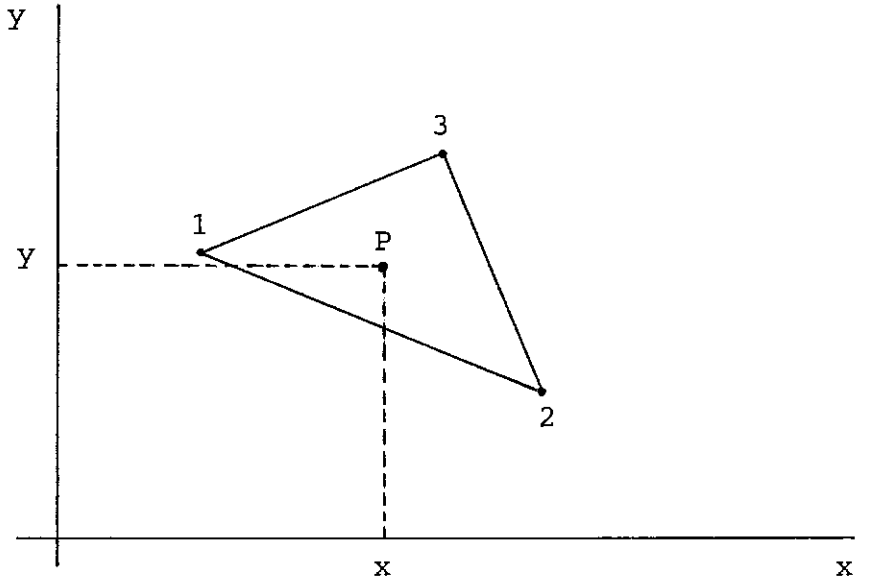


Figura A.1 - Localização de um ponto P qualquer em coordenadas cartesianas.

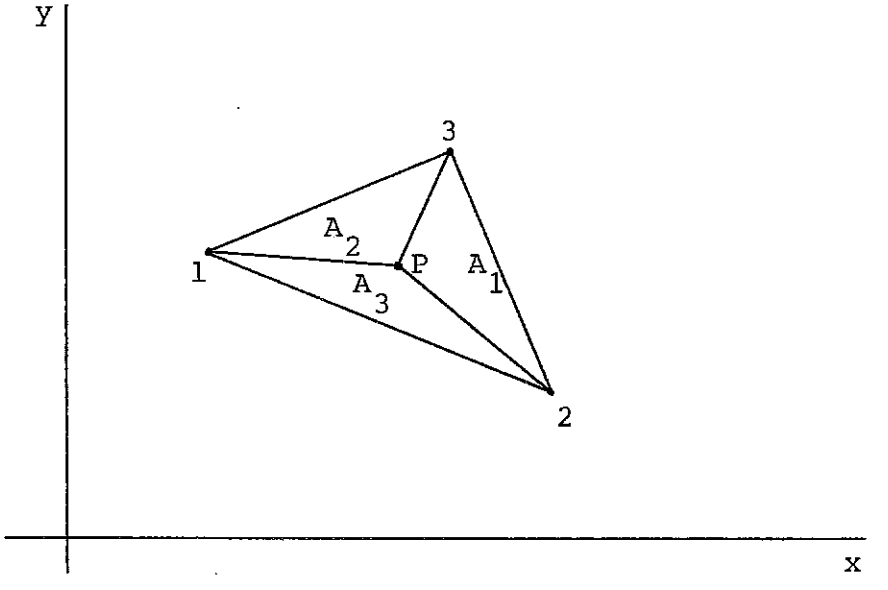


Figura A.2 - Localização de um ponto P qualquer em coordenadas triangulares.

A_3. As coordenadas triangulares L_1, L_2 e L_3 são determinadas em função das áreas A_1, A_2 e A_3 através das seguintes equações :

$$L_1 = \frac{A_1}{A} \qquad \text{(A.2a)}$$

$$L_2 = \frac{A_2}{A} \qquad \text{(A.2b)}$$

$$L_3 = \frac{A_3}{A} \qquad \text{(A.2c)}$$

Isolando-se A_1, A_2 e A_3 nas equações (A.2) e substituindo em (A.1) tem-se

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \qquad \text{(A.3)}$$

A relação entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas triangulares é dada por [124]:

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 \qquad \text{(A.4a)}$$

$$y = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 \qquad \text{(A.4b)}$$

Onde,

x_i - coordenada x do nó "i"

y_i - coordenada y do nó "i"

A.2) DERIVAÇÃO DE FUNÇÕES

Apenas duas das três coordenadas triangulares são linearmente independentes. Fixando-se a coordenada L_3 como linearmente dependente obtem-se, a partir da equação (A.3):

$$L_3 = 1 - L_1 - L_2 \qquad \text{(A.5)}$$

Fazendo a derivação parcial de L_3 em relação a L_1 e L_2 obtem-se :

$$\frac{L_3}{L_1} = -1 \qquad \text{(A.6a)}$$

$$\frac{L_3}{L_2} = -1 \qquad \text{(A.6b)}$$

As derivadas parciais de uma função $f = f(L_1, L_2, L_3)$

em relação a L_1 e L_2 são dadas por [124]:

$$\frac{\partial f}{\partial L_1} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial L_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial L_1} \qquad \text{(A.7a)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial L_2} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial L_2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial L_2} \qquad \text{(A.7b)}$$

As derivadas parciais de x e y em relação a L_1 e L_2 são dadas por:

$$\frac{\partial x}{\partial L_1} = x_{13} \qquad \text{(A.8a)}$$

$$\frac{\partial x}{\partial L_2} = x_{23} \qquad \text{(A.8b)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial L_1} = y_{13} \qquad \text{(A.8c)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial L_2} = y_{23} \qquad \text{(A.8d)}$$

Onde,

$$x_{13} = x_1 - x_3 \qquad \text{(A.9a)}$$

$$x_{23} = x_2 - x_3 \tag{A.9b}$$

$$y_{13} = y_1 - y_3 \tag{A.9c}$$

$$y_{23} = y_2 - y_3 \tag{A.9d}$$

Substituindo as equações (A.8) nas equações (A.7) e colocando em forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial L_1} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial L_2} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{J} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{A.10a}$$

Onde,

$$\underset{\sim}{J} = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix} \tag{A.10b}$$

As derivadas parciais de uma função $f = f(x,y)$ em relação a x e y são determinadas invertendo-se a equação

(A.10a).

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{J}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial L_1} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial L_2} \end{bmatrix} \qquad \text{(A.11a)}$$

Onde

$$\underset{\sim}{J}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} \\ \\ x_{32} & x_{13} \end{bmatrix} \qquad \text{(A.11b)}$$

$$y_{31} = -y_{13} \qquad \text{(A.11c)}$$

$$x_{32} = -x_{23} \qquad \text{(A.11d)}$$

Escrevendo a equação (A.11a) em forma expandida tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2A} y_{23} \frac{\partial f}{\partial L_1} + \frac{1}{2A} y_{31} \frac{\partial f}{\partial L_2} \qquad \text{(A.12a)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\,A}\, x_{32}\, \frac{\partial f}{\partial L_1} + \frac{1}{2\,A}\, x_{13}\, \frac{\partial f}{\partial L_2} \qquad \text{(A.12b)}$$

Derivando a equação (A.12a) em relação a x, a equação (A.12b) em relação a y e a equação (A.12a) em relação a y obtem-se:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{4\,A^2}\,(y_{23})^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial L_1^2} + \frac{2}{4\,A^2}\,y_{23}\,y_{31}\,\frac{\partial^2 f}{\partial L_1\,\partial L_2} + \frac{1}{4\,A^2}\,(y_{31})^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial L_2^2} \qquad \text{(A.13a)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{4\,A^2}\,(x_{32})^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial L_1^2} + \frac{2}{4\,A^2}\,x_{32}\,x_{13}\,\frac{\partial^2 f}{\partial L_1\,\partial L_2} + \frac{1}{4\,A^2}\,(x_{13})^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial L_2^2} \qquad \text{(A.13b)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{4\,A^2}\,y_{23}\,x_{32}\,\frac{\partial^2 f}{\partial L_1^2} + \frac{1}{4\,A^2}\,(y_{23}\,x_{13} + y_{31}\,x_{32})\,\frac{\partial^2 f}{\partial L_1\,\partial L_2} + \frac{1}{4\,A^2}\,y_{31}\,x_{13}\,\frac{\partial^2 f}{\partial L_2^2} \qquad \text{(A.13c)}$$

Colocando as equações (A.13) em forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{T} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial L_1^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial L_2^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial L_1 \, \partial L_2} \end{bmatrix} \qquad \text{(A.14a)}$$

Onde

$$\underset{\sim}{T} = \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} (y_{23})^2 & (y_{31})^2 & 2\, y_{23}\, y_{31} \\ (x_{32})^2 & (x_{13})^2 & 2\, x_{32}\, x_{13} \\ y_{23}\, x_{32} & y_{31}\, x_{13} & (y_{23}\, x_{13} + y_{31}\, x_{32}) \end{bmatrix} \qquad \text{(A.14b)}$$

A.3) INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES

Uma integral de área definida em coordenadas cartesianas é transformada para coordenadas triangulares da seguinte forma [106]:

$$\int_A F(x,y)\, dA = \int_A F(L_1, L_2, L_3)\, |J|\, dL_1\, dL_2 \qquad \text{(A.15)}$$

Onde

$|J|$ - determinante da matriz jacobiana definida na equação (A.10b).

Qaundo a integração é feita explicitamente os polinômios em coordenadas triangulares são integrados através da seguinte equação [124]:

$$\int_A L_1^r L_2^s L_3^t \, dA = \frac{r!\, s!\, t!}{(r + s + t + 2)!} \, 2A \qquad (A.16)$$

O símbolo n! na equação (A.16) é lido "n fatorial" e significa:

$$n! = n(n-1)\,(n-2)\ldots(2)(1) \qquad (A.17)$$

É convenção adotar-se o valor unitário para 0!.

Quando a integração é feita numericamente a integral do lado direito da equação (A.15) é substituída por um somatório da seguinte forma:

$$\int_A F \, J \, dL_1 \, dL_2 = \sum_{i=1}^{4} F_i \, |J| \, w_i \qquad (A.18a)$$

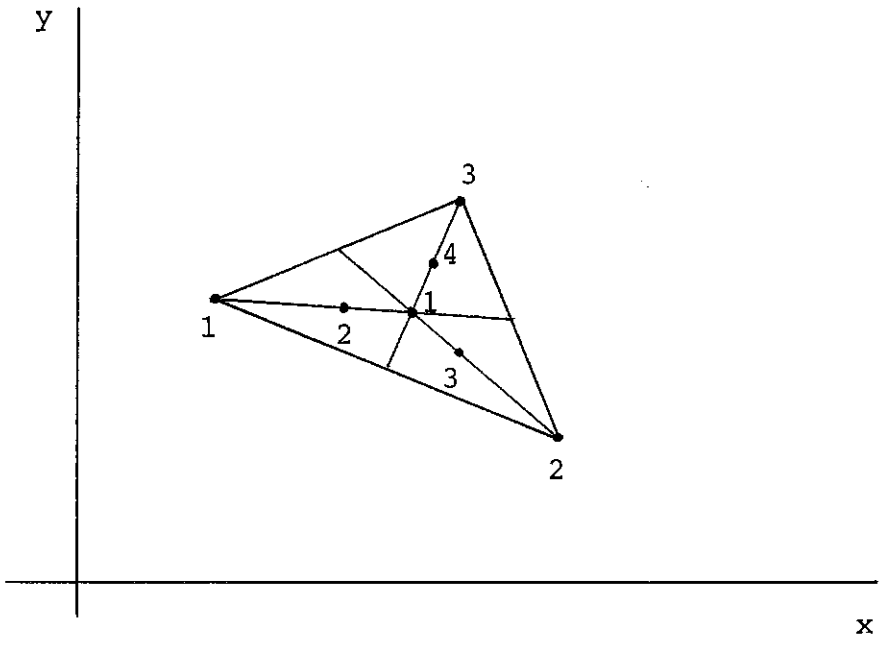


Figura A.3 - Posição dos quatro pontos de integração

Tabela A.1

Ponto de Integração	Coordenadas Triangulares			Peso
	L_1	L_2	L_3	
1	1/3	1/3	1/3	- 27/96
2	0.6	0.2	0.2	25/96
3	0.2	0.6	0.2	25/96
4	0.2	0.2	0.6	25/96

Onde

F = valor da função $F(L_1, L_2, L_3)$ no ponto de integração "i".

w_i = pêso correspondente ao ponto de integração "i".

A utilização de quatro pontos de integração (Figura (A.3)) garante, de acordo com Lannoy [154], a integração exata de polinômios de terceiro grau em termos de coordenadas triangulares.

A posição e o peso correspondente a cada um dos quatro pontos de integração encontra-se na tabela A.1. O ponto 1 corresponde ao centro de gravidade do triângulo e os outros três são dispostos simetricamente.

APÊNDICE B

CARACTERÍSTICAS DO PROGRAMA CALCAE1

O CALCAE1 é um programa de análise não-linear estática, baseado no Método dos Elementos Finitos, que utiliza um algoritmo incremental-iterativo para analisar estruturas laminares em geral.

Encontram-se implementados os seguintes elementos finitos : um elemento escalar (mola não-linear generalizada), três versões do elemento de pórtico enrijecedor de dois nós (elasto-plástico, não-linear geométrico e elasto-plástico não-linear geométrico) e três versões do elemento triangular de casca de três nós (elasto-plástico, não-linear geométrico e elasto-plástico não-linear geométrico).

Existem quatro opções de algoritmos para realização de iterações : o MNR (Método de Newton-Raphson), o MNM (Método de Newton-Raphson Modificado), o MTI (Método da Tensão Inicial) e o MTM (Método da Tensão Inicial Modificado).

O teste de convergência pode ser feito através de três critérios : o critério de deslocamento, o critério de força e o critério de energia.

Análises não-lineares podem ser realizadas em várias etapas, de forma semi-interativa, através da utilização do procedimento de SALVA/RECUPERA ("SAVE/RESTORE"). Este

procedimento foi implementado de forma a permitir a redefinição dos dados de análise (carregamentos, estratégia de aplicação das cargas,tolerância dos testes de convergência,etc.) no início de cada nova etapa.

A consideração de tensões iniciais é feita através de um programa pré-processador, o TENSIN, que tem as seguintes funções :

- Leitura de forças nodais no sistema de referência local excêntrico dos elementos de pórtico.
- Leitura de tensões generalizadas de membrana e de flexão no sistema de referência local dos elementos de casca.
- Montagem e gravação do vetor de forças internas da estrutura correspondente aos esforços iniciais lidos.
- Gravação de um arquivo com os esforços iniciais lidos e todas as outras variáveis requeridas pelo CALCAE para reiniciar uma análise através do procedimento de SALVA/RECUPERA.

Os carregamentos são constituídos exclusivamente por cargas (força e momentos) concentradas nos nós. Podem ser definidos vários carregamentos, correspondendo uma função-carga diferente a cada um deles.