LORANE-NL - UMA LINGUAGEM ORIENTADA À ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO-LINEAR

Nelson Francisco Favilla Ebecken

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.).

Aprovada por:

Agustin Juan Ferrante
Presidente

Fernando Luiz Lobo B. Carneiro

Fernando Venâncio Filho

Luiz Bevilacqua

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
JUNHO DE 1977

à Silvana

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Agustin J. Ferrante pelo apoio e orientação prestada a este trabalho.

Ao Professor Fernando Luiz Lobo B. Carneiro pelos ensinamentos e incentivos recebidos.

Ao Professor Edison C. Prates de Lima pela amizade e colaboração dispensada.

Aos Professores de todas disciplinas cursadas,e em especial ao Professor Luiz Bevilacqua.

A todos membros da equipe LORANE pelo auxílio concedido.

Ao corpo docente da COPPE, na pessoa de seu diretor, Professor Sergio Neves Monteiro, pelo incentivo à Pós-Graduação.

A Helena Santos de Oliveira e Raymundo Doria Soares pela esmerada confecção gráfica deste trabalho.

RESUMO

O objetivo do presente trabalho é a implementação de um sistema computacional para a análise não-linear estática e dinâmica, fazendo uso do método dos elementos finitos. Este sistema, de nome LORANE-NL, foi projetado como linguagem orientada, e inclui comandos flexíveis e uma considerável biblioteca de elementos.

Os procedimentos computacionais implementados se destinam a análise de grandes deslocamentos e grandes deformações, através de soluções incrementais com verificações de equilíbrio .

Nesta apresentação, diferentes formulações são comentadas, assim como as técnicas numéricas mais importantes. Descrevem-se as características mais relevantes dos elementos implementados, e a estrutura e possibilidades dos comandos.

Finalmente, alguns exemplos ilustrativos são discutidos.

ABSTRACT

The objective of the present work is the implementation of a computer system for static and dynamic nonlinear analysis, based on the finite element method. That system, called LORANE-NL, was designed as a problem oriented language, including very powerful and flexible commands, and a large elements types library. The computational procedures implemented so far, allow for the analysis of large displacements and large strains, through the use of incremental solutions with equilibrium checking.

In this presentation, a review of the different formulations, available and the more important numerical techniques applied is included. The characteristics of the element types implemented are then described, and the structure and capabilities of the user oriented commands are presented.

Finally, several illustrative examples are discussed.

ÍNDICE

I - INTRODUÇÃO

1.1 - Análise Não-Linear pelo Método dos Elementos Finitos 1

1.2 - Programas Gerais para Análise Não-Linear 5

1.3 - Características Gerais do Sistema LORANE-NL 9

1.4 - Procedimentos de Análise do LORANE-NL 10

II - FORMULAÇÃO DA MECÂNICA DO CONTÍNUO - EQUAÇÕES INCREMENTAIS DE MOVIMENTO

2.1 - Aspectos Gerais 12

2.2 - Formulação Lagrangeana 15

2.3 - Relações Constitutivas 25

2.4 - Discretização pelo Método dos Elementos Finitos. 26

III - MÉTODOS NUMÉRICOS

3.1 - Solução de Problemas Estáticos 32

3.2 - Solução de Problemas no Sistema LORANE-NL 37

3.3 - Solução de Problemas Dinâmicos 47

3.4 - Solução de Problemas Dinâmicos no Sistema LORANE NL 54

IV - ALGUNS MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS

4.1 - Introdução 61

4.2 - Treliça 65

4.3 - Pórtico Plano 71

4.4 - Pórtico Espacial 77

4.5 - Estado Plano e Sólido Axissimétrico 79

4.6 - Degenerados Bidimensionais 90

4.7 - Degenerados Tridimensionais 92

4.8 - Estruturas Poliédricas 95

V - COMANDOS DA LINGUAGEM

5.1 - Comandos do LORANE-LINEAR 99

5.2 - Comandos do LORANE-DINA 101

5.3 - Comandos Específicos do LORANE-NL 103

5.4 - Especificação de Cargas no LORANE-NL 108

5.5 - Aplicação 108

VI - EXEMPLOS DE UTILIZAÇÃO

6.1 - Introdução 113

6.2 - Estrutura Reticulada Tridimensional - Análise Estática 113

6.3 - Estrutura Reticulada Plana - Análise Estática e Dinâmica 118

6.4 - Casca Esférica - Análise Dinâmica 122

6.5 - Comportamento Pós-Crítico de Placa com Imperfeição 127

6.6 - Casca Cilíndrica Engastada - Análise Estática .. 130

6.7 - Torre de Resfriamento - Ação do Vento 133

VII - CONCLUSÃO 140

BIBLIOGRAFIA 144

SIMBOLOGIA 162

I - INTRODUÇÃO

1.1 - ANÁLISE NÃO-LINEAR PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A análise não-linear de estruturas complexas, por métodos numéricos orientados à computação, tem assumido recente - mente grande importância em muitas áreas da engenharia. Isto decorre da ênfase que se tem dado em estudar modelos mais realísticos e efetuar análises precisas de componentes estruturais críticos.

Este empenho induziu a incorporação de possibilidades não-lineares em programas de análise linear já implementados, e o desenvolvimento de novos sistemas especialmente destinados à análise não-linear.

A necessidade de se poder contar com capacidades de análise não-linear foi inicialmente sentida na indústria aeroespacial pela demanda de projetos que implicavam em investigações de novos conceitos estruturais e novas técnicas de fabricação. Os avanços tecnológicos exigiram o estudo de modelos apurados de importantes componentes estruturais e de suas respostas sob condições ambientais extremas. Progresso substancial em procedimentos de discretização e métodos para solução de problemas não-lineares, ao lado da disseminação de "software" conveniente, auxiliaram a tendência de se estender a análise estrutural não-linear a outros campos, como na engenharia nuclear, mecânica, civil e do petróleo.

Dentre os sistemas estruturais frequentemente sujeitos a efeitos não-lineares significantes destacam-se: cascas delgadas, reatores nucleares, sistemas de cabos, estruturas pneumáticas, vaso de pressão, propelentes sólidos, equipamentos que sofreram esforços de montagem, estruturas subterrâneas, plataformas

marítimas e outras.

Fontes de não-linearidade podem ser categorizadas como se segue:

1 - Não-Linearidades Geométricas

2 - Condições de Contorno Cinemáticas Não-Lineares

3 - Equações Constitutivas Não-Lineares

4 - Solicitações Dependentes das Deformações

Não-Linearidades geométricas incluem os efeitos geométricos da consideração de grandes deslocamentos e grandes deformações.

Condições de contorno não-lineares ocorrem em problemas de abertura ou fechamento de falhas do contínuo, de fronteiras deslizantes, etc.

A análise de equações constitutivas não-lineares é englobada no estudo de não-linearidades físicas, como por exemplo, de meios elasto-plásticos.

Solicitações dependentes das deformações formam a categoria de problemas de cargas não-conservativas.

Certamente alguns outros efeitos poderiam ser relacionados.

O desenvolvimento de procedimentos de análise não-linear pelo método dos elementos finitos é baseado essencialmente no conhecimento de três diferentes áreas: mecânica do contínuo, procedimentos de análise numérica e implementação computacional . Os temas principais a estudar, em cada uma dessas áreas, com vistas a implementação de sistemas para análise não linear, estão sumarizados na Tabela (1.1).

MECÂNICA DO CONTÍNUO	MÉTODOS NUMÉRICOS	TÉCNICAS COMPUTACIONAIS
1 - Formulação das Equações de Movimento	1 - Integração Numérica no Espaço	1 - Métodos de Programação
2 - Desenvolvimento de Elementos Finitos	2 - Solução de Sistemas de Equações	2 - Uso de "Hardware" e "Software" Disponíveis
3 - Desenvolvimento de Modelos de Materiais	3 - Cálculo de Autovalores	3 - Estruturas de Dados
	4 - Integração Numérica no Tempo	4 - Flexibilidade para Modificações
		5 - Organização Efi - ciente de Programas

TABELA 1.1

Embora estas disciplinas possam ser identificadas separadamente, é importante ressaltar que para o desenvolvimento de técnicas efetivas de análise não linear pelo método dos elementos finitos, é necessário considerar a interação que existe entre elas.

É interessante notar que o desenvolvimento original do método dos elementos finitos foi dirigido a solução de problemas dinâmicos (Turner[2]) . Deu-se ênfase rápidamente a análise estática linear, e apenas recentemente, pode-se contar com considerável potencial para resolver complexos problemas da dinâmica estrutural, linear ou não-linear.

Os primeiros exemplos da literatura do método dos elementos finitos para a solução de problemas dinâmicos são os de Klein[3] e Popov[4], onde a resposta de uma casca esférica abatida submetida a carga súbita é computada.

Aplicações mais recentes e gerais de problemas lineares foram ilustradas, por exemplo, por Clough[5], para vasos de contenção, barragens e outras estruturas complexas.

Embora a análise não-linear de problemas estáticos fazendo uso do método dos elementos finitos tenha sido formulada por Turner[6] em 1960, apenas dez anos depois, resultados do correspondente problema dinâmico foram obtidos por Stricklin[7]. No caso de Turner[6], as equações eram resolvidas incrementalmente, e o comportamento assumido linear para cada incremento, ficando o problema reduzido a uma série de problemas lineares.

Posteriormente Klein[8] estendeu o estudo à análise não-linear dinâmica de cascas axissimétricas, incluindo propriedades assimétricas da estrutura e do carregamento.

A análise de problemas não-lineares pelo método dos elementos finitos, na mecânica dos sólidos tem sido continuamente aperfeiçoada. Ultimamente vários sistemas computacionais foram implementados com esse propósito.

No presente trabalho, procedimentos eficientes para a análise não-linear são discutidos e apresentados sob a forma de uma linguagem de computador orientada ao usuário, de nome LORANE-NL. Destina-se especialmente à solução de problemas estruturais não-lineares, estáticos e dinâmicos, pelo método dos elementos finitos. Sua implantação é justificada por várias razões.

Parte dos sistemas computacionais de uso para a análise não-linear são orientados a um tipo de não-linearidade específica e encontram-se visivelmente superados. Foram criados como extensões de uma versão linear original e quase sempre são computacionalmente deficientes. As estruturas internas não são, em geral, disponíveis, o que elimina toda a flexibilidade de se poder efetuar modificações e ampliações. Na maior parte dos casos, o nível de comunicação com o usuário é bastante limitado e

confuso.

Além disso, um computador de quarta geração , necessita ter "software" adequado, que explore todas as capacidades modernas que são oferecidas. No caso, o sistema BURROUGHS B-6700, é carente de "software", ou possui apenas "software" adaptado.

Desta forma, a linguagem LORANE-NL, além de completar as facilidades desenvolvidas na família de linguagens LORANE, pretende preencher essa lacuna, com procedimentos gerais e flexíveis, para a solução de problemas não-lineares.

1.2 - PROGRAMAS GERAIS PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR

Em relação ao tipo de análise que efetuam, os programas gerais para análise não-linear pelo método dos elementos finitos podem ser classificados em dois grupos:

1 - Programas gerais especialmente projetados para fornecer uma ferramenta eficiente de uma ampla faixa de problemas não-lineares. Entre eles destacam-se: ASKA, ANSYS, MARC, NEPSAP e NONSAP.
A organização desses programa é bem adaptada para efetuar análises não-lineares e dependentes do tempo. Geralmente incluem comportamento pós-crítico e variadas opções de análise.

2 - Programas gerais com limitada capacidade de análise não-linear (por exemplo NASTRAN). São quase sempre estruturados para aplicar o módulo de análise linear em forma incremental, com periódicas correções na geometria, propriedades e cargas do sistema.
As equações incrementais são extremamente próximas às equações da formulação clássica linear. Alguns deles simplesmente transferem todos os termos não-lineares para o segundo membro como pseudo-forças. Em geral, programas desta classe,não são adequados para o tratamento de problemas fortemente não-lineares.

Na formulação e programação da linguagem LORANE-NL pretendeu-se aproveitar ao máximo da experiência e resultados que foram obtidos na implementação desses sistemas. As características mais significativas dos programas gerais de análise não-linear pelo método dos elementos finitos são comentadas a seguir.

ICES-STRUDL(13)

O sistema ICES-STRUDL, fornece facilidades para a análise estática do comportamento não-linear geométrico, e para o cálculo de cargas de flambagem linear de limitada classe de problemas.

Soluções incrementais e iterativas com o uso do método de Newton-Raphson e substituição sucessiva estão disponíveis, para pórticos planos e espaciais, cascas abatidas e placas.

Como para a análise linear, sua utilização é simples e de fácil aprendizado. Não se tem conhecimento de aplicações a problemas práticos.

ANSYS(14)

O programa ANSYS tem capacidade para efetuar análise de pequenas deformações plásticas, fluência, grandes deslocamentos e flambagem.

Encontrou grande aplicação na análise de reatores nucleares. A integração direta das equações de movimento de problemas não-lineares dinâmicos, é implícita, e com uso de rigidez tangente.

Não computa forças residuais para verificação de

equilibrio. É fortemente dirigido a análise não-linear física.

Sua biblioteca de elementos é também reduzida, ainda que suficiente para a maior parte dos problemas da engenharia.

MARC-CDC(15)

MARC-CDC é um sofisticado e versátil programa que inclui extensa biblioteca de elementos, isoparamétricos e para cascas, e uma variedade de modelos de materiais.

Plasticidade, fluência e uso de formulação Lagrangeana de grandes deformações fazem parte de suas disponibilidades.

As equações de equilíbrio são resolvidas pelo método de redução de Crout ou por um algoritmo "over-relaxation" em blocos.

A resposta dinâmica é obtida pela integração direta das equações de movimento pelos métodos de Newmark, Houbolt e diferença central. Superposição modal é também incluída, ainda que não totalmente desenvolvida.

É geralmente criticado pela complexidade da entrada de dados e pela pouca flexibilidade para resultados, como por exemplo, fornecer tensões apenas nos pontos de integração sem especificar as coordenadas desses pontos.

NASTRAN(16)

O programa NASTRAN possui alguns componentes para análise não-linear: análise incremental linearizada para comportamento não-linear físico, análise de flambagem linear clássica e limitada capacidade para introduzir cargas pseudo-não-lineares na análise dinâmica.

Nenhuma publicação apresenta resultados de problemas transientes resolvidos com estas técnicas, devido evidentemente, aos problemas básicos da implementação desse módulo para a análise não-linear: a rigidez geométrica não pode ser definida em termos de tensões atuais, as coordenadas nodais não são corrigidas, etc.

NEPSAP(17)

No programa NEPSAP uma formulação Lagrangeana é implementada com relações constitutivas incrementais para grandes deformações desacopladas de termo-elasto-plasticidade e fluência.

As equações de equilíbrio consistem de matrizes de rigidez ordinárias e matrizes de rigidez geométricas, e o vetor de carga inclui cargas mecânicas, tensões iniciais e cargas residuais.

Efetua verificações de equilíbrio, corrigindo as forças não-balanceadas. Não oferece facilidades para problemas dependentes do tempo.

NONSAP(18,19)

NONSAP é uma extensão da família de programas SAP para incluir o comportamento não-linear estático e dinâmico.

Todo o seu desenvolvimento foi dirigido fundamentalmente a problemas bidimensionais. Nesse tipo de estruturas formulações Eulerianas e Lagrangeanas são disponíveis para efetuar análises de grandes deformações elásticas, hipoelásticas e hiperelásticas com o uso de elementos isoparamétricos.

Para a integração direta das equações de movimento

os métodos de Wilson e Newmark podem ser empregados.

Possui ainda capacidade para efetuar análise de pequenas deformações elásticas de treliças e sólidos tridimensionais.

O programa ADINA[20] é uma versão acrescida de pequenas melhorias.

ASKA(27,28)

O sistema ASKA contém não-linearidade física, que inclui fluência e plasticidade.

O programa é restrito a pequenas deformações e materiais isótropos, porém com propriedade dependentes da temperatura.

Um número limitado de elementos bi e tri-dimensionais encontra-se implementado, fazendo uso do método das deformações iniciais. Além disso, em um pequeno módulo separado, oferece a possibilidade de análise de flambagem linear clássica. (ASKA III).

Não dispõe de nenhum recurso para efetuar análise não-linear geométrica. É também limitado a análise estática apenas.

1.3 - CARACTERÍSTICAS GERAIS DO SISTEMA LORANE-NL.

O sistema LORANE-NL é uma linguagem orientada à análise não-linear estática e dinâmica de estruturas pelo método dos elementos finitos fundamentalmente baseada nos conceitos criados pelos sistemas LORANE e LORANE-DINA (25, 26).

Nestas linguagens as características dos computa-

II - FORMULAÇÃO DA MECÂNICA DO CONTÍNUO - EQUAÇÕES INCREMENTAIS DE MOVIMENTO -

2.1 - ASPECTOS GERAIS

Na análise dinâmica não-linear pelo método dos elementos finitos, envolvendo grandes deslocamentos, grandes deformações e não-linearidades físicas é necessário recorrer-se a uma formulação incremental das equações de movimento.

Várias formulações são utilizadas na prática. Algumas gerais, e outras restritas a não-linearidades do material constitutivo, ou a grandes deslocamentos apenas, não podendo ser aplicadas em grandes deformações, ou limitadas a certos tipos de elementos.

A consideração de grandes deslocamentos e grandes deformações não é muito frequente nas aplicações do método dos elementos finitos à análise dinâmica não-linear.

A formulação do método dos elementos finitos para análises não-lineares, compreende a formulação cinemática do problema com o uso de princípios da mecânica do contínuo, a identificação de relações constitutivas e finalmente a discretização das equações resultantes.

Neste capítulo tratam-se desses aspectos individuais, e discutem-se as relações importantes entre eles.

Na análise dinâmica é necessário recorrer-se a integração numérica no tempo das equações de movimento. Extensiva pesquisa é atualmente dirigida ao desenvolvimento de esquemas de integração, estáveis e precisos. Para isso entretanto, é imprescindível o uso de uma formulação não-linear consistente.

- Análise Dinâmica Incremental
- Análise Dinâmica Incremental com Verificação de Equilíbrio

Juntamente com os procedimentos citados, todas as facilidades do sistema LORANE, como geração automática de dados, e do sistema LORANE-DINA, como a possibilidade de elementos escalares, permanecem disponíveis.

Essas análises podem ser conduzidas com bastante flexibilidade, sendo possível especificar intervalos de tempo para a atualização das matrizes dos efeitos não-lineares, para a verificação do equilíbrio, etc.

Fornece também controle sistemático de erros e possibilidade de se ter acesso a matrizes intermediárias da análise.

Espera-se desta forma, ter-se reunido suficientes facilidades de análise para efetuar com versatilidade, pesquisa do comportamento não-linear e cálculo desses efeitos em problemas práticos da engenharia.

As primeiras aplicações do método dos elementos finitos à análise não-linear, eram essencialmente baseadas em extensões da análise linear, e foram desenvolvidas para aplicações específicas. Os procedimentos eram principalmente dirigidos em base intuitiva para se obter soluções de problemas particulares considerados.

Para eliminar tais limitações, deve-se desenvolver uma formulação geral, por exemplo, fazendo uso de elementos isoparamétricos e derivados.

O procedimento de discretização por elementos finitos isoparamétricos provou ser eficaz em muitas aplicações e recentemente mostrou que formulações não-lineares gerais, baseadas diretamente em princípios da mecânica do contínuo, podem ser eficientemente automatizadas. Porém a linguagem LORANE-NL inclui também outros tipos de elementos, não necessáriamente isoparamétricos.

Basicamente dois enfoques distintos surgem na análise não-linear incremental pelo método dos elementos finitos.

No primeiro, as variáveis estáticas e cinemáticas são referidas a uma configuração atualizada em cada incremento de carga. Este procedimento é conhecido por formulação Euleriana ou de coordenadas móveis (descrição espacial).

Algumas formas dessa formulação aparecem em aplicações das referências de Murray[69], Felippa[70], Yaghmai[71,72] Farhomand[73], Popov[74], Yamada[75], Stricklin[75,76], Heifitz[77], Wilson[78], etc.

No segundo enfoque, que é geralmente conhecido por formulação Lagrangeana, todas variáveis estáticas e cinemáticas

dores de quarta geração são exploradas (BURROUGHS B-6700).

O LORANE-NL mantém as facilidades do interpretador e estrutura de dados do LORANE e LORANE-DINA, colocando a disposição do usuário métodos e procedimentos numéricos próprios da análise não-linear.

A definição de um problema é feita com os comandos orientados dessas duas linguagens e alguns comandos adicionais que serão comentados no Capítulo V.

O LORANE-NL foi projetado para efetuar análise não linear geométrica e física.

Trata-se no presente trabalho, basicamente dos problemas de não-linearidade geométrica que envolvem os procedimentos mais gerais da análise não-linear. A análise não-linear física, motivo das referências (60, 61, 62 e 63) encontra-se em desenvolvimento.

Formulações Lagrangeanas e Eulerianas para a análise de grandes deslocamentos e grandes deformações elásticas estão implementadas para um considerável conjunto de tipos de análise.

Procurou-se selecionar métodos numéricos, que cuidadosamente programados, minimizassem o esforço computacional, crítico em problemas não-lineares.

1.4 - PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DO LORANE-NL

O LORANE-NL tem capacidade para efetuar os seguintes tipos básicos de análise não-linear:

- Análise Estática Incremental
- Análise Estática Iterativa
- Análise Estática Incremental com Verificação de Equilíbrio

são referidas à configuração inicial (descrição material). Esse procedimento é usado em Oden[43,44,46,47], Marcal[79], Hibbit[80], Larsen[81], McNamara[82], Stricklin[83], etc.

É evidente que com diferentes formulações disponíveis, para o desenvolvimento de um programa geral de análise dinâmica não-linear, uma decisão deve ser feita em relação ao referencial adequado a cada modelo.

Uma consideração importante é que usando uma formulação baseada nos princípios da mecânica do contínuo, com todos efeitos não-lineares incluidos, resultados idênticos devem ser obtidos nos dois casos.

Stricklin[76] discute uma formulação de coordenadas móveis e uma Langrangeana e conclui ser a última mais geral e mais eficiente computacionalmente.

Yamada[75] compara uma formulação Lagrangeana e uma Euleriana para uma estrutura simples de treliça, obtendo uma diferença de 25% em deslocamentos.

Dupuis[86] para estruturas de arco, também comenta divergências que ocorrem em respostas de duas formulações .

Em Bathe[85] formulações gerais derivadas do princípio básico dos trabalhos virtuais, válidas para não-linearidade física, grandes deslocamentos e grandes deformações, são desenvolvidas, mostrando que na teoria não existe nenhuma diferença entre a formulação Lagrangeana e a Euleriana.

Qualquer discrepância nos resultados numéricos decorre do fato de que diferentes descrições do comportamento do material são empregadas, e que, se as constantes do material são transformadas apropriadamente resultados idênticos são obtidos. A

questão de qual formulação utilizar, depende meramente da eficiência numérica do método implementado.

A diferença importante entre os dois enfoques é que na formulação Lagrangeana a atenção é retida no material propriamente, que se move, enquanto que na formulação Euleriana, procura-se focalizar o que acontece em regiões específicas do espaço.

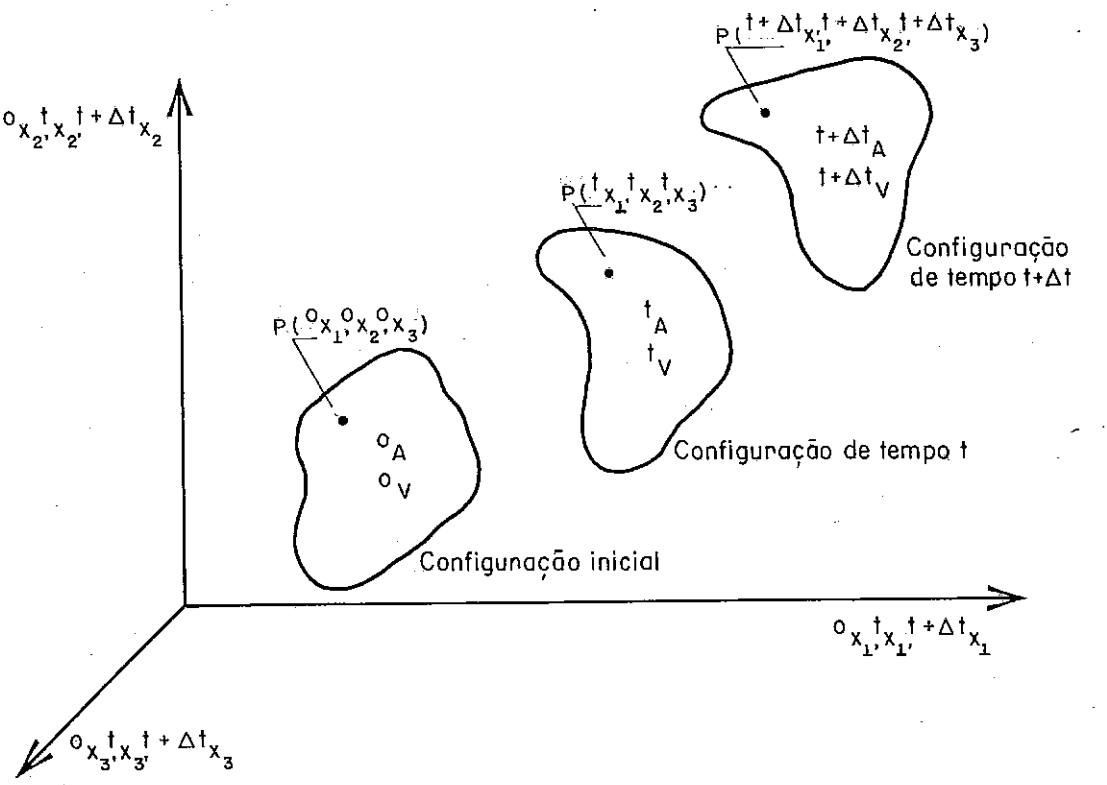
Formulações Eulerianas são preferidas na mecânica dos fluidos, e descrições Lagrangeanas são amplamente usadas nas aplicações do método dos elementos finitos aos problemas da mecânica dos sólidos.

No âmbito da mecânica dos sólidos, devido a que o contorno do corpo em estudo varia durante a história da solução, é natural que se use uma descrição que acompanhe o material do corpo.

Logicamente para estruturas de corpos orientados, quando limitações são introduzidas, como por exemplo, pequenas rotações, simplificações são procedidas às formulações gerais (1) .

2.2 - FORMULAÇÃO LAGRANGEANA

Para estabelecer-se uma formulação Lagrangeana, considere-se um corpo genérico sujeito a grandes deslocamentos, grandes deformações e relações constitutivas lineares e não-lineares (Figura 2.1).



SISTEMA CARTESIANO DE REFERÊNCIA

Figura 2.1

O movimento do corpo é descrito em coordenadas cartesianas e a coordenada de um ponto é denotada por $^{o}x_i$ no tempo zero, $^{t}x_i$ no tempo t e $^{t+\Delta t}x_i$ no tempo $t+\Delta t$ com i=1,2,3.

Assim tem-se:

$$^{t+\Delta t}x_i = {}^{o}x_i + {}^{t+\Delta t}u_i \qquad (2.1)$$

$$^{t}x_i = {}^{o}x_i + {}^{t}u_i \qquad (2.2)$$

onde $^{t}u_i$ $^{t+\Delta t}u_i$ são as componentes cartesianas dos deslocamen-

tos do ponto nos tempos t e Δt, respectivamente. O incremento de deslocamento do tempo t ao tempo $t+\Delta t$ é definido por u_i, e então:

$$u_i = {}^{t+\Delta t}u_i - {}^{t}u_i \tag{2.3}$$

As equações de equilíbrio podem ser derivadas pelo princípio dos deslocamentos virtuais. Este princípio é usado para formular a solução pelo método dos elementos finitos, modelo deslocamento, que é atualmente considerado ser mais efetivo. Para tal, considere-se que a solução do corpo sob carregamento estático e dinâmico é requerida nos tempos 0, Δt, $2\Delta t$, ... t, $t+\Delta t$, ... e assuma-se que já é conhecida até o tempo t.

Para calcular a solução no tempo $t+\Delta t$ dois caminhos podem ser seguidos e levam à integração no tempo implícita e explícita.

Para integração explícita no tempo as equações de equilíbrio são estabelecidas no tempo t. O maior inconveniente dessa formulação para aplicações práticas é que pequenos incrementos de tempo devem ser usados, mesmo que a relação constitutiva permita incrementos bem maiores. A razão pela qual pequenos incrementos são requeridos na análise é que, esquemas simples de integração são empregados. Na análise dinâmica é ainda necessário para evitar problemas de estabilidade de integração. Embora nem para todos os tipos de problemas seja mais eficiente, acredita-se que uma formulação na qual o equilíbrio do corpo é considerado no tempo $t+\Delta t$, resulte mais efetiva para a análise estática e dinâmica em geral. Na análise dinâmica tais formulações acarretam em integração implícita no tempo, que com o uso de um operador apro-

priado é incondicionalmente estável na análise linear. Na análise não-linear, um controle da precisão da solução é estabelecido pela satisfação das equações de equilíbrio no tempo $t+\Delta t$ dentro de uma pré-fixada tolerância.

Considerando o equilíbrio do corpo no tempo $t+\Delta t$, o princípio dos deslocamentos virtuais leva a:

$$\int_{t+\Delta t_V} {}^{t+\Delta t}\tau_{ij}\ \delta\ {}_{t+\Delta t}e_{ij}\ {}^{t+\Delta t}dv = {}^{t+\Delta t}R \qquad (2.4)$$

com

$${}^{t+\Delta t}R = \int_{{}^{o}A} {}^{t+\Delta t}_{o}t_k\ \delta\ u_k\ {}^{o}da + \int_{{}^{o}V} {}^{o}\rho\ {}^{t+\Delta t}_{o}f_k\ \delta\ u_k\ {}^{o}dv \qquad (2.5)$$

onde ${}^{t+\Delta t}\tau_{ij}$ são as componentes cartesianas do tensor de Cauchy no tempo $t+\Delta t$, ${}^{t+\Delta t}_{o}t_k$ e ${}^{t+\Delta t}_{o}f_k$ as componentes cartesianas dos vetores de forças de superfície e volume no tempo $t+\Delta t$, referidos ao tempo 0, e ${}^{o}\rho$ é a massa específica do material na configuração original e,

$$\delta\ {}_{t+\Delta t}e_{ij} = \delta\ \frac{1}{2}\ ({}_{t+\Delta t}u_{i,j} + {}_{t+\Delta t}u_{j,i}) \qquad (2.6)$$

onde

$${}^{t+\Delta t}u_{\ell,m} = \frac{\partial\ u_\ell}{\partial\ {}^{t+\Delta t}u_m} \qquad \text{e} \qquad \delta\ u_k$$

é uma variação nas componentes de deslocamentos atuais ${}^{t+\Delta t}u_k$,

O princípio de trabalho virtual utilizado (Malvern[50]), é geral, e pode ser aplicado na análise linear e não-linear geométrica e física. Na análise de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, a configuração do corpo é assumida fixa e a equação (2.4) pode ser usada diretamente para a solução pelo método dos elementos finitos. Neste caso (2.4) fica:

$$\int_{{}^{o}V} {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}\ \delta\ e_{ij}\ {}^{o}dv = {}^{t+\Delta t}R \qquad (2.7)$$

onde ${}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}$ são as componentes cartesianas do tensor de tensões de pequenos deslocamentos, e e_{ij} são as componentes cartesianas de incremento do tensor de deformações infinitesimais,

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\ (u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (2.8)$$

As componentes de deformação são avaliadas das interpolações do método dos elementos finitos discutidas no Capítulo IV, e as componentes de tensão são obtidas por:

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} = {}^{t}\sigma_{ij} + D_{ijrs}\ e_{rs} \qquad (2.9)$$

onde D_{ijrs} é o tensor constitutivo tangente, no tempo t.

Substituindo (2.9) em (2.7), obtém-se a equação que é discretizada na análise pelo método dos elementos finitos:

$$\int_{{}^{o}V} D_{ijrs}\ e_{rs}\ \delta\ e_{ij}\ {}^{o}dv = {}^{t+\Delta t}R - \int_{{}^{o}V} {}^{t}\sigma_{ij}\ \delta\ e_{ij}\ {}^{o}dv \qquad (2.10)$$

Considerando agora, grandes deslocamentos e grandes deformações, a configuração do corpo varia continuamente, estando as partículas individuais do material sujeitas a grandes movimentos.

Como a configuração no tempo $t+\Delta t$ é desconhecida, para a solução, as variáveis de tensão e deformação são referidas a uma configuração geométrica, previamente determinada. Na formulação Lagrangeana a configuração inicial do corpo é usada como referência.

Com as relações:

$$ {}^{t+\Delta t}_{\quad}\tau_{sr} = \frac{{}^{t+\Delta t}\rho}{{}^{o}\rho} \; {}^{t+\Delta t}_{\quad o}x_{s,i} \; {}^{t+\Delta t}_{\quad o}x_{r,j} \; {}^{t+\Delta t}_{\quad o}S_{ij} \qquad (2.11) $$

na qual

$$ {}^{t+\Delta t}_{\quad o}x_{s,i} = \frac{\partial \, {}^{t+\Delta t}x_s}{\partial \, {}^{o}x_i} $$

e ,

$$ \delta \, {}^{t+\Delta t}_{\quad}e_{sr} = {}^{t+\Delta t}_{\quad}{}^{o}x_{i,s} \; {}^{t+\Delta t}_{\quad}{}^{o}x_{j,r} \; \delta \, {}^{t+\Delta t}_{\quad o}\varepsilon_{ij} \qquad (2.12) $$

e

$$ {}^{o}\rho \; {}^{o}dv = {}^{t+\Delta t}\rho \; {}^{t+\Delta t}dv \qquad (2.13) $$

sendo ${}^{t+\Delta t}_{\quad o}S_{ij}$ as componentes cartesianas do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff e ${}^{t+\Delta t}_{\quad o}\varepsilon_{ij}$ as componentes cartesianas do tensor de deformação de Green-Lagrange, pode-se expressar (2.4) por, (Malvern[50]):

$$\int_{{}^{o}V} {}^{t+\Delta t}_{o}S_{ij}\ \delta\ {}^{t+\Delta t}_{o}\varepsilon_{ij}\ {}^{o}dv = {}^{t+\Delta t}R \qquad (2.14)$$

onde

$$ {}^{t+\Delta t}_{o}S_{ij} = \frac{{}^{o}\rho}{{}^{t+\Delta t}\rho}\ {}^{o}_{t+\Delta t}x_{i,s}\ {}^{t+\Delta t}\tau_{sr}\ {}^{o}_{t+\Delta t}x_{j,r} \qquad (2.15)$$

e

$$\delta\ {}^{t+\Delta t}_{o}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\ \delta\ ({}^{t+\Delta t}_{o}u_{i,j} + {}^{t+\Delta t}_{o}u_{j,i} + {}^{t+\Delta t}_{o}u_{k,i}\ {}^{t+\Delta t}_{o}u_{k,j}) \qquad (2.16)$$

As tensões ${}^{t+\Delta t}_{o}S_{ij}$, desconhecidas, podem ser incrementalmente decompostas nas tensões conhecidas ${}^{t}_{o}S_{ij}$ mais incrementos de tensões ${}_{o}S_{ij}$:

$$ {}^{t+\Delta t}_{o}S_{ij} = {}^{t}_{o}S_{ij} + {}_{o}S_{ij} \qquad (2.17)$$

Decomposições incrementais são igualmente introduzidas às deformações procedendo-se:

$$ {}^{t+\Delta t}_{o}\varepsilon_{ij} = {}^{t}_{o}\varepsilon_{ij} + {}_{o}\varepsilon_{ij} \qquad (2.18)$$

com o uso de

$$ {}_{o}\varepsilon_{ij} = {}_{o}e_{ij} + {}_{o}\gamma_{ij} \qquad (2.19)$$

onde

$$ {}_o e_{ij} = \frac{1}{2} \left({}_o u_{i,j} + {}_o u_{j,i} + {}^t_o u_{k,i} \, {}_o u_{k,j} + {}_o u_{k,i} \, {}^t_o u_{k,j} \right) \qquad (2.20) $$

e

$$ {}_o \gamma_{ij} = \frac{1}{2} \, {}_o u_{k,i} \, {}_o u_{k,j} \qquad (2.21) $$

Com essas decomposições e notando-se que:

$$ \delta \, {}^{t+\Delta t}_{\;\;o} \varepsilon_{ij} = \delta \, {}_o \varepsilon_{ij} $$

e (2.22)

$$ {}_o S_{ij} = {}_o D_{ijrs} \, {}_o \varepsilon_{rs} $$

as equações de movimento são:

$$ \int_{{}_o V} {}_o D_{ijrs} \, {}_o \varepsilon_{rs} \, \delta \, {}_o \varepsilon_{ij} \, {}^o dv + \int_{{}_o V} {}^t_o S_{ij} \, \delta \, {}_o \gamma_{ij} \, {}^o dv = $$

$$ = {}^{t+\Delta t} R - \int_{{}_o V} {}^t_o S_{ij} \, \delta \, {}_o e_{ij} \, {}^o dv \qquad (2.23) $$

Para linearizar essas equações usam-se as aproximações:

$$ {}_o S_{ij} = {}_o D_{ijrs} \, {}_o e_{rs} $$

e (2.24)

$$ \delta \, {}_o \varepsilon_{ij} = \delta \, {}_o e_{ij} $$

obtendo-se assim as seguintes equações de movimento aproximadas:

$$\int_{{}^{o}V} {}^{o}D_{ijrs}\ {}^{o}e_{rs}\ \delta\ {}^{o}e_{ij}\ {}^{o}dv + \int_{{}^{o}V} {}^{t}_{o}S_{ij}\ \delta\ {}^{o}\gamma_{ij}\ {}^{o}dv =$$

$$= {}^{t+\Delta t}R - \int_{{}^{o}V} {}^{t}_{o}S_{ij}\ \delta\ {}^{o}e_{ij}\ {}^{o}dv \qquad (2.25)$$

Ao invés de se utilizar a configuração inicial no tempo zero, alternativamente, qualquer outra configuração conhecida pode ser empregada como referência. Especificamente, a configuração de tempo t como referência fornece a formulação Lagrangeana atualizada.

Deve-se notar que a equação (2.14) pode ser aplicada a deslocamentos ou deformações de qualquer magnitude. Contudo, a equação (2.25) é a linearização da equação (2.14), e sua solução somente aproxima a solução exata.

Se fortes não-linearidades estão presentes dentro de cada intervalo individual de tempo, esta linearização pode conduzir a uma contínua acumulação de erros.

Em geral, é necessário procurar uma solução mais precisa dentro de cada intervalo de tempo, ou corrigi-la sistematicamente de tempos em tempos, através de uma técnica iterativa, tipo Newton-Raphson.

Definindo-se:

$${}^{t+\Delta t}u_i^{(k)} = {}^{t+\Delta t}u_i^{(k-1)} + \Delta\ u_i^{(k)} \qquad (2.26)$$

onde

$$ {}^{t+\Delta t}u_i^{(0)} = {}^{t}u_i \qquad (2.27) $$

a equação considerada na formulação de não-linearidade física somente, é:

$$ \int_{{}^{o}V} D_{ijrs}\, e_{rs}^{(k)}\, \delta\, e_{ij}^{(k)}\, {}^{o}dv = {}^{t+\Delta t}R - \int_{{}^{o}V} {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}^{(k-1)}\, \delta\, e_{ij}^{(k)}\, {}^{o}dv $$

$$ \text{para} \quad k = 1,\ 2,\ 3\ \ldots \qquad (2.28) $$

enquanto que na formulação Lagrangeana completa, é:

$$ \int_{{}^{o}V} {}^{o}D_{ijrs}\, {}^{o}e_{rs}^{(k)}\, \delta\, {}^{o}e_{ij}^{(k)}\, {}^{o}dv + \int_{{}^{o}V} {}^{t}_{o}S_{ij}\, \delta\, {}^{o}\gamma_{ij}^{(k)}\, {}^{o}dv = $$

$$ = {}^{t+\Delta t}R - \int_{{}^{o}V} {}^{t+\Delta t}S_{ij}^{(k-1)}\, \delta\, {}^{t+\Delta t}_{o}e_{ij}^{(k-1)}\, {}^{o}dv $$

$$ \text{para} \quad k = 1,\ 2,\ 3\ \ldots \qquad (2.29) $$

Um dos aspectos mais importantes, quando se empregam essas equações de equílibrio, é obter convergência do processo iterativo na análise de problemas práticos. A experiência de algorítmos iterativos mostra que dificuldades devem ser esperadas quando a estrutura enrijece, o que pode ser resultado de um número de diferentes fenômenos físicos.

A solução é diminuir suficientemente o incremento de tempo e dispensar a correção iterativa por razões econômicas.

2.3 - RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

Um aspecto importante na análise não-linear é a escolha de relações constitutivas apropriadas para serem introduzidas nas equações de equilíbrio. O comportamento do material pode ser classificado como linear ou não linear, elástico ou viscoelástico, hiperelástico, elastoplástico, viscoplástico, etc.

Na formulação discutida anteriormente o incremento de tensão do tempo t ao tempo $t+\Delta t$, era definido em termos do tensor constitutivo e do correspondente incremento de deformação. Se se incluem deformações de temperatura e fluência, o incremento de tensões também dependerá das tensões térmicas e de fluência, cujos efeitos devem ser convenientemente adicionados como uma contribuição às tensões atuais.

Na análise não-linear física somente, as tensões e deformações a serem usadas, são calculadas com as expressões correspondentes a pequenos deslocamentos. Entretanto na análise de grandes deslocamentos e grandes deformações, a lei tensão-deformação pode ser definida com diferentes medidas da tensão e deformação.

Se o tensor constitutivo relaciona as tensões do segundo tensor de Piola-Kirchhoff às deformações Green-Lagrange, como no caso de hiperelasticidade, a lei tensão-deformação pode ser usada diretamente na formulação. Entretanto, se a lei do material é definida em termos de tensões de Cauchy, é necessário transformá-la conforme é discutido em detalhe nas referências 23 e 24.

Estas transformações podem amplificar significantemente o custo total da solução, e por esta razão procuram-se rela

ções tensão-deformação mais efetivas.

Considerando-se as dificuldades que ocorrem na análise do comportamento não-linear físico, como esperado, o esforço de solução geralmente cresce na medida em que o material a ser descrito se torna mais complexo.

Para materiais de características complexas, análises levando em conta a história da deformação, podem ser proibitivas, já que as relações constitutivas, em geral, são funções de inúmeras variáveis.

Outras dificuldades surgem com frequência quando existem descontinuidades no comportamento do material. Tal é o caso da análise elasto-plástica sob carregamento cíclico, ou da propagação de fissuras.

Por sua vez, para materiais com enrijecimento súbito, a convergência é normalmente difícil. Para evitar tais situações, a descontinuidade do material pode ser distribuida em um pequeno domínio do tempo. Outras possibilidades seriam: não se efetuar iterações, obter-se a solução com introdução de viscosidade artificial, etc.

2.4 - DISCRETIZAÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Durante a evolução da análise não-linear pelo método dos elementos finitos diversos modelos diferentes foram propostos. Na análise não-linear em geral, discretizações das equações da mecânica do contínuo utilizando elementos isoparamétricos e derivados se mostraram muito adequadas. Em tal caso as coordenadas e os deslocamentos, em cada elemento, são definidos conforme as seguintes expressões:

$$
\begin{aligned}
{}^{o}x_j &= \sum_{i=1}^{n} N_i \, {}^{o}x_j^i \\
& \qquad\qquad j = 1, 2, 3 \qquad\qquad (2.30) \\
{}^{t}x_j &= \sum_{i=1}^{n} N_i \, {}^{t}x_j^i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{t}u_j &= \sum_{i=1}^{n} N_i \, {}^{t}u_j^i \\
& \qquad\qquad j = 1, 2, 3 \qquad\qquad (2.31) \\
{}^{t}u_j &= \sum_{i=1}^{n} N_i \, \Delta u_j^i
\end{aligned}
$$

onde ${}^{o}x_j^i$ é a coordenada do ponto nodal i correspondente a direção j no tempo zero. ${}^{t}x_j^i$, ${}^{t+\Delta t}x_j^i$, ${}^{t}u_j^i$ e Δu_j^i são definidos similarmente. n é o número total de nós do elemento.

N_i é a função de interpolação relativa ao ponto nodal i.

Com a opção de se poder utilizar um número variável de nós e formas degeneradas do elemento básico, uma única formulação é necessária para aproximar problemas do contínuo de tipo bi e tri-dimensional, incluindo estruturas de casca espessa e delgada, com completa compatibilidade entre as fronteiras dos elementos.

Uma vez que as funções de interpolação sobre o domínio do elemento foram definidas, as expressões 2.30 e 2.31 são substituidas nas equações 2.28 e 2.29 para discretizar as relações de equilíbrio.

Como na análise dinâmica as componentes de forças de volume incluem forças de inércia e de amortecimento, as relações de equilíbrio para um único elemento correspondentes a equa-

ção 2.28, em notação matricial, são:

$$ {}^{t}\underset{\sim}{K}_{L} \; \Delta \; \underset{\sim}{u}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{R} - {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{F}^{(k-1)} - \underset{\sim}{C} \; {}^{t+\Delta t}\dot{\underset{\sim}{u}}^{(k)} - \underset{\sim}{M} \; {}^{t+\Delta t}\ddot{\underset{\sim}{u}}^{(k)} $$

$$ k = 1, 2, \ldots \qquad (2.32) $$

Da mesma forma, com o uso da formulação Lagrangeana completa, incluindo os efeitos de grandes deslocamentos e grandes deformações, para um elemento, obtém-se:

$$ ({}^{t}_{o}\underset{\sim}{K}_{L} + {}^{t}_{o}\underset{\sim}{K}_{NL}) \; \Delta \; \underset{\sim}{u}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{R} - {}^{t+\Delta t}_{o}\underset{\sim}{F}^{(k-1)} - \underset{\sim}{C} \; {}^{t+\Delta t}\dot{\underset{\sim}{u}}^{(k)} - \underset{\sim}{M} \; {}^{t+\Delta t}\ddot{\underset{\sim}{u}}^{(k)} $$

$$ k = 1, 2, 3 \ldots \qquad (2.33) $$

onde ${}^{t}\underset{\sim}{K}_{L}$ é a matriz de rigidez de deformação linear no tempo t, quando apenas a não-linearidade física é incluída, ${}^{t}_{o}\underset{\sim}{K}_{L}$ e ${}^{t}_{o}\underset{\sim}{K}_{NL}$ são as matrizes de rigidez de deformação linear e não-linear, ${}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{R}$ é o vetor de forças externas aplicadas nos pontos nodais, ${}^{t+\Delta t}_{o}\underset{\sim}{F}^{(k-1)}$ é o vetor de forças nodais equivalentes ao estado de tensões atuais do elemento, $\underset{\sim}{M}$ e $\underset{\sim}{C}$ são as matrizes de massa e amortecimento e $\Delta \; \underset{\sim}{u}^{(k)}$ é o vetor de incrementos de deslocamentos nodais com:

$$ {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{u}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{u}^{(k-1)} + \Delta \; \underset{\sim}{u}^{(k)} \qquad (2.34) $$

Os vetores de acelerações e velocidades nodais são avaliados de diferentes maneiras, de acordo com o método de integração no tempo empregado.

As matrizes de elemento que deverão ser avaliadas estão sumarizadas na tabela seguinte com exceção da matriz de amor

tecimento, que pode ser estabelecida de diversas formas. (Lima[26]) .

O cálculo dessas matrizes pode ser feito por integração numérica. Para elementos isoparamétricos o método de Gauss é amplamente utilizado.

TIPO DE ANÁLISE	INTEGRAL	MATRIZ
TODAS ANÁLISES	$\int_{{}^oV} {}^o\rho \; {}^{t+\Delta t}\ddot{u}_k \; \delta u_k \; {}^o dv$	$\underset{\sim}{M}\; {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{\ddot{u}} = {}^o\rho \left(\int_{{}^oV} \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{N} \; {}^o dv \right) {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{\ddot{u}}$
	${}^{t+\Delta t}R = \int_{{}^oA} {}^{t+\Delta t}_{\;\;o}t_k \; \delta u_k \; {}^o da + \int_{{}^oV} {}^o\rho \; {}^{t+\Delta t}_{\;\;o}f_k \; \delta u_k \; {}^o dv$	${}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{R} = \int_{{}^oA} \underset{\sim}{N}_s^T \; {}^{t+\Delta t}_{\;\;o}\underset{\sim}{t} \; {}^o da + {}^o\rho \int_{{}^oV} \underset{\sim}{N}^T \; {}^{t+\Delta t}_{\;\;o}\underset{\sim}{f} \; {}^o dv$
NÃO-LINEARIDADE FÍSICA	$\int_{{}^oV} {}^D_{ijrs} \; e_{rs} \; \delta e_{ij} \; {}^o dv$	${}^t\underset{\sim}{K} \; \underset{\sim}{u} = \left(\int_{{}^oV} \underset{\sim}{B}_L^T \; \underset{\sim}{D} \; \underset{\sim}{B}_L \; {}^o dv \right) \underset{\sim}{u}$
	$\int_{{}^oV} {}^t\sigma_{ij} \; \delta e_{ij} \; {}^o dv$	${}^t\underset{\sim}{F} = \int_{{}^oV} \underset{\sim}{B}_L^T \; {}^t\hat{\underset{\sim}{\Sigma}} \; {}^o dv$
FORMULAÇÃO LAGRANGEANA COMPLETA	$\int_{{}^oV} {}^oD_{ijrs} \; {}^oe_{rs} \; \delta \; {}^oe_{ij} \; {}^o dv$	${}^t_{\;o}\underset{\sim}{K}_L \; \underset{\sim}{u} = \left(\int_{{}^oV} {}^t_{\;o}\underset{\sim}{B}_L^T \; {}^o\underset{\sim}{D} \; {}^t_{\;o}\underset{\sim}{B}_L \; {}^o dv \right) \underset{\sim}{u}$
	$\int_{{}^oV} {}^t_{\;o}S_{ij} \; \delta \; {}^o\gamma_{ij} \; {}^o dv$	${}^t_{\;o}\underset{\sim}{K}_{NL} \; \underset{\sim}{u} = \left(\int_{{}^oV} {}^t_{\;o}\underset{\sim}{B}_{NL}^T \; {}^t_{\;o}\underset{\sim}{S} \; {}^t_{\;o}\underset{\sim}{B}_{NL} \; {}^o dv \right) \underset{\sim}{u}$
	$\int_{{}^oV} {}^t_{\;o}S_{ij} \; \delta \; {}^oe_{ij} \; {}^o dv$	${}^t_{\;o}\underset{\sim}{F} = \int_{{}^oV} {}^t_{\;o}\underset{\sim}{B}_L^T \; {}^t_{\;o}\hat{\underset{\sim}{S}} \; {}^o dv$

TABELA 2.1 - MATRIZES DE ELEMENTOS

As equações de equilíbrio correspondente ao domínio discretizado são obtidas da somação conveniente das contribuições dos elementos, da maneira clássica. Neste aspecto deve-se notar que elementos do contínuo podem ser descritos por diferentes formulações. Assim elementos com não-linearidade física apenas, ou com não-linearidade física e geométrica combinadas, podem ser usados em uma única malha para representar o contínuo.

O desenvolvimento de uma formulação não-linear completa, referida a configuração de tempo t, é em essência, semelhante ao procedimento descrito anteriormente (21, 71). A obtenção das matrizes de elemento é indicada na Tabela 2.2.

INTEGRAL	MATRIZ
$\int_{t_V} {}^tD_{ijrs}\ {}^te_{rs}\ \delta\ {}^te_{ij}\ {}^tdv$	${}^t_{t}\underset{\sim}{K}_L\ \underset{\sim}{u} = (\int_{t_V} {}^t_{t}\underset{\sim}{B}_L^T\ {}^t\underset{\sim}{D}\ {}^t_{t}\underset{\sim}{B}_L\ {}^tdv)\ \underset{\sim}{u}$
$\int_{t_V} {}^t\tau_{ij}\ \delta\ {}^t\gamma_{ij}\ {}^tdv$	${}^t_{t}\underset{\sim}{K}_{NL}\ \underset{\sim}{u} = (\int_{t_V} {}^t_{t}\underset{\sim}{B}_{NL}^T\ {}^t\underset{\sim}{\tau}\ {}^t_{t}\underset{\sim}{B}_{NL}\ {}^tdv)\ \underset{\sim}{u}$
$\int_{t_V} {}^t\tau_{ij}\ \delta\ {}^te_{ij}\ {}^tdv$	${}^t_{t}\underset{\sim}{F} = \int_{t_V} {}^t_{t}\underset{\sim}{B}_L^T\ {}^t\hat{\underset{\sim}{\tau}}\ {}^tdv$

TABELA 2.2 - CONFIGURAÇÃO DE TEMPO t

É evidente que as formulações apresentadas, estão especialmente dirigidas a discretizações da teoria da elasticidade não-linear tridimensional.

Em problema de corpos particularmente orientados, como vigas, a consideração do efeito não-linear nas aplicações da engenharia envolve simplificações já universalmente aceitas. Na

análise de estruturas laminares, por exemplo, os modelos geralmente se valem das equações de Von Karman, que desprezam os termos quadráticos do tensor de deformações, exceto os correspondentes à rotações da superfície média.

A aproximação da teoria de viga-coluna em estruturas reticuladas, é também de grande utilidade, fornecendo resultados satisfatórios para uma ampla faixa de problemas práticos.

Em um sistema geral de análise não-linear, deve-se poder contar com uma considerável flexibilidade, para se escolher o modelo que é mais conveniente para o tipo de problema a resolver.

Sob o ponto de vista de eficiência, a solução de um problema é ideal, quando atingida com a aproximação exatamente necessária.

III - MÉTODOS NUMÉRICOS

3.1 - SOLUÇÃO DE PROBLEMAS ESTÁTICOS

Um considerável número de trabalhos tem sido publicados na extensão do método dos elementos finitos a problemas não lineares geométricos, desde o trabalho original de Turner[6], em 1960.

Inicialmente as análises se baseavam em um procedimento linearizado incremental. Este tipo de aproximação foi proposto por Gallagher[87] em 1963 para a análise de flambagem linearizada. A formulação se valia do Princípio da Mínima Energia Potencial e desprezava os termos não-lineares nas relações deformação-deslocamento. Assim foram estudadas a flambagem linear de vigas, membranas, placas, cascas de revolução e cascas arbitrárias (88, 89, 90).

As matrizes de rigidez tangente linearizadas usadas para a flambagem linear foram posteriormente estendidas às formulações incrementais, para a determinação do comportamento não - linear carga-deflexão (69, 70). Em essência, o processo consiste do cálculo dos incrementos de deslocamentos, deformações e tensões de cada incremento de carga, para o cômputo da nova matriz de rigidez tangente.

Desta forma é levada em consideração a geometria da estrutura deformada.

Como as equações incrementais são linearizadas,não é possível obter-se a solução não-linear precisa para uma carga particular. É necessário tomar-se incrementos de carga muito pequenos, para a garantia de boa aproximação nos resultados.

A solução, em geral, tende a se afastar da posição exata de equilíbrio, depois de um certo número de incrementos. Para evitar este tipo de erro, foram desenvolvidos diversos procedimentos de verificação de equilíbrio.

O mais simples deles é um esquema iterativo, no qual a primeira estimativa da solução é substituida sucessivamente no sistema de equações até que a convergência seja alcançada, dentro de uma tolerância estipulada. É comum nesse procedimento passar os termos não-lineares para o segundo membro como uma carga equivalente. Assim a matriz de rigidez é decomposta uma única vez. Algumas vezes são usados esquemas de relaxação para acelerar a convergência.

Esses algorítmos iterativos de substituição sucessiva são simples de serem implementados, mas tem convergência de primeira ordem apenas, e como a matriz de rigidez tangente não é obtida, não podem ser especializados para análise de estabilidade.

A não convergência é as vezes tomada como critério de estabilidade, mas como Archer[91] mostra, substituição sucessiva pode não convergir, mesmo quando a posição de equilíbrio é estável.

Em 1965, Wissman[92] pela primeira vez desenvolveu matrizes necessárias para a análise de grandes deslocamentos (mas deformações infinitesimais) de um corpo elástico linear.

Estudaram-se sistemas de um único grau de liberdade: pelo incremento de deslocamento computava-se a matriz de rigidez tangente correspondente, e então, as forças necessárias para equilibrar as tensões internas produzidas pela deflexão eram obtidas. O processo iterativo constava de um algorítmo Newton-Raphson de um único step, devido a simplicidade do modelo analisa-

do.

Posteriormente Oden[43, 46] apresentou um tratamento geral de estruturas não-lineares, incluindo deformações finitas e materiais elásticos não-lineares. A técnica de solução empregada era um algorítmo Newton-Raphson completo.

Em Brebbia[55] estuda-se o comportamento não-linear de cascas e placas através de um procedimento linearizado incremental, e em cada nível de carga o equilíbrio é corrigido pelo método de Newton-Raphson.

O método de Newton-Raphson tem mostrado ser efetivo para a solução de problemas não-lineares. Exibe uma boa taxa de convergência e pode ser aplicado para determinar configurações de equilíbrio instável.

Entretanto a atualização da matriz de rigidez em todas as iterações pode transformá-lo em um processo oneroso. Por este motivo Oden[93] propos manter a matriz constante. Este procedimento ficou conhecido por método de Newton-Raphson Modificado .

Stricklin[94] propos um algorítmo eficiente e preciso, aplicável a problemas fortemente não-lineares.

Consiste na adoção de um fator de amplificação nas forças de equilíbrio não-balanceadas, mantendo a matriz de rigidez inalterada. Desta forma a matriz de rigidez é também decomposta apenas uma vez.

Um outro tipo de enfoque para solução de problemas estruturais não-lineares envolve a aplicação de uma técnica de busca direta no funcional da energia potencial.

O problema é reduzido a otimização de um sistema de equações algébricas não-lineares, no qual tenta-se minimizar a

energia total da estrutura. Esse recurso requer um mínimo de área de armazenamento interno no computador, mas pode ser aplicado somente para configurações estáveis (89, 95).

Métodos de perturbação originaram do trabalho de Koiter[96], e Thompson e Walker[41] aplicaram ao estudo do comportamento não-linear de uma viga. Os deslocamentos são expandidos em série de Taylor em função de um parâmetro de carga incremental, em torno de uma configuração de equilíbrio conhecida. Para cada incremento de carga um sistema de equações é obtido, e sua solução fornece os termos da série.

A maior desvantagem que pode ser apontada é a tendência de se afastar da configuração exata de equilíbrio a medida que a não-linearidade cresce.

Para evitar esse inconveniente técnicas iterativas como Newton-Raphson (98, 99), ou outras de convergência de mais alta ordem, podem ser usadas (100).

As equações incrementais de equilíbrio, para problemas estáticos, podem ser colocadas em função da taxa de variação dos deslocamentos generalizados com a carga, e tratadas como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Os valores dos deslocamentos para cada nível de carga são obtidos por integração numérica a partir de um estado inicial conhecido.

Uma variedade de esquemas de integração tem sido implementada, e alguns deles fornecem grande precisão.

Os esquemas mais comuns são as várias versões do método de Runge-Kutta e métodos do tipo "predictor-corrector" (101).

Pode-se provar que os deslocamentos obtidos pelo método de Runge-Kutta e de Hamming (predictor-corrector) apresen-

tam erro de truncamento da ordem da quinta potência da variação de carga. Entretanto com o método de Runge-Kutta, os valores de quatro estimativas necessitam ser avaliados em cada incremento da análise, e com o "predictor-corrector" apenas dois. Este métodos apresentam a mesma precisão, mas o "predictor-corrector" é muito mais econômico do ponto de vista computacional.

O método de Runge-Kutta porém, deve ser usado para gerar as soluções dos primeiros incrementos de carga.

Da diferença do valor previsto e do corrigido, uma medida do erro de cada incremento é estimada e comparada com a tolerância desejada, podendo-se assim reduzir ou aumentar o incremento de carga no próximo ciclo.

Se a matriz de rigidez se tornar singular, uma modificação, nos parâmetros de integração é introduzida e este procedimento é aplicado ainda em configurações instáveis.

Numerosas referências (12, 21, 35, 44, 45, 59, 76, 101), discutem métodos de solução para problemas estruturais estáticos não-lineares.

Na Tabela 3.1, apresentam-se os algoritimos para solução numérica de equações algébricas não-lineares mais conhecidos, organizados em quatro classes ou grupos. Alguns deles são conhecidos com diferentes nomes na literatura técnica, como indicado na terceira coluna.

Em geral técnicas iterativas são mais empregadas em problemas não-lineares geométricos. Técnicas fundamentalmente incrementais são dominantes em problemas que envolvem não-linearidade física apenas.

GRUPO GERAL	ALGORÍTMO	IDENTIFICADOR
Tipo-Newton	Newton Newton-Modificado Newton-Amortecido Quase-Newton Newton-Brown Steffensen	Newton-Raphson
Substituição Sucessiva	Picard Perturbação Contração	Tensão Inicial, Deformação Inicial, Pseudo-Carga ...
Valor Inicial	Integração Integração Corrigida Intervalo Infinito	Incremental, Passo-a Passo, Auto-Corretivo, Relaxação Dinâmica ...
Minimização	Procura Aleatória Procura Sequencial Gradiente Conjugado Gauss-Newton	Procura na Energia

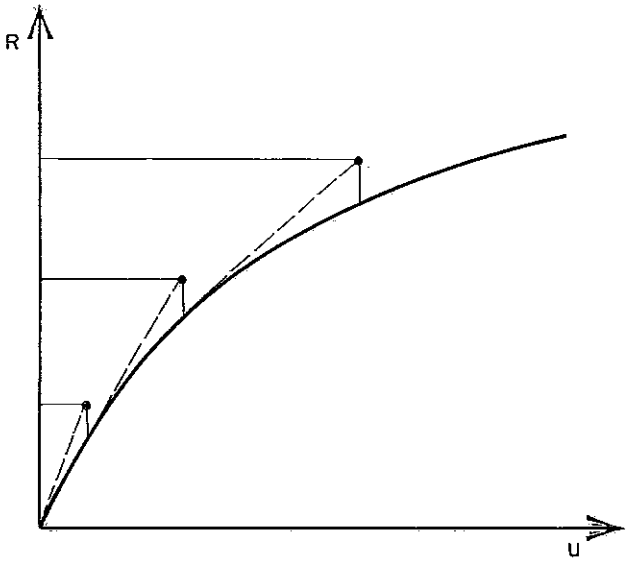
TABELA 3.1 - ALGORÍTMOS PARA SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NÃO-LINEARES

3.2 - SOLUÇÃO DE PROBLEMAS ESTÁTICOS NO SISTEMA LORANE-NL

Quase todos os esquemas de solução de sistemas de equações não-lineares tem méritos ou fornecem características mais acentuadas para determinados tipos de análise.

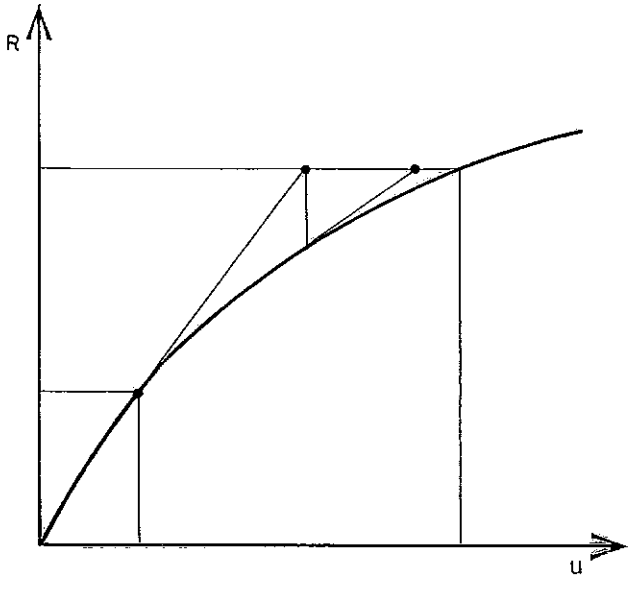
No sistema LORANE-NL a solução das equações de equilíbrio 2.32 e 2.33 é obtida incrementalmente, e com possibilidade de verificações de equilíbrio segundo:

a) a solução incremental sempre leva em conta a configuração anterior, ou seja, corresponde a uma iteração simples em cada incremento de carga (Figura 3.1), se nenhuma informação adicional for fornecida.



INCREMENTAL COM ITERAÇÃO SIMPLES

Figura 3.1



ITERAÇÕES ATUALIZANDO A MATRIZ (NR)

Figura 3.2

b) a verificação de equilíbrio iterativa completa, em cada incremento, é feita com a atualização sucessiva dos efeitos não-lineares, em todas as iterações (algoritmo Newton-Raphson), como na Figura 3.2.

c) a verificação de equilíbrio pode manter a matriz de rigidez constante em cada incremento de carga (algoritmo Newton-Raphson Modificado), como na Figura 3.3.

d) a determinação de soluções múltiplas pode ser conseguida pela adição de um vetor aos deslocamentos, e com a carga mantida constante, iterar para a nova configuração de equilíbrio (Oden[44]).

e) a verificação do equilíbrio do ítem b ou c é feita em cada intervalo ou nos intervalos especificados.

f) a atualização dos efeitos não-lineares fica também à escolha do usuário, que tem a possibilidade de determinar intervalos para manter a rigidez constante.

g) o número de iterações em cada incremento é controlado pela tolerância, obtida com o uso de normas euclideanas por:

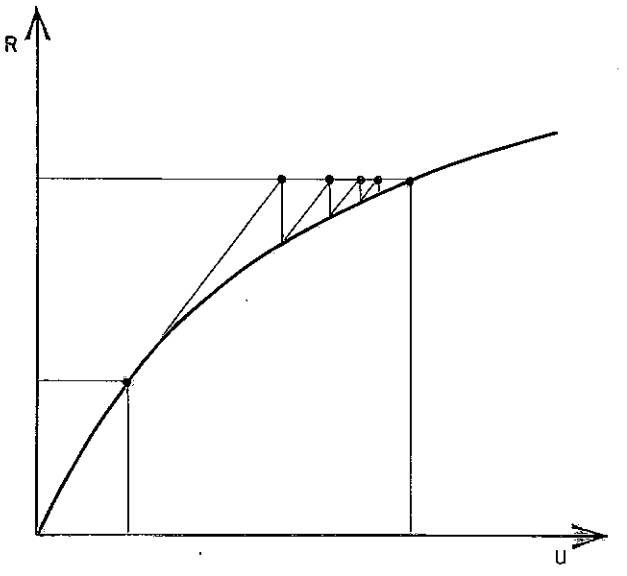
$$\left| \frac{\| \underset{\sim}{u}^{(n-1)} \| - \| \underset{\sim}{u}^{(n)} \|}{\| \underset{\sim}{u}^{(n)} \|} \right| \leq \text{tolerância}$$

e pelo número máximo de iterações fixado.

As equações de equilíbrio, consideradas na análise estática, mantendo a rigidez constante durante o incremento de carga são:

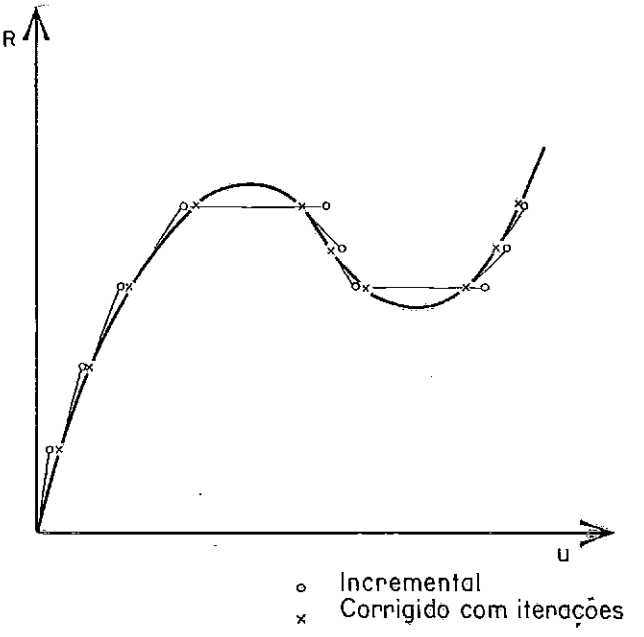
$$t_{\underset{\sim}{K}} \Delta \underset{\sim}{u}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{R} - {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{F}^{(k-1)} \qquad k = 1, 2, 3 \ldots \qquad (3.1)$$

Como discutido anteriormente corresponde a itera - ção do método de Newton-Raphson Modificado para o zero da função



ITERAÇÕES COM MATRIZ CONSTANTE (NRM)

Figura 3.3



CÁLCULO DE SOLUÇÕES MÚLTIPLAS

Figura 3.4

$\underset{\sim}{f}$ onde:

$$\underset{\sim}{f} = {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{R} - {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{F}^{(\infty)} \qquad (3.2)$$

A iteração k , em resumo exigirá a avaliação do vetor ${}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{F}^{(k-1)}$ e a solução de um sistema de equações algébricas lineares. Estas equações podem ser resolvidas por um esquema iterativo ou por um método direto.

Embora provavelmente nem sempre seja o mais eficiente, implementações do método básico de eliminação de Gauss, são atualmente consideradas mais efetivas para aplicações gerais.Uma vantagem importante da eliminação de Gauss é que o número de operações numéricas e o tempo de computação requerido para a solução do sistema de equações pode ser determinado a priori, enquanto que usando um esquema iterativo como o método de Gauss-Seidel, o tempo de solução, em geral, não pode ser estimado com precisão.

É de se salientar que os métodos de solução direta se desenvolveram tanto, que na maior parte das análises não-lineares, o esforço computacional é gasto no cálculo de ${}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{F}^{(k-1)}$ principalmente, e não na solução das equações propriamente, como era de se esperar.

A eficiência da solução direta é fundamentalmente um resultado do esquema específico de armazenamento da matriz usado, e da implementação cuidadosa do método básico de Gauss.

O sistema LORANE-NL opera com o mesmo esquema de armazenamento em coluna compacta do LORANE-DINA, e a manipulação de matrizes é idêntica a descrita por Lima[26] . Embora o número de operações requeridas para a decomposição de uma dada matriz possa ser predeterminado, grandes reduções no número de operações são

obtidas com o rearranjo das equações. (26, 103, 104).

O método de Newton-Raphson Modificado da equação 3.1 converge mesmo para grandes correções de $\Delta \underset{\sim}{u}^{(k)}$, se a primeira e segunda derivadas de f satisfazem certas condições (Oden[44]).

Se um sistema de um único grau de liberdade é considerado estas condições são $f' < 0$ e $f'' \geq 0$. Entretanto para sistemas de múltiplos graus de liberdade f , representa uma superfície de múltiplas dimensões e a variação de f correspondente a todas componentes deve ser analisada. Na prática, as componentes que estão sujeitas a variações mais significantes irão decidir se ocorrerá convergência dentro de uma tolerância especificada.

As implicações práticas desse fato são que, devem-se esperar dificuldades na convergência se o domínio discretizado está enrijecendo sob a aplicação da carga. Esse enrijecimento pode ser proveniente de efeitos não-lineares geométricos ou variações súbitas nas propriedades do material constitutivo.

Se acontece divergência na iteração, uma possível solução é incluir na análise efeitos viscosos em forma de uma matriz de amortecimento $\underset{\sim}{C}$, isto é, ao invés de (3.1), a seguinte relação de equilíbrio é considerada:

$$ {}^{t}\underset{\sim}{K}\ \Delta\ \underset{\sim}{u}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{R} - {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{F}^{(k-1)} - \underset{\sim}{C}\ {}^{t+\Delta t}\ \Delta\ \dot{\underset{\sim}{u}}^{(k)} \qquad (3.3) $$

onde ${}^{t+\Delta t}\Delta\ \dot{\underset{\sim}{u}}^{k}$ é avaliado usando um esquema de integração no tempo (Bathe[21, 22, 23]) .

As forças viscosas nodais evitam grandes variações nos deslocamentos e desaparecem quando estas variações não ocor-

rem mais. Assim, obtém-se a solução estática.

Inúmeras análises estáticas que apresentam dificuldades na convergência, foram simplesmente resolvidas pelo método de integração no tempo de Newmark, com massa nula e pequenos amortecimentos nodais. Esses amortecimentos concentrados foram selecionados segundo critérios empíricos.

O desenvolvimento de estratégias de solução para acelerar a convergência na análise geral é um campo de muita importância. Os algoritmos de solução deveriam detectar dificuldades de convergência e então escolher medidas apropriadas para estabilizar a solução. Isto poderia ser conseguido por seleção automática do incremento de tempo, relaxação, modificação temporária das equações, ou outras medidas.

Além de técnicas de aceleração para convergência do processo iterativo, também esquemas eficientes para seleção automática de incremento de carga ou tempo necessitam ser desenvolvidos. Nestas áreas há carência de investigações nas análises pelo método dos elementos finitos, pois muito poucos resultados de âmbito geral foram obtidos.

Progressos em estratégias de soluções, efetivas, somente serão possíveis por rigorosa análise matemática, se os métodos de solução forem gerais e auto-adaptivos .

COMPORTAMENTO CRÍTICO E PÓS-CRÍTICO

Na análise não-linear de estruturas, métodos de perturbação são extensivamente usados em conjunção com o método dos elementos finitos, para determinar o caminho pré-flambagem, ponto crítico, ponto de bifurcação e comportamento pós-crítico .

Soluções desse tipo, entretanto, requerem muito esforço computacional para calcular derivadas de ordem superior de coeficientes da matriz de rigidez.

Para traçar diagramas carga-deflexão acima do ponto crítico, alguns autores preferem tomar como variável incremental, deslocamentos nodais ao invés de cargas. Algoritmos de decomposição são então aplicados, para resolver as equações de rigidez tangencial linearizadas, prescrevendo-se um incremento de deslocamentos. Quer se trabalhe com controle de carga ou de deslocamento, a carga crítica é determinada pelo cálculo do valor correspondente ao determinante nulo da matriz de rigidez, através de interpolação. O modo de flambagem é obtido pela solução das equações após um grau de liberdade atingir um determinado valor da referência. No ponto de bifurcação, o determinante se anula e consequentemente o sistema de equações não possui uma solução única. Neste caso, uma pequena perturbação proporcional ao modo de flambagem pode ser aplicada aos deslocamentos, para obter o caminho pós-flambagem, não-simétrico, além deste ponto.

O algoritmo de controle incremental de um deslocamento generalizado é descrito em detalhe por Lock[162]. Recentemente Matsui[163] apresentou uma variante com o método de Choleski; Haisler[164] examinou a questão sob diferentes pontos de vista. O uso desse procedimento é melhor ilustrado com um exemplo simples.

Para tal, o sistema de equações incrementais,

$$\underset{\sim}{K}\ \Delta\ \underset{\sim}{u} = \Delta\ \underset{\sim}{R} \qquad (3.4)$$

será resolvido com a condição $\Delta\ u_2 = C$ = constante. Isto somente é possível, se a relação entre as cargas da estrutura é fixada

e apenas os seus valores desconhecidos.

Para o carregamento proporcional $\Delta \underset{\sim}{R} = \lambda \Delta \underset{\sim}{r}$,onde $\Delta \underset{\sim}{r}$ é um vetor das razões das grandezas das cargas e λ uma variável que define os seus valores absolutos, a equação (3.4) pode ser escrita por:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & \cdots \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & \cdots \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} & \cdots \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ 0 \\ \Delta u_3 \\ \Delta u_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ \vdots \end{bmatrix} - C \begin{bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ k_{23} \\ k_{24} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Este sistema de equações deve agora ser resolvido para Δu_1 , Δu_3 , Δu_4 ... e λ . Aplica-se então, o processo de eliminação de Gauss, com excessão da coluna dos coeficientes correspondentes ao grau de liberdade fixo, que não é eliminada . Após a retrosubstituição resulta:

$$\begin{bmatrix} k^*_{11} & k^*_{12} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & k^*_{22} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & k^*_{23} & k^*_{33} & 0 & \cdots \\ 0 & k^*_{24} & 0 & k^*_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ 0 \\ \Delta u_3 \\ \Delta u_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} r^*_1 \\ r^*_2 \\ r^*_3 \\ r^*_4 \\ \vdots \end{bmatrix} - C \begin{bmatrix} k^*_{12} \\ k^*_{22} \\ k^*_{23} \\ k^*_{24} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

onde o símbolo "*" indica que os valores das variáveis foram alterados na eliminação.

Desta forma tem-se:

$$
\begin{aligned}
k^*_{11}\ \Delta u_1 &= \lambda\ r^*_1 - C\ k^*_{12} \\
0 &= \lambda\ r^*_2 - C\ k^*_{22} \\
k^*_{33}\ \Delta u_3 &= \lambda\ r^*_3 - C\ k^*_{23} \\
k^*_{44}\ \Delta u_4 &= \lambda\ r^*_4 - C\ k^*_{24} \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

A segunda equação fornece o valor de λ . Assim, com λ , Δu_1 , Δu_3 , Δu_4 ... podem ser calculados das outras equações.

Considerando agora a equação de recorrência (3.1) para o esquema de iteração Newton-Raphson,

$$
{}^{t}\underset{\sim}{K}\ \Delta u^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{R} - {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{F}{}^{(k-1)} \tag{3.8}
$$

o valor original dos deslocamentos no início do processo iterativo é calculado usando um incremento de deslocamentos especificado, isto é, o elemento de $\Delta u^{(k+1)}$ correspondente ao incremento de deslocamento, permanece nulo durante as iterações, o que significa resolver sucessivamente um sistema de equações do tipo:

$$
\begin{bmatrix}
k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & \cdots \\
k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & \cdots \\
k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} & \cdots \\
k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ 0 \\ \Delta u_3 \\ \Delta u_4 \\ \vdots \end{bmatrix}
= \lambda
\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ \vdots \end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \vdots \end{bmatrix}
\tag{3.9}
$$

O mesmo procedimento usado para a solução do sistema de (3.5) é então aplicado a (3.9).

O problema mais grave que surge nas análises com controle de deslocamentos nodais, é a presença de tangentes verticais no diagrama carga-deslocamento. Elas não são reveladas pelos testes do determinante da matriz, no processo de decomposição e são mais difícies de serem diagnosticadas.

Lock[162] recomenda, para o caso de tangentes verticais, abandonar o processo Newton-Raphson, se a convergência não for alcançada em até cinco iterações, e retornar à configuração do incremento anterior, aplicando incremento de carga, ao invés de deslocamento. Este tipo de automatização se presta para aplicações em programas específicos e de formulações particulares.

3.3 - SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DINÂMICOS

As primeiras soluções computacionais obtidas para problemas não-lineares dinâmicos utilizavam o método das diferenças finitas, com integração numérica no tempo. Existe uma considerável quantidade de trabalhos comentados por Fulton[119], cobrindo a área de deformações elásticas não-lineares, dirigidas ao comportamento de flambagem dinâmica de cascas elásticas. Os trabalhos citados se preocupavam em resolver numericamente as equações de movimento acopladas da estrutura.

Entretanto um método semelhante ao método dos elementos finitos foi desenvolvido por Witmer[67]. Neste enfoque a estrutura é discretizada em regiões e as equações de equilíbrio são escritas para cada região separada. Este procedimento resulta em um sistema de equações desacopladas, que pode ser resolvido diretamente. A resposta final é obtida utilizando-se relações de com

patibilidade. Soluções que incluem grandes deslocamentos e deformações plásticas foram determinadas com esse método para uma variedade de problemas (121).

O método dos elementos finitos foi aplicado inicialmente a problemas dinâmicos não-lineares para a análise de propagação de ondas em meios elasto-plásticos (118, 117, 120). Em seguida, numerosas investigações relativas ao método dos elementos finitos se preocuparam com a análise estrutural dinâmica não-linear (7, 73, 115, 116, 8, 114, 82, 77, 78, 29, 30 ...). Ao lado do tipo de não-linearidade incorporado na análise, um assunto que é ainda polêmico é a escolha do método de solução numérica do sistema de equações diferenciais resultantes. (107, 108, 109, 112, 113, 29, 30, 78, 21, 41, 111).

A integração no tempo das equações de movimento não-lineares com o uso de operadores de integração direta pode ser explícita ou implícita. Tillerson[123] estudou vários desses operadores para uma classe de problemas não-lineares geométricos, e concluiu ser o operador de Houboult[106], previamente provado ser incondicionalmente estável para problemas lineares (124), a melhor escolha.

Weeks[113] mostrou que essa escolha entretanto era uma função da maneira como as não-linearidades eram tratadas. Se os termos não-lineares são considerados funções das forças e usando-se extrapolação do carregamento para melhorar a precisão da aproximação, então o amortecimento artificial do operador de Houbolt, mantém estabilidade numérica para intervalos de tempo maiores do que os permitidos com o método de Newmark[105].

Por outro lado, aproximações que fazem uso de rigidez tangente parecem implicar em que a estabilidade incondicional

de ambos os métodos, se estenda do regime linear ao regime não-linear.

Um outro método de integração implícita bastante utilizado, é devido a Wilson[73,78].

Na Tabela 3.2 as hipóteses básicas desses métodos estão sumarizadas.

MÉTODO	APROXIMAÇÃO
HOUBOLT	$^{t+\Delta t}\ddot{u} = \frac{1}{\Delta t^2}\,(2\ ^{t+\Delta t}u - 5\ ^{t}u + 4\ ^{t-\Delta t}u - \ ^{t-2\Delta t}u)$ $^{t+\Delta t}\dot{u} = \frac{1}{6\Delta t}\,(11\ ^{t+\Delta t}u - 18\ ^{t}u + 9\ ^{t-\Delta t}u - 2\ ^{t-2\Delta t}u)$
WILSON θ	$^{t+\theta\Delta t}\ddot{u} = \frac{6}{\theta^2\ \Delta t^2}\,(^{t+\theta\Delta t}u - \ ^{t}u) - \frac{6}{\theta\ \Delta t}\ ^{t}\dot{u} - 2\ ^{t}\ddot{u}$ $^{t+\theta\Delta t}\dot{u} = \frac{3}{\theta\ \Delta t}\,(^{t+\theta\Delta t}u - \ ^{t}u) - 2\ ^{t}\dot{u} - \frac{\theta\ \Delta t}{2}\ ^{t}\ddot{u}$
NEWMARK	$^{t+\Delta t}\dot{u} = \ ^{t}\dot{u} + \{(1-\delta)\ ^{t}\ddot{u} + \delta\ ^{t+\Delta t}\ddot{u}\}\ \Delta t$ $^{t+\Delta t}u = \ ^{t}u + \ ^{t}\dot{u}\ \Delta t + \{(\frac{1}{2} - \alpha)\ ^{t}\ddot{u} + \alpha\ ^{t+\Delta t}\ddot{u}\}\ \Delta t^2$

TABELA 3.2 - MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO DIRETA IMPLÍCITOS USUAIS

O uso de operadores implícitos recomenda a adaptação de procedimentos iterativos de controle de equilíbrio em cada incremento de tempo. O Método de Newton-Raphson e Newton-Raphson Modificado podem se prestar a esse fim.

Na referência 7, ao invés de usar o método de Newton-Raphson, Stricklin propõe tratar os termos não-lineares como pseudo-cargas adicionais, transpondo-os para o segundo membro. Devido a que essas cargas são funções dos deslocamentos a serem cal

culados, não podendo ser avaliadas diretamente, o segundo membro das equações é expandido em série de Taylor de primeira ordem no entorno do incremento de tempo anterior.

Assim, se $\underset{\sim}{F}$ denota todos os termos não-lineares ; ou seja:

$$\underset{\sim}{F}(t,\underset{\sim}{u})^{k+1} = \underset{\sim}{F}(t,\underset{\sim}{u})^{k} + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \underset{\sim}{F}(t,\underset{\sim}{u})^{k} \qquad (3.10)$$

E usando uma diferença de primeira ordem para aproximá-lo, obtém-se:

$$\underset{\sim}{F}(t,\underset{\sim}{u})^{k+1} = 2\underset{\sim}{F}(t,\underset{\sim}{u})^{k} - \underset{\sim}{F}(t,\underset{\sim}{u})^{k-1} \qquad (3.11)$$

O uso dessa aproximação corresponde a uma extrapolação linear das cargas em dois incrementos de tempo. As vantagens dessa formulação são evidentes: não se itera para a convergência da solução não-linear e não é necessário armazenar uma matriz completa como no método de Newton-Raphson, bastando apenas armazenar um vetor para cada tempo. A validade desse procedimento foi examinada por Tillerson[123], com excelentes soluções. Entretanto os seus resultados indicam que, com o operador de Houbolt ou de Newmark, instabilidades ocorrem com intervalos de integração maiores, o que não acontece quando se utiliza o método de Newton-Raphson.

Uma desvantagem que se pode apontar no método de Houbolt é a necessidade de estratégia especial de partida. Alguns resultados publicados por Bathe[19] , mostram maior efetividade do método de Newmark sobre o método de Wilson, em problemas não-lineares. Em estruturas sujeitas a grandes deformações e enrigeci-

mento pelos efeitos não-lineares geométricos, que foram analisadas satisfatoriamente pelo método de Newmark, não se consegue obter resultados precisos com o método de Wilson.

As características de um operador de integração podem ser determinadas para problemas lineares, estabelecendo-se um critério de escolha do intervalo de tempo, a partir do conhecimento do espectro de frequências da estrutura (107).

Outros investigadores preferem utilizar para integrar o sistema de equações não-lineares (167, 109, 117, 125, 126, 41) o operador de diferença central, que é explícito, para matrizes de massa diagonais. Trata-se da mais óbvia aproximação de diferenças finitas, traduzida pela seguinte expressão:

$$^{t+\Delta t}\underset{\sim}{u} = (\underset{\sim}{M} + \underset{\sim}{C}\,\frac{\Delta t}{2})^{-1}\left[\Delta t^2\,(-\,^{t}\underset{\sim}{R} - \,^{t}\underset{\sim}{F}) + 2\,\underset{\sim}{M}\,^{t}\underset{\sim}{u} - (\underset{\sim}{M} - \underset{\sim}{C}\,\frac{\Delta t}{2})\;^{t\Delta t}\underset{\sim}{u}\right] \tag{3.12}$$

Se as matrizes $\underset{\sim}{M}$ e $\underset{\sim}{C}$ são diagonais a computação pode ser feita para cada grau de liberdade, ou seja:

$$^{t+\Delta t}u_i = \frac{1}{M_i + C_i\,\frac{\Delta t}{2}}\left[(\Delta t)^2\,(-\,^{t}R_i - \,^{t}F_i) + 2\,M_i\,^{t}u_i - (M_i - C_i\,\frac{\Delta t}{2})\;^{t-\Delta t}u_i\right] \tag{3.13}$$

Shantaram[41] recomenda fortemente este procedimento para obter respostas correspondentes a tempos até duas vezes maiores que o mais alto período natural da estrutura. Como a matriz de massa consistente do elemento não é diagonal, a opção que parece ser mais eficiente (39), é utilizar matriz de massa equivalente, concentrando a massa proporcionalmente aos termos da diago

nal da matriz de massa original consistente. Resumidamente esta técnica consiste de:

a) obter os elementos da diagonal da matriz de massa consistente:

$$M_{ii}^{e} = \int_{V} N_i \, \rho \, N_i \, dv \tag{3.14}$$

b) calcular a massa total

$$M = \int_{V} \rho \, dv \tag{3.15}$$

c) calcular os elementos da diagonal da matriz de massa equivalente por:

$$M_{i}^{e} = M_{ii}^{e} \frac{M}{\Sigma M_{ii}^{e}} \tag{3.16}$$

A estabilidade do esquema de diferença central é no entanto condicional. Sabe-se que o intervalo de tempo para estabilidade do processo é uma fração do menor período natural associado à estrutura discretizada.

Weeks[113], exibe resultados que demonstram uma considerável vantagem para o operador de diferença central em problemas não-lineares; neste caso, é necessário decompor a matriz de massa não-diagonal.

Gear[127] sugeriu que os critérios para estabilidade absoluta para todas as componentes da solução eram restritivos demais. Ele indicou preferência por métodos que têm regiões de estabilidade suficiente para incluir frequências acima do limite numérico de frequências ("Stiffly Stable Methods"). Estes méto-

dos se encontram em contínuo desenvolvimento e neles repousa grande potencial. (128, 112). Argyris[30] aproximou as forças de inércia obtidas da decomposição da matriz de massa e premultiplicação da rigidez e termos de carga, por uma função de interpolação cúbica o que resulta em uma expansão do quinto grau do campo de deslocamentos. Isso representa uma sofisticada aplicação de extrapolação de carga. Entretanto, convergência e estabilidade, só são obtidas com intervalo de tempo extremamente pequenos: uma fração do menor período da estrutura discretizada.

Recentemente, Nickell[111] propôs a análise dinâmica não-linear por superposição modal. As frequências naturais iniciais e os modos de vibração são calculados por iteração inversa, com os vetores tentativa para os sucessivos mais altos modos, corrigidos por ortonormalização de Gram-Schimidt em cada iteração. O subsequente espectro modal para o procedimento não-linear, é baseado em rigidez tangente, e, é calculado por iteração por sub-espaços, usando o último espectro computado como estimativa inicial. Assim um algoritmo de integração no tempo, preciso, que não tem amortecimento artificial ou erro na velocidade da fase para problemas lineares, é aplicado às equações de movimento desacopladas. Entretanto a performance desse esquema de integração, é examinada apenas para problemas de poucos graus de liberdade e em estruturas que a consideração de um limitado número de modos de vibração é suficientemente precisa.

Morris[171] sugere o uso combinado do método de Newmark e decomposição modal, para reduzir o número de incógnitas do sistema (método de Givens-Householder). Para problemas fortemente não-lineares, essa técnica, como ele próprio conclui, não resulta eficiente.

3.4 - SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DINÂMICOS NO SISTEMA LORANE-NL

No sistema LORANE-NL encontra-se presentemente implementado o método de Newmark, mas espera-se que esquemas de integração adicionais sejam incorporados futuramente. Considerando-se as várias classes de problemas que serão resolvidos com um programa geral, uma grande quantidade de diferentes métodos de integração poderia ser conveniente. A questão fundamental é identificar claramente para que classes de problemas não-lineares cada operador disponível é mais eficiente. Realmente, vantagens substanciais seriam obtidas, se durante a solução passo-a-passo se escolhesse um operador ou outro. Até o presente porém, existe muito pouca informação, além da experiência com problemas não-lineares específicos, para decidir a seleção de um operador de integração.

Um aspecto importante é a generalidade do algoritmo usado. Na Figura 3.5 a solução dinâmica passo-a-passo do sistema LORANE-NL está sumarizada. Essencialmente, por simples troca de constantes o algoritmo empregado seria adaptado ao método de Wilson.

As hipóteses do método de Newmark, Tabela 3.2, são substituídas nas seguintes equações:

$$\underset{\sim}{K}\ \Delta\ \underset{\sim}{u}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{R} - {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{F}^{(k-1)} - \underset{\sim}{C}\ {}^{t+\Delta t}\dot{\underset{\sim}{u}}^{(k)} - \underset{\sim}{M}\ {}^{t+\Delta t}\ddot{\underset{\sim}{u}}^{(k)}$$

$$k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \qquad (3.17)$$

e por simples eliminação, são resolvidas para os deslocamentos, velocidades e acelerações no tempo $t+\Delta t$.

O algoritmo de integração da Figura 3.5 determina primeiramente a inicialização dos vetores de deslocamentos, velo-

cidades e acelerações, e o cálculo das matrizes de rigidez, massa e amortecimento lineares. O cálculo das constantes do método usado, é feito pela definição dos parâmetros especificados pelo usuário. Se omitidos, o sistema assume os valores indicados nessa figura.

Assim, obtem-se a matriz de rigidez linear efetiva, que é em seguida triangularizada.

Se o problema é linear, para cada intervalo de tempo, forma-se o vetor de carga efetivo, calculando-se o incremento de deslocamentos com a matriz já decomposta. Determina-se então os novos deslocamentos, velocidades e acelerações.

Quando o problema é não-linear, verifica-se se no intervalo de tempo em questão, foi requerida a atualização da matriz de rigidez efetiva, para incluir os novos efeitos não-lineares. Se recalculada deverá ser triangularizada novamente, caso contrário, permanece a última decomposição efetuada.

O vetor de carga efetivo é sempre atualizado. Com ele procede-se o cálculo do incremento de deslocamentos e posteriormente obtém-se os novos deslocamentos, velocidades e acelerações, se for dispensável o uso de iterações para corrigir o equilíbrio.

O processo iterativo de verificação de equilíbrio, utiliza a mais recente rigidez efetiva decomposta. Para cada iteração, calculam-se as aproximações dos deslocamentos, velocidades e acelerações e atualiza-se o vetor de forças não-equilibradas . Desta forma, o incremento de deslocamento é corrigido até satisfazer o critério de convergência.

As constantes α e δ para estabilidade incondicional na análise linear devem atender a:

$$\alpha \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \delta\right)^2 \tag{3.18}$$

$$\delta \geq \frac{1}{2} \tag{3.19}$$

Deve-se notar da Figura 3.5 que se os efeitos de massa e amortecimento não são considerados, a solução passo-a-passo se reduz a solução das equações da análise estática. Os vários aspectos dessa solução, no que diz respeito a convergência e precisão, discutidos anteriormente, são também aplicados a análise dinâmica.

Entretanto é oportuno comentar que, como esperado, a solução dinâmica de um problema é mais estável. Isto é matematicamente demonstrado pelo fato dos efeitos da massa contribuirem para a rigidez efetiva do sistema, o que é decorrente da forma de obtenção de $^{t}\hat{K}^{*}$, indicada na Figura 3.5.

Convergência na iteração é frequentemente garantida, pois os elementos da matriz de rigidez efetiva são suficientemente grandes. Na prática porém, devem ser escolhidos pequenos incrementos de tempo.

Em relação a solução dinâmica no sistema LORANE-NL, cabem as seguintes observações:

a) a iteração para o equilíbrio dinâmico é feita com a matriz de rigidez constante durante cada incremento, pois seria demasiadamente dispendioso atualizá-la em cada iteração. (NRM).

INCIALIZAÇÃO DOS VETORES $\underset{\sim}{u}$, $\dot{\underset{\sim}{u}}$, $\ddot{\underset{\sim}{u}}$

CALCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ LINEAR $\underset{\sim}{K}$

MATRIZ DE MASSA $\underset{\sim}{M}$, E AMORTECIMENTO $\underset{\sim}{C}$

DEFINIÇÃO DOS PARÂMETROS:

TOLERÂNCIA $\leq 1\%$ Nº ITERAÇÕES ≥ 3

$\delta \geq 0.50$ DEFAULT 0.50

$\alpha \geq 0.25\ (0.5 + \delta)^2$ DEFAULT 0.25

CÁLCULO DAS CONSTANTES:

$C_o = 1/(\alpha\ \Delta t)^2$ $C_1 = \delta(\alpha\ \Delta t)$

$C_2 = 1/(\alpha\ \Delta t)$ $C_3 = 1/(2\ \alpha) - 1$

$C_4 = \delta/\alpha - 1$ $C_5 = \Delta t(\delta/\alpha - 2)/2$

$C_6 = C_o$ $C_7 = - C_2$ $C_8 = - C_3$

C_9 $\Delta t(1 - \delta)$ $C_{10} = \delta\ \Delta t$

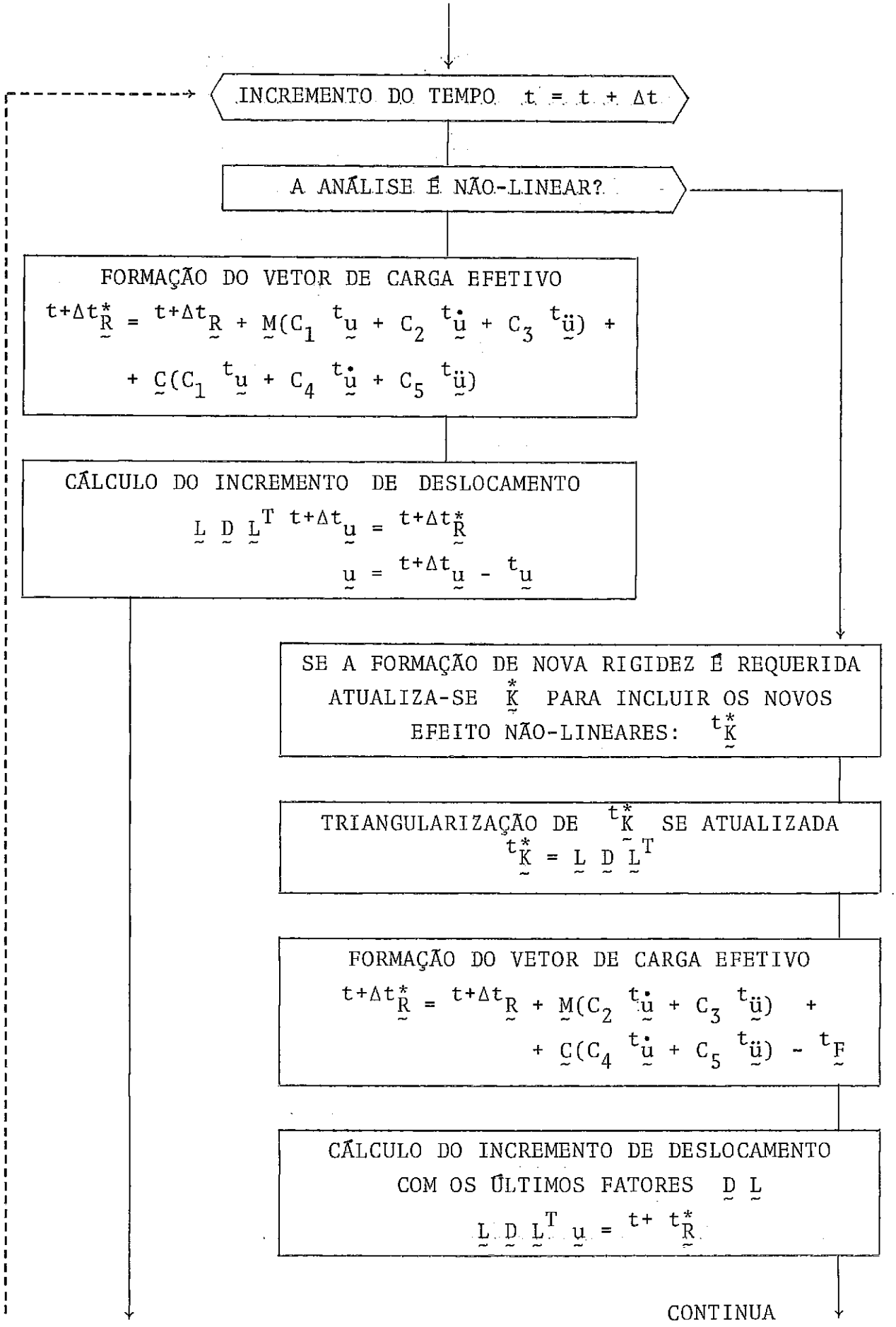
OBTENÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ LINEAR EFETIVA

$$\overset{*}{\underset{\sim}{K}} = \underset{\sim}{K} + C_o\ \underset{\sim}{M} + C_1\ \underset{\sim}{C}$$

TRIANGULARIZAÇÃO DE $\underset{\sim}{K}$

$$\overset{*}{\underset{\sim}{K}} = \underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{D}\ \underset{\sim}{L}^T$$

CONTINUA


INCREMENTO DO TEMPO $t = t + \Delta t$
A ANÁLISE É NÃO-LINEAR?
FORMAÇÃO DO VETOR DE CARGA EFETIVO
$^{t+\Delta t}\underset{\sim}{R}^{*} = {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{R} + \underset{\sim}{M}(C_1\ {}^{t}\underset{\sim}{u} + C_2\ {}^{t}\dot{\underset{\sim}{u}} + C_3\ {}^{t}\ddot{\underset{\sim}{u}}) +$
$+ \underset{\sim}{C}(C_1\ {}^{t}\underset{\sim}{u} + C_4\ {}^{t}\dot{\underset{\sim}{u}} + C_5\ {}^{t}\ddot{\underset{\sim}{u}})$
CÁLCULO DO INCREMENTO DE DESLOCAMENTO
$\underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{D}\ \underset{\sim}{L}^{T}\ {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{u} = {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{R}^{*}$
$\underset{\sim}{u} = {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{u} - {}^{t}\underset{\sim}{u}$
SE A FORMAÇÃO DE NOVA RIGIDEZ É REQUERIDA ATUALIZA-SE $\overset{*}{\underset{\sim}{K}}$ PARA INCLUIR OS NOVOS EFEITO NÃO-LINEARES: $^{t}\overset{*}{\underset{\sim}{K}}$
TRIANGULARIZAÇÃO DE $^{t}\overset{*}{\underset{\sim}{K}}$ SE ATUALIZADA
$^{t}\overset{*}{\underset{\sim}{K}} = \underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{D}\ \underset{\sim}{L}^{T}$
FORMAÇÃO DO VETOR DE CARGA EFETIVO
$^{t+\Delta t}\underset{\sim}{R}^{*} = {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{R} + \underset{\sim}{M}(C_2\ {}^{t}\dot{\underset{\sim}{u}} + C_3\ {}^{t}\ddot{\underset{\sim}{u}}) +$
$+ \underset{\sim}{C}(C_4\ {}^{t}\dot{\underset{\sim}{u}} + C_5\ {}^{t}\ddot{\underset{\sim}{u}}) - {}^{t}\underset{\sim}{F}$
CÁLCULO DO INCREMENTO DE DESLOCAMENTO COM OS ÚLTIMOS FATORES $\underset{\sim}{D}\ \underset{\sim}{L}$
$\underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{D}\ \underset{\sim}{L}^{T}\ \underset{\sim}{u} = {}^{t+}\ {}^{t}\underset{\sim}{R}^{*}$
CONTINUA

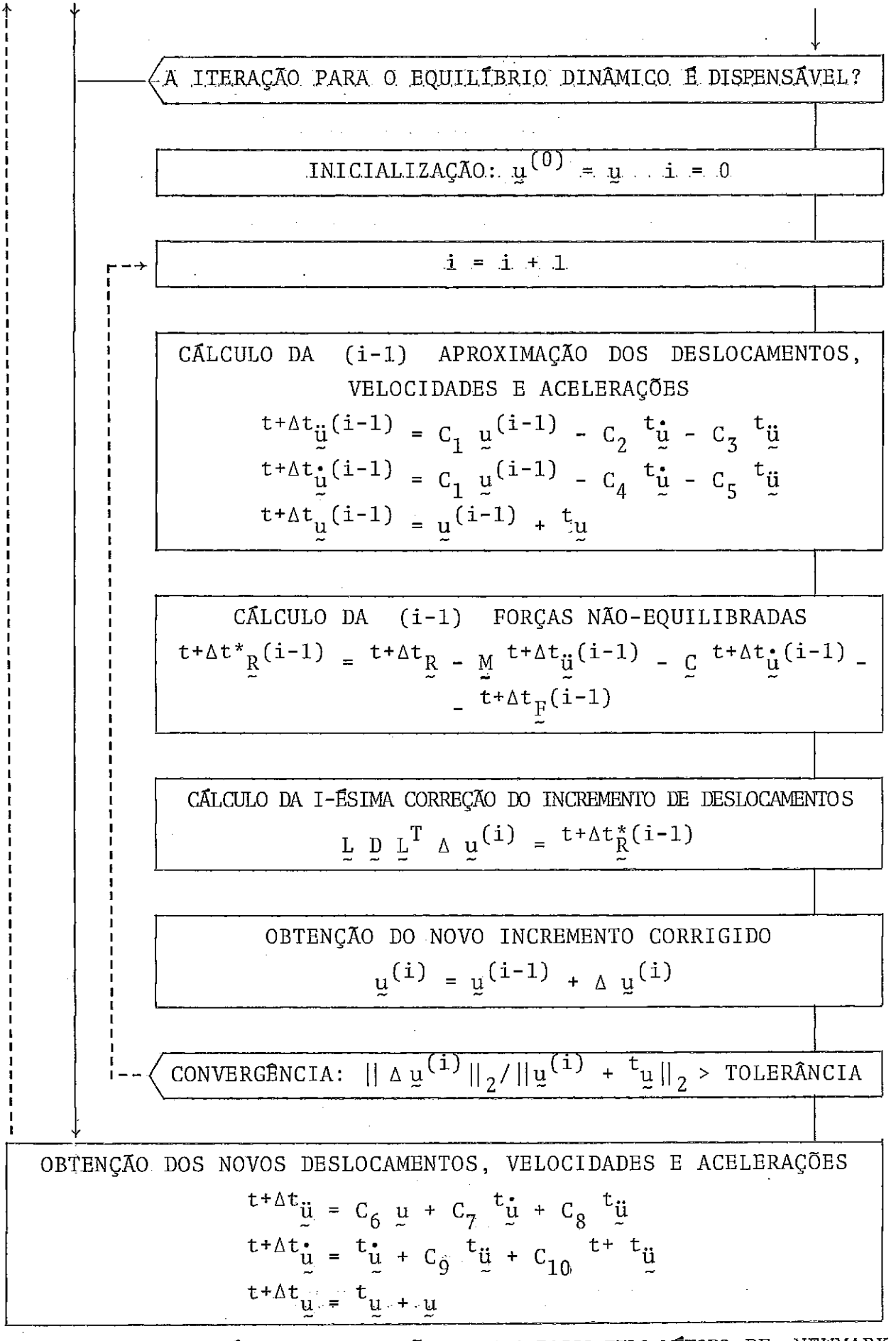


FIGURA 3.5 - ALGORÍTMO DE INTEGRAÇÃO PASSO-A-PASSO PELO MÉTODO DE NEWMARK

b) a verificação do equilíbrio é feita em cada intervalo ou nos intervalos especificados.

c) a atualização dos efeitos não-lineares fica a escolha do usuário que pode determinar os incrementos que vão manter a última matriz de rigidez calculada.

d) se o número de iterações para corrigir o equilíbrio ultrapassar o número de iterações especificado sem alcançar convergência, uma outra análise, com nova matriz de rigidez, e ou intervalo de integração menor deverá ser procedida.

É interessante notar que a maior parte das soluções de análise não-lineares dinâmicas pelo método dos elementos finitos, foram efetuadas sem se verificar o equilíbrio. Uma solução precisa das equações de equilíbrio em cada incremento de tempo, é muito mais importante na análise dinâmica, do que na análise estática.

Qualquer erro, que é introduzido na solução dinâmica passo-a-passo será acumulativo e não poderá ser compensado posteriormente, como na solução estática de muitos problemas geometricamente não-lineares.

IV - ALGUNS MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS

4.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados desenvolvimentos de alguns modelos de elementos finitos implementados, na primeira versão da linguagem LORANE-NL.

Dentro de cada tipo de análise, apesar da ampla gama de possibilidades, teve que se escolher uma aproximação, de acordo com algum critério. Procurou-se suprir o sistema de recursos que balanceavam eficiência e precisão.

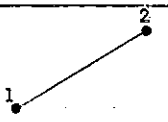
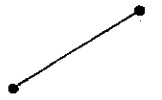
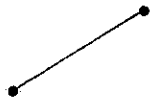
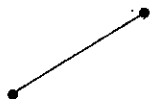
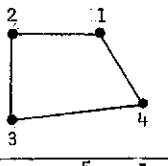
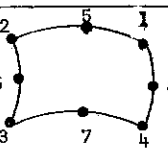
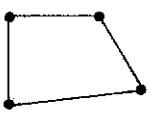
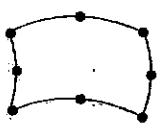
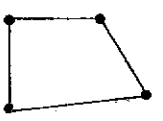
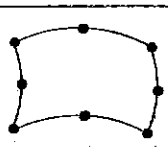
Evidentemente não se pretendeu completar a biblioteca de elementos da linguagem.

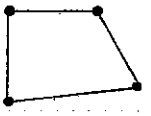
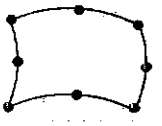
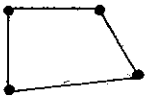
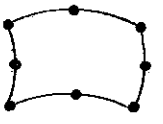
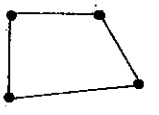
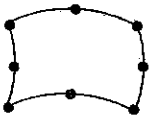
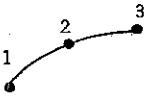
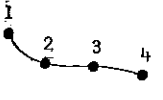
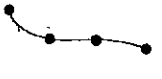
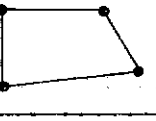
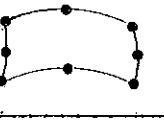
Diversos modelos, segundo a necessidade com que incidirem na prática serão adicionados. Este tipo de operação, devido as características modulares como foi desenvolvida a programação, é feito com grande simplicidade.

Na Tabela 4.1 os elementos básicos desta versão são indicados através de: nome de referência no dicionário da biblioteca de elementos, tipo de problema a que se aplica, incidência esquemática, incógnitas nodais, grau da função de interpolação e formulação básica de que se valeu.

Os desenvolvimentos matriciais comuns a análise linear, como a obtenção de matrizes de massa consistente e discreta, são amplamente divulgados e não serão comentados.

Deve-se acrescentar apenas, que para os elementos isoparamétricos, a discretização da massa, se requerida, é efetuada proporcionalmente aos termos da diagonal da matriz de massa consistente original.

Nº	ELEMENTO	TIPO DE PROBLEMA	FIGURA	INCÓGNITAS NODAIS	FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO	FORMULAÇÃO
1	"TP"	Treliça Plana		u , v	Linear	Grandes Deslocamentos
2	"TE"	Treliça Espacial		u , v , w	Linear	Grandes Deslocamentos
3	"PP"	Pórtico Plano		u , v , rw	Cúbica	Grandes Deslocamentos - Viga Coluna
4	"PE"	Pórtico Espacial		u , v , w ru , rv , rw	—	Grandes Deslocamentos - Viga Coluna
5	"GP"	Grelha Plana		ru , rv , w	—	Grandes Deslocamentos - Viga Coluna
6	"EPTIQL"	Estado Plano de Tensões		u , v	Linear	Grandes Deformações Lagrangeana
7	"EPTIQQ"	Estado Plano de Tensões		u , v	Quadrática	Grandes Deformações Lagrangeana
8	"EPDIQL"	Estado Plano de Deformações		u , v	Linear	Grandes Deformações Lagrangeana
9	"EPDIQQ"	Estado Plano de Deformações		u , v	Quadrática	Grandes Deformações Lagrangeana
10	"TAXIQL"	Sólido Axissimétrico		u , v	Linear	Grandes Deformações Lagrangeana
11	"TAXIQQ"	Sólido Axissimétrico		u , v	Quadrática	Grandes Deformações Lagrangeana

Nº	ELEMENTO	TIPO DE PROBLEMA	FIGURA	INCÓGNITAS NODAIS	FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO	FORMULAÇÃO
12	"EPTEQL"	Estado Plano de Tensões		u , v	Linear	Grandes Deformações Lagrangeana Atualizada
13	"EPTEQQ"	Estado Plano de Tensões		u , v	Quadrática	Grandes Deformações Lagrangeana Atualizada
14	"EPDEQL"	Estado Plano de Deformações		u , v	Linear	Grandes Deformações Lagrangeana Atualizada
15	"EPDEQQ"	Estado Plano de Deformações		u , v	Quadrática	Grandes Deformações Lagrangeana Atualizada
16	"TAXEQL"	Sólido Axissimé-trico		u , v	Linear	Grandes Deformações Lagrangeana Atualizada
17	"TAXEQQ"	Sólido Axissimé-trico		u , v	Quadrática	Grandes Deformações Lagrangeana Atualizada
18	"PPLIDQ"	Pórtico Plano de Eixo Curvo		u , v , rw	Quadrática	Grandes Deformações Lagrangeana
19	"PPLIDC"	Pórtico Plano de Eixo Curvo		u , v , rw	Cúbica	Grandes Deformações Lagrangeana
20	"CAXIDQ"	Casca Axissimé - trica		u , v , rw	Quadrática	Grandes Deformações Lagrangeana
21	"CAXIDC"	Casca Axissimé - trica		u , v , rw	Cúbica	Grandes Deformações Lagrangeana
22	"PLAIDL"	Flexão de Placa		w , ru , rv	Linear	Grandes Deformações Lagrangeana
23	"PLAIDQ"	Flexão de Placa		w , ru , rv	Quadrática	Grandes Deformações Lagrangeana

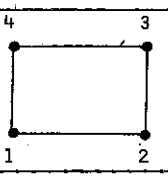
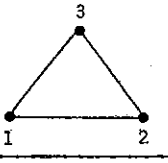
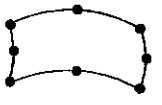
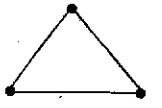
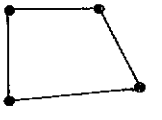
Nº	ELEMENTO	TIPO DE PROBLEMA	FIGURA	INCÓGNITAS NODAIS	FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO	FORMULAÇÃO
24	"FPRNC"	Flexão de Placa		w , ru , rv	w-Cúbica	Grandes Deslocamentos - Von-Karman
25	"FPCNC"	Flexão de Placa		w , ru , rv	w-Cúbica	Grandes Deslocamentos - Von-Karman
26	"CASIDL"	Casca		u , v , w ru , rv	Linear	Grandes Deformações Lagrangeana
27	"CASIDQ"	Casca		u , v , w ru , rv	Quadrática	Grandes Deformações Lagrangeana
28	"PRIIDL"	Estrutura Prismática Laminar		u , v , w ru , rv , rw	Linear	Grandes Deformações Lagrangeana
29	"PRIIDQ"	Estrutura Prismática Laminar		u , v , w ru , rv , rw	Quadrática	Grandes Deformações Lagrangeana
30	"CPRS1"	Estrutura Prismática Laminar		u , v , w ru , rv , rw	u,v Linear w - Cúbica	Grandes Deslocamentos - Von-Karman
31	"CPTS1"	Estrutura Prismática Laminar		u , v , w ru , rv , rw	u,v - Linear w - Cúbica	Grandes Deslocamentos - Von-Karman
32	"CPRS2"	Casca		u , v , w ru , rv , rw	u,v - Linear w - Cúbica	Grandes Deslocamentos - Von-Karman

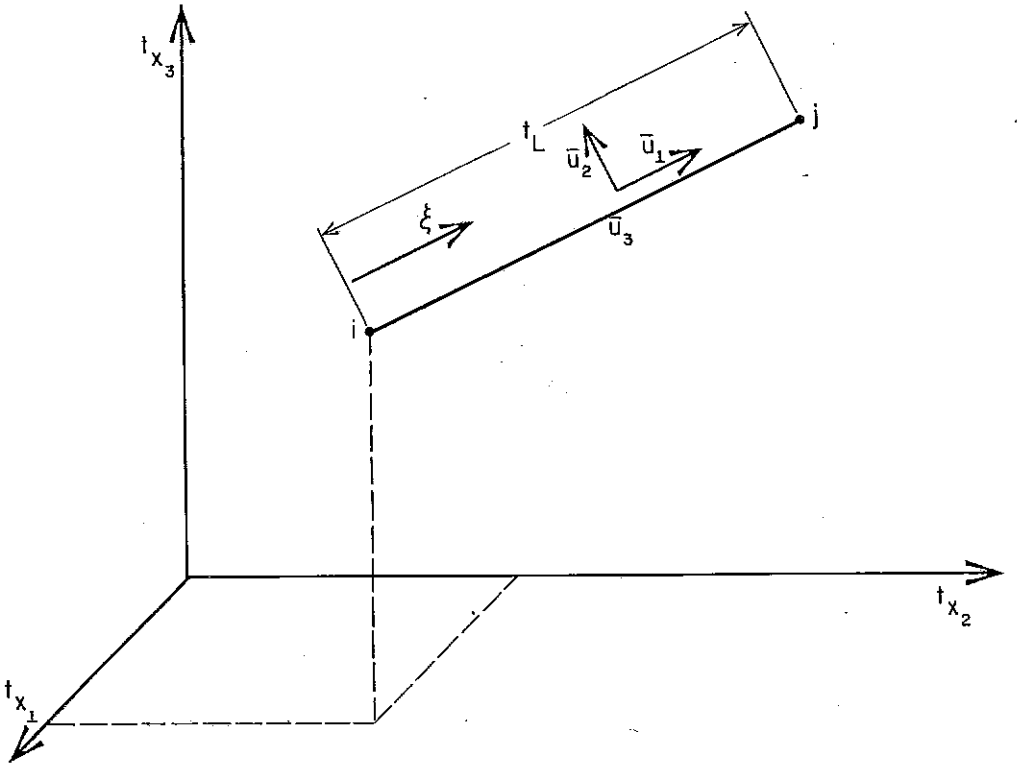
TABELA 4.1 - ELEMENTOS IMPLEMENTADOS

Porque na maioria dos elementos de geometria orientada, há ocorrência de rotações como incógnitas nodais, os deslocamentos denotados pela direções 1, 2 e 3 são substituidos por u , v , w e respectivas rotações ru , rv , rw , que é a forma mais comum na literatura do método dos elementos finitos.

4.2 - TRELIÇA (nº 1 e 2)

Para análise de treliças, o elemento de eixo reto, capaz de transmitir apenas força axial, tem a orientação em relação ao sistema de coordenadas cartesianas indicada na Figura 4.1.

Grandes deslocamentos e pequenas deformações são considerados, já que na maior parte das aplicações práticas desprezam-se as variações da seção transversal durante a deformação. Felippa[139] apresenta formulações mais sofisticadas.



ELEMENTO DE TRELIÇA REFERIDO À CONFIGURAÇÃO DO TEMPO t

Figura 4.1

Como se pode observar na Figura 4.1 a configuração de tempo t foi escolhida como referência.

Segundo a tabela 2.2 a formulação incremental requer a avaliação da rigidez linear ${}^{t}_{t}\underset{\sim}{K}_{L}$, da rigidez não-linear ${}^{t}_{t}\underset{\sim}{K}_{NL}$ e do vetor de forças internas ${}^{t}_{t}\underset{\sim}{F}$.

Por se tratar de um elemento que apenas transmite força axial, do nó i para o nó j, é usual obter inicialmente a matriz de rigidez linear, referida ao sistema local, ${}^{t}_{t}\underset{\sim}{k}_{L}$:

$$ {}^{t}_{t}\underset{\sim}{k}_{L} = \int_{{}^{t}V} {}^{t}_{t}\underset{L}{b}^{T} \; E \; {}^{t}_{t}\underset{\sim}{b}_{L} \; {}^{t}dv \tag{4.1} $$

onde E é o módulo de elasticidade do material na configuração de tempo t, e ${}^{t}_{t}\underset{\sim}{b}_{L}$, é a matriz deformação-deslocamento em coordenadas locais ou:

$$ {}^{t}\bar{e}_{11} = {}^{t}_{t}\underset{\sim}{b}_{L} \; \bar{\underset{\sim}{u}} \tag{4.2} $$

e o vetor $\bar{u}$, contém os incrementos de deslocamento axiais dos nós do elemento correspondentes a configuração t, isto é:

$$ \bar{\underset{\sim}{u}} = \begin{Bmatrix} \bar{u}^{i}_{1} \\ \\ \bar{u}^{j}_{1} \end{Bmatrix} \tag{4.3} $$

O deslocamento axial $\bar{u}_1$ ao longo do elemento, com o uso da coordenada local ξ é definido por:

$$ \bar{u}_1(\xi) = \left[1 - \frac{\xi}{{}^{t}L} \quad \frac{\xi}{{}^{t}L} \right] \bar{\underset{\sim}{u}} \tag{4.4} $$

e como:

$$ {}^{t}\bar{e}_{11}(\xi) = \frac{d(\bar{u}_1(\xi))}{d\xi} \tag{4.5} $$

tem-se:

$$ {}^{t}\bar{e}_{11}(\xi) = \left[-\frac{1}{t_L} \quad \frac{1}{t_L} \right] \underset{\sim}{\bar{u}} \tag{4.6} $$

e

$$ {}^{t}_{t}b_L = \left[-\frac{1}{t_L} \quad \frac{1}{t_L} \right] \tag{4.7} $$

onde ${}^{t}L$ é o comprimento do elemento na configuração de tempo t.

Assim por substituição obtem-se:

$$ {}^{t}_{t}\underset{\sim}{k}_L = \frac{AE}{t_L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.8} $$

sendo que A é a seção transversal, constante em todo o elemento e igual a da configuração inicial.

Os deslocamentos locais são referidos agora ao sistema global por:

$$ \underset{\sim}{\bar{u}} = \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_3^i \\ u_1^j \\ u_2^j \\ u_3^j \end{bmatrix} = \underset{\sim}{T}\ \underset{\sim}{u} \tag{4.9} $$

onde ℓ_n são os cossenos diretores do eixo do elemento, na configuração de tempo t :

$$\ell_n = \frac{{}^{t}x_n^j - {}^{t}x_n^i}{{}^{t}L} \tag{4.10}$$

e ${}^{t}x_n^j$, é a coordenada nodal de j na direção n e na configuração de tempo t .

Assim, pode-se escrever:

$$\underset{\sim}{{}^{t}K_L} = \underset{\sim}{T}^T \; \underset{\sim}{{}^{t}k_L} \; \underset{\sim}{T} \tag{4.11}$$

A parcela não-linear da rigidez é dada por:

$$\underset{\sim}{{}^{t}K_{NL}} = \int_{{}^{t}V} \underset{\sim}{{}^{t}B_{NL}}^T \; \underset{\sim}{{}^{t}\tau} \; \underset{\sim}{{}^{t}B_{NL}} \; {}^{t}dv \tag{4.12}$$

e como mostrado na tabela 2.2, resulta da avaliação de

$$\int_{{}^{t}V} {}^{t}\tau_{ij} \; \delta \; {}^{t}\gamma_{ij} \; {}^{t}dv \; .$$

Para o elemento de treliça em coordenadas locais a única componente não nula do tensor de Cauchy é ${}^{t}\bar{\tau}_{11}$, isto é, a tensão axial do elemento no tempo t . O incremento de deformação ${}^{t}\bar{\gamma}_{ij}$ tem a correspondente porção quadrática:

$${}^{t}\bar{\gamma}_{11} = \frac{1}{2} \; {}^{t}\bar{u}_{k,1} \; {}^{t}\bar{u}_{k,1} \tag{4.13}$$

que pode ser escrita em função dos deslocamentos globais por:

$$ {}^{t}\bar{\gamma}_{11} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi}\right)^2\right) \tag{4.14} $$

Então ${}^{t}\bar{\tau}_{11}\ \delta\ {}^{t}\bar{\gamma}_{11}$ é expresso, em forma matricial por:

$$ {}^{t}\bar{\tau}_{11}\ \delta\ {}^{t}\bar{\gamma}_{11} = \delta\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} u_{1,\xi} & u_{2,\xi} & u_{3,\xi} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^{t}\bar{\tau}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & {}^{t}\bar{\tau}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & {}^{t}\bar{\tau}_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{1,\xi} \\ u_{2,\xi} \\ u_{3,\xi} \end{bmatrix}\right) \tag{4.15} $$

onde não se tomou nenhuma variação em ${}^{t}\bar{\tau}_{11}$. Com a expansão linear dos deslocamentos em ξ tem-se:

$$ \begin{bmatrix} u_{1,\xi} \\ u_{2,\xi} \\ u_{3,\xi} \end{bmatrix} = {}^{t}_{t}\underset{\sim}{B}_{NL}\ \underset{\sim}{u} = \frac{1}{t_L}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_3^i \\ u_1^j \\ u_2^j \\ u_3^j \end{bmatrix} \tag{4.16} $$

Substituindo ${}^{t}_{t}\underset{\sim}{B}_{NL}$ e com:

$$ {}^{t}\underset{\sim}{\tau} = {}^{t}\bar{\tau}_{11}\ \underset{\sim}{I}_3 \tag{4.17} $$

onde $\underset{\sim}{I}_3$ é a matriz identidade 3 x 3, obtém-se:

$$ {}^{t}_{t}\underset{\sim}{K}_{NL} = \frac{{}^{t}P}{{}^{t}L} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{I}_3 & -\underset{\sim}{I}_3 \\ -\underset{\sim}{I}_3 & \underset{\sim}{I}_3 \end{bmatrix} \tag{4.18} $$

sendo ${}^{t}P$ a força axial no elemento de treliça na configuração de tempo t .

O vetor de forças nodais equivalentes as tensões de Cauchy ${}^{t}\tau_{ij}$ é :

$$ {}^{t}_{t}\underset{\sim}{F} = \int_{{}^{t}V} {}^{t}_{t}\underset{\sim}{B}^{T}_{L} \; {}^{t}\hat{\underset{\sim}{\tau}} \; {}^{t}dv \tag{4.19} $$

Para avaliá-lo, escreve-se esta relação no sistema local

$$ {}^{t}_{t}\underset{\sim}{f} = \int_{o}^{{}^{t}L} {}^{t}_{t}\underset{\sim}{b}^{T}_{L} \; {}^{t}\underset{\sim}{\tau}_{11} \; A \; d\xi \tag{4.20} $$

e com a substituição de ${}^{t}_{t}\underset{\sim}{b}_{L}$ fica:

$$ {}^{t}_{t}\underset{\sim}{f} = \begin{Bmatrix} -{}^{t}P \\ \\ {}^{t}P \end{Bmatrix} \tag{4.21} $$

Logo após a seguinte transformação é procedida:

$$ {}^{t}_{t}\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{T}^{T} \; {}^{t}_{t}\underset{\sim}{f} \tag{4.22} $$

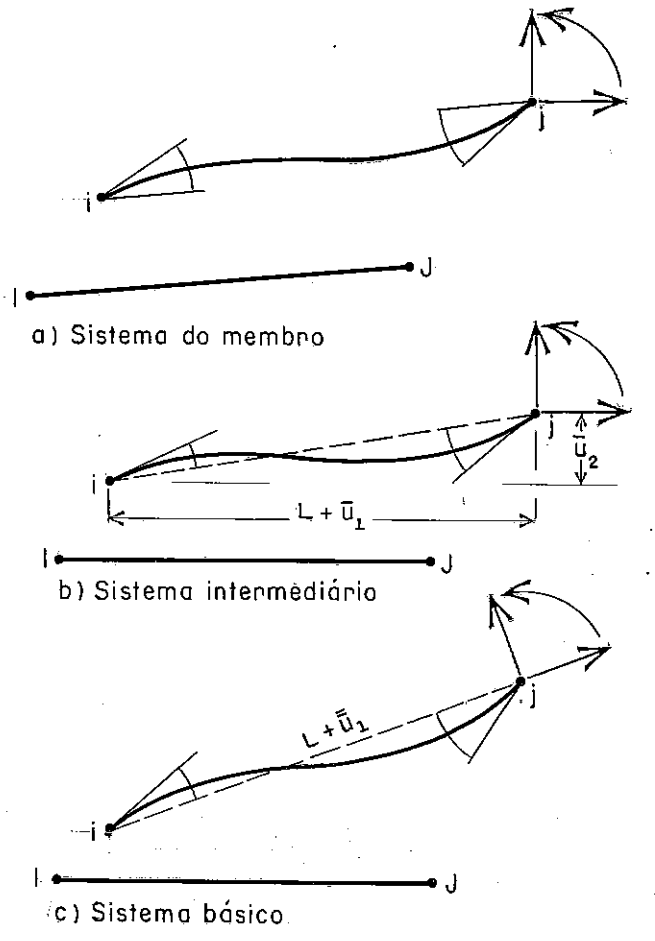
Esta é uma aproximação simples para os efeitos não lineares em estruturas de treliça. Na análise de problemas que sensíveis variações da seção transversal, ou grandes deformações são experimentadas, um enfoque mais rigoroso torna-se necessário. Para grande maioria das aplicações da engenharia entretanto, é suficientemente apurada.

4.3 - PÓRTICO PLANO (nº 3)

Na análise de estruturas de barras foram propostas uma infinidade de aproximações. A maior parte delas se vale da teoria de "viga-coluna". As deformações consideradas são pequenas, mas os deslocamentos grandes. Além disso, estruturas desta categoria são compostas de membros esbeltos, para os quais deformações do esforço cortante são comparativamente menores e podem ser ignoradas.

Ucciferro[132] apresenta uma comparação teórica e numérica de cinco modelos de elementos finitos. As equações força-deslocamento associadas com essas formulações são derivadas de um ponto inicial comum: o procedimento apresentado por Martin[180]. Desta maneira, as hipóteses e os limites de aplicabilidade inerentes de cada modelo, ficam claramente evidenciados.

Baseado nessa análise decidiu-se por adotar a aproximação originalmente sugerida por Jennings[129] .



SISTEMAS DE REFERÊNCIA DO MEMBRO

Figura 4.2

Para descrevê-la abreviadamente duas transformações são necessárias. Inicialmente o membro IJ considerados na Figura 4.2, de comprimento L , seção constante A , de momento de inércia I , inclinação α , sujeito aos deslocamentos nodais

$$\underset{\sim}{u} = \{u^i \ , \ v^i \ , \ rw^i \ , \ u^j \ , \ v^j \ , \ rw^j\}^T \qquad (4.23)$$

move-se para a posição ij . Um conjunto de deslocamentos intermediários

$$\bar{\underset{\sim}{u}} = \{\bar{u} \ , \ \bar{v} \ , \ \overline{rw}^{i} \ , \ \overline{rw}^{j}\}^{T} \tag{4.24}$$

é definido de modo que $\bar{u}$, $\bar{v}$, são deslocamentos relativos de nós medidos nas direções paralela e perpendicular ao membro na posição anterior, e $\overline{rw}^{i}$ e $\overline{rw}^{j}$ são as rotações nas extremidades. O conjunto de deslocamentos básicos, em seguida,

$$\bar{\bar{\underset{\sim}{u}}} = \{\bar{\bar{u}} \ , \ \overline{\overline{rw}}^{i} \ , \ \overline{\overline{rw}}^{j}\}^{T} \tag{4.25}$$

é utilizado para medir o encurtamento axial do membro $\bar{\bar{u}}$, e as rotações de extremidade em relação a posição atual.

A primeira transformação é obtida por:

$$\bar{\underset{\sim}{u}} = \underset{\sim}{T} \ \underset{\sim}{u}$$

com

$$T = \begin{bmatrix} -\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha & 0 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

A expressão mais precisa da transformação seguinte é:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{u}} &= \sqrt{(L + \bar{u})^2 + (\bar{v})^2} - L \\ \overline{\overline{rw}}^{i} &= \overline{rw}^{i} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\bar{v}}{L + \bar{u}}\right) \\ \overline{\overline{rw}}^{j} &= \overline{rw}^{j} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\bar{v}}{L + \bar{u}}\right) \end{aligned} \tag{4.27}$$

Sua forma incremental correspondente é obtida por diferenciação parcial, assim:

$$d\underset{\sim}{\bar{\bar{u}}} = \underset{\sim}{A}\, d\underset{\sim}{\bar{u}}$$

ou

$$\begin{bmatrix} d\bar{\bar{u}} \\ d\bar{\bar{rw}}^i \\ d\bar{\bar{rw}}^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{L+\bar{u}}{L+\bar{\bar{u}}} & \dfrac{\bar{v}}{L+\bar{\bar{u}}} & 0 & 0 \\ \dfrac{\bar{v}}{(L+\bar{\bar{u}})^2} & -\dfrac{L+\bar{u}}{(L+\bar{\bar{u}})^2} & 1 & 0 \\ \dfrac{\bar{v}}{(L+\bar{\bar{u}})^2} & -\dfrac{L+\bar{u}}{(L+\bar{\bar{u}})^2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\bar{u} \\ d\bar{v} \\ d\bar{\bar{rw}}^i \\ d\bar{\bar{rw}}^j \end{bmatrix} \qquad (4.28)$$

Assumindo-se que $\bar{\bar{u}}$ é pequeno, quando comparado com L, o uso de uma expansão cúbica fornece:

$$\bar{\bar{x}}_2 = \bar{\bar{rw}}^i \left(\bar{\bar{x}}_1 - \frac{2(\bar{\bar{x}}_1)^2}{L} + \frac{(\bar{\bar{x}}_1)^3}{L^2}\right) + \bar{\bar{rw}}^j \left(-\frac{(\bar{\bar{x}}_1)^2}{L} + \frac{(\bar{\bar{x}}_1)^3}{L^2}\right) \qquad (4.29)$$

Desta forma o encurtamento axial é dado por:

$$\frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{d\bar{\bar{x}}_2}{d\bar{\bar{x}}_1}\right) d\bar{\bar{x}}_1 = \frac{L}{30}\left(2(\bar{\bar{rw}}^i)^2 - \bar{\bar{rw}}^i\,\bar{\bar{rw}}^j + 2(\bar{\bar{rw}}^j)^2\right) \qquad (4.30)$$

e então, a força axial e os momentos de extremidade associados ao sistema básico são:

$$\bar{\bar{\underset{\sim}{F}}} = \begin{bmatrix} EA\left(\frac{\bar{\bar{u}}}{L} + \frac{1}{30}\left(2(\bar{\bar{rw}}^i)^2 - \bar{\bar{rw}}^i\,\bar{\bar{rw}}^j + 2(\bar{\bar{rw}}^j)^2\right)\right. \\ \left(\frac{4EI}{L} + \frac{4\bar{\bar{F}}_1}{30}\right)\bar{\bar{rw}}^i + \left(\frac{2EI}{L} - \frac{\bar{\bar{F}}_1 L}{30}\right)\bar{\bar{rw}}^j \\ \left(\frac{2EI}{L} - \frac{\bar{\bar{F}}_1 L}{30}\right)\bar{\bar{rw}}^i + \left(\frac{4EI}{L} + \frac{4\bar{\bar{F}}_1 L}{30}\right)\bar{\bar{rw}}^j \end{bmatrix} \qquad (4.31)$$

A diferenciação parcial, com respeito as variáveis deslocamentos desta equação fornece:

$$d\bar{\bar{\underset{\sim}{F}}} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{K}}_{11} & \bar{\bar{K}}_{12} & \bar{\bar{K}}_{13} \\ & \bar{\bar{K}}_{22} & \bar{\bar{K}}_{23} \\ \text{SIMÉTRICA} & & \bar{\bar{K}}_{33} \end{bmatrix} d\bar{\bar{\underset{\sim}{u}}}$$

onde

$$\bar{\bar{K}}_{11} = \frac{EA}{L}$$

$$\bar{\bar{K}}_{12} = \frac{EA}{30}\left(4\bar{\bar{rw}}^i - \bar{\bar{rw}}^j\right)$$

$$\bar{\bar{K}}_{13} = \frac{EA}{30}\left(-\bar{\bar{rw}}^i - 4\bar{\bar{rw}}^j\right)$$

$$\bar{\bar{K}}_{22} = \frac{4EI}{L} + \frac{4EA\bar{\bar{u}}}{30} + \frac{EAL}{300}\left(8(\bar{\bar{rw}}^i)^2 - 4\bar{\bar{rw}}^i\,\bar{\bar{rw}}^j + 3(\bar{\bar{rw}}^j)^2\right)$$

$$\bar{\bar{K}}_{23} = \frac{2EI}{L} - \frac{EA\bar{\bar{u}}}{30} + \frac{EAL}{300}\left(-2(\bar{\bar{rw}}^i)^2 + 6\bar{\bar{rw}}^i\,\bar{\bar{rw}}^j - 2(\bar{\bar{rw}}^j)^2\right)$$

$$\bar{\bar{K}}_{33} = \frac{4EI}{L} + \frac{4EA\bar{\bar{u}}}{30} + \frac{EAL}{300}\left(3(\bar{\bar{rw}}^i)^2 - 4\bar{\bar{rw}}^i\,\bar{\bar{rw}}^j + 8(\bar{\bar{rw}}^j)^2\right) \qquad (4.32)$$

A avaliação do vetor de forças internas na configuração de tempo t, ${}^t\underset{\sim}{F}$ é feita com a substituição dos deslocamentos do sistema básico na expressão 4.31, e logo após, as transfor

mações:

$$ {}^{t}\underset{\sim}{\bar{F}} = \underset{\sim}{A}^{T}\ {}^{t}\underset{\sim}{\bar{\bar{F}}} \tag{4.33} $$

$$ {}^{t}\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{T}^{T}\ {}^{t}\underset{\sim}{\bar{F}} \tag{4.34} $$

A transformação de forças de membro para forças do sistema intermediário é conduzida pela diferenciação parcial de 4.33, em relação as variáveis força e deslocamento em questão:

$$ d\underset{\sim}{\bar{F}} = \underset{\sim}{A}^{T}\ d\underset{\sim}{\bar{\bar{F}}} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\underset{\sim}{u} $$

onde:

$$ b_{11} = \frac{1}{(L + \bar{\bar{u}})^4} \left[- \bar{v}(L + \bar{u})\ F_1 + (2(L + \bar{u})^2 + \bar{v}^2)\ \bar{v}\ \bar{\bar{F}}_2 \right] $$

$$ b_{12} = \frac{1}{(L + \bar{\bar{u}})^4} \left[- (\bar{v})^3\ \bar{\bar{F}}_1 - (L + \bar{u})^3\ \bar{\bar{F}}_2 \right] \tag{4.35} $$

$$ b_{22} = \frac{1}{(L + \bar{\bar{u}})^4} \left[(L + \bar{u})\ ((L + \bar{u})^2 + 2(\bar{v})^2)\ F_1 - (L + \bar{u})^2\ \bar{v}\ \bar{\bar{F}}_2 \right] $$

Assim a matriz de rigidez da configuração de tempo t , é fornecida das relações 4.32 substituídas em 4.35, e com as transformações de 4.28 e 4.26 por:

$$ {}^{t}\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{T}^{T}\ (\underset{\sim}{A}^{T}\ {}^{t}\underset{\sim}{\bar{\bar{K}}}\ \underset{\sim}{A} + {}^{t}_{t}\underset{\sim}{B}) \tag{4.36} $$

Esta aproximação, como relatado na referência (132), fornece excelentes resultados, mesmo quando poucos elementos são usados na discretização de problemas com acentuada variação de rigidez e com instabilidade ou não.

4.4 - PÓRTICO ESPACIAL (nº 4 e 5)

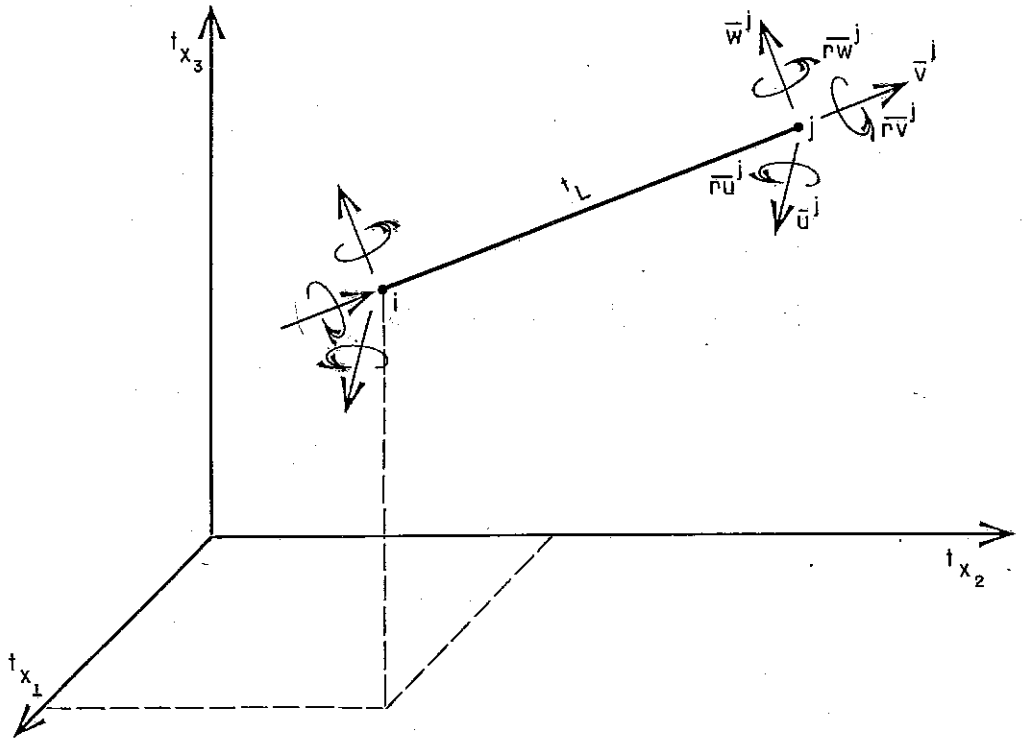
Tezcan[134] indicou pela primeira vez, o uso de funções de estabilidade para estabelecer a matriz de rigidez tangente de pórtico espacial. A derivação é restrita ao caso de pequenas rotações, isto é, quando os quadrados dos ângulos de rotação são desprezíveis em relação a unidade, e não leva em conta o acoplamento flexão-torção.

Connor[133] posteriormente, empregou o princípio dos trabalhos virtuais para determinar as relações força-deslocamento de membro, consistente com as mesmas aproximações geométricas.

Paralelamente a essas duas publicações originais, diversas outras variantes foram apresentadas. (141, 142, 143).

Tezcan[135] se preocupou em obter diretamente uma expressão apurada da matriz de rigidez tangente. Entretanto, teve como resultado uma forma não-simétrica.

Mantilla[138], mostrou que o uso da aproximação da referência 134, aliado à correção da geometria, resulta em soluções comparáveis às de formulações mais complexas, e computacionalmente muito mais eficientes. Desta forma optou-se por esse procedimento.



PÓRTICO TRIDIMENSIONAL
Figura 4.3

Na Figura 4.3 são indicados os sistemas de referência local e global adotados.

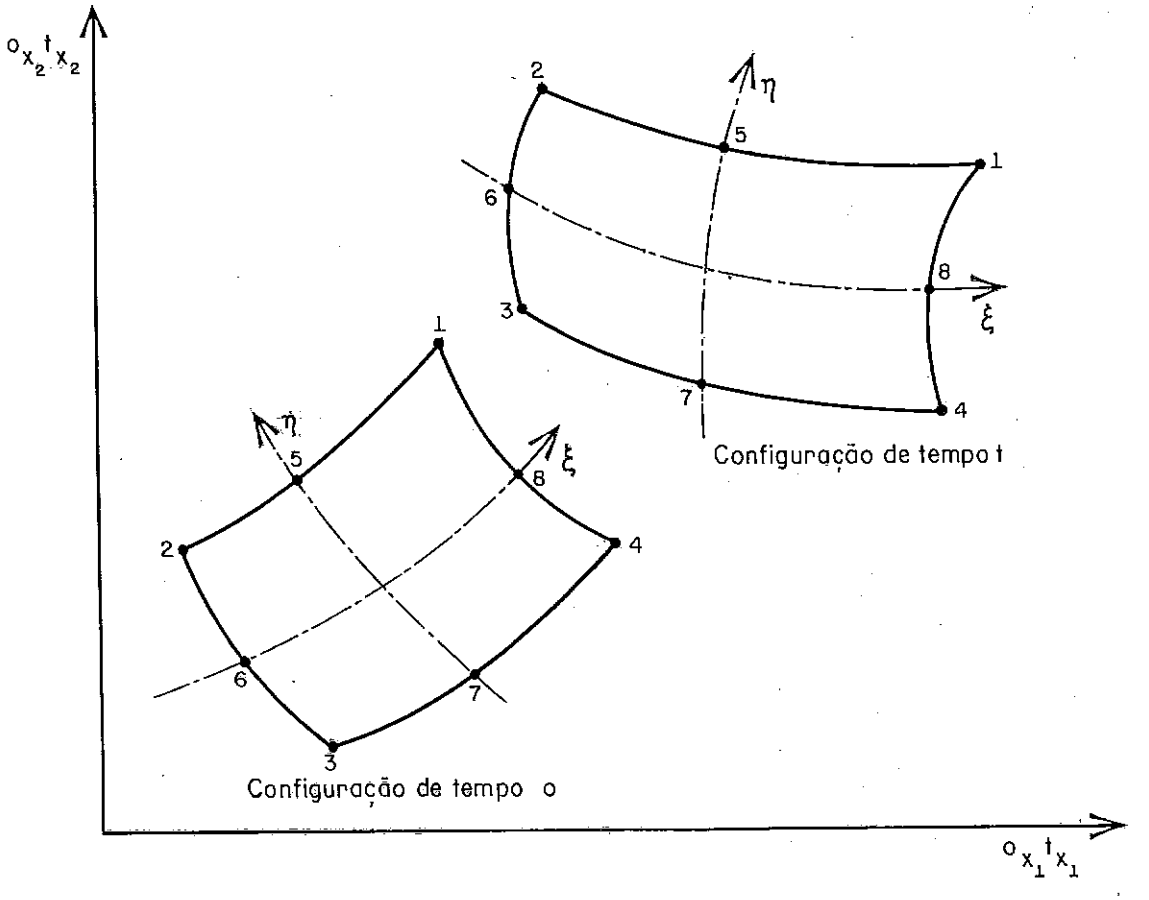
A análise de grandes deformações de estruturas reticuladas espaciais carece ainda de extensa pesquisa e de fundamento teórico mais ligado a elasticidade não-linear tridimensional.

Belytschko[166], recentemente, desenvolveu uma aproximação incluindo efeitos de grandes rotações, e exibe excelentes resultados para respostas dinâmicas. Entretanto, um enfoque que merece ser tentado, é a obtenção de um modelo degenerado de elemento isoparamétrico tridimensional.

4.5 - ESTADO PLANO E SÓLIDO AXISSIMÉTRICO (nº 6 a 17)

A escolha de elementos isoparamétricos para a análise de estado plano de tensão, estado plano de deformação e sólido axissimétrico, com o uso de funções lineares e quadráticas, do tipo Serendipity, é óbvia.

Para a derivação das matrizes de elemento, considera-se um elemento típico em sua configuração de tempo 0 , e de tempo t , como na Figura 4.4 .



ELEMENTO BI-DIMENSIONAL

Figura 4.4

As coordenadas globais dos nós do elemento, são ${}^{o}x_1^i$, ${}^{o}x_2^i$ no tempo zero e ${}^{t}x_1^i$, ${}^{t}x_2^i$ no tempo t , e n é o número de nós do elemento. Um sistema de coordenadas locais ξ , η é definido, para efetuar o mapeamento entre esses sistemas .

Coordenadas globais e locais se relacionam por:

$$ {}^{o}x_1 = \sum_{k=1}^{n} N_k \, {}^{o}x_1^k \qquad {}^{o}x_2 = \sum_{k=1}^{n} N_k \, {}^{o}x_2^k $$

no tempo 0 , e

$$ {}^{t}x_1 = \sum_{k=1}^{n} N_k \, {}^{t}x_1^k \qquad {}^{t}x_2 = \sum_{k=1}^{n} N_k \, {}^{t}x_2^k \tag{4.37} $$

no tempo t , e N_k são as funções de interpolação.

Como na discretização por elementos finitos isoparamétricos, os deslocamentos são interpolados da mesma forma que a geometria:

$$ u_1 = \sum_{k=1}^{n} N_k \, u_1^k \qquad u_2 = \sum_{k=1}^{n} N_k \, u_2^k $$

$$ {}^{t}u_1 = \sum_{k=1}^{n} N_k \, {}^{t}u_1^t \qquad {}^{t}u_2 = \sum_{k=1}^{n} N_k \, {}^{t}u_2^k \tag{4.38} $$

A avaliação de deformações requer as derivadas:

$$ \frac{\partial u_i}{\partial {}^{o}x_j} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial N_k}{\partial {}^{o}x_j}\right) u_i^k \qquad i = 1, 2 \qquad j = 1, 2 $$

$$ \frac{\partial u_i}{\partial {}^{t}x_j} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial N_k}{\partial {}^{t}x_j}\right) u_i^k \qquad i = 1, 2 \qquad j = 1, 2 \tag{4.39} $$

que são obtidas das derivadas das funções em relação as coordenadas locais, com o uso de uma matriz Jacobiana. Para a formulação Lagrangeana:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\, {}^{o}x_1} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial\, {}^{o}x_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \underset{\sim}{J}} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\, {}^{o}x_1}{\partial \xi} & \dfrac{\partial\, {}^{o}x_2}{\partial \xi} \\ \\ \dfrac{\partial\, {}^{o}x_1}{\partial \eta} & \dfrac{\partial\, {}^{o}x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

onde

$$\det \underset{\sim}{J} = \frac{\partial\, {}^{o}x_1}{\partial \xi} \frac{\partial\, {}^{o}x_2}{\partial \eta} - \frac{\partial\, {}^{o}x_1}{\partial \eta} \frac{\partial\, {}^{o}x_2}{\partial \xi}$$

O mesmo procedimento se aplica, quando a configuração de referência é a de tempo t.

Com todas as derivadas definidas, é agora possível estabelecer-se as matrizes de transformação deformação-deslocamento para os elementos.

Para a formulação Lagrangeana as deformações incrementais são expressas por:

$${}^{o}\varepsilon_{11} = {}^{o}u_{1,1} + {}^{t}_{o}u_{1,1}\, {}^{o}u_{1,1} + {}^{t}_{o}u_{2,1}\, {}^{o}u_{2,1} + \frac{1}{2}\left(({}^{o}u_{1,1})^2 + ({}^{o}u_{2,1})^2\right)$$

$${}^{o}\varepsilon_{22} = {}^{o}u_{2,2} + {}^{t}_{o}u_{1,2}\, {}^{o}u_{1,2} + {}^{t}_{o}u_{2,2}\, {}^{o}u_{2,2} + \frac{1}{2}\left(({}^{o}u_{1,2})^2 + ({}^{o}u_{2,2})^2\right)$$

$$ {}^{o}\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left({}^{o}u_{1,2} + {}^{o}u_{2,1}\right) + \frac{1}{2}\left({}^{t}_{o}u_{1,1}\,{}^{o}u_{1,2} + {}^{t}_{o}u_{2,1}\,{}^{o}u_{2,2} + {}^{t}_{o}u_{1,2}\,{}^{o}u_{1,1} + \right. $$

$$ \left. + {}^{t}_{o}u_{2,2}\,{}^{o}u_{2,1}\right) + \frac{1}{2}\left({}^{o}u_{1,1}\,{}^{o}u_{1,2} + {}^{o}u_{2,1}\,{}^{o}u_{2,2}\right) $$

$$ {}^{o}\varepsilon_{33} = \frac{u_1}{{}^{o}x_1} + \frac{{}^{t}_{o}u_1\, u_1}{({}^{o}x_1)^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{u_1}{{}^{o}x_1}\right)^2 \qquad \text{Sólido Axissimétrico} $$

com uso da notação seguinte:

$$ {}^{o}u_{i,j} = \frac{\partial\, u_i}{\partial\, {}^{o}x_j} \qquad \text{e} \qquad {}^{t}_{o}u_{i,j} = \frac{\partial\, {}^{t}_{o}u_i}{\partial\, {}^{o}x_j} \tag{4.41} $$

Desta forma, a matriz transformação deformação-deslocamento linear relaciona:

$$ {}^{o}\underset{\sim}{e} = {}^{t}_{o}\underset{\sim}{B}_L\, \underset{\sim}{u} $$

$$ \begin{bmatrix} {}^{o}e_{11} \\ {}^{o}e_{22} \\ 2\,{}^{o}e_{12} \\ {}^{o}e_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{o}N_{1,1} & 0 & {}^{o}N_{2,1} & 0 & \cdots & {}^{o}N_{n,1} & 0 \\ 0 & {}^{o}N_{1,2} & 0 & {}^{o}N_{2,2} & \cdots & 0 & {}^{o}N_{n,2} \\ {}^{o}N_{1,2} & {}^{o}N_{1,1} & {}^{o}N_{2,2} & {}^{o}N_{2,1} & \cdots & {}^{o}N_{n,2} & {}^{o}N_{n,1} \\ \dfrac{N_1}{{}^{o}\hat{x}_1} & 0 & \dfrac{N_2}{{}^{o}\hat{x}_1} & 0 & \cdots & \dfrac{N_n}{{}^{o}\hat{x}_1} & 0 \end{bmatrix} + $$

$$+\begin{bmatrix} \alpha_{11}\,{}^{o}N_{1,1} & \alpha_{21}\,{}^{o}N_{1,1} & \alpha_{11}\,{}^{o}N_{2,1} \\ \alpha_{12}\,{}^{o}N_{1,2} & \alpha_{22}\,{}^{o}N_{1,2} & \alpha_{12}\,{}^{o}N_{2,2} \\ (\alpha_{11}\,{}^{o}N_{1,2} + \alpha_{12}\,{}^{o}N_{1,1}) & (\alpha_{21}\,{}^{o}N_{1,2} + \alpha_{22}\,{}^{o}N_{1,1}) & (\alpha_{11}\,{}^{o}N_{1,2} + \alpha_{12}\,{}^{o}N_{2,1}) \\ \alpha_{33}\dfrac{N_1}{{}^{o}\hat{x}_1} & 0 & \alpha_{33}\dfrac{N_2}{{}^{o}\hat{x}_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{21}\,{}^{o}N_{2,1} & \cdots & \alpha_{11}\,{}^{o}N_{n,1} & \alpha_{21}\,{}^{o}N_{u,1} \\ \alpha_{22}\,{}^{o}N_{1,2} & \cdots & \alpha_{12}\,{}^{o}N_{n,2} & \alpha_{22}\,{}^{o}N_{n,2} \\ (\alpha_{21}\,{}^{o}N_{2,2} + \alpha_{22}\,{}^{o}N_{2,1}) & \cdots & (\alpha_{11}\,{}^{o}N_{n,2} + \alpha_{12}\,{}^{o}N_{n,1}) & (\alpha_{21}\,{}^{o}N_{n,2} + \alpha_{22}\,{}^{o}N_{n,1}) \\ 0 & \cdots & \alpha_{33}\dfrac{N_n}{{}^{o}\hat{x}_1} & 0 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ \vdots \\ u_1^n \\ u_2^n \end{bmatrix} \qquad (4.42)$$

onde:

$${}^{o}N_{k,j} = \frac{\partial\, N_k}{\partial\, {}^{o}x_j}$$

$$u_j^k = {}^{t+\Delta t}u_j^k - {}^{t}u_j^k$$

$$ {}^{o}\hat{x}_1 = \sum_{k=1}^{n} N_k \; {}^{o}x_1^k $$

n = nº de nós

$$ \alpha_{11} = \sum_{k=1}^{n} {}^{o}N_{k,1} \; {}^{t}u_1^k $$

$$ \alpha_{22} = \sum_{k=1}^{n} {}^{o}N_{k,2} \; {}^{t}u_2^k $$

$$ \alpha_{21} = \sum_{k=1}^{n} {}^{o}N_{k,1} \; {}^{t}u_2^k $$

$$ \alpha_{12} = \sum_{k=1}^{n} {}^{o}N_{k,2} \; {}^{t}u_1^k $$

$$ \alpha_{33} = \left(\sum_{k=1}^{n} N_k \; {}^{t}u_1^k \right) / {}^{o}\hat{x}_1 $$

A matriz correspondente da parcela não-linear é:

$$ {}^{t}_{o}\tilde{B}_{NL} = \begin{bmatrix} {}^{o}N_{1,1} & 0 & {}^{o}N_{2,1} & 0 & \cdots & {}^{o}N_{n,1} & 0 \\ {}^{o}N_{1,2} & 0 & {}^{o}N_{2,2} & 0 & \cdots & {}^{o}N_{u,2} & 0 \\ 0 & {}^{o}N_{1,1} & 0 & {}^{o}N_{2,1} & \cdots & 0 & {}^{o}N_{n,1} \\ 0 & N_{1,2} & 0 & {}^{o}N_{2,2} & \cdots & 0 & {}^{o}N_{n,2} \\ \dfrac{N_1}{{}^{o}\hat{x}_1} & 0 & \dfrac{N_2}{{}^{o}\hat{x}_1} & 0 & \cdots & \dfrac{N_n}{{}^{o}\hat{x}_1} & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.43) $$

A matriz e vetor de tensão Piola-Kirchhoff, da tabela 2.1, são neste caso dados por:

$$
{}^{t}_{o}\underset{\sim}{S} = \begin{bmatrix} {}^{t}_{o}S_{11} & {}^{t}_{o}S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ {}^{t}_{o}S_{21} & {}^{t}_{o}S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^{t}_{o}S_{11} & {}^{t}_{o}S_{12} & 0 \\ 0 & 0 & {}^{t}_{o}S_{21} & {}^{t}_{o}S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{t}_{o}S_{33} \end{bmatrix} \quad {}^{t}_{o}\underset{\sim}{\hat{S}} = \begin{bmatrix} {}^{t}_{o}S_{11} \\ {}^{t}_{o}S_{22} \\ {}^{t}_{o}S_{12} \\ {}^{t}_{o}S_{33} \end{bmatrix} \tag{4.44}
$$

Quando se vale da formulação que utiliza a configuração de tempo t como referência, as deformações incrementais são:

$$
{}^{t}\varepsilon_{11} = {}^{t}u_{1,1} + \frac{1}{2}\left(({}^{t}u_{1,1})^2 + ({}^{t}u_{2,1})^2\right)
$$

$$
{}^{t}\varepsilon_{22} = {}^{t}u_{2,2} + \frac{1}{2}\left(({}^{t}u_{1,2})^2 + ({}^{t}u_{2,2})^2\right)
$$

$$
{}^{t}\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left({}^{t}u_{1,2} + {}^{t}u_{2,1} + {}^{t}u_{1,1}\,{}^{t}u_{1,2} + {}^{t}u_{2,1}\,{}^{t}u_{2,2}\right)
$$

$$
{}^{t}\varepsilon_{33} = \frac{u_1}{{}^{t}x_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{u_1}{{}^{t}x_1}\right)^2 \qquad \text{Sólido axissimétrico}
$$

onde:

$$
{}^{t}u_{i,j} = \frac{\partial u_1}{\partial\, {}^{t}x_j} \tag{4.45}
$$

e a relação

$$
{}^{t}\underset{\sim}{e} = {}^{t}_{t}\underset{\sim L}{B}\ \underset{\sim}{u} \tag{4.46}
$$

fica dada por:

$$\begin{bmatrix} {}^{t}e_{11} \\ {}^{t}e_{22} \\ {}^{2}{}^{t}e_{12} \\ {}^{t}e_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{t}N_{1,1} & 0 & {}^{t}N_{2,1} & 0 & \cdots & {}^{t}N_{n,1} & 0 \\ 0 & {}^{t}N_{1,2} & 0 & {}^{t}N_{2,2} & \cdots & 0 & {}^{t}N_{n,2} \\ {}^{t}N_{1,2} & {}^{t}N_{1,1} & {}^{t}N_{2,2} & {}^{t}N_{2,1} & \cdots & {}^{t}N_{n,2} & {}^{t}N_{n,1} \\ \frac{N_1}{t_{\hat{x}_1}} & 0 & \frac{N_2}{t_{\hat{x}_1}} & 0 & \cdots & \frac{N_n}{t_{\hat{x}_1}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ \vdots \\ u_1^n \\ u_2^n \end{bmatrix} \tag{4.47}$$

com

$${}^{t}N_{k,j} = \frac{\partial N_k}{\partial {}^{t}x_j} \qquad u_j^k = {}^{t+\Delta t}u_j^k - {}^{t}u_j^k \qquad {}^{t}_{\hat{x}_1} = \sum_{k=1}^{n} N_k \, {}^{t}x_1^k$$

A matriz deformação-deslocamento não-linear tem a forma:

$${}^{t}_{t-NL}B = \begin{bmatrix} {}^{t}N_{1,1} & 0 & {}^{t}N_{2,1} & 0 & & {}^{t}N_{u,1} & 0 \\ {}^{t}N_{1,2} & 0 & {}^{t}N_{2,2} & 0 & & {}^{t}N_{n,2} & 0 \\ 0 & {}^{t}N_{1,1} & 0 & {}^{t}N_{2,1} & & 0 & {}^{t}N_{n,1} \\ 0 & {}^{t}N_{1,2} & 0 & {}^{t}N_{2,2} & & 0 & {}^{t}N_{u,2} \\ \frac{N_1}{t_{\hat{x}_1}} & 0 & \frac{N_2}{t_{\hat{x}_1}} & 0 & \cdots & \frac{N_u}{t_{\hat{x}_1}} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.48}$$

A matriz e o vetor de tensões de Cauchy, que aparecem nas expressões da Tabela 2.2, são:

$$t_{\underset{\sim}{\tau}} = \begin{bmatrix} t_{\tau_{11}} & t_{\tau_{12}} & 0 & 0 & 0 \\ t_{\tau_{21}} & t_{\tau_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{\tau_{11}} & t_{\tau_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & t_{\tau_{21}} & t_{\tau_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{\tau_{33}} \end{bmatrix} \quad t_{\hat{\tau}} = \begin{bmatrix} t_{\tau_{11}} \\ t_{\tau_{22}} \\ t_{\tau_{12}} \\ t_{\tau_{33}} \end{bmatrix} \qquad (4.49)$$

Qualquer que seja a formulação adotada, para integração numérica estas matrizes são avaliadas nos pontos de integração do método de Gauss.

A matriz constitutiva para materiais lineares elásticos isótropos é obtida das constantes E e ν, que são o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, respectivamente. Para a análise de sólidos axissimétricos:

$$\underset{\sim}{D} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 & d_2 \\ d_2 & d_1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ d_2 & d_2 & 0 & d_1 \end{bmatrix} \qquad (4.50)$$

onde

$$d_3 = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$d_2 = \frac{2\nu \cdot d_3}{(1 - 2\nu)}$$

$$d_1 = d_2 + d_3$$

Essa matriz constitutiva é usada na formulação Lagrangeana para relacionar tensões do segundo tensor de Piola-Kirchhoff às deformações Green-Lagrange, e também na formulação Euleriana para relacionar tensões de Cauchy às deformações de Almansi, isto é, a matriz $\underset{\sim}{D}$ corresponde ao tensor constitutivo ${}^{t}_{o}D_{ijrs}$ e ${}^{t}_{t}D_{ijrs}$:

$$
\begin{aligned}
{}^{t}_{o}S_{ij} &= {}^{t}_{o}D_{ijrs}\ {}^{t}_{o}\varepsilon_{rs} \\
{}^{t}\tau_{ij} &= {}^{t}_{t}D_{ijrs}\ {}^{t}\varepsilon_{rs}
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

Entretanto, deve-se notar que a especificação de ${}^{t}_{t}D_{ijrs}$ constante é dependente da deformação e vice-versa:

$$
\begin{aligned}
{}^{t}_{o}D_{mnpq} &= \frac{{}^{o}\rho}{{}^{t}\rho}\ {}^{o}x_{m,i}\ {}^{o}x_{n,j}\ {}^{t}D_{ijrs}\ {}^{o}x_{p,r}\ {}^{o}x_{q,s} \\
{}^{t}_{t}D_{mnpq} &= \frac{{}^{t}\rho}{{}^{o}\rho}\ {}^{t}x_{m,i}\ {}^{t}x_{n,j}\ {}^{t}D_{ijrs}\ {}^{t}x_{p,r}\ {}^{t}x_{q,s}
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

No cálculo da rigidez de deformação linear no tempo t, necessita-se conhecer o tensor de propriedades do material tangente. Na elasticidade linear tem-se:

$$
{}^{o}D_{ijrs} = {}^{t}_{o}D_{ijrs} \qquad {}^{t}D_{ijrs} = {}^{t}_{t}D_{ijrs} \tag{4.53}
$$

É importante salientar que na análise de materiais elásticos, resultados numéricos idênticos são obtidos com ambas formulações uma vez que os tensores do material são relacionados por (4.52). Além disso, como as constantes do material não dependem da história da solução, os erros da análise são provenientes

apenas da formulação isoparamétrica e do esquema de integração no tempo, já que iterações para o equilíbrio são efetuadas. Desta forma na análise de materiais elásticos a propagação de erros é em toda semelhante ao caso da análise linear elástica de pequenos deslocamentos.

Para obter a matriz constitutiva de (4.50) para análise de estado plano de deformação, usa-se a condição que a deformação na direção 3 é nula e opera-se com a submatriz 3 x 3 superior esquerda de $\underset{\sim}{D}$.

Na análise de estado plano de tensão, vale-se da condição que a tensão na direção 3 é zero e condensa-se a matriz D , para a requerida matriz 3 x 3 .

Como comentado anteriormente, a escolha da configuração de referência, depende da relativa efetividade numérica da formulação. Todas as matrizes de transformação das duas formulações desenvolvidas tem posições nulas em correspondência com exceção de ${}^{t}_{o\sim L}B$ que é completamente cheia, enquanto que ${}^{t}_{t\sim L}B$ é esparsa.

A matriz de transformação deformação - deslocamento é cheia devido aos efeitos de deslocamento inicial nos termos de deformação linear. Assim o cálculo do produto ${}^{t}_{t\sim L}B^{T}\ {}_{t\sim}D\ {}^{t}_{t\sim L}B$ requer menos esforço computacional que o produto matricial ${}^{t}_{o\sim L}B^{T}\ {}_{o\sim}D\ {}^{t}_{o\sim L}B$ na formulação Lagrangeana.

A segunda diferença numérica entre as duas formulações é que na formulação Lagrangeana todas as derivadas de funções de interpolação são feitas em relação as coordenadas iniciais, e quando a configuração de referência é a de tempo t , essas derivadas são tomadas com respeito as coordenadas de tempo t . Na

formulação Lagrangeana então, elas podem ser calculadas uma única vez, no primeiro incremento de tempo, e armazenadas em memória secundária, ou mesmo na memória dinâmica para uso em subsequentes intervalos de tempo.

Entretanto na prática o uso de equipamento periférico para recuperar as derivadas pode ser mais dispendioso que o seu simples cálculo em cada incremento de tempo. Além disso, a área de armazenamento exigida pode saturar a capacidade disponível, e é fundamentalmente por essa razão, que no LORANE-NL as derivadas das funções de interpolação são recalculadas em cada intervalo de tempo.

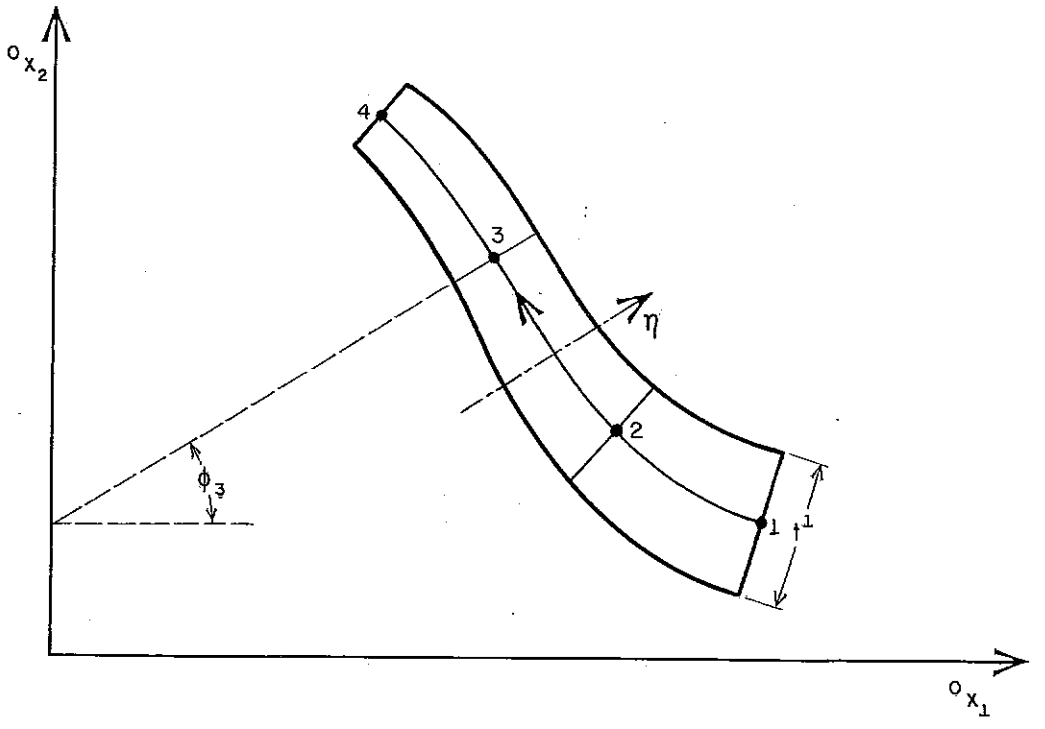
Na análise bi-dimensional a diferença em operações numéricas das duas formulações quando computado o esforço total da solução é geralmente muito pequena, e somente para materiais hiperelásticos e hipoelásticos esta escolha pode ficar bem decidida.

4.6 - DEGENERADOS BIDIMENSIONAIS (nº 18 a 21)

A medida que uma das dimensões dos elementos anteriores decresce, duas limitações se apresentam: introdução de erros devidos a razão comprimento/largura do elemento se tornar muito grande, e o desnecessário número de graus de liberdade considerados, já que para estruturas delgadas as normais à superfície média permanecem praticamente retas após a deformação. Adota-se na formulação o critério de normais retas, e a energia de deformação correspondente a tensões perpendiculares à superfície média é ignorada.

Considere-se o sistema de coordenadas curvilíneas ξ , η definidos no interior do elemento pelos pares de nós superior e inferior à superfície média (Figura 4.5). A direção nor-

mal η caracterizada assim, é aproximadamente normal a essa superfície.



ELEMENTO BI-DIMENSIONAL DEGENERADO

Figura 4.5

Para definir a geometria do elemento adota-se:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix} = \Sigma\, N_i \begin{bmatrix} x_1^i \\ \\ x_2^i \end{bmatrix} + \Sigma\, N_i \frac{\eta}{2} \underset{\sim}{V}^i \qquad (4.54)$$

onde x^i se refere a coordenadas dos nós agora tomados na superfície média e :

$$\underset{\sim}{V}^i = t^i \begin{Bmatrix} \cos \phi^i \\ \\ \operatorname{sen} \phi^i \end{Bmatrix} \qquad (4.55)$$

Como a deformação na direção normal à superfície média é desprezada, o campo de deslocamentos será representado unicamente por duas componentes cartesianas do deslocamento do nó da superfície média e a rotação do vetor $\underset{\sim}{V}^i$:

$$\begin{bmatrix} u \\ \\ v \end{bmatrix} = \Sigma\, N_i \begin{bmatrix} u^i \\ \\ v^i \end{bmatrix} + \Sigma\, N_i\, \eta\, \frac{t^i}{2} \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\phi^i \\ \\ \cos\phi^i \end{bmatrix} \overline{rw}^i \qquad (4.56)$$

Para avaliar as matrizes deformação-deslocamento duas transformações são agora necessárias: as derivadas são expressas nas coordenadas globais através da matriz Jacobiana, e posteriormente as deformações são transportadas ao sistema local, para a componente normal a linha η = constante ser ignorada.

O desenvolvimento restante é em todo similar aos elementos isoparamétricos convencionais, só que nenhuma matriz resulta esparsa.

Unicamente a formulação Lagrangeana foi utilizada, implementando-se elementos quadráticos e cúbicos de pórticos planos e cascas axissimétricas de geometria arbitrária.

Os méritos dessas aproximações no domínio da análise não-linear são ressaltados recentemente por Nagarajan[110] na análise de cascas axissimétricas.

4.7 - DEGENERADOS TRIDIMENSIONAIS (nº 22, 23, 26, 27, 28 e 29)

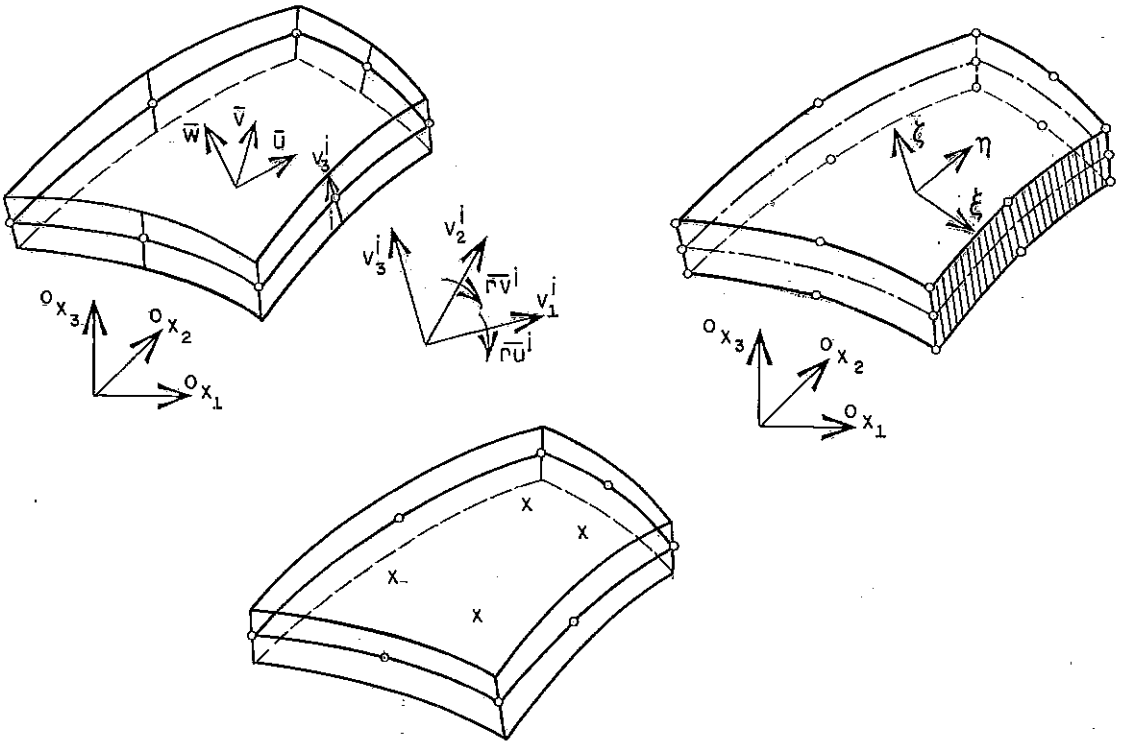
A obtenção das matrizes de elemento para problemas tridimensionais é basicamente uma extensão imediata do estudo apresentado para elementos isoparamétricos planos. Contudo os elementos tridimensionais de interesse para a análise não-linear de efei

tos geométricos, tem aplicação em estruturas de superfície, onde uma dimensão é muito reduzida em relação as outras duas.

A maior parte dos modelos implementados para análise não-linear de cascas e placas se valem das equações de Von Karman, que desprezam os termos quadráticos do tensor de deformações exceto os termos relativos à rotações da superfície média. Alguns deles são apresentados no ítem que se segue.

Elementos finitos degenerados de elementos isoparamétricos tridimensionais mostraram excelentes resultados na análise linear. Devido ao uso direto de formulação tridimensional , são fortemente recomendados em problemas de não-linearidade física. Soluções de cascas de materiais elastoplásticos são encontradas na referência 60.

Para a análise não-linear geométrica, eles aparecem como uma opção de valor. Quando especializados para estruturas delgadas, as matrizes de rigidez são obtidas por integração numérica de Gauss 2×2 na superfície média (em ξ e η) e integração explícita em ζ como na Figura 4.6. Desta forma resulta uma aproximação versátil de estruturas laminares arbitrárias onde não se faz nenhuma restrição quanto a deslocamentos, rotações ou deformações.



DEGENERAÇÃO E INTEGRAÇÃO DO ELEMENTO TRIDIMENSIONAL
Figura 4.6

O processo de degeneração consiste da prescrição de variação linear de deslocamentos do longo da espessura, e da supressão da energia de deformação das tensões normais ao plano da superfície média no elemento isoparamétrico tridimensional correspondente.

A geometria passa a ser escrita por:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \Sigma\, N_i \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \end{bmatrix} + \Sigma\, N_i \frac{\zeta}{2} \underset{\sim}{V}_3^i \qquad (4.57)$$

O campo de deslocamento é representado por três componentes cartesianas dos deslocamentos do nó da superfície média, e duas rotações do vetor espessura $\underset{\sim}{V}_3^i$ em torno das direções ortogonais a ele. Essas direções são caracterizadas pelos vetores ortogonais a $\underset{\sim}{V}_3^i$ ficando os deslocamentos definidos por:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \Sigma\, N_i \begin{bmatrix} u^i \\ v^i \\ w^i \end{bmatrix} + \Sigma\, N_i\, \zeta\, \frac{t_i}{2} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{V}_1^i & \underset{\sim}{V}_2^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{ru}^i \\ \overline{rv}^i \end{bmatrix} \qquad (4.58)$$

Novamente as matrizes de transformação deformação-deslocamentos resultam cheias, e unicamente a formulação Lagrangeana completa foi utilizada.

Para a análise de problemas de flexão de placas os graus de liberdade correspondentes a deslocamentos no plano são omitidos e o desenvolvimento é bastante simplificado.

Quando se quer considerar a análise de estruturas poliédricas, as duas rotações do sistema local são transformadas para o sistema global, passando-se a trabalhar agora com 6 incógnitas nodais, o que garante completa generalidade (64).

4.8 - ESTRUTURAS POLIÉDRICAS (Nº 24, 25, 30, 31 e 32)

A análise de estruturas prismáticas laminares é adequada ao uso de associação de elementos planos, formados pela composição dos efeitos de membrana e flexão de placas separadamente. Esta classe de problemas pode ser considerada como análise de grandes deflexões, nas quais os deslocamentos são grandes suficiente, de modo que o trabalho efetuado pelas forças no plano du-

te as deformações fora do plano, contribui significantemente. As relações deformação-deslocamento são em coordenadas locais:

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} + \frac{1}{2}(u_{3,1})^2$$

$$\varepsilon_{22} = u_{2,2} + \frac{1}{2}(u_{3,2})^2 \qquad (4.59)$$

$$\varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} + u_{3,1}\, u_{3,2}$$

Com estas expressões as matrizes de transformação deformação-deslocamento são calculadas separadamente nas partes lineares e não-lineares, sendo as últimas provenientes da inclusão dos termos que envolvem $u_{3,1}$ e $u_{3,2}$ nas equações (4.59).

A escolha dessa aproximação é largamente influenciada pela forma da estrutura a ser analisada, uma vez que a geometria plana do elemento é bem indicada para idealizar estruturas prismáticas de paredes finas. Os elementos devem ter três componentes de translação e três de rotação, como incógnitas nodais para discretizar problemas onde elementos vizinhos são inclinados entre si. Finalmente, mas não de menor importância surgem as considerações de economia. Como na análise não-linear a maior parcela do esforço computacional é gasta em obtenção das matrizes das matrizes de elemento, principalmente em problemas dinâmicos, é especialmente indicado escolher-se uma formulação simples para reduzir o custo da iteração ao mínimo. (Desde que a aproximação seja suficientemente precisa).

Assim expansões lineares são tomadas para os deslocamentos u_1 e u_2 e cúbicas para u_3, na derivação de elementos simples triangulares e retangulares.

Os graus de liberdade restantes são:

$$\overline{ru} = - u_{3,2} \quad e \quad \overline{rv} = u_{3,1}$$

sendo o sexto rw , proveniente de transformações aos eixos globais.

Apenas 5 graus de liberdade são necessários para representar as deformações de uma casca. O sexto grau de liberdade neste caso é uma quantidade desnecessária e incluí-lo no sistema de equações corresponde a aumentar o tempo de solução de um fator de aproximadamente $(6/5)^3 \cong 1.7$, que é significante.

Um recurso proposto na referência 116 para estruturas de superfície contínuas é o quadrilátero obtido da condensação de quatro triângulos, sendo o nó central localizado pela média das coordenadas dos outros nós.

As incógnitas do interior são eliminadas a nível de elemento resultando um quadrilátero que tem apenas 20 graus de liberdade, 5 por nó.

O estudo comparativo de elementos finitos para análise não-linear de estruturas laminares é assunto da referência (64).

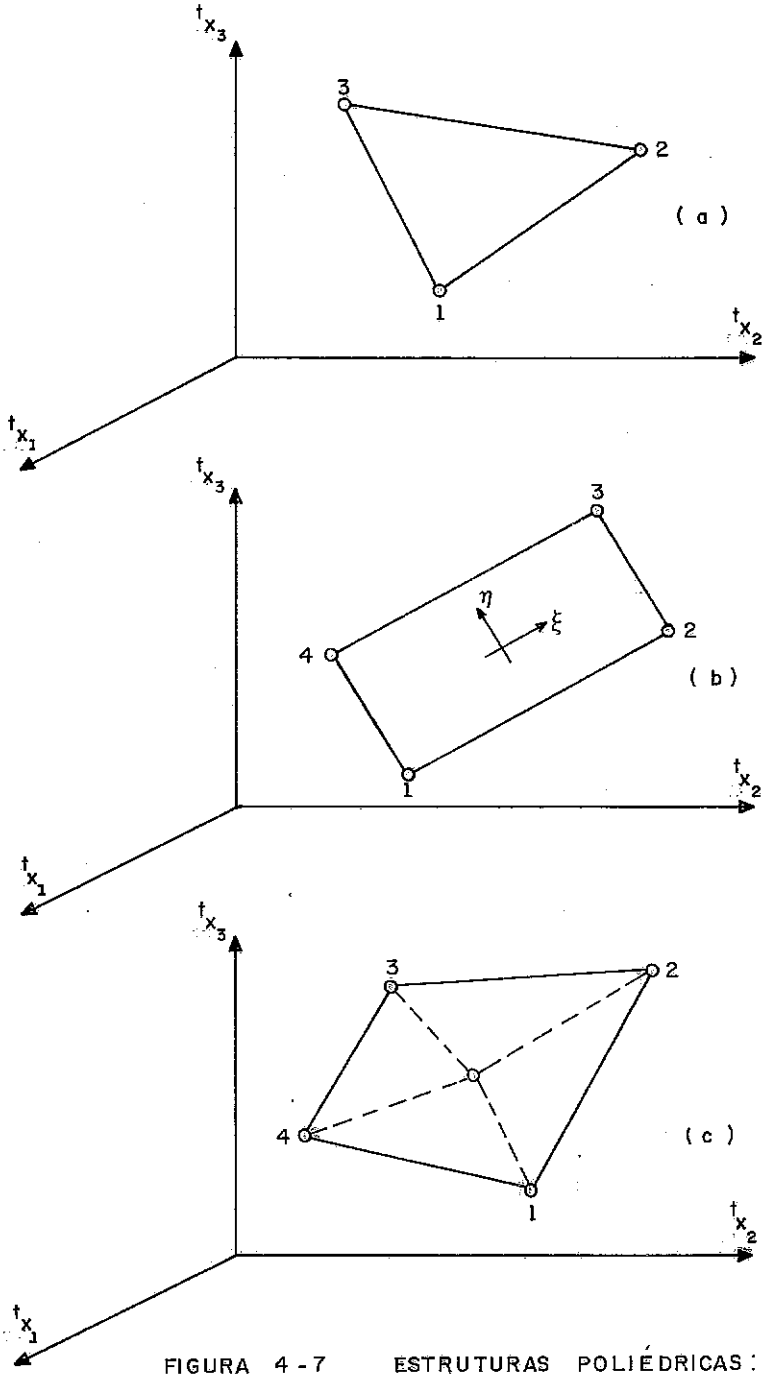


FIGURA 4-7 ESTRUTURAS POLIÉDRICAS:

(a) ELEMENTO TRIANGULAR
(b) ELEMENTO RETANGULAR
(c) ELEMENTO QUADRILÁTERO

V - COMANDOS DA LINGUAGEM

O LORANE-NL, como comentado anteriormente, é uma linguagem integrante da família de linguagens orientadas LORANE . A maior parte dos comandos de utilização são idênticos aos das linguagens LORANE-LINEAR e LORANE-DINA. No manual do usuário dessas linguagens, encontram-se a descrição detalhada da sintaxe,exemplos de utilização dos comandos e a filosofia em que se basearam. Os comandos que compõe o LORANE-NL, e que são comuns as outras duas linguagens, serão apenas relacionados com um curto comentário e os novos, específicos, apresentados com uso da mesma sistemática.

5.1 - COMANDOS DO LORANE-LINEAR

5.1.1 - Comando UNIDADES

Permite a especificação de dados, pelo usuário, em diferentes unidades que fazem parte de um dicionário de unidades opcionais.

5.1.2 - Comando FIM

Último comando de qualquer massa de dados para indicar término da execução.

5.1.3 - Comandos ATIVOS, INATIVOS

Para especificar nós e elementos que serão inseridos ou eliminados da análise, quando se tem um conjunto de dados preparados e deseja-se efetuar modificações.

5.1.4 - Comando MUDAR

Permite modificação de dados anteriormente indicados, que adotarão outros valores.

5.1.5 - Comando GUARDE, RESTAURE

Para interromper a execução em determinada etapa, armaze-

nar em equipamento periférico todas as informações e permitir que o programa seja recuperado para prosseguir a solução.

5.1.6 - Comando NOVA PAGINA

É utilizado para pular páginas na impressão de resultados.

5.1.7 - Comando COORDENADAS

Para fornecer as coordenadas dos pontos nodais em sistemas cartesianos, esféricos, cilíndricos ou combinações destes.

5.1.8 - Comando SIMETRIA NODAL

Para indicar que determinados nós estão simetricamente localizados em relação a pontos nodais, já especificados.

5.1.9 - Comando SEMELHANÇA NODAL

Permite a obtenção das coordenadas de nós com uso de outras coordenadas semelhantes.

5.1.10 - Comando CONETIVIDADE

A lista de incidências dos nós dos elementos é fornecida para cada elemento.

5.1.11 - Comando SEMELHANÇA DE CONETIVIDADE

Para especificar que as incidências de um grupo de elementos é obtida por uma lei de recorrência das incidências de um outro grupo de elementos:

5.1.12 - Comando CONETIVIDADE MULTIPLA

Para definir a conetividade de um grupo de elementos em uma única vez.

5.1.13 - Comando SUPERELEMENTO

Para gerar automaticamente coordenadas e conetividades utilizando o conceito de superelemento, com grande flexibilidade.

5.1.14 - Comando RESTRICOES NODAIS

Permite especificar condições de contorno nulas de deter-

minados graus de liberdade.

5.1.15 - Comando ROTACOES DE NOS

Para indicar que as variáveis nodais são fornecidas em relação a um sistema cartesiano, que tem orientação especial para com o sistema básico.

5.1.16 - Comando TIPOS DE ELEMENTO

Para relacionar os tipos de elemento que foram utilizados na discretização do problema.

5.1.17 - Comando PROPRIEDADES

Para relacionar propriedades geométricas das seções de elementos de barras e espessuras constantes nas demais aproximações.

5.1.18 - Comando ESPESSURA POR NO

Permite a introdução de espessuras diferentes em elementos isoparamétricos e derivados.

5.1.19 - Comando ORDEM

Para indicar que a ordem dos nós na numeração interna será relacionada pela lista deste comando.

5.1.20 - Comando PERFURAR

Permite obter em cartões os dados e resultados de uma análise.

5.2 - COMANDOS DO LORANE-DINA

5.2.1 - Comando INICIALIZAÇÃO

Comando que precede os demais e altera os "defaults" das dimensões básicas do sistema.

5.2.2 - Comando FUNCOES

Para especificar todo o tipo de funções de várias maneiras e com finalidades diversas.

5.2.3 - Comando CONSTANTES

É utilizado para caracterizar as propriedades mecânicas dos materiais componentes, ou fornecer diretamente a matriz constitutiva.

5.2.4 - Comando MASSAS CONSISTENTE e DISCRETA

Indica os elementos em que se quer calcular matrizes de massa consistente ou discreta.

5.2.5 - Comando ESCALARES

Identifica elementos escalares: massa, mola ou amortecedor.

5.2.6 - Comando MATRIZ DIRETA

Para permitir a introdução direta de matrizes globais de rigidez, massa ou amortecimento.

5.2.7 - Comando RESTRICOES NODAIS GENERALIZADAS

Para prescrever relações lineares de diversos graus de liberdade do problema.

5.2.8 - Comando INCOGNITAS PRESCRITAS

Tem por finalidade especificar as condições iniciais de uma análise, em termos de deslocamentos e velocidades.

5.2.9 - Comando CARGAS NODAIS

Permite especificar os coeficientes das diversas parcelas que irão constituir o vetor de cargas.

5.2.10 - Comando CARGAS DIRETAS

Para indicar diretamente os coeficientes das diversas parcelas sem a necessidade de relacioná-los com incógnitas nodais.

5.2.11 - Comando CARGAS NÃO LINEARES

Tem por finalidade especificar os dados correspondentes aos elementos não-lineares que são transformados em parcelas da carga.

5.2.12 - Comando CARREGAMENTO TRANSIENTE

Dadas as funções, cargas nodais, fatores de proporção,etc. o comando efetua a composição das parcelas do vetor de de cargas.

5.2.13 - Comando IMPRIMIR

É utilizado para imprimir dados ou resultados de um pro - blema analisado.

5.2.14 - Comando CONDENSACAO

Indica a lista de graus de liberdade que serão eliminados por condensação.

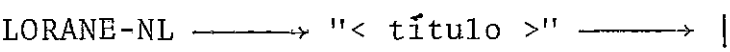
5.2.15 - Comando INTERVALO

Permite a especificação de grupos de números de intervalos Δt que serão empregados na análise estática ou dinâmica.

5.3 - COMANDOS ESPECÍFICOS DO LORANE-NL

5.3.1 - Comando LORANE-NL

Tem por finalidade inicializar a tarefa de interpretação de todos os dados subsequentes, e indicar o título pelo qual o problema ficará rotulado. É necessariamente o primeiro comando de qualquer massa de dados. Tem a seguinte sintaxe:

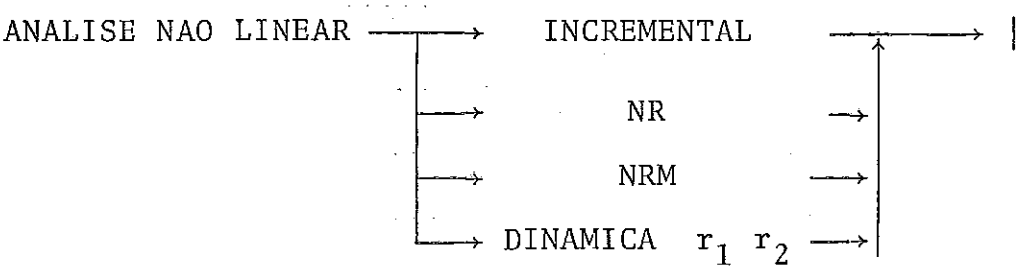


A limitação da quantidade de caracteres do título é o tamanho de um registro físico. Exemplo:

```
LORANE-NL  "RESPOSTA DINAMICA PLATAFORMA COM ESTACAS"
```

5.3.2 - Comando ANALISE NAO LINEAR

Este comando identifica o tipo de análise não-linear a ser efetuado e desencadeia todo o procedimento numérico correspondente, sendo por isso de uso obrigatório. Sua forma geral é:

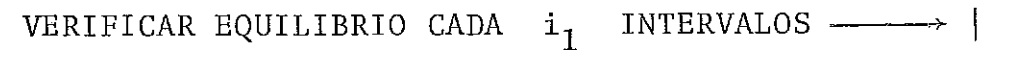


As opções INCREMENTAL, NR e NRM se referem a análise incremental com iteração simples, com iteração atualizando a rigidez e com iteração mantendo a rigidez constante, como ilustrado nas figuras 3.1 e 3.2 e 3.3 respectivamente.

Para a análise não-linear dinâmica, os parâmetros α e δ do método de Newmark podem ser fornecidos por r_1 e r_2. Se omitidos, o sistema assume o default $\alpha = 0,25$ e $\delta = 0,50$. O controle de equilíbrio na análise dinâmica através de iterações, é requisitado pelas declarações TOLERÂNCIA e NUMERO MAXIMO DE ITERACOES.

5.3.3 - Comando VERIFICAR EQUILIBRIO

Comando utilizado quando não se quer efetuar verificações de equilíbrio em todos os incrementos de tempo em que foi decomposta a análise. Sua sintaxe é dada por:



O número inteiro i_1 de intervalos, fará com que as verificações de equilíbrio, só aconteçam nos intervalos múltiplos de i_1.

5.3.4 - Comando ATUALIZAR RIGIDEZ

Em determinados problemas pode-se desejar manter a matriz de rigidez inalterada durante certo número de intervalos

de tempo. É a finalidade do comando ATUALIZAR RIGIDEZ que tem a forma:

ATUALIZAR RIGIDEZ CADA i_1 INTERVALOS ⟶ |

Assim a matriz de rigidez será atualizada apenas nos intervalos múltiplos de i_1 .
Em qualquer análise, a omissão deste comando implica em recalcular a matriz de rigidez em todos intervalos de tempo.

5.3.5 - Comando NUMERO MAXIMO DE ITERACOES

Este comando limita o número de iterações em cada intervalo de tempo, ou nos intervalos de tempo em que se especificou a verificação de equilíbrio. Tem a seguinte sintaxe:

NUMERO MAXIMO DE ITERACOES —— i_1 ⟶ |

Para a análise estática não-linear do tipo NR ou NRM, se não especificado, o valor assumido é de 15 iterações. Na análise dinâmica não-linear, o número máximo de iterações é limitado em 3, na ausência do presente comando.

5.3.6 - Comando TOLERANCIA

Comando utilizado para comparação dos testes de convergência, indicados no ítem 2-g do Capítulo III para a análise estática, e na tabela 3.3 para a análise dinâmica. Tem a seguinte forma:

TOLERANCIA ⟶ r_1 r_2 ⟶ |

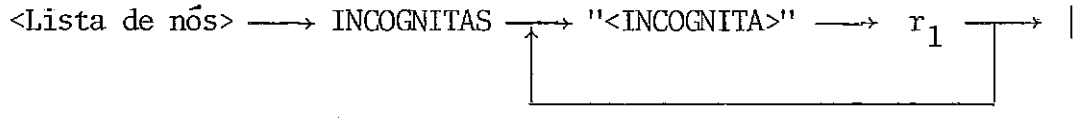
O primeiro número real é a tolerância, que se não atingida pelo número máximo de iterações estipulado interromperá a execução do problema. O segundo, opcional, simples-

mente será usado como teste, listando o encaminhamento da convergência da solução.

5.3.7 - Comando PERTURBACAO DESLOCAMENTO

Na determinação de soluções múltiplas, pode-se ter necessidade de adicionar um vetor de deslocamentos a uma certa configuração, para obter-se uma nova configuração inicial do processo iterativo. (Figura 3.4). Este comando é então usado e inicia com a declaração:

onde o número inteiro se refere ao intervalo de tempo da configuração em questão, e é seguido por um ou mais registros com a seguinte sintaxe:

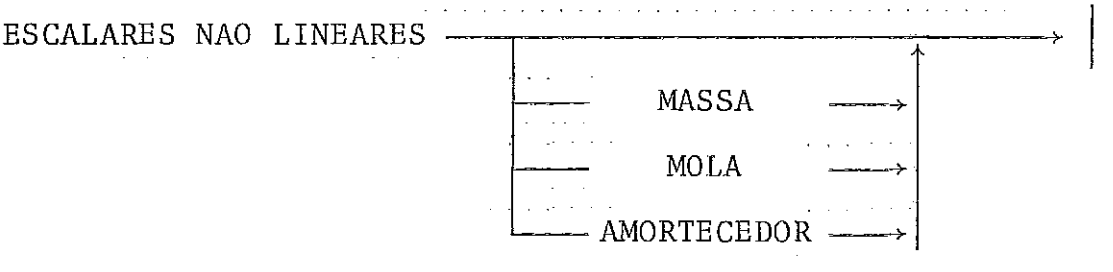


Exemplo:

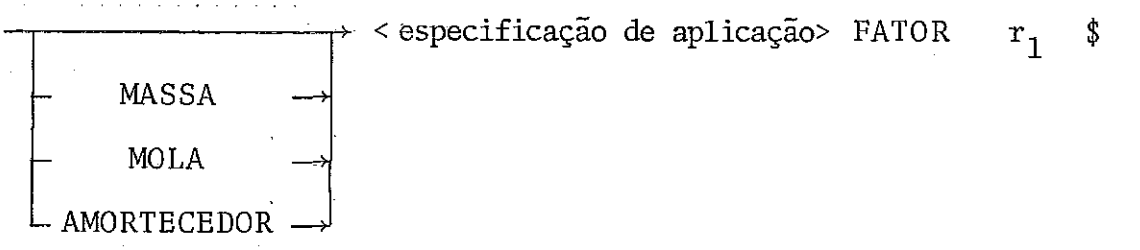
```
                PERTURBACAO DESLOCAMENTO     30
   1   7   9     INCOGNITA    "U" 10.    "RW"     0.0008
```

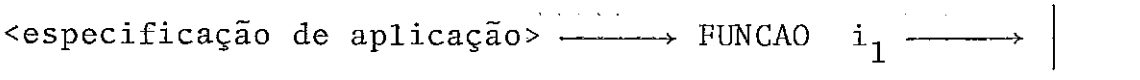
5.3.8 - Comando ESCALARES NAO LINEARES

Este comando tem por finalidade especificar os dados correspondentes aos elementos escalares não-lineares. O comando é do tipo tabela e inicia com o cabeçalho:

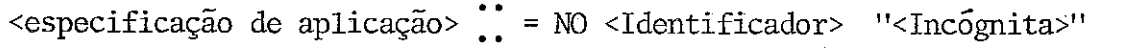


Seguido de tantos registros quantos forem os elementos escalares não-lineares a serem especificados e com a sintaxe:





onde

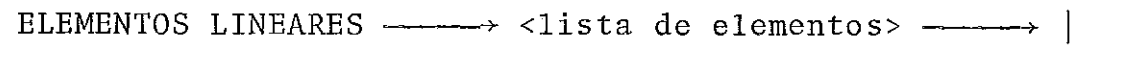


Exemplo:

```
                ESCALARES NAO LINEARES
MOLA  NO  1  "V"  FATOR  1.  NO  1  "V"  FUNCAO  1
```

5.3.9 - Comando ELEMENTOS LINEARES

Em uma mesma análise, pode surgir a necessidade de declarar alguns elementos de formulação linear. Isto é indicado com o comando ELEMENTOS LINEARES, com a seguinte sintaxe:



Exemplo:

```
                ELEMENTOS LINEARES  1 ATE 9
```

5.4 - ESPECIFICAÇÃO DE CARGAS NO LORANE-NL

No LORANE-NL a especificação de cargas tanto para problemas estáticos como dinâmicos, é feita com uso de funções do carregamento externo com o tempo. Embora esse assunto seja tratado com detalhe na referência 26 para a análise dinâmica, a aplicação em casos estáticos merece um comentário adicional.

Para exemplificar considere-se a análise estática de um problema hipotético, em que se deseja aplicar uma carga na direção Y , de um certo ponto nodal 1350, da seguinte forma: 1 incremento de 1000. , 4 incrementos de 200. e 20 incrementos de 10. unidades de força. Uma opção para especificar este carregamento seria:

```
FUNCOES TEMPO
1  PONTOS  0.  0.  1.  1000.  5.  1800.  25  2000.
CARGAS NODAIS PARCELA  1
1350  FORCA  Y  1.
CARGA TRANSIENTE
FATOR  1.  CARGAS  NODAIS  1  FUNCAO  1
```

Diversas outras especificações poderiam ser adotadas neste mesmo caso. É importante salientar que, os mesmos comandos são usados para descrever cargas aplicadas na estrutura, tanto na análise estática como na dinâmica, tomando sempre o tempo como referência.

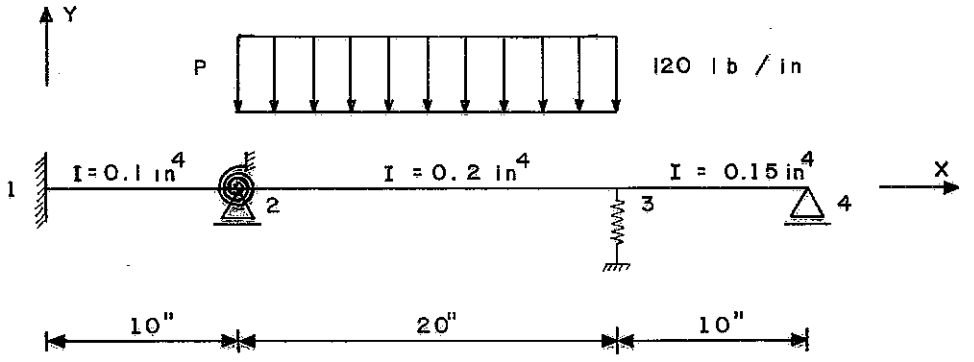
5.5 - APLICAÇÃO

Para aplicar alguns comandos em um problema simples, o exemplo da viga com molas não-lineares, resolvido por Sen[174] e

esquematizado na Figura 5.1, será brevemente discutido. Trata-se da análise de uma viga, constituida de 3 elementos, sob ação de carga uniformemente distribuida no vão intermediário e duas molas não-lineares que atendem as expressões polinomiais indicadas.

Esse problema para ser resolvido com o uso da linguagem LORANE-NL, poderia ser descrito, como se segue:

```
LORANE-NL  "VIGA COM MOLAS NAO-LINEARES"
COORDENADAS
1;  2  10.;  3  30.;  4  40;
CONETIVIDADE
1  1  2; 2  2  3;  3  3  4
TIPO DE ELEMENTO
TODOS TIPO  "PP"
PROPRIEDADES
1  AX  0.622  IZ  0.1
2  AX  0.740  IZ  0.2
3  AX  0.689  IZ  0.15
CONSTANTES
TODOS  E  30 000 000.  MASSA  0.000 245
RESTRICOES NODAIS DIRETAS
1  TOTAL ; 2  4  INCOGNITAS  "V"
CARGAS NODAIS PARCELA  1
2  MOMENTO  Z  - 4000
3  FORCA  Y  - 1200  MOMENTO  Z  4000
FUNCOES GENERICAS
1  COEFICIENTES  0.  240.  30.  5.
2  COEFICIENTES  0.  12.  1.  0.1
ESCALARES NAO LINEARES
MOLA  NO  2  "RW"  FATOR  10000.  NO  2  "RW"  FUNCAO  1
```



NÓ 2: $F(rw) = (240\ rw + 30\ rw^2 + 5\ rw^3) \times 10^4$

NÓ 3: $F(V) = (12\ V + V^2 + 0.1\ V^3) \times 10^4$

FIGURA 5-1 VIGA COM MOLAS NÃO-LINEARES

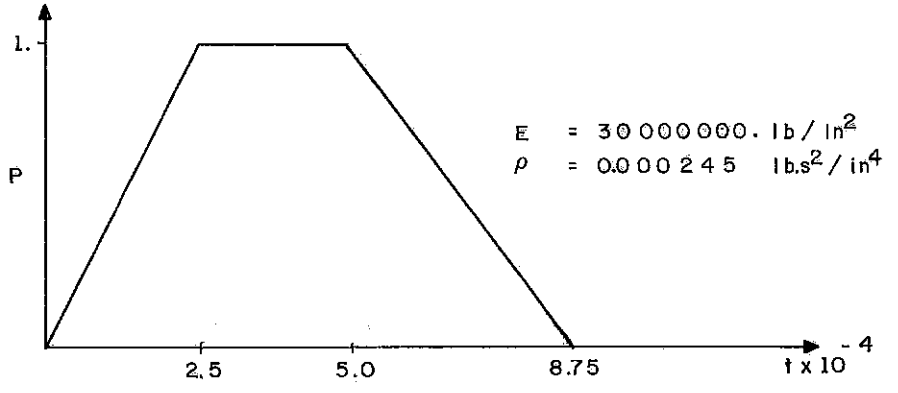


FIGURA 5-2 CARGA DINÂMICA

```
MOLA NO 3 "V" FATOR 10000. NO 3 "V" FUNCAO 2
FUNCOES TEMPO
3 PONTOS 0. 0. 1. 1.
CARGA TRANSIENTE
FATOR 1 CARGAS NODAIS 1 FUNCAO 3
INTERVALO TEMPO 1 1.
IMPRIMIR DESLOCAMENTOS
IMPRIMIR TENSOES
IMPRIMIR REACOES NOS TODOS ELEMENTOS TODOS CADA 1 INTERVALO
TOLERANCIA 0.001
NUMERO MAXIMO DE ITERACOES 20
ANALISE NAO LINEAR NR
FIM
```

A execução é inicializada pelo cabeçalho LORANE-NL, seguindo-se os comandos para especificar coordenadas, incidências, tipo de elemento, propriedades geométricas, constante do material, restrições nodais e as cargas nodais que consistem de apenas uma parcela. Logo após, para indicar as funções que representam as molas não lineares, declaram-se as funções 1 e 2, sob a forma de coeficientes, já que as mesmas são expressões polinomiais. O comando seguinte, compõe a dependência desses elementos escalares com as respectivas funções, para os graus de liberdade adequados.

A especificação da variação com o tempo, do carregamento aplicado, é muito simples neste problema, uma vez que será integralmente considerado em um único intervalo de tempo.

Os comandos restantes se referem a seleção de resultados de valores adotados no processo iterativo.

Se o problema fosse dinâmico, e considerando-se

que a carga aplicada é a representada na Figura 5.2, as últimas doze declarações da especificação anterior, poderiam ser substi - tuidas pela seguinte sequência:

```
FUNCOES TEMPO
3 PONTOS 0. 0. 0.00025 1. 0.0005 1. 0.000875 0. 1. 0.
CARGA TRANSIENTE
FATOR 1 CARGAS NODAIS 1 FUNCAO 3
INTERVALO TEMPO 400 0.000025
IMPRIMIR DESLOCAMENTOS TENSOES REACOES NOS TODOS ELEMENTOS $
TODOS CADA 10 INTERVALOS
TOLERANCIA 0.01
NUMERO MAXIMO DE ITERACOES 10
ANALISE NAO LINEAR DINAMICA
FIM
```

A função 3 descreve agora a variação real da carga com o tempo. O intervalo de integração escolhido (0.000025), corresponde aproximadamente a centésima parte do período fundamental e deseja-se obter a solução até o tempo t = 0,01s ,fornecendo-se os resultados a cada 0.00025s.

VI - EXEMPLOS DE UTILIZAÇÃO

6.1 - INTRODUÇÃO

Neste Capítulo alguns exemplos ilustram a aplicação da linguagem LORANE-NL.

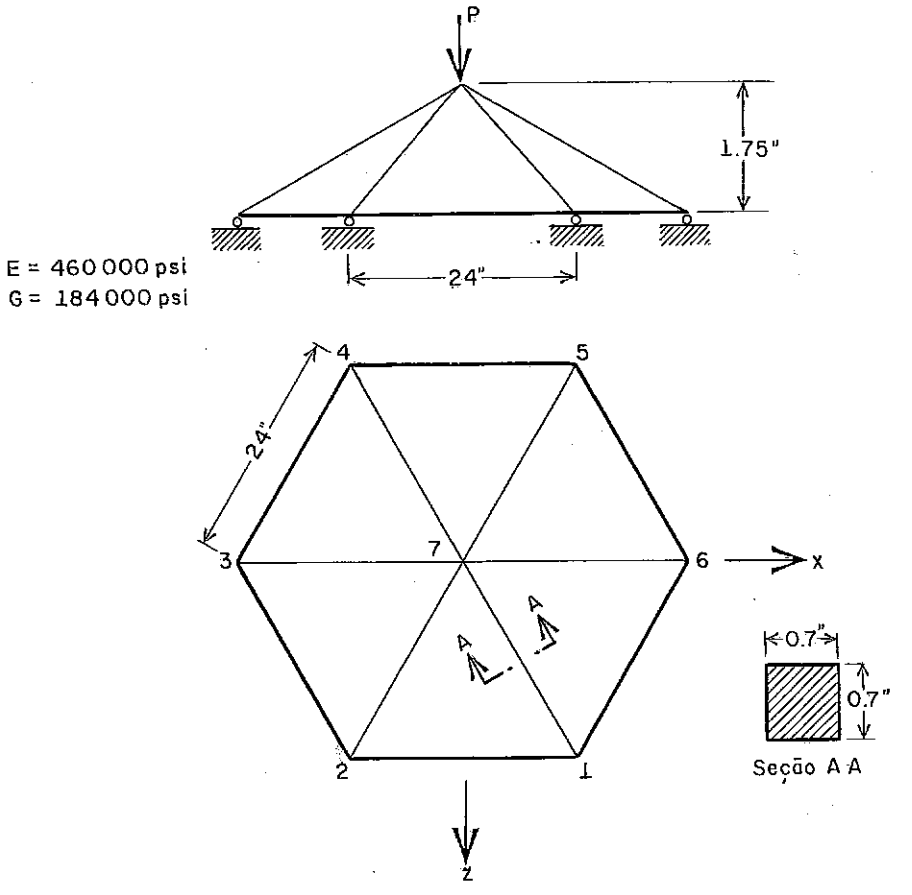
São considerados casos relativamente simples, para se estabelecer comparações com resultados de outras formulações disponíveis, e para indicar com clareza a utilização dos comandos descritos anteriormente.

Procurou-se também, examinar a performance da linguagem nessas soluções, frente a outros sistemas. Para tal, valeu-se do sistema ICES-STRUDL, implantado em computadores IBM 360/40 e 370/165, e do programa NONSAP, no computador BURROUGHS B-6700. O primeiro, entre os sistemas comentados anteriormente, é o que fornece maior acesso ao usuário, e o segundo o de concepção mais moderna. (Versão de fevereiro de 1975).

Os custos avaliados foram obtidos com a tabela de preços vigente em janeiro de 1977.

6.2 - ESTRUTURA RETICULADA TRIDIMENSIONAL - ANÁLISE ESTÁTICA

A estrutura reticulada tridimensional esquematizada na Figura 6.1, é o único problema que, consta do manual do usuário do sistema ICES-STRUDL para análise não-linear.



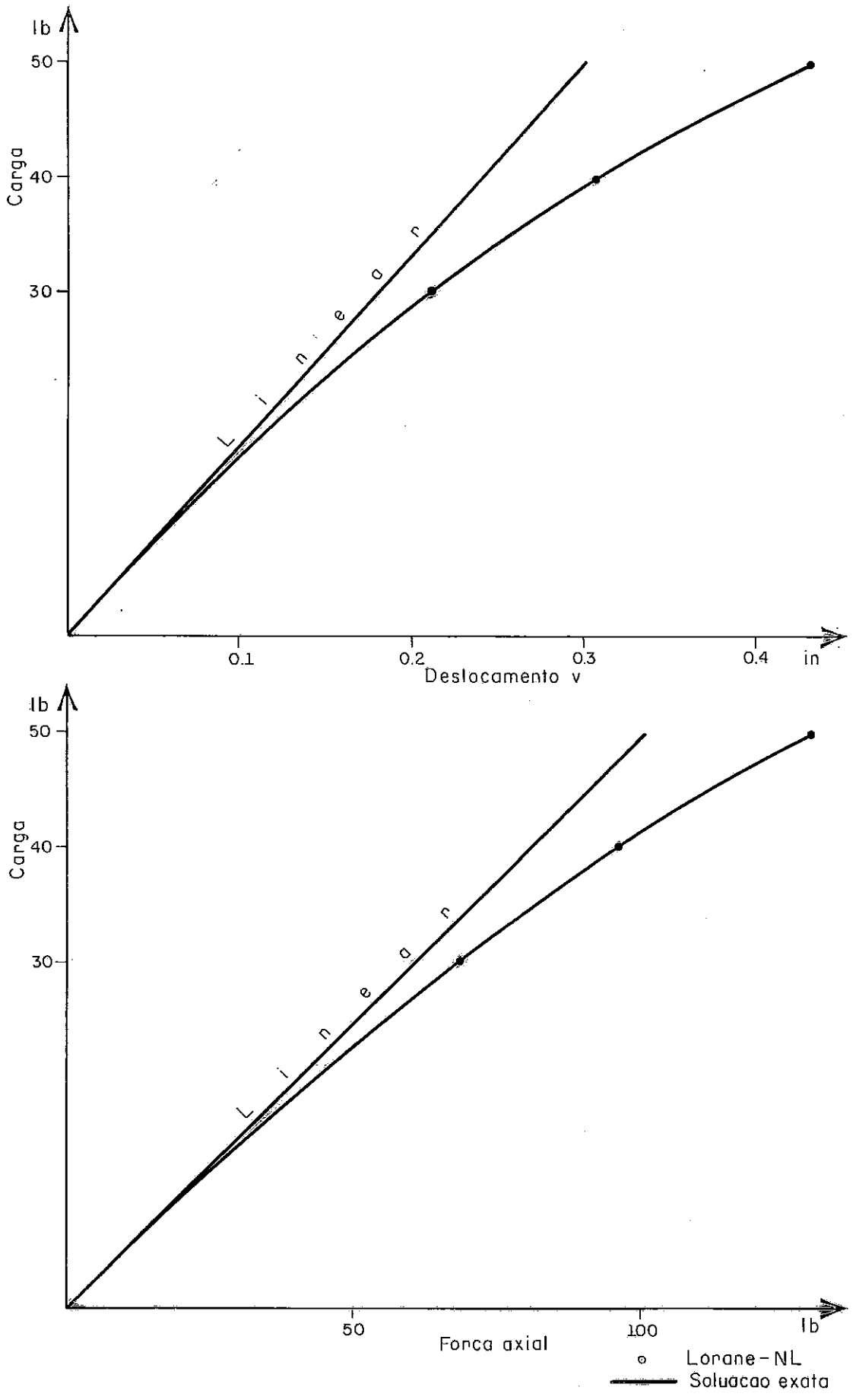
ESTRUTURA RETICULADA TRIDIMENSIONAL
Figura 6.1

A aplicação da carga vertical de 50 ℓbs foi efetuada de duas formas: em três incrementos (30, 40 e 50 ℓbs) e em vinte incrementos (20 x 2.5 ℓbs).

A primeira solução está representada nas Figuras 6.2 para a deflexão central e força axial, já mostrando concordância com a solução analítica. No processo incremental iterativo a tolerância de 1% foi fixada, exigindo em média 3 iterações por incremento.

A seguinte sequência de comandos foi utilizada:

```
LORANE-NL  "EXEMPLO DO STRUDL"
COORDENADAS
1  12.  0  20.78 ; 2  -12.  0.  20.78 ; 3  -24 ; 4  -12.  0.  -20.78
5  12.  0  -20.78 ; 6  24. ; 7  0.  1.75
CONETIVIDADE
1  1  7 ; 2  2  7 ; 3  3  7 ; 4  4  7 ; 5  5  7 ; 6  6  7
7  2  1 ; 8  3  2 ; 9  4  3 ; 10  5  4 ; 11  6  5 ; 12  1  6
TIPO DE ELEMENTO
TODOS TIPO "PE"
PROPRIEDADES
TODOS  AX  0.49  IX  0.04  IY  0.02  IZ  0.02
CONSTANTES
TODOS  E  460000.  G  184000.
RESTRICOES NODAIS DIRETAS
1  2  3  4  5  6  INCOGNITA  "V"
7  INCOGNITAS  "U"  "W"  "RU"  "RV"  "RW"
FUNCOES TEMPO
1  PONTOS  0.  0.  1.  30.  2.  40.  3.  50.
CARGAS NODAIS PARCELA 1
7  FORCA  Y  -1.
CARGA TRANSIENTE
FATOR  1  CARGAS NODAIS  1  FUNCAO  1
INTERVALO TEMPO  3  1.
TOLERANCIA  0.01
NUMERO MAXIMO DE ITERACOES  20
IMPRIMIR DESLOCAMENTOS
IMPRIMIR REACOES
IMPRIMIR TENSOES NOS TODOS ELEMENTOS TODOS CADA 1 INTERVALO
ANALISE NAO LINEAR NR
FIM
```



DIAGRAMAS CARGA-FLEXA E CARGA-FORÇA AXIAL

Figura 6.2

	TEMPO PROCESSADOR (Segundos)	CUSTO PROCESSADOR Cr$	CUSTO MEMÓRIA Cr$	CUSTO E/S Cr$	CUSTO TOTAL Cr$
LORANE NL 3 Incrementos Tolerância 0.01	58	32.34	16.61	3.43	52.38
STRUDL (IBM 360/40) 3 Incrementos Tolerância 0.01	511	-	-	-	689.85
STRUDL (IBM 370/165) 3 Incrementos Tolerância 0.01	24.47	105.88	37.75	83.77	227.40
LORANE NL 20 Incrementos Tolerância 0.0001	423	273.61	128.66	13.57	415.84
STRUDL (IBM 370/165) 20 Incrementos Tolerância 0.0001	173.43	750.41	267.52	179.41	1197.34

T A B E L A 6.1

Os tempos de processamento e custos de solução são examinados na Tabela 6.1. É bastante significativa a diferença, mesmo tratando-se de um problema pequeno,favorável ao sistema ICES-STRUDL. Deve-se acrescentar ainda que os jobs processados no equipamento IBM utilizaram toda a capacidade disponível, enquanto que para o LORANE-NL foram submetidos sem nenhuma especificação de prioridade ou de partição.

O tempo para interpretação de dados no LORANE-NL representou 5% do tempo total na solução com 3 incrementos e 0,7% na solução com 20 incrementos.

Como o problema analisado é fracamente não-linear, uma solução mais eficiente seria obtida com o uso do método de Newton-Raphson Modificado. Fixando-se por exemplo, no caso de 20 incrementos, a tolerância em 0.1%, as seguintes relações entre os tempos de processamento são obtidas:

$$\frac{t_{NR}}{2.5} = \frac{t_{NRM}}{1.4} = \frac{t_{INC}}{1} \qquad (6.1)$$

6.3 - ESTRUTURA RETICULADA PLANA - ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA

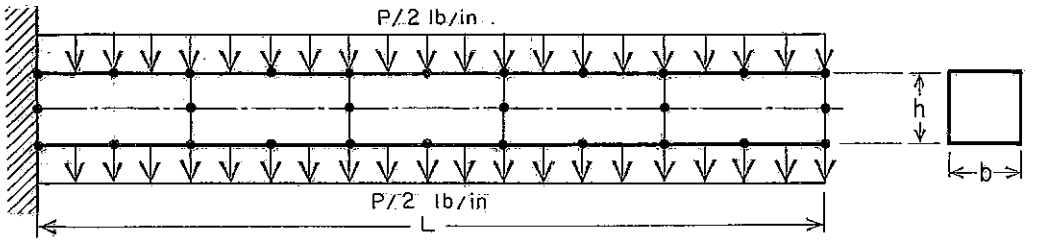
A análise da viga engastada sob carga uniformemente distribuida (Figura 6.3), tem por objetivo confrontar a solução obtida por elementos isoparamétricos, onde nenhuma restrição quanto a deslocamentos ou deformações é introduzida, e a solução através de elementos de estruturas reticuladas planas. Nessa figura as propriedades da estrutura são esquematizadas, mostrando também que a solução estática incremental com 5 elementos quadriláteros quadráticos de estado plano de tensões e, 1 e 2 elementos reticulados é coincidente com a solução analítica.

Para a análise dinâmica a carga foi fixada em 2.85 ℔b/in e as soluções com intervalos de integração correspondentes a 1/126 e 1/42 do período fundamental da viga, com e sem verificações de equilíbrio, são obtidas utilizando-se elementos isoparamétricos (Figura 6.4).

A solução com o intervalo de integração $\Delta t = T_f/42$ com verificações de equilíbrio já fornece uma boa aproximação. Nesta análise uma média de 4 iterações por intervalo foram exigidas. Com o uso do método de Wilson não se consegue obter convergência neste caso, logo após a deflexão atingir o primeiro valor máximo.

Deve-se notar, que a principal característica desta estrutura, é que ela enrijece com o aumento da deflexão, o que resulta em decréscimo substancial na amplitude e no período efetivo de vibração. Este enrijecimento pode acarretar dificuldades na iteração para o equilíbrio.

Os parâmetros da solução mais rigorosa foram utili

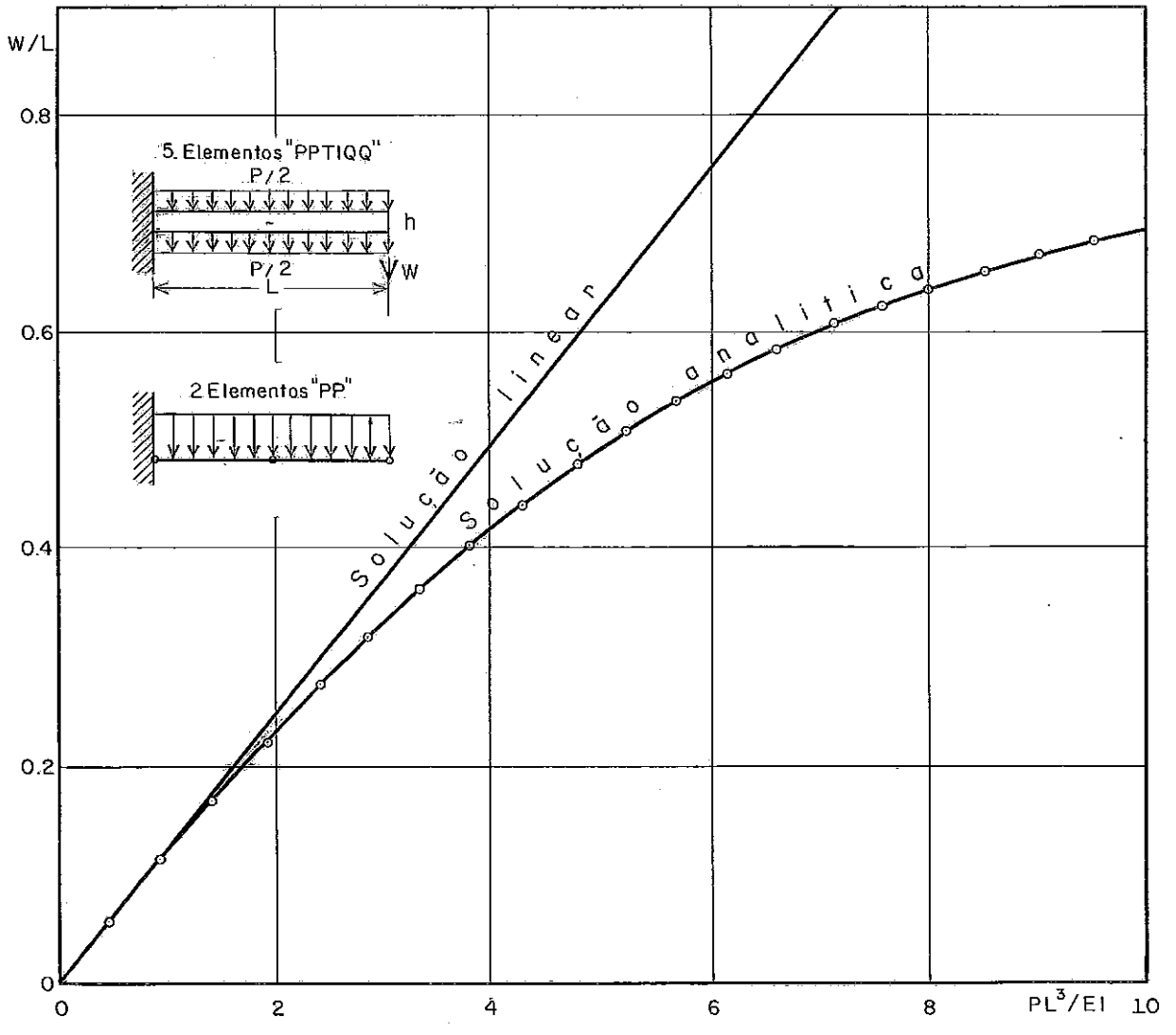


$L = 10$ in $\quad E = 1.2 \times 10^4$ lb/in^2

$h = 1$ in $\quad \nu = 0.2$

$b = 1$ in $\quad \rho = 0.000001 \frac{\text{lb s}^2}{\text{in}^4}$

PROPRIEDADES DA ESTRUTURA



∘ Solução incremental

DEFLEXÕES DA VIGA ENGASTADA - SOLUÇÃO ESTÁTICA

Figura 6.3

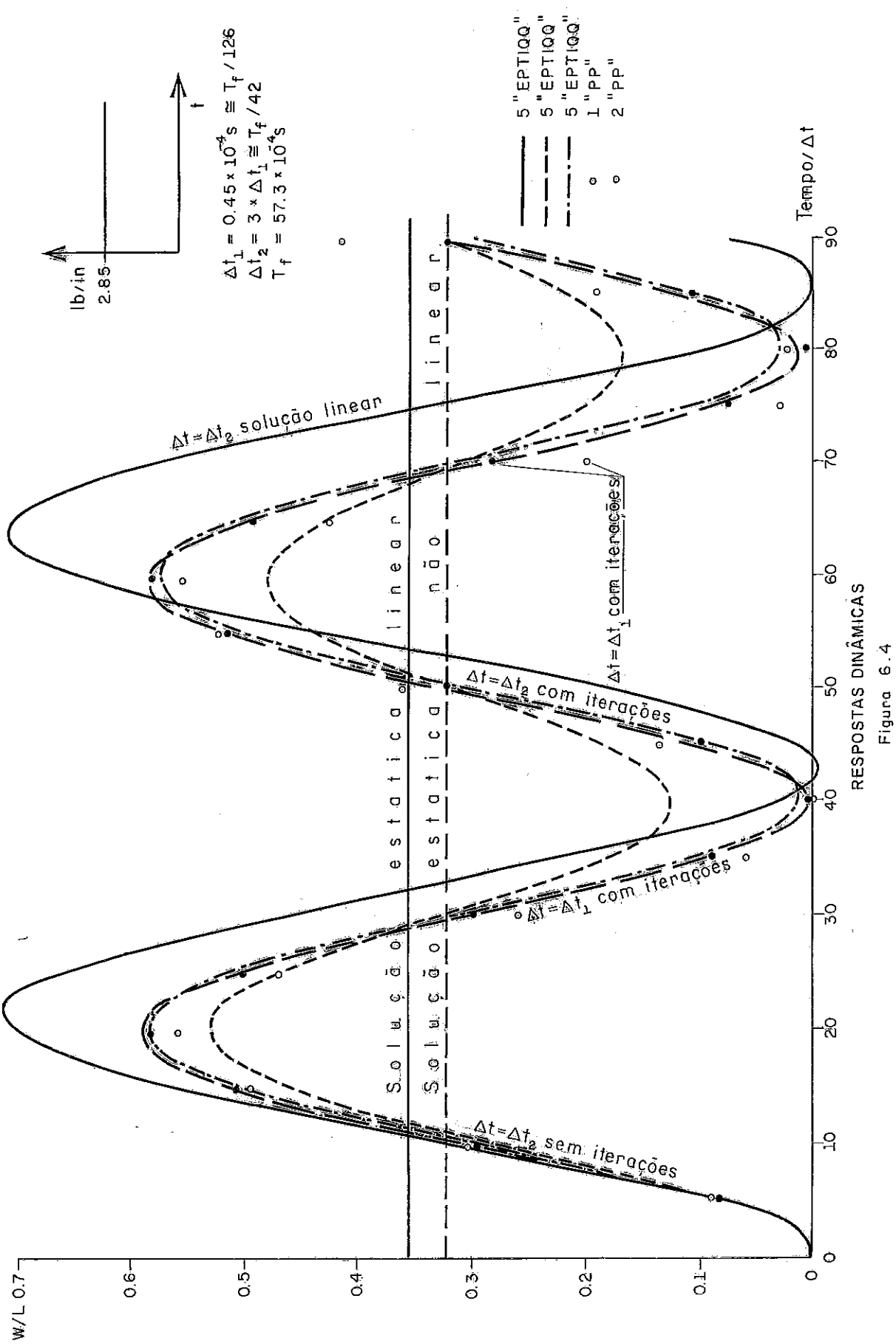

lb/in
2.85
t
$\Delta t_1 = 0.45 \times 10^{-4} s \cong T_f / 126$
$\Delta t_2 = 3 \times \Delta t_1 \cong T_f / 42$
$T_f = 57.3 \times 10^{-4} s$
5 "EPTIQQ"
5 "EPTIQQ"
5 "EPTIQQ"
1 "PP"
2 "PP"
$\Delta t = \Delta t_2$ solução linear
$\Delta t = \Delta t_1$ com iterações
$\Delta t = \Delta t_2$ com iterações
$\Delta t = \Delta t_1$ com iterações
$\Delta t = \Delta t_2$ sem iterações
Solução estatica linear
Solução estatica não linear
W/L 0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
Tempo/Δt
RESPOSTAS DINÂMICAS

Figura 6.4

zados para a análise com 1 e 2 elementos reticulados, sendo que , essa última aproximação se mostrou bastante satisfatória. Para essa análise, os seguintes comandos foram especificados:

```
LORANE-NL  "VIGA ENGASTADA - BATHE"
COORDENADAS
1 ; 2   5. ; 3   10.
CONETIVIDADE
1  1  2 ; 2  2  3
TIPO DE ELEMENTO
TODOS TIPO  "PP"
PROPRIEDADES
TODOS  AX  1.  IZ  0.0833
CONSTANTES
TODOS  E  12000.  MASSA   0.000001
RESTRICOES NODAIS DIRETAS
1  TOTAL
FUNCOES TEMPO
1  PONTOS  0.  1.  0.045  1.
CARGAS NODAIS PARCELA  1
2  FORCA  Y  -14.25
3  FORCA  Y  - 7.125  MOMENTO  Z  5.9375
CARGA TRANSIENTE
FATOR  1  CARGAS NODAIS  1  FUNCAO  1
TOLERANCIA  0.001
NUMERO MAXIMO DE ITERACOES  10
INTERVALO TEMPO  270   0.000045
IMPRIMIR DESLOCAMENTOS NOS TODOS CADA 15 INTERVALOS
ANALISE NAO LINEAR DINAMICA
FIM
```

O problema anterior poderia ter sido analisado com uso de elementos degenerados bi-dimensionais ("PPLIDQ" e "PPLIDC").

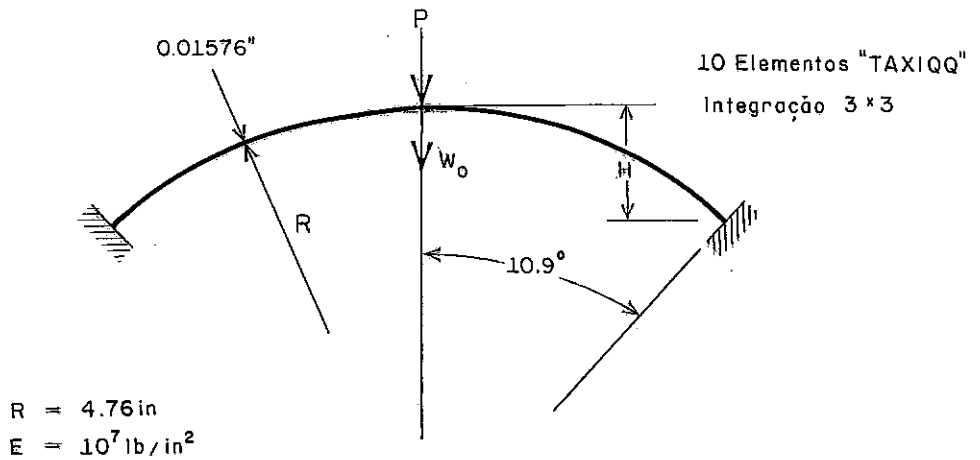
Esses elementos são adequados para estruturas de eixo curvo e inércia variável. Principalmente o que faz uso de função de interpolação cúbica. Para confirmar essa preferência apresentam-se os resultados da solução estática linear de uma viga bi-apoiada com carga concentrada (E = 1000000. t/m^2 vão = 10 m I = 0.1 m^4 F = -1t) , discretizada na metade apenas. Deflexão central e rotação de apoio são mostrados na Tabela 6.2.

	DEFLEXÃO CENTRAL	ROTAÇÃO NO APOIO
5 ELEMENTOS QUADRÁTICOS	- 2.064812	- 0.625000
10 ELEMENTOS QUADRÁTICOS	- 2.079991	- 0.624987
2 ELEMENTOS CÚBICOS	- 2.083750	- 0.625000
SOLUÇÃO TEORIA DE VIGA	- 2.083333	- 0.625000

TABELA 6.2 - DEGENERADO PLANO - VIGA BI-APOIADA

6.4 - CASCA ESFÉRICA - ANÁLISE DINÂMICA

A resposta dinâmica da calota esférica, de características indicadas na Figura 6.5, foi computada para a aplicação da carga concentrada, súbita e constante, P = 100 &b .



R = 4.76in
E = 10^7 lb/in^2
δ = 0.3
ρ = 0.000245lbs^2/in^4

CARGA ESFÉRICA SUBMETIDA A CARGA CONCENTRADA

Figura 6.5

Os resultados da deflexão no ponto de aplicação dessa carga, obtidos com intervalo de integração $\Delta t \cong T_f/50$, estão mostrados na Figura 6.6.

Apesar de se tratar de um problema fortemente não-linear a diferença das soluções com e sem verificações de equilíbrio é relativamente pequena. As amplitudes e os períodos maiores para a solução não-linear são resultados da perda de rigidez da estrutura.

Na Figura 6.6 está plotada também a solução não-linear quando se requer amortecimento crítico no primeiro modo de vibração.

A especificação dessas soluções por meio de 10 elementos isoparamétricos quadráticos é feita com um único superelemento e com os seguintes comandos:

```
LORANE-NL  "CASCA ESFERICA - NONSAP"
UNIDADES GRAUS
```

```
SUPERELEMENTO "CA" TIPO ISO BI GRAU 2                                    $
ELEMENTOS QUAD GRAU 2 DIVISOES XSI 1 ETA 10                              $
NOS 1 CIL R 4.75212 A 79.1 , 2 CIL R 4.76788 A 79.1 , $
    3 CIL R 4.76788 A 90.  , 4 CIL R 4.75212 A 90.  , $
    5 CIL R 4.76    A 79.1 , 6 CIL R 4.76788 A 84.55, $
    7 CIL R 4.76212 A 90.  , 8 CIL R 4.75212 A 84.55
TIPO DE ELEMENTO
TODOS TIPO "TAXIQQ"
CONSTANTES
TODOS E 10000000.  POISSON  0.3  MASSA  0.000245
RESTRICOES NODAIS DIRETAS
"CAOOO1" ATE "CAOOO3" TOTAL
"CAOO51" ATE "CAOO53" INCOGNITA "U"
FUNCOES TEMPO
1  PONTOS  0.  15.915493  100.  15.915493
CARGAS NODAIS PARCELA 1
"CAOO53"  FORCA  Y  -1.
CARGA TRANSIENTE
FATOR  1  CARGAS NODAIS  1  FUNCAO  1
INTERVALO TEMPO  240  0.0000022
IMPRIMIR DADOS
TOLERANCIA  0.001
NUMERO MAXIMO DE ITERACOES  20
IMPRIMIR DESLOCAMENTOS VELOCIDADES ACELERACOES
IMPRIMIR TENSOES NOS TODOS ELEMENTOS TODOS CADA 10 INTERVALOS
ANALISE NAO LINEAR DINAMICA
FIM
```

Na Tabela 6.3 estão indicados os tempos relativos a cada etapa da análise e as correspondentes frações do tempo to-

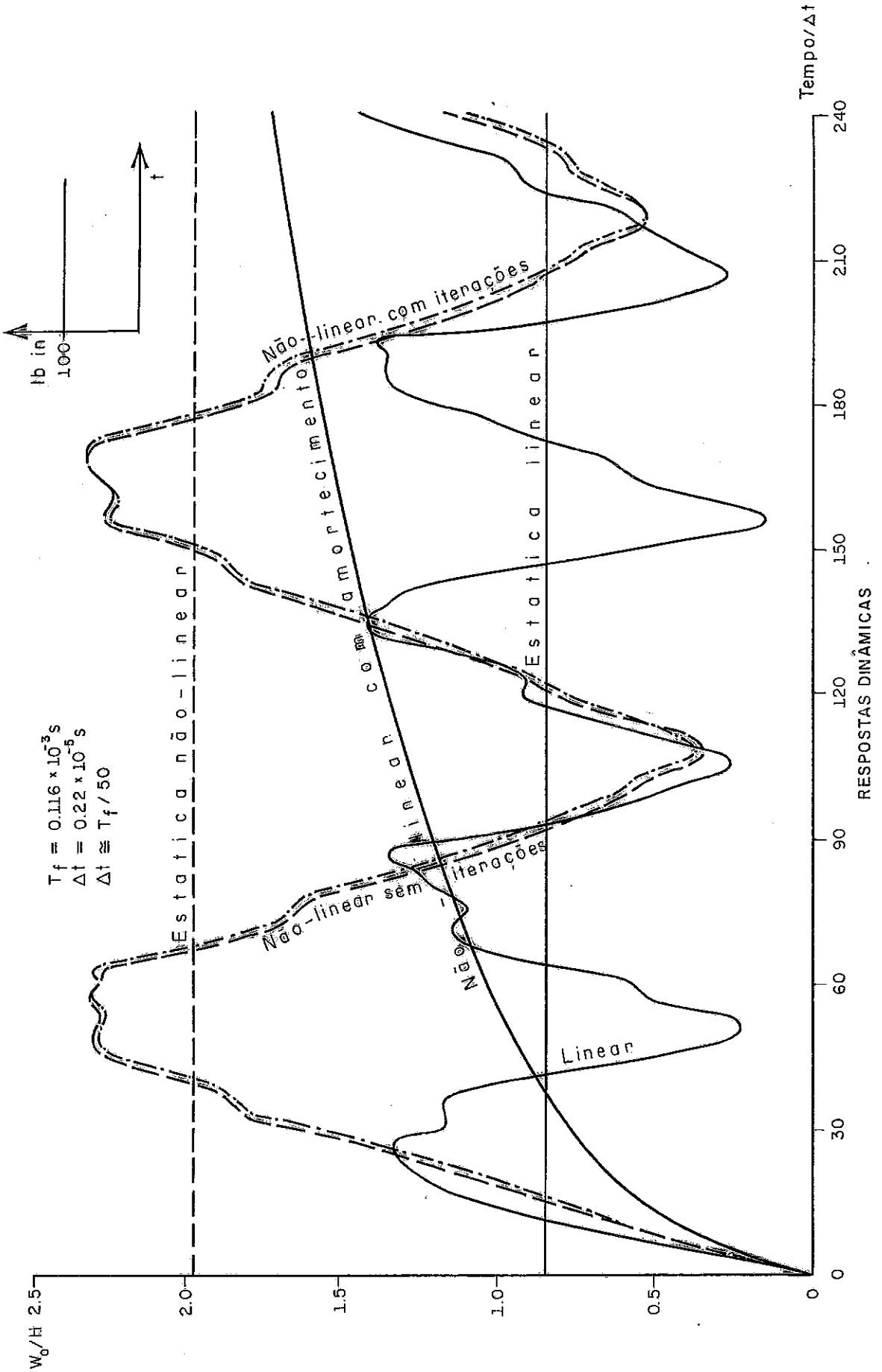

W_o/H
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
0
30
60
90
120
150
180
210
240
Tempo/Δt
RESPOSTAS DINÂMICAS
Estatica não-linear
Estatica linear
Não-linear com amortecimento
Não-linear sem amortecimento
Não-linear com iterações
Não-linear sem iterações
Linear
$T_f = 0.116 \times 10^{-3}$s
$\Delta t = 0.22 \times 10^{-5}$s
$\Delta t \cong T_f/50$
lb in
100
t

Figura 6.6

tal. Quase 75% é destinado ao cálculo das parcelas não-lineares.

O tempo total está exagerado pelo rigor especificado para essa análise.

ETAPAS DE ANÁLISE	TEMPO EM SEGUNDOS	% DO TEMPO TOTAL
ENTRADA	9.25	0.5
MATRIZES LINEARES	4.45	0.2
VETOR CARGA EFETIVO	127.77	7.1
RIGIDEZ E CARGAS NÃO-LINEARES	1336.32	74.2
SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES	262.89	14.6
CÁLCULO E IMPRESSÃO DESL./VEL./ACEL.	19.94	1.1
CÁLCULO E IMPRESSÃO TENSÕES	40.52	2.3

TABELA 6.3 - ETAPAS DE ANÁLISE

A principal motivação deste problema é o fato de ser o exemplo de maior porte que consta do manual do programa NON SAP.

Para comparar a performance, este programa foi instalado no Computador BURROUGHS B-6700 em precisão simples, tendo-se o cuidado de dimensionar os seus arquivos em pack, com o tamanho exatamente necessário, o que significa fornecer condições ótimas de processamento.

Os custos de análise obtidos estão mostrados na Tabela 6.4 evidenciando uma diferença favorável de 20% para linguagem LORANE-NL.

	PROCESSADOR Cr$	MEMÓRIA Cr$	E/S Cr$	TOTAL Cr$
LORANE-NL	1165,00	480,00	2,00	1647,00
NONSAP	1436,00	431,00	107,00	1974,00

TABELA 6.4 - CUSTOS DA ANÁLISE

6.5 - COMPORTAMENTO PÓS-CRÍTICO DE PLACA COM IMPERFEIÇÃO

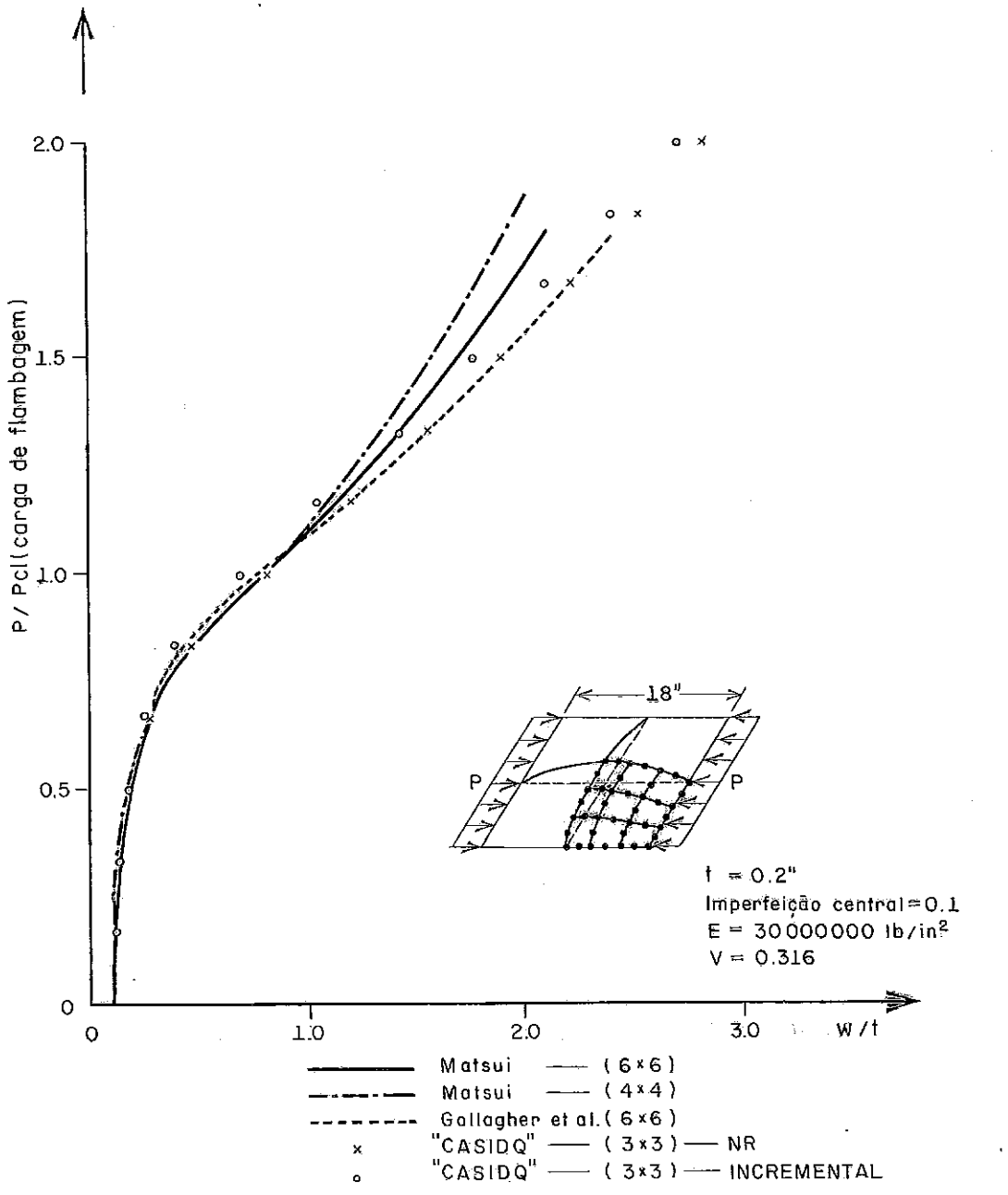
Uma placa com imperfeição, sujeita a carregamento uniforme ao longo de dois lados opostos, e simplesmente apoiada em todo o contorno, é estudada a seguir. A distribuição da imperfeição foi considerada senoidal e devido a simetria analisou-se somente a quarta parte da estrutura.

Matsui[163] comparou recentemente resultados de diversas formulações para este problema. Na Figura 6.7 estão plotadas algumas dessas soluções, juntamente com a solução obtida com o uso de elementos degenerados tridimensionais ("CASIDQ"). Os méritos de uma formulação não-linear completa ficam claramente evidenciados pela excelente concordância dos resultados encontrados, em apenas 12 incrementos, com e sem verificações de equilíbrio. Deve-se ressaltar, que isso acontece mesmo quando a carga atinge o dobro da carga de flambagem.

Os comandos especificados nesta análise são os seguintes:

```
LORANE-NL  "PLACA COM IMPERFEICAO SENOIDAL"
SUPERELEMENTO  "PI"  TIPO  ISO  BI  GRAU  2                    $
ELEMENTOS  QUAD  GRAU  2  DIVISOES  XSI  3  ETA  3            $
```

```
NOS  1  0.  9.  0. , 2  0.  0.  0.02 , 3  9.  0.  0. ,                    $
     4  9.  9.  0. , 5  0.  4.5  0.01414 , 6  4.5  0.  0.01414 ,          $
     7  9.  4.5  0. , 8  4.5  9.  0.
TIPO DE ELEMENTO
TODOS TIPO "CASIDQ"
ESPESSURA POR NO
TODOS ESPESSURA  X  0.  Y  0.  Z  0.2
CONSTANTES
TODOS  E  30000000.  POISSON  0.316
RESTRICOES  NODAIS  DIRETAS
"PI0001"  INCOGNITAS  "U"  "V"  "RU"  "RV"
"PI0002"  ATE  "PI0006"  INCOGNITAS  "U"  "RU"
"PI0007"  INCOGNITAS  "U"  "W"  "RU"
"PI0011" "PI0018"  "PI0022"  "PI0029" "PI0033"  INCOGNITAS  "W"  "RU"
"PI0035"  ATE  "PI0039"  INCOGNITAS  "W"  "RV"
"PI0034"  INCOGNITAS  "V"  "W"  "RV"
"PI0008" "PI0012" "PI0019" "PI0023" "PI0030" INCOGNITAS "V" "RV"
FUNCOES TEMPO
1  PONTOS  0.  0.  12.  1.
CARGAS NODAIS PARCELA  1
"PI0007"  "PI0040"  FORÇA  Y  -3332.5
"PI0011"  "PI0033"  "PI0022"  FORCA  Y  -13332.5
"PI0018"  "PI0029"  FORCA  Y  -6667.5
CARGA TRANSIENTE
FATOR  1  CARGAS  NODAIS  1  FUNCAO  1
INTERVALO TEMPO  12  1.
IMPRIMIR DESLOCAMENTOS NOS  "PI0001"  CADA  1  INTERVALO
ANALISE NAO LINEAR INCREMENTAL
FIM
```



CARGA-DEFLEXÃO DE PLACA COM IMPERFEIÇÃO

Figura 6.7

6.6 - CASCA CILÍNDRICA ENGASTADA - ANÁLISE ESTÁTICA

Quase todas aproximações de teorias não-lineares para análise de estruturas de superfície são aplicadas para comparar resultados na solução do problema de casca cilíndrica engastada sob pressão uniforme normal da Figura 6.8.

Nesta figura é mostrada a variação da deflexão central obtida com os elementos "CASIDQ" e "CPRS1", acima da carga crítica.

Nas Figuras 6.9 e 6.10, os esforços normais e momentos fletores calculados em alguns pontos são confrontados com os de Connor[100].

Para ilustrar a performance do elemento degenerado tridimensional, na Figura 6.11 é examinada a convergência para uma deflexão central correspondente a 64% da espessura. (2 x 2 , 3 x 3 e 4 x 4 elementos).

Fica evidente que a análise com 3 x 3 elementos já fornece uma excelente aproximação.

Para o problema estudado, que envolve regiões fracamente e fortemente não-lineares, o uso de correções do equilíbrio com a matriz constante já não resulta tão vantajoso. Fixada a tolerância em 1% , o tempo de processamento total dos 16 incrementos de carga, para o elemento quadrático atende a seguinte proporção:

$$\frac{t_{NR}}{2.6} = \frac{t_{NRM}}{2.1} = \frac{t_{INC}}{1.} \qquad (6.2)$$

e para o elemento retangular:

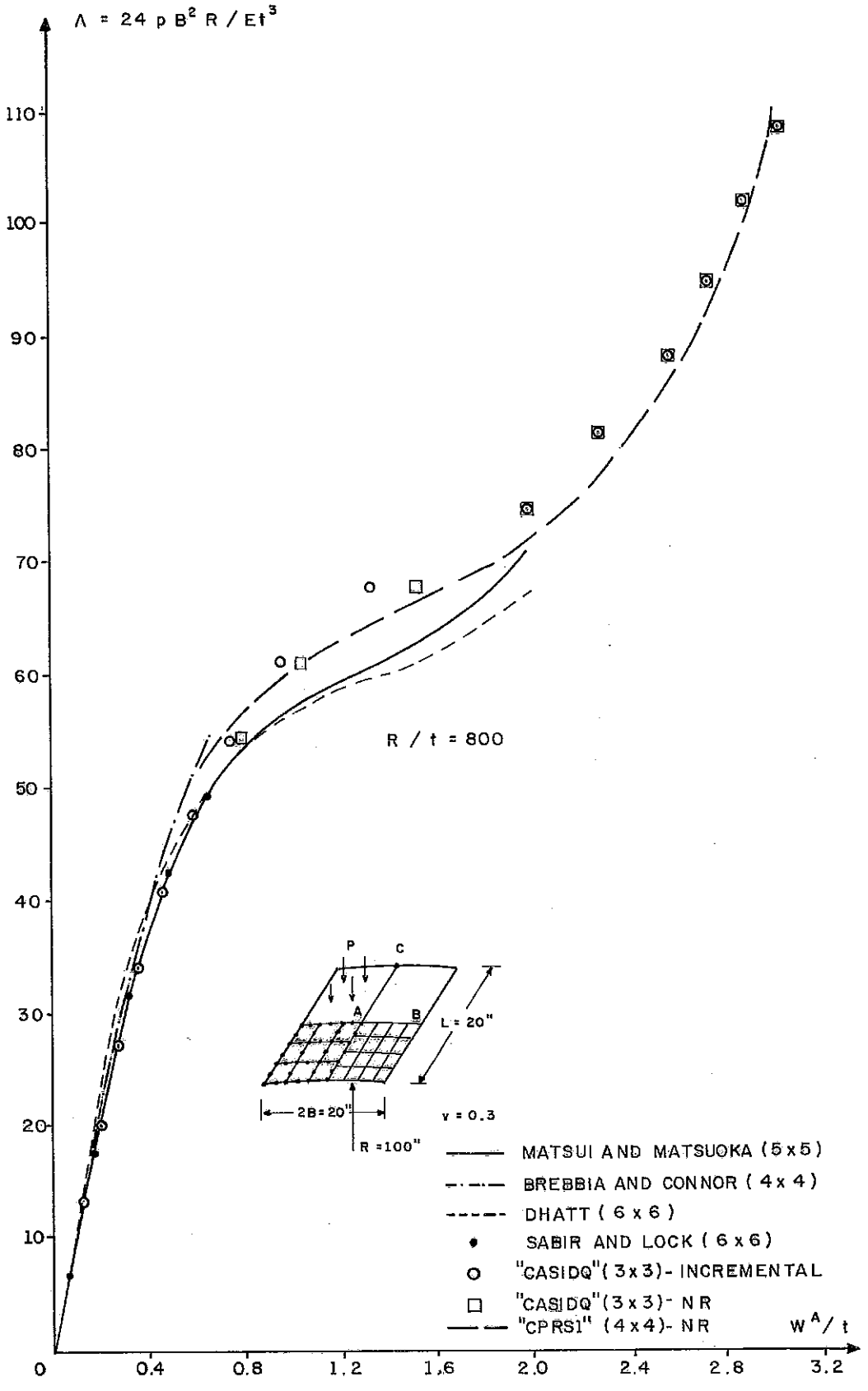


FIGURA 6-8 CASCA CILÍNDRICA ENGASTADA

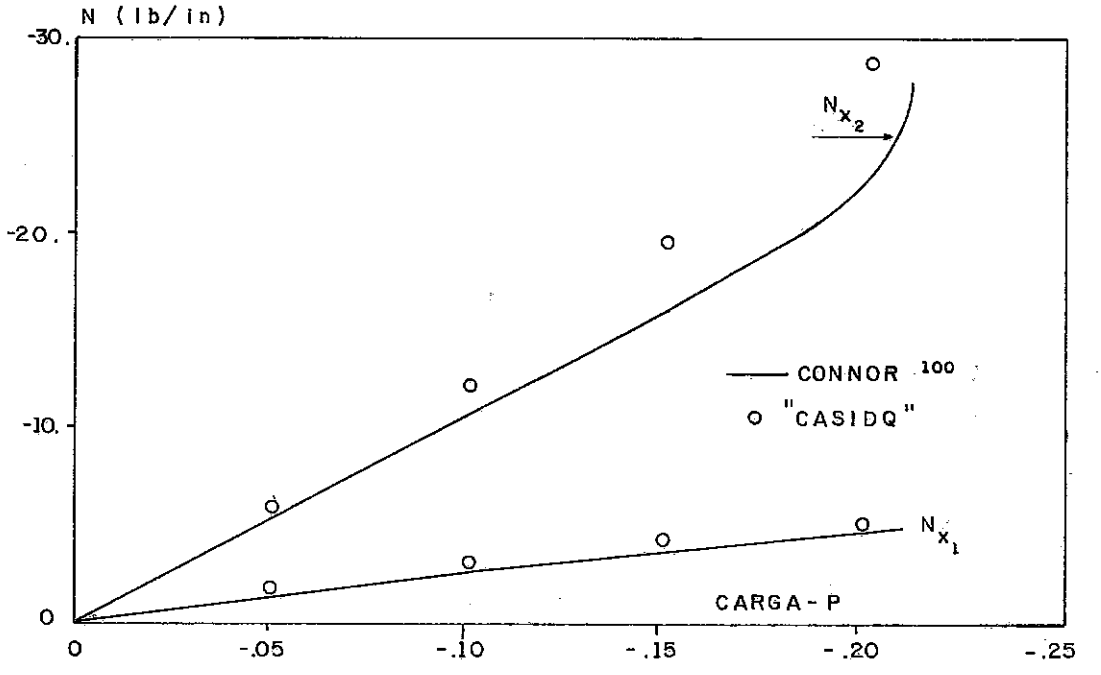


FIGURA 6-9 ESFORÇOS NORMAIS NO CENTRO DA CASCA (NÓ A)

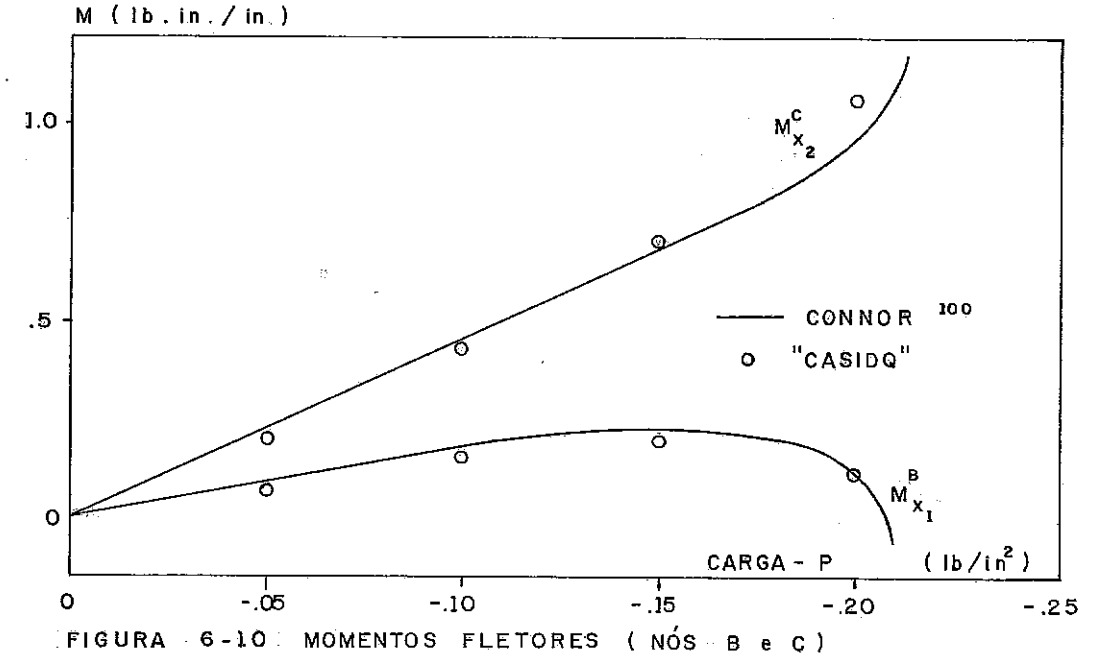


FIGURA 6-10 MOMENTOS FLETORES (NÓS B e C)

$$\frac{t_{NR}}{2.3} = \frac{t_{NRM}}{2.1} = \frac{t_{INC}}{1.} \qquad (6.3)$$

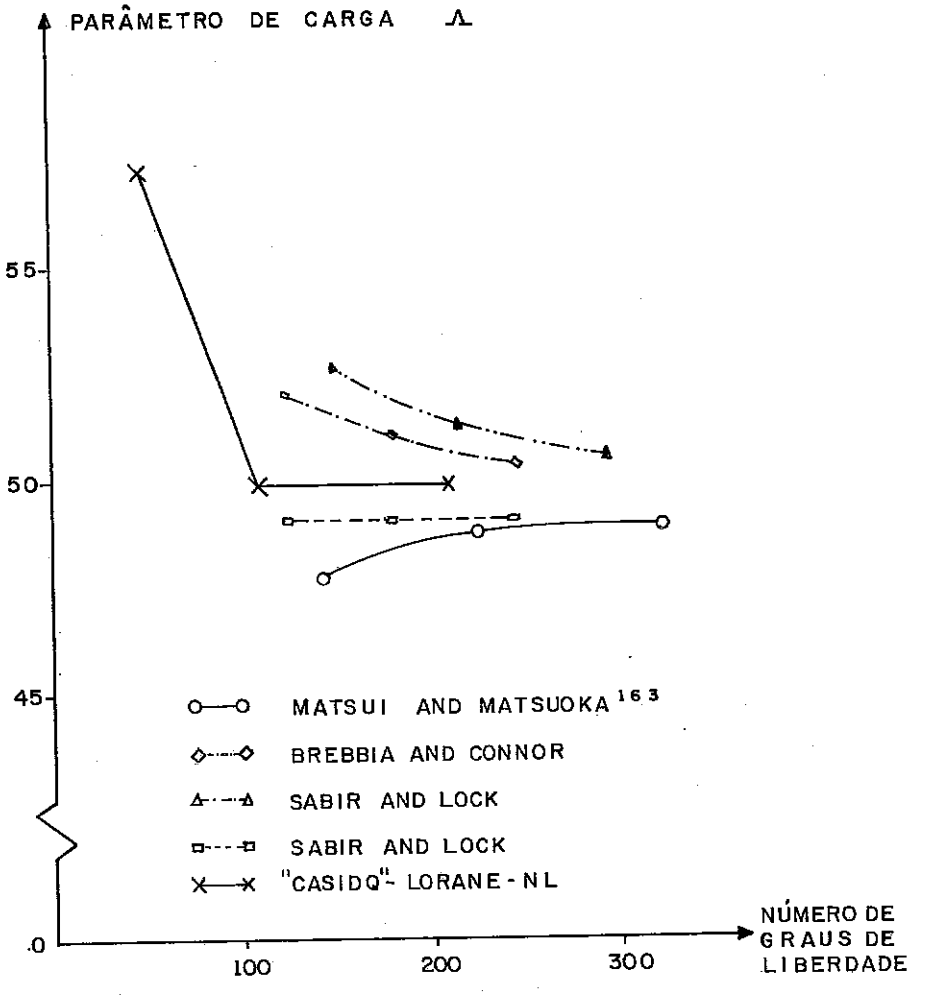


FIGURA 6-11 CONVERGENCIA DA CARGA PARA DEFLEXÃO CENTRAL DE 0,64 f.

6.7 - TORRE DE RESFRIAMENTO - AÇÃO DO VENTO

A resposta dinâmica de uma torre de resfriamento sob a ação do vento é considerada neste exemplo. Trata-se de uma estrutura de superfície de curvatura gaussiana negativa, com anéis enrigecedores nas extremidades e suportada por uma série de hastes inclinadas em sua base. Os detalhes geométricos são indicados nas Figuras 6.12(a) e (b) .

Como as hastes de apoio não são incluidas na análise, a base da estrutura é assumida mover livremente na direção

radial, prescrevendo-se apenas os deslocamentos verticais e tangenciais.

Devido à simetria apenas uma metade foi analisada. Após estudos prévios, a discretização adotada corresponde à malha de 168 elementos, representada na figura 6.12(c) .

A distribuição da pressão do vento na direção circunferencial é determinada pelas equações:

$$0^o \leq \theta < 72^o \qquad p(\theta) = -\cos\left(\frac{180}{72}\,\theta\right)$$

$$72^o \leq \theta < 105^o \qquad p(\theta) = -0.225\cos\frac{180}{33}\,(\theta - 72) + 0.772$$

$$105^o \leq \theta \leq 180^o \qquad p(\theta) = 0.550 \qquad (6.4)$$

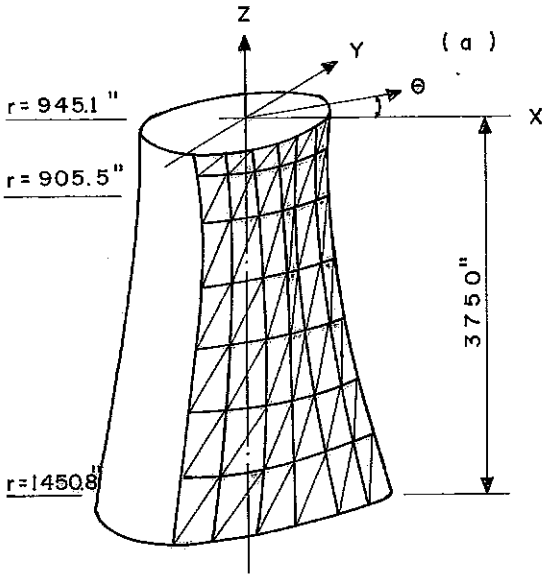
onde o ângulo θ é contado a partir do eixo positivo x .

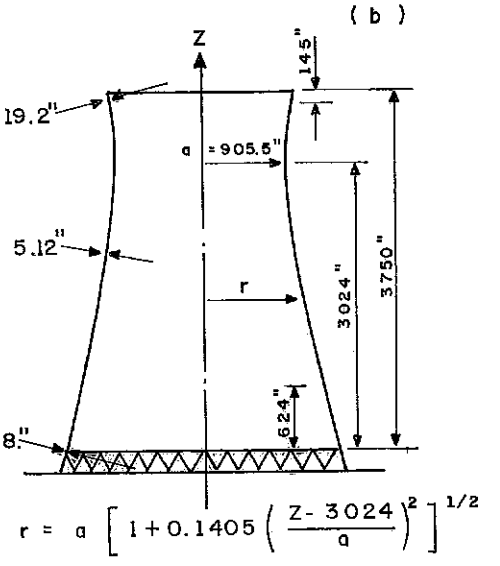
Na direção vertical a pressão do vento é assumida constante. Seu valor em cada nó foi calculado das equações anteriores e supondo-se variação linear em cada elemento.

A descrição da pressão aplicada ao longo do tempo é indicada na Figura 6.12 (e). Cresce linearmente até $t = 0.25s$ e permanece constante até $t = 0.80s$, quando ocorre uma rajada. A rajada acontece em ressonância com a estrutura. Este estudo, que corresponde a uma situação crítica, é baseado nos períodos naturais da estrutura e é sugerido por Yeh[116].

Para o amortecimento tomou-se $\beta = 0.01$, que é equivalente a 5% do amortecimento crítico do primeiro modo.

Uma matriz de massa discreta parece ser a melhor opção para este tipo de elemento.

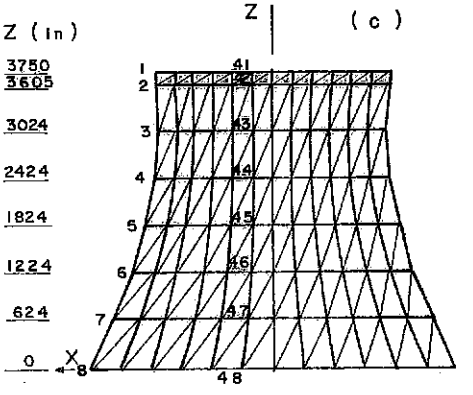


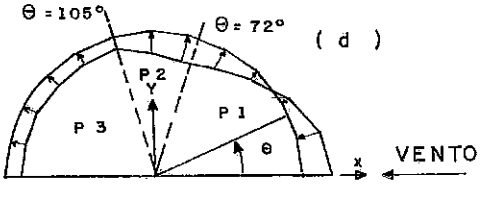


$E = 4.3 \times 10^6$ psi

$\nu = 0.15$

$\rho = 0.0002248 \frac{lb.S^2}{in^4}$





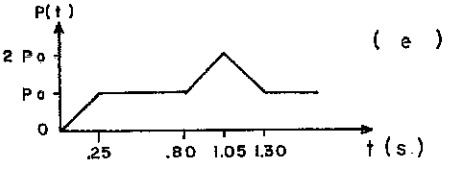


FIGURA 6-12 TORRE DE RESFRIAMENTO SOB A AÇÃO DO VENTO

{
(a) e (b) GEOMETRIA
(c) DISCRETIZAÇÃO
(d) DISTRIBUIÇÃO DA PRESSÃO
(e) VARIAÇÃO DA PRESSÃO COM O TEMPO

Na geração automática de dados, valeu-se de 8 superelementos cúbicos: 4 para cada quadrante. O uso de coordenadas cilíndricas neste caso é vantajoso.

A especificação de todos comandos empregados não introduz novidade, sendo portanto desnecessário incluí-la.

O tempo de processamento para cada intervalo de integração, atualizando-se os efeitos não-lineares, é em média, aproximadamente igual a 3 minutos ($\Delta t = 0.0255$) .

A análise com $p_o = 0.2$ psi corresponde a ação de um vento de velocidade máxima aproximadamente igual a 245 km/h . Para esse caso, o comportamento não linear é em todo semelhante ao linear.

Com $p_o = 0.6$ psi (425 km/h) o colapso da estrutura é obtido para $t = 1.15s$. Examinando a deformada da estrutura nesse tempo, nota-se que o colapso é causado por uma flambagem localizada, ao longo da região de menor raio. Essa flambagem é resultado de fortes compressões nessa área.

A seção deformada crítica é a de cota 1824 in, e está desenhada na Figura 6.14 (a) . Na Figura 6.14(b) indica-se uma seção vertical, em $\theta = 75^o$.

A flambagem localizada rapidamente alcança outras partes e para $t = 1.2s$, grandes deflexões são obtidas em toda estrutura.

Para $t = 1.15s$ o maior deslocamento é observado no nó 45, na direção Y . A história da aceleração, velocidade e deslocamento, linear e não-linear desse nó, indica claramente o desenvolvimento da instabilidade do sistema (Figuras 6.13(a), (b) e (c)).

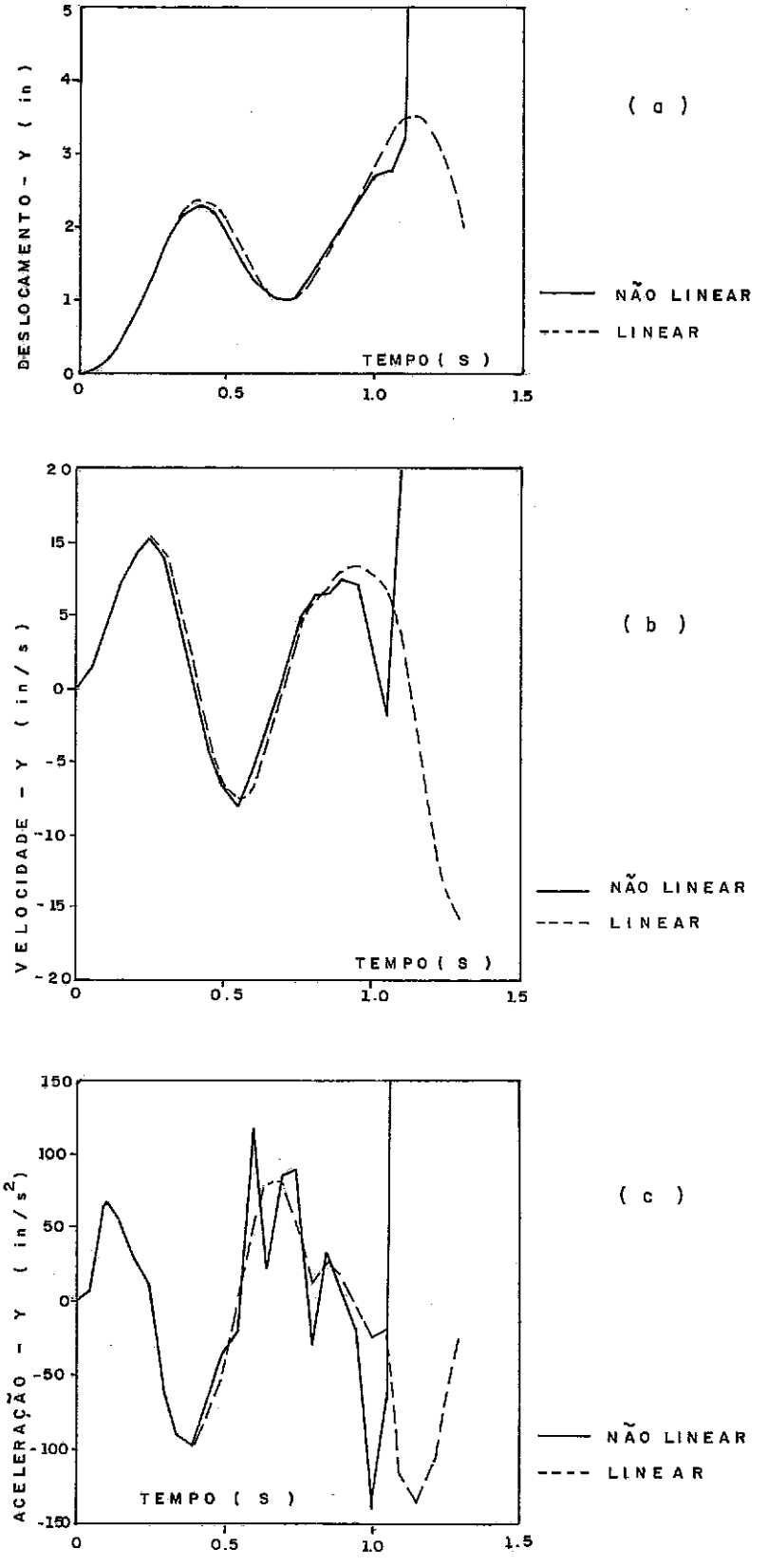


FIGURA- 6 - 13 DESLOCAMENTO, VELOCIDADE E ACELERAÇÃO DO NÓ 45

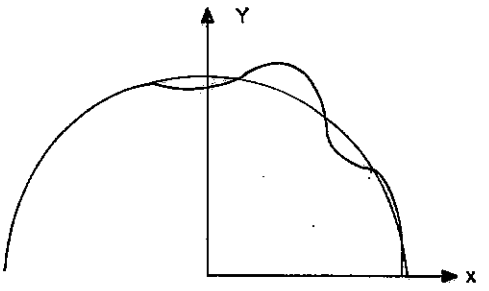
Estes resultados são bastante concordantes com os obtidos por Yeh[116] com elementos quadriláteros.

Deve-se notar que até o tempo $t = 0.5s$, a solução linear é praticamente coincidente com a não-linear, e a análise até esse tempo, poderia ter sido conduzida sem atualizações da matriz de rigidez.

Para demonstrar o mecanismo de colapso, as deformadas da seção vertical frontal são plotadas em diferentes tempos na Figura 6.14(c).

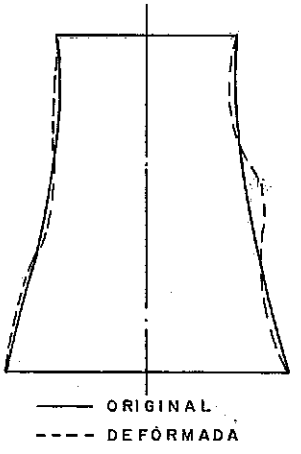
A ruína dessa estrutura pode ser evitada pelo aumento da espessura. Realmente, se a espessura for acrescida de 1 in em toda a superfície, por exemplo, a flambagem é evitada . Nesse caso a deflexão máxima ocorre no nó 3 .

t = 1.15 s
Z = 1824"



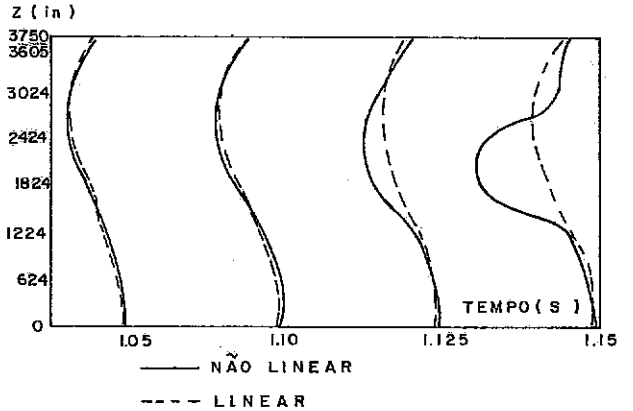
(a)

t = 1.15 s
θ = 75°



(b)

θ = 0°



(C)

FIGURA 6-14 FLAMBAGEM DINÂMICA
- (a) SEÇÃO TRANSVERSAL
- (b) SEÇÃO LONGITUDINAL (DEFLEXÃO AMPLIADA 2 VEZES)
- (c) SEÇÃO LONGITUDINAL (DEFLEXÃO AMPLIADA 100 VEZES)

VII - CONCLUSÃO

Na apresentação das disponibilidades oferecidas pela linguagem LORANE-NL, procurou-se comentar os procedimentos atuais relacionados à análise não-linear pelo método dos elementos finitos, com especial ênfase às técnicas numéricas usadas.

Pode-se concluir que, embora grande parte dos problemas práticos são resolvidos efetivamente, existe um número de importantes áreas de pesquisa que carecem de atenção. Os problemas específicos a serem considerados são, em essência, os relacionados com a estabilidade, precisão e custo da solução.

Utilizando o potencial inerente do método dos elementos finitos, foram conseguidos consideráveis avanços no sentido de se poder contar com estratégias de solução efetivas. Entretanto, fica bastante evidente que para isso requerem-se conhecimentos profundos de análise matemática.

A análise não-linear somente é viável com o uso de computadores e, a possibilidade de uma solução depende em larga escala, da eficiente implementação computacional do procedimento utilizado.

Destina-se atualmente, grande esforço em investigações de operadores de integração estáveis, incluindo algoritmos de seleção automática de intervalos de integração variáveis e de sequências de aplicação de cargas na análise estática, para otimizar o custo da solução. Cabe salientar, que esquemas de integração eficientes devem ser baseados em formulações de modelos de elementos finitos consistentes, com relações constitutivas estáveis e com cuidadosas técnicas de programação.

A escolha da aproximação usada, para cada grupo de análise é fundamentalmente decidida pela finalidade a que se destina: fornecer uma ferramenta efetiva de solução de problemas correntes. Desta forma, a formulação mais sofisticada que surge na análise linear, pode não ter correspondente na análise não-linear, simplesmente por se tornar computacionalmente ineficiente ou inviável.

O desenvolvimento de um sistema geral de análise não-linear envolve a interação das áreas de análise numérica, mecânica do contínuo, análise experimental e computação.

Os algorítmos implementados em um sistema geral,não são necessáriamente os mais eficazes em todos os problemas específicos, mesmo porque, "na análise não-linear deve-se manter todas as possibilidades em aberto" (Zienkiewicz[35]).

Um aspecto importante a ressaltar é a escolha da configuração de referência. Como comentado anteriormente, os resultados obtidos, qualquer que seja a configuração adotada,não devem diferir sensivelmente. Na prática, esta decisão está unicamente associada à eficiência computacional da formulação implementada.

Note-se que na análise de corpos de materiais isótropos lineares, é completamente indiferente usar uma ou outra configuração.

Outro aspecto importante em soluções não-lineares é o esforço computacional, quase sempre crítico. Por esse motivo, o usuário de um sistema geral, deve ser qualificado, no sentido de ter conhecimento seguro das técnicas que dispõe, para evitar experiências onerosas. Além disso, em cada problema, o comportamento linear necessita ser conhecido à priori.

Para fins práticos uma análise não-linear deve ser desenvolvida em partes. O usuário pode interromper a execução sistematicamente, armazenando os dados da última configuração. Após controle, as informações são restauradas, e a análise é prossegui da com as modificações que se fizerem necessárias.

O LORANE-NL mostrou-se comparável com outros programas, para resolver sistemas estruturais de considerável complexidade. Entretanto, é bastante difícil estabelecer estimativas precisas do tempo de processamento exigido, já que a segmentação e prioridade da execução de um "job" depende de inúmeros fatores . Assim, por exemplo, o mesmo problema pode requerer tempos de solução diferentes quando processado em circunstâncias diversas. Por outro lado, não resulta razoável comparar programas operando em computadores distintos.

O maior problema analisado no sistema LORANE-NL, até o presente, no que diz respeito ao número de graus de liberdade, foi o sistema estrutural de uma plataforma marítima. Constituiu-se de 367 elementos de pórtico espacial e 250 elementos escalares (molas não-lineares), para simular o comportamento solo-estrutura, resultando um sistema de equações da ordem de 1.200 incógnitas. O tempo de processamento em cada iteração, atualizando todos efeitos não-lineares é aproximadamente igual a 4 minutos.

Pretendeu-se com o LORANE-NL, criar uma linguagem moderna, projetada para computadores de quarta geração, empregando modernos métodos numéricos e técnicas de processamento de dados, que permitem explorar ao máximo as características e potencialidades da memória virtual e da programação dinâmica. Como tal, espera-se que novas capacidades sejam integradas ao sistema.

Encontra-se atualmente em desenvolvimento a implan

tação dos procedimentos relativos à não-linearidade física, no sistema LORANE-NL. Faz-se necessário também, a agregação de um módulo para a determinação de cargas de flambagem linear clássica. Outros desenvolvimentos futuros poderão ser adicionados à linguagem segundo a necessidade com que incidirem na prática.

O desenvolvimento da linguagem LORANE-NL utilizou a experiência obtida nas outras linguagens do sistema, LORANE e LORANE-DINA. Os detalhes da estrutura de dados e os aspectos da programação da linguagem estão inteiramente interconectados, e serão descritos em uma manual geral para todas as linguagens.

BIBLIOGRAFIA

1. NOVOZHILOV, V.V. - Foundations of the Nonlinear theory of Elasticity - Graylock Press, Rochester, N.Y., 1953.

2. TURNER, M.J., CLOUGH, R.W., MARTIN, H.C. and TOPP, L.J. - Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures - J. Aerospace Sci., 23, 805-823, 1956.

3. KLEIN, S. and SYLVESTER, R.J. - The Linear Elastic Dynamic Analysis of Shells of Revolution by the Matrix Displa - cement Method - Air Force Flight Dynamics Lab., TR 66-80, 299-329, 1966.

4. POPOV, P.V. and CHOW, Y.C. - Addendum à referência acima.

5. CLOUGH, R.W. - Analysis of Structural Vibrations and Dynamic Res ponse - Japan - U.S. Seminar on Matrix Methods of Struc tural Analysis and Design, Tokyo, Japan, 1969.

6. TURNER, M.J., DILL, E.H., MARTIN, H.C. and MELOSH, R.J. - Large Deflection Analysis of Complex Structures Subject ed to Heating and External Loads - J. Aerospace Sci. , 27, 97-106, 1960.

7. STRICKLIN , J.A., MARTINEZ, J.E., TILLERSON, J.R., HONG, J.H. and HAISLER, W.E. - Nonlinear Dynamic Analysis of Shells of Revolution by Matrix Displacement Method - Rep. 69-77 Texas Eng. Experiment Station, Texas A & M, 1970.

8. KLEIN, S. - The Nonlinear Dynamics Analysis of Shells of Re- volution with Asymmetric Properties by the Finite Ele ment Method, - The Aerospace Corp. San Bernadino, Cali- fornia, ATR-71-7, 1971.

9. FENVES, S.J., PERRONE, N., ROBINSON, A.R. and SCHNOBRICH,W.C. - Numerical and Computer Methods in Structural Mecha- nics - Academic Press, 1973.

10. PILKEY, W., SACZALSKI, K. and SCHAEFFER, H., - Structural Me chanics Computer Programs - International Conference Structural Mechanics Software, University of Maryland -

University Press of Virginia, Charlottesville, 1974.

11. HIBBITT, H.D., LEVY, N.J. and MARCAL, P.V. - On General Purpose Programs for Nonlinear Finite Element Analysis - NATO Advanced Study Institute, 1971.

12. FELIPPA, C.A. - Numerical Techniques for Geometrically Nonlinear Structural Analysis - International Symposium on Discret Methods in Engineering, Milan, 1974.

13. LOGCHER, R.D. et al - ICES STRUDL II, The Structural Design Language, User's Manual - M.I.T. Research Report, 1968.

14. SWANSON, J.A. - ANSYS - Engineering Analysis System User's Manual - Swanson Analysis Sistems, Inc., Elizabeth, Pa.

15. MARC-CDC - Non-Linear Finite Element Analysis Program - User Information Manual, Publication No. 17309500, Control Data Corp., Minneapolis, Minn.

16. MACNEAL, R.H., ed. - The NASTRAN Theoretical Manual - NASA SP-221(01), National Aeronautics and Space Administration, 1972.

17. SHARIFI, P. and YATES, P. - Nonlinear Thermo-Elastic-Plastic and Creep Analysis by the Finite Element Method -A.I.A.A. Paper No. 73-358, 1973.

18. BATHE, K.J., WILSON, E.L. and IDING, R. - NONSAP - A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Nonlinear System - Report No. UCSESM 74-3, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1974.

19. BATHE, K.J. and WILSON, E.L. - NONSAP - A Nonlinear Structural Analysis Program - Nuclear Engineering and Design, Vol. 29, 1974.

20. BATHE, K.J. - ADINA - A Finite Element Program for Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis - Report No. 82448-1, Acoustics and Vibration Laboratory, Department of Mechanical Engineering, M.I.T., 1975.

21. BATHE, K.J. - An Assessment of Current Finite Element Analysis of Nonlinear Problems in Solid Mechanics - Numerical Solution of Partial Differential Equations - III , Synspade, 1975.

22. BATHE, K.J. and WILSON, E.L. - Numerical Methods in Finite Element Analysis - Prentice Hall, 1976.

23. BATHE, K.J., RAMM, E. and WILSON, E.L. - Finite Element Formulation for Large Deformation Dynamic Analysis - International Journal for Numerical Methods in Engineering , Vol. 9, 353-386, 1975.

24. BATHE, K.J. and OZDEMIR, H. - Elastic-Plastic Deformation Static and Dynamic Analysis - Computers & Structures, Vol. 6, 81-92, 1976.

25. FERRANTE, A.J. - The LORANE System - in The Finite Element Technique, edited by BREBBIA, C.A. and FERRANTE, A.J. , Editora da URGS, 1975.

26. LIMA, E.C.P. - LORANE-DINA - Uma Linguagem Orientada a Análise Dinâmica de Estruturas - Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ , 1977.

27. ARGYRIS, J.H. - ASKA - Automatic System for Kinematic Analysis - Nuclear Engineering and Design, Vol. 10, No. 4 , 441-454, 1969.

28. BALMER, H.A., DOLTSINIS, J. St. and KOENIG, M. - Elasto-Plastic and Creep Analysis with the ASKA Program System - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , Vol. 3, 87-104, 1974.

29. ARGYRIS, J.H., DUNNE, P.C. and ANGELOPOULOS, T. - Dynamic Response by Large Step Integration - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 2, 185-203, 1973.

30. ARGYRIS, J.H., DUNNE, P.C. and ANGELOPOULOS, T. - Non-Linear Oscillations Using the Finite Element Technique - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol . 2, 203-250, 1973.

31. ARGYRIS, J.H. and SCHARPF - Finite Elements in Time and Space - Nuclear Engineering and Design, Vol. 10, 456-464,1969.

32. ARGYRIS, J.H. - Continua and Discontinua - International Conference on Matrix Methods of Structural Mechanics, Dayton, Ohio, Wright-Patterson, 1965.

33. ZIENKIEWICZ, O.C., VALLIAPPAN, S. and KING, I.P. - Elastoplastic Solution of Engineering Problems: Initial Stress Finite Element Approach - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 1, 75-100, 1969.

34. ZIENKIEWICZ, O.C., OWEN, D.R.J., PHILLIPS, D.V. and NAYAK , G.C. - Finite Element Methods in the Analysis of Reactor Vessels - Nuclear Engineering and Design, Vol. 20, 507-542, 1972.

35. ZIENKIEWICZ, O.C. and NAYAK , G.C. - A General Approach to Problems of Large Deformation and Plasticity Using Isoparametric Elements - Third Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Dayton, Ohio, Wright-Patterson, 1971.

36. NAYAK, G.C. and ZIENKIEWICZ, O.C. - Elasto-Plastic Stress Analysis - A Generalization for Various Constitutive Relations Including Strain Softening - International Jour - nal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 5, 113-135, 1972.

37. ZIENKIEWICZ, O.C. - The Finite Element Method in Engineering Science - McGraw-Hill, 1971.

38. ZIENKIEWICZ, O.C., TOO, J. and TAYLOR, R.L. - Reduced Inte - gration Technique in General Analysis of Plates and Shells - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 3, 275-290, 1971.

39. HINTON, E., ROCK, T.A. and ZIENKIEWICZ, O.C. - A Note on Mass Lumping and Related Processes in the Finite Element Method - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 4, 245-249, 1976.

40. BOSSAK, M.A.J. and ZIENKIEWICZ, O.C. - Free Vibrations of Initially Stressed Solids, with Particular Reference to Centrifugal Force Effects in Rotating Machinery - Journal of Stress Analysis, Vol. 8, 245-252, 1973.

41. SHANTARAM, D., OWEN, D.R.J. and ZIENKIEWICZ, O.C. - Dynamic Transient Behavior of Two and Three-Dimensional Structures Including Plasticity, Large Deformation Effects and Fluid Interaction - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 4, 561-578, 1976.

42. ROCK, T.A. and HINTON, E. - A Finite Element Method for the Free Vibration of Plates Allowing for Transverse Shear Deformation - Computers & Structures, Vol. 6, 37-44 , 1976.

43. ODEN, J.T. and SATO, T. - Finite Strains and Displacements of Elastic Membranes by the Finite Element Method - International Journal of Solids and Structures, 471-488 , May, 1967.

44. ODEN, J.T. - Finite Element of Nonlinear Continua - McGraw - Hill Inc., 1972.

45. ODEN, J.T. et al. - Computational Methods in Nonlinear Mechanics - The Texas Institute for Computational Mechanics, 1974.

46. ODEN, J.T. - Numerical Formulation of Nonlinear Elasticity Problems - Journal of Structural Division, A.S.C.E. , vol. 93, 235-255, 1967.

47. ODEN, J.T. - Calculation of Geometric Stiffness Matrices for Complex Structures - A.I.A.A. Journal, Vol. 4,1480-1482 , 1966.

48. ODEN, J.T. and REDDY, J.N. - Variational Methods in Theoretical Mechanics - Springer-Verlag, 1976.

49. FUNG, Y.C. - Foundations of Solid Mechanics - Prentice-Hall, N.J., 1965.

50. MALVERN, L.E. - Introduction to the Mechanics of a Continuos Medium - Prentice-Hall Inc., 1969.

51. ERINGEN, A.C. - Mechanics of Continua - John Wiley, 1967.

52. WEMPNER, G. - Mechanics of Solids with Applications to Thin Bodies - McGraw-Hill, 1973.

53. TIMOSHENKO, S., YOUNG, D.H. and WEAVER, W.JR. - Vibration Problems in Engineering - John Wiley, 1974.

54. MEIROVITCH, L. - Elements of Vibration Analysis - McGraw-Hill Inc., 1975.

55. BREBBIA, C. and CONNOR, J.J. - Geometrically Non-Linear Finite Element Analysis - Journal of Engineering Mechanics Division, A.S.C.E., Vol. 95, April, 1969.

56. TOTTENHAM, H. and BREBBIA, C. - Finite Element Techniques in Structural Mechanics, Stress Analysis Publishers, Southampton , 1971.

57. ALVAREZ, E.A., BREBBIA, C., BENITEZ, M.A.H. e QUIROGA, A.S. - Calculo Dinamico en la Ingenieria Civil - Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid, 1974.

58. BREBBIA, C. and CONNOR, J.J. - Fundamentals of Finite Element Techniques - Butterworth & Co., 1973.

59. BENEDETTI, D., BREBBIA, C. and CEDOLIN, L. - Geometrical Non Linear Analysis of Structures by Finite Elements - Meccanica, 35-44, March, 1972.

60. LANDAU, L. - Análise de Grandes Deformações e Plasticidade por Meio de Elementos Finitos Isoparamétricos - Tese de M.Sc. - COPPE/UFRJ, 1976.

61. LANDAU, L. e EBECKEN, N.F.F. - Análise Não-Linear de Estruturas de Superfície por Meio de Elementos Finitos Tridimensionais Degenerados - XVII Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural e V Simposio Panamericano de Estruturas, Caracas, Venezuela, 1975.

62. LANDAU, L., WROBEL, L.C. e EBECKEN, N.F.F. - Análise Elasto-Plástica de Estruturas de Superfície - Colóquio Franco-Brasileiro de Métodos Numéricos em Engenharia, COPPE/UFRJ, 1976.

63. WROBEL, L.C., LANDAU, L. e EBECKEN, N.F.F. - Comportamento Pós-Crítico de Placas e Cascas pelo Método dos Elementos Finitos - XIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, Salvador, Bahia, 1976.

64. WROBEL, L.C. - Análise Não-Linear de Estruturas Laminares pelo Método dos Elementos Finitos - Tese de M.Sc. a ser defendida - COPPE/UFRJ.

65. HUMPHREYS, J.S. - On Dynamic Snap Buckling of Shallow Arches, - A.I.A.A. Journal, Vol. 4, No. 5, 878-886, May, 1966.

66. HORRIGMOE, G. and BERGAN, P.G. - Incremental Variational Principles and Finite Element Models for Nonlinear Problems , Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , Vol. 7, 201-217, 1976.

67. WITMER, E.A., BALMER, H.A., LEECH, J.W. and PIAN, T.H.H. - Large Dynamic Deformation of Beams, Rings, Plates and Shells - A.I.A.A. Journal, Vol. 1, No. 8, 1848-1857 , August, 1963.

68. GALLAGHER, R.H. - The Finite Element Method in Shell Stability Analysis - Computer & Structures Vol. 3, No. 3 , 543-557, 1973.

69. MURRAY, D.W. and WILSON, E.L. - Finite Element Large Deflection Analysis of Plates - Journal of Engineering Mechanics Division, A.S.C.E., No. 94, 143-165, 1965.

70. FELIPPA, C.A. - Refined Finite Element Analysis of Linear and Non-Linear Two-Dimensional Structures - S.E.S.M. Report, No. 62-22, Berkeley, California, 1966.

71 YAGHMAI, S. - Incremental Analysis of Large Deformations in Mechanics of Solids with Applications to Axisymmetric Shells of Revolution - S.E.S.M. Report, No. 69-17, Berkeley, California, 1968.

72 YAGHMAI, S. and POPOV, E.P. - Incremental Analysis of Large Deflections of Shells of Revolution - International Journal of Solids and Structures, Vol. 7, 1375-1393, 1971.

73. FARHOOMAND, I. - Nonlinear Dynamic Stress Analysis of Two-Dimensional Solids - Ph.D. Dissertation, University of California, Berkeley, 1970.

74. SHARIFI, P. and POPOV, E.P. - Nonlinear Buckling Analysis of Sandwich Arches - Journal of Engineering Mechanics Division, A.S.C.E., No. 97, 1397-1412, 1970.

75. YAMADA, Y. - Incremental Formulation for Problems with Geo - metric and Material Nonlinearities, Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design - 2nd U.S. - Japan Seminar Matrix Meth. Struct. Analysis Design, Univ. of Alabama Press, 325-355, 1972.

76. STRICKLIN, J.A., VON RIESEMANN, W.A., TILLERSON, J.R. and HAISLER, W.E. - Static Geometric and Material Nonlinear Analysis, Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design - 2nd U.S. - Japan Seminar Matrix Meth. Struct. Analysis and Design, Univ. of Alabama Press, 301-324, 1972.

77. HEIFITZ, J.H. and CONSTANTINO, C.J. - Dynamic Response of Nonlinear Media at Large Strains - Journal of Engineering Mechanics Division, A.S.C.E., vol. 98, 1511-1527, 1972.

78. WILSON, E.L., FARHOOMAND, I. and BATHE, K.J. - Nonlinear Dynamic Analysis of Complex Structures - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1, 241-252, 1973.

79. MARÇAL, P.V. - The Effect of Initial Displacements on Problems of Large Deflection and Stability - Technical Report ARPA E54, Division of Engineering, Brown University, 1967.

80. HIBBIT, H.D., MARCAL, P.V. and RICE, J.R. - Finite Element Formulation for Problems of Large Strain and Large Displacements - International Journal of Solids and Structures, Vol. 6, 1069-1086, 1970.

81. LARSEN, P.K. - Large Displacement Analysis of Shells of Revolution, Including Creep, Plasticity and Viscoelasti - city, S.E.S.M. Report, No. 71-22, Department of Civil Engineering , Berkeley, California, 1971.

82. McNAMARA, J.F. - Incremental Stiffness Method for Finite Element Analysis of the Nonlinear Dynamic Problem - Ph. D. Thesis, Brown University, 1972.

83. STRICKLIN, J.A. - Geometrically Nonlinear Static and Dynamic Analysis of Shells of Revolution, High Speed Computing Elastic Structures, 383-411, LIEGE, IUTAM.

84. HAUG, E. and POWELL, G.H. - Finite Element Analysis of Nonlinear Membrane Structures - S.E.S.M. Report No. 72-7 , Berkeley, California, 1972.

85. BATHE, K.J., RAMM, E. and WILSON, E.L. - Finite Element Formulations for Large Displacements and Large Strain Analysis - S.E.S.M. Report, No. 73.14, Berkeley, California, 1973

86. DUPUIS, G.A., HIBBITT, H.D., McNAMARA, S.F. and MARCAL, P.V. - Nonlinear Material and Geometric Behavior of Shell Structures - Computers & Structures, Vol. 1, 223-239 , 1971.

87. GALLAGHER, R.H. and PADLOG, J. - Discrete Element Approach to Structural Stability Analysis - A.I.A.A. Journal, Vol.1 No. 6, June, 1963.

88. GALLAGHER, R.H., GELLATLY, R.A., PADLOG, J. and MALLET, R.H. - A Discrete Element Procedure for thin Shell Instability Analysis - A.I.A.A. Journal, Vol. 5, No. 1, January, 1967.

89. SCHIMIDT, L.A., BOGNER, F.K. and FOX, R.L. - Finite Deflection Structural Analysis Using Plate and Cylindrical Shell Discrete Elements - Proceeding of AIAA/ASME 8th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Palm Springs, California 29-31, 1967.

90. NAVARATNA, D.R. - Elastic Stability of Shells of Revolution by the Variational Approach Using Discrete Elements - ASRL TR 139.1, Department of Aeronautics and Astronautics, M.I.T., 1966.

91. ARCHER, R.R. - On the Numerical Solution of the nonlinear Equations for Shells of Revolution - Journal of Mathematics and Physics, Vol. 40, 1962.

92. WISSMAN, J.W. - Nonlinear Structural Analysis: Tensor formulation, Proceedings of Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics - Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, October, 1965.

93. ODEN, J.T. - Finite Element Applications in Nonlinear Structural Analysis - Proceedings of the Conference on Finite Element Methods, Vanderbilt University, Tennessee , 1969.

94. STRICKLIN, J.A., HAISLER, W.E., MCDOUGALL, H.R. and STEBBINS F.J. - Nonlinear Analysis of Shells of Revolution by the Matrix Displacement Method - A.I.A.A. Journal,Vol.6 No. 12, 1968.

95. BOGNER, F.K., MALLETT, R.H., NINICH, M.D. and SCHMIDT, L.A.- Development and Evaluation of Energy Search Methods of Nonlinear Structural Analysis - AFFDL - TR - 65-113.

96. KOITER, W.T. - On the Stability of Elastic Equilibrium - Thesis, English Translation N.A.S.A., TT - F-10 833 , 1967.

97. KOITER, W.T. - Elastic Stability and Postbuckling Behavior - Proceedings of the Symposium on Nonlinear Problems, University of Wisconsin Press, 1963.

98. THOMPSON, J.M.T. and WALKER, A.C. - The Nonlinear Perturbation Analysis of Discrete Structural Systems - International Journal of Solids & Structures, Vol. 4, 1968.

99. WALKER, A.C. - A Nonlinear Finite Element Analysis of Shallow Circular Arches - International Journal of Solids and Structures, Vol. 5, 1969.

100. CONNOR, J. and MORIN, M. - Perturbations Techniques in the Analysis of Geometrically Nonlinear Shells - I.U.T.A.M. High Speed Computing on Elastic Structures, University of Liege, Belgium, 1970.

101. PIAN, T.H.P. and TONG, P. - Variational Formulation of Finite-Displacement Analysis - I.U.T.A.M., High Speed Computing on Elastic Structures, University of Liege, Belgium, 1970.

102. MARTIN, H.C. - Finite Element Formulation of Geometrically Nonlinear Problems - Proceedings Japan U.S. Seminar on Matrix Methods in Structural Analysis and Design,Tokyo, 1969.

103. MONDKAR, D.P. and POWELL, G.H. - Large Capacity Equation Solver for Structural Analysis - Computers and Structures, vol. 4, 699-728, 1974.

104. MONDKAR, D.P. and POWELL, G.H. - Towards Optimal In-Core Equation Solving - Computers and Structures, vol. 4 531-548, 1974.

105. NEWMARK, N.M. - A Method of Computation for Structural Dynamics - A.S.C.E. 85, No. EM3, 67-94, 1959.

106. HOUBOLT, J.C. - A Recurrence Matrix Solution for the Dynamic Response of Elastic Aircraft - Journal Aeronautic Science 17, 540-550, 1950.

107. NICKELL, R.E. - On the Stability of Approximation Operators in Problems of Structural Dynamics - International Journal of Solids and Structures, Vol. 7, 301-319, 1971.

108. GOUDREAU, G.L. and TAYLOR, R.L. - Evaluation of Numerical Methods in Elastodynamics - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 3, 69-97, 1972.

109. DUNHAM, R.S., NICKELL, R.E. and STICKLER, D.C. - Integration Operators for Transient Structural Response - Computers & Structures, Vol. 2, 1-15, 1972.

110. NAGARAJAN, S. and POPOV, E.P. - Non-Linear Dynamic Analysis of Axisymmetric Shells - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 9, 535-550, 1975.

111. NICKELL, R.E. - Nonlinear Dynamics by Mode Superposition - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , Vol. 7, 107-129, 1976.

112. NICKELL, R.E. - Directed Integration Methods in Structural Dynamics - A.S.C.E. EM2, 303-317, April, 1973.

113. WEEKS, G. - Temporal Operators for Nonlinear Structural Dynamics Problems - A.S.C.E., EM-5, 1087-1104, October,1972.

114. HARTZMAN, M. and HUTCHINSON, J.R. - Nonlinear Dynamics of Solids by the Finite Element Method - Computers & Structures, Vol. 2, 47-77, 1972.

115. CLOUGH, R.W. and WILSON, E.L. - Dynamic Finite Element Analysis of Arbitrary Thin Shells - Computers & Structures, Vol. 1, 33-56, 1971.

116. YEH, C.H. - Large Deflection Analysis of Thin Shells Using Finite Element Method - Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley, 1970.

117. CONSTANTINO, C.J. - Two Dimensional Wave Propagation Through Nonlinear Media - Journal Computational Physics, Vol.4, No. 2, 147-170, 1969.

118. CHANG, G.C. and GILBERT, F.S. - Finite Element Approach to Wave Motions in Elastic-Plastic Continua - A.I.A.A. Aerospace Meeting, 68-145, January, 1968.

119. FULTON, R.E. - Numerical Analysis of Shells of Revolution - I.U.T.A.M. Symposium High-Speed Computing Elastic Structures, Liege, Belgium, 1970.

120. BUSHNELL, D. - Nonlinear Axisymmetric Behavior of Shells of Revolution - A.I.A.A., Vol. 5, No. 2, 432-439, 1967.

121. LEECH, J.W., WITMER, E.A. and PIAN, T.H.H. - A Numerical Calculation Technique for Large Elastic-Plastic Dynamically-Induced Deformations of General Thin Shells - A.I.A.A., Vol. 6, No. 1, 2352-2359, 1968.

122. WILSON, E.L. - A Computer Program for the Dynamic Stress Analysis of Underground Structures - Report S.E.L. 68-1, University of California, Berkeley, 1968.

123. TILLERSON, J.R. and STRICKLIN, J.A. - Numerical Methods of Integration Applied in the Nonlinear Dynamics Analysis of shells of Revolution - Report N71-10166, Texas University, 1970.

124. JOHNSON, D.E. - A Proof of the Stability of the Houboult Method,- A.I.A.A., Vol. 4, 1450-1451, 1966.

125. JOHNSON, D.E. and GRIEF, R. - Dynamic Response of a Cylindrical Shell: Two Numerical Methods - A.I.A.A., Vol. 4 , 486-494, 1966.

126. BALL, R.E. - Comparison of Two Numerical Methods for the Time-Wise Integration of Transiente Structural Response - A.I.A.A., Vol. 9, 2068-2069, 1971.

127. GEAR, C.W. - The Automatic Integration of Stiff Ordinary Differential Equations - Information Processing, Vol. 68 , 187-193, 1969.

128. JENSEN, P.S. - Transient Analysis of Structures by Stiffly Stable Methods - Computers and Structures, Vol. 4, 615-626, 1974.

129. JENNINGS, A. - Frame Analysis Including Change of Geometry - Journal of Structural Division ASCE, 94, No. ST3, 627 - 644, 1968.

130. MALLET, R.H. and MARCAL, R.V. - Finite Element Analysis of Nonlinear Structures - Journal of Structural Division, ASCE, 94, No. ST9, 2081-2105, 1968.

131. POWELL, G.H. - Theory of Nonlinear Structures - Journal of Structural Division, ASCE, 95, No. ST12, 2687-2701,1969.

132. EBNER, A.M. and UCCIFERRO, J.J. - A Theoretical and Numerical Comparison of Elastic Nonlinear Finite Element Methods - Computers & Structures, Vol. 2, 1043-1061,1972.

133. CONNOR, J.J., LOGCHER, R.D. and CHAN, S.C. - Nonlinear Analysis of Elastic Framed Structures - Journal of the Structural Division, A.S.C.E., ST6, 1525-1547, 1968.

134. TEZCAN, S.S. and OVUNC, B. - An Iteration Method for the Nonlinear Buckling of Framed Structures, Space Structures - R.M. Davis ed., John-Wiley & Sons Inc., N.Y.,1967.

135. TEZCAN, S.S. and MAHAPATRA, B.C. - Tangent Stiffness Matrix for Space Frame Members - Journal of the Structural Division, A.S.C.E., Vol. 95, ST6, 1257-1270, 1969.

136. TEZCAN, S.S. and KRISHNA, P. - Discussion of Numerical Solution of Nonlinear Structures - by POSKITT, T.J., Journal of the Structural Division, A.S.C.E., Vol. 94, 1613 1623, 1968.

137. POSKITT, T.J. - Numerical Solution of Nonlinear Structures - Journal of the Structural Division, A.S.C.E., ST4, 69-94, 1967.

138. MANTILLA, E.P. - Um Método Iterativo para Análise de Não-Linearidade Geométrica em Estruturas Reticulares - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1974.

139. FELIPPA, C.A. - Finite Element Analysis of Three-Dimensional Cable Structures - International Conference on Computational Methods in Nonlinear Mechanics, The University of Texas at Austin, 1974.

140. MARTIN, H.C. - On the Derivation of Stiffness Matrices for the Analysis of Large Deflection and Stability Problems , Proceedings - Conference of Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio , 1965.

141. ORAN, C. - Tangent Stiffness in Space Frames - Journal of Structural Division, A.S.C.E., Vol. 99, ST6, 987-1001 , 1973.

142. ORAN, C. and KASSIMALI, A. - Large Deformations of Framed Structures Under Static and Dynamic Loads - Computers & Structures, Vol. 6, 539-547, 1976.

143. CHU, K. and RAMPETSREITER - Large Deflection Buckling of Space Frames - Journal of Structural Division, A.S.C.E. ST12, 2701-2722, 1972.

144. ASHWELL, D.G. and GALLAGHER, R.H. - Finite Elements for Thin Shells and Curved Members - John Wiley & Sons, 1976.

145. BRITVEC, S.J. - The Stability of Elastic Systems - Pergamon Press Inc., 1973.

146. BULSON, P.S. - The Stability of Flat Plates - Chatto & Windus, London, 1970.

147. PRZEMIENIECKI, J.S. - Theory of Matrix Structural Analysis - McGraw-Hill Book Company, 1968.

148. CHIN-TSANG, L. - Analysis of Inflatable Shells by the Finite Element Method - Ph.D. Thesis, State University of New York at Buffalo, 1971.

149. BYRNE, G.D. and HALL, C.A. - Numerical Solution of Systems of Nonlinear Algebraic Equations - Academic Press, 1973.

150. ISAACSON, E. and KELLER, H.B. - Analysis of Numerical Methods - John Wiley & Sons Inc., 1966.

151. WILKINSON, J.H. - The Algebraic Eigenvalue Problem - Clarendon Press, Oxford, 1965.

152. HUSEYIN, K. - Nonlinear Theory of Elastic Stability - Noordhoff International Publishing, 1975.

153. CROLL, J.G. and WALKER, A. - Elements of Structural Stability, - Macmillan Publ., London, 1972.

154. THOMPSON, J.M.T. and HUNT, G.W. - A General Theory of Elastic Stability - John Wiley Publ., London, 1973.

155. MONTERO, L.F.R. - Analisis Sismico de Estructuras - Tese de D.Sc.. COPPE/UFRJ, 1974.

156. HALBRITTER, A.L. - Analisis de Cascaras Gruesas y Finas con Elementos Tridimensionales - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1974.

157. LIMA, S.R.F:F. - Método dos Elementos Finitos Aplicado a Problemas de Cascas e Estruturas Laminares Utilizando-se Elementos Triangulares Planos - Tese de M.Sc., COPPE / UFRJ, 1972.

158. HURTY, W.C. and RUBINSTEIN, M.F. - Dynamics of Structures - Prentice-Hall, 1967.

159. COOK, R.D. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis - John Wiley & Sons Inc., 1974.

160. CLOUGH, R.W. and PENZIEN, J. - Dynamics of Structures - McGraw-Hill Inc., 1975.

161. VENANCIO FILHO, F. - Análise Matricial de Estruturas - Almeida Neves Ed., 1975.

162. LOCK, A.C. - and SABIR, A.B. - Algorithm for the Large Deflection Geometrically Nonlinear Plane and Curved Structures, in the Mathematics of Finite Element and Applications - Edited by WHITEMAN, J.R., Academic Press, 1973.

163. MATSUI, T. and MATSUOKA, O. - A New Finite Element Scheme for Instability Analysis of Thin Shells - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 10, 145-170, 1976.

164. HAISLER, W.E., STRICKLIN, J.A. and KEY, J.E. - Displacement Incrementation in Non-Linear Structural Analysis by the Self-Correcting Method - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, 3-10, 1977.

165. STRICKLIN, J.A., HAISLER, W.E. and VON RIESEMANN, W.A. - Self-Correcting Initial-Value Formulation in Nonlinear Structural Mechanics - A.I.A.A. Journal, 9, 2066-2067, 1971.

166. BELYTSCHKO, T. and SCHWER, L. - Large Displacement, Transient Analysis of Space Frames - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, 65-84, 1977.

167. KEY, S.W. and BEISINGER, Z.E. - The Transient Dynamics Analysis of Thin Shells by the Finite Element Method - 479-

518, Proceedings of the Third Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Paterson Air Force Base, Ohio, 1971.

168. ROBERTS, Y.M. and ASHWELL, D.G. - The Use of the Finite Element Mid-Increment Stiffness Matrices in the Post-Buckling Analysis of Imperfect Structures - International Journal of Solids & Structures, Vol. 7, 805-823 , 1971.

169. HITCHINGS, D. and WARD, P. - The Nonlinear Steady-State Response of Cable Networks - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 9, 191-201, 1976.

170. CHAN, A.S.L. and TRBOJEVIC, V.M. - Thin Shell Finite Element by the Mixed Method Formulation - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , Vol. 10, 75.103 , 1977.

171. MORRIS, N.F. - The Use of Modal Superposition in Nonlinear Dynamics - Computer & Structures, Vol. 7, 65-72, 1977 .

172. STRICKLIN, J.A. and HAISLER, W.E. - Formulations and Solution Procedures for Nonlinear Structural Analysis - Computer & Structures, Vol. 7, 125-136, 1977.

173. EBECKEN, N.F.F. - Processo Semi-Analítico para Análise de Estruturas pelo Método dos Elementos Finitos - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1973.

174. SEN, H.K. and GADRE, S.H. - Analysis of Non-Linear Structures by Newton's Method - Variational Methods in Engineering, Edited by Department of Civil Engineering, University of Southampton, 1972.

175. FERRANTE, A.J., GOMES FRANCO, J.S. et al. - LORANE: Uma linguagem Orientada para Análise Estrutural - Curso de Pós Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, julho, 1973.

176. FERRANTE, A.J., GOMES FRANCO, J.S. et al. - LORANE: Um Enfoque Integral para a Solução de Problemas de estruturas por Computador - XVI Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural, Buenos Aires, 1974.

177. FERRANTE, A.J. - On General Systems for Finite Element Analysis: The POL Approach - Proceedings International Symposium on Discrete Methods in Engineering, CISE, Milão, Itália, 1974.

178. FERRANTE, A.J. - The LORANE System - Computer System Seminar, Applied Mechanics Center, Southampton, 1974.

179. FERRANTE, A.J. e PRATES DE LIMA, E.C. - Uma Familia de Linguajes Orientada para Ingenieria Civil - Reunion Conjunta - XVII Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural e V Simposio Panamericano de Estructuras, Caracas, 1975.

180. PRATES DE LIMA, E.C. e FERRANTE, A.J. - Facilidades para Análise Dinâmica no Sistema LORANE - III Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COPPE/UFRJ, 1975.

SIMBOLOGIA

$^{o}\rho$, $^{t}\rho$	- massas específicas nas configurações de tempo 0 , t .
^{o}A , ^{t}A , $^{t+\Delta t}A$	- áreas do corpo nas configurações de tempo 0 , t , e t+Δt .
^{o}V , ^{t}V , $^{t+\Delta t}V$	- volumes do corpo nas configurações de tempo 0 , t e t+Δt .
$^{o}x_i$, $^{t}x_i$, $^{t+\Delta t}x_i$	- coordenadas cartesianas nas configurações de tempo 0 , t e t+Δt .
$^{o}x_i^k$, $^{t}x_i^k$, $^{t+\Delta t}x_i^k$	- coordenadas cartesianas do nó k nas configurações de tempo 0 , t , e t+Δt .
$^{t}u_i$, $^{t+\Delta t}u_i$	- componentes do vetor de deslocamentos da configuração de tempo 0 às configurações de tempo t e t+Δt .
u_i	- incremento da componente de deslocamentos $u_i = {}^{t+\Delta t}u_i - {}^{t}u_i$
$^{t}u_i^k$	- componente de deslocamentos do ponto nodal k na configuração de tempo t .
$^{t}_{o}u_{i,j}$, $^{t+\Delta t}_{o}u_{i,j}$	- derivadas da componente de deslocamentos das configurações de tempo t e t+Δt com relação a coordenada $^{o}x_j$.
$^{o}u_{i,j}$, $^{t}u_{i,j}$, $^{t+\Delta t}u_{i,j}$	- derivada do incremento de deslocamentos com relação as coordenadas $^{o}x_j$, $^{t}x_j$ e $^{t+\Delta t}x_j$.
u , v , w , ru , rv , rw	- deslocamentos correspondentes a u_1 , u_2 e u_3 e respectivas rotações.
$^{t+\Delta t}_{o}f_i$	- componente do vetor de forças de volume por unidade de massa no tempo t+Δt referido a configuração de tempo 0 .

${}^{t+\Delta t}_{o}t_i$ - componente do vetor de forças de superfície por unidade de área no tempo $t+\Delta t$ referido a configuração de tempo 0 .

${}^{t}\tau_{ij}$, ${}^{t+\Delta t}\tau_{ij}$ - componentes do tensor de tensões de Cauchy nas configurações de tempo t e $t+\Delta t$.

${}^{t}\sigma_{ij}$, ${}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}$ - componentes do tensor de tensões nos tempos t e $t+\Delta t$ calculadas assumindo-se deslocamentos infinitesimais.

${}^{t}_{o}S_{ij}$, ${}^{t+\Delta t}_{o}S_{ij}$ - componentes do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff nas configurações de tempo t e $t+\Delta t$ referidas a configuração de tempo 0 .

${}^{t}_{o}\varepsilon_{ij}$, ${}^{t+\Delta t}_{o}\varepsilon_{ij}$ - componentes do tensor de deformações de Green-Lagrange nas configurações de tempo t e $t+\Delta t$ referidas à configuração de tempo 0 .

${}_{o}\varepsilon_{ij}$, ${}^{t}\varepsilon_{ij}$ - componentes do tensor de deformações de Green-Lagrange incrementais referidas as configurações de tempo 0 e t .

${}_{o}e_{ij}$, ${}^{t}e_{ij}$ - parte linear de ${}_{o}\varepsilon_{ij}$, ${}^{t}\varepsilon_{ij}$.

${}_{o}\gamma_{ij}$, ${}^{t}\gamma_{ij}$ - parte não-linear de ${}_{o}\varepsilon_{ij}$, ${}^{t}\varepsilon_{ij}$.

D_{ijrs} - componente do tensor constitutivo constante.

${}^{t}_{o}D_{ijrs}$, ${}^{t}_{t}D_{ijrs}$ - componentes do tensor constitutivo no tempo 0 e t .

${}_{o}D_{ijrs}$, ${}^{t}D_{ijrs}$ - componentes do tensor constitutivo tangente no tempo t referidos as configurações de tempo 0 e t .

${}^{t}_{o}\underset{\sim}{B}_L$, ${}^{t}_{t}\underset{\sim}{B}_L$ - matrizes deformação-deslocamento, lineares na configuração de tempo t , referidas às configurações de tempo 0 e t .

$_{o}^{t}\underset{\sim}{B}_{NL}$, $_{t}^{t}\underset{\sim}{B}_{NL}$ - matrizes deformação-deslocamento, não-lineares na configuração de tempo t , referidas às configurações de tempo 0 e t .

$\underset{\sim}{D}$ - matriz das propriedades tensão-deformação do material

$_{o}\underset{\sim}{D}$, $_{t}\underset{\sim}{D}$ - matrizes tangentes das propriedades tensão-deformação no tempo t referidas as configurações de tempo 0 e t .

$^{t}\underset{\sim}{F}$, $_{o}^{t}\underset{\sim}{F}$, $_{t}^{t}\underset{\sim}{F}$ - vetores de forças nodais no tempo t .

$_{o}^{t}\underset{\sim}{K}_{L}$, $_{t}^{t}\underset{\sim}{K}_{L}$ - matrizes de rigidez de deformação linear na configuração de tempo t referidas as configurações de tempo 0 e t .

$_{o}^{t}\underset{\sim}{K}_{NL}$, $_{t}^{t}\underset{\sim}{K}_{NL}$ - matrizes de rigidez de deformação não-linear na configuração de tempo t referidas às configurações de tempo 0 e t .

$_{o}^{t}\underset{\sim}{S}$, $_{o}^{t}\hat{\underset{\sim}{S}}$ - matriz e vetor de tensões do 2º tensor de Piola-Kirchhoff na configuração de tempo t referidas a configuração de tempo 0.

$^{t}\hat{\underset{\sim}{\Sigma}}$ - vetor de tensões no tempo t para não-linearidades físicas.

$^{t}\underset{\sim}{\tau}$, $^{t}\hat{\underset{\sim}{\tau}}$ - matriz e vetor de tensões de Cauchy na configuração de tempo t .

$^{t}\underset{\sim}{K}$ - matriz de rigidez tangente no tempo t .

$\underset{\sim}{C}$ - matriz de amortecimento .

$^{t+\Delta t}\underset{\sim}{R}$ - vetor de forças externas no tempo t+Δt

ξ , η e ζ - coordenadas locais.

N_i - função de interpolação relativa ao ponto nodal i .

E - módulo de elasticidade.

ν - coeficiente de Poisson.